

Cálculo I-C

Slides de apoio às aulas

Integrais impróprios e Transformadas de Laplace

Departamento de Matemática
Universidade Aveiro

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados nos textos da Prof.
Doutora Virgínia Santos e do Prof. Alexandre Almeida (indicados na bibliografia).

Extensão do conceito de integral de Riemann

A definição de integral de Riemann exige que a função integranda, f , seja limitada e esteja definida num intervalo fechado e limitado I .

Neste capítulo, vamos estender o conceito de integral de Riemann para o caso em que o intervalo I é ilimitado, considerando uma função f que é integrável em qualquer subintervalo fechado e limitado de I . Passaremos, então, ao estudo do que chamamos de **integrais impróprios de 1^a espécie**.

Exemplos de integrais impróprios de 1^a espécie:

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx$
- $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg}(x) dx$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Definição (Integral impróprio de 1.^a espécie no limite superior de integração):

Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, para todo o $t > a$.

Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx,$$

então o integral impróprio $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exemplo: Uma vez que

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} [\arctg(x)]_0^t \\&= \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctg t \\&= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exercícios:

- ① Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

$$(a) \int_{\pi}^{+\infty} \cos(x) dx \quad (b) \int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+2)^2} dx \quad (c) \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} dx$$

- ② Prove que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ é:

(a) divergente se $\alpha \leq 1$;

(b) convergente se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

- ③ Prove que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx$ é:

(a) divergente se $\beta \geq 0$;

(b) convergente se $\beta < 0$ e, neste caso, $\int_0^{+\infty} e^{\beta x} dx = -\frac{1}{\beta}$.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Definição (Integral impróprio de 1.^a espécie no limite inferior de integração):

Seja $f:] -\infty, a] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, para todo o $t < a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx,$$

então o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx$$

diz-se **convergente** e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x) dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se **divergente**.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exemplo: Como

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{t \rightarrow -\infty} [\arctg(x)]_t^1 \\&= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arctg t \right) \\&= \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

o integral impróprio $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{3\pi}{4}.$$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exercícios:

- ① Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$

(b) $\int_{-\infty}^2 \frac{1}{4-x} dx$

(c) $\int_{-\infty}^0 \frac{4}{1+(x+1)^2} dx$

- ② Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^0 a^x dx.$$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Proposição (Propriedades dos integrais impróprios de 1.^a Espécie): Sejam $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$, $\forall t > a$. Então verificam-se as seguintes condições:

- ① Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ são convergentes, então para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx$ é convergente e
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx.$$
- ② Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, então para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\int_a^{+\infty} \alpha f(x) dx$ é divergente.

Observação: Resultado análogo é válido para integrais impróprios de 1.^a espécie no limite inferior de integração.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Proposição (Propriedades dos integrais impróprios de 1.^a Espécie): Sejam $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, $\forall t > a$, e $b > a$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x) dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^{+\infty} f(x) dx.$$

Observação: Resultado análogo, com as devidas adaptações, é válido para integrais impróprios de 1.^a espécie no limite inferior de integração.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exemplos:

- ① Pelo Exercício 2 da página 5 tem-se que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx \text{ converge e que } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}.$$

Portanto

$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^3} dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

- ② Como, atendendo ao Exercício 2 da página 5, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} x^2 dx \text{ é divergente, então o integral impróprio}$$

$$\int_3^{+\infty} x^2 dx \text{ também é divergente.}$$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Definição(Integral impróprio de 1.^a espécie em ambos os limites de integração):

Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$.

- ① Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios

$\int_{-\infty}^a f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ são ambos convergentes dizemos que

o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é **convergente** e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

- ② Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo menos um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \quad \text{ou} \quad \int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ é **divergente**.

Exercício: Determine a natureza dos seguintes integrais impróprios e, em caso de convergência, calcule o seu valor:

(a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ (b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Proposição (Critério de Comparação): Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$, integráveis em $[a, t]$, para todo o $t > a$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x),$$

para todo o $x \in [a, +\infty[$. Então:

- (i) se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente;
- (ii) se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é divergente.

Observação: Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o mesmo critério para integrais impróprios de 1.^a espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exemplo: Usando o Critério de Comparaçāo estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$0 \leq \sin \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} . \text{(justifique!)} \quad (1)$$

Uma vez que o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparaçāo, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Proposição (Critério do Limite): Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ e integráveis em $[a, t]$, para todo o $t > a$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0, \forall x \in [a, +\infty[$. Seja

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Então:

- (i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ têm a mesma natureza.
- (ii) Se $L = 0$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é convergente.
- (iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ é divergente.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exemplo: Usando o Critério do Limite estudar a natureza do integral

$$\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$, $\sin \frac{1}{x^2} \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Além disso

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

Uma vez que $L \in \mathbb{R}^+$ e que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ é convergente, pelo Critério do Limite, o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2} dx$ é convergente.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Observação: Com ligeiras adaptações, pode enunciar-se o Critério do Limite para integrais impróprios de 1.^a espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exemplo: Estude a natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$.

Observe-se que, $\frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$ e $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$, $\forall x \in]-\infty, 0]$.

Uma vez que

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

e que $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(x-1)^2} dx$ é convergente (**verifique!**), concluímos, pelo Critério do Limite, que $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{(x-1)^2} dx$ é convergente.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Exercícios: Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

① $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^{\frac{5}{2}}} dx$

② $\int_1^{+\infty} \frac{5x^2 - 3}{x^8 + x - 1} dx$

③ $\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$

④ $\int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{4 + \sqrt{x}} dx$

⑤ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^2(\frac{1}{x})}{x^7 + 2x + 1} dx$

⑥ $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^3 + 3x}{2 + x^2} dx$

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Definição (Convergência absoluta): Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t > a$. Dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é **absolutamente convergente**, se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

é convergente.

Proposição: Seja $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t > a$. Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Integrais Impróprios de 1.^a Espécie

Observação: Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.^a espécie, impróprios no limite inferior de integração.

Exercício: Verifique se os seguintes integrais impróprios são absolutamente convergentes:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$

(b) $\int_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+2x^4} dx, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$

Transformada de Laplace

Seguidamente, iremos apresentar uma ferramenta que se revela bastante útil na resolução de certos problemas envolvendo equações diferenciais (que iremos estudar no capítulo seguinte). Trata-se de uma 'transformação' que consiste em converter uma dada função noutra através de um integral impróprio apropriado.

Definição: Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Chama-se transformada de Laplace de f à função $\mathcal{L}\{f\}$ definida por

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

nos pontos $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente.

Observação: Podemos escrever $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ para indicar a transformada de Laplace de f . Ao escrever-se desta forma salienta-se o facto da função inicial f depender de t , enquanto que a transformada $\mathcal{L}\{f\}$ é calculada em s .

Observação: É habitual escrever-se $\mathcal{F}(s)$ para denotar $\mathcal{L}\{f\}(s)$.

Transformada de Laplace

Exemplo: Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 1$. Por definição,

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} dt$$

para $s \in \mathbb{R}$ em que este integral impróprio é convergente. Ora, estudando a convergência do integral conclui-se que

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0$$

(para $s \leq 0$ este integral diverge). Assim,

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \frac{1}{s}, \text{ para } s > 0.$$

Transformada de Laplace

Exemplos:

- $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \neq 1, t \neq 2, \\ 2 & \text{se } t = 1, \\ 0 & \text{se } t = 2. \end{cases}$

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0. \quad [\text{Verifique!}]$$

- $\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a, \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$
- $\mathcal{L}\{\operatorname{sen}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R})$
- $\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0, \quad (a \in \mathbb{R}).$

Linearidade da Transformada de Laplace

Proposição: Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f, g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Suponha-se que existem $\mathcal{L}\{f\}(s)$ e $\mathcal{L}\{g\}(s)$ para $s > s_f$ e $s > s_g$, respectivamente. Então:

- (i) $\mathcal{L}\{f + g\}(s) = \mathcal{L}\{f\}(s) + \mathcal{L}\{g\}(s), \quad s > \max\{s_f, s_g\};$
- (ii) $\mathcal{L}\{\alpha f\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s), \quad s > s_f.$

Exemplos de aplicação:

①
$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cosh(at)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{\frac{e^{at}+e^{-at}}{2}\right\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at}\}(s) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{s-a} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+a}, \quad s > a \text{ e } s > -a \\ &= \frac{s}{s^2-a^2}, \quad s > |a|, \quad (a \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

②
$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\}(s) = \frac{a}{s^2-a^2}, \quad s > |a|, \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{verifique!}$$

Existência da Transformada de Laplace

Observação: Nem toda a função admite transformada de Laplace.

Por exemplo, $f(t) = e^{t^2}$ não tem transformada de Laplace, uma vez que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} e^{-st} e^{t^2} dt$ diverge para qualquer $s \in \mathbb{R}$. [Verifique!]

Questão: Que propriedades da função f poderão garantir a existência de $\mathcal{L}\{f\}(s)$, com $s > s_0$, para algum $s_0 \in \mathbb{R}$?

Funções de ordem exponencial

Definição: Sejam $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{R}$. f diz-se uma **função de ordem exponencial k** (à direita) se existem constantes $M > 0$, $T > 0$ tais que

$$|f(t)| \leq M e^{kt}, \quad \forall t \geq T.$$

Exemplos de funções de ordem exponencial:

- ① Funções polinomiais;
- ② Funções limitadas;
- ③ Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} \cos(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$;
- ④ Funções do tipo $f(t) = t^n e^{at} \sin(bt)$, com $n \in \mathbb{N}_0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação: Se f é uma função de ordem exponencial k , então

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0, \quad \text{para todo } s > k.$$

Condição suficiente de existência de Transformada de Laplace

Definição: Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **seccionalmente contínua** se existe uma partição $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ do intervalo $[a, b]$ tal que

- ① f é contínua em $]x_{i-1}, x_i[$, para todo o $i = 1, 2, \dots, n$;
- ② os limites laterais nas extremidades de cada subintervalo existem e são finitos.

Definição: Seja I um subintervalo ilimitado de \mathbb{R} . Uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **seccionalmente contínua** se f é seccionalmente contínua em todo o subintervalo $[a, b]$ de I .

Teorema: Se $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função seccionalmente contínua e f é de ordem exponencial k (para algum $k \in \mathbb{R}$), então $\mathcal{L}\{f\}(s)$ existe para $s > k$.

Propriedades da Transformada de Laplace

① Deslocamento na transformada

Sejam $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \text{ para } s > \lambda + s_f.$$

② Transformada da expansão/contração

Sejam $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$.

Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo o $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \text{ para } s > a s_f.$$

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

③ Derivada da transformada

Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, com $b > 0$.

Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ para } s > s_f,$$

onde $F^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função F .

④ Transformada da derivada

Suponha-se que $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ ($n \in \mathbb{N}$) são funções ordem exponencial s_0 , para algum $s_0 \in \mathbb{R}$ e que $f^{(n)}$ existe e é seccionalmente contínua em $[0, +\infty[$. Então existe $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s)$, para $s > s_0$, e

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

5 Transformada do deslocamento

Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável em todo o intervalo $[0, b]$, $b > 0$, $H_a(t)$ a função degrau unitário¹ em $t = a$.

Se $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$ existe para $s > s_f$, então, para todo $a \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s), \text{ para } s > s_f.$$

¹Função de domínio \mathbb{R} tal que $H_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ 1 & \text{se } t \geq a \end{cases}$, também designada por função de Heaviside (quando $a = 0$).

Propriedades da Transformada de Laplace (cont.)

⑥ Transformada da convolução

O produto de convolução de duas funções f e g , caso o integral exista, define-se como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0.$$

Se f e g são funções de ordem exponencial s_0 , para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, e seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$, então

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s), \text{ para } s > s_0,$$

(F e G são as transformadas de Laplace de f e g , respetivamente.)

Exemplo

Cálculo de $\mathcal{L}\{\cos^2 t\}$ usando a transformada da derivada:

Como $(\cos^2 t)' = -\sin(2t)$, então

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}\{\sin(2t)\} &= \mathcal{L}\left\{(\cos^2 t)'\right\} \\&= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - \cos^2(0) \\&= s\mathcal{L}\{\cos^2 t\} - 1, \quad \text{para } s > 0.\end{aligned}$$

Por outro lado, $\mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2+4}$ e, portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos^2 t\} &= \frac{1}{s}(1 - \mathcal{L}\{\sin(2t)\}) \\&= \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Transformada de Laplace inversa

Observação: Em muitas aplicações práticas, como, por exemplo, na resolução de problemas de valores iniciais (que iremos estudar no capítulo seguinte), é importante determinar a Transformada de Laplace inversa de uma dada função $F(s)$.

Em geral, dada $F(s)$, interessa determinar “a” função f (definida em \mathbb{R}_0^+) tal que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tal f , caso exista, chama-se **transformada de Laplace inversa** de F e escreve-se

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\} \quad \text{ou} \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t).$$

Questão: Será esta função única, existirá? Nem sempre existe, mas, caso existam funções nessas condições, a unicidade pode garantir-se escolhendo aquela que é contínua (ver teorema da página seguinte).

Transformada de Laplace Inversa (unicidade)

Teorema: Sejam f e g duas funções seccionalmente contínuas em $[0, +\infty[$ tais que

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s) = \mathcal{L}\{g\}(s), \quad \text{para } s > \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Se f e g são contínuas no ponto $t \in \mathbb{R}^+$, então $f(t) = g(t)$.

Definição: Se $F(s)$ é transformada de Laplace de uma função contínua $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, define-se

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = f(t).$$

Observação: Cada propriedade da Transformada de Laplace dá origem a uma propriedade da Transformada de Laplace inversa (basta ler a tabela das propriedades das Transformadas de Laplace em "sentido inverso").

Algumas propriedades da Transformada de Laplace Inversa

① Linearidade da Transformada de Laplace inversa

Suponha-se que F e G admitem transformada de Laplace inversa. Então as funções $F + G$ e αF ($\alpha \in \mathbb{R}$) também admitem transformada inversa e

- (i) $\mathcal{L}^{-1}\{F + G\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \mathcal{L}^{-1}\{G\};$
- (ii) $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\}.$

② Transformada inversa do deslocamento

Se F admite transformada de Laplace inversa, então $F(s - \lambda)$ também admite transformada inversa para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - \lambda)\} = e^{\lambda t} \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

③ Transformada inversa do produto

Se F e G admitem transformada de Laplace inversa, então FG também admite transformada inversa e

$$\mathcal{L}^{-1}\{FG\} = \mathcal{L}^{-1}\{F\} * \mathcal{L}^{-1}\{G\}$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{(s-2)^3} \right\} &= \frac{3}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(s-2)^3} \right\} \quad s > 2 \\ &= \frac{3}{2} e^{2t} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s^3} \right\} \\ &= \frac{3}{2} e^{2t} t^2, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s(s^2+1)} \right\} &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{1}{s^2+1} \right\} \quad s > 0 \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \\ &= (1 * \operatorname{sen})(t) \quad t \geq 0 \\ &= \int_0^t \operatorname{sen}(\tau) d\tau \\ &= -\cos(t) + 1 \end{aligned}$$

Formulário de Transformadas de Laplace

Função	Transformada	Função	Transformada	Função	Transformada
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s - a}$ $(s > a)$	$\sin(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$ $(s > 0)$	$\sinh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$ $(s > a)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$ $s > a $

Propriedades da Transformada de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \text{ com } s > s_f \quad \text{e} \quad G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \text{ com } s > s_g$$

$$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\}(s) = F(s) + G(s), \quad s > \max\{s_f, s_g\}$$

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s), \quad s > s_f \text{ e } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t}f(t)\}(s) = F(s - \lambda), \quad s > s_f + \lambda \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s), \quad s > s_f \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{H_a(t) \cdot f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s), \quad s > s_f \text{ e } a > 0$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad s > a s_f \text{ e } a > 0$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

$$\text{com } s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''}, \dots, s_{f^{(n-1)}}\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s), \quad \text{onde} \quad (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad t \geq 0$$