

Valores e Vetores Próprios. Formas Quadráticas. Cónicas e Quádricas.

1. Determine os valores próprios e vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes. Averigue se a matriz é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma sua matriz diagonalizante, bem como a matriz diagonal correspondente.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (e) \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que 1 é um valor próprio de A e determine o subespaço próprio de A associado ao 1.
 (b) Verifique se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal D semelhante a A .
 3. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que A é singular se e só se 0 é um valor próprio de A .

4. Mostre que A e A^T possuem os mesmos valores próprios.

5. Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A . Mostre que

- (a) λ^k é um valor próprio de A^k , para $k \in \mathbb{N}$;
 (b) $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1} , caso A seja invertível.

6. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que AB e BA são matrizes semelhantes.

7. Se A é diagonalizável, mostre que

- (a) A^T é diagonalizável;
 (b) A^k é diagonalizável, para $k \in \mathbb{N}$;
 (c) A^{-1} é diagonalizável, caso A seja invertível.

8. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de A .
 (b) Verifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.
 (c) Calcule A^5 , utilizando o facto de A ser diagonalizável.
9. Determine os valores dos parâmetros reais a e b para os quais $(1, 1)$ é um vetor próprio da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$$

e 0 é um valor próprio de A .

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o polinómio característico de A , assim como os seus valores próprios.
- (b) Determine os subespaços próprios de A .
- (c) Indique, justificando, os valores do parâmetro real k para os quais A é diagonalizável.
- (d) Para os valores de k obtidos na alínea anterior, determine uma matriz diagonal D e uma matriz não singular P tal que $A = PDP^{-1}$.
- (e) Para $k = -1$, determine A^{2012} .

11. Dada A uma matriz 4×4 , sejam X, Y, Z, W vetores não nulos de \mathbb{R}^4 , tais que $AX = AY = 0$, $AZ = Z$ e $AW = -W$. Suponha que $\{X, Y\}$ é linearmente independente.

- (a) Indique o polinómio caraterístico de A e os valores próprios de A .
- (b) Indique, justificando, se A é diagonalizável e se existe uma base de \mathbb{R}^4 constituída por vetores próprios de A .

12. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os seus valores próprios. Mostre que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

13. Diagonalize as matrizes simétricas seguintes através de uma matriz diagonalizante ortogonal:

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

14. Considere a matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- (a) Mostre que 9 é um valor próprio de A .
- (b) Diagonalize A através de uma matriz diagonalizante ortogonal.

15. Seja A uma matriz simétrica 3×3 com valores próprios 1 e -3 , tal que $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 e $(0, -1, 1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio -3 .

- (a) Determine o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1.
- (b) Justifique que A é diagonalizável e determine a matriz A .

16. Classifique as formas quadráticas usando o critério de Sylvester.

- (a) $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.
- (b) $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.
- (c) $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
- (d) $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T AX$, onde $A = \begin{bmatrix} -10 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

17. Determine a equação reduzida e classifique as cónicas definidas pelas equações:

- (a) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$;
- (b) $4xy - 2x + 6y + 3 = 0$;
- (c) $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$.

18. Determine a equação reduzida e classifique as quádricas definidas pelas equações:

- (a) $x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 6y - 9 = 0$;
- (b) $x^2 + 2y^2 + z^2 - x + 2y = 0$;
- (c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - z = 0$;
- (d) $x^2 + 4y^2 + 4xy - 2x - 4y + 2z + 1 = 0$;
- (e) $3y^2 + 4xz + 6y + 1 = 0$;
- (f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 2x + 2y + 2z = 0$;
- (g) $-x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$.

19. Determine os valores do parâmetro α para os quais a cónica definida por

$$5x^2 + 5y^2 + 2xy + 2x - 2y + \alpha = 0$$

é uma elipse.

20. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique que P é uma matriz ortogonal e calcule $P^T A P$.
- (b) Determine a equação reduzida e classifique a cónica de equação $4xy + x + y = 0$.

21. Seja A o ponto de coordenadas $(0, 1, 1)$. Verifique que o conjunto dos pontos de \mathbb{R}^3 cuja distância a A é exactamente uma unidade mais do que a sua distância à origem é uma quádrica e classifique-a.

22. Identifique o lugar geométrico dos pontos de \mathbb{R}^3 cuja distância ao ponto $(0, 0, -2)$ é a terça parte da distância ao plano de equação $z + 18 = 0$.