

Cálculo I-C

Slides de apoio às aulas

Equações Diferenciais Ordinárias

Departamento de Matemática
Universidade Aveiro

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof. Doutora Virgínia Santos e do Prof. Alexandre Almeida (pág. 51-92) (indicados na bibliografia).

Resumo dos Conteúdos

- 1 EDO – Introdução, conceitos e terminologia
- 2 Problemas de valores iniciais e problemas de valores na fronteira
- 3 Equações de variáveis separáveis
- 4 EDO lineares de primeira ordem
- 5 Equações diferenciais homogéneas
- 6 EDO de Bernoulli
- 7 Resumo EDO 1^a ordem
- 8 EDO lineares de ordem arbitrária
 - Solução geral e conjunto fundamental de soluções
 - Solução particular de uma EDO linear completa
 - Problemas de Cauchy
 - Aplicação à resolução de um PVI linear

Equações Diferenciais Ordinárias, o que são?

Equações que envolvem uma função e algumas das suas derivadas, podendo envolver também a variável que é o argumento dessa função. Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

1. Segunda Lei de Kirchhoff:

Uma das equações básicas usadas em circuitos elétricos é

$$L \cdot I'(t) + R \cdot I(t) = E(t)$$

onde

L = indutância ($L \in \mathbb{R}$)

R = resistência ($R \in \mathbb{R}$)

$I(t)$ = intensidade de corrente no tempo t

$E(t)$ = voltagem no tempo t .

2. Movimento harmônico de uma mola:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx$$

m = massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical

$x(t)$ = deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola

$k > 0$ constante de mola (Ver figura).

3. Modelo logístico (modelo de crescimento populacional):

$$P'(t) = c P(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right)$$

$P(t)$ = número de indivíduos na população no tempo t

c = constante que traduz o crescimento relativo da população

$K > 0$ constante designada por “capacidade de suporte”.

Equação diferencial ordinária

Definição: Chama-se **equação diferencial ordinária (EDO)**, a toda equação do tipo

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (\text{EDO})$$

ou, equivalentemente,

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, x é a variável independente e $y = y(x)$ é uma função desconhecida que depende de x (variável dependente).

Definição: Chama-se **ordem de uma EDO** à maior ordem da derivada que aparece na equação.

Definição: Uma EDO diz-se estar na **forma normal** quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Caso contrário, diz-se que a EDO está escrita na **forma implícita**.

Exemplos:

①

$$-y' + x^3 - 1 = 0$$

é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente.

②

$$3t \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente.

③

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + xy$$

é uma equação diferencial de ordem 3, onde x é a variável independente e y a variável dependente. A EDO está na forma normal.

Solução de uma EDO

Definição: Chama-se solução da equação diferencial

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

num intervalo I , a toda a função $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n , tal que

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Exemplo: $\varphi_1(x) = \sin x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \sin x$ são duas soluções (em \mathbb{R}) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!



Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias; o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração (ou resolução) da EDO.

Solução particular (ou integral particular): Solução que se obtém a partir do integral geral.

Solução singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral.

Solução geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0$.

- Verifique que o integral geral desta EDO é $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$.

Uma vez que $y' = 2(x + C)$, tem-se que

$$(2(x + C))^2 - 4(x + C)^2 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0,$$

o que mostra que $y = (x + C)^2$, $C \in \mathbb{R}$, é o **integral geral da EDO**.

- Verifique que $y = x^2$ é uma solução particular da EDO dada.

Considerando $C = 0$ no integral geral, temos $y = x^2$, o que mostra que $y = x^2$ é uma **solução particular** da EDO dada.

- Como classifica a solução $y = 0$?

Note que $y = 0$ verifica a EDO dada, logo é solução. Contudo, como não existe um valor de C para o qual $(x + C)^2 = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, podemos concluir que $y = 0$ é uma **solução singular**.

Problema de valores iniciais

Definição: Chama-se **problema de valores iniciais** (PVI) (ou **problema de Cauchy**) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo: $y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad \text{Verifique!}$$

Existência e unicidade de solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Problema de valores na fronteira

Definição: Chama-se **problema de valores na fronteira** (ou **problema de fronteira**) a todo o problema que consista em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo condições em dois ou mais pontos.

Exemplo: O problema de fronteira

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) + y'(1) = -\frac{1}{3} \\ y(1) + y'(0) = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução. Qual é?

Equações de variáveis separáveis

Definição: Uma **equação de variáveis separáveis** é uma EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = \frac{p(x)}{q(y)}, \quad (\text{com } q(y) \neq 0)$$

para p e q dependentes apenas de x e de y , respetivamente.

Determinação dum integral geral

- ① Escrever a equação na forma (variáveis separadas):

$$q(y)y' = p(x) \quad (1)$$

ou, na forma diferencial, $q(y)dy = p(x)dx$.

- ② O integral geral da equação (1) é dado por $\int q(y) dy = \int p(x) dx$. Logo, o integral geral é dado por $Q(y) = P(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, onde $Q(y)$ é uma primitiva de $q(y)$ e $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$.

Exemplo

Exemplo: $y' = \frac{1}{y}e^x, y \neq 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

$$yy' = e^x.$$

O integral geral é dado por:

$$\int y \, dy = \int e^x \, dx.$$

Logo $\frac{y^2}{2} = e^x + K, K \in \mathbb{R}$ e, portanto,

$$y^2 = 2e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

é um integral geral da EDO.

Exemplo

Exemplo: $y' + xy = 0$

Separando as variáveis, a equação toma a forma:

Logo

$$\frac{1}{y}y' = -x, \quad \text{para } y \neq 0.$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int x dx,$$

e, portanto,

$$\ln |y| = -\frac{x^2}{2} + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-\frac{x^2}{2} + K}$$

$$|y| = Ae^{-\frac{x^2}{2}}, \quad A \in \mathbb{R}^+$$

$$y = Be^{-\frac{x^2}{2}}, \quad B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como $y = 0$ também é solução da EDO, obtém-se o integral geral:

$$y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Equações diferenciais lineares de primeira ordem

Definição: Uma equação diferencial linear de primeira ordem é uma equação do tipo

$$a_0(x) y' + a_1(x) y = b(x)$$

onde a_0, a_1, b são funções definidas num certo intervalo I , com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Deste modo, esta equação pode tomar a seguinte forma:

$$y' + p(x) y = q(x).$$

Quando $b \equiv 0$ (logo $q \equiv 0$), a equação diz-se incompleta ou homogénea.

Nota: Se $q \equiv 0$ ou se p e q forem funções constantes a EDO é de variáveis separáveis.

Exemplos:

- $y' + xy = 1$ equação diferencial linear de 1.^a ordem completa.
- $y' + xy = 0$ equação diferencial linear de 1.^a ordem incompleta (ou homogénea).

Resolução de uma EDO linear de 1.^a ordem usando um fator integrante

Método de resolução: para resolver a equação

$$y' + p(x)y = q(x), \quad x \in I$$

devemos

- ① determinar o **fator integrante** $\mu(x) = e^{P(x)}$, onde $P(x)$ é uma primitiva de $p(x)$;
- ② multiplicar ambos os membros da equação por $\mu(x)$ (no primeiro membro vamos obter $(\mu(x) \cdot y)'$);
- ③ integrar em ordem a x .

Resolução de uma EDO Linear de 1.^a Ordem usando um Fator Integrante

Exemplo: A EDO da página 15,

$$y' + xy = 0,$$

que resolvemos como equação de variáveis separáveis, é uma EDO linear de 1.^a ordem.

Podemos resolvê-la, mais rapidamente, usando o fator integrante $\mu(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$. Multiplicando ambos os membros da equação por $\mu(x)$ obtemos

$$e^{\frac{x^2}{2}} y' + e^{\frac{x^2}{2}} xy = 0,$$

isto é,

$$\left(e^{\frac{x^2}{2}} y \right)' = 0.$$

Integrando vem

$$e^{\frac{x^2}{2}} y = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é $y = C e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$.

Resolução de uma EDO Linear de 1.^a Ordem usando um Fator Integrante

Exemplo:

$$y' - y = -e^x$$

Como uma primitiva de $p(x) = -1$ é $P(x) = -x$, um fator integrante da EDO é e^{-x} . Multiplicando ambos os membros da equação por e^{-x} obtemos

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = -1$$

i.e,

$$(e^{-x}y)' = -1.$$

Integrando vem

$$e^{-x}y = \int (-1) dx = -x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Assim, um integral geral da equação linear é

$$y = (C - x)e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$



PVI associado a EDO linear de primeira ordem

Teorema (Existência e unicidade de solução): Se p e q são funções contínuas num intervalo I , então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo: O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = -e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

tem como solução única $y = -xe^x$, para $x \in \mathbb{R}$. **Porquê?**

Equações diferenciais homogéneas

Definição: Chama-se **equação diferencial homogénea** a toda a EDO de primeira ordem da forma:

$$y' = f(x, y)$$

onde $f: \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é homogénea de grau zero, i.e.,

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{ tais que } (\lambda x, \lambda y) \in \mathcal{D}.$$

Exemplo:

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{\underbrace{x^2}_{f(x,y)}}$$

f é homogénea de grau zero pois, desde que $\lambda \neq 0$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda x \lambda y + \lambda^2 y^2}{\lambda^2 x^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x, y).$$

Determinação do integral geral de uma equação diferencial homogénea:

- ① Certifique-se que a equação na forma:

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

é homogénea;

- ② Em (1), fazer a mudança de variável $y = zx$:

$$z'x + z = g(z), \quad (2)$$

onde $g(z) = f(1, z)$;

- ③ Resolver a EDO de variáveis separáveis (2) (nas variáveis x e z);

- ④ No integral geral obtido fazer $z = \frac{y}{x}$ (regressar às variáveis iniciais).

Exemplo

Exemplo: Voltando ao Exemplo da página 21:

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$

Ora,

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \quad x \neq 0,$$

Através da substituição $y = zx$, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1 + z^2} z' = \frac{1}{x},$$

com integral geral dado por

$$\operatorname{arctg} z = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogénea dada tem a forma

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln |x| + C, \quad \text{i.e.,} \quad y = x \operatorname{tg} (\ln |x| + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Equação diferencial de Bernoulli

Definição: Uma equação diferencial de Bernoulli é uma EDO da forma:

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observações:

- Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a equação é linear de 1.^a ordem.
- Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$, a equação é reduzível a uma EDO linear de 1.^a ordem, usando a mudança de variável $z = y^{1-\alpha}$.

De facto, a equação de Bernoulli pode escrever-se na forma

$$y^{-\alpha}y' + a(x)y^{1-\alpha} = b(x)$$

(eventualmente com $y \neq 0$). Com a substituição $z = y^{1-\alpha}$, chegamos à equação linear de 1.^a ordem:

$$z' + (1 - \alpha)a(x)z = (1 - \alpha)b(x).$$

Exemplo

Exemplo: A equação

$$y' + y = e^x y^2$$

é uma equação de Bernoulli (com $\alpha = 2$). Fazendo $z = 1/y$ ($y \neq 0$) obtemos

$$z' - z = -e^x,$$

cujo integral geral é

$$z = (C - x) e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

▶ Ver página 19

Assim, um integral geral da equação de Bernoulli é

$$y = \frac{e^{-x}}{C - x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS DE 1^a ORDEM

Variáveis separáveis

$$q(y)y' = p(x)$$

Integral geral:

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx$$

Linear

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Fator integrante

$$\mu(x) = e^{\mathcal{P}(x)}, \text{ onde } \mathcal{P}(x) \text{ é uma primitiva de } p(x).$$

Homogénea

$$y' = f(x, y), \text{ onde } f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

Mudança de variável: $y = zx$

Reduz-se a uma EDO de variáveis separáveis, nas variáveis x e z .

Bernoulli

$$y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$$

* Se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, a EDO é linear.

* Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 1$:

Mudança de variável: $z = y^{1-\alpha}$

Reduz-se a uma EDO linear, nas variáveis x e z .

Equações diferenciais lineares de ordem arbitrária

Definição: Uma equação diferencial linear de ordem n , com $n \in \mathbb{N}$, é uma equação da forma:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x)$$

onde

$$b: I \rightarrow \mathbb{R};$$

$$a_i: I \rightarrow \mathbb{R}, i = 0, \dots, n, \text{ com } a_0(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in I.$$



coeficientes da equação

- Se $b \equiv 0$, a equação diz-se **incompleta** (ou homogénea); caso contrário, a equação diz-se **completa** (ou não homogénea);
- Se os coeficientes da equação são funções constantes, a equação diz-se de **linear de coeficientes constantes**.

Exemplos

①

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

EDO linear homogénea de segunda ordem.

②

$$e^x y' - y \cos x = x$$

EDO linear completa de primeira ordem.

③

$$y^{(5)} + 2y' = 0$$

EDO linear homogénea de quinta ordem com coeficientes constantes.

Equação homogénea associada a uma EDO linear

Nota: Se na equação

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

tomarmos $b(x) \equiv 0$, obtemos a chamada **equação homogénea associada**.

Exemplo: A equação homogênea associada à equação completa

$$y'' + y = \cos(x)$$

é a equação:

$$y'' + y = 0.$$

Solução geral de uma EDO linear completa

Teorema: A solução geral de uma equação linear completa obtém-se adicionando uma qualquer sua solução (particular) à solução geral da equação homogénea associada.

Exemplo:

$$y' - 2y = e^{5x}.$$

A equação homogénea associada é a equação

$$y' - 2y = 0,$$

cuja solução geral é dada por $y_h = C e^{2x}$, com $C \in \mathbb{R}$.

Uma solução da EDO completa é $y_p = \frac{1}{3} e^{5x}$ [Verifique!]. Assim, a solução geral da equação completa é

$$y = \underbrace{C e^{2x}}_{y_h} + \underbrace{\frac{1}{3} e^{5x}}_{y_p}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções

Considere-se a EDO:

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (1)$$

onde $a_i: I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$, com $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

Teorema: Sejam $y: I \rightarrow \mathbb{R}$, $w: I \rightarrow \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) $y \equiv 0$ é solução de (1);
- (ii) Se y e w são soluções de (1), então $y + w$ é solução de (1);
- (iii) Se y é solução de (1), então αy é solução de (1);

Isto é, o conjunto das soluções de (1) é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções reais de variável real definidas em I .

EDO linear homogénea – Conjunto das soluções (cont.)

Teorema: Toda a equação linear homogénea de ordem n

$$a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0,$$

num dado intervalo I (a_0, a_1, \dots, a_n são funções contínuas em I e $a_0(x) \neq 0$ para todo o $x \in I$) admite n soluções $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ linearmente independentes e qualquer sua solução, y , pode escrever-se como sua combinação linear, i.e.,

$$y = C_1 \varphi_1 + \cdots + C_n \varphi_n, \text{ com } C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Definição: Qualquer conjunto de n soluções linearmente independentes de uma EDO linear homogénea de ordem n é designado por sistema fundamental de soluções dessa equação.

Nota: De acordo com o teorema anterior, um sistema fundamental de soluções é uma base do subespaço vetorial das soluções da EDO linear homogénea.

Exemplo:

$$y'' + y = 0 \quad (2)$$

Observe-se que $\varphi_1(x) = \cos x$, $\varphi_2(x) = \sin x$ são soluções desta equação.

► Ver página 7 .

Uma vez que as funções seno e cosseno são linearmente independentes, podemos concluir que:

$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ é sistema fundamental de soluções de (2).

Logo, a solução geral da equação é

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Observações:

- ① As funções do tipo

$$x^k e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{e} \quad x^k e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

com $k \in \mathbb{N}_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, são linearmente independentes (em particular, as funções seno, cosseno, exponencial e do tipo potência são linearmente independentes).

- ② A resolução de uma EDO linear homogénea reduz-se à determinação de um sistema fundamental de soluções. Todavia, para $n > 1$, não existe um método geral que permita obter um tal conjunto de soluções.
- ③ Se a EDO linear homogénea tiver **coeficientes constantes**, um sistema fundamental de soluções pode ser obtido a partir do conhecimento das raízes do polinómio caraterístico (ver slides seguintes).

EDO linear homogénea com coeficientes constantes

Uma EDO linear homogénea de ordem n com coeficientes constantes tem a forma:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

onde $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ com $a_0 \neq 0$.

Polinómio caraterístico (ou polinómio associado) :

$$P(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n.$$

Observação: As n raízes do polinómio caraterístico $P(r)$ permitem determinar n soluções linearmente independentes da equação homogênea, cada uma associada a cada uma dessas raízes (ver como no slide seguinte). Portanto, permitem determinar a solução geral da equação homogênea associada.

Construção de um sistema fundamental de soluções (base do subespaço das soluções) de uma EDO linear com coeficientes constantes e homogénea

Considerem-se as raízes de $P(r)$ identificadas e, para cada uma delas, proceda-se à seguinte associação de soluções (no final do processo ter-se-á n soluções linearmente independentes):

- 1.^º Caso: A raiz r é real simples.

Solução: e^{rx}

- 2.^º Caso: A raiz r é real de multiplicidade k .

Soluções: $e^{rx}, xe^{rx}, \dots, x^{k-1}e^{rx}$

- 3.^º Caso: As raízes são complexas conjugadas simples: $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$.

Soluções: $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ e $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$

- 4.^º Caso: As raízes são complexas conjugadas: $\alpha + \beta i$ e $\alpha - \beta i$, com multiplicidade k .

Soluções: $e^{\alpha x} \cos(\beta x), xe^{\alpha x} \cos(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \cos(\beta x),$
 $e^{\alpha x} \sin(\beta x), xe^{\alpha x} \sin(\beta x), \dots, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin(\beta x).$

Exemplo

Exemplo: $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 4y' + 8y = 0$

Polinómio característico: $r^5 + 2r^4 + 4r^3 + 8r^2 + 4r + 8$.

Raízes do polinómio característico:

-2 (simples); $i\sqrt{2}$ e $-i\sqrt{2}$, raízes duplas.

Sistema fundamental de soluções:

$$SFS = \{e^{-2x}, \cos(\sqrt{2}x), x \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x), x \sin(\sqrt{2}x)\}.$$

Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = A e^{-2x} + (B_1 + B_2 x) \cos(\sqrt{2}x) + (C_1 + C_2 x) \sin(\sqrt{2}x),$$

com $A, B_1, B_2, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Método dos coeficientes indeterminados

Método para determinar uma solução particular, aplicável às EDO lineares de coeficientes constantes completas

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x) \quad (3)$$

com $b(x)$ da forma:

$$b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad \text{ou} \quad b(x) = P_m(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x),$$

onde $P_m(x)$ denota um polinómio de grau $m \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Prova-se que existe uma solução particular da equação (3) do tipo

$$y_p(x) = x^k e^{\alpha x} \left(Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x) \right) \quad (4)$$

onde:

- (i) k é a multiplicidade de $\alpha + i\beta$, se $\alpha + i\beta$ for raiz do polinómio característico da equação homogénea associada a (3); senão, $k = 0$;
- (ii) $Q(x)$, $R(x)$ são polinómios de grau m cujos coeficientes terão de ser determinados usando a EDO (3) e a expressão para a solução (4).

Exemplo

Exemplo: $y' - 3y = e^{3x}$. Como

$$e^{3x} = P_m(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

com $P_m(x) \equiv 1$ (grau zero), $m = 0$, $\alpha = 3$, $\beta = 0$ e 3 é raiz do polinómio característico, com multiplicidade 1, então a solução particular a procurar é da forma

$$y_p = x e^{3x} A, \quad \text{com } A \in \mathbb{R} \text{ a determinar.}$$

Substituindo y_p e y'_p na equação:

$$\underbrace{A e^{3x} + 3Ax e^{3x}}_{y'_p} - 3\underbrace{(Ax e^{3x})}_{y_p} = e^{3x}$$

obtemos $(A - 1)e^{3x} = 0$, e portanto $A = 1$. Assim, $y_p = xe^{3x}$.

PVI associado a uma EDO linear de ordem arbitrária

Teorema (Existência e unicidade de solução): Se $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ e $b(x)$ são funções contínuas num intervalo I , $a_0(x) \neq 0$, para todo o $x \in I$, então o problema de Cauchy

$$\begin{cases} a_0(x) y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = b(x) \\ y(x_0) = \beta_0, y'(x_0) = \beta_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = \beta_{n-1}, \end{cases}$$

onde $x_0 \in I$ e $\beta_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$, são números reais dados, tem nesse intervalo uma e uma só solução.

Exemplo: O problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 2 \end{cases}$$

tem uma solução única em \mathbb{R} . Porquê? Qual?

Exemplo de aplicação das transformadas de Laplace na resolução de um PVI

Exemplo: Vamos determinar a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y'' + 2y' + 10y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros da equação dada (admitindo que $y(t)$ tem transformada de Laplace, $Y(s)$), conclui-se que:

$$s^2 Y(s) + 2s Y(s) + 10 Y(s) = \mathcal{L}\{1\}. \quad [\text{Porquê?}]$$

Daqui resulta que

$$(s^2 + 2s + 10)Y(s) = \frac{1}{s}, \text{ i.e.,} \quad Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0).$$

Uma vez que

$$Y(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} \quad (s > 0),$$

a solução do problema pode ser determinada do seguinte modo:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{10}\frac{1}{s} - \frac{1}{10}\frac{s+2}{s^2+2s+10}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+1)^2+9}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+9} + \frac{1}{(s+1)^2+9}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}(t) - \frac{1}{10}e^{-t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}(t) \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{30}e^{-t}\sin(3t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$