



Justifique claramente todas as suas respostas. Pode consultar apenas o seu formulário e não pode utilizar qualquer equipamento eletrónico. Boa sorte!

1. (4 val.) Seja f a função definida por

$$f(x) = \ln(\arcsin x).$$

- (a) Caracterize a função f indicando o seu domínio e contradomínio.
- (b) Mostre que f é invertível, determine a expressão que define a sua inversa f^{-1} e indique o domínio e o contradomínio de f^{-1} .
- (c) Enuncie o Teorema de Weierstrass. É possível aplicar este teorema a f ? Justifique a sua resposta.
- (d) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$.

2. (4 val.) Calcule as seguintes primitivas.

- (a) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} dx.$
- (b) $\int \frac{1}{(x^4+4)(x-2)} dx.$

3. (4 val.)

- (a) Calcule a área da região $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1 \wedge 2x^2 \leq y \leq x+1\}$.
- (b) Estude a natureza do integral $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x} dx.$
- (c) Calcule o valor do integral $\int_0^{+\infty} (t^5 + e^{-2t}) e^{-2t} dt.$

4. (4 val.) Resolva os seguintes problemas:

- (a) Determine uma função f , na variável x , que é igual à sua derivada multiplicada por x e que satisfaz a condição $f(1) = 1$.
- (b) Determine um fator integrante para a equação linear $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x}$ e encontre a solução que satisfaz a condição $y(1) = -1$.

5. (4 val.) Considere a equação diferencial linear completa de coeficientes constantes

$$y^{(iv)} + 8y'' + 16y = \sin(x) + e^x.$$

- (a) Determine a solução geral da equação homogénea associada.
- (b) Descreva o procedimento para obter uma solução particular da equação completa utilizando o método dos coeficientes indeterminados.
- (c) Diga qual é a solução geral da equação completa.