

# Produto Interno, Distâncias, Projeção ortogonal, Mínimos Quadrados

## Álgebra Linear e Geometria Analítica A

## Soluções da Folha Prática 4

1. (a)  $u + v = (0, -1, 1)$  e  $3u - 2v = (5, -8, 3)$ .  
 (b) Não. Não.  
 (c) i.  $5\pi/6$ ; ii.  $\pi/6$ ; iii.  $\arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$ .  
 (d)  $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$  ou  $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ .  
 (e) i.  $\frac{\sqrt{6}}{3}(1, -2, 1)$ ; ii.  $-\frac{\sqrt{6}}{3}(1, -2, 1)$ .  
 (f)  $u = -\frac{3}{2}(-1, 1, 0) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ .  
 (g)  $\alpha(1, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 (h)  $\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 2)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .
2. Dois lados do triângulo têm comprimento  $\sqrt{41}$ .
3.  $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3y^2 + 3z^2}, y, z\right)$ ,  $y, z \in \mathbb{R}$ .
5. (a)  $(-1, 2, 4)$ .
6. (b) i.  $\sqrt{66}$ ; ii.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; iii. 2.
7. (a)  $\alpha(2, -1, -3)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 (b)  $\sqrt{14}$ .
9. Uma equação vetorial da reta  $\mathcal{R}$  é  $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; uma equação vetorial do plano  $\mathcal{P}$  é  $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , e uma equação cartesiana de  $\mathcal{P}$  é  $y - z = 1$ .
10. Todos os pontos do plano de equação cartesiana  $2x - y - z + 1 = 0$ .
11. (a)  $(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) + \alpha(0, 1, 1)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; (b)  $\sqrt{2}$ .
12. (a)  $2x+z=3$ ; (b)  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .
13. (a)  $x - z + 3 = 0$ ; (b) 1.
14. (a) Não;  
 (b) Sim.
15.  $a = b = \frac{1}{2}$  ou  $a = b = -\frac{1}{2}$ .
16. (b)  $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$ . (c)  $\begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$ . (d)  $[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ .
18. (a)  $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0, 0, 1)\right)$ ;  
 (b)  $(0, 0, 1)$ ;  
 (c)  $\sqrt{2}/2$ .
19.  $\text{proj}_{\mathcal{W}} X = (1 - 9\sqrt{3}/4, 0, \sqrt{3} - 27/4)$ ,  $\text{proj}_{\mathcal{W}} Y = (1/2 - \sqrt{3}/4, 7, \sqrt{3}/2 - 3/4)$ .
20. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Verdadeira
21. (a)  $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right)$ ;  
 (b)  $\left((0, 0, 1, 0), \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 0, 1), \frac{\sqrt{78}}{78}(-2, 7, 0, -5)\right)$ .
22. O erro dos mínimos quadrados é  $\sqrt{84}$  para qualquer  $x \in \mathbb{R}^2$ .

23. (a) Uma solução dos mínimos quadrados é  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$ . O erro dos mínimos quadrados é zero porque  $b$  pertence ao espaço das colunas de  $A$ .
- (b) Se  $b$  é ortogonal ao espaço das colunas de  $A$  então a projeção de  $b$  no espaço das colunas de  $A$  é 0. Neste caso uma solução dos mínimos quadrados  $\hat{x}$  de  $Ax = b$  satisfaz  $A\hat{x} = 0$ .

24. 1.

(a) As equações normais são:  $A^T A)x = A^T b : \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$ .

(b)  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

24. 2.

(a) As equações normais são:  $A^T A)x = A^T b : \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -2 \end{bmatrix}$ .

(b)  $\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ .

24. 3.

(a) As equações normais são:  $A^T A)x = A^T b : \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$ .

(b)  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$ .

24. 4.

(a) As equações normais são:  $A^T A)x = A^T b : \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$ .

(b)  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ .