Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I-C — Exame de Recurso (V1)

3 de fevereiro de 2025

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ______________________________) N. folhas suplementares: ____

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [15pts]	3a [13pts]	3b [17pts]	4 [15pts]	5 [15pts]	6 [15pts]	7a [10pts]	7b [12pts]	7c [03pts]	8a [12pts]	8b [13pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 8 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Seja f a função definida por $f(x) = \pi + \arccos(\sqrt{x})$ e f^{-1} a sua inversa. Sendo $D_{f^{-1}}$ o domínio de f^{-1} e $CD_{f^{-1}}$ o contradomínio de f^{-1}, podemos afirmar que:

- ☐ $D_{f^{-1}} = [\pi, 2\pi]$ e $CD_{f^{-1}} = [0, 1]$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $CD_{f^{-1}} = [0, 1]$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [\pi, 2\pi]$ e $CD_{f^{-1}} = [-1, 1]$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ e $CD_{f^{-1}} = [-1, 1]$.

(b) O limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ é igual a:

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ $+\infty$
- ☐ $\frac{1}{2}$

(c) Seja $f(x) = (x-1)\mathrm{e}^x$. Usando o polinómio de Taylor de ordem 2 de f no ponto $c = 1$, $T_1^2(f(x))$, podemos concluir que um valor aproximado de $f(2) = \mathrm{e}^2$ é igual a:

- ☐ $2\mathrm{e}$
- ☐ $\mathrm{e} + 2$
- ☐ $\frac{7\mathrm{e}}{2}$
- ☐ $\frac{8}{3}$

(d) Sendo $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \cos(t^2)\, dt$, podemos afirmar que:

- ☐ $F'(0) = 1$.
- ☐ $F'(0) = -1$.
- ☐ $F'(0) = 0$.
- ☐ $F'(0) = \pi$.

(e) Usando a Transformada de Laplace, podemos concluir que o valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2e^{-2t} \operatorname{senh}(t)\, dt$ é:

- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ $-\frac{2}{9}$
- ☐ $\frac{4}{3}$
- ☐ $-\frac{8}{3}$

(f) A solução geral da equação diferencial $xy' + (1+2x^2)y = 0$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, é dada por:

- ☐ $y = \dfrac{C}{x\mathrm{e}^{-x^2}},\ C \in \mathbb{R}$.
- ☐ $y = \dfrac{7}{|x|\mathrm{e}^{x^2}}$.
- ☐ $y = \dfrac{C}{x\mathrm{e}^{x^2}},\ C \in \mathbb{R}$.
- ☐ $y = \dfrac{Cx}{\mathrm{e}^{x^2}},\ C \in \mathbb{R}$.

[15pts] 2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo contradomínio, CD_f, verifica a condição $CD_f \subseteq]0,1[$. Mostre que existe um $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$. [Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano-Cauchy (ou Teorema dos Valores Intermédios) à função g definida por $g(x) = f(x) - x$].

Continua na folha suplementar Nº

3. Determine:

[13pts] (a) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(x)\, dx$.

Continua na folha suplementar Nº

[17pts] (b) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^4+x^2}\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 4. Indique, justificando, a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x^2 \cdot \sqrt{x}}\, dx$.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 5. Sejam $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = x$. Esboce a região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g e determine a sua área.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 6. Resolva a seguinte equação diferencial homogénea: $y' = \dfrac{y}{x} + 2$.

Continua na folha suplementar Nº

7. Considere a equação diferencial: $4y''' + 4y'' + y' = \mathrm{e}^{2x}$.

[10pts] (a) Resolva a equação diferencial homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Determine uma solução particular da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

[03pts] (c) Indique a solução geral da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

8. Considere o seguinte problema de valores iniciais $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2. \end{cases}$

[12pts] (a) Mostre que $\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \dfrac{s}{(s-1)^2}\ ,\ \ s > 1$.

Continua na folha suplementar Nº

[13pts] (b) Usando a Transformada de Laplace inversa, resolva o problema de valores iniciais.

Continua na folha suplementar Nº

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$
$u' \sec u \operatorname{tg} u$	$\sec u$	$u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u$		

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$ $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

Função	**Transformada**	**Função**	**Transformada**	**Função**	**Transformada**
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \lvert a\rvert)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a\rvert$

Propriedades da Transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, com $s > s_g$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s) + G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t) \cdot f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s)$, onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau,\ t \geq 0$