

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A

Exame Final

10 de Janeiro de 2025

Duração total do teste: 2h30m

Nome: _____

Nº mecanográfico: _____ Curso: _____

Declaro que desisto: _____

Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4	Questão 5	Questão 6	Classificação final

PARTE I**Escolha múltipla**

(4 val.) **1)** Selecione a (única) afirmação verdadeira em cada uma das seguintes questões. Cada resposta certa será cotada com 0,5 valores.

- (a) Considere as bases $\mathcal{B} = ((1, -1), (-3, 4))$ e $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$ de \mathbb{R}^2 . A matriz de mudança de base de \mathcal{B} para \mathcal{C} é:

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}.$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^{-1}.$

Nenhuma das anteriores.

(b) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ k & 2k+3 \end{bmatrix}$, onde k é um parâmetro real. Podemos dizer que:

- A é invertível para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\det(A) = -\det(A^{-1})$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3k+3 \end{bmatrix}$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- $\det(2A) = 2\det(A)$ para todo $k \in \mathbb{R}$.
- Nenhuma das anteriores.

Tema de auto-estudo

(c) Considere o sistema $\begin{cases} x + z = 3 \\ x + 2y - z = 2 \\ ax + 4z = 1 \end{cases}$ nas variáveis x, y, z e onde a é um parâmetro real. Então:

$$\boxtimes \text{ o sistema é de Cramer se e só se } a \neq 4. \text{ Se } a = 0, y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}.$$

$$\square \text{ o sistema é de Cramer se e só se } a \neq 4. \text{ Se } a = 0, y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}.$$

$$\square \text{ o sistema é de Cramer se e só se } a = 0. \text{ Se } a = 0, y = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}.$$

$$\square \text{ o sistema é de Cramer se e só se } a = 0. \text{ Se } a = 0, y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}}.$$

- Nenhuma das anteriores.

(d) Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido de produto interno e os vetores $u = (1, 1, 1)$ e $v = (1, 2, -1)$. O produto vetorial entre u e v é:

- $u \times v = 2$.
- $u \times v = (-3, 2, 1)$.
- $u \times v = (1, 2, -3)$.
- $u \times v = 0$.
- $u \times v = (3, -2, -1)$.
- Nenhuma das anteriores.

(e) Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 munido de produto interno e o subespaço de \mathbb{R}^3

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}.$$

Uma base ortogonal de F é:

- $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0))$.
- $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$.
- $\mathcal{B} = ((1, 1, 1))$.
- $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$.
- Nenhuma das anteriores.

(f) Escolha a opção correta.

- Uma matriz A do tipo 3×3 é diagonalizável se e só se tem 3 valores próprios distintos.
- Se A é uma matriz do tipo 3×3 com dois valores próprios distintos então um dos subespaços próprios de A , associado a um dos valores próprios, tem dimensão superior a 1.
- Se A é uma matriz do tipo 4×4 com dois valores próprios distintos e o subespaço próprio associado a um desses valores tem dimensão 3, então A é diagonalizável.
- Nenhuma das anteriores.

(g) Seja $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $L(x, y) = (2x + y, 3x - 4y, x - y)$. Então a matriz representativa de L relativamente à base canónica de \mathbb{R}^2 e à base canónica de \mathbb{R}^3 é:

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}.$

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$

Nenhuma das anteriores.

(h) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 4 & 0 & c \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ é igual a:

$-4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$-\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$\det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

$4 \det \begin{bmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Nenhuma das anteriores.

PARTE II

Justifique devidamente as seguintes questões:

2) Considere o sistema de equações lineares nas variáveis x, y e z e no parâmetro real a ,

$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ (a+1)y + az = 1 \\ x + ay + a(a-1)z = a \end{cases}$$

- a) (1 val.) Determine os valores de a para os quais o sistema é possível e determinado.
 - b) (3 val.) Determine o valor de a para o qual o sistema tem $(0, 1, -1)$ como solução e resolva o sistema usando o método de eliminação de Gauss-Jordan para este valor de a .
- [Se não determinou o valor de a resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3y + 2z = -2 \\ x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$ usando o método de eliminação de Gauss-Jordan. Neste caso a questão será cotada para 2 valores.]
- c) (1,5 val.) Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^3 e o subespaço $S = \langle (1, 0, 1), (a, a+1, a), (0, a, a(a-1)) \rangle$, onde a é um parâmetro real. Determine os valores de a para os quais $S = \mathbb{R}^3$.

(3,5 val.) **3)** Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^4 e o subconjunto

$$S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 3z = 0 \wedge y = 2w\}.$$

- a) Verifique que S é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^4 .
- b) Determine uma base e a dimensão de S .

(2 val.) **4)** Considere o sistema (impossível) $AX = B$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Encontre a solução dos mínimos quadrados e calcule o erro dos mínimos quadrados associado.

(1 val.) **5)** Seja A uma matriz $n \times n$ e λ um valor próprio de A . Mostre que:

- (a) λ^2 é um valor próprio de A^2 .
- (b) se A é diagonalizável então A^2 também é diagonalizável.

(4 val.) **6)**

- (a) Determine uma equação reduzida e classifique a cónica definida pela equação

$$x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0.$$

- (b) Classifique a forma quadrática $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2$.

①(a) $B = \{(1, -1), (-3, 4)\}$ - base de \mathbb{R}^2

$C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ - base canónica de \mathbb{R}^2 .

$$M_{e \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ [1, -1]_e & [-3, 4]_e \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Cap. 2.1. slide 14})$$

as colunas são os vetores da base B escritos à custa da base e .

$$(1, -1) = \alpha_1 (1, 0) + \alpha_2 (0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -1 \end{cases} \quad \text{assim } [1, -1]_e = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(-3, 4) = \beta_1 (1, 0) + \beta_2 (0, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = -3 \\ \beta_2 = 4 \end{cases} \quad \text{assim } [-3, 4]_e = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

NOTA: Qualquer vetor (x, y) tem as mesmas coordenadas quando escrito à custa da base canónica, isto é, $[x, y]_e = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Logo, $M_{e \leftarrow B} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ K & 2K+3 \end{bmatrix}$ vamos analisar cada uma das opções:

$$A \text{ é invertível} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ K & 2K+3 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2K+3+K \neq 0 \Leftrightarrow K \neq -1$$

Logo, A é invertível apenas quando $K \neq -1$.

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A^{-1})} \neq -\det(A^{-1}) \quad (\text{Propriedade 7 Cap. 3. slide 8})$$

$$\det(2A) = \det\left(2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ K & 2K+3 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \\ 2K & 2(2K+3) \end{bmatrix}\right) \quad (\text{Propriedade 3 Cap. 3. slide 2})$$

$$= 2 \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot (-1) \\ K & 2(2K+3) \end{bmatrix}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ K & 2K+3 \end{bmatrix}\right) = 4 \det(A) \neq 2 \det(A)$$

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ K & 2K+3 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3K+3 \end{bmatrix}\right) \quad (\text{L}_2 = \text{L}_2 - KL_1)$$

Opcão correta!

esta operação elementar não altera o determinante (Propriedade 5 Cap. 3 slide 8)

(c) $\begin{cases} x+z=3 \\ x+2y-z=2 \\ ax+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow AX=b$

O sistema $AX=b$ é um sistema de Cramer se e só se

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2(4-a) \neq 0 \Leftrightarrow 8-2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 4$$

Se $a=0$ então $y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}}$ Estamos a calcular a 2ª incógnita, y , logo no numerador temos o det. de A substituindo a 2ª coluna por $b = [3 \ 2 \ 1]^T$.

(d) $u \times v = (1,1,1) \times (1,2,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = i \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1-2=-3} - j \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=-1-1=-2} + k \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{=2-1=1}$
 $= -3i + 2j + k = -3(1,0,0) + 2(0,1,0) = (-3, 2, 1)$

(e) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$ queremos uma base ortogonal de F .

$B = ((-1,1,0), (-1,0,1))$ não pode ser a opção correta porque os vetores não são ortogonais: $(-1,1,0) \cdot (-1,0,1) = 1 \neq 0$

$B = ((1,0,0), (0,1,0))$ não pode ser a opção correta porque apesar dos vetores serem ortogonais $(1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$ os vetores não pertencem a F e para ser uma base de F convinha serem vetores de F ... $(1,0,0) \notin F$ porque $1+0+0 \neq 0$ e $(0,1,0) \notin F$ porque $0+1+0 \neq 0$

$B = ((1,1,1))$ não pode ser a opção correta porque apesar do conjunto $\{(1,1,1)\}$ ser ortogonal dado que só temos um vetor, $B \neq 0$ e uma base de F porque $(1,1,1) \notin F$ ($1+1+1 \neq 0$)

$B = ((-1,1,0), (1,1,-2))$ temos que os vetores são ortogonais porque $(-1,1,0) \cdot (1,1,-2) = -1+1+0=0$ logo são linearmente independentes (Teorema do Cap. 4. slide 7)

Para além disso geram F :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=-y-z\} \\ &= \{(-y-z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\} = \{(-y, y, 0) + (-z, 0, z), y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) \rangle \quad (\text{Lema ii. Cap. 2.2 slide 3}) \\
 &\quad \text{(x(-2))} \\
 &= \langle (-1, 1, 0), (2, 0, -2) \rangle = \langle (-1, 1, 0), (2, 0, -2) + (-1, 1, 0) \rangle \quad (\text{Lema iii. Cap. 2.2. slide 3}) \\
 &= \langle (-1, 1, 0), (1, 1, -2) \rangle
 \end{aligned}$$

Logo, $(-1, 1, 0)$ e $(1, 1, -2)$ geram F e são ortogonais (o que implica que são l.i.)
assim $B = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$ é uma base ortogonal de F .

(f) Vamos analisar cada uma das opções:

$A_{3 \times 3}$ é diagonalizável se e só se A tem 3 valores próprios distintos.

A implicação: Se $A_{3 \times 3}$ tem 3 valores próprios distintos \Rightarrow é diagonalizável, é verdadeira, mas a implicação contrária: Se $A_{3 \times 3}$ é diagonalizável \Rightarrow tem 3 valores próprios distintos é falsa. (ver Observações do Cap. 5.1. slide 12).

Por exemplo, (Cap. 5.1. slide 13-14)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ tem dois valores próprios: 1 e 2.

$(1, 0, 0), (0, 0, 1)$ são os vetores próprios associados ao 1
 $(1, 1, 0)$ é o vetor próprio associado ao 2.

{ Ver contas
no Cap. 5.1.
Slide 13-14 }

Apesar de $A_{3 \times 3}$ só ter 2 valores próprios, é diagonalizável porque temos 3 vetores próprios l.i.. Assim, existe P invertível e D diagonal tal que $A = PDP'$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se $A_{3 \times 3}$ tem 2 valores próprios distintos então um dos subespaços próprios de A , associado a um dos valores próprios, tem dimensão superior a 1 (≥ 1)

E falsa! A dimensão de um subespaço próprio associado a um valor próprio λ pode ser visto como o nº de vetores próprios associados ao valor próprio λ .

Cada valor próprio λ é obrigado a dar-nos pelo menos 1 vetor próprio, isto é, $\dim U_\lambda \geq 1$. Não existe nada no enunciado que obrigue um dos valores a dar mais do que 1 vetor próprio, isto é, $\dim U_\lambda > 1$. Portanto, a afirmação é falsa.

Só por curiosidade, bastava adicionarmos "e A é diagonalizável" para a afirmação ser verdadeira:
Se $A_{3 \times 3}$ tem 2 valores próprios distintos e A é diagonalizável então A tem de ter 3 vetores próprios l.i.. assim tem de existir um valor próprio que nos vai dar 1 vetor próprio e outro que nos vai dar 2 vetores próprios, isto é, um dos subespaços próprios de A associado a um valor próprio λ tem dimensão superior a 1, $\boxed{\dim U_\lambda > 1}$

Opção correta!

Se $A_{4 \times 4}$ tem dois valores próprios distintos, λ e λ' , e o subespaço próprio associado a um desses vetores tem dimensão 3, então A é diagonalizável.

$A_{4 \times 4}$ tem no total $\dim U_\lambda + \dim U_{\lambda'}$ vetores próprios l.i. (Teorema Cap.5.1. slide 11) Sabemos que um dos subespaços próprios, por exemplo U_λ , tem dimensão 3 e sabemos que o outro subespaço próprio, o $U_{\lambda'}$, tem de ter pelo menos dimensão 1 (2º Teorema do Cap.5.1. slide 4). Assim, $A_{4 \times 4}$ tem

$$\underbrace{\dim U_\lambda}_{=3} + \underbrace{\dim U_{\lambda'}}_{\geq 1} \geq 3 + 1 = 4$$

pelo menos 4 vetores próprios l.i.. Como a dimensão de A é 4, isso quer dizer que estamos a trabalhar com vetores em \mathbb{R}^4 e sabemos que em \mathbb{R}^4 temos no máximo 4 vetores l.i.. Isto implica que não conseguimos ter mais do que 4 vetores próprios l.i., a $\dim U_{\lambda'}$ tem de ser exatamente 1! Assim, temos no total 4 vetores próprios l.i. $\Rightarrow A$ é diagonalizável.

(g) $L(x,y) = (2x+y, 3x-4y, x-y)$

$bc = ((1,0), (0,1))$ base canónica de \mathbb{R}^2

$Bc = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ base canónica de \mathbb{R}^3

$$[L]_{bc, Bc} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ [L(1,0)]_{Bc} & [L(0,1)]_{Bc} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

as colunas são as imagens por L dos vetores de bc escritos nas coordenadas de Bc . (Cap.6 slide 8)

1º Calcular $L(1,0) = (2, 3, 1)$ e $L(0,1) = (1, -4, -1)$

2º Escrever $L(1,0)$ e $L(0,1)$ como combinação linear dos vetores de Bc .

$$L(1,0) = (2, 3, 1) = \underbrace{2(1,0,0)}_{\text{base } Bc} + \underbrace{3(0,1,0)}_{\text{base } Bc} + \underbrace{1(0,0,1)}_{\text{base } Bc}$$

Logo,

$$[L(1,0)]_{Bc} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$L(0,1) = (1, -4, -1) = \underbrace{1(1,0,0)}_{\text{base } Bc} - \underbrace{4(0,1,0)}_{\text{base } Bc} - \underbrace{1(0,0,1)}_{\text{base } Bc}$$

Logo,

$$[L(0,1)]_{Bc} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Assim, $[L]_{bc, Bc} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

(h) $\begin{vmatrix} a^+ b & 0 \\ 4^- 0^+ c^- & \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} b & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$

$$(4) A_{3 \times 2} X_{2 \times 1} = B_{3 \times 1}$$

Equações Normais:

$$A^T A X = A^T B \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Resolver as equações normais:

$$\left[A^T A \mid A^T B \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 11 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{9}} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{L_1}{2}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{array} \right], \quad x = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ é a solução dos mínimos quadrados}$$

$$\underline{\text{Calcular o erro:}} \quad \| B - A X \| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+4+64}{9}} = \sqrt{\frac{72}{9}} \quad \left(= \sqrt{\frac{2^2 \times 3^2 \times 2}{3^2}} = 2\sqrt{2} \right)$$

$$(5)(a) \quad \lambda \text{ é um valor próprio de } A_{n \times n} \Rightarrow \lambda^2 \text{ é um valor próprio de } \lambda$$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio de A então existe um vetor não nulo $X \in \mathbb{R}^n$ tal que

(Cap. 5.1. slide 2)

$$AX = \lambda X$$

Assim, $A^2 X = AAX = A\lambda X = \lambda AX = \lambda \lambda X = \lambda^2 X$, como $X \in \mathbb{R}^n$ é um vetor não nulo temos que λ^2 é um valor próprio de A^2 , isto é,

$$A^2 X = \lambda^2 X$$

$$(b) \quad A \text{ é diagonalizável} \Rightarrow A \text{ é diagonalizável}$$

Se A é diagonalizável então existe P invertível e D diagonal tal que

(Cap. 5.1. slide 9)

$$A = PDP^{-1}$$

Logo, $A^2 = AA = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDDP^{-1} = P D^2 P^{-1}$ (Cap. 5.1. slide 15) como P é invertível e D^2 é diagonal segue que A^2 é diagonalizável.

$$A^2 = P D^2 P^{-1}$$

$$\textcircled{6} \quad (\text{a}) \quad x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 6y + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^T A X + B X + 9 = 0$$

Calcular os valores próprios de A :

$$|A - \lambda I_2| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(1-2)^2 - 4 \cdot (1-1)}}{2} \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = -1$$

Calcular os vetores próprios de A :

$$U_3 = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : (A - 3I_2)X = 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y \right\} = \left\{ (-y, y), y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y(-1, 1), y \in \mathbb{R} \right\} = \langle (-1, 1) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$$

$$U_{-1} = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : (A - (-1)I_2)X = 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \right\} = \left\{ (y, y), y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ y(1, 1), y \in \mathbb{R} \right\} = \langle (1, 1) \rangle$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y$$

Dividir cada vetor próprio pela sua norma:

$$\frac{(-1, 1)}{\|(-1, 1)\|} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad e \quad \frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = \frac{(1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Construir $P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{C.A.} \\ \frac{12}{\sqrt{2}} &= \frac{12\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

Mudança de variável $X = P \hat{X}$ onde $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$

e calcular $\hat{B} = BP = \begin{bmatrix} -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} = [6\sqrt{2} \ 0]$

Assim, $X^T A X + BX + 9 = 0 \Leftrightarrow \hat{X}^T D \hat{X} + \hat{B} \hat{X} + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + [6\sqrt{2} \ 0] \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 6\sqrt{2}\hat{x} + 9 = 0$$

Completar o quadrado:

$$\Leftrightarrow 3(\hat{x}^2 + 2\sqrt{2}\hat{x}) - \hat{y}^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\hat{x}^2 + 2\sqrt{2}\hat{x} + \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - \hat{y}^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\hat{x}^2 + 2\sqrt{2}\hat{x} + (\sqrt{2})^2) - 3(\sqrt{2})^2 - \hat{y}^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(\underbrace{\hat{x} + \sqrt{2}}_{=\tilde{x}})^2 - \hat{y}^2 = -3 \quad \Leftrightarrow -\tilde{x}^2 + \frac{\hat{y}^2}{3} = 1 \quad \text{hipérbole}$$

(b)

$$Q(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^T A X$$

Pela alínea anterior sabemos que A tem valores próprios 3 e -1 , isto é, um valor próprio é positivo e outro é negativo logo a forma quadrática Q é indefinida. (Cap. 5.2. slide 7)

ou

Os menores principais dominantes são:

$$\Delta_1 = |1| = 1 \quad \text{e} \quad \Delta_2 = |A| = 1 - 4 = -5$$

Pelo Critério de Sylvester, Q é indefinida.

Cap. 5.2. slide 10:

Teorema (Critério de Sylvester):

Uma forma quadrática $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $Q(X) = X^T A X$, onde A é uma matriz simétrica, é:

1. definida positiva se e só se os menores principais dominantes de A são positivos; X não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
2. semi-definida positiva se e só se todos os menores principais de A são não negativos; X não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
3. definida negativa se e só se os menores principais dominantes de A de ordem par são positivos e os de ordem ímpar são negativos; X não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
4. semi-definida negativa se e só se os menores principais de A de ordem par são não negativos e os de ordem ímpar são não positivos; X não pode ser porque $\Delta_2 < 0$
5. indefinida se nenhuma das anteriores se verifica. \checkmark Então só resta esta opção