Valores e Vetores Próprios. Formas Quadráticas. Cónicas e Quádricas.

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A **Soluções da Folha Prática 5**

---

1. (a) A matriz possui apenas o valor próprio 0 e os vectores próprios associados são da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A matriz não é diagonalizável, pois é uma matriz 3×3 que possui apenas um vector próprio linearmente independente.

(b) A matriz possui os valores próprios $3, 1, -2$ e é diagonalizável, porque é uma matriz 3×3 com três valores próprios distintos. Os vectores próprios associados ao 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5x \\ 2x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

os vectores próprios associados ao 1 são da forma

$$\begin{bmatrix} 6x \\ 3x \\ 8x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e os vectores próprios associados ao -2 são da forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

são uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal, respectivamente.

(c) A matriz possui os valores próprios 3 e 1. Os vectores próprios associados ao 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e os vectores próprios associados ao 1 são da forma

$$\begin{bmatrix} x \\ -2x \\ -2y \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos.}$$

A matriz não é diagonalizável, pois é uma matriz 4×4 que possui no máximo três vectores próprios linearmente independentes.

(d) A matriz possui os valores próprios 3 e 1. Os vectores próprios associados ao 3 são da forma

$$\begin{bmatrix} 5x \\ 2x \\ -3x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

e os vectores próprios associados ao 1 são da forma

$$\begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A matriz não é diagonalizável, pois é uma matriz 3×3 que possui no máximo dois vectores próprios linearmente independentes.

(e) A matriz possui os valores próprios 4 e 2. Os vectores próprios associados ao 4 são da forma:

$$\begin{bmatrix} -x \\ x \\ x \end{bmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

e os vectores próprios associados ao 2 são da forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad x, y \in \mathbb{R} \text{ não simultaneamente nulos.}$$

A matriz é diagonalizável, pois é uma matriz 3×3 que possui três vectores próprios linearmente independentes, sendo

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

uma sua matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal, respectivamente.

2. (a) 1 é um valor próprio de A pois $\det(A - 1\, I_3) = 0$; $U_1 = \left\{ \left(-\frac{5}{2}z, -2z, z\right),\ z \in \mathbb{R} \right\}$.

   (b) A é diagonalizável e $D = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

8. (a) $P = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

   (b) $A^5 = \begin{bmatrix} 32 & -1147 & 1178 \\ 0 & 683 & -682 \\ 0 & -341 & 342 \end{bmatrix}$.

9. $a = b = 1$.

10. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (k+1)\lambda + k$ e os valores próprios de A são 1 e k.

    (b) $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

    (c) i. $U_k = \{(x, -kx) : x \in \mathbb{R}\}$;

       ii. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$; (confirmar!)

       iii. I_2.

11. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda^4$ e os valores próprios de A são $0, 1$ e -1.
    (b) Sim, sim.

13. (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A\, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
    (b) $P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A\, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.
    (c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A\, P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

14. (a) 9 é um valor próprio de A pois $\det(A - 9\, I_3) = 0$.
    (b) $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A\, P = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

15. (a) $\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ y = z\big\}$.
    (b) A é diagonalizável, pois A é simétrica e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

16. (a) Semi-definida negativa. (b) indefinida. (c) Semi-definida positiva. (d) Definida negativa.

17. (a) $y'' = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}(x'')^2$ é a equação reduzida de uma parábola, sendo

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y'' = y' + \frac{19\sqrt{2}}{24} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix};$$

    (b) $\dfrac{(y'')^2}{3} - \dfrac{(x'')^2}{3} = 1$ é a equação reduzida de uma hipérbole, sendo

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'' = y' + \sqrt{2} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix};$$

    (c) $\dfrac{(x')^2}{5} + \dfrac{(y')^2}{5} = 1$ é a equação reduzida de uma elipse (que até é uma circunferência), sendo

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}.$$

18. (a) $\dfrac{(x')^2}{4} - \dfrac{(y')^2}{4} - \dfrac{(z')^2}{4} = 1$ é a equação reduzida de um hiperbolóide de duas folhas, sendo

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \\ z' = z \end{cases};$$

    (b) $\dfrac{(x')^2}{\frac{3}{4}} + \dfrac{(y')^2}{\frac{3}{8}} + \dfrac{(z')^2}{\frac{3}{4}} = 1$ é a equação reduzida de um elipsóide, sendo

$$\begin{cases} x' = x - \frac{1}{2} \\ y' = y + \frac{1}{2} \\ z' = z \end{cases};$$

(c) $z' = (x')^2 + (y')^2$ é a equação reduzida de um parabolóide elíptico, sendo

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 3 \\ z' = z + 13 \end{cases} ;$$

(d) $y' = -\frac{5}{2}\left(x''\right)^2$ é a equação reduzida de um cilindro parabólico, sendo

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y'' = y' \\ z'' = z' \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix};$$

(e) $\dfrac{(x')^2}{\frac{2}{3}} + (y')^2 - (z')^2 = 1$ é a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha.

(f) $3(z')^2 = 1$ é a equação reduzida de dois planos paralelos (de equações $z' = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $z' = -\frac{\sqrt{3}}{3}$).

(g) $(y')^2 - (x')^2 = 1$ é a equação reduzida de um cilindro hiperbólico.

19. $\alpha < \frac{1}{2}$.

20. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$;

(b) Hipérbole de equação reduzida

$$\frac{(x'')^2}{\left(\frac{1}{8}\right)} - \frac{(y'')^2}{\left(\frac{1}{8}\right)} = 1.$$

21. O conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pretendido está contido na quádrica de equação geral

$$4x^2 - 8yz + 4y + 4z - 1 = 0$$

que é um hiperbolóide de duas folhas.

22. Os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de um elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{32} + \frac{z^2}{36} = 1.$$