



Analyse multi-échelle

Principes et applications

Marco Cagnazzo,

cagnazzo@telecom-paristech.fr

IMA 201



Outline

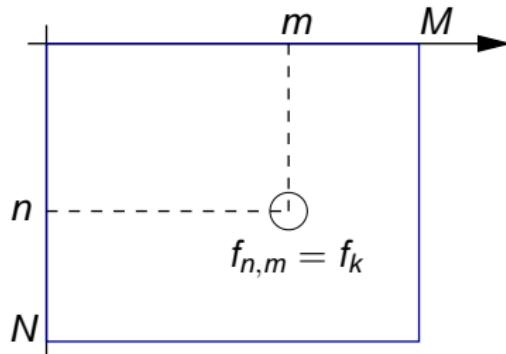
Introduction

Transformée en ondelettes

Applications

Représentation des images numériques

- ▶ Grille discrète, image $N \times M$ pixels
- ▶ A chaque pixel (n, m) , on associe un ordre de traitement k
- ▶ Généralement, balayage ligne par ligne unilatéral :
$$k = (n - 1)M + m$$
- ▶ On notera indifféremment $f_{n,m}$ ou f_k
- ▶ Images en niveaux de gris



Transformations linéaires

Rappel : Cas 1D

Dans le cas 1-D, une transformée linéaire est un produit matriciel. Soit $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{N_1}$ le vecteur d'entrée. En général, le résultat de la transformée est un vecteur $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{N_2}$ tel que :

$$\mathbf{g} = \mathbf{T}\mathbf{f} \qquad g_k = \sum_{n=1}^{N_1} T_{k,n} f_n$$

Dans la majorité des cas, nous nous intéressons au cas $N_1 = N_2 = N$. La transformée est entièrement définie par la matrice carrée $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{N \times N}$

Comment étendre cette définition au cas 2D ?

Transformations linéaires en 2D : forme scalaire

Soit \mathbf{F} une image (ou un bloc de pixels) de taille $N \times M$. Une transformée de \mathbf{F} est une image \mathbf{G} de taille $N \times M$ telle que chaque $g_{k,\ell}$ soit une combinaison linéaire des éléments de \mathbf{F} :

$$g_{k,\ell} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M t(k, \ell, n, m) f_{n,m} \quad (1)$$

Une transformée 2D est alors complètement définie par le tenseur t :

$$t : (k, \ell, n, m) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$k \in 1, \dots, N$$

$$\ell \in 1, \dots, M$$

$$n \in 1, \dots, N$$

$$m \in 1, \dots, M$$

Transformations linéaires en 2D : forme vectorielle

Une transformée 2D peut toujours s'écrire comme un produit matriciel. Il suffit d'introduire la forme vectorielle des images.

Soient \mathbf{F} , \mathbf{G} et t liées par l'équation (1). On introduit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{NM \times 1}$:

$$\mathbf{x} = [f_{1,1}, f_{2,1}, \dots, f_{N,1}, f_{1,2}, f_{2,2}, \dots, f_{N,2}, f_{1,M}, f_{2,M}, \dots, f_{N,M}]^T$$

$$\mathbf{y} = [g_{1,1}, g_{2,1}, \dots, g_{N,1}, g_{1,2}, g_{2,2}, \dots, g_{N,2}, g_{1,M}, g_{2,M}, \dots, g_{N,M}]^T$$

Chaque élément de \mathbf{y} est une combinaison linéaire d'éléments de \mathbf{x} , donc :

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

Après de calculs banals mais laborieux, on peut trouver :

$$\mathbf{T}_{i,j} = t[r(j), c(j), r(i), c(i)]$$

$$r(j) = j - N \left\lfloor \frac{j-1}{N} \right\rfloor \qquad \qquad c(j) = N \left\lfloor \frac{j-1}{N} \right\rfloor + 1$$

La transformée est alors complètement définie par la matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{NM \times NM}$

Transformée inverse

On considère des transformées inversibles, c'est-à-dire telles que \mathbf{T} soit inversible. Dans ce cas :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}$$

Il est évident que dans ce cas, il existe un tenseur t' tel que :

$$f_{n,m} = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^M t'(n, m, k, \ell) g_{k,\ell}$$

La relation entre t' et \mathbf{T}^{-1} est similaire à celle entre t et \mathbf{T}

Transformations linéaires en 2D : forme matricielle

Étant donné que :

$$g_{k,\ell} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M t(k, \ell, n, m) f(n, m)$$

si on définit :

$$[\tau_{k,\ell}] = \begin{bmatrix} t(k, \ell, 1, 1) & \dots & t(k, \ell, 1, M) \\ t(k, \ell, N, 1) & \dots & t(k, \ell, N, M) \end{bmatrix}$$

alors :

$$g_{k,\ell} = \sum_{n,m} \tau_{k,\ell}(n, m) f(n, m)$$

Donc $g_{k,\ell}$ représente le produit scalaire (le degré de similitude) entre l'image f et l'*image de base* $[\tau_{k,\ell}]$

Transformée inverse : forme matricielle

On définit :

$$[\tau'_{k,\ell}] = \begin{bmatrix} t'(1, 1, k, \ell) & \dots & t'(1, M, k, \ell) \\ t'(N, 1, k, \ell) & \dots & t'(N, M, k, \ell) \end{bmatrix}$$

Alors on trouve :

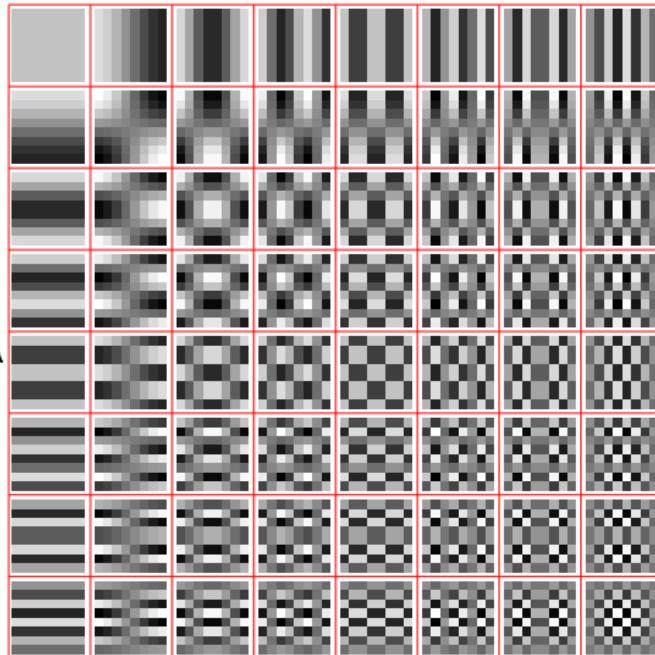
$$\mathbf{F} = \sum_{k,\ell} g_{k,\ell} \tau'_{k,\ell}$$

Les $g_{k,\ell}$ donnent les poids des différents contributions $[\tau'_{k,\ell}]$ à l'image \mathbf{F} .

Pour une transformée orthogonale, $[\tau_{k,\ell}] = [\tau'_{k,\ell}]$

Transformée en forme matricielle : exemple

$\tau_{k,\ell}$



Transformations linéaires en 2D

Propriétés

- ▶ Transformée unitaire :

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^H$$

- ▶ Unitaire et réelle (orthogonale) :

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$$

- ▶ Séparable :

$$t(k, \ell, n, m) = t_1(k, n)t_2(\ell, m)$$

- ▶ Séparable et symétrique : $M = N$ et

$$t(k, \ell, n, m) = t(k, n)t(\ell, m)$$

Transformée séparable

Si $t(k, \ell, n, m) = t_1(k, n)t_2(\ell, m)$, il existe deux matrices \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 telles que :

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}_1 \mathbf{F} \mathbf{T}_2^T$$

Démonstration.

$$\mathbf{H} = \mathbf{T}_1 \mathbf{F} \quad \Rightarrow h_{p,q} = \sum_{n=1}^N T_1(p, n)f(n, q)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} \mathbf{T}_2^T \quad \Rightarrow e_{k,\ell} = \sum_{m=1}^M h(k, m)T_2(\ell, m)$$

$$e_{k,\ell} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M T_1(k, n)f(n, m)T_2(\ell, m)$$

Donc, si $T_1(k, \ell) = t_1(k, \ell)$ et $T_2(k, \ell) = t_2(k, \ell)$, alors $\mathbf{G} = \mathbf{E}$ CQFD.

Transformée séparable : interprétation

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \mathbf{T}_1 \mathbf{F} \mathbf{T}_2^T \\ &= \mathbf{T}_1 \left(\mathbf{T}_2 \mathbf{F}^T \right)^T \\ &= \left[\mathbf{T}_2 \left(\mathbf{T}_1 \mathbf{F} \right)^T \right]^T\end{aligned}$$

Appliquer une transformée 2D séparable est équivalent à :

- ▶ appliquer d'abord la transformée 1D \mathbf{T}_2 sur les lignes de \mathbf{F} et ensuite la transformée 1D \mathbf{T}_1 sur les colonnes ;
- ▶ ou alors à appliquer d'abord \mathbf{T}_1 sur les colonnes de \mathbf{F} et ensuite \mathbf{T}_2 sur les lignes

Transformée séparable et symétrique

Si $N = M$ et $t_1 = t_2 = t$ alors $t(k, \ell, n, m) = t(k, n)t(\ell, m)$ et

$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{C}$ avec $\mathbf{C}_{i,j} = t(i, j)$

Autrement dit, si on applique la transformée 1D \mathbf{C} sur les lignes et sur les colonnes de \mathbf{F} , on est en train de calculer une transformée 2D séparable et symétrique :

$$\mathbf{G} = \mathbf{C}\mathbf{F}\mathbf{C}^T$$

$$g_{k,\ell} = \sum_{n,m} C(k, n)C(\ell, m)f_{n,m}$$

La transformée 2D est alors complètement caractérisée par la matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{N \times N}$

On peut prouver que \mathbf{T} est inversible [orthogonale] si et seulement si \mathbf{C} l'est.

Les transformées les plus intéressantes sont réelles, séparables, symétriques et orthogonales

Idées clés

- ▶ On peut étendre ce que l'on sait sur les transformées 1-D en 2-D
- ▶ Transformée directe : analyse
- ▶ Transformée inverse : synthèse
- ▶ Coefficients : mesurent la corrélation avec fonction d'analyse
- ▶ Unicité de la décomposition
- ▶ Représentation du signal sur un même nombre d'éléments: les coefficients de la décomposition
- ▶ Reconstruction : utiliser la base pour décrire le signal (synthèse)

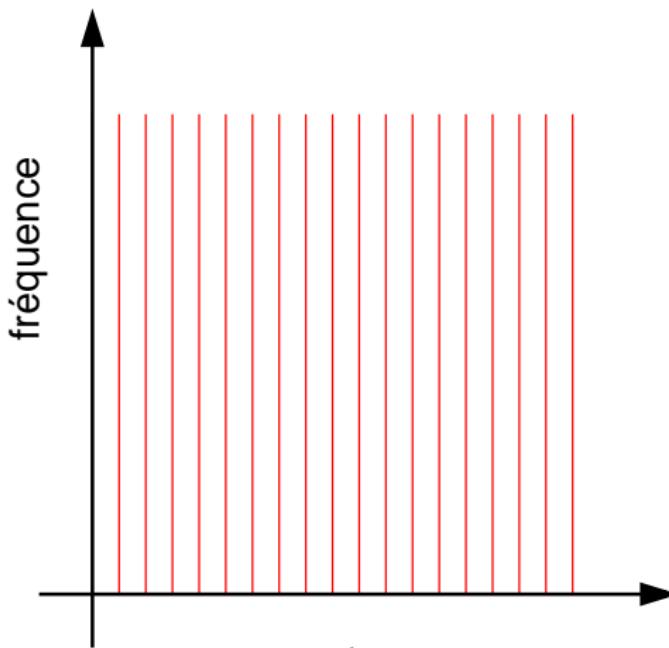
L'analyse des signaux

- ▶ Analyse: similitude à des “atomes” $\phi_n[k]$
- ▶ Similitude : produit scalaire

$$c[k] = \sum_n x[n]\phi_n[k]$$

- ▶ Projection sur un ensemble de signaux
- ▶ Changement de base
- ▶ Transformée linéaire

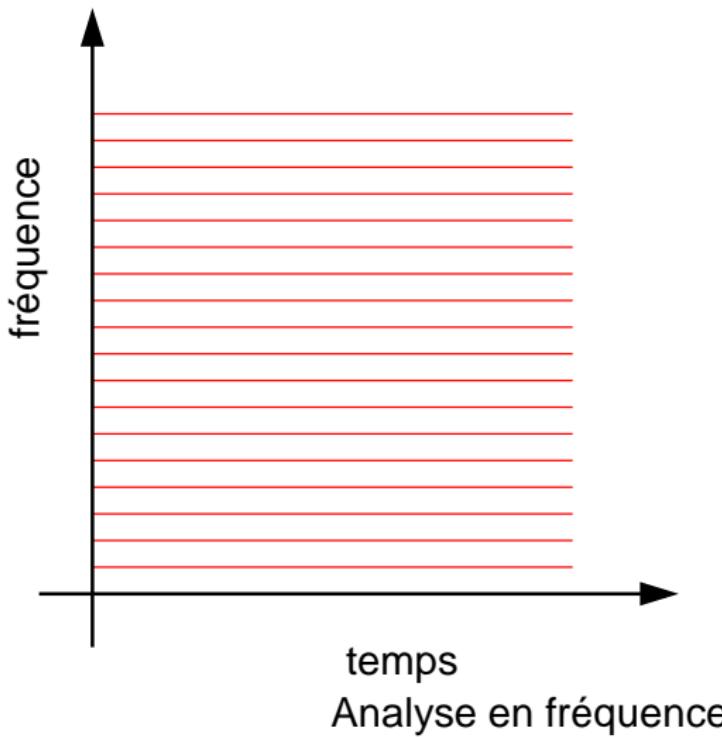
L'analyse des signaux



$$\phi_n[k] = \delta[n - k]$$

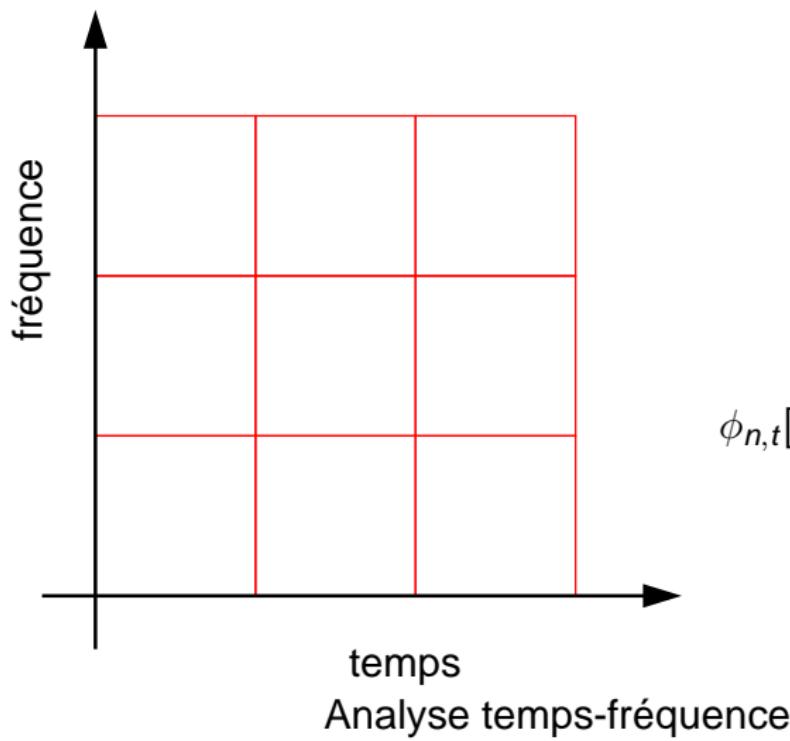
Analyse temporelle

L'analyse des signaux



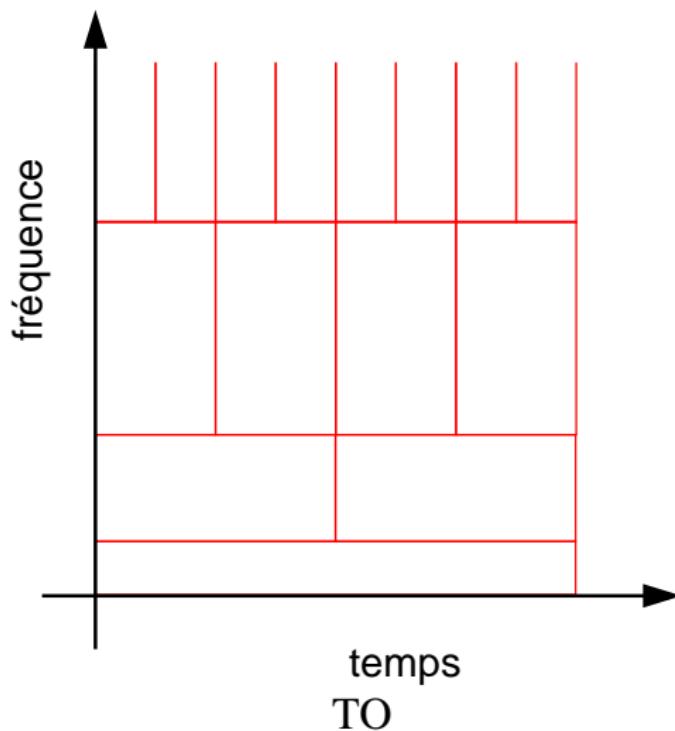
$$\phi_n[k] = e^{-j2\pi \frac{k}{N}n}$$

L'analyse des signaux



$$\phi_{n,t}[k] = e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} w_t[k]$$

L'analyse des signaux



$$\phi_{n,a}[k] = \phi(2^{-a}k - n)$$

Outline

Introduction

Transformée en ondelettes

Applications

Ondelettes et images : Motivations

- ▶ Modèle d'images : *trends + anomalies*



Ondelettes et images : Motivations

- ▶ Modèle d'images : *trends + anomalies*



Ondelettes et images : Motivations

- ▶ Modèle d'images : *trends + anomalies*



Ondelettes et images : Motivations

► *Anomalies :*

- ▶ Variations soudaines du signal, sur une courte durée
- ▶ Contributions aux hautes fréquences
- ▶ Contours des objets
- ▶ Bonne résolution spatiale
- ▶ Résolution en fréquence grossière

► *Trends :*

- ▶ Variations lentes du signal, sur une longue durée
- ▶ Contributions aux basses fréquences
- ▶ Intérieur des objets
- ▶ Résolution spatiale grossière
- ▶ Bonne résolution en fréquence

Ondelettes et images : Motivations

Modèle du signal : une ligne d'une image



Ondelettes et images : Motivations

Modèle du signal : une ligne d'une image



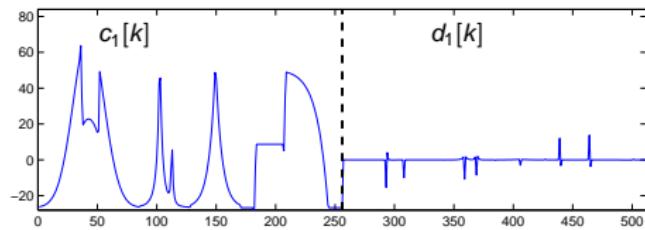
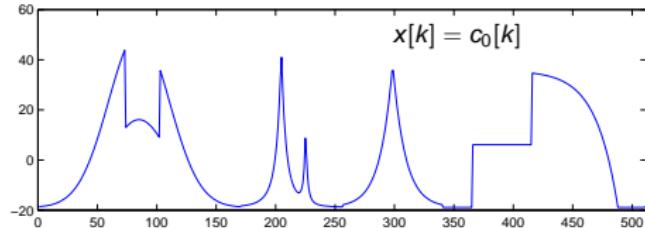
Ondelettes et images : Motivations

Modèle du signal : une ligne d'une image



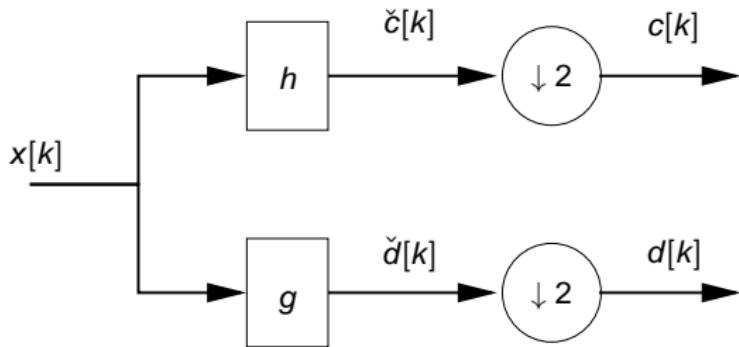
Ondelettes et analyse à résolutions multiples

- ▶ Approximation : version à baisse résolution
- ▶ “Détails” : nuls pour un signal polynomial



Bancs de filtres 1D

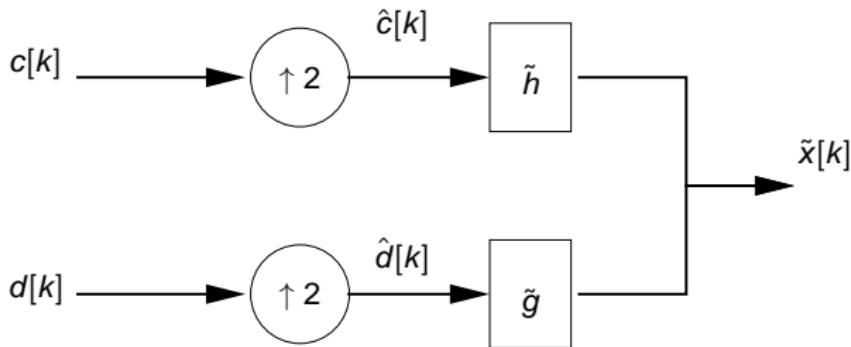
Décomposition



Banc de filtres d'analyse

$2 \downarrow$: opérateur de décimation : $c[k] = \check{c}[2k]$

Reconstruction



Banc de filtres de synthèse

2 \uparrow : opérateur d'interpolation, multiplie le nombre d'échantillons par 2

$$\hat{c}[k] = \begin{cases} c[k/2] & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

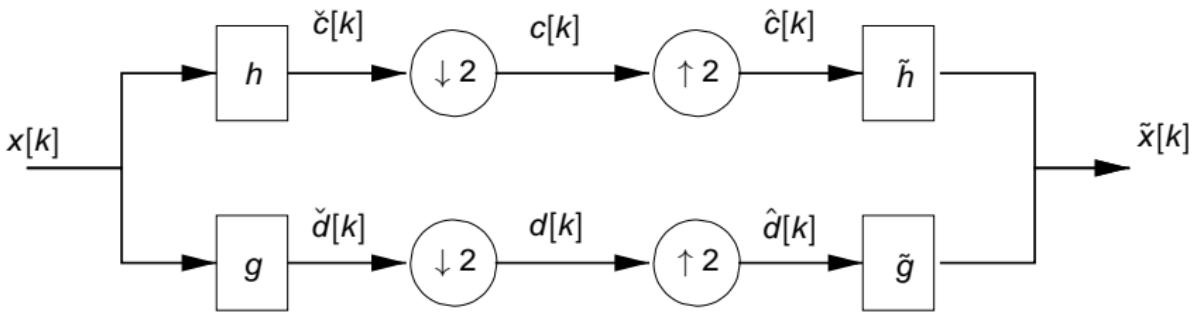
Propriétés des filtres

- ▶ Reconstruction parfaite
- ▶ RIF
- ▶ Orthogonalité
- ▶ Moments nuls
- ▶ Symétrie

Conditions de reconstruction parfaite

En cascadant bancs de filtres d'analyse et de synthèse, on veut la reconstruction parfaite (RP), c'est-à-dire, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{x}_k = x_{k+\ell} \iff \tilde{X}(z) = z^{-\ell} X(z)$$



Relations dans le domaine Z

filtre $\check{C}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{c}_n z^{-n} = H(z) X(z)$

décimateur $C(z) = \frac{1}{2} [\check{C}(z^{1/2}) + \check{C}(-z^{1/2})]$

interpolateur $\hat{C}(z) = C(z^2)$

sortie $\tilde{X}(z) = \tilde{H}(z) C(z^2) + \tilde{G}(z) D(z^2)$

$$\tilde{X}(z) = \frac{1}{2} [\tilde{H}(z) H(z) + \tilde{G}(z) G(z)] X(z)$$

$$+ \frac{1}{2} [\tilde{H}(z) H(-z) + \tilde{G}(z) G(-z)] X(-z)$$

Conditions de reconstruction parfaite

En cascadant bancs de filtres d'analyse et de synthèse, on veut la reconstruction parfaite (RP), c'est-à-dire, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\tilde{x}_k = x_{k+\ell} \iff \tilde{X}(z) = z^{-\ell} X(z)$$



$$\begin{aligned}\tilde{H}(z) H(z) + \tilde{G}(z) G(z) &= 2z^{-\ell} && \text{Non distorsion} \\ \tilde{H}(z) H(-z) + \tilde{G}(z) G(-z) &= 0 && \text{Non aliasing}\end{aligned}$$

Conditions de reconstruction parfaite

Forme matricielle

Si les filtres d'analyse sont fixés, les filtres de synthèse sont univoquement déterminés :

$$\begin{bmatrix} H(z) & G(z) \\ H(-z) & G(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{H}(z) \\ \tilde{G}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} \\ 0 \end{bmatrix}$$

On assume que la *matrice de modulation* soit inversible.

Conditions de reconstruction parfaite

Filtres de synthèse

Déterminant de la matrice de modulation :

$$\Delta(z) = H(z)G(-z) - G(z)H(-z)$$

$$\tilde{H}(z) = \frac{2z^{-\ell}}{\Delta(z)}G(-z)$$

$$\tilde{G}(z) = -\frac{2z^{-\ell}}{\Delta(z)}H(-z)$$

Reconstruction parfaite avec filtres RIF

Filtres à réponse impulsionnelle finie:

On peut montrer que dans ce cas la condition de non aliasing est équivalente à imposer la condition de signes alternés pour les filtres.

Exemple:

$$h(k) = \boxed{a \quad b \quad c}$$

$$g(k) = \boxed{p \quad q \quad r \quad s \quad t}$$

$$\tilde{h}(k) = \boxed{p \quad -q \quad r \quad -s \quad t}$$

$$\tilde{g}(k) = \boxed{-a \quad b \quad -c}$$

Orthogonalité

L'orthogonalité assure la conservation de l'énergie :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k)^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_k)^2$$

⇒ énergie de l'erreur sur les coefficients = énergie de l'erreur sur le signal

- ▶ Erreur de quantification
- ▶ Bruit

Moments nuls

- ▶ Le moments nuls (MN) représentent la capacité du filtre à reconstruire les polynômes
- ▶ Un filtre avec p MN peut représenter des polynômes de degré strictement inférieur à p
- ▶ Si l'entrée du banc est un polynôme de grade au plus $p - 1$
la sortie du filtre passe haut est strictement nulle
- ▶ Alors toute l'information est représentée avec la moitié des échantillons (signal d'approximation)
- ▶ Un filtre avec p MN a un support non inférieur à $2p$

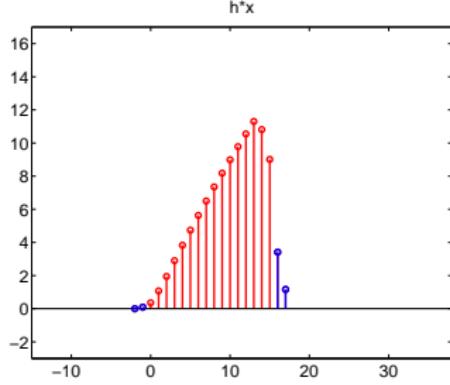
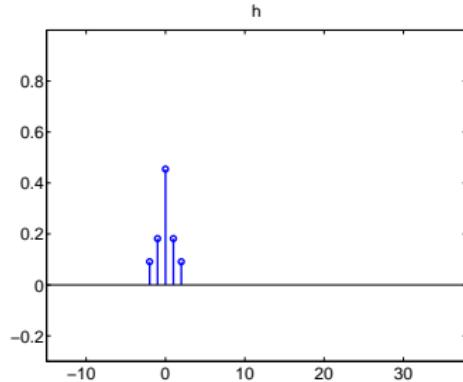
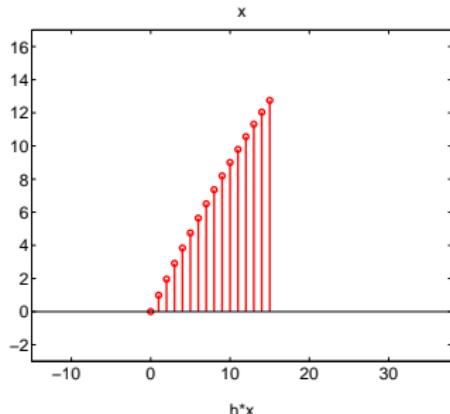
Problème des bords

- ▶ Les propriétés des bancs de filtres telles qu'on les a vues sont valables pour signaux de durée infinie
- ▶ Pour éviter d'augmenter le nombre de coefficients, un signal fini est périodisé avant d'entrer dans le banc d'analyse
- ▶ Le résultat est périodique de la même période
 - ▶ Une période suffit pour effectuer la synthèse
 - ▶ Création de sauts (effet de bord)

Symétrie

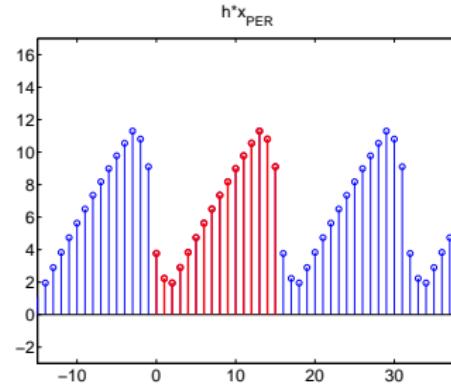
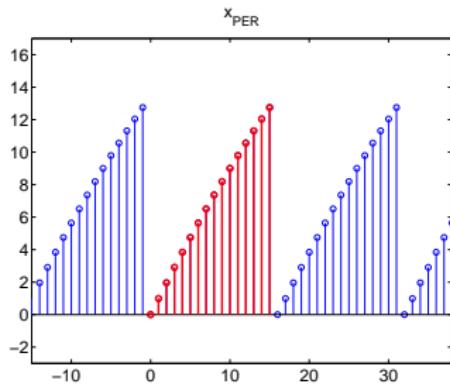
- ▶ Pour éviter de créer des coefficients à haute fréquence, on peut penser à symétriser le signal avant de le périodiser (comme pour la TCD)
- ▶ Mais on double le nombre de coefficients
- ▶ À moins que les filtres ne soient symétriques
 - ▶ Dans ce cas le résultat du filtrage est une suite symétrique et périodique : une demi-période suffit pour la reconstruction
 - ▶ Contrainte supplémentaire sur les filtres

Problème des bords

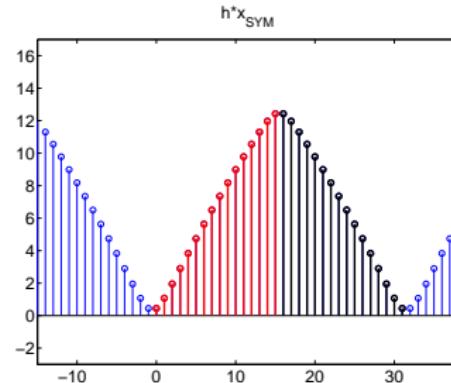
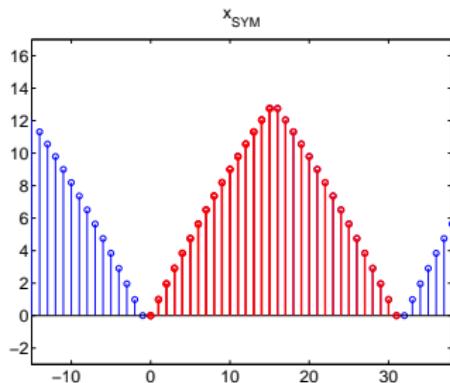


Expansion des coefficients

Problème des bords



Problème des bords



Orthogonalité et biorthogonalité

Reconstruction parfaite pour signaux de durée finie

- ▶ Problème de l'expansion des coefficients (convolution)
- ▶ Solution : convolution circulaire
 - ▶ La convolution circulaire permet de reconstruire un signal de N échantillons avec N coefficients d'ondelettes
 - ▶ Mais elle engendre des discontinuité aux bordes : "fausses" fréquences qui demandent beaucoup de ressources mais ne contiennent pas d'information
- ▶ Solution : Périodisation symétrique
 - ▶ Pas de discontinuités introduites
 - ▶ Mais ça double le nombre de coefficients !
 - ▶ Sauf si le filtre est symétrique

Le seul filtre orthogonal, RIF et symétrique est celui de Haar !

Filtre de Haar

$$h(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{h}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{g}(k) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Symétrique
- ▶ Orthogonal (normalisation)
- ▶ Nombre de moments nuls = 1
 - ▶ Capable de représenter uniquement les signaux constants par morceaux

Filtres biorthogonaux

Filtres Cohen-Daubechies-Fauveau

Pour les filtres biorthogonaux, si h a p MN et \tilde{h} a \tilde{p} MN, le support est au moins $p + \tilde{p} - 1$.

Ils existent des filtres biorthogonaux (CDF) qui :

- ▶ Sont symétriques (phase linéaire)
- ▶ Ont le maximum de MN pour une durée fixée
- ▶ Sont “quasi” orthogonaux (conservation de l’énergie) :
filtres h et \tilde{h} similaires

Ces filtres sont les plus communément utilisés dans le codage d’images.

Filtres biorthogonaux 9/7

Coefficients du filtre :

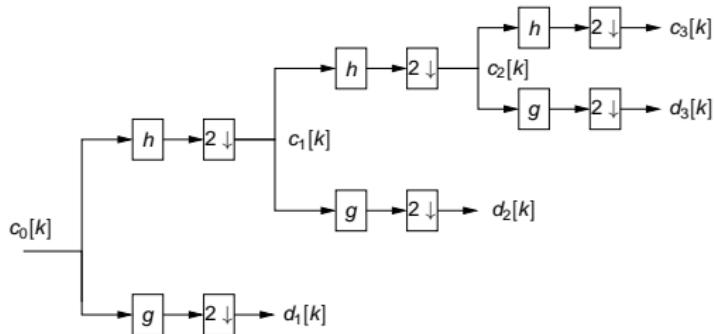
n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$h[l]$	0.852699	0.377403	-0.110624	-0.023849	0.037828
$\tilde{h}[l]$	0.788486	0.418092	-0.040689	-0.064539	

Réponses impulsionnelles des filtres passe-bas d'analyse et de synthèse biorthogonaux 9/7. On a pour les filtres passe-haut :

$$g[l] = (-1)^{l+1} \tilde{h}[l-1] \text{ et } \tilde{g}[l] = (-1)^{l-1} h[l+1].$$

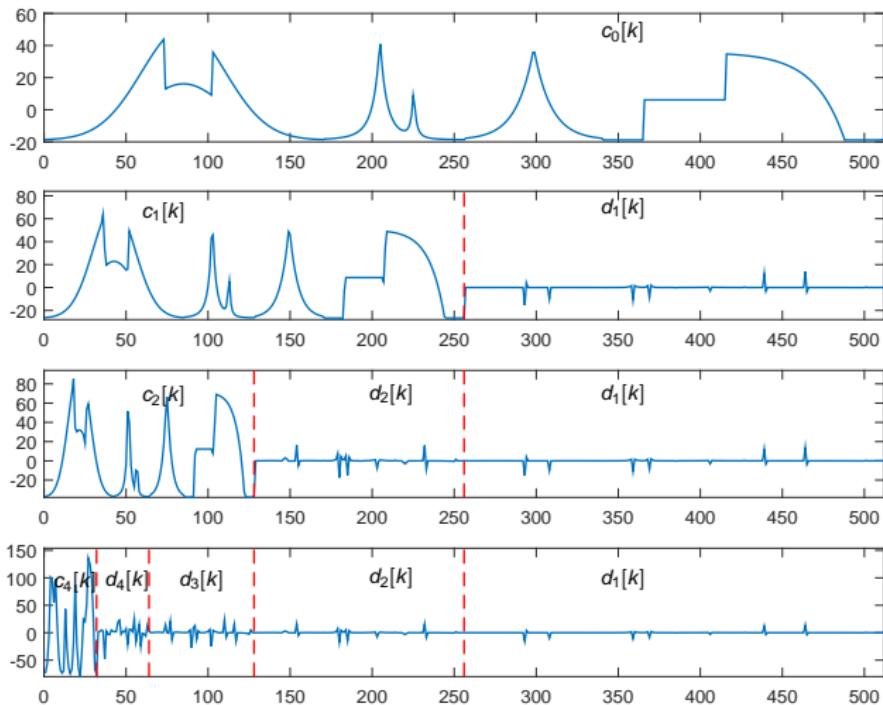
Analyse multirésolution 1D

Décomposition

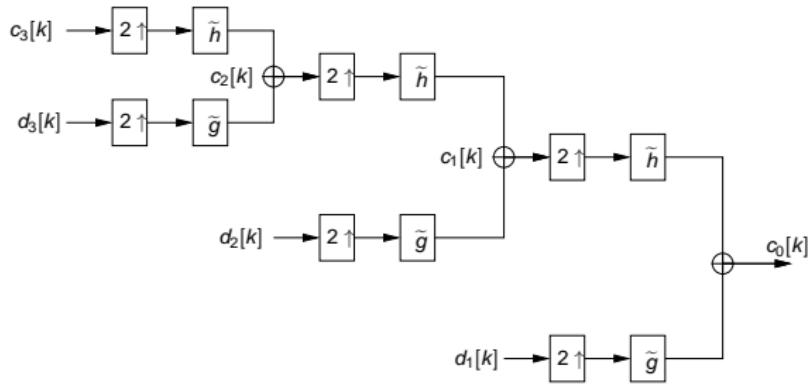


Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution

Multiresolution Analysis 1D



Reconstruction

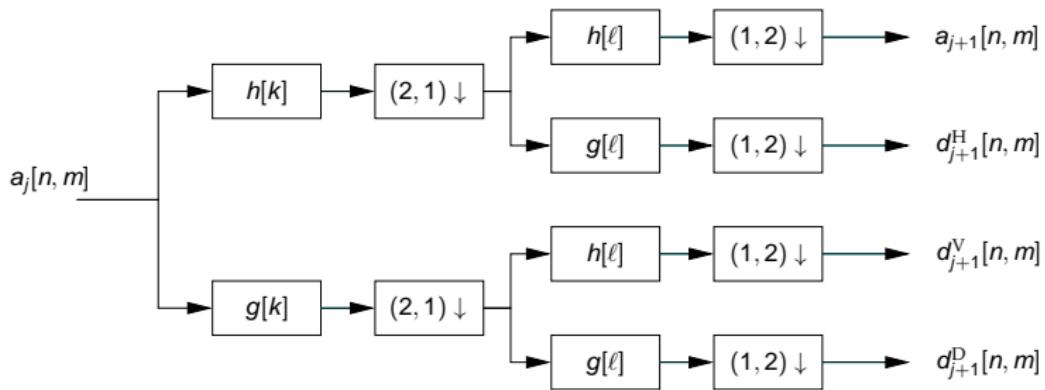


Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes

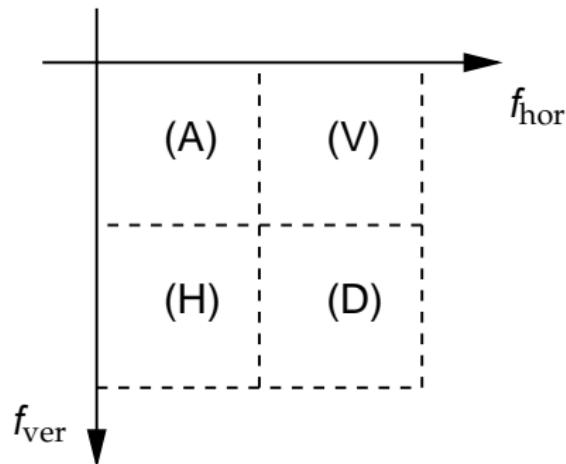
AMR 2D

Bancs de filtres 2D séparables

Pour 1 niveau de décomposition

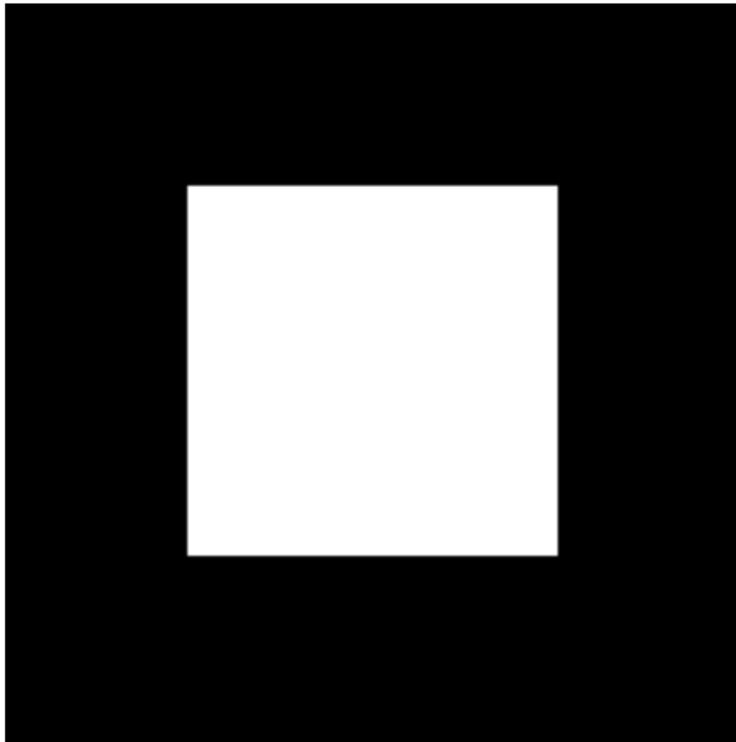


Interprétation fréquentielle

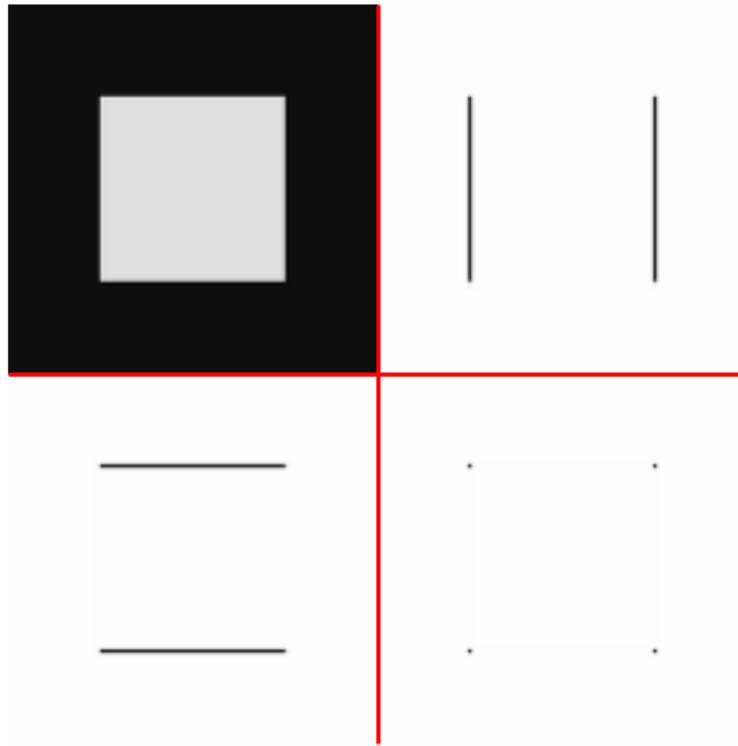


Les zones (A), (H), (V) et (D) correspondent effectivement aux coefficients d'approximation, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

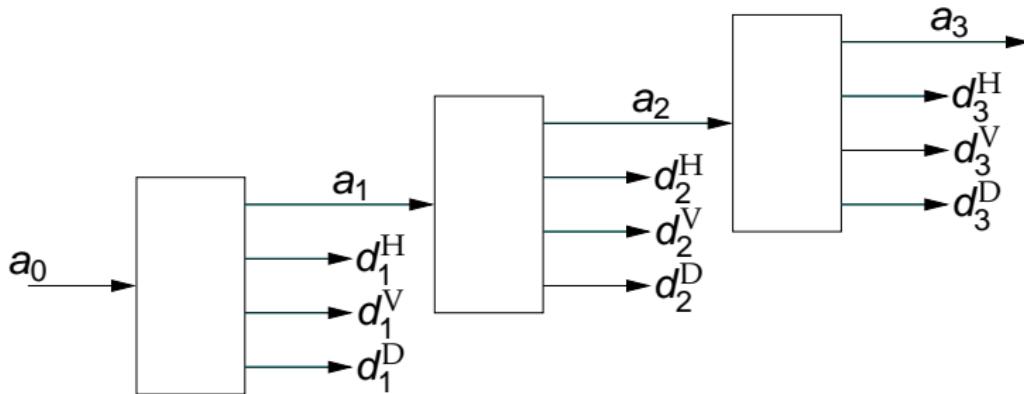
Exemple



Exemple

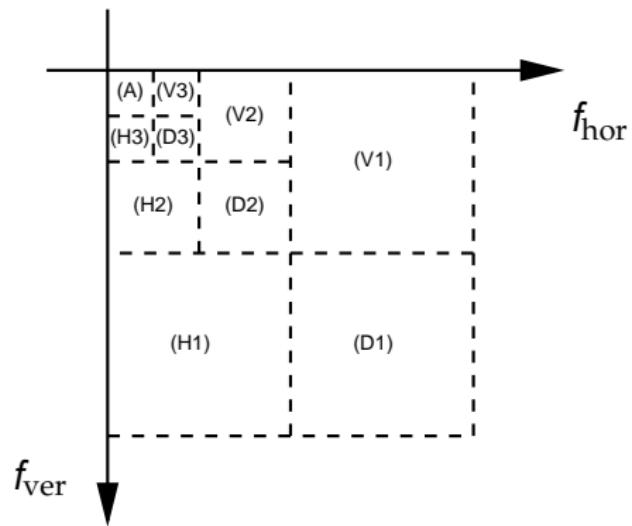


AMR 2D sur 3 niveaux

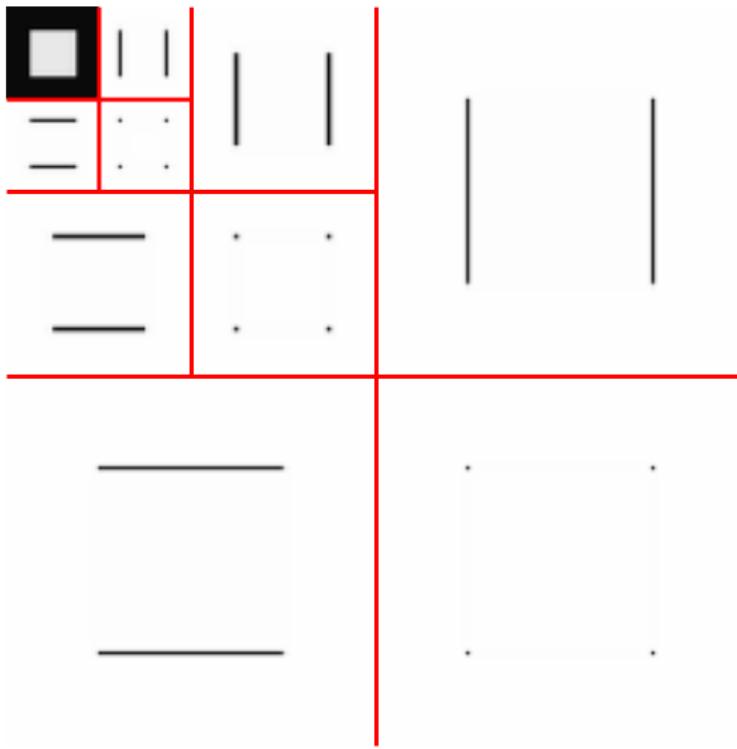


Mise en oeuvre d'une AMR 2D séparable sur 3 niveaux de résolution.

AMR 2D - interprétation fréquentielle



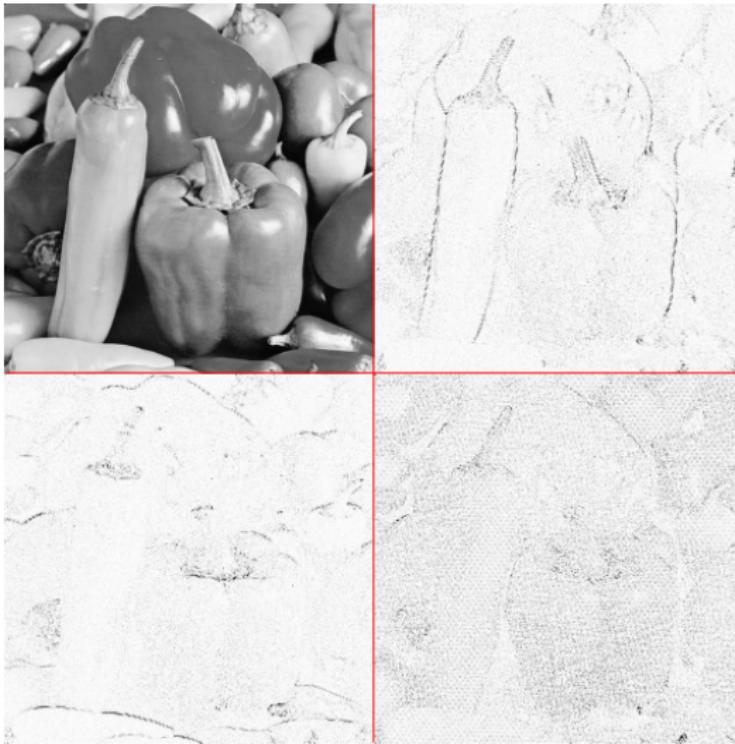
Exemple



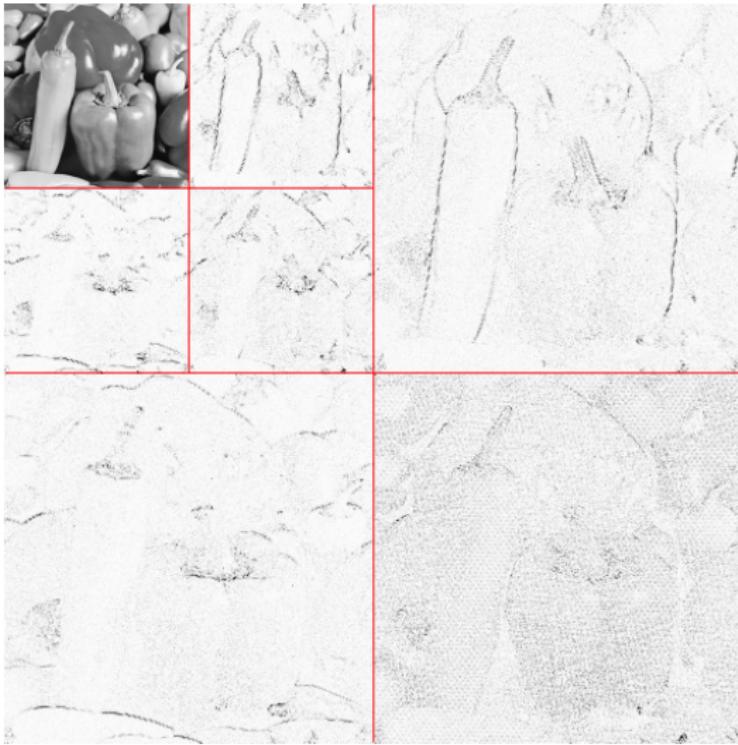
Exemple



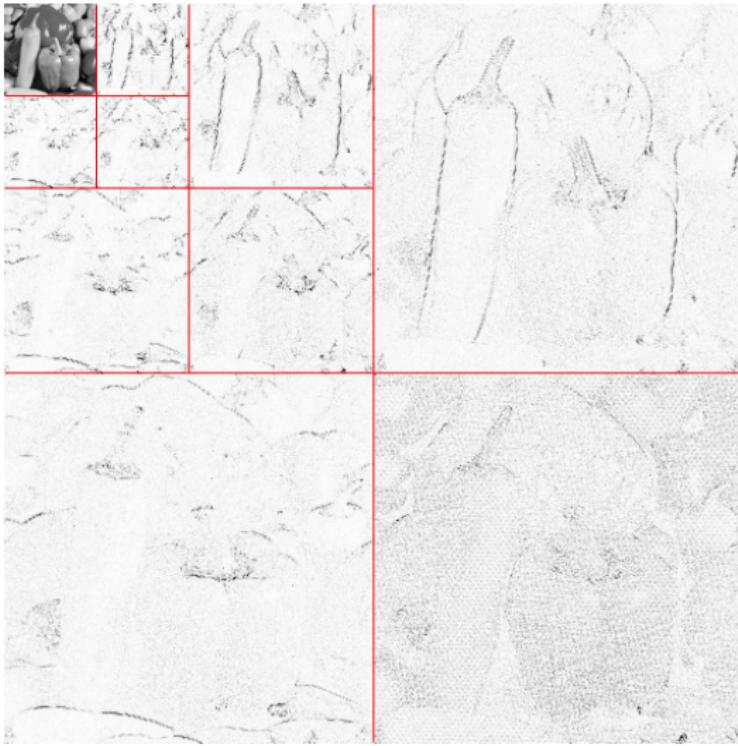
Exemple



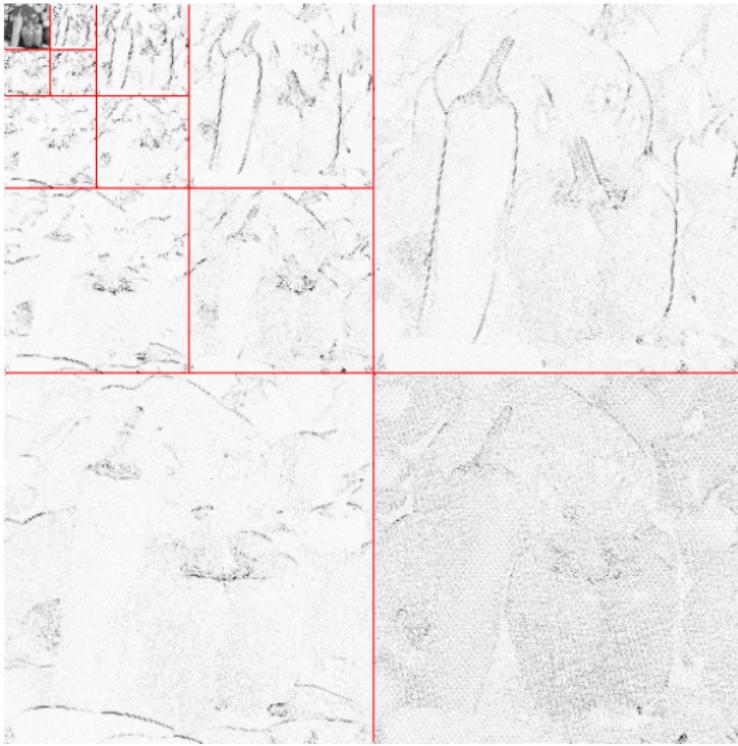
Exemple



Exemple



Exemple



Outline

Introduction

Transformée en ondelettes

Applications

Compression
Débruitage

Ondelettes et codage par sous-bandes

Motivations

Limites de JPEG

- ▶ Effets de blocs
- ▶ Limites des représentations progressives (scalabilité)
- ▶ Analyse spatio-fréquentielle : \approx STFT
 - ▶ Modèle d'images : *trends + anomalies*
 - ▶ La résolution en fréquence devrait varier avec la fréquence
- ▶ Pas de description à résolutions multiples

TO et compression

Pourquoi utiliser la T.O. ?

- ▶ Limites de la TCD : représentation des contours à faibles débits ; effets de bloc
- ▶ T.O. : bon modèle du signal
 - ▶ bonne résolution spatiale à haute fréquence
 - ▶ bonne résolution fréquentielle à basse fréquence
- ▶ Meilleure concentration de l'énergie
- ▶ Absence d'effets de blocs
- ▶ Description à résolutions multiples

Stratégies de codage avec TO

Méthodes ne prenant pas en compte les spécificités de l'AMR

- ▶ Allocation de bits entre les sous-bandes
- ▶ Quantification dans chaque sous-bande (quantificateur optimal de Lloyd-Max adapté)
- ▶ Codage entropique (ex. : Huffman), éventuellement contextuel
- ▶ **Avantage** : corrélations intra-bande bien exploitées (une QV peut encore améliorer l'efficacité !)
- ▶ **Inconvénient** : on n'exploite pas les corrélations résiduelles inter-bandes !

Stratégies de codage avec TO

Méthodes prenant en compte les spécificités de l'AMR

- ▶ EZW (Embedded Zerotrees of Wavelet coefficients),
- ▶ SPIHT (Set Partitioning in Hierarchical Trees)
- ▶ Méthodes basées sur une représentation par arbres des dépendances entre les sous-bandes
- ▶ Avantages : corrélations inter-bande bien exploitées, faible complexité
- ▶ Inconvénient : plus difficile obtenir la scalabilité en résolution

JPEG2000

- ▶ JPEG2000 vise des domaines où les standards courants ne donnent pas les meilleures performances :
- ▶ Compression bas débit : qualité faible pour JPEG en dessous de 0.25 bpp
- ▶ Compression d'images synthétiques
- ▶ Accès aléatoire
- ▶ **Transmission progressive en qualité et en résolution**

Nouvelles fonctionnalités

- ▶ Codage des régions d'intérêt
- ▶ Scalabilité en qualité et en résolution
- ▶ Tiling
- ▶ Capacité d'atteindre un débit donné
- ▶ Du codage sans perte au codage avec perte dans un seul système et un seul flux binaire

Algorithme

- ▶ Transformation en ondelettes
- ▶ Partition en blocs
- ▶ EBCOT:
 - ▶ Quantification
 - ▶ Codage entropique
 - ▶ Allocation de débit (optimisation RD)
- ▶ Ondelettes utilisées :
 - ▶ mode “sans perte” : biorthogonales 5/3 (lifting entiers vers des entiers)
 - ▶ mode “avec perte” : Daubechies biorthogonales 9/7

Débruitage

Principes

Modèle : On observe un signal $r(t)$ qui est la somme d'un signal utile inconnu $s(t)$ et d'un bruit aléatoire $b(t)$.

Après décomposition sur une base d'ondelettes on a :

$$c_j^r[k] = c_j^s[k] + c_j^b[k]$$

Hypothèses :

- ▶ base orthonormale,
- ▶ décomposition orthogonale,
- ▶ signal original (résolution $j = 0$) de taille multiple de $2^{j_{\max}}$
- ▶ RSB élevé en bande d'approximation :

$$a_{j_{\max}}^s \approx a_{j_{\max}}^r$$

Critère : minimisation de l'EQM : $\mathcal{E}^2(s) = E\{\|s - \hat{s}\|^2\}$

Débruitage

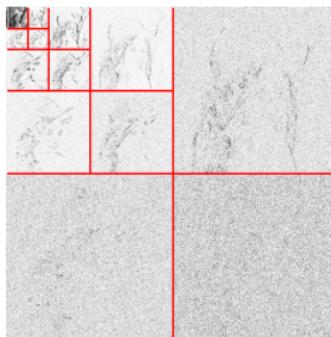
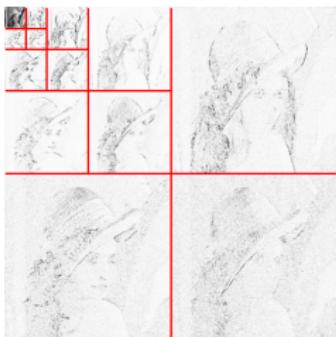
Principes

- ▶ Signal utile régulier
 - ▶ Énergie concentrée dans les basses fréquences
 - ▶ Signal creux dans les hautes fréquences
 - ▶ Beaucoup de coefficients très petits
 - ▶ Quelques coefficients de grande amplitude (information !)
- ▶ Le bruit est souvent blanc et stationnaire
 - ▶ Modèle : blanc, stationnaire, centré et de puissance σ^2
 - ▶ Puissance équi-repartie entre les sous-bandes
- ▶ Qu'est-ce qu'on retrouve dans les sous-bandes à haute fréquence ?

Exemples



SNR: 22.4 dB;



$$\sigma = 10$$

Exemples

Sousbande d'approximation



SNR: 46.4 dB

Exemples

Sousbande de détail

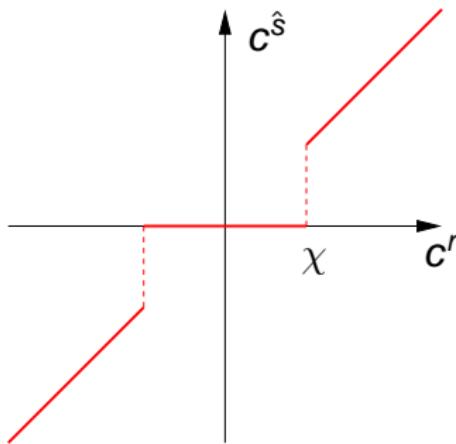


SNR: 15.2 dB

Estimateur par atténuation

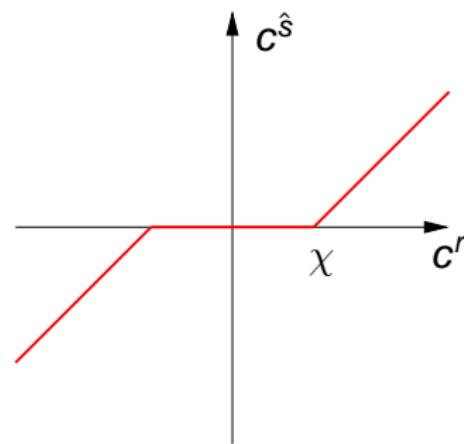
- ▶ $c_j^{\hat{s}}[k] = \theta_j[k]c_j^r[k]$
- ▶ La valeur optimale de $\theta_j[k]$ dépend de $c_j^s[k]$ qui est inconnu !
- ▶ Si on constraint θ à être binaire : $\theta_j[k] \in \{0, 1\}$, alors
 - ▶ L'EQM est le double du cas précédent
 - ▶ Il est plus facile de déterminer la valeur optimale de θ : c'est 1 uniquement si $|c_j^s[k]| > \sigma$
- ▶ En conclusion : il faut retenir les coefficients d'ondelettes ou le signal est censé avoir une valeur élevée, et mettre à zéro les autres.

Notion de seuillage



Hard Thresholding

$$c^{\hat{s}} = \begin{cases} c^r & \text{if } |c^r| > \chi \\ 0 & \text{if } |c^r| \leq \chi \end{cases}$$



Soft Thresholding

$$c^{\hat{s}} = \begin{cases} c^r - \chi & \text{if } c^r > \chi \\ 0 & \text{if } |c^r| \leq \chi \\ c^r + \chi & \text{if } c^r < -\chi \end{cases}$$

Notion de seuillage

- ▶ Le seuillage dur a un comportement discontinu au voisinage du seuil $\pm\chi$
- ▶ Le seuillage doux introduit un biais $\mp\chi$ sur l'estimation des coefficients de grande amplitude
- ▶ Problème principale : **choix de la valeur du seuil**

Approche minimax

Si les coefficients d'ondelettes du bruit $c_j^b[k]$ sont de même loi marginale $\tilde{\mu}$ symétrique (de variance σ^2)

Alors

- ▶ On peut donner un'équation donnant χ_m , le seuil qui minimise le maximum de l'EQM sur l'ensemble des signaux s .
- ▶ On peut relier cette EQM au cas idéal d'oracle binaire

Tableaux de solutions numériques

Valeur asymptotique du seuil optimal

- ▶ Supposons que les coefficients d'ondelettes du bruit soient de densité marginale :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mu(z) = Ce^{-h(z)}$$

où $C \in \mathbb{R}_+^*$ et h est une fonction paire, continue, strictement croissante sur \mathbb{R}_+ , convexe et majoré à l'infini par un polynôme

- ▶ Quand la taille du signal K_m va vers $+\infty$, on a

$$\chi_m \sim \chi_U = h^{-1}(\ln K_m)$$

- ▶ Dans le cas gaussien, $\chi_U = \sigma \sqrt{2 \ln K_m}$
- ▶ χ_U est appelé *seuil universel*