Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

Cálculo I-C — Exame Final (V1)

9 de janeiro de 2026

Duração: **2h45**

N.º Mec.: ____________ Nome: ____

(Declaro que desisto: ________________________________) N. folhas suplementares: ______

Questão [Cotação]	1 [60pts]	2 [10pts]	3a [13pts]	3b [17pts]	4 [15pts]	5 [10pts]	6 [10pts]	7 [15pts]	8a [11pts]	8b [12pts]	8c [02pts]	9 [25pts]	Classificação (valores)

– Nas questões 2 a 9 justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[60pts] 1. Nas alíneas seguintes assinale com uma cruz a opção correta. A cotação a atribuir a cada resposta é a seguinte:
(i) resposta correta: 10 pontos;
(ii) resposta errada: -3 pontos;
(iii) ausência de resposta ou resposta nula: 0 pontos.

(a) Seja f a função definida por $f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsen}(x-1)}$ e f^{-1} a sua inversa. Sendo $D_{f^{-1}}$ o domínio de f^{-1} e $CD_{f^{-1}}$ o contradomínio de f^{-1}, podemos afirmar que:

- ☐ $D_{f^{-1}} = [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ e $CD_{f^{-1}} = [0, 2]$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e $CD_{f^{-1}} = [-1, 1]$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [0, \sqrt{\pi}]$ e $CD_{f^{-1}} = [0, 2]$.
- ☐ $D_{f^{-1}} = [0, 2]$ e $CD_{f^{-1}} = [0, \sqrt{\pi}]$.

(b) O limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\operatorname{arctg}(x)}$ é igual a:

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ e
- ☐ $+\infty$

(c) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \varphi(\operatorname{arctg}(x^2))$, onde φ é uma função com derivada negativa em $\mathbb{R}$. Podemos afirmar que:

- ☐ f tem um mínimo global.
- ☐ f não tem nem máximos nem mínimos locais.
- ☐ f tem um mínimo e um máximo local.
- ☐ f tem um máximo global.

(d) Usando o polinómio de MacLaurin de ordem 2 de $f(x) = \sqrt{1+x}$, $T_0^2(f(x))$, podemos concluir que um valor aproximado de $\sqrt{1,5}$ é igual a:

- ☐ $\frac{39}{32}$
- ☐ $\frac{19}{16}$
- ☐ $\frac{35}{32}$
- ☐ $\frac{9}{8}$

(e) Sendo F a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \cos^5 t \, dt$, então $F'(\pi)$ é igual a:

- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ -2
- ☐ 3

(f) O integral geral da equação diferencial de variáveis separáveis $y' = \mathrm{e}^{x-2y}$ é:

- ☐ $y = \frac{1}{2}\ln(2\mathrm{e}^x) + C\,, C \in \mathbb{R}$.
- ☐ $y = \frac{1}{2}\ln(2\mathrm{e}^x + C)\,, C \in \mathbb{R}$.
- ☐ $y = \ln(\mathrm{e}^x + C)\,, C \in \mathbb{R}$.
- ☐ $y = \frac{1}{2}\ln(2\mathrm{e}^x) + \ln(C)\,, C \in \mathbb{R}$.

[10pts] 2. Mostre que a equação $\arccos\left((1-x)^2\right) = \frac{\pi}{4}$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[1, 2]$.

Continua na folha suplementar Nº

3. Determine:

[13pts] (a) $\displaystyle\int x \ln(5 + x^2)\, dx$

Continua na folha suplementar Nº

N° Mec: ____________________ **Nome:** ____

[17pts] (b) $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+4)}\,dx$

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 4. Considere as funções f e g definidas por $f(x) = -x$ e $g(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$. Determine o valor da área da região do plano delimitada pelos gráficos das funções f e g, e pelas retas de equações $x = 0$ e $x = 1$.

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] 5. Usando propriedades do Integral de Riemann, prove que:

$$\sqrt{2} \leq \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx \leq 2.$$

Continua na folha suplementar Nº

[10pts] 6. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{1+x+x\sqrt{x}}\, dx$ é absolutamente convergente.

Continua na folha suplementar Nº

[15pts] 7. Resolva a seguinte equação diferencial de Bernoulli $x^2y' = y^2 + xy$, com $x > 0$.

Continua na folha suplementar Nº

8. Considere a equação diferencial: $y'' - 2y' + y = \cos(x)$.

[11pts] (a) Resolva a equação diferencial linear homogénea associada.

Continua na folha suplementar Nº

[12pts] (b) Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados, determine uma solução particular da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

[02pts] (c) Indique a solução geral da equação diferencial completa.

Continua na folha suplementar Nº

[25pts] 9. Usando transformadas de Laplace, resolva o seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 9y = 4e^{-3t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Continua na folha suplementar Nº

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$	$\sin(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
$\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$	$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$	$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$	$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$	$\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$
$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$	$\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$	$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$
	$\operatorname{sen} x \cos y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(x+y))$	

Formulário de Primitivas

Função	Primitiva	Função	Primitiva	Função	Primitiva
$u^r u'$ $(r \neq -1)$	$\dfrac{u^{r+1}}{r+1}$	$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	$u' e^u$	e^u
$u' a^u$	$\dfrac{a^u}{\ln a}$	$u' \cos u$	$\operatorname{sen} u$	$u' \operatorname{sen} u$	$-\cos u$
$u' \sec^2 u$	$\operatorname{tg} u$	$u' \operatorname{cosec}^2 u$	$-\operatorname{cotg} u$	$u' \sec u$	$\ln\lvert \sec u + \operatorname{tg} u\rvert$
$u' \operatorname{cosec} u$	$-\ln\lvert \operatorname{cosec} u + \operatorname{cotg} u\rvert$	$\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$-\arccos u$ ou $\operatorname{arcsen} u$	$\dfrac{u'}{1+u^2}$	$\operatorname{arctg} u$ ou $-\operatorname{arccotg} u$
$u' \sec u \operatorname{tg} u$	$\sec u$	$u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$	$-\operatorname{cosec} u$		

Formulário Transformada de Laplace

Função	**Transformada**	**Função**	**Transformada**	**Função**	**Transformada**
t^n $(n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$	e^{at} $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}$ $(s > a)$	$\operatorname{sen}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$
$\cos(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$ $(s > 0)$	$\operatorname{senh}(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$ $(s > \lvert a\rvert)$	$\cosh(at)$ $(a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$ $s > \lvert a\rvert$

Propriedades da Transformada de Laplace

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$, com $s > s_f$ e $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, com $s > s_g$

$\mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}(s) = F(s) + G(s)\,,\ s > \max\{s_f, s_g\}$	$\mathcal{L}\{\alpha f(t)\}(s) = \alpha F(s)\,,\ s > s_f$ e $\alpha \in \mathbb{R}$
$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = F(s-\lambda)\,,\ s > s_f + \lambda$ e $\lambda \in \mathbb{R}$	$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)\,,\ s > s_f$ e $n \in \mathbb{N}$
$\mathcal{L}\{H_a(t) \cdot f(t-a)\}(s) = e^{-as} F(s)\,,\ s > s_f$ e $a > 0$	$\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \dfrac{1}{a}\, F\left(\dfrac{s}{a}\right)\,,\ s > a\, s_f$ e $a > 0$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

com $s > \max\{s_f, s_{f'}, s_{f''} \ldots, s_{f^{(n-1)}}\}$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s) \cdot G(s)$, onde $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau,\ t \geq 0$