Алгебра Грассмана строится на следующей аксиоме:

:

,

Можно усложнить вычисления, если обобщить эту аксиому для произвольной степени. То есть введем оператор над пространством K с базисом *e1 … en* , параметр m и потребуем

То есть

Раскроем скобки, получается сумма по сочетаниям сумм по перестановкам :

Так как умножение **·** в поле коммутативно и ассоциативно, значит все перестановки можно вынести за скобки, получим:

Так как данная сумма должна всегда равняться нулю, значит каждое ее слагаемое должно равняться нулю (в силу того, что ai выбираются произвольно).

Отсюда получаем систему уравнений по сочетаниям, где в левой части уравнения сумма произведений базисных векторов по всем перестановкам индексов данного сочетания, а справа 0.

Данная система уравнений и определяет базис нового пространства. Так как каждое сочетание уникально, то все каждая переменная в системе встречается только один раз, и можно определить базис просто убирая по одной переменной из каждого уравнения. **(\*)** Следственно, размерность такого пространства получится равной

потому что есть количество всевозможных упорядоченных наборов длины m из n индексов, а - количество сочетаний.

Теперь, когда у нас есть базис, обозначим пространство как M. Можно построить отображение , которое отображает линейный оператор исходного поля К в линейный оператор пространства М по следующему правилу:

**(\*\*)**

пусть матрица К выглядит следующим образом:

тогда, раскрыв **(\*\*)** получим сумму упорядоченных наборов индексов:

Но эта формула не совсем подходит нам, потому что она не является разложением по базису, ведь мы исключили из базиса некоторые перестановки индексов согласно **(\*)**. Поэтому выразим каждую такую исключенную перестановку через остальные. Получится сумма по всем упорядоченным наборам за исключением этих. Но под знак суммы добавится слагаемое, т. к. каждый исключенный набор индексов выражается через сумму остальных перестановок данного набора со знаком минус:

Где последовательность k1, …, km однозначно определяется набором j1, …, jm (независимо от перестановки).

Этого достаточно, чтобы построить матрицу в новом пространстве.

Возьмем для примера n = 3, m = 3, поле скаляров как кольцо вычетов по модулю 101.

Согласно вышесказанному, в новом пространстве получается матрица размера 17x17:

Для проверки вычислений взялась обратная к исходной матрица, и произведение полученных матриц оказалось равно единице.

Далее можно расширить исходный базис до большего числа индексов (обозначим это количество за k, по аналогии с алгеброй Грассмана), домножая (оператором ) исходные уравнения слева и справа на базисные вектора исходного пространства. Полученная система уравнений будет линейно зависимой, то есть некоторые уравнения можно будет просто вычеркнуть. К тому же, в новой системе уравнений каждому уравнению не будет соответствовать уникальное сочетание индексов, поэтому из каждого уравнения нужно будет исключить несколько переменых для построения базиса.