

Modélisation de l'effet dynamique d'un échantillon granulaire lâche par Méthode des Éléments Discrètes

Viet Anh QUACH, Gaël COMBE, Vincent RICHEFEU

Laboratoire 3SR, Université Grenoble Alpes

Abstract

Cet article étudie deux aspects d'un échantillon lâche sous la compression triaxiale : le nombre de particules et le nombre d'inertie. L'influence des termes cinétiques semble indépendant avec le valeur de la contrainte obtenu. causant par le vitess de compression (i.e) le nombre d'inertie. C'est un pré-étude du compotement d'un volume élémentaire représentatif (VER) pour la modélisation d'un écoulement gravitaire couplant la Méthode des Éléments Discrètes et la Méthode des Points Matériels.

Keywords: DEM, termes dynamiques, nombre d'inertie, $\mu(I)$ rhéologie, échantillon lâche

1. Introduction

Le $\mu(I)$ rhéologie caractérisé un aspects important dans la modélisation d'un écoulement gravitaire.

2. Rhéologie

La rhéologie $\mu(I)$ joue un rôle crucial dans la description des écoulements granulaires. Elle établit une relation constitutive entre le tenseur des contraintes du flux et le tenseur des taux de déformation [Jop et al., 2006] :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu(I)P \frac{\dot{\gamma}_{ij}}{\|\dot{\gamma}\|} \quad (1)$$

où :

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{1 + \frac{I_0}{I}} \quad (2)$$

$$\Phi(I) = \Phi^{\max} - bI \quad (3)$$

Seuls deux problèmes, à notre connaissance, appartiennent à cette catégorie : le *DEM* rich MPM blah blah.

Dans me programme PBC3D, nous avons ajouté 2 termes cinétiques dans la formulation de calcul :

$$\begin{aligned} - \dot{r} &= h\dot{s} + \cancel{\dot{\mu}s} \\ - \ddot{s} &= h^{-1}(\ddot{r} - 2\dot{h}\dot{s} - \cancel{\ddot{\mu}s}) \end{aligned}$$

2.1. Le Covering Tour Problem

Le *Covering Tour Problem* (CTP) est caractérisé par un ensemble d'habitants et un ensemble de points de distribution. Introduit par Gendreau et al. [1997], ce problème prend en compte le fait que tous les habitants ne peuvent

être visités par un camion, mais que les habitants sont capables de se déplacer vers le point de distribution le plus proche. La distance maximale que peut parcourir un habitant est fixée — on appellera le rayon de couverture cette distance. Le schéma en figure 2 donne un exemple de solution à ce problème.

Ce problème respecte ainsi le principe d'équité dans l'accès à l'aide. L'objectif du CTP peut être séparé en deux étapes [Jozefowicz et al., 2007]. D'abord un *Set Covering Problem* (SCP), où on détermine un sous-ensemble minimal de points de distributions permettant la couverture de tous les habitants. Ensuite, un *Travelling Salesman Problem* (TSP), où on détermine le circuit de distance minimale d'un unique camion à capacité illimitée à travers ce sous-ensemble de points de distribution.

L'article de Gendreau et al. [1997] cite plusieurs exemples théoriques d'utilisation du CTP : il pourrait être utilisé pour localiser les endroits optimaux pour placer des boîtes de poste, ou construire une route pour les équipes de réapprovisionnement de biens dans des pays en développement, dans lesquels les services médicaux ne peuvent être délivrés qu'à un ensemble de villages, mais où tous les habitants sont capables de marcher jusqu'au centre médical le plus proche (l'équivalent du point de distribution dans notre article).

L'article de Hodgson et al. [1998] implémente le CTP de Gendreau et al. [1997], et pour la première fois dans un cas réel : l'acheminement de biens vers des centres de réapprovisionnement du Suhum District au Ghana. Cette étude distingue deux saisons : la saison sèche et la saison des pluies. Durant la seconde saison, certains points de distribution accessibles durant la saison sèche deviennent inaccessibles par la route, il faut donc pouvoir établir un nouveau parcours pour distribuer un maximum d'habitants. Cet article s'intéresse à ce problème en étudiant les

conséquences du choix du rayon de couverture des points de distribution.

L'article de [Naji-Azimi et al. \[2012\]](#) se concentre sur le choix du placement de points de distribution secondaires approvisionnés depuis un dépôt unique par une flotte de camions non homogène : tous les camions ne transportent pas la même charge et ne transportent pas tous les mêmes types d'aide. Comme dans le cas du CTP classique, ces points de distributions doivent être déterminés pour permettre à chaque habitant d'être suffisamment proche d'un point de distribution. Ce CTP à plusieurs véhicules avait déjà été proposé par [Hachicha et al. \[2000\]](#) (*multiple-vehicle CTP*, m-CTP), mais [Naji-Azimi et al. \[2012\]](#) introduit une nouvelle notion de division de la distribution : un habitant peut être desservi par deux points de distribution.

2.2. Le Cumulative Capacitated Vehicle Routing Problem

Dans son article, [Campbell et al. \[2008\]](#) remet en question l'utilisation des algorithmes de transport classiques dans le cas humanitaire. Il est expliqué que les notions d'urgence et d'équité ne sont pas respectées : la minimisation de la distance ne convient pas à l'aide humanitaire. L'une des deux formulations présentées, le *Minimum-Average VRP* (minavg-VRP), est une formulation équivalente du *Cumulative Capacitated Vehicle Routing Problem* (CCVRP) défini plus tard par [Ngueveu et al. \[2010\]](#) : à partir de plusieurs camions de capacité homogène, on veut trouver des tournées pour livrer un ensemble d'habitants. Contrairement au CTP, tous les habitants doivent être atteignables. Et contrairement au *Vehicule Routing Problem* (VRP), qui minimise la distance parcourue par les camions en autorisant plusieurs camions, le CCVRP utilise une fonction objectif qui minimise la somme des temps d'arrivée chez les habitants.

[Ngueveu et al. \[2010\]](#) montre que le CCVRP aura tendance à utiliser le plus de camions possible par souci de rapidité, contrairement au VRP qui aura tendance à utiliser le moins de camions possible par souci d'économie.

3. Analyse de l'existant et proposition d'un nouveau modèle

3.1. Constat et proposition

Comme le suggère [Campbell et al. \[2008\]](#), la minimisation des coûts lors du choix d'un itinéraire ne permet pas d'assurer des temps d'arrivée convenables lorsqu'il s'agit de distribution d'aide humanitaire, et le CCVRP (ou minavg VRP) donne de bonnes solutions respectant le critère d'urgence mais sans prendre en compte l'impossibilité d'accéder à tous les habitants, et donc ne respectant pas le critère d'équité. Au contraire, le CTP règle cette impossibilité, mais en gardant une fonction objectif basée sur la minimisation de la distance parcourue : le critère d'équité est pris en compte mais celui d'urgence ne l'est pas. Ce comparatif est résumé en [figure 1](#).

Contrairement au CTP classique qui n'autorise qu'un seul véhicule, le CCVRP permet l'utilisation de plusieurs véhicules. Une variante du CTP, le *Multi-Vehicle Covering Tour Problem* (m-CTP) proposée par [Hachicha et al. \[2000\]](#) et reprise dans [Naji-Azimi et al. \[2012\]](#) permet d'élargir le problème en disposant de plusieurs camions à capacité limitée.

Nous proposons un modèle de CTP multi-véhicules qui où l'on remplace la minimisation de la distance parcourue (la composante VRP du CTP) par la minimisation de la somme des temps d'arrivée aux points de distribution. Nous appellerons ce modèle *CTP-CCVRP*. Le modèle mathématique se trouve en [section 3.7](#). Ce modèle permettrait par exemple de diffuser des médicaments liés à une épidémie à travers des points de distribution. Ainsi, les habitants auraient accès aux traitements le plus rapidement possible.

Pour comparer ce nouveau modèle, nous avons pris comme référence le modèle proposé par [Naji-Azimi et al. \[2012\]](#). Bien que très proche du m-CTP, il ajoute le partage de la distribution entre véhicules. Nous appellerons CTP-VRP ; le modèle mathématique est en [section 3.6](#).

3.2. Méthodes de résolution utilisées

Le modèle du CTP-CCVRP ainsi que la référence CTP-VRP sont formulés en programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) à partir du modèle de donné dans [Naji-Azimi et al. \[2012\]](#). Les formulations PLNE sont disponibles en [section 3.6](#) et [section 3.7](#), et le modèle GLPK est disponible sur le dépôt GitHub : <https://github.com/ahaba/ctp/>.

L'instance est identique pour tous les tests. Elle a été créée arbitrairement et reprend l'exemple donné de [Naji-Azimi et al. \[2012\]](#). Chaque habitant est couvert par au moins deux points de distribution pour que la partie SCP du CTP ait du sens et qu'un choix soit possible dans le sous-ensemble de points de distribution.

Nous avons utilisé le solveur *GLPK* sur un Macbook Air 11" de mi-2011 à 1.6 Ghz. S'agissant de PLNE et donc de méthode exacte, l'instance utilisée est suffisamment petite pour que le temps de calcul ne dépasse pas 60 minutes.

3.2.1. Légende des figures

Dans chaque figure, qu'il s'agisse du CTP-VRP ou du CTP-CCVRP, l'arc de retour n'est pas affiché pour alléger les figures. Mais l'arc de retour est bien compté dans le calcul de la distance parcourue.

3.2.2. Explication des tables de résultat

L'écart est calculé par la formule $(\text{valeur}_{CTP-VRP} - \text{valeur}_{CTP-CCVRP}) / \text{valeur}_{CTP-VRP}$. Si l'écart est positif, alors la valeur du CTP-CCVRP est plus grande que la valeur de référence (le CTP-VRP). Les temps de transport (et donc les temps d'arrivée) sont arbitrairement calculés en utilisant les distances : on obtient des ordres de grandeurs identiques pour la distance parcourue et la somme

| | CTP | CCVRP |
|-------------|---|---|
| Objectif | Minimisation des coûts | Minimisation des temps d'arrivée |
| Contraintes | Le dernier point de distribution visité impose une discrimination dans l'aide apportée | Nécessite que tous les habitants soient atteignables |
| Avantages | Permet de prendre en compte des situations où tous les habitants ne sont pas atteignables, ou lorsqu'on ne souhaite visiter qu'un sous-ensemble de points de distribution ; permet de respecter le critère d'équité | Permet de fournir l'aide en respectant le critère d'urgence |

FIGURE 1 – Tableau comparatif CTP vs. CCVRP

- (3) Demande d'un habitant
- ▲ Habitant
- Zone de couverture d'un point de distribution
- Point de distribution visité
- Point de distribution non visité
- Dépôt
- Une route empruntée par un camion

des temps d'arrivée. Le temps d'arrivée maximal correspond au point de distribution atteint le dernier.

3.3. Unique camion à capacité illimitée

À partir du CTP-VRP, on peut revenir à une solution de CTP au sens de [Gendreau et al.](#) en limitant à un seul camion à capacité illimitée. Nous avons illustré cet exemple en [figure 2](#), que l'on peut comparer à la solution du CTP-CCVRP en [figure 3](#).

On obtient un écart de -12.5% (cf. [tableau 1](#)) concernant la somme des temps d'arrivée (cf. [tableau 1](#)), avec une faible augmentation de la distance de $+6.6\%$. En revanche, le dernier point de distribution desservi attend légèrement plus : c'est le seul exemple qui montre ce cas.

3.4. Deux, trois et quatre camions

Avec deux camions disponibles et une capacité de 18, on remarque que le CTP-CCVRP donne de biens meilleurs résultats que le CTP-VRP ([figure 5](#) et [figure 4](#)) en terme de temps d'arrivée ([tableau 2](#)).

Le fait de passer à trois camions ([figure 7](#)) ne diminue la somme des temps d'arrivée que de 11% , tout en augmentant la distance parcourue de 20% entre les deux solutions du CTP-CCVRP. Sans surprise, les résultats pour deux, trois et quatre camions sont les mêmes pour le CTP-VRP : celui-ci tend toujours à minimiser le nombre de camions, car son objectif est de minimiser la distance.

Le passage de trois à quatre camions ([figure 7](#)) confirme le phénomène : pour une toute petite diminution de la somme des temps d'arrivée, on en arrive à augmenter très fortement la distance parcourue ([tableau 4](#)).

3.5. Conclusions

Les solutions données par le modèle CTP-CCVRP peuvent être théoriquement intéressantes dans certains cas humanitaires. On remarque cependant que le fait d'ajouter un camion, à partir d'un certain nombre de camions, ne diminuera que peu la somme des temps d'attente, tout en augmentant très significativement la distance parcourue.

Pour que ce modèle puisse être utilisé, il serait d'abord nécessaire de trouver une méthode de résolution approchée (méta-heuristique par exemple) permettant de résoudre des instances de taille réelle. La formulation du problème étant différente de tous les problèmes déjà rencontrés dans la littérature, trouver une méta-heuristique n'est pas évident.

Le fait d'avoir les résultats d'instances réelles permettrait aux organisations humanitaires de savoir si, oui ou non, ces résultats sont cohérents avec la réalité logistique.

Annexes

3.6. Modèle mathématique du CTP-VRP

Nous nous sommes inspirés du problème discuté par [Naji-Azimi et al. \[2012\]](#) pour définir le modèle de référence CTP-VRP permettant d'évaluer les performances du CTP-CCVRP. Le CTP-VRP est défini par un graphe orienté complet $G = (V, A)$ dans lequel V représente l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arcs. On définit $V = \{0\} \cup I \cup J \cup \{m+1\}$, 0 étant le dépôt de départ et $\{m+1\}$ le dépôt d'arrivée (il s'agit en réalité du même dépôt), $I = \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des habitants et $J = \{n+1, \dots, n+1+m\}$ l'ensemble des points de distribution. On notera aussi $K = \{1, \dots, l\}$ l'ensemble des véhicules. Contrairement au CTP de [Gendreau et al. \[1997\]](#), on ne définit pas de points de distribution que l'on doit visiter obligatoirement : tous les points de distribution sont optionnels. Cependant, tous les habitants I doivent être couverts. L'ensemble des arcs est défini par $A = \{(v_i, v_j) : v_i, v_j \in V\}$, et la matrice de distance c_{ij} est définie sur A . Une flotte de véhicules L est disponible, Q étant la capacité (homogène) de tous les véhicules $k \in K$. Enfin, $\alpha = \{\alpha_{ij} : i \in I, j \in J\}$ est une matrice dans laquelle

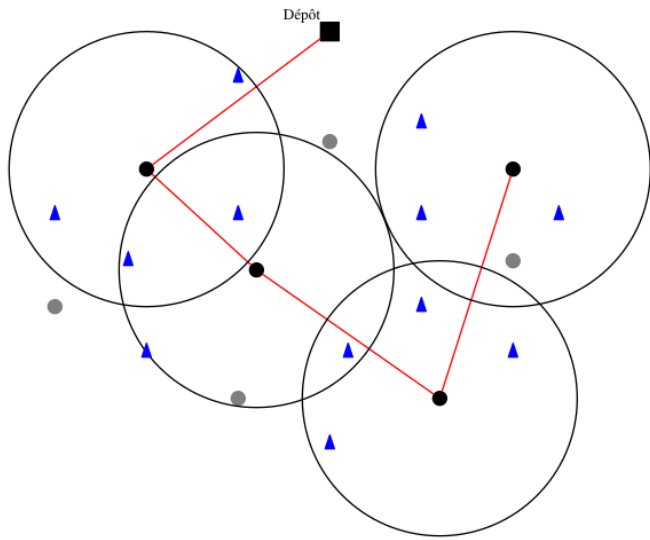


FIGURE 2 – Solution du CTP-VRP avec les contraintes du CTP classique. L'arc de retour n'est pas affiché mais fait bien partie du calcul de la fonction objectif.

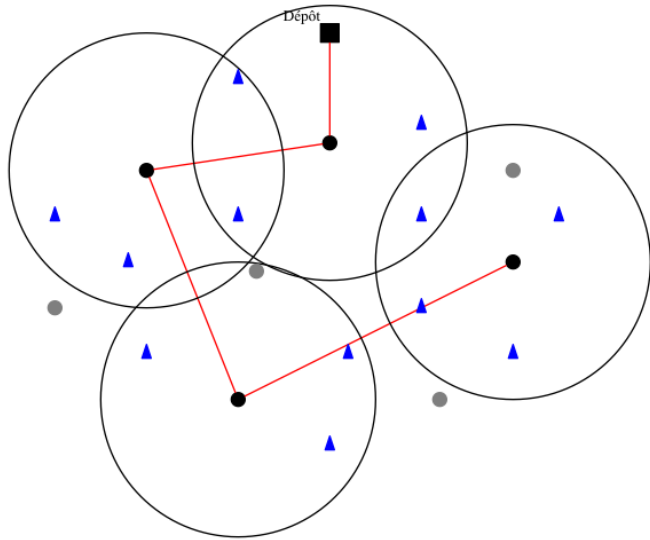


FIGURE 3 – Solution du CTP-VRP avec un unique camion disponible et une capacité illimitée.

| | CTP-VRP | CTP-CCVRP | Écart |
|-----------------------|-----------|-----------|--------|
| Camions utilisés | 1 parmi 1 | 1 parmi 1 | |
| Distance parcourue | 11.69 | 12.46 | +6.6% |
| Somme temps d'arrivée | 22.39 | 19.59 | -12.5% |
| Temps d'arrivée max. | 9.19 | 9.26 | +0.8% |

TABLE 1 – Comparatif CTP-VRP et CTP-CCVRP avec un unique camions et une capacité illimitée.

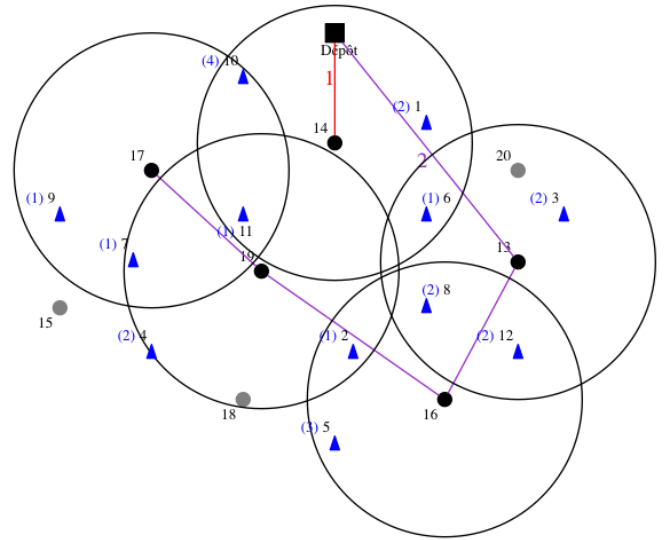


FIGURE 4 – Solution du CTP-VRP avec deux camions disponibles.

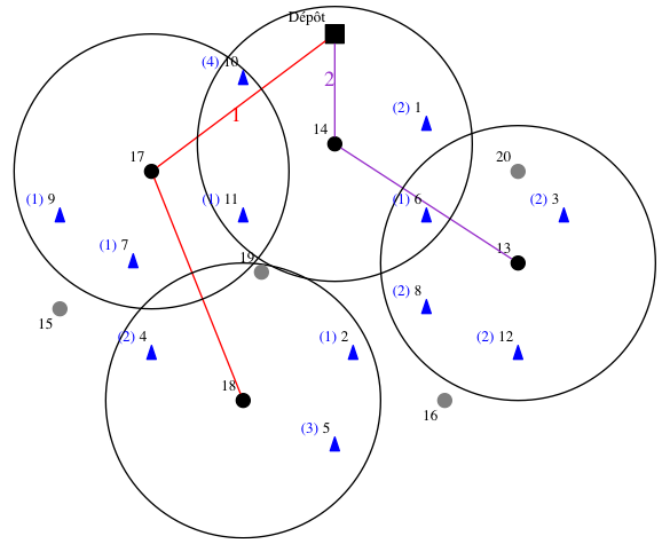


FIGURE 5 – Solution du CTP-CCVRP avec deux camions disponibles.

| | CTP-VRP | CTP-CCVRP | Écart |
|-----------------------|-----------|-----------|--------|
| Camions utilisés | 2 parmi 2 | 2 parmi 2 | |
| Distance parcourue | 13.87 | 16.1 | +16.1% |
| Somme temps d'arrivée | 25.61 | 12.48 | -51.3% |
| Temps d'arrivée max. | 8.97 | 5.19 | -42.1% |

TABLE 2 – Comparatif CTP-VRP et CTP-CCVRP avec deux camions disponibles et une capacité de 18.

| | CTP-VRP | CTP-CCVRP | Écart |
|-----------------------|-----------|-----------|--------|
| Camions utilisés | 2 parmi 3 | 3 parmi 3 | |
| Distance parcourue | 13.87 | 19.69 | +42.0% |
| Somme temps d'arrivée | 25.61 | 11.07 | -56.8% |
| Temps d'arrivée max. | 8.97 | 4.17 | -53.5% |

TABLE 3 – Comparatif CTP-VRP et CTP-CCVRP avec trois camions disponibles et une capacité de 18.

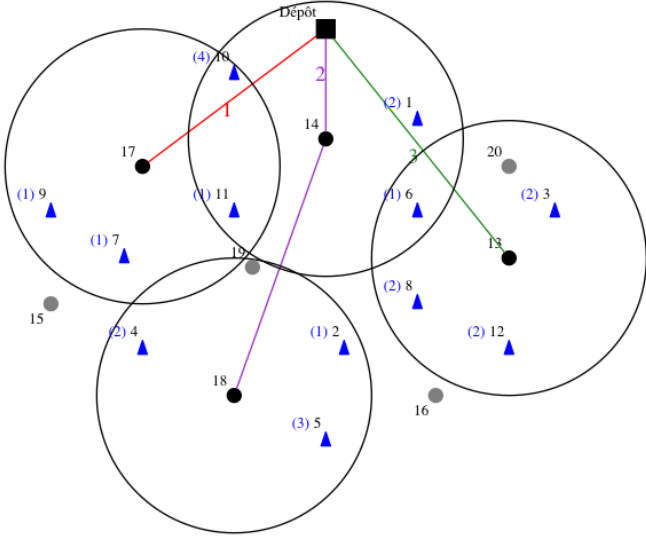


FIGURE 6 – Solution du CTP-CCVRP avec trois camions disponibles. Le résultat du CTP-VRP étant le même pour deux, trois et quatre camions, on se référera à [figure 4](#).

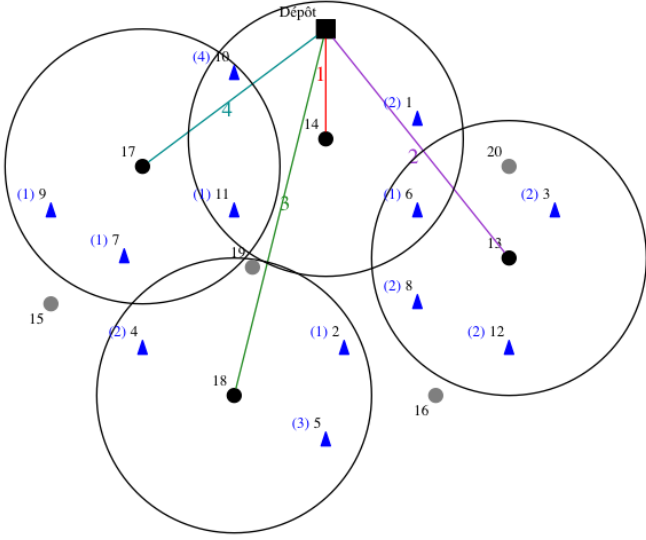


FIGURE 7 – Solution du CTP-CCVRP avec quatre camions disponibles. Le résultat du CTP-VRP étant le même pour deux, trois et quatre camions, on se référera à [figure 4](#).

| | CTP-VRP | CTP-CCVRP | Écart |
|-----------------------|-----------|-----------|--------|
| Camions utilisés | 2 parmi 4 | 4 parmi 4 | |
| Distance parcourue | 13.87 | 22.04 | +58.9% |
| Somme temps d'arrivée | 25.61 | 11.02 | -57.0% |
| Temps d'arrivée max. | 8.97 | 4.12 | -54.1% |

TABLE 4 – Comparatif CTP-VRP et CTP-CCVRP avec quatre camions disponibles et une capacité de 18.

α_{ij} est vrai si l'habitant i est couvert par j avec une distance inférieure à d , et faux sinon. Nous définissons également les variables de décision suivantes :

- D_{ijk} est la quantité de demande de l'habitant i fournie par le $k^{ième}$ véhicule lors de sa visite au point de distribution j ;
- x_{ijk} est vraie si $arc(i, j)$ est utilisé par le véhicule k , et faux sinon ;
- y_{jk} est vraie si le point distribution j est visité par le véhicule k ;
- u_{jk} est une variable de décision libre permettant à la fois de représenter le temps d'arrivée du véhicule k au point de distribution j et d'éliminer les *subtour*.

Le modèle est formulé comme suit :

$$\text{Minimiser } \sum_{i=0}^m \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{k=1}^l c_{ij} x_{ijk} \quad (4)$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i=0}^m x_{ijk} = y_{jk} \quad \forall j \in \{0\} \cup J, k \in K \quad (5)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1+m} x_{jik} = y_{jk} \quad \forall j \in J \cup \{m+1\}, k \in K \quad (6)$$

$$\sum_{j=0}^m x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1+m} x_{j0k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \alpha_{ij} D_{ijk} \geq d_i \quad \forall i \in I \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n D_{ijk} \leq Q_k y_{jk} \quad \forall k \in K, j \in J \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m D_{ijk} \leq Q_k \quad \forall k \in K \quad (11)$$

$$u_{ik} + c_{ij} - (1 - x_{ijk})T \leq u_{jk} \quad \forall i \in \{0\} \cup J, j \in J \cup \{0, n+1+m\}, k \in K \quad (12)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in \{0\} \cup J \cup \{n+m+1\}, i \neq j, k \in K \quad (13)$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall j \in J, k \in K \quad (14)$$

$$u_{ik} \geq 0 \quad \forall i \in J, k \in K \quad (15)$$

$$D_{ijk} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K \quad (16)$$

$$(17)$$

La fonction objectif 4 minimise la distance totale parcourue par les camions. Les contraintes 5 et 6 assurent que,

pour chaque point de distribution j et pour chaque véhicule k , il y a à la fois autant d'arcs entrants que d'arcs sortants de j . Les contraintes 7 et 8 contraignent l'existence d'un seul arc sortant du dépôt et un seul arc entrant au dépôt pour chaque véhicule k . La contrainte 9 spécifie qu'un habitant i peut être approvisionné par plusieurs point de distribution j (« distribution mutualisée »). La contrainte 10 relie les variables de décision D_{ijk} à l'utilisation de chaque véhicule k pour une livraison au point de demande j . La contrainte 11 impose le respect de la capacité Q pour chaque véhicule k . La contrainte 12, tirée de Ngueveu et al. [2010], permet à la fois l'élimination des *sub-tours* et le calcul des temps d'arrivée des camions aux points de distribution. T est une constante arbitrairement grande.

3.7. Modèle mathématique du CTP-CCVRP

Le modèle CTP-CCVRP que nous proposons à partir du modèle du CTP-VRP ne nécessite que de changer la fonction objectif équation (4). Au lieu d'une minimisation des distances, on minimise la somme des temps d'arrivée aux points de distribution, c'est à dire la somme des u_{jk} . Ainsi, voici la nouvelle fonction objectif :

$$\text{Minimiser } \sum_{j \in J, k \in L} u_{jk} \quad (18)$$

Références

- Campbell, A.M., Vandenbussche, D., Hermann, W., 2008. Routing for Relief Efforts. *Transportation Science* 42, 127–145. URL : <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/trsc.1070.0209>, doi :10.1287/trsc.1070.0209.
- Gendreau, M., Laporte, G., Semet, F., 1997. The Covering Tour Problem. *Operations Research* 45, 568–576. URL : <http://pubsonline.informs.org/doi/abs/10.1287/opre.45.4.568>, doi :10.1287/opre.45.4.568.
- Hachicha, M., John Hodgson, M., Laporte, G., Semet, F., 2000. Heuristics for the multi-vehicle covering tour problem. *Computers & Operations Research* 27, 29–42. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054899000064>, doi :10.1016/S0305-0548(99)00006-4.
- Hodgson, M.J., Laporte, G., Semet, F., 1998. A Covering Tour Model for Planning Mobile Health Care Facilities in SuhumDistrict, Ghana. *Journal of Regional Science* 38, 621–638. URL : <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/0022-4146.00113/abstract>, doi :10.1111/0022-4146.00113.
- Jop, P., Forterre, Y., Pouliquen, O., 2006. A constitutive law for dense granular flows. *Nature* 441, 727–730.
- Jozefowicz, N., Semet, F., Talbi, E.G., 2007. The bi-objective covering tour problem. *Computers & Operations Research* 34, 1929–1942. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054805002480>, doi :10.1016/j.cor.2005.07.022.
- Naji-Azimi, Z., Renaud, J., Ruiz, A., Salari, M., 2012. A covering tour approach to the location of satellite distribution centers to supply humanitarian aid. *European Journal of Operational Research* 222, 596–605. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221712003475>, doi :10.1016/j.ejor.2012.05.001.
- Ngueveu, S.U., Prins, C., Wolfler Calvo, R., 2010. An effective memetic algorithm for the cumulative capacitated vehicle routing problem. *Computers & Operations Research* 37, 1877–1885. URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054809001725>, doi :10.1016/j.cor.2009.06.014.