

# Valores e Vetores Próprios. Formas Quadráticas. Cónicas e Quádricas.

1. Determine os valores próprios e vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes. Averigue se a matriz é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma sua matriz diagonalizante, bem como a matriz diagonal correspondente.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (e) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que 1 é um valor próprio de  $A$  e determine o subespaço próprio de  $A$  associado ao 1.  
 (b) Verifique se  $A$  é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal  $D$  semelhante a  $A$ .
3. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Mostre que  $A$  é singular se e só se 0 é um valor próprio de  $A$ .
4. Mostre que  $A$  e  $A^T$  possuem os mesmos valores próprios.
5. Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  e  $\lambda$  um valor próprio de  $A$ . Mostre que
- (a)  $\lambda^k$  é um valor próprio de  $A^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ ;  
 (b)  $\frac{1}{\lambda}$  é um valor próprio de  $A^{-1}$ , caso  $A$  seja invertível.
6. Se  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis, mostre que  $AB$  e  $BA$  são matrizes semelhantes.
7. Se  $A$  é diagonalizável, mostre que
- (a)  $A^T$  é diagonalizável;  
 (b)  $A^k$  é diagonalizável, para  $k \in \mathbb{N}$ ;  
 (c)  $A^{-1}$  é diagonalizável, caso  $A$  seja invertível.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de  $A$ .  
 (b) Verifique que  $A$  é diagonalizável e indique uma matriz invertível  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  é diagonal.  
 (c) Calcule  $A^5$ , utilizando o facto de  $A$  ser diagonalizável.
9. Determine os valores dos parâmetros reais  $a$  e  $b$  para os quais  $(1, 1)$  é um vetor próprio da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

e 0 é um valor próprio de  $A$ .

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o polinómio característico de  $A$ , assim como os seus valores próprios.
  - (b) Determine os subespaços próprios de  $A$ .
  - (c) Indique, justificando, os valores do parâmetro real  $k$  para os quais  $A$  é diagonalizável.
  - (d) Para os valores de  $k$  obtidos na alínea anterior, determine uma matriz diagonal  $D$  e uma matriz não singular  $P$  tal que  $A = PDP^{-1}$ .
  - (e) Para  $k = -1$ , determine  $A^{2012}$ .
11. Dada  $A$  uma matriz  $4 \times 4$ , sejam  $X, Y, Z, W$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^4$ , tais que  $AX = AY = 0$ ,  $AZ = Z$  e  $AW = -W$ . Suponha que  $\{X, Y\}$  é linearmente independente.
- (a) Indique o polinómio característico de  $A$  e os valores próprios de  $A$ .
  - (b) Indique, justificando, se  $A$  é diagonalizável e se existe uma base de  $\mathbb{R}^4$  constituída por vetores próprios de  $A$ .

12. Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  os seus valores próprios. Mostre que  $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ .

13. Diagonalize as matrizes simétricas seguintes através de uma matriz diagonalizante ortogonal:

(a)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;                      (b)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ;                      (c)  $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

14. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que 9 é um valor próprio de  $A$ .
  - (b) Diagonalize  $A$  através de uma matriz diagonalizante ortogonal.
15. Seja  $A$  uma matriz simétrica  $3 \times 3$  com valores próprios 1 e  $-3$ , tal que  $(1, 0, 0)$  e  $(0, 1, 1)$  são vetores próprios de  $A$  associados ao valor próprio 1 e  $(0, -1, 1)$  é um vetor próprio de  $A$  associado ao valor próprio  $-3$ .
- (a) Determine o subespaço próprio de  $A$  associado ao valor próprio 1.
  - (b) Justifique que  $A$  é diagonalizável e determine a matriz  $A$ .
16. Classifique as formas quadráticas usando o critério de Sylvester.

- (a)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ .
- (b)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ .
- (c)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ .
- (d)  $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $Q(X) = X^T A X$ , onde  $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ .

17. Determine a equação reduzida e classifique as cónicas definidas pelas equações:

(a)  $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$ ;

(b)  $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$ ;

(c)  $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$ .

18. Determine a equação reduzida e classifique as quádricas definidas pelas equações:

(a)  $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$ ;

(b)  $x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0$ ;

(c)  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z = 0$ ;

(d)  $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 2z + 1 = 0$ ;

(e)  $3y^2 + 4xz + 6y + 1 = 0$ ;

(f)  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z = 0$ ;

(g)  $-x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ .

19. Determine os valores do parâmetro  $\alpha$  para os quais a cónica definida por

$$5x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x - 2y + \alpha = 0$$

é uma elipse.

20. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que  $P$  é uma matriz ortogonal e calcule  $P^T A P$ .

(b) Determine a equação reduzida e classifique a cónica de equação  $4xy + x + y = 0$ .

21. Seja  $A$  o ponto de coordenadas  $(0, 1, 1)$ . Verifique que o conjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^3$  cuja distância a  $A$  é exactamente uma unidade mais do que a sua distância à origem é uma quádrica e classifique-a.

22. Identifique o lugar geométrico dos pontos de  $\mathbb{R}^3$  cuja distância ao ponto  $(0, 0, -2)$  é a terça parte da distância ao plano de equação  $z + 18 = 0$ .