

Determinantes

1. Calcule os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 7,$$

determine, justificando, os seguintes determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 4c_1 & 4c_2 & 4c_3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a_1 - 5c_1 & a_2 - 5c_2 & a_3 - 5c_3 \\ 10b_1 & 10b_2 & 10b_3 \\ -4c_1 & -4c_2 & -4c_3 \end{vmatrix}.$$

3. Determine todos os valores de λ para os quais

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Mostre que se c é um número real e A é uma matriz do tipo $n \times n$, então $\det(cA) = c^n \det(A)$.

5. Se A e B são matrizes 5×5 tais que $|A| = 3$ e $|B| = -5$, determine, justificando, os seguintes determinantes:

$$(a) |A^T|; \quad (b) |AB|; \quad (c) |A^4|; \quad (d) |B^{-1}|; \quad (e) |2A|; \quad (f) |2A^{-1}|; \quad (g) |(2A)^{-1}|; \quad (h) |AB^{-1}A^T|.$$

6. Seja A uma matriz 4×4 tal que $\det(A) = 3$. Diga, justificando, qual é o valor de $\det(2(A^{-1})^T)$.

7. Sejam A e B matrizes 5×5 , com B invertível. Sabendo que $\det(AB) = 24$ e $\det(B^{-1}) = 4$, calcule $\det(A)$.

8. Sem calcular explicitamente os determinantes, mostre que:

$$(a) \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0;$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

9. Utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule:

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 & a_3 + 2b_3 \\ 3c_1 + b_1 & 3c_2 + b_2 & 3c_3 + b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} 2a_1 & a_2 + a_3 & -a_3 \\ 2c_1 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 2b_1 & b_2 + b_3 & -b_3 \end{vmatrix} = 10;$$

$$(c) \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1 + a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2 + a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3 + a_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2;$$

(d) $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_1 & 2a_3 + 5a_1 \\ b_1 + b_2 & b_1 & 2b_3 + 5b_1 \\ c_1 + c_2 & c_1 & 2c_3 + 5c_1 \end{vmatrix}$, sabendo que $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1$.

10. Calcule os determinantes seguintes, usando o Teorema de Laplace:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$;

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}$;

(d) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}$;

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 8 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Determine a matriz adjunta de A , $\text{adj } A$.
- Calcule o determinante de A .
- Mostre que $A(\text{adj } A) = \det(A)I_3$.
- Calcule a matriz inversa de A .

12. Calcule a adjunta da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

e efetue o produto $A(\text{adj } A)$. Sem efetuar mais cálculos indique o valor do determinante de A .

13. Calcule, caso exista, a inversa das seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

14. Verifique que a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é invertível e calcule o elemento (1,2) da inversa de A .

15. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Calcule o determinante de A .
- Calcule o elemento (2,3) da adjunta de A e o elemento (2,3) da inversa de A .

16. Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule o elemento (4,1) da inversa de A , A^{-1} , sem determinar a matriz A^{-1} .

17. Determine todos os valores de α para os quais a matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha - 4 & 0 & 10 \\ 4 & \alpha + 5 & 1 \\ 2 & 0 & \alpha - 3 \end{bmatrix}$$

é singular.

18. Se

$$A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix}$$

determine todos os valores de β para os quais o sistema homogêneo $AX = 0$ apenas admite a solução trivial.

19. Sejam A, B e C matrizes tais que $AB = AC$. Mostre que se $\det(A) \neq 0$, então $B = C$. Mostre ainda através de um exemplo não trivial que esta conclusão pode não ser válida se $\det(A) = 0$.

20. Mostre que :

- (a) Se A é uma matriz do tipo $n \times n$, então $\det(AA^T) \geq 0$;
- (b) Se $AB = I_n$, então $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$;
- (c) Sendo A e B matrizes $n \times n$, se A é singular, então AB também é uma matriz singular;
- (d) Se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$;
- (e) Se $A = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$;
- (f) Se A é uma matriz quadrada de ordem 3 invertível, então $\det(\text{adj } A) = \det(A^2)$.

21. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa:

- (a) $\det(AA^T) = \det(A^2)$;
- (b) $\det(-A) = -\det(A)$;
- (c) Se $A^T = A^{-1}$, então $\det(A) = 1$;
- (d) Se $\det(A) = 0$, então $A = O$;
- (e) Se $\det(A) = 7$, então o sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;
- (f) Se $A^4 = I_n$, então $\det(A) = 1$;
- (g) Se $A^2 = A$ e $A \neq I_n$, então $\det(A) = 0$;
- (h) Se $\det(AB) = 0$, então $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$;
- (i) Se $AB \neq BA$ então $\det(AB) \neq \det(BA)$;
- (j) Se A, B e C são matrizes $n \times n$ tais que $AC = BC$ então $A = B$.

22. Seja A uma matriz $n \times n$ com determinante não nulo. Mostre que $\det(\text{adj } A) = [\det(A)]^{n-1}$.

Modelo Leontief

23. Considere uma economia dividida em 3 setores: manufatura, agricultura e serviços. Por cada unidade de output a manufatura requer 0.1 unidades de outras companhias do mesmo setor, 0.3 unidades da agricultura e 0.3 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, a agricultura usa 0.2 do seu próprio output, 0.6 unidades da manufatura e 0.1 unidades dos serviços. Por cada unidade de output, os serviços consomem 0.1 unidades dos serviços, 0.6 unidades da manufatura e nada da agricultura.

- (a) Construa a matriz de consumo para esta economia e determine que consumo intermédio (necessidades intermédias) é necessária se a agricultura planejar produzir 100 unidades de output.

- (b) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de 18 unidades para a agricultura (sem nenhum consumo final para os outros setores) (não calcule uma inversa).
- (c) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de 18 unidades para a manufatura sem qualquer consumo final para os outros setores (não calcule uma inversa).
- (d) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de 18 unidades para a manufatura, 18 unidades para a agricultura e 0 unidades para os serviços.

24. Considere o modelo de produção $x = Cx + d$ para uma economia com dois setores, onde

$$C = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.5 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Use uma matriz invertível para determinar os níveis de produção para satisfazer o consumo final.

25. Repita o exercício anterior com

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 \\ 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix}$$

26. Seja C e d como em (1).

- (a) Determine os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de uma unidade de output do setor 1.
- (b) Use uma matriz invertível para determinar os níveis de produção necessários para satisfazer o consumo final de $\begin{bmatrix} 51 \\ 30 \end{bmatrix}$.

27. Um indivíduo que se dedicava à caça como atividade secundária terá redigido um contrato com um talho no qual este comprava os produtos do caçador e garantia todas as suas despesas com o material de caça em troca de uma pequena percentagem do que este produzisse. Assim, de cada euro produzido pelo caçador, 0,2 euros são para consumo próprio, 0,1 são para o talho, pela garantia das suas despesas. Por sua vez, de cada euro produzido pelo talho, 0,4 euros são para o caçador. Numa determinada semana, tanto o caçador com o talho recebem um pedido na quantia de 76 euros de entidades exteriores ao sistema. Quanto é que cada um deles terá de produzir nessa semana a fim de garantir as procuras interior e exterior do sistema?