

# AVALIAÇÃO 2 - CONTROLE 1

Aluno: Vitor de Sousa França

Matrícula: 20180041455

27 de Outubro de 2021

## Problemas PID:

Considerando-se o sistema:

$$G = \frac{0.25(K_d s^2 + K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+5)}$$

Em que  $K_d = 150.88$ ,  $K_p = 1373.92$  e  $K_i = 5000$

**a) Utilize o MATLAB e realize as simulações do sistema em malha fechada no domínio do tempo contínuo.**

Primeiro, foram definidas as funções de transferência (FT) da planta, do controlador e então obteve-se o ganho em malha aberta (MA) e em malha fechada (MF), posto que esse conjunto de FT serão utilizados por várias questões. O bloco de código 1 apresenta

Código 1: Definindo FTs

```
1  %Planta
2  Nump = 0.25;
3  Denp = conv([1 1], [1 5]);
4  H = tf(Nump, Denp);
5
6  %Controlador
7  Kp = 1373.92;
8  Ki = 5e3;
9  Kd = 150.88;
10
11 Numc = [Kd Kp Ki];
12 Denc = [1 0];
13 Gc = tf(Numc, Denc);
14
15 %Ganho em Malha Aberta
16 Gma = H*Gc;
17
18 %Ganho em Malha Fechada
19 Gmf = Gma/(1+Gma);
```

Para observar o comportamento do sistema em MF, utilizou-se da entrada a degrau, como mostrado no bloco de código 2.

## Código 2: Resposta ao degrau

```
1 %% Q a)
2 [y,t] = step(Gmf, 0.35);
3 figure
4 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
5 legend('c(t)')
6 grid
```

Ao utilizar `[y,t] = step(Gmf, 0.35);` a função `step` não gera um gráfico mas sim, retorna vetores “y” e “t” referentes às posição dos pontos. Essa abordagem foi utilizada nesse e nos próximos códigos com a finalidade de realizar ajustes no gráfico como o de adicionar legenda e o de aumentar a espessura da curva. O resultado obtido pode ser visto na Figura 1.

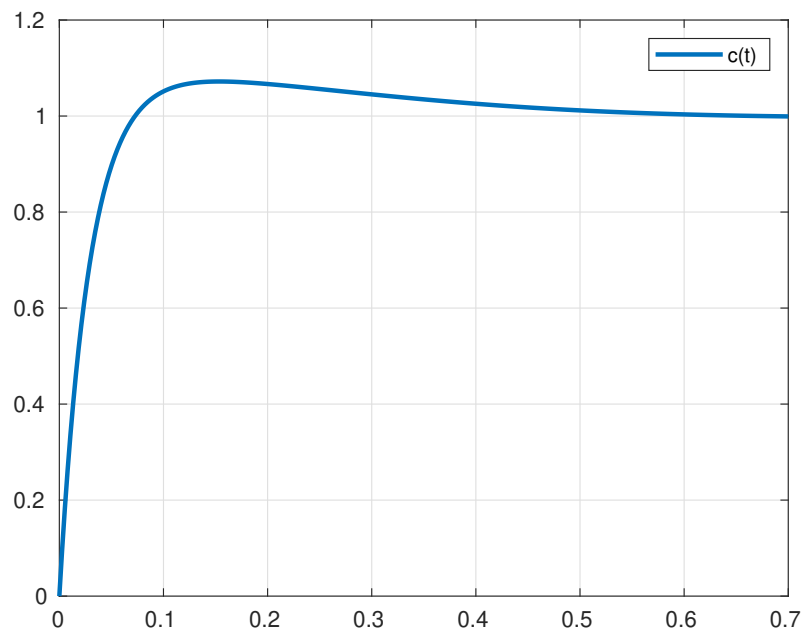


Figura 1: Gráfico da resposta ao degrau do sistema

## b) Determine o LGR sem e com controlador

O lugar geométrico das raízes (LGR) pode ser facilmente obtido através da função `rlocus` nativa do matlab. O sistema sem o controlador é constituído unicamente da planta do sistema. O LGR do sistema com o controlador, por outro lado, é o produto no domínio “s”, da FT do controlador com a FT da planta. O bloco de código 3, apresenta o script desenvolvido para obtenção dos gráficos.

Código 3: LGRs do sistema

```
1 %% Q b)
2 %LGR sem controlador
3 figure
4 rlocus(H)
5 title('LGR sem controlador')
6 axis([-6 0.1 -5 5])
7 grid
8 %LGR com controlador
9 figure
10 rlocus(Gma)
11 axis([-6 0.1 -5 5])
12 title('LGR com controlador')
13 grid
```

A Figura 2 apresenta o LGR do sistema sem o controlador e a Figura 3 apresenta o LGR do sistema com o controlador.

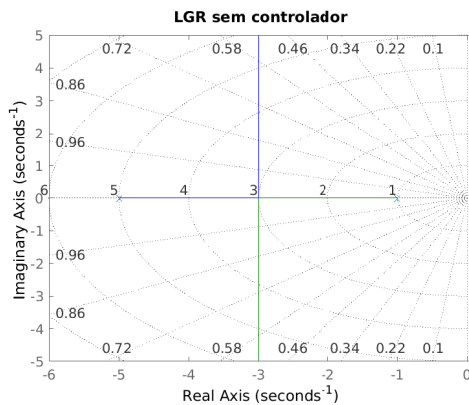


Figura 2: LGR do sistema sem o controlador

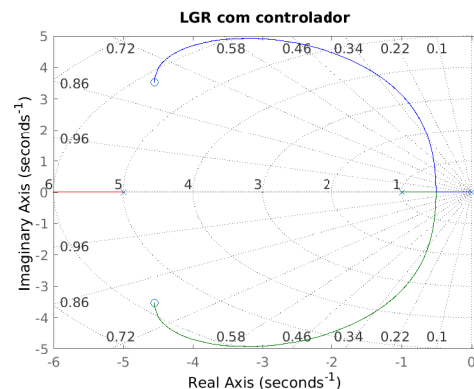


Figura 3: LGR do sistema com o controlador

## c) Determine o tempo de amostragem.

O tempo de amostragem pode ser determinado de diferentes formas, desde que seja suficiente para não ocasionar problemas de *aliasing*, ou seja, sobreposição dos espectros. Para isso, sabe-se pelo Teorema de Nyquist que o período de amostragem “ $T_s$ ” deve ser tal que a frequência de amostragem “ $f_s$ ” seja o dobro da frequência de corte “ $f_c$ ” do sistema,  $\frac{1}{T_s} = f_s \geq f_c$ .

O Teorema de Nyquist é bem fundamentado e pode ser amplamente utilizado, porém outra abordagem é amplamente utilizada no ambiente prático, dado a não trivialidade da obtenção da frequência de corte do sistema. Sob essa abordagem é feita uma aproximação de que o tempo de amostragem deve ser menor ou

igual ao tempo de subida da resposta ao degrau do sistema “ $T_r$ ”, dividido por dez:  $T_s = \frac{T_r}{10}$ . Essa será a abordagem utilizada para todas as questões.

O bloco de código 4, apresenta a obtenção do tempo de amostragem. Nesse primeiro momento, verificou-se além do tempo de subida, a frequência de corte do sistema, para corroborar o fato de que o Teorema de Nyquist está sendo cumprido.

Código 4: Tempo de amostragem

```
1 %% Q c)
2 figure
3 bode(Gmf)
4 set(findall(gcf,'type','line'), 'linewidth', 2)
5 grid
6 % Tempo de amostragem
7 Ts = stepinfo(Gmf).RiseTime/10;
```

O tempo de amostragem é um atributo de nome `RiseTime` do método nativo `stepinfo(Gmf)`, dessa forma, pode-se obtê-lo utilizando `stepinfo(Gmf).RiseTime`. O tempo de subida da resposta ao degrau foi de  $T_r = 48$  ms, então, o tempo de amostragem foi  $T_s = 4,8$  ms e a frequência de amostragem  $f_s = 209.1734$  Hz. Ao verificar o diagrama de bode, Figura 4, será possível determinar a frequência de corte do sistema.

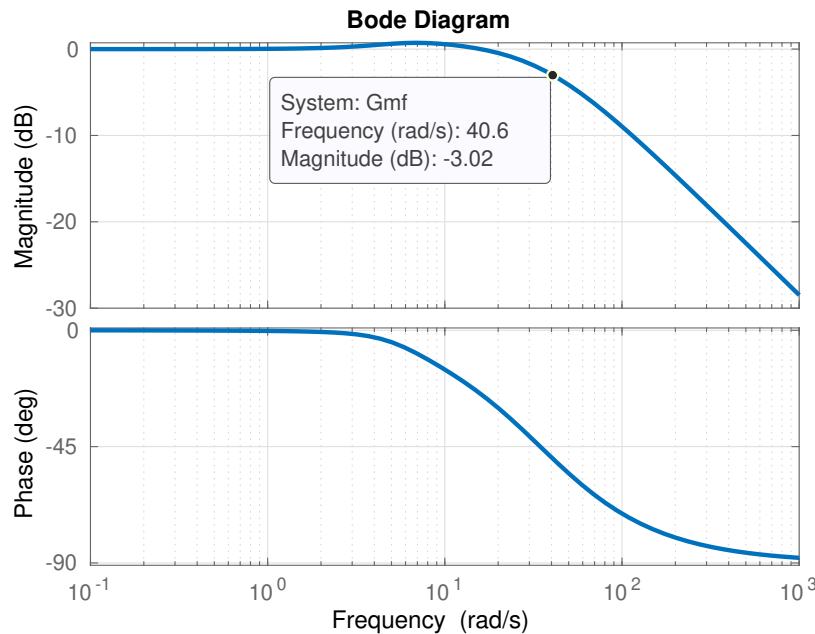


Figura 4: Diagrama de Bode

A frequência de corte é aquela no qual o ganho do sistema é de  $-3$  dB. Pelo gráfico, o ponto está aproximadamente na frequência de corte do sistema  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{40.6}{2\pi} = 6.4617$  Hz.

Podemos verificar que a técnica amplamente utilizada em ambientes práticos nos retorna frequências de amostragens muito maiores que a frequência de corte e garantem assim que a discretização esteja satisfazendo ao Teorema de Nyquist. De toda forma, é interessante perceber que ao utilizar a aproximação dada por esse método o nosso resultado não será o mais otimizado e poderá pecar em termos de custo de projeto.

#### d) Discretize o controlador.

O controlador PID, é um controlador clássico que no domínio “s” de Laplace, é definido pela FT apresentada na equação 1

$$G_c(s) = kp + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (1)$$

Para discretizar o controlador, devemos passar a FT do domínio “s” para o domínio discreto ‘z’, seguindo a correspondência  $s = \frac{1}{T_s} \ln(z)$ , em quem “ $T_s$ ” é o período de amostragem. Porém, visto que iremos obter resultados não lineares, essa transformação poderá ser custosa computacionalmente. Então, frequentemente são utilizadas aproximações para essa equação. Nessa avaliação será utilizado o método de Tustin, também conhecido como aproximação bilinear ou trapezoidal, apresentada pela equação 2.

$$s = \frac{T_s}{2} \cdot \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \quad (2)$$

Realizando a substituição da equação 2 em 1, obtemos a equação 3.

$$G_c(z) = \frac{(k_p + \frac{T_s k_i}{2} + \frac{2k_d}{T_s})z^2 + (T_s k_i - \frac{4K_d}{T_s})z - k_p + \frac{T_s k_i}{2} + \frac{2k_d}{T_s}}{z^2 - 1} \quad (3)$$

Ao substituir os valores do tempo de amostragem e dos ganhos  $k_p$ ,  $k_i$ ,  $k_d$ , na equação 3 obtem-se a FT discreta 4.

$$G_c(z) = \frac{(6,451 \cdot 10^4)z^2 - (1,262 \cdot 10^5)z - 6,176 \cdot 10^4}{z^2 - 1} \quad (4)$$

A discretização também pode ser realizada através de uma função `c2d` nativa do Matlab. Utilizando `c2d(Gc, Ts, 'tustin')` em que `Gc` foi a função de transferência do controlador no domínio “s” e `Ts` o período de amostragem, obteve-se a mesma função de transferência 4.

e) Realize simulações do sistema em malha fechada e faça uma comparação entre a resposta no tempo contínuo e discreto.

A simulação realizada é apresentada através do bloco de código 5 em que o sistema é discretizado e verifica-se sua resposta a uma entrada degrau. Com a finalidade de comparação, foi realizado um gráfico das respostas contínua e discretizada sobrepostas que pode ser visto na Figura 5.

Código 5: Simulações do Sistema em MF e em MA.

```
1
2 Gmfz = c2d(Gmf, Ts, 'zoh');
3 [yz,tz] = step(Gmfz);
4 figure
5 stairs(tz, yz, 'LineWidth', 2);
6 legend('c(kT)')
7 grid
8 %% Q f)
9 figure
10 plot(t, y, 'LineWidth', 2)
11 hold on
12 stairs(tz, yz, 'LineWidth', 2);
13 hold off
14 legend('c(t)', 'c(kT)')
15 grid
```

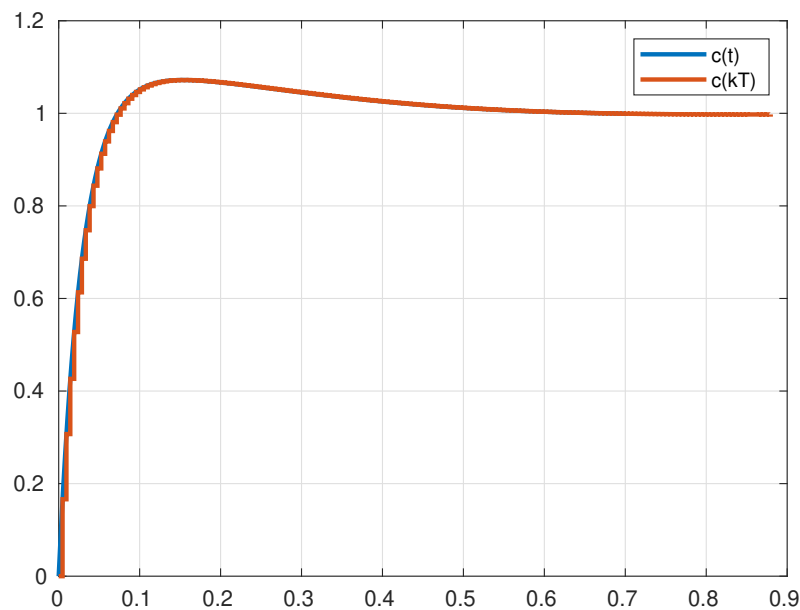


Figura 5: Gráfico das respostas ao degrau dos sistemas contínuo e discreto

Além da resposta gráfica, faz-se interessante avaliar numericamente o erro para que seja possível verificar a qualidade da aproximação. Para isso, construiu-se um *script* capaz de calcular o erro absoluto médio percentual (MAPE), que pode ser visto no bloco de código 6.

#### Código 6: Erro Absoluto Médio Percentual

```
1 ape = abs((yz - y(1:length(yz)))/y(1:length(yz)));  
2 mape = mean(ape(isfinite(ape))); %retira o erro percentual do y=0
```

Algumas considerações devem ser feitas para compreender o bloco de código 6. Pela alteração do tempo de amostragem da função step o tamanho dos vetores da saída do sistema em tempo contínuo e em tempo discreto diferem. Portanto, foi necessário realizar um *slice* do maior vetor para que assim fosse possível realizar as operações necessárias.

Junto a isso, como a saída do sistema em  $t = 0s$  é  $y(0) = 0$ , a divisão pelo vetor de saídas gera um elemento que tende ao infinito, para retirá-lo só é realizada a média dos valores finitos através da função `isfinite` que retorna um vetor de booleanos, em que “1’s” estarão na posição do vetor que são finitos e “0’s” na posição dos infinitos. Ao fim, obteve-se um MAPE = 0.024%, um valor muito baixo de erro.

#### f) Realize a análise de estabilidade do sistema usando o método de Jury.

O método de Jury permite avaliar a estabilidade de sistemas discretos ao analisar o polinômio característico. Existem alguns critérios que devem ser satisfeitos para que o sistema seja estável. Os critérios são:

$$Q(1) > 0 \quad (1)$$

$$(-1)^n Q(-1) > 0 \quad (2)$$

$$|a_0| < a_n \quad (3)$$

$$|b_0| > b_{n-1} \quad (4)$$

$$|c_0| > c_{n-2} \quad (5)$$

$$\vdots \quad \vdots$$

O polinômio característico do sistema que está sendo analisado pode ser visto na equação 5.

$$Q(z) = z^3 - 2.804z^2 + 2.616z - 0.8114 \quad (5)$$

A quantidade de critérios é dada pelo grau do polinômio mais um. Para o nosso caso, em que o polinômio característico é de terceiro grau, são portanto, quatro critérios.

- O primeiro critério:  $Q(1) = 6e - 4 > 0$ , satisfeito;
- O segundo critério:  $-1^3 Q(-1) = 5.2314 > 0$ , também trata-se de uma verdade;
- O terceiro critério:  $|a_0| = 0.8114 < 1 = |a_n|$ , satisfeito.

Os próximos critérios só são possíveis de ser avaliados através da Tabela 1. Para nosso caso só é necessário verificar mais um critério.

| Tabela 1: Análise de estabilidade |         |        |         |         |
|-----------------------------------|---------|--------|---------|---------|
|                                   | $z^0$   | $z^1$  | $z^2$   | $z^3$   |
| 1                                 | -0,8114 | 2,616  | -2,804  | 1       |
| 2                                 | 1       | -2,804 | 2,616   | -0,8114 |
| 3                                 | -0,3408 | 0,682  | -0,3416 | 0       |

- O quarto critério:  $0.3416 > 0.3408$ , satisfeito.

## Problemas PI:

Para os problemas apresentados, realizar:

- Simulação usando MATLAB/Simulink realizando análise dos resultados com relação a estabilidade e resposta dinâmica do sistema
- Analisar o LGR sem/com controlador
- Determine o tempo de amostragem e realize a discretização dos controladores. Comparar com a solução continua.
- Discretizar os sistemas (controlador e planta) e analisar a estabilidade usando o método de Jury e Routh Hurwitz.

## Problema 1:

Para esse problema, o modelo de um motor possui como FT a equação 6.

$$G_p = \frac{4}{s^3 + 3s^2 + 10s} \quad (6)$$

A FT de MF, com um controlador proporcional é o visto na equação 7.

$$G_{mf} = \frac{4kp}{s^3 + 3s^2 + 10s + 4kp} \quad (7)$$

Foi visto no desenvolvimento da questão que para o sistema ser estável o ganho proporcional deve estar no intervalo:  $0 < kp < 7,5$ . Escolheu-se ter um pólo em -2 e por isso foi determinado  $kp = 4$ .



a)

A estabilidade do sistema foi verificada através de uma entrada ao degrau. Pelo desenvolvimento analítico, o erro em regime estacionário deve ser zero a uma entrada ao degrau, espera-se obter o mesmo resultado pela simulação no MATLAB através do Código 7.

Código 7: Análise da estabilidade

```
1 %FT sem controlador
2 num = 4;
3 den = [1 3 10 0];
4 G = tf(num,den);
5 %FT com controlador
6 kp = 4;
7 Gmf = tf(kp*num,[1 3 8 4*kp]);
8
9 % a)
10 [y,t] = step(Gmf);
11 figure
12 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
13 legend('c(t)')
14 grid
```

A Figura 6 apresenta a resposta do sistema ao degrau.

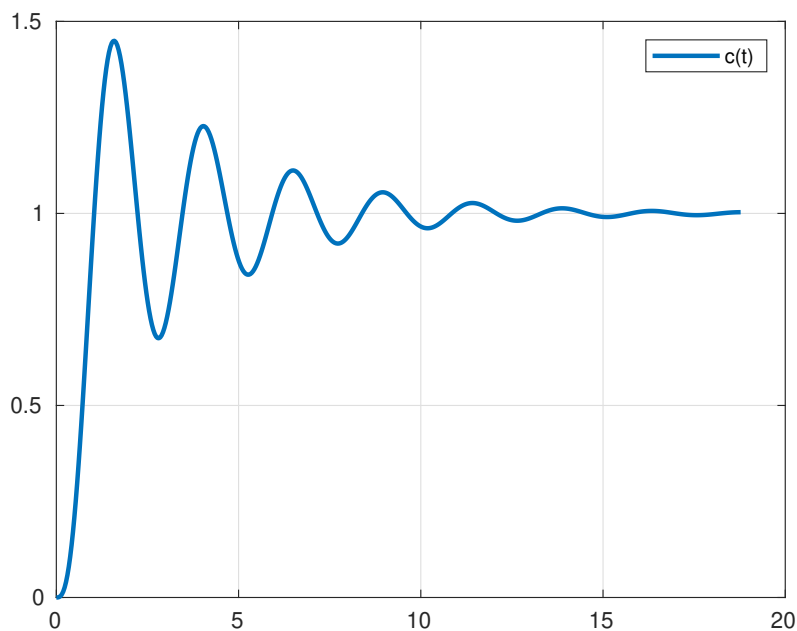


Figura 6: Gráfico da resposta ao degrau do sistema

Podemos verificar que o erro em regime estacionário do sistema tende a zero, assim como determinado através do cálculo analítico. Ainda, podemos verificar que o sistema utilizando um controlador proporcional mantém a existência de um sobrevalor percentual.

Através do `stepinfo` verifica-se que o sobrevalor percentual é precisamente de 44,93% e o tempo de subida

de  $T_r = 0,6$  s.

b)

Como já feito anteriormente na avaliação, através da função `rlocus` é possível traçar o LGR do sistema. A Figura 7 é o LGR do sistema sem o controlador. Pode-se verificar que o sistema possui três pólos, com um deles na origem e os outros dois, um par complexo. Como estão no semiplano esquerdo o sistema é estável à resposta ao degrau. Porém o pólo no zero torna o sistema mais lento.

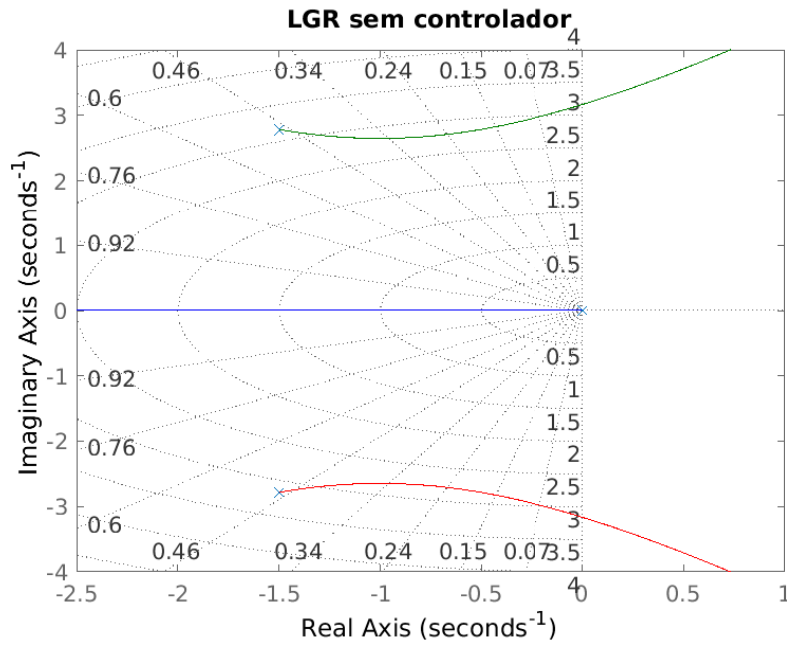


Figura 7: Lugar geométrico das raízes sem controlador

O objetivo do controlador proporcional foi colocar um pólo em -2. Pelo LGR do sistema em MA, o pólo do zero é o único que ao variar o ganho se desloca sobre o eixo real. Pode-se verificar através da Figura 8 que o objetivo foi alcançado.

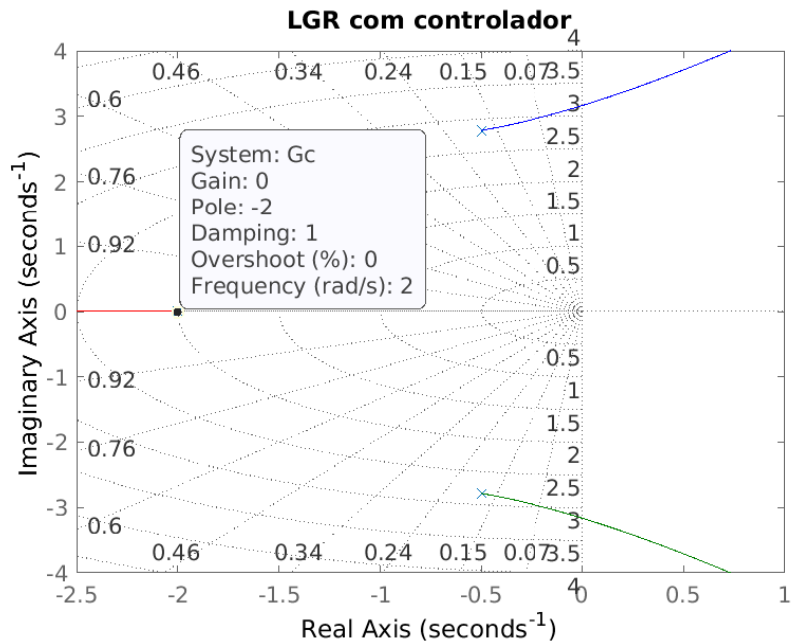


Figura 8: Lugar geométrico das raízes com controlador

c)

Como anteriormente, o tempo de amostragem foi determinado pelo tempo de subida dividido por dez. O sistema foi discretizado utilizando o segurador de ordem zero (ZoH). O Código 8 apresenta a discretização do modelo e a criação do gráfico da resposta do sistema a entrada degrau.

Código 8: Análise da estabilidade

```

1  Ts = stepinfo(Gmf).RiseTime/10; %Tr = 0.6000
2  Gmfz = c2d(Gmf,Ts, 'zoh');
3  [yz,tz] = step(Gmfz); %salvando resultado do step
4
5  figure %fazendo uma figura para comparar
6  plot(t, y, 'LineWidth', 2)
7  hold on
8  stairs(tz, yz, 'LineWidth', 2);
9  hold off
10 legend('c(t)', 'c(kT)')
11 grid
12
13 %utilizando MAPE para avaliacao numerica
14 ape = abs((yz - y(1:length(yz)))/y(1:length(yz)));
15 mape = mean(ape(isfinite(ape))); %retira o erro percentual do y=0
16 %mape = 3.2708e-04

```

O tempo de amostragem obtido foi de 60 ms. O MAPE foi de  $3,27 \cdot 10^{-2} \%$ . A FT em MF disceta é apresentada na equação 8. A Figura 9 apresenta a resposta dos sistema contínuo e discretizado sobrepostos.

$$G_{mf}(z) = \frac{0.0005503z^2 + 0.002103z + 0.0005029}{z^3 - 2.807z^2 + 2.646z - 0.8353} \quad (8)$$

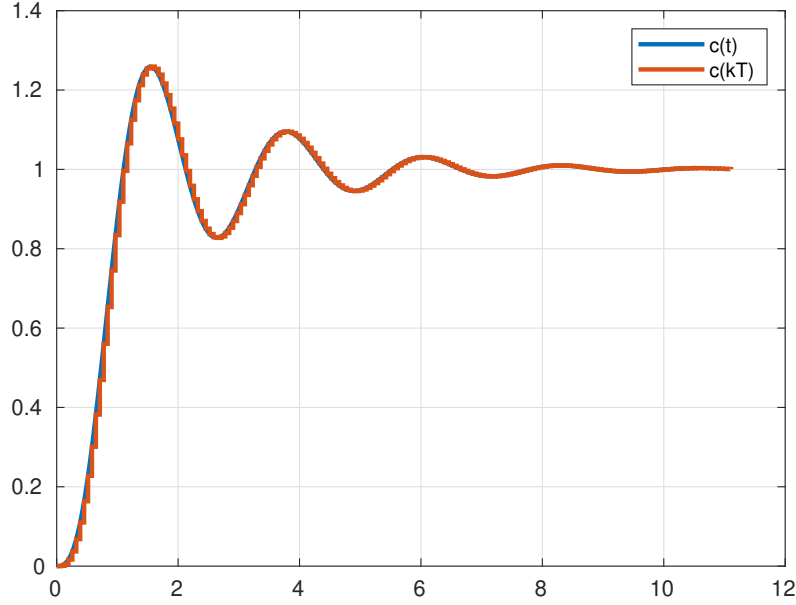


Figura 9: Resposta ao degrau

Visualmente o sistema discreto se aproxima da resposta contínua. Porém, como vem sendo feito nessa avaliação, verificamos a qualidade da discretização através do MAPE. Para essa discretização o MAPE foi de  $3,27 \cdot 10^{-2} \%$ . Um baixo valor de erro.

d)

O polinômio característico do sistema contínuo pode ser visto na equação 9. O método de Routh consiste em verificar se há mudança de sinal na primeira coluna da tabela, se não ocorre o sistema será estável, se ocorrer, instável. A Tabela 2 apresenta o desenvolvimento do resultado obtido

$$Q(s) = s^3 + 3s^2 + 10s + 16 \quad (9)$$

Tabela 2: Análise de estabilidade pelo método de Routh

|   |      |    |
|---|------|----|
| 1 | 1    | 10 |
| 2 | 3    | 16 |
| 3 | 4,67 |    |

Verificamos que o sistema contínuo é estável.

O polinômio característico do sistema discreto pode ser visto na equação 10.

$$Q(z) = z^3 - 2.807z^2 + 2.646z - 0.8353 \quad (10)$$

A Tabela 3 apresenta o desenvolvimento do método de Jury para esse sistema.

|   | Tabela 3: Análise de estabilidade |        |         |         |
|---|-----------------------------------|--------|---------|---------|
|   | $z^0$                             | $z^1$  | $z^2$   | $z^3$   |
| 1 | -0,8353                           | 2,646  | -2,807  | 1       |
| 2 | 1                                 | -2,807 | 2,646   | -0,8353 |
| 3 | -0,3013                           | 0,5968 | -0,3023 | 0       |

Para verificar a estabilidade, como nosso polinômio é de ordem 3, devemos conferir os 4 critérios.

- O primeiro critério:  $Q(1) = 3,7 \cdot 10^{-3} > 0$ , satisfeito;
- O segundo critério:  $-1^3 Q(-1) = 7,2883 > 0$ , satisfeito;
- O terceiro critério:  $|a_0| = 0,8353 < 1 = |a_3|$ , satisfeito;
- O quarto critério:  $|b_0| = 0,3023 > 0,3013 = |b_3|$ , satisfeito.

Como o sistema discreto atende os quatro critérios de Jury necessários, é um sistema estável.

## Problema 2:

A FT da planta é vista na equação 11.

$$G_p = \frac{1}{(2.105s + 1)(0.095s + 1)} \quad (11)$$

Foi adicionado um controlador PI para obter uma configuração de polos e zeros específica. A equação 12 apresenta o ganho do controlador.

$$G_c = kp + \frac{ki}{s} \quad (12)$$

A FT do sistema em MF é então vista na equação 13.

$$T(s) = \frac{5kp(s + \frac{kp}{ki})}{s^3 + 11s^2 + 5(1 + kp)s + 5ki} \quad (13)$$

Os ganhos do controlador foram determinado  $kp = 1.25$  e  $ki = 2.5$ . É pedido na questão a avaliação do erro em regime estacionário a uma entrada degrau com ganho 5.

a)

Como no problema anterior, a estabilidade do sistema foi verificada através de uma entrada ao degrau. Pelo desenvolvimento analítico, o erro em regime estacionário deve ser zero a uma entrada ao degrau, espera-se obter o mesmo resultado pela simulação no MATLAB através do Código 9.

Código 9: Análise da estabilidade

```
1  clc;
2  clear;
3  close all;
4
5  %FT sem controlador
6
7  %FT da planta
8  Gp = tf(1, conv([2.105 1],[0.095 1]));
9
10 %FT do controlador
11 kp = 1.25;
12 ki = 2.5;
13 Gc = tf([kp ki],[1 0]);
14
15 Gma = Gp*Gc;
16 Gmf = Gma/(1+Gma);
17
18 %a) step com amplitude 5
19 A = 5;
20 [y,t] = step(A*Gmf);
21 figure
22 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
23 legend('c(t)')
24 grid
```

A Figura 10 apresenta a resposta do sistema ao degrau. Através dela podemos ver que como o esperado o erro em regime a uma entrada degrau foi nulo.

Através do `stepinfo` verifica-se que o sobrevalor percentual é precisamente de 24,97% e o tempo de subida de  $T_r = 1,13$  s.

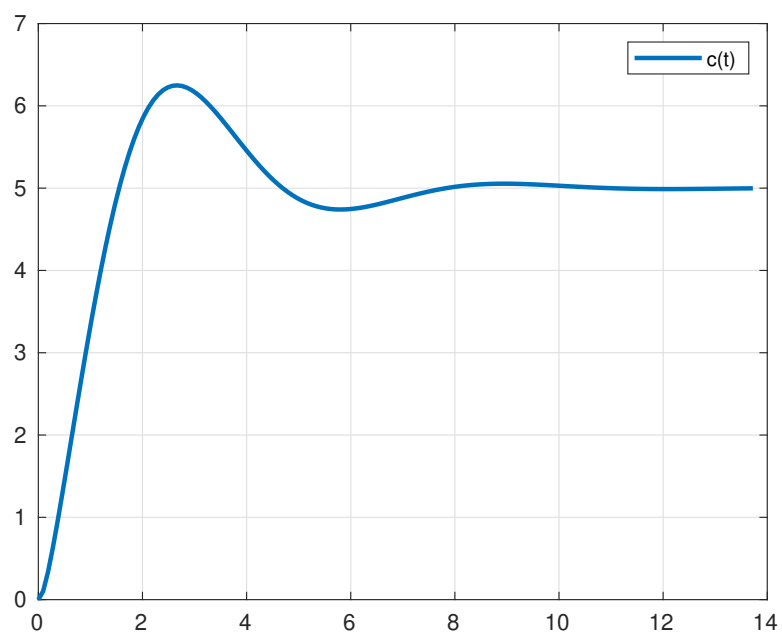


Figura 10: Gráfico da resposta ao degrau do sistema

b)

A Figura 11 é o LGR do sistema sem o controlador. Através dela pode-se verificar que o sistema possui dois pólos puramente reais no semiplano esquerdo do domínio  $s$ . Junto a isso, podemos ver que os pólos deslizam sobre o eixo real ao variar o ganho, até se encontrarem e tornarem-se um par complexo.

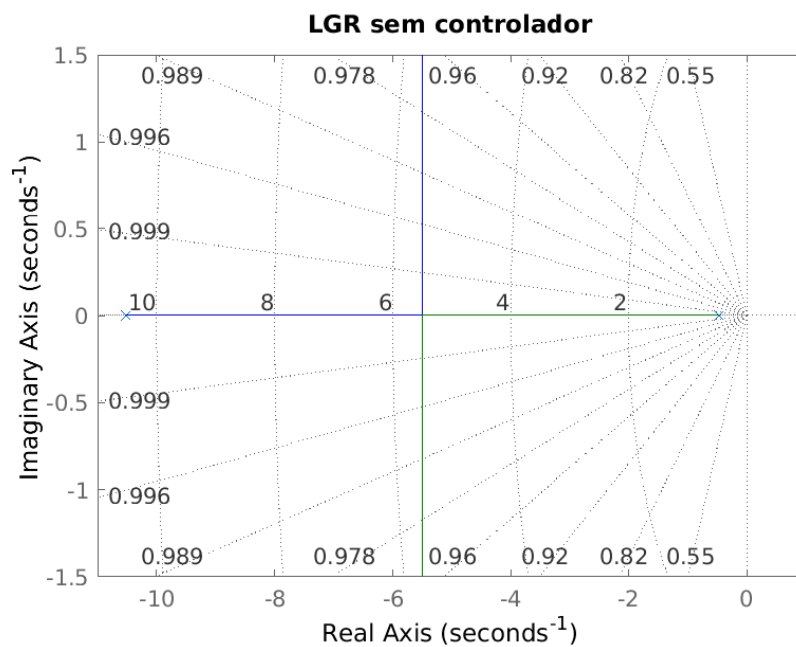


Figura 11: Lugar geométrico das raízes sem controlador

Após adicionar o controlador o sistema tem o LGR apresentado na Figura 12



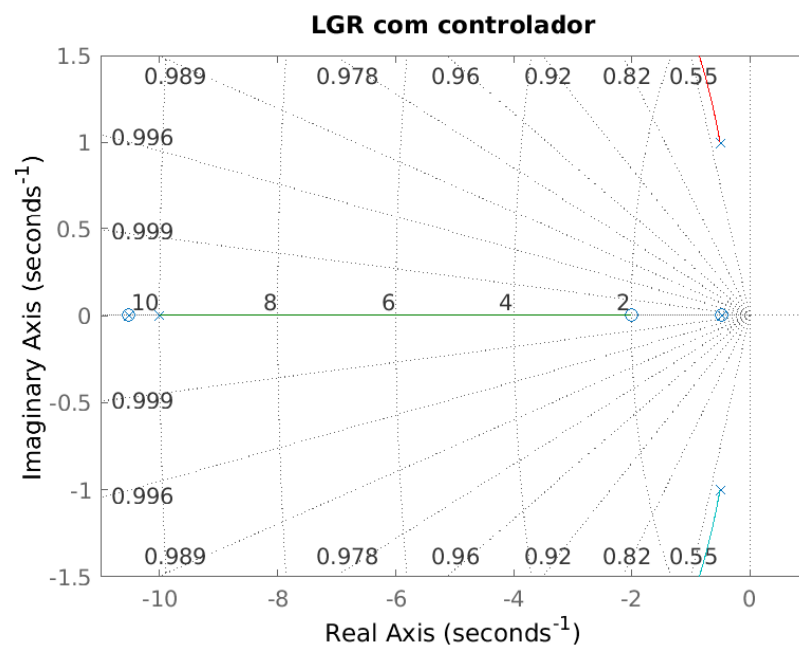


Figura 12: Lugar geométrico das raízes com controlador

c)

O tempo de amostragem foi determinado pelo tempo de subida dividido por dez. O sistema foi discretizado utilizando o segurador de ordem zero (ZoH). O Código 10 apresenta a discretização do modelo e a criação do gráfico da resposta do sistema a entrada degrau.

Código 10: Análise da estabilidade

```
1 Ts = stepinfo(Gmf).RiseTime/10; %Tr = 1.1259
2 Gmfz = c2d(Gmf,Ts, 'zoh');
3 [yz,tz] = step(A*Gmfz); %salvando resultado do step
4
5 figure %fazendo uma figura para comparar
6 plot(t, y, 'LineWidth', 2)
7 hold on
8 stairs(tz, yz, 'LineWidth', 2);
9 hold off
10 legend('c(t)', 'c(kT)')
11 grid
12
13 %utilizando MAPE para avaliacao numerica
14 ape = abs((yz - y(1:length(yz)))/y(1:length(yz)));
15 mape = mean(ape(isfinite(ape))); %retira o erro percentual do y=0
16 %mape = 4.7206e-04
```

O tempo de amostragem obtido foi de 113 ms. A FT em MF disceta é apresentada na equação 14 A Figura 13 apresenta a resposta dos sistema contínuo e discretizado sobrepostos.

$$G_{mf}(z) = \frac{0.02922z^2 - 0.002386z - 0.01672}{z^3 - 2.203z^2 + 1.503z - 0.2898} \quad (14)$$

d)

O polinômio característico do sistema contínuo pode ser visto na equação 15. A Tabela 4 apresenta o desenvolvimento do método de Routh.

$$Q(s) = s^3 + 11s^2 + 11.25s + 12.5 \quad (15)$$

Tabela 4: Análise de estabilidade pelo método de Routh

|   |       |       |
|---|-------|-------|
| 1 | 1     | 11.25 |
| 2 | 11    | 12.5  |
| 3 | 10.11 |       |

Verificamos que o sistema contínuo é estável.

O polinômio característico do sistema discreto pode ser visto na equação 16.

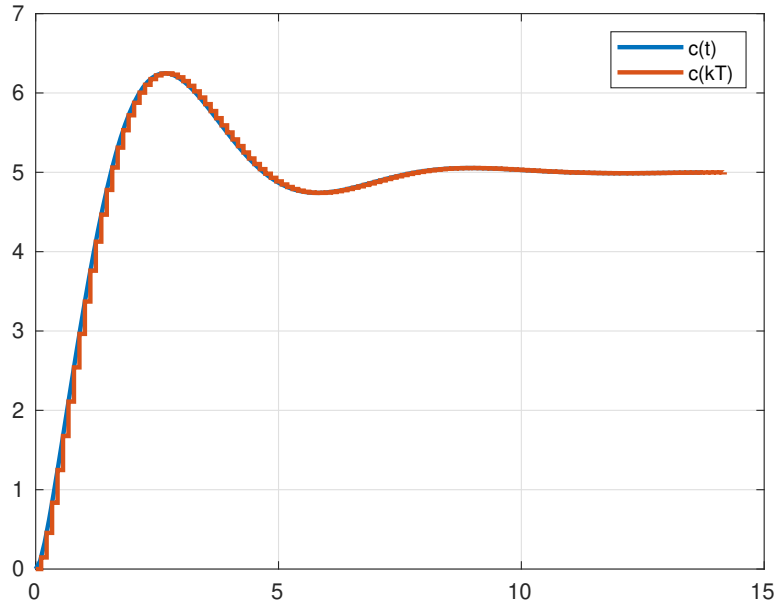


Figura 13: Resposta ao degrau

$$Q(z) = z^3 - 2.203z^2 + 1.503z - 0.2898 \quad (16)$$

A Tabela 5 apresenta o desenvolvimento do método de Jury para esse sistema.

Tabela 5: Análise de estabilidade pelo método de Jury

|   | $z^0$   | $z^1$  | $z^2$  | $z^3$   |
|---|---------|--------|--------|---------|
| 1 | -0,2898 | 1,503  | -2,203 | 1       |
| 2 | 1       | -2,203 | 1,503  | -0,2898 |
| 3 | -0,8646 | 1,7674 | -0,916 | 0       |

Para verificar a estabilidade, como nosso polinômio é de ordem 3, devemos conferir os 4 critérios.

- O primeiro critério:  $Q(1) = 0,0102 \cdot 10^{-3} > 0$ , satisfeito;
- O segundo critério:  $-1^3 Q(-1) = 4,9957 > 0$ , satisfeito;
- O terceiro critério:  $|a_0| = 0,2898 < 1 = |a_3|$ , satisfeito;
- O quarto critério:  $|b_0| = 0,916 > 0,8646 = |b_2|$ , satisfeito.

Como o sistema discreto atende os quatro critérios de Jury necessários, é um sistema estável.

### Problema 3:

O problema 3 pede para determinar um controlador proporcional para que o sistema torne-se estável. A FT da planta é apresentado na equação 17.

$$G_p = \frac{(s + 20)}{s(s + 10)^2} \quad (17)$$

Adicionando um controlador P, ou seja,  $G_c = kp$ , para controlar o sistema obtemos a FT de MF vista na equação 18.

$$T(s) = \frac{kp(s + 20)}{s^3 + 20s^2 + (100 + kp)s + 20kp} \quad (18)$$

Foi visto no desenvolvimento que qualquer ganho,  $kp > 0$ , é o suficiente para manter o sistema estável. Como a questão não definiu um ganho, determinou-se livremente  $kp = 2$ . A questão pede então para obter o erro em regime estacionário para uma entrada degrau unitário e de uma rampa.

a)

Para verificar a estabilidade foi observada a resposta do sistema a uma entrada a degrau que pode ser visto na Figura 14. Além disso também foi verificado a resposta do sistema a uma entrada rampa, como pode ser visto na Figura 15. Podemos ver que o erro em regime estacionário para uma entrada degrau é nulo e para uma entrada rampa é constante.

Analiticamente foi visto  $e_{rampa}(\infty) = \frac{5}{kp} = 2,5$ . O script pode ser visto no bloco de código 11.

Código 11: Análise da estabilidade

```
1 % a)
2 num = [1 20];
3 den = [1 20 100 0];
4
5 Gp = tf(num, den);
6 Gc = 2;
7
8 Gma = Gc*Gp;
9 Gmf = Gma/(1+Gma);
10
11 [y,t] = step(Gmf);
12 figure
13 plot(t, y, 'LineWidth', 2);
14 legend('c(t)')
15 grid
16
17 s = tf('s');
18 [yr, tr] = step(Gmf/s); %entrada de rampa
19 figure
20 plot(tr, yr, 'LineWidth', 2);
21 hold on
```

```
22 plot(0:50,0:50,'LineWidth', 2);  
23 legend('c(t)', 'r(t)')  
24 hold off  
25 axis([0 50 0 50])  
26 grid
```

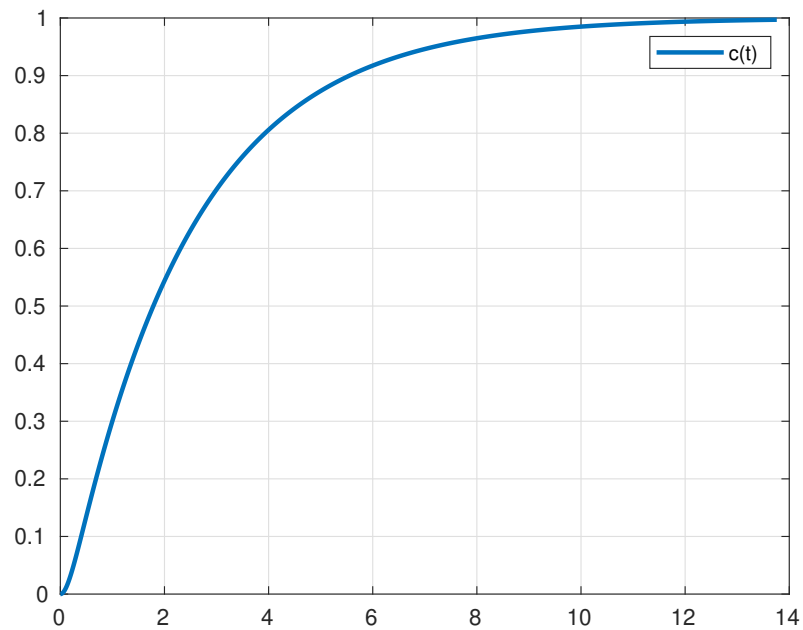


Figura 14: Gráfico da resposta ao degrau do sistema

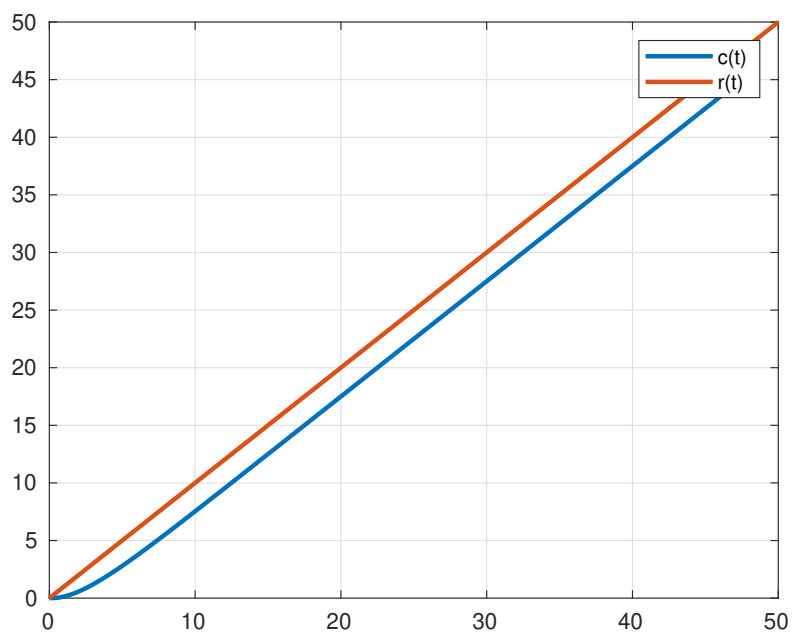


Figura 15: Gráfico da resposta a uma rampa.

b)

A Figura 16 mostra o LGR do sistema sem controlador e a Figura 17 o LGR com controlador. Pode-se verificar que a realimentação removeu um polo e o ganho deslocou os polos sobre o caminho traçado pelo LGR.

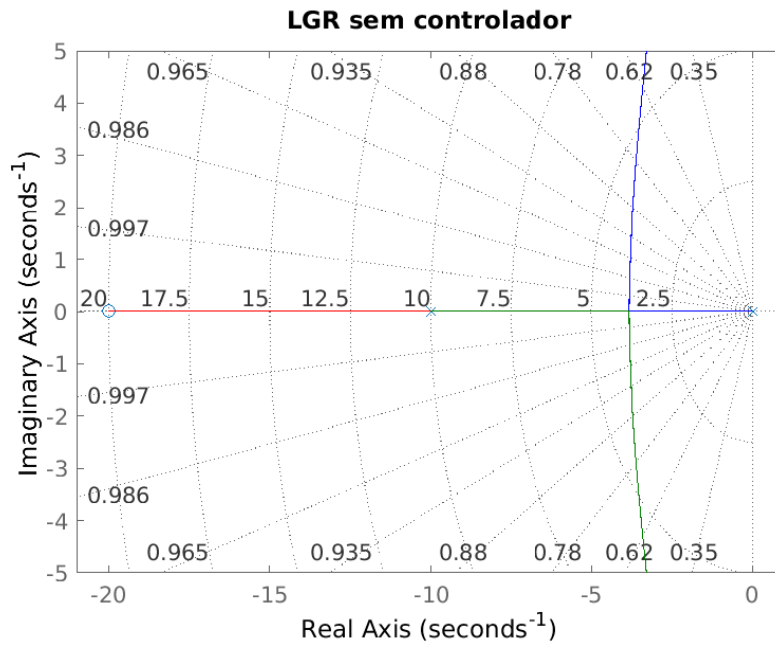


Figura 16: Lugar geométrico das raízes sem controlador.

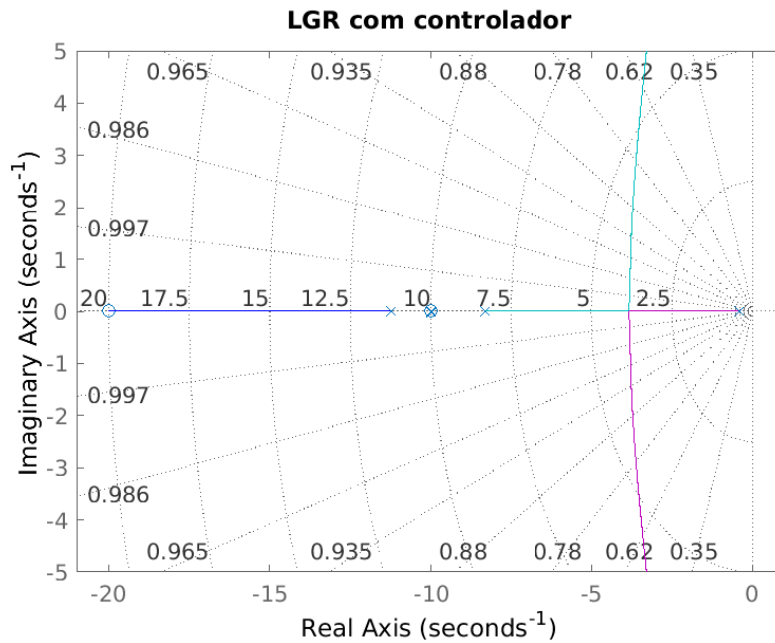


Figura 17: Lugar geométrico das raízes com controlador

c)

O tempo de amostragem foi determinado da mesma forma que anteriormente. O Código 12 apresenta a discretização do modelo e a criação do gráfico da resposta do sistema a entrada degrau.

### Código 12: Análise da estabilidade

```

1 Ts = stepinfo(Gmf).RiseTime/10; %Tr = 5.1535
2 Gmfz = c2d(Gmf, Ts, 'zoh');
3
4 [yz,tz] = step(Gmfz); %salvando resultado do step
5
6 figure %fazendo uma figura para comparar
7 plot(t, y, 'LineWidth', 2)
8 hold on
9 stairs(tz, yz, 'LineWidth', 2);
10 hold off
11 legend('c(t)', 'c(kT)')
12 grid
13
14 %utilizando MAPE para avaliacao numerica
15 ape = abs((yz - y(1:length(yz)))/y(1:length(yz)));
16 mape = mean(ape(isfinite(ape))); %retira o erro percentual do y=0
17 %mape = 0.3376

```

O tempo de amostragem obtido foi de 515 ms. A FT em MF disceta é apresentada na equação 19 A Figura 18 apresenta a resposta dos sistema contínuo e discretizado sobrepostos.

$$G_{mf}(z) = \frac{0.1411z^4 + 0.05131z^3 - 0.0003512z^2 - 1.191e-06z + 8.55e-09}{z^5 - 0.8307z^4 + 0.02297z^3 - 0.0002165z^2 + 8.36e-07z} \quad (19)$$

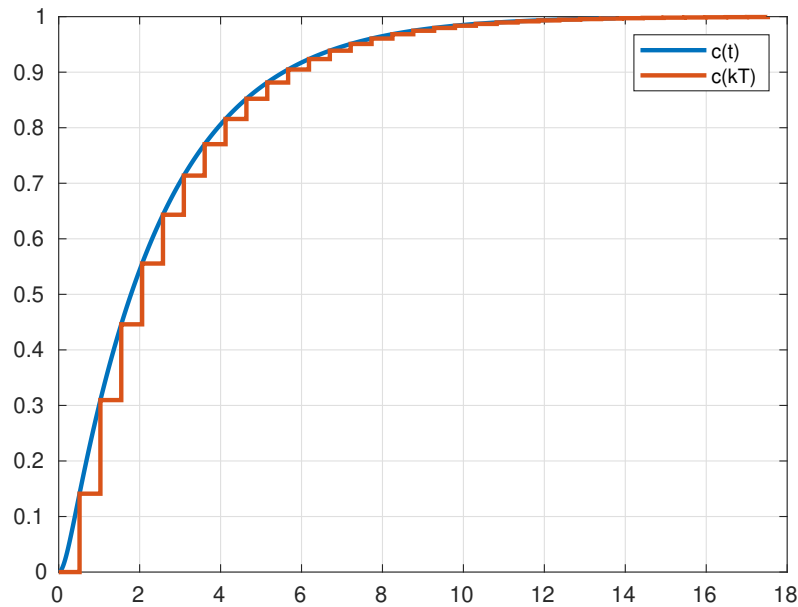


Figura 18: Resposta ao degrau

O MAPE do sistema discreto em relação ao sistema contínuo foi de  $33,76 \cdot 10^{-2}$



d)

O polinômio característico do sistema contínuo pode ser visto na equação 20. A Tabela 6 apresenta o desenvolvimento do método de Routh.

$$Q(s) = s^5 + 40s^4 + 602s^3 + 4080s^2 + 1.1e04s + 4000 \quad (20)$$

Tabela 6: Análise de estabilidade pelo método de Routh

|   |      |        |        |
|---|------|--------|--------|
| 1 | 1    | 602    | 11.000 |
| 2 | 40   | 4080   | 4000   |
| 3 | 500  | 10.900 | 0      |
| 4 | 4058 | 0      | 0      |

Verificamos que o sistema contínuo é estável.

O polinômio característico do sistema discreto pode ser visto na equação 21.

$$Q(z) = z^5 - 0.8307z^4 + 0.02297z^3 - 0.0002165z^2 + 8.36e-07z - 1.115e-09 \quad (21)$$

A Tabela 7 apresenta o desenvolvimento do método de Jury para esse sistema.

|   | $z^0$     | $z^1$    | $z^2$     | $z^3$    | $z^4$     | $z^5$ |
|---|-----------|----------|-----------|----------|-----------|-------|
| 1 | -1,115    | 8,36e-7  | -2,165e-4 | 2,297e-2 | -8,307e-1 | 0     |
| 2 | -8,307e-1 | 2,297e-2 | -2,165e-4 | 8,36e-7  | -1,115    | 0     |
| 3 | -8,35e-7  | 2,16e-4  | -2,3e-2   | 8,31e-1  | -1        | 0     |
| 4 | -1        | 8,31e-1  | -2,3e-2   | 2,16e-4  | -8,35e-7  | 0     |
| 5 | -2,15e-4  | -2,3e-2  | 8,31e-1   | -1       | 0         | 0     |
| 6 | -1        | 8,31e-1  | -2,3e-2   | -2,15e-4 | 0         | 0     |
| 7 | -2,28e-2  | 8,31e-1  | -1        | 0        | 0         | 0     |

Para verificar a estabilidade, como nosso polinômio é de ordem 5, devemos conferir os 6 critérios.

- O primeiro critério:  $Q(1) = 0.192 > 0$ , satisfeito;
- O segundo critério:  $-1^3Q(-1) = 1.85 > 0$ , satisfeito;
- O terceiro critério:  $|a_0| = 1.115e-9 < 1 = |a_5|$ , satisfeito;
- O quarto critério:  $|b_0| = 1 > -8,35e-7 = |b_4|$ , satisfeito. - O quinto critério:  $|c_0| = 1 > 2,15e-4 = |c_4|$ , satisfeito. - O sexto critério:  $|d_0| = 0,916 > 0,8646 = |d_4|$ , satisfeito.

Como o sistema discreto atende os seis critérios de Jury necessários, é um sistema estável.

## Problema 4:

O problema 4 propõe achar um controlador proporcional que garanta que a constante de tempo em MF seja  $\tau = 0.1s$  e achar um controlador PI, para que o coef. de amortecimento seja  $\zeta = 0,7$  e a frequência natural de oscilação  $\omega_0 = 114,2857\text{rad/s}$ .

Para o sistema utilizando o controlador P, os ganhos devem ser  $kp = 0,08$  e  $ki = 130,6122$  para que os objetivos postos sejam cumpridos. A FT do sistema em MF pode ser visto na equação 22.

$$T = \frac{0,8}{s + 10} \quad (22)$$

Para o sistema utilizando o controlador PI, os ganhos devem ser  $kp = 1,58$  e  $ki = 130,6122$  para que os objetivos postos sejam cumpridos. A FT do sistema em MF pode ser visto na equação 23.

$$T = \frac{10(1,58s + 130,6122)}{s^2 + 160s + 13061,22} \quad (23)$$

No desenvolvimento analítico foi visto que o erro em regime estacionário para uma entrada degrau do sistema com controlador P é  $e(\infty) = 0,92$  e com controlador PI,  $e(\infty) = 0$ . O código 13 apresenta o *script* do Matlab para criar o Gráfico 19, que faz a comparação da resposta dos dois sistemas.

Código 13: Análise da estabilidade

```
1  % a)
2  %FT da planta
3  Gp = tf(10,[1 2]);
4
5  %Controlador Proporcional
6  kp = 0.08;
7  Gc = kp; %Ganho do controlador
8  Gmap = Gc*Gp; %Malha Aberta
9  Gmfp = Gmap/(1+10*Gmap); %Malha fechada
10
11 %Controlador PI
12 kp = 1.58;
13 ki = 130.6122;
14 Gmap_i = tf(10*[kp ki], [1 2 0]);
15 Gmfpi = Gmap_i/(1+Gmap_i);
16
17 % a)
18
19 %step para avaliar a resp do sistema
20 [yp,tp] = step(Gmfp, 0.6);
21 [ypi, tpi] = step(Gmfpi, 0.6);
22
23 %graficos comparativos
24 figure
25 plot(tp, yp, 'LineWidth', 2);
26 hold on
27 plot(tpi, ypi, 'LineWidth', 2);
28 hold off
29 legend('P', 'PI')
30 grid
```

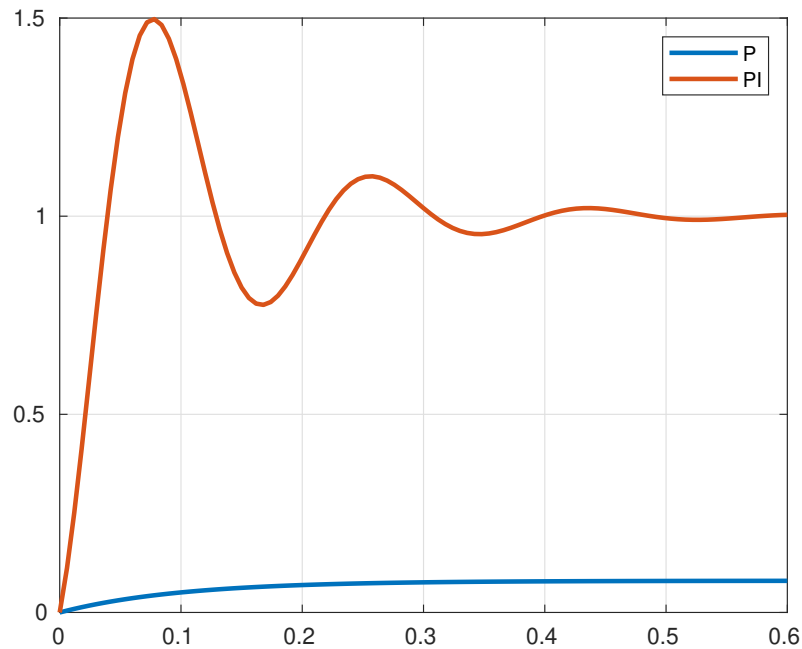


Figura 19: Gráfico da resposta ao degrau do sistema utilizando um controlador P e um PI.

Vemos que o sobrevalor foi de 50% ao utilizar o controlador PI e que esse foi o único controle que em regime permitiu um erro nulo.

b)

A Figura 20 mostra o LGR do sistema sem controlador, a Figura 21 o LGR com controlador P e a Figura 22 o LGR com controlador PI.

Pode-se verificar que o controlador P, Figura 21, é suficiente para tornar o sistema estável, porém mantém um único polo que desliza (ao alterar o ganho) pelo eixo real, não permitindo a redução do erro. O controlador PI, Figura 22, adiciona um polo e torna-o em um conjugado complexo. A alteração do ângulo da reta que passa pelo polo e pela origem representa a alteração no amortecimento.

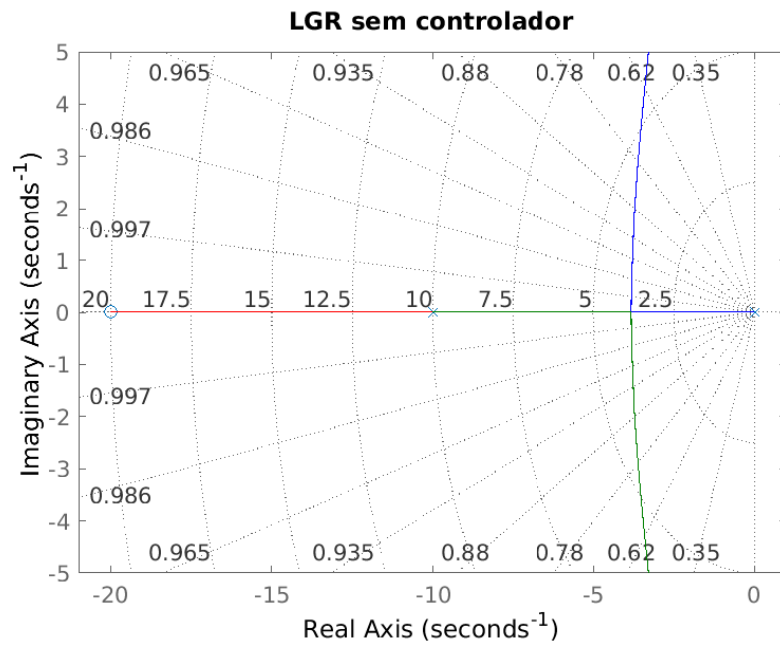


Figura 20: Lugar geométrico das raízes sem controlador.

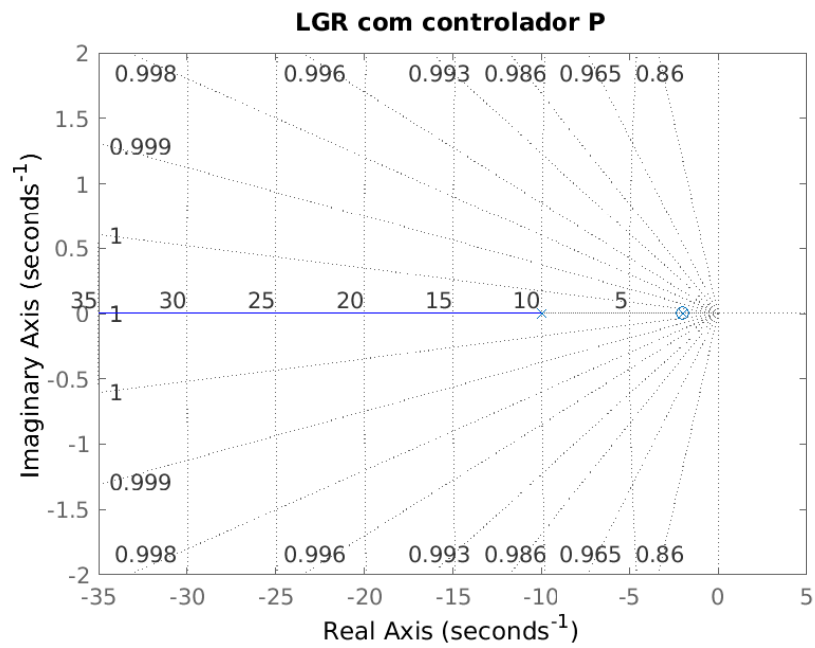


Figura 21: Lugar geométrico das raízes com controlador P

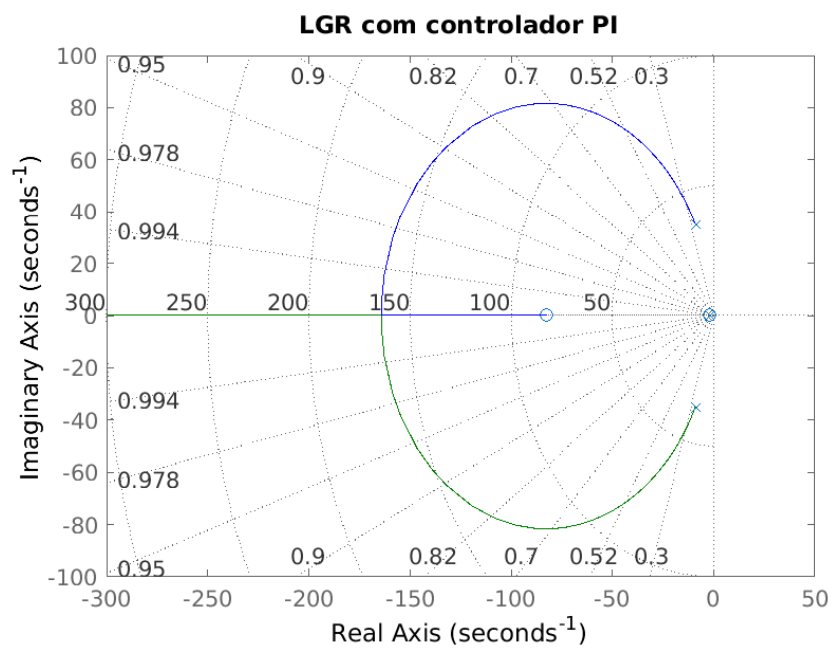


Figura 22: Lugar geométrico das raízes com controlador PI

c)

O tempo de amostragem foi de 22ms para o sistema com controlador P e de 3ms para o com controlador PI. O Código 12 apresenta a discretização do modelo e a criação do gráfico da resposta dos sistemas a entrada degrau.

Código 14: Análise da estabilidade

```
1 Tsp = stepinfo(Gmfp).RiseTime/10; %Tr = 5.1535
2 Tspi = stepinfo(Gmfpi).RiseTime/10;
3 Gmfpz = c2d(Gmfp, Tsp, 'zoh');
4 Gmfpiiz = c2d(Gmfpi, Tspi, 'zoh');
5
6 %salvando resultado do step
7 [yzp,tzp] = step(Gmfpz, 0.6);
8 [yzpi,tzpi] = step(Gmfpiiz, 0.6);
9
10 %avaliando o controlador P
11 figure
12 plot(tp, yp, 'LineWidth', 2)
13 hold on
14 stairs(tzp, yzp, 'LineWidth', 2);
15 hold off
16 legend('c(t)', 'c(kT)')
17 title('Resposta ao degrau Controlador P')
18 grid
19
20 %utilizando MAPE para avaliacao numerica
21 ape = abs((yzp - yp(1:length(yzp)))/yp(1:length(yzp)));
22 mapep = mean(ape(isfinite(ape))); %retira o erro percentual do y=0
23 %mape = 0.0142
```

A FT em MF disceta do sistema com controlador P é apresentada na equação 24 e a do sistema controlador PI 25. A Figura 23 apresenta a resposta do sistema contínuo e discretizado com controlador P, e a Figura 24 com controlador PI.

$$G_{mf}(z) = \frac{0.01578}{z - 0.8028} \quad (24)$$

$$G_{mf}(z) = \frac{0.05192z - 0.04045}{z^2 - 1.936z + 0.9479} \quad (25)$$

O MAPE do sistema discreto em relação ao contínuo com controlador P foi de  $1,42 \cdot 10^{-2} \%$  e com o controlador PI foi de  $0,15 \cdot 10^{-2} \%$ .

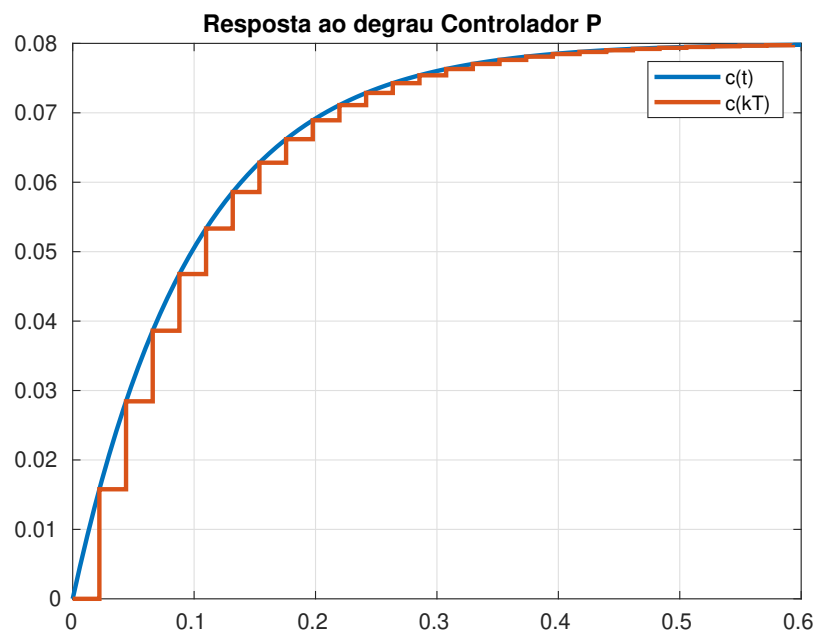


Figura 23: Resposta ao degrau

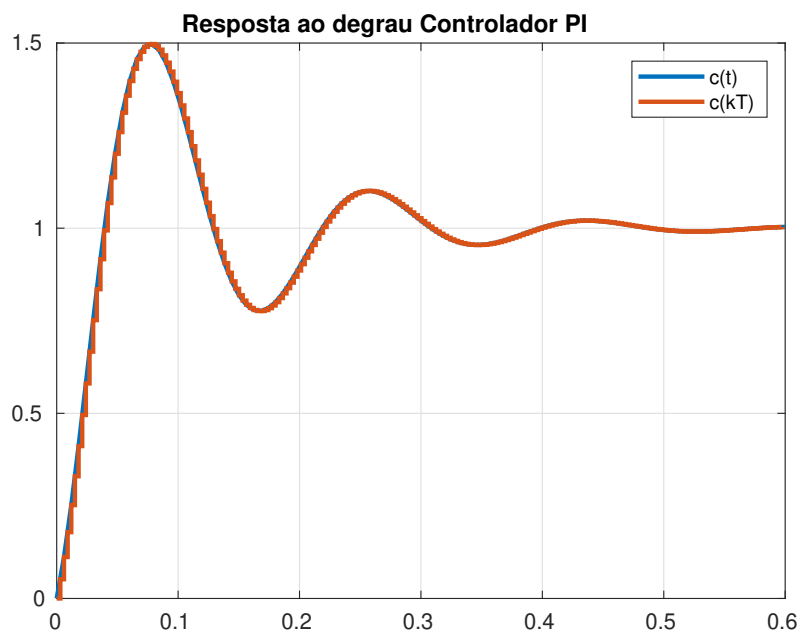


Figura 24: Resposta ao degrau

d)

Os polinômios característicos do sistema contínuo com controlador P e PI, podem ser vistos, respectivamente através das equações 26 e 27.

$$Q(s) = s + 10 \quad (26)$$

$$Q(s) = s^2 + 17,8s + 1306 \quad (27)$$

O sistema com controlador P é facilmente verificado como estável dado que possui um único polo real negativo. A Tabela 8 apresenta o desenvolvimento do método de Routh para verificar a estabilidade do sistema com controlador PI.

Tabela 8: Análise de estabilidade pelo método de Routh

|   |      |      |
|---|------|------|
| 1 | 1    | 1306 |
| 2 | 17,8 | 0    |
| 3 | 1306 | 0    |

Verificamos que o sistema contínuo é estável. Os polinômios característicos dos sistemas discretos com controlador P e PI, podem ser vistos nas equações 28 e 29, respectivamente.

$$Q(z) = z - 0.8028 \quad (28)$$

$$Q(z) = z^2 - 1.936z + 0.9479 \quad (29)$$

Podemos ver que o sistema discreto do controlador P, equação 26 é estável pois  $|z| < 1$ . Já para o sistema com o controlador PI é de ordem 2, então é necessário verificar três critérios, sem necessidade de tabela.

- O primeiro critério:  $Q(1) = 0.0119 > 0$ , satisfeito;
- O segundo critério:  $-1^3Q(-1) = 3.88 > 0$ , satisfeito;
- O terceiro critério:  $|a_0| = 0.9479 < 1 = |a_2|$ , satisfeito.

Como o sistema atende os três critérios de Jury necessários, é um sistema estável.

## Problema 5:

O problema 5 pede para determinar as características do sistema com FT em MA da equação 30.



$$G_{ma} = \frac{25}{s(s+6)} \quad (30)$$

Esse sistema possui um tempo de assentamento  $T_s = 1.33s$ . A partir disso, a questão pede para criar um compensador para diminuí-lo. O ganho do compensador encontrado é visto na equação 31

$$G_c = s + 18.75 \quad (31)$$

Com a adição do compensador a FT em MF foi a vista na equação 32

$$G_{mf} = \frac{25s + 468.8}{s^2 + 31s + 468.8} \quad (32)$$

a)

Para verificar a estabilidade foi observada a resposta do sistema a uma entrada a degrau que pode ser visto na Figura 25. O bloco de código 15 apresenta o código para construção do gráfico.

Código 15: Análise da estabilidade

```
1 %step para avaliar a resp do sistema
2 [y,t] = step(Gmf,0.35);
3
4 %avaliando o controlador P
5 figure
6 plot(t, y, 'LineWidth', 2)
7 legend('c(t)')
8 title('Resposta ao degrau')
9 grid
```

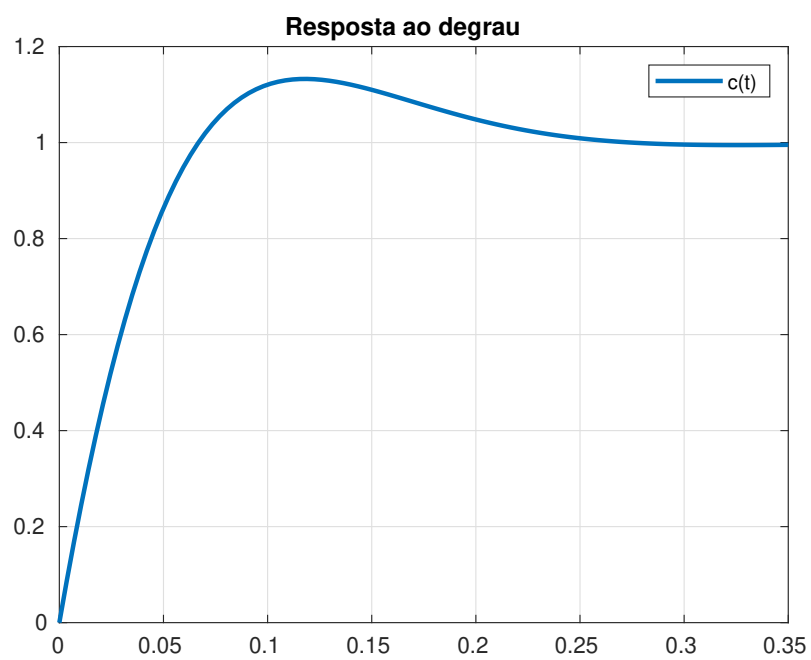


Figura 25: Resposta ao degrau

b)

A Figura 26 é o LGR do sistema sem o compensador e a Figura 27 o LGR com o compensador.

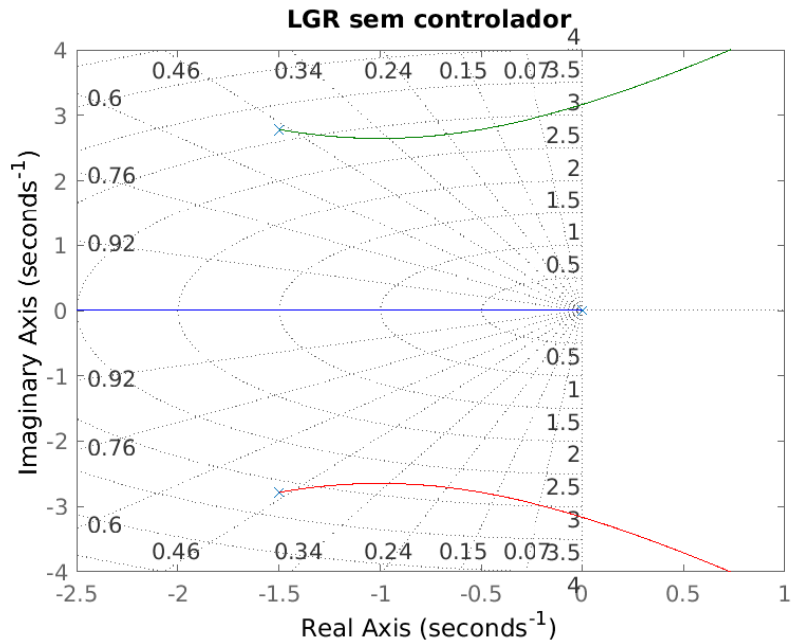


Figura 26: Lugar geométrico das raízes sem controlador

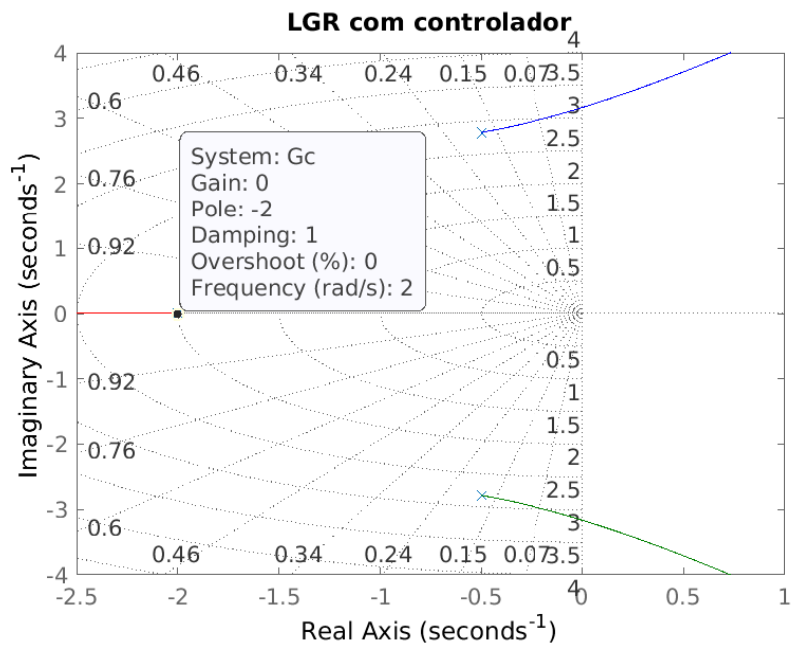


Figura 27: Lugar geométrico das raízes com controlador

O compensador moveu os polos de forma a ficarem mais negativos.

c)

O Código 16 apresenta a discretização do modelo e a criação do Gráfico 28 da resposta do sistema a entrada degrau.

Código 16: Análise da estabilidade

```
1 % c)
2 Ts = stepinfo(Gmf).RiseTime/10; %Tr = 0.05
3 Gmfz = c2d(Gmf, Ts, 'zoh');
4
5 %salvando resultado do step
6 [yz,tz] = step(Gmfz);
7
8 %avaliando o controlador P
9 figure
10 plot(t, y, 'LineWidth', 2)
11 hold on
12 stairs(tz, yz, 'LineWidth', 2);
13 hold off
14 legend('c(t)', 'c(kT)')
15 title('Resposta ao degrau')
16 grid
17
18 %utilizando MAPE para avaliacao numerica
19 ape = abs((yz - y(1:length(yz)))/y(1:length(yz)));
20 mape = mean(ape(isfinite(ape))); %retira o erro percentual do y=0
21 %mape = 9.3241e-04
```

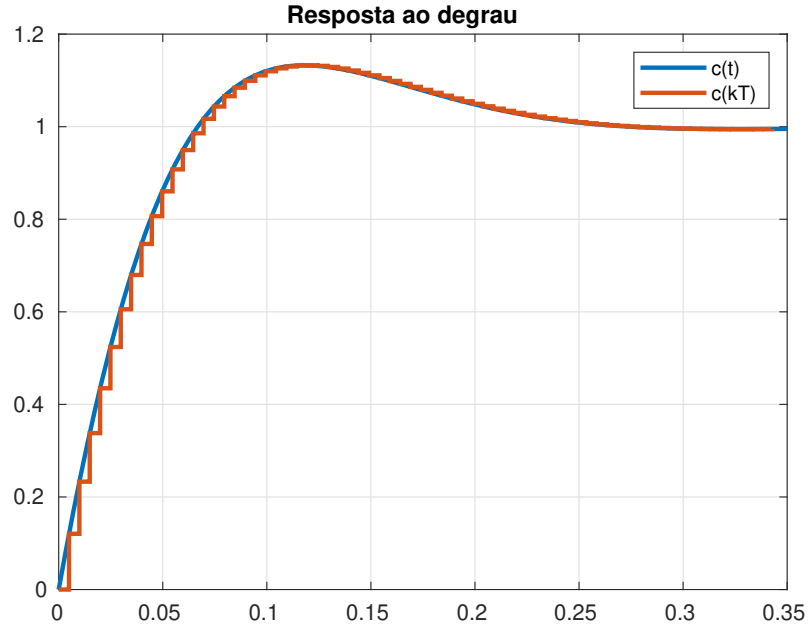


Figura 28: Resposta ao degrau

O tempo de discretização foi  $T_s = 5ms$ . O MAPE foi de  $9,32 \cdot 10^{-2} \%$ . A função de transferência do sistema discreto pode ser vista através da equação 33.

$$G_{mf}(z) = \frac{0.1204z - 0.1097}{z^2 - 1.846z + 0.8572} \quad (33)$$

d)

O polinômio característico do sistema contínuo pode ser visto na equação 34.

$$Q(s) = s^2 + 31s + 468.8 \quad (34)$$

A Tabela 9 apresenta o desenvolvimento do método de Routh para verificar a estabilidade do sistema.

Tabela 9: Análise de estabilidade pelo método de Routh

|   |         |       |
|---|---------|-------|
| 1 | 1       | 468,8 |
| 2 | 31      | 0     |
| 3 | 14532.8 | 0     |

Verificamos que o sistema contínuo é estável. O polinômio característico do sistema discreto pode ser visto na equação 35.

$$Q(z) = z^2 - 1.846z + 0.8572 \quad (35)$$

Como deve-se observar somente as três primeiras linhas pois o sistema é de ordem 2, não necessita-se da tabela.

- O primeiro critério:  $Q(1) = 0.0112 > 0$ , satisfeito;
- O segundo critério:  $-1^3 Q(-1) = 3.7032 > 0$ , satisfeito;
- O terceiro critério:  $|a_0| = 0.8572 < 1 = |a_2|$ , satisfeito.

O sistema discreto é, então, estável.