



Ficha de Exercícios 4
Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em \mathbb{R}) das equações diferenciais dadas:

(a) $y = \sin x - 1 + e^{-\sin x}$ $\frac{dy}{dx} + y \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x);$
(b) $z = \cos x$ $z'' + z = 0;$
(c) $y = \cos^2 x$ $y'' + y = 0;$
(d) $y = Cx - C^2$ ($C \in \mathbb{R}$) $(y')^2 - xy' + y = 0.$

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

(a) $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);
(b) $y = Ax + B$, $A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);
(c) $y = e^{Cx}$, $C \in \mathbb{R}$.

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \sin(x + B) \quad \text{com } A, B \in \mathbb{R}.$$

Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \sin x = 0$.
(b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \sin x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.

5. Determine a solução geral das seguintes EDO:

(a) $y' - \frac{1}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x} = 0;$
(b) $y' - \sqrt{1-x^2} = 0;$
(c) $y' - \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1} = 0.$

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDO de variáveis separáveis:

(a) $x + yy' = 0;$
(b) $xy' - y = 0;$
(c) $(t^2 - xt^2) \frac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2;$
(d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0.$

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

- (a) $xy' + y = y^2$, $y(1) = 1/2$;
- (b) $xy + x + y'\sqrt{4+x^2} = 0$, $y(0) = 1$;
- (c) $(1+x^3)y' = x^2y$, $y(1) = 2$.

8. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

- (a) $y' + 2y = \cos x$;
- (b) $x^3y' - y - 1 = 0$;
- (c) $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2+1}y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $x \neq 0$.

9. Considere a EDO $x^2y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \rightarrow +\infty$.

10. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

- (a) $(x^2 + y^2)y' = xy$;
- (b) $y'\left(1 - \ln \frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$, $x > 0$.

11. Considere a equação diferencial $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$, $x, y \in \mathbb{R}^+$.

- (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.
- (b) Determine um integral geral desta EDO.

12. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

- (a) $xy' + y = y^2 \ln x$, $x > 0$;
- (b) $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2y^5$, $x \neq 0$.

13. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

- (a) $y' + y = \sin x$;
- (b) $y'' - y + 2\cos x = 0$;
- (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;
- (d) $y'' - 4y' + 4y = x e^{2x}$;
- (e) $y'' + y' = e^{-x}$;
- (f) $y''' + y' = \sin x$.

14. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x), \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = 1.$$

Justifique que este problema possui uma única solução (em \mathbb{R}) e determine-a.

15. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y \cos x = \cos x \\ y(0) = 2. \end{cases}$

16. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

- (a) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$;
- (b) $y'' + y + 2\sin x = 0$;
- (c) $(1+x^2)y' - y = 0$;
- (d) $y''' + 4y' = \cos x$;
- (e) $y' - 3x^2y = x^2$;
- (f) $y''' - 3y' + 2y = 12e^x$.

17. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (Sugestão: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

18. Considere a EDO linear homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad x \in]1, \infty[.$$

- (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.
- (b) Obtenha a solução geral da EDO.
- (c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2, \quad x \in]1, \infty[,$$

começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

19. Resolva cada um dos seguintes problemas de Cauchy usando transformadas de Laplace.

- (a) $3x' - x = \cos t, \quad x(0) = -1$;
- (b) $\frac{d^2y}{dt^2} + 36y = 0, \quad y(0) = -1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 2$;
- (c) $y'' + 2y' + 3y = 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$;
- (d) $y''' + 2y'' + y' = x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) - 1 = 0$;
- (e) $y'' + y' = \frac{e^{-t}}{2}, \quad y(0) = 0 = y'(0)$.

Exercícios de revisão

20. Considere a EDO $y''' - 2y'' + y' = 4x + 1$.

- (a) Resolva a EDO homogénea associada.
- (b) Sabendo que a EDO completa admite uma solução do tipo $y = Ax^2 + Bx$, onde A e B são constantes, determine a solução geral da EDO completa.

21. Considere a EDO $y'' + y' - 6y = 6e^{2x}$.

- (a) Resolva a EDO homogénea associada.
- (b) Determine uma solução particular da EDO completa.
- (c) Indique a solução geral da EDO completa.

22. Resolva a seguinte equação diferencial: $xy' + 2y = \sin x, \quad x > 0$.

23. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli:

$$y' + 4\frac{y}{x} = x^3y^2, \quad x > 0.$$

24. Considere o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + y' = \frac{1}{4}e^{-t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{1}{4s(s+1)^2}$, $s > 0$.

(b) Usando a Transformada de Laplace inversa, resolva o problema de valores iniciais.

25. Usando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + y = t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

26. Usando a Transformada de Laplace, resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

Soluções

1. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim.
2. (a) $xy' - y = 0$; (b) $y'' = 0$; (c) $xy' - y \ln(y) = 0$.
3. $y''' + y' = 0$.
4. (a) $y = C_1x - \operatorname{sen} x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
5. (a) $y = \ln |\operatorname{arctg} x| + C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (b) $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (c) $y = \frac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C$, $C \in \mathbb{R}$.
6. (a) $x^2 + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$;
 (b) $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$ (compare com o ex. 2(a));
 (c) $\frac{x}{t} = C e^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{t}}$, $C \in \mathbb{R}$;
 (d) $y = \frac{1}{\ln|x^2-1|-C}$, $C \in \mathbb{R}$;

7. (a) $y = \frac{1}{x+1}$; (b) $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}}$; (c) $y^3 = 4(1+x^3)$.

8. (a) $y = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x + C e^{-2x}$, $C \in \mathbb{R}$;

(b) $y = -1 + C e^{-\frac{1}{2x^2}}$, $x \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$;

(c) $y = (C+x)\sqrt{x^2+1}$, $C \in \mathbb{R}$.

9. Comece por verificar que a solução geral possui a forma $y = \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$, $C \in \mathbb{R}$.

10. (a) $y = K e^{\frac{x^2}{2y^2}}$, $K \in \mathbb{R}$.

(b) $y = x e^{Ky}$, $x > 0$, $K \in \mathbb{R}$.

11. (a) —

(b) $y = x e^{Cx}$, $x > 0$, $C \in \mathbb{R}$.

12. (a) $y = \frac{1}{1+Cx+\ln x}$, $x > 0$, $C \in \mathbb{R}$ ($y=0$ é solução singular).

(b) $y^4 = \frac{x^2}{C-4x^5}$, $C \in \mathbb{R}$ ($y=0$ é solução singular).

13. (a) $y = C_1 e^{-x} + \frac{\sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}$, $C_1 \in \mathbb{R}$;

(b) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

(c) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + 3x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

(d) $y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{6}\right) e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

(e) $y = C_1 + (C_2 - x) e^{-x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

(f) $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x - \frac{x}{2} \sin x$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

14. $y = \frac{3}{4}(x-\pi) e^{2(\pi-x)} + \frac{\sin(2x)}{8}$.

15. $y = 1 + e^{-\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$.

16. (a) $y = \frac{K}{(x^2+1)^2}$, $K \in \mathbb{R}$;

(b) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

(c) $y = C e^{\operatorname{arctg} x}$, $C \in \mathbb{R}$;

(d) $y = C_1 + C_2 \cos(2x) + C_3 \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$;

(e) $y = K e^{x^3} - \frac{1}{3}$, $K \in \mathbb{R}$;

(f) $y = C_1 e^{-2x} + (C_2 + C_3 x + 2x^2) e^x$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

17. $y = Cx^2 + x^3 + K$, $C, K \in \mathbb{R}$.

18. (a) —

(b) $y = C_1 x + C_2 e^x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(c) $y = C_1 x + C_2 e^x + x^2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

19. (a) $x(t) = \frac{3}{10} \sin t - \frac{1}{10} \cos t - \frac{9}{10} e^{\frac{t}{3}}$;

(b) $y(t) = \frac{1}{3} \sin(6t) - \cos(6t);$

(c) $y(t) = t - \frac{2}{3} + \frac{2}{3\sqrt{2}} e^{-t} \sin(\sqrt{2}t) + \frac{2}{3} e^{-t} \cos(\sqrt{2}t);$

(d) $y(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 8) - 2e^{-x}(x + 2);$

(e) $y(t) = \frac{e^{-t}}{2} (e^t - t - 1).$

20. (a) $y_h = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

(b) $y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^x + C_3 x e^x + 2x^2 + 9x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

21. (a) $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

(b) $y_p = \frac{6}{5} x e^{2x}$

(c) $y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{6}{5} x e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

22. $y = -\frac{1}{x} \cos x + \frac{1}{x^2} \sin x + \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$

23. O integral geral é $y = \frac{1}{Cx^4 - x^4 \ln x}, \quad C \in \mathbb{R}$ e $y = 0$ é solução singular.

24. (a) —

(b) $y(t) = \frac{1}{4} (1 - e^{-t} - te^{-t}), \quad t \geq 0.$

25. $y(t) = t + \cos t - 2 \sin t, \quad t \geq 0.$

26. $y(t) = (3t - 1)e^{-3t}, \quad t \geq 0.$