Многочлен Ньютона имеет следующий вид

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Рассмотрим задачу о приведении многочлена Ньютона к степенному виду:

$$P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} A_{N_i} x^i$$

Выражения P_N при $N \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\begin{aligned}
&P_0(x) = b_0 \\
&P_1(x) = b_0 + b_1(x - x_0) = b_1 x + (b_0 - b_1 x_0) \\
&P_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) = b_2 x^2 + (b_1 - b_2(x_0 + x_1))x + (b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1) \\
&P_3(x) = b_3 x^3 + (b_2 - b_3(x_0 + x_1 + x_2))x^2 + (b_1 - b_2(x_0 + x_1) + b_3(x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2))x + \\
&\qquad + (b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1 - b_3 x_0 x_1 x_2)
\end{aligned}$$

Выпишем свободные коэффициенты при разных N:

$$\begin{aligned}
&P_0 : A_{0_0} = b_0 \\
&P_1 : A_{1_0} = b_0 - b_1 x_0 \\
&P_2 : A_{2_0} = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1 \\
&P_3 : A_{3_0} = b_0 - b_1 x_0 + b_2 x_0 x_1 - b_3 x_0 x_1 x_2
\end{aligned}$$

Легко заметить, что с ростом N каждый следующий коэффициент частично повторяет предыдущий:

$$A_{N_0} = A_{N-1_0} + b_N \cdot f_0(x_0, \ldots, x_{N-1})$$

Оказывается такое соотношение выполняется не только для свободного члена, но и для всех коэффициентов степенного полинома. Составим матрицу:

$$M = \begin{pmatrix}
b_0 & 0 & 0 & 0 \\
M_{00} + b_1 \cdot f_0(x_0) & b_1 & 0 & 0 \\
M_{10} + b_2 \cdot f_0(x_0, x_1) & M_{11} + b_2 \cdot f_1(x_0, x_1) & b_2 & 0 \\
M_{20} + b_3 \cdot f_0(x_0, x_1, x_2) & M_{21} + b_3 \cdot f_1(x_0, x_1, x_2) & M_{22} + b_3 \cdot f_2(x_0, x_1, x_2) & b_3
\end{pmatrix}$$

Матрица составлена так, что элемент M_{ij} — это коэффициент перед x^j в полиноме Ньютона степени i.

Теперь необходимо определить функции f_i; f_0 определяется довольно просто с точностью до знака, из ранее выписанных свободных коэффициентов. Это просто произведение всех аргументов:

$$f_0(x_0, \ldots, x_n) = \prod_{i=0}^{n} x_i = x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Для f_1 имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned}
&b_2 \cdot f_1(x_0, x_1) = b_2(x_0 + x_1) \\
&b_3 \cdot f_1(x_0, x_1, x_2) = b_3(x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2)
\end{aligned}$$

Получаем выражение для $f_1(x_0, x_1, x_2)$ через $f_1(x_0, x_1)$ и $f_0(x_0, x_1)$:

$$f_1(x_0, x_1, x_2) = (x_0 x_1 + x_0 x_2 + x_1 x_2) = x_2(x_0 + x_1) + x_0 x_1 = x_2 \cdot f_1(x_0, x_1) + f_0(x_0, x_1)$$

Аналогично получаются выражения для $\{f_i\}_{i=2}^{N}$. Можно записать значения функций $\{f_i\}$ в виде матрицы:

$$F = \begin{pmatrix}
x_0 & 1 & 0 & 0 \\
F_{00} \cdot x_1 & F_{01} \cdot x_1 + F_{00} & 1 & 0 \\
F_{10} \cdot x_2 & F_{11} \cdot x_2 + F_{10} & F_{12} \cdot x_2 + F_{11} & 1 \\
F_{20} \cdot x_3 & F_{21} \cdot x_3 + F_{20} & F_{22} \cdot x_3 + F_{21} & F_{23} \cdot x_3 + F_{22}
\end{pmatrix}$$

Теперь значение функции $f_i(x_0, x_1, \ldots, x_j) = F_{ji}$.