

Restauration des images

Saïd Ladjal (said.ladjal@telecom-paristech.fr)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

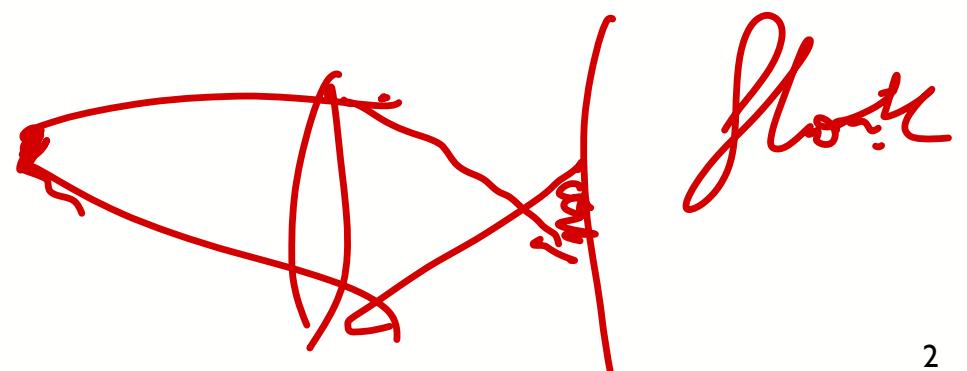
$\xrightarrow{\text{BRUIT}}$

m

$$M^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma \\ 2 \times 10^6 & 0 \end{pmatrix} \Delta$$

Position du problème

- Les images acquises subissent des dégradations.
- Ces dégradations sont dues, d'une part au capteur et d'autre part aux conditions de prise de vue.



Les défauts: Le bruit

- Le bruit est une erreur de mesure pour chaque pixel.
- Il a différentes sources (essentiellement):
 - Bruit de lecture (uniforme)
 - Bruit photonique (dépend de la luminosité)



Bruit photonique: $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si photon n° n est opt} \\ 0 & \text{sin} \end{cases}$

$$P(X_n = 1) = p$$

$$Y = \sum_{i=1}^N X_i$$

N est aussi aléatoire

$$\bar{Y} = PN$$

$$\text{Var}(Y) = p(1-p)N$$

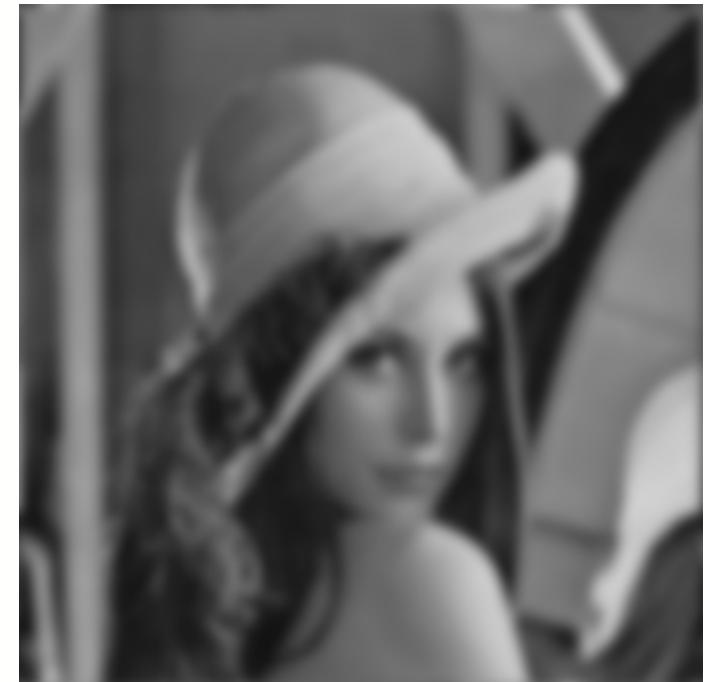
$$\boxed{\text{Var}(Y) = PN = \bar{Y}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Var}(Y) \\ \downarrow \\ \text{pas pertinent} \end{array} \right\} \frac{\sqrt{\text{Var}(Y)}}{\bar{Y}} = \frac{\sqrt{pN}}{pN} = \frac{1}{\sqrt{pN}}$$

N grand : $\frac{\sqrt{\text{Var}(Y)}}{\bar{Y}}$ est petit.

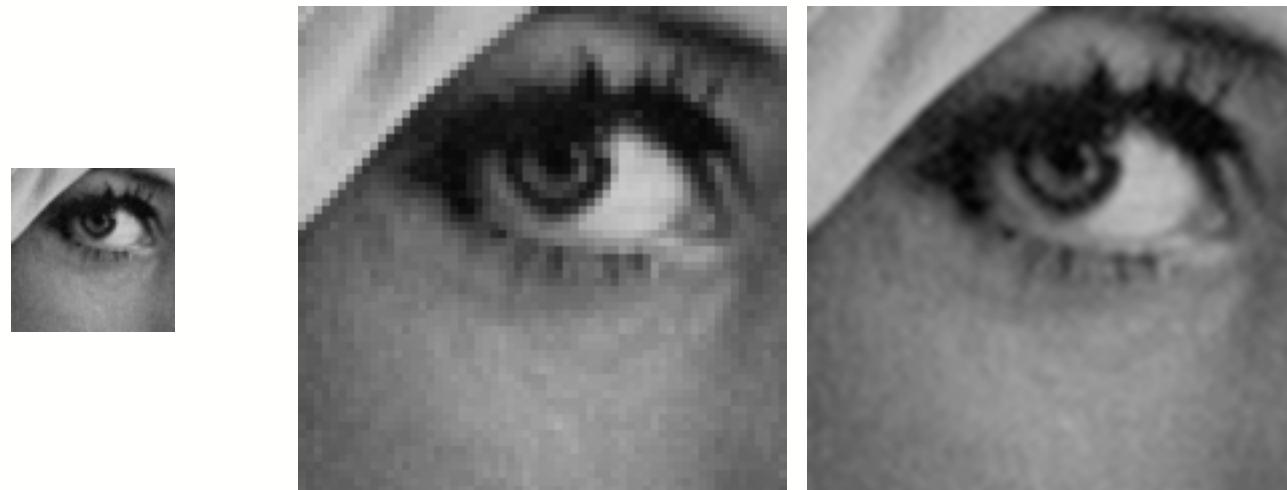
Les défauts: Le flou

- Le flou a plusieurs sources:
 - Optique (mise au point)
 - Turbulence atmosphérique
 - Mouvement
 - Diffraction



Les défauts: Le flou

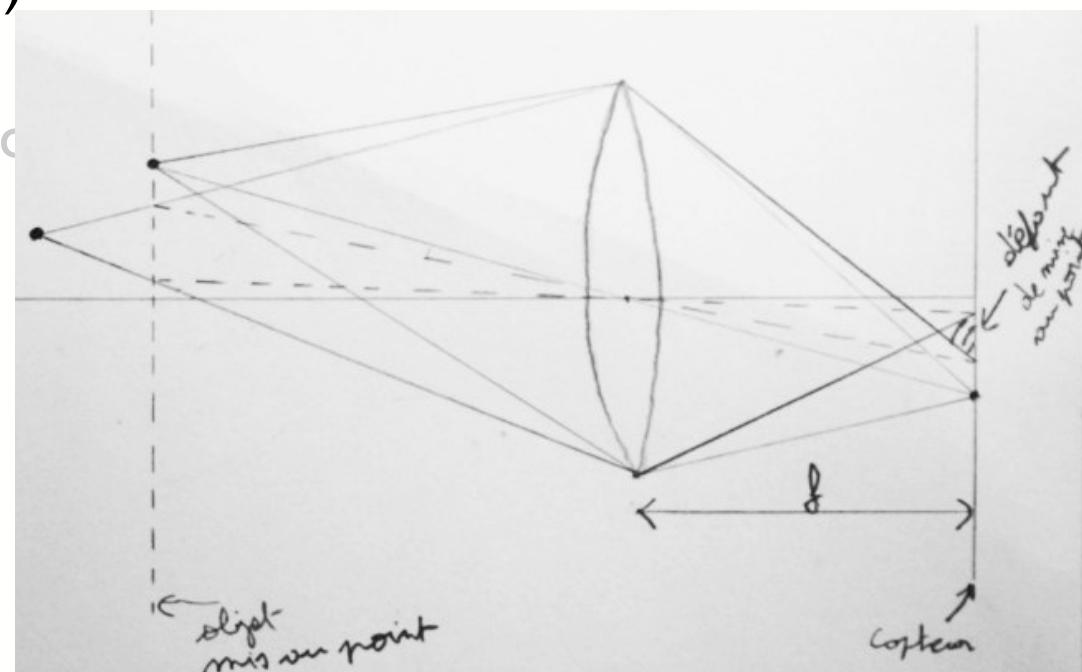
Il y a toujours un flou minimal de la taille du pixel



Les défauts: Le flou

- Le flou a plusieurs sources:

- Optique (mise au point)
- Turbulence atmosphérique
- Mouvement
- Diffraction



Les défauts: Le flou

- Le flou a plusieurs sources:

- Optique (mise au point)

- Turbulence atmosphérique: modèle: $G(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

- Mouvement

- Diffraction

Les défauts: Le flou

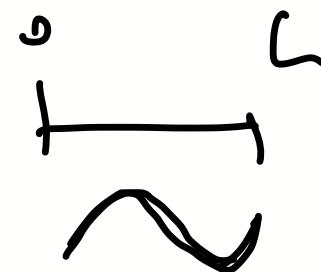
- Le flou a plusieurs sources:

- Optique (mise au point)



- Turbulence atmosphérique

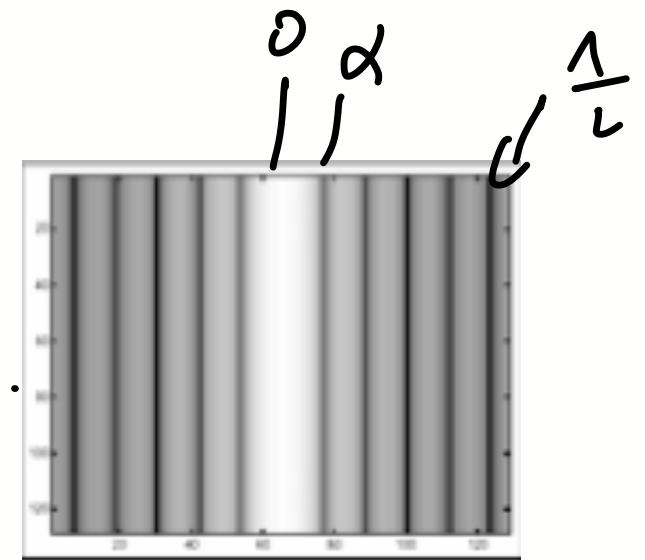
- Mouvement



- Diffraction

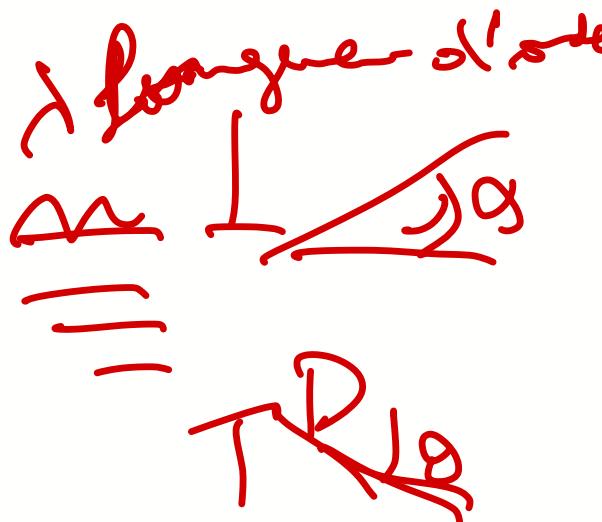
$$L \text{ longueur : } d = \frac{1}{L}$$

$$\frac{1}{z} = 5,5 d$$



$$L = 11 \text{ pixels}^8$$

Les défauts: Le flou



- Le flou a plusieurs sources:

- Optique (mise au point)
- Turbulence atmosphérique
- Mouvement

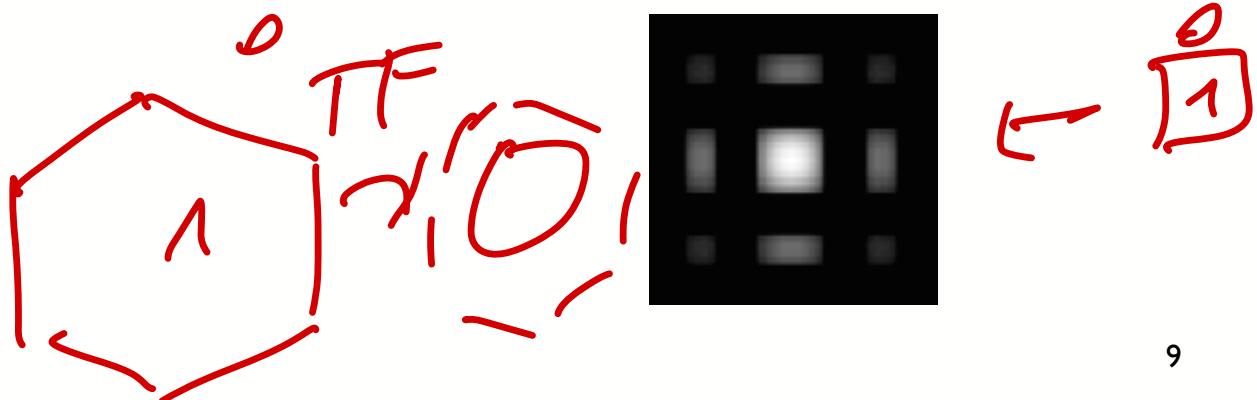
- Diffraction

$$\theta \approx 1,12 \frac{\lambda}{D}$$

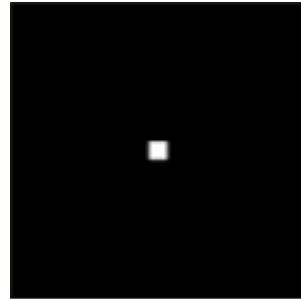
D : Ouverture

λ : Longueur d'onde

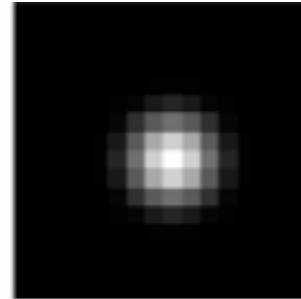
θ : Angle de diffraction



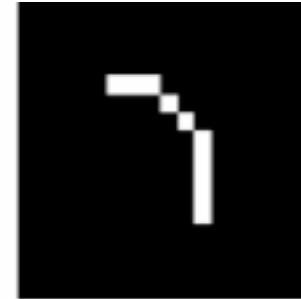
Exemples



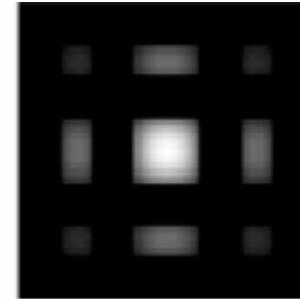
Ponctuel



Gauss



Bougé



Diffraction



Originale



Gaussien



Bougé

10

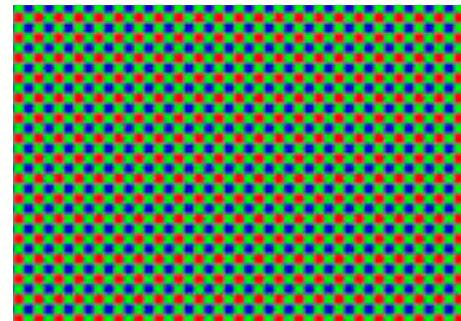
Les défauts: Aberrations géométriques

- La géométrie de la photographie ne correspond pas à une projection sur un plan.
- Il suffit de déformer l'image en utilisant une bonne interpolation.



Les défauts: Mauvais échantillonnage

- Il se compare à la capacité de l'optique qui est limitée par la diffraction.



La matrice de Bayer induit naturellement un sous-échantillonnage.

- En général tous les défauts sont présents:
 - Le flou (au moins le pixel et la diffraction).
 - Un flou souvent variable sur l'image.
 - Le bruit surtout en cas de mauvaise illumination.
 - Sous-échantillonnage (sauf si le flou est très fort).

Le défaut est-il uniforme?



Modélisation pour la suite

$$g = f * K + b$$

f : image parfaite

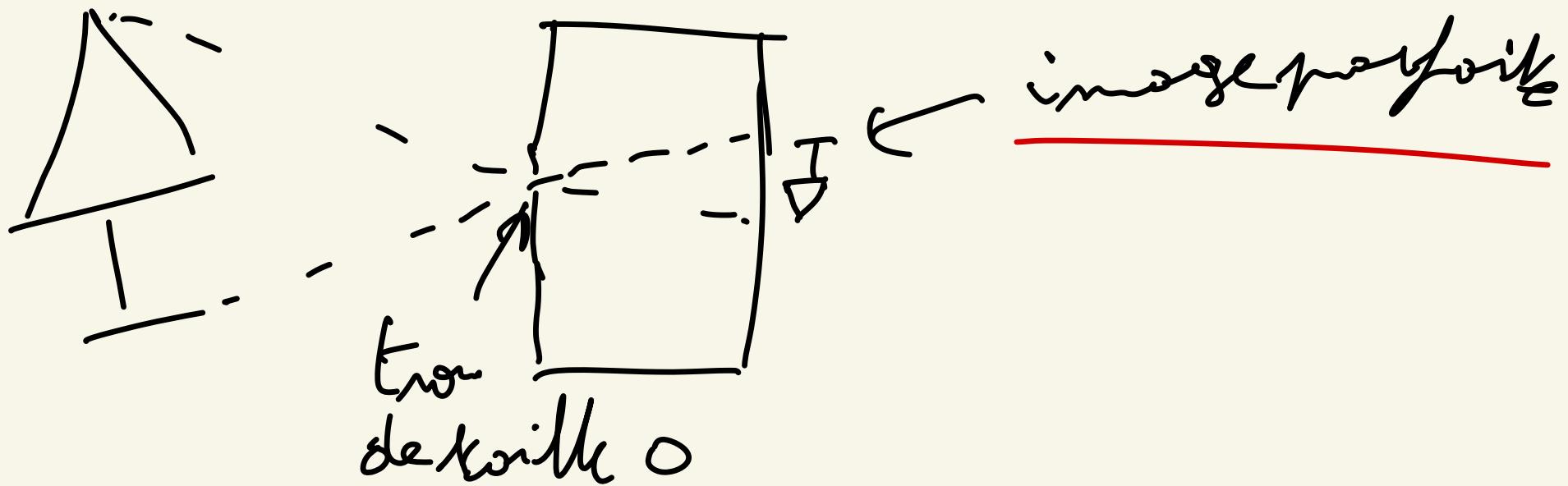
g : observation

K : Noyau de flou

b : bruit, supposé uniforme et indépendant du signal

Qu'est-ce que l'image parfaite?

Image parfaite :



Modélisation pour la suite: Continu/discret

- Le théorème de Shannon de bon échantillonnage permet un passage sans perte du discret au continu.
- Le caractère fini des images traitées implique de faire une hypothèse sur la continuation des images hors de leur support connu: **On fera l'hypothèse de périodicité pour simplifier la présentation.**

Modélisation pour la suite: Continu/discret

On peut donc, en négligeant le sous-échantillonnage, dire que le problème se présente comme:

$$g = Af + b$$

$f \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ inconnue

$g \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ connue

A : matrice de convolution carrée de taille $N^2 \times N^2$

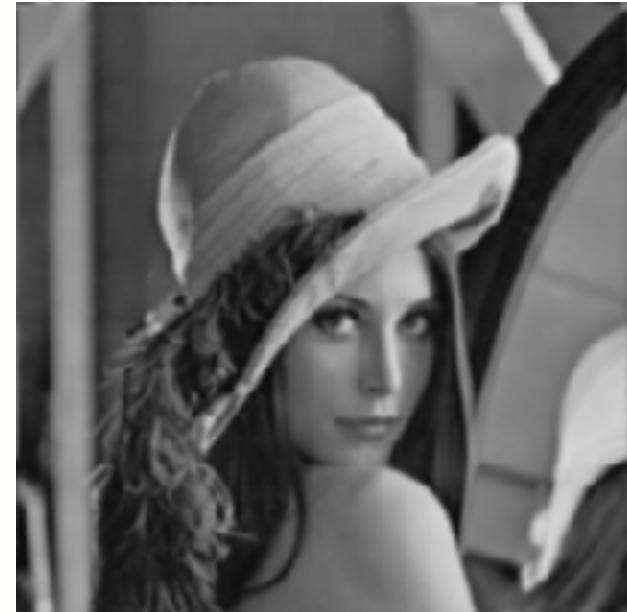
$b \in \mathbb{R}^{N^2}$: réalisation d'un bruit gaussien

L'hypothèse de périodicité implique que la matrice A est circulante et diagonalisable dans la base de Fourier

Résolution: Inverser A?



$$A \longrightarrow$$

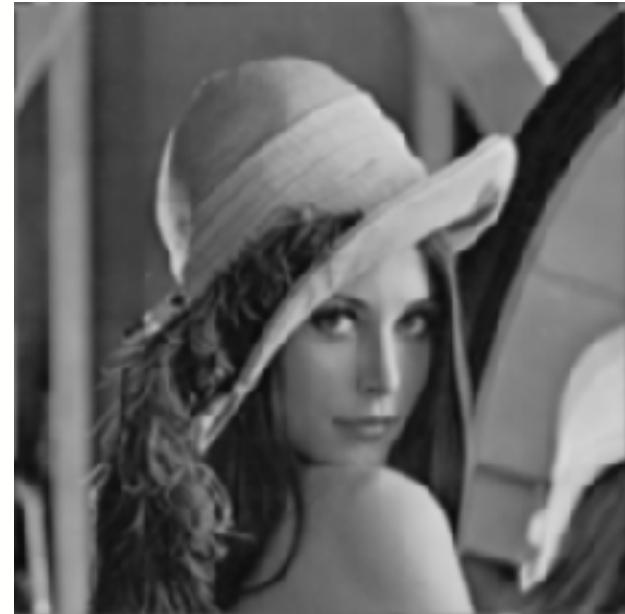


$$A^{-1}$$

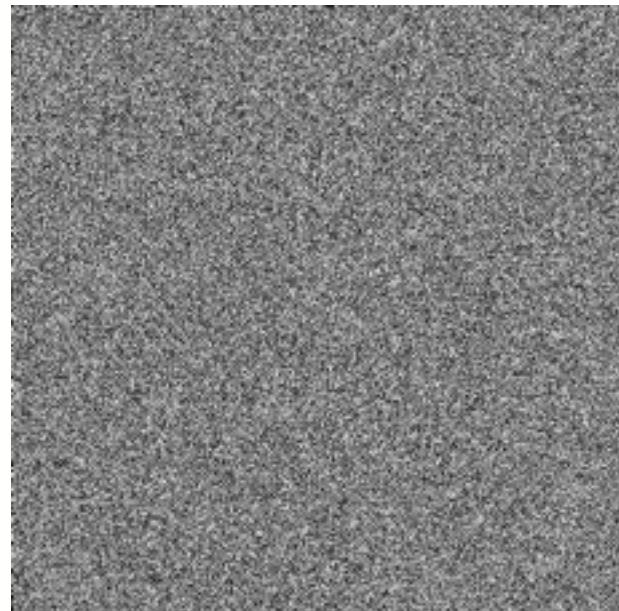
Résolution: Inverser A?



$$\frac{Af + b}{\sigma_b = 0.1} \quad \equiv$$



0-255



A diagram illustrating a linear transformation. A black curved arrow points from the original image to a blue straight arrow. The blue arrow is labeled A^{-1} .

Résolution: Wiener

- Il faut introduire une connaissance a priori sur le signal.
- Dans un premier temps nous adoptons une approche probabiliste
- Exemple avec une seule variable observée:

$$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$$

$$B \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$$

$Y = \alpha X + B$
touver $\tilde{X} = \beta Y$ t.q.
 $E(|\tilde{X} - X|^2)$ soit minimal

Ex: trouver β ;

$$\overline{\beta} = \frac{\alpha}{|\alpha|^2 + \cancel{\sigma_b^2}}$$

$$\tilde{X} - X = (\alpha \beta - 1) X + \epsilon B$$

$$\text{Var}(\tilde{X} - X) = (\alpha \beta - 1)^2 \sigma_s^2 + \beta^2 \sigma_e^2$$

$$\beta_{\min} = \frac{\alpha \sigma_s^2}{\alpha^2 \sigma_s^2 + \sigma_e^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_s^2}}$$

Si $X \in \mathcal{A}$

$$\beta = \frac{\alpha}{|\alpha| + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_s^2}}$$

(Si $\sigma_e = ?$)

$$\beta = \frac{1}{|\alpha| + \frac{\sigma_e^2}{\sigma_s^2}}$$

$$\sigma_e \rightarrow \infty : \beta \rightarrow 0$$

Résolution: Wiener

- Il faut introduire une connaissance a priori sur le signal.
- Dans un premier temps nous adoptons une approche probabiliste
- Exemple avec une seule variable observée:

$$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$$

$$B \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$$

$$Y = \alpha X + B$$

trouver $\tilde{X} = \beta X$ t.q.

$E(|\tilde{X} - X|^2)$ soit minimal

$$\beta = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2}}$$

Résolution: Wiener

- Le signal est supposé être un vecteur gaussien:

$$E(B^T B) = \sigma_b^2 I$$

$$X \text{ v.a. } \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbb{P}(X) \sim e^{-\frac{1}{2} X^T C^{-1} X}$$

$C = E(X^T X)$ matrice de covariance déf. pos.

$$\mathbb{P}(B) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{\|B\|^2}{\sigma_b^2}}$$

$$Y = AX + B$$

trouver $\tilde{X} = DY$ t.q.

$E(\|\tilde{X} - X\|^2)$ soit minimale

$$\Delta \text{ Si } C = \sigma_s^2 I$$

$$\|\tilde{x} - x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\tilde{x}_i - x_i|^2$$

$\hookrightarrow D$ = diagonale

$$\tilde{x}_i = R_i y_i$$

$$R_i =$$

Résolution: Wiener

- Le signal est supposé être un vecteur gaussien:

$$X \text{ v.a. } \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbb{P}(X) \sim e^{-\frac{1}{2} X^T C^{-1} X}$$

$C = E(X^T X)$ matrice de covariance déf. pos.

$$\mathbb{P}(B) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{\|B\|^2}{\sigma_b^2}}$$

$$Y = AX + B$$

trouver $\tilde{X} = DY$ t.q.

$E(\|\tilde{X} - X\|^2)$ soit minimale

maximiser $e^{-\frac{1}{2} \tilde{X}^T C^{-1} \tilde{X}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\|A\tilde{X} - Y\|^2}{\sigma_b^2}}$
i.e. minimiser $\frac{1}{\sigma_b^2} \|A\tilde{X} - Y\|^2 + \tilde{X}^T C^{-1} \tilde{X}$

Sachant Y Probaf(X = X₀)

$$e^{-\frac{1}{2} X_0^T C^{-1} X_0} \times e^{-\frac{1}{2} \frac{\|AX_0 - Y\|^2}{G_i^2}}$$

mon: e

$$\beta = \cancel{X} - AX$$

minimiser : $\frac{1}{2} X_0^T C^{-1} X_0 + \frac{1}{2} \frac{\|AX_0 - Y\|^2}{G_i^2}$

Minimiser $X_0^T C^{-1} X_0 + \frac{\|AX_0 - Y\|^2}{G_i^2}$?
 X_0

Minimiser $X_0^T C^{-1} X_0 + \frac{\|A X_0 - Y\|^2}{\epsilon}$?

X_0 $C^T = C$ ϵ

$$\begin{aligned}
 & X^T D X : (X + h)^T D (X + h) \\
 (D = D^T) &= X^T D h + h^T D X + X^T D X \\
 & + h^T D h \quad \xrightarrow{\text{cancel}} 0 \\
 & = 2 X^T D h - \langle D^T X | h \rangle \\
 & + X^T D X \\
 & + \epsilon \quad \xrightarrow{\text{neg}}
 \end{aligned}$$

$$F(X_0) = X_0^T C^{-1} X_0 + \underbrace{(A X_0 - Y)^T \cdot (A X_0 - Y)}_{G_x}$$

$$\nabla F(X_0) = 2 C^{-1} X_0 + \begin{pmatrix} 2 A^T A X_0 \\ 2 A^T Y \end{pmatrix} \frac{1}{G_x}$$

$$X_0^T A^T Y = Y^T A X_0 = \langle \bar{A} Y | X_0 \rangle$$

$$= (C^{-1} + \bar{A}^T A) X_0 - \bar{A}^T Y$$

$$X_{\min} = (C^{-1} + \bar{A}^T A)^{-1} \cdot \bar{A}^T Y$$

Résolution: Wiener

- Le signal est supposé être un vecteur gaussien:

$$X \text{ v.a. } \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbb{P}(X) \sim e^{-\frac{1}{2} X^T C^{-1} X}$$

$C = E(X^T X)$ matrice de covariance déf. pos.

$$\mathbb{P}(B) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{\|B\|^2}{\sigma_b^2}}$$

$$Y = AX + B$$

trouver $\tilde{X} = DY$ t.q.

$E(\|\tilde{X} - X\|^2)$ soit minimale

$$P_{min} = \frac{\bar{x}}{|d|^2 + \frac{\sigma_d^2}{\sigma_s^2}}$$

$$\tilde{X} = \underbrace{(A^T A + \sigma_b^2 C^{-1})^{-1}}_D \underbrace{A^T Y}_D$$

Résolution: Wiener

$A = \begin{pmatrix} R(0) & 0 \\ R(\omega_1) & -\hat{K}(\omega) \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$
dans la base de Fourier

- Pour les images, une base de décomposition naturelle: Fourier
- La densité spectrale de puissance:
- On peut l'imposer comme a priori.
- Utiliser celle de l'image dégradée.

$$\tilde{X} = \underbrace{(A^T A + \sigma_b^2 C^{-1})^{-1}}_{D} \underbrace{A^T Y}_{\downarrow}$$

$$g = Af + b$$

$f \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ inconnue

$g \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ connue

A : matrice de convolution carrée de taille $N^2 \times N^2$

$b \in \mathbb{R}^{N^2}$: réalisation d'un bruit gaussien

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{\hat{K}(\omega)}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2(\omega)}} \hat{g}(\omega)$$

ω parcourt les fréquences de Fourier

$\sigma_s^2(\omega)$ puiss. du signal à la fréq. ω

$$AX \stackrel{?}{=} K * X$$

e_i : base
of Fourier

$$X = \sum \gamma_i e_i \quad \gamma_i = \vec{x}(i)$$

$$\hat{A}x(i) = \hat{F}(i) \cdot \vec{x}(i)$$

$$Ax = \sum \hat{F}(i) \vec{x}(i) e_i$$

$$def: A = \begin{pmatrix} \hat{K}^{(0)} & 0 \\ 0 & \hat{K}^{(n)} \end{pmatrix}$$

ols base
base
of Fourier.

$$\hat{X} = \left(G_e^* C^{-1} + A^* A \right)^{-1} A^* y$$

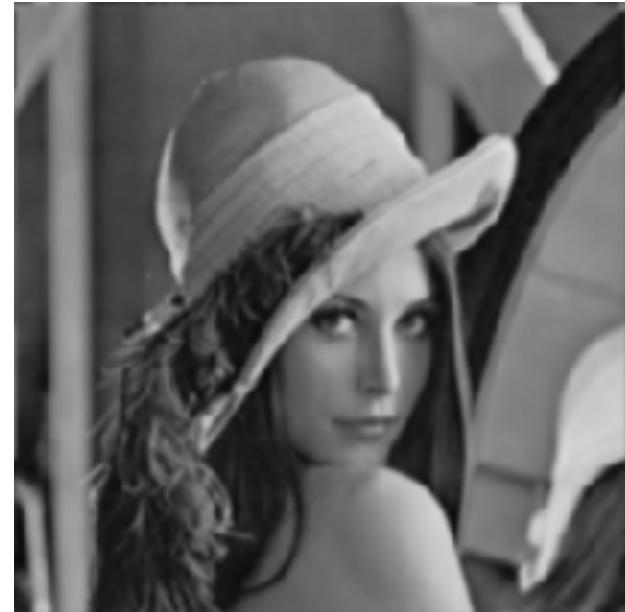
$$= \left(G_e^* \begin{pmatrix} G_S(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} + \begin{pmatrix} |\hat{K}(\omega)|^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\hat{K}(\omega)} \\ \overline{\hat{g}(\omega)} \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \overline{\hat{K}(\omega)} \\ \overline{\hat{g}(\omega)} \end{pmatrix}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{\overline{\hat{K}(\omega)} \cdot \overline{\hat{g}(\omega)}}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \frac{G_e}{G_S(\omega)}}$$

Résolution: Wiener



$$\xrightarrow{\quad Af + b \quad}$$
$$\sigma_b = 2$$



Wiener

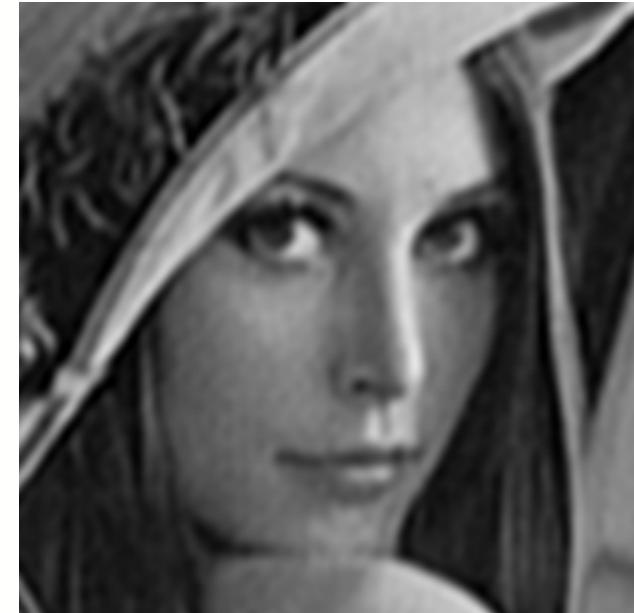
Wiener: erreurs d'estimation



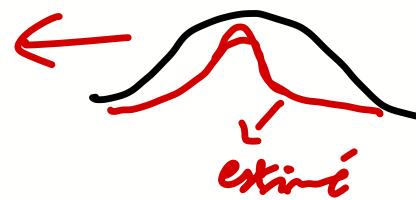
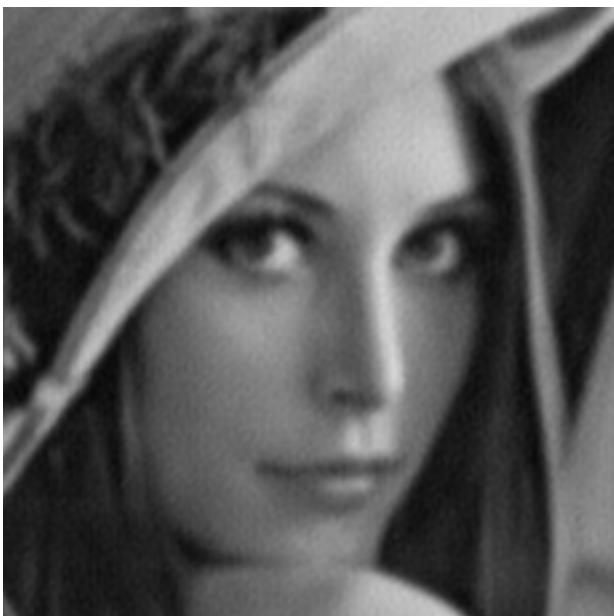
Bonne



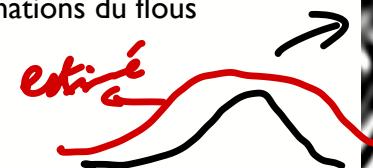
Bruit sous-estimé



Bruit sur-estimé



Mauvaises estimations du flous



Approche par minimisation d'énergie

$$g = Af + b$$

$f \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ inconnue

$g \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ connue

A : matrice de convolution carrée de taille $N^2 \times N^2$

$b \in \mathbb{R}^{N^2}$: réalisation d'un bruit gaussien

- L'image recherchée doit expliquer l'observation:
Attache aux données.

- Elle doit aussi être régulière.

$$E(\tilde{f}) = \underbrace{\|A\tilde{f} - g\|^2}_{\text{attache aux données}} + \lambda R(\tilde{f})$$

$R(\tilde{f})$: régularité. Par exemple $\int \|\nabla \tilde{f}\|^2$

λ : paramètre de régularisation

Approche par minimisation d'énergie

$$E(\tilde{f}) = \underbrace{\|A\tilde{f} - g\|^2}_{\text{attaché aux données}} + \lambda \int \|\nabla \tilde{f}\|^2$$

donne $\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{\overline{\hat{K}(\omega)}}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \lambda\omega^2} \hat{g}(\omega)$

Comparer à Wiener

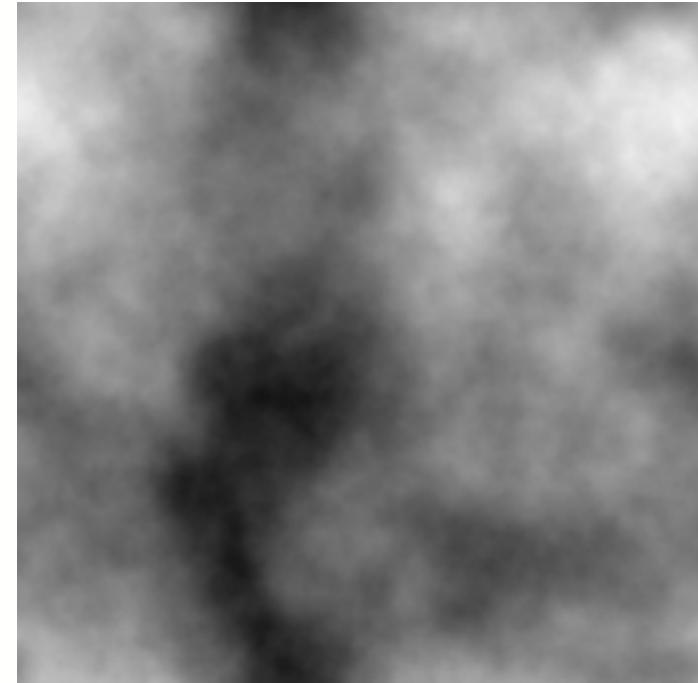
$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{\overline{\hat{K}(\omega)}}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2(\omega)}} \hat{g}(\omega)$$

$\omega \sim \frac{G_b}{G_s(\omega)}$

$G_s(\omega) \sim \frac{1}{\omega^2}$

Remarques sur le modèle

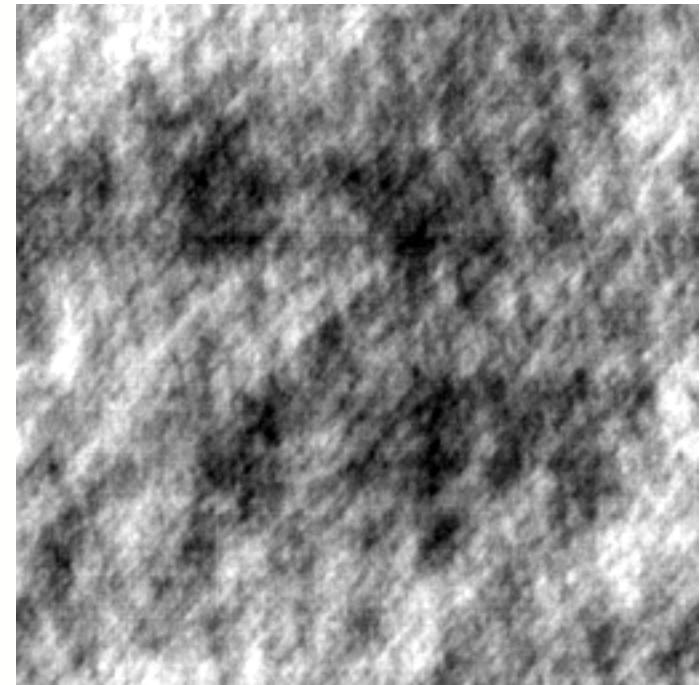
- Le modèle de minimisation d'énergie nous conduit à restaurer l'image comme elle était un tirage aléatoire d'une loi dont un exemple typique est:



DSP en I/ω^2

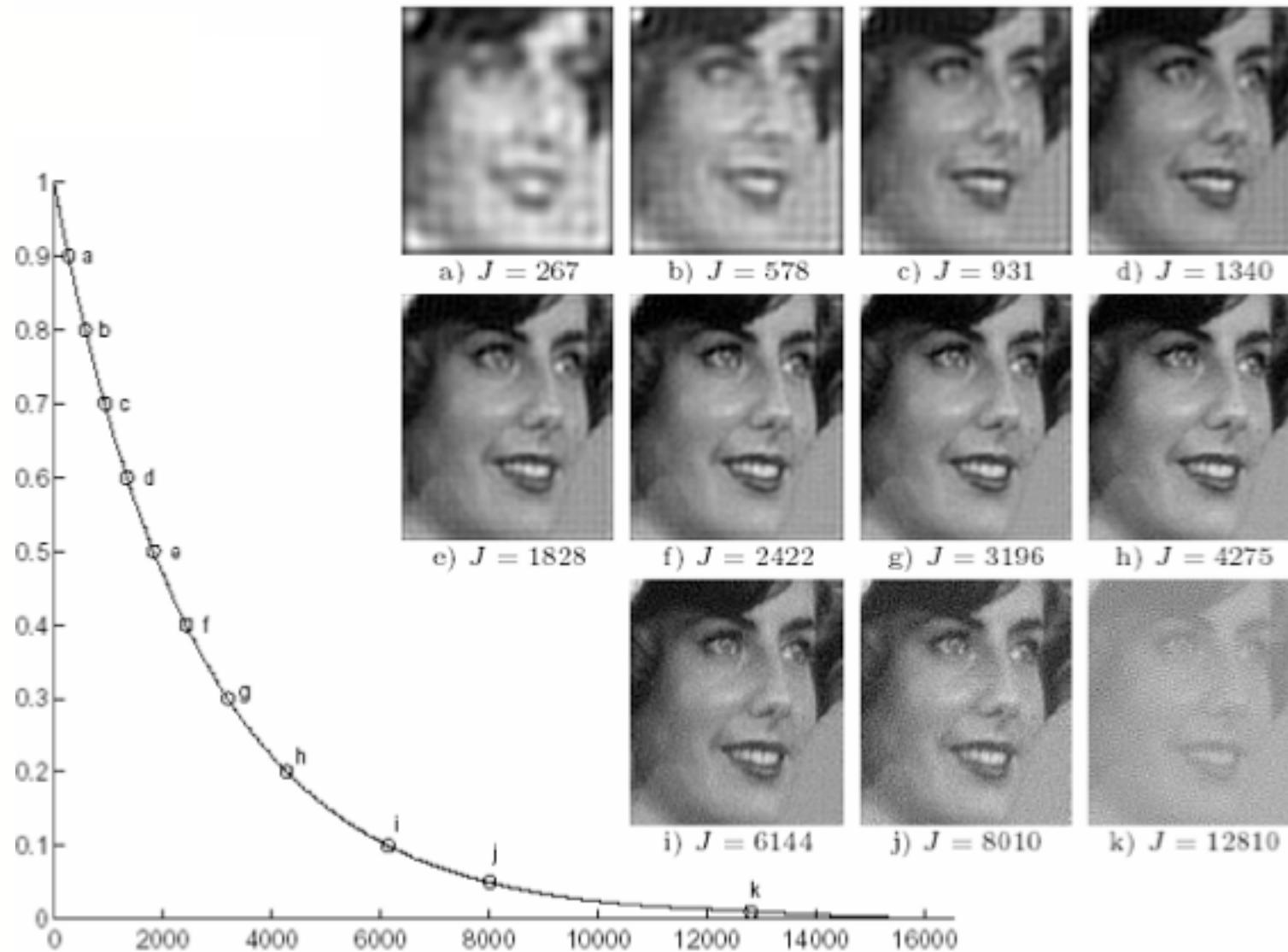
Remarques sur le modèle

- Si on utilise l'image de lena comme DSP et que l'on fait un tirage aleatoire suivant cette DSP



DSP lena

Approche par inversions/annulation



Super-résolution



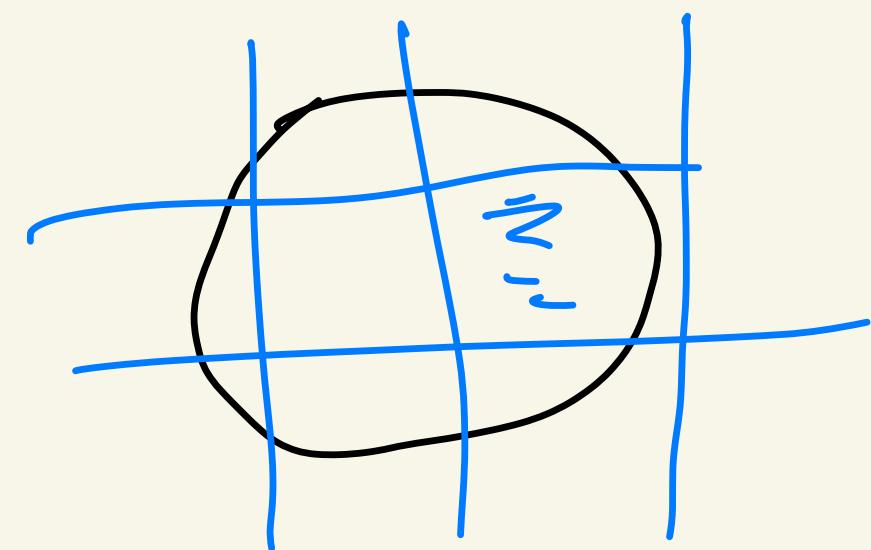
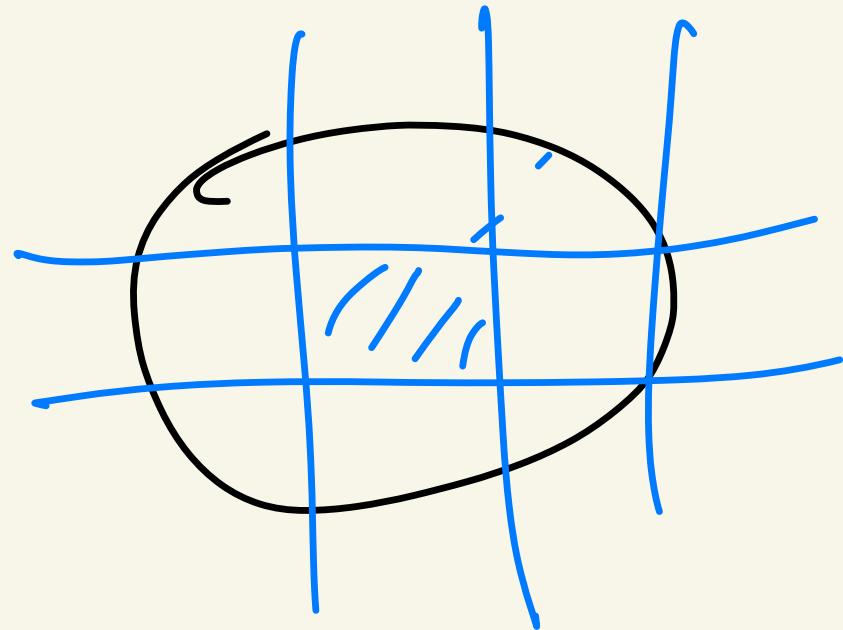
Probleme von statistischer Schätzung:

y_1, \dots, y_n y images d'objets,
d'un m^e N
dans

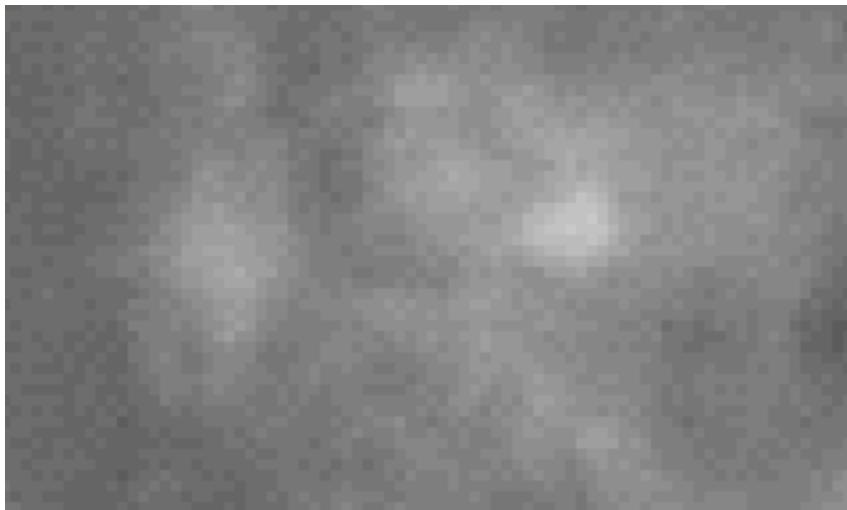
$$y_k = Ax + \beta_k \rightarrow \text{Var} \sigma^2$$

$$\frac{1}{n} \sum y_k = Ax + \frac{\sum \beta_k}{n}$$
$$\text{Var} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$Y_h = A_h X + B_h$$



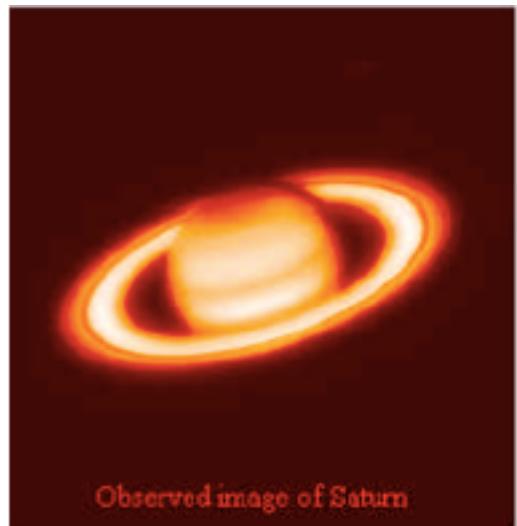
Résultats obtenus en mélangeant différentes images



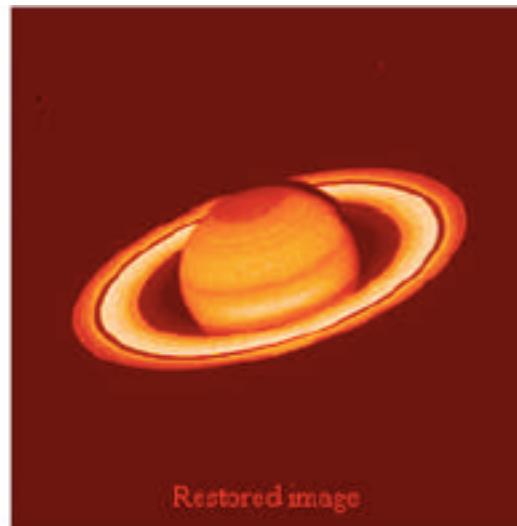
Exemples réels



Spot 5



Observed image of Saturn



Restored image