# Matemática Discreta

Ano Letivo 2024/2025 (Versão: 26 de Maio de 2025)

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
https://elearning.ua.pt/

# Capítulo V
# Elementos de Teoria dos Grafos

## Parte III
## Árvores e florestas

# Índice

# 1. Árvores e florestas

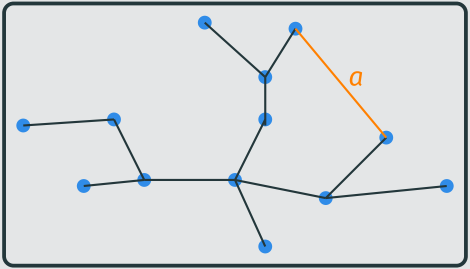
**Definição**

Um grafo simples $G$ diz-se uma **floresta** se $G$ não contém ciclos. Uma floresta conexa designa-se por **árvore**.

**Nota**

Uma floresta é um grafo simples cujas componentes conexas são árvores.

**Exemplo (Árvore)**




Acrescentando a aresta $a$, o grafo já não é uma árvore.

**Teorema**

*Para um grafo simples $G$ com pelo menos um vértice, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(i) *$G$ é uma árvore.*

(ii) *$G$ não tem lacetes e entre cada par de vértices em $G$ existe um único caminho.*

(iii) *$G$ é «minimamente conexo», ou seja, $G$ é conexo e cada aresta é uma ponte.*

(iv) *$G$ é «maximamente acíclico», ou seja, $G$ não contém ciclos, mas acrescentando uma aresta obtém-se um ciclo.*

**Definição**

Seja $G$ um grafo. Um subgrafo abrangente $T$ de $G$ diz-se **árvore abrangente** de $G$ quando $T$ é uma árvore.

**Corolário**

*Cada grafo finito conexo admite uma árvore abrangente. (Por exemplo,*

**Lema**

*Cada árvore finita com pelo menos dois vértices tem pelo menos dois vértices de grau 1 (designados por **folhas**).*

**Lema**

*Uma árvore com $n$ vértices tem precisamente $n-1$ arestas.*

**Teorema**

*Um grafo $G$ conexo com $n$ vértices é uma árvore se e só se $G$ tem $n-1$ arestas.*

**Teorema**

*Um grafo $G$ sem ciclos com $n \geq 1$ vértices é uma árvore se e só se $G$ tem $n-1$ arestas.*

**Teorema**

*Um grafo finito $G$ é uma floresta se e só se*

$$\varepsilon(G) = \nu(G) - \mathrm{cc}(G).$$

**Demonstração.**

Suponhamos que $G$ é uma floresta e sejam $G_1, \dots, G_k$ as componentes conexas de $G$. Logo, $\mathrm{cc}(G) = k$ e

$$\varepsilon(G) = \varepsilon(G_1) + \cdots + \varepsilon(G_k) \quad \text{e} \quad \nu(G) = \nu(G_1) + \cdots + \nu(G_k).$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, k$, $\varepsilon(G_i) = \nu(G_i) - 1$ (o lema anterior para árvores), portanto,

$$\varepsilon(G) = \nu(G) - k.$$

□

**Teorema**

*Um grafo finito $G$ é uma floresta se e só se*

$$\varepsilon(G) = \nu(G) - \mathrm{cc}(G).$$

**Demonstração.**

Suponha agora que $\varepsilon(G) - \nu(G) + \mathrm{cc}(G) = 0$ e sejam $G_1, \dots, G_k$ as componentes conexas de $G$. Logo,

$$0 = \underbrace{(\varepsilon(G_1) - \nu(G_1) + 1)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(\varepsilon(G_k) - \nu(G_k) + 1)}_{\geq 0};$$

ou seja, $\varepsilon(G_i) - \nu(G_i) + 1 = 0$, para cada $i = 1, \dots, k$. Pelo teorema anterior (sobre árvores), cada componente conexa é uma árvore. Portanto, $G$ é uma floresta.

$\square$

# O NÚMERO DE ÁRVORES ABRANGENTES (8)

## Definição

Para um grafo finito $G$, $\tau(G)$ denota o **número de árvores abrangentes de $G$**.

## Alguns casos particulares

- $\tau(G) = 0 \iff G$ é desconexo.
- $\tau(G) = 1 \impliedby G$ é uma árvore.
- Se $G$ é um ciclo com $k$ arestas, então $\tau(G) = k$
- Se $G =$  ($k$ arestas paralelas), então $\tau(G) = k$.

  As árvores abrangentes de $G$ são precisamente as arestas de $G$.
- Se $G$ é constituído por dois subgrafos $G_1$ e $G_2$ unidos por uma ponte ou por um único vértice em comum, então $\tau(G) = \tau(G_1)\,\tau(G_2)$.

  De facto, as árvores abrangentes de $G$ correspondem aos pares $(T_1, T_2)$ onde $T_1$ é uma árvore abrangente de $G_1$ e $T_2$ é uma árvore abrangente de $G_2$.

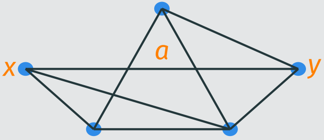
### Fusão de extremos de uma aresta

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $a \in E$ com $\psi(a) = \{x, y\}$. Denotamos por $G//a$ o grafo obtido a partir de $G$ por **fusão** de $x$ e $y$. Mais concretamente, $G//a = (V', E', \psi')$ onde

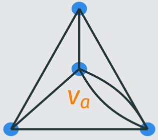
$$V' = V \setminus \{x, y\} \cup \{v_a\}, \quad E' = E \setminus \{a\}$$

e $\psi(e) = \psi'(e)$ para toda a aresta $e \in E$ com $\psi(e) \cap \{x, y\} = \varnothing$, em todos os outros casos $\psi'(e)$ é dado por $\psi(e)$ com $v_a$ no lugar de $x$ e $y$ (que se fundem no vértice $v_a$).

### Exemplo




$G$




$G//a$

**Nota**

Seja $G$ um grafo finito e seja $a$ uma aresta de $G$. Por definição,

$$\varepsilon(G//a) = \varepsilon(G) - 1.$$

**Teorema**

*Seja $G$ um grafo finito e sejam $a, b$ arestas distintas de $G$. Então,*

$$(G//a) - b = (G - b)//a,$$

*ou seja, a operação de fusão de extremos de arestas comuta com a operação de eliminação de arestas.*

**Teorema**

*Seja G um grafo finito e conexo, e a uma aresta de G que não é um lacete. Então,*

$$\tau(G) = \tau(G - a) + \tau(G//a).$$

**Demonstração.**

Temos

$$\begin{aligned}\tau(G) &= |\{\text{as árvores sem } a\}| + |\{\text{as árvores com } a\}| \\ &= \tau(G - a) + \tau(G//a).\end{aligned}$$

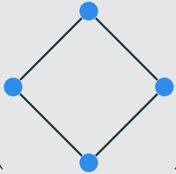
□

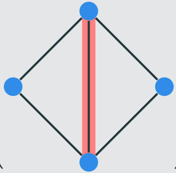
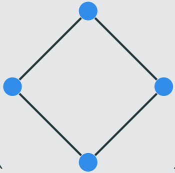
**Nota**

- Se $a$ é um lacete em $G$, então $\tau(G) = \tau(G - a)$.
- Para $\underset{v_0}{\bullet}\overset{a}{\text{———}}\underset{v_1}{\bullet}$ em $G$ com $d(v_1) = 1$: $\tau(G) = \tau(G - v_1)$.

### Exemplos

Não escrevemos aqui os «nomes» dos vértices.

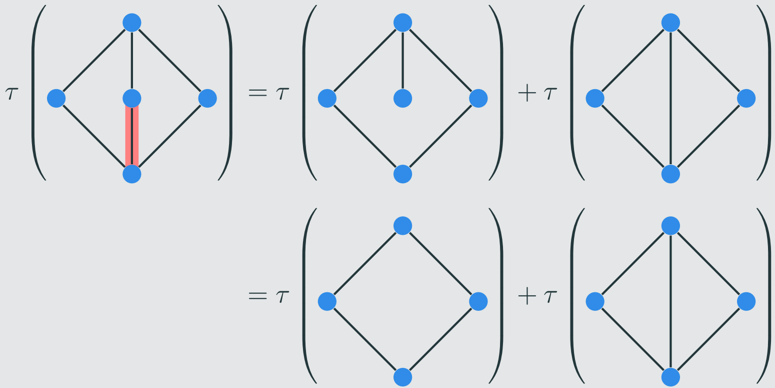
$\tau\Bigg($  $\Bigg) = 4.$

$\tau\Bigg($  $\Bigg) = \tau\Bigg($  $\Bigg) + \tau($  $)$

$$= 4 + 2 \cdot 2 = 8.$$

## Exemplos

Não escrevemos aqui os «nomes» dos vértices.

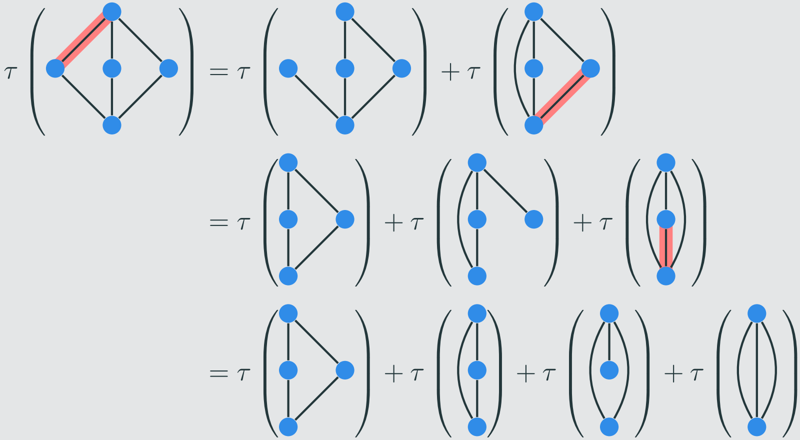


$$= 4 + 8 = 12.$$

# Exemplos (12)

## Exemplos

Não escrevemos aqui os «nomes» dos vértices.

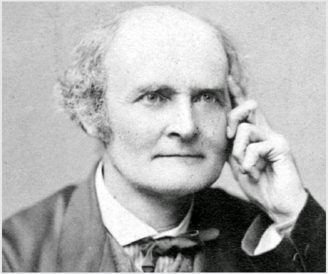


$$= 4 + 3 + 2 + 3 = 12.$$

**Teorema (Fórmula de Cayley)**

*Para cada $n \geq 1$, o número de árvores com $n$ vértices (etiquetadas) é $n^{n-2}$.*

**Referência**



Arthur Cayley (1821 – 1895), matemático britânico.

**Corolário**

*Para cada $n \geq 1$, $\tau(K_n) = n^{n-2}$.*

## A ideia

Sejam $n \geq 2$ e $V$ um conjunto de $n$ elementos (tipicamente $V = \{1, 2, \dots, n\}$). Tendo em conta o Teorema de Cayley definimos uma bijeção entre

*o conjunto de todas as árvores* $T = (V, E)$

e

*o conjunto de todas as sequências* $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ *de comprimento* $n - 2$ *com* $a_i \in V$.

A sequência $(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ associada à árvore $T$ diz-se **código de Prüfer** de $T$.

Consequentemente, o número de árvores $T = (V, E)$ é $n^{n-2}$.

saltar

---

**Pru18**.

## O procedimento

Sejam $n \geq 2$ e $V$ um conjunto de $n$ elementos. Definimos a função

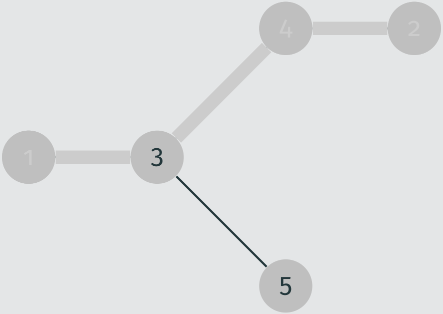
$$\texttt{pruefer}\colon \{\text{árvores em } V\} \longrightarrow \{(a_1, \dots, a_{n-2}) \mid a_i \in V\}$$

de seguinte maneira. Em primeiro lugar, escolhemos uma ordem total em $V$, e depois aplicamos o seguinte algoritmo:

1. $T =$ a árvore em consideração, $i = 1$.
2. Se $T$ tem dois (ou menos) vértices, **Parar**.
3. procurar o menor vértice $v$ com grau 1 (a menor folha).
4. $a_i =$ o único vizinho de $v$.
5. $T = T - v$ (o que ainda é uma árvore!!) e $i = i + 1$.
6. **Voltar para** 2.

**Exemplo**

A árvore $T$:




O código de Prüfer de $T$: $\quad \texttt{pruefer}(T) = (3, 4, 3)$.

**Nota**

Cada vértice $v$ aparece $d(v) - 1$ vezes em $(a_1, \dots, a_{n-2})$. Em particular, um vértice $v$ é uma folha se e somente se $v$ não ocorre em

**O procedimento**

Sejam $n \geq 2$ e $V$ um conjunto de $n$ elementos totalmente ordenado. Definimos a função

$$\texttt{unpruefer}\colon \{(a_1, \ldots, a_{n-2}) \mid a_i \in V\} \longrightarrow \{\text{árvores em } V\}$$

de seguinte maneira:

(0) (Desenhar os $n$ vértices no papel/quadro/areia/....)

(1) $P =$ a sequência $(a_1, \ldots, a_{n-2})$ dada, $L =$ a lista ordenada dos vértices.

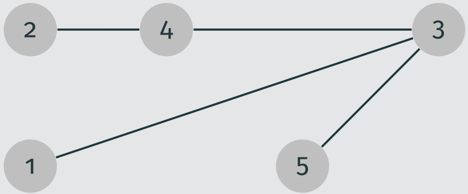
(2) Se $L$ tem comprimento dois (e portanto $P$ tem comprimento zero), então ligar os dois vértices correspondentes e

(3) Considerar o menor elemento em $L$ que não pertence a $P$, e o primeiro elemento de $P$. Ligar as dois vértices correspondentes e

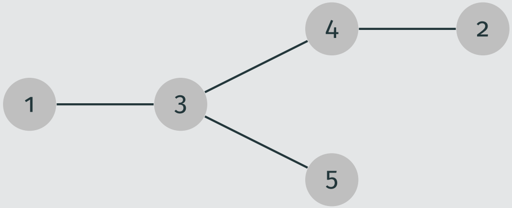
(4) **Voltar para** 2.

**Exemplo**

Consideremos $P = (3, 4, 3)$ e $L = (1, 2, 3, 4, 5)$.

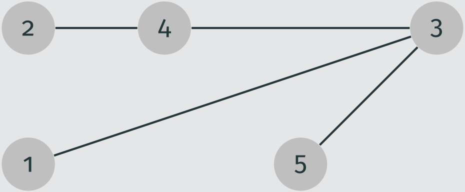



**Para comparar**



**Exemplo**

Consideremos $P = (3, 4, 3)$ e $L = (1, 2, 3, 4, 5)$.




**Teorema**

*Verificam-se as igualdades*

$$\texttt{pruefer} \circ \texttt{unpruefer} = \mathrm{id} \quad e \quad \texttt{unpruefer} \circ \texttt{pruefer} = \mathrm{id},$$

*logo* $\texttt{unpruefer} = \texttt{pruefer}^{-1}$ *e por isso* $\texttt{pruefer}$ *e* $\texttt{unpruefer}$ *são funções bijetivas.*

# 2. Árvores abrangentes de custo mínimo

**O contexto**

Consideremos grafos finitos $G = (V, E, \psi)$ com uma função

$$W \colon E \longrightarrow [0, \infty]$$

de custos não negativos nas arestas. Dada um subgrafo $H$ de $G$, com o conjunto de arestas $E' \subseteq E$, definimos o custo de $H$ como

$$\sum_{e \in E'} W(e).$$

**O objetivo**

Para um grafo conexo finito $G = (V, E, \psi)$ com $W \colon E \longrightarrow [0, \infty]$, encontrar uma árvore abrangente de custo mínimo.

**Dois algoritmos**

- O algoritmo de Kruskal.
- O algoritmo de Prim.

---

Joseph Bernard Kruskal (1928 – 2010) matemático, estatístico, informático e psicometrista estadunidense, e Robert Clay Prim (1921) matemático e informático estadunidense.

**Descrição do algoritmo**

Consideremos um grafo conexo $G = (V, E, \psi)$ e $W\colon E \longrightarrow [0, \infty]$.

1. Ordenar as arestas $(a_1, \dots, a_m)$ de $G$ por ordem não decrescente do seu custo, ou seja,

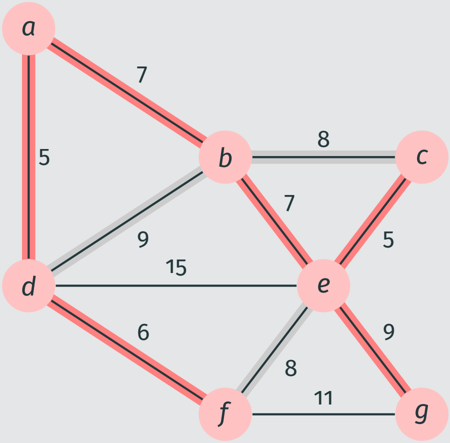
$$W(a_1) \leq W(a_2) \leq \cdots \leq W(a_m).$$

2. $E' = \varnothing$, $i = 1$.
3. **Enquanto** $T = (V, E')$ não é conexa:
   - **Se** $(V, E' \cup \{a_i\})$ não tem ciclos, **então** $E' = E' \cup \{a_i\}$.
   - $i = i + 1$.
   - **Saltar para** o início de 3.
4. Devolver a árvore abrangente $(V, E')$ de $G$ de custo mínimo.

**Exemplo**

Ordenar as arestas: ad, ce, df, ab, be, ~~bc~~, ~~ef~~, ~~bd~~, eg, fg, de.

1. $E' = \varnothing$
2. $E' = \{\text{ad}\}$
3. $E' = \{\text{ad,ce}\}$
4. $E' = \{\text{ad,ce,df}\}$
5. $E' = \{\text{ad,ce,df,ab}\}$
6. $E' = \{\text{ad,ce,df,ab,be}\}$
7. $E' = \{\text{ad,ce,df,ab,be}\}$, bc $\notin E'$
8. $E' = \{\text{ad,ce,df,ab,be}\}$, ef $\notin E'$
9. $E' = \{\text{ad,ce,df,ab,be}\}$, bd $\notin E'$
10. $E' = \{\text{ad,ce,df,ab,be,eg}\}$




**Terminar:** O grafo $T = (V, E')$ é conexo. $W(T) = 39$.

**Descrição do algoritmo**

Consideramos um grafo conexo $G = (V, E, \psi)$ e $W\colon E \longrightarrow [0, \infty]$.

1. Escolher um vértice $u \in V$.
2. $V' = \{u\}$ e $E' = \varnothing$.
3. **Enquanto** $V' \subsetneq V$:
   - Entre todas as arestas $e \in E$ com

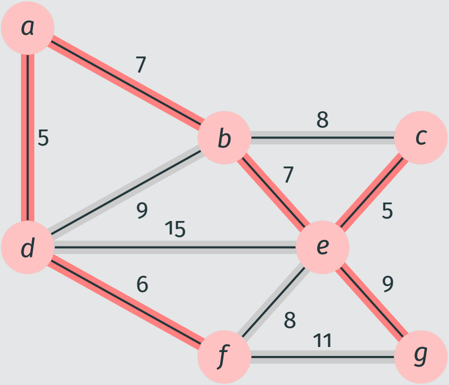
     $$\psi(e) = vw, \quad v \in V', \quad w \notin V',$$

     determinar uma aresta de menor custo: $e^*$ com $\psi(e^*) = v^*w^*$, $v^* \in V'$ e $w^* \notin V'$.
   - $V' = V' \cup \{w^*\}$, $E' = E' \cup \{e^*\}$.
   - **Saltar para** o início de 3.
4. Devolver a árvore abrangente $(V, E')$ de $G$ de custo mínimo.

## Exemplo

Escolhemos o vértice $d$.

1. $V' = \{d\}, E' = \varnothing$
2. $V' = \{d, a\}, E' = \{ad\}$
3. $V' = \{d, a, f\}, E' = \{ad, df\}$
4. $V' = \{d, a, f, b\}$,
   $E' = \{ad, df, ab\}$
5. $V' = \{d, a, f, b, e\}$,
   $E' = \{ad, df, ab, be\}$
6. $V' = \{d, a, f, b, e, c\}$,
   $E' = \{ad, df, ab, be, ec\}$
7. $V' = \{d, a, f, b, e, c, g\}$,
   $E' = \{ad, df, ab, be, ec, eg\}$




**Terminar**: $V' = V$. $W(V, E') = 39$.

Grafos em LaTeX e tikz:
`http://www.texample.net/tikz/examples/prims-algorithm/`