Επιστημονικός Υπολογισμός
Σετ Ασκήσεων #2
Διδάσκων: Ε .Γαλλόπουλος

20/10/2023

Παρατηρήσεις: Δεύτερο σετ προαιρετικών ασκήσεων με στόχο είναι να εξασκηθείτε στα ζητήματα που έχουμε καλύψει στο μάθημα. Προσπαθήστε να απαντήσετε σε όσες περισσότερες ερωτήσεις μπορείτε. Αναρτήστε τις απαντήσεις σας στην αντίστοιχη εργασία του eclass, συμπεριλαμβάνοντας για κάθε υποερώτημα αιτιολόγηση, τα αποτελέσματα και τον κώδικα αν υπάρχει. Παρακαλείστε να προσδιορίσετε επακριβώς στην εισαγωγική σελίδα σε ποιές ερωτήσεις απαντάτε. Επίσης, αν αντιγράψετε κάτι από το διαδίκτυο, παρακαλείστε να δώσετε τη σχετική αναφορά. Προτείνουμε να δώσετε τις απαντήσεις ως pdf μέσω LaTeX. Ειδικότερα, η τελευταία ερώτηση να απαντηθεί χρησιμοποιώντας το MATLAB LiveEditor (αν θέλετε, μπορείτε να απαντήσετε όλες τις ερωτήσεις μέσω του LiveEditor!). Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το template[1] στο χώρο Έγγραφα του eClass του μαθήματος. Σε επόμενο φροντιστήριο θα συζητήσουμε μερικές από τις ερωτήσεις, πιθανές απαντήσεις και σχόλια επί των δικών σας απαντήσεων.

Προσοχή: Η άσκηση δίνεται για εξάσκησή σας. Δεν έχει νόημα, ούτε θα κερδίσετε κάτι, αν απλά επαναλάβετε την απάντηση που δίνει το ChatGPT (όποτε αυτό είναι δυνατό) ή αντιγράψετε την απάντηση συναδέλφου (πέραν του δεοντολογικού ζητήματος που προκύπτει!) Δείτε και το σχετικό άρθρο εδώ.

1. Αν x=[1:8] και $P_{2,4}$ είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης $\mod 2$, τότε να γράψετε το διάνυσμα $P_{2,4}x$.

2. (Σωστό/Λάθος) Αν $P_{2,4}$ είναι το μητρώο τέλειας αναδιάταξης $\mod 2$, τότε $P_{2,4}P_{2,4}^\top = I_8$.

3. (GvL A1.3.4) Έστω το μητρώο $A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{pmatrix}$ όπου το B είναι άνω διδιαγώνιο. Να περιγράψετε τη δομή του $T = PAP^\top$, όπου η $P = P_{2,n}$ είναι η μετάθεση τέλειας αναδιάταξης $\mod 2$.

4. (GvL A1.3.7 - προσοχή στο βιβλίο εκ παραδρομής αντί του συμβόλου της αναστροφής, γράφτηκε *otimes*.) Να επαληθεύσετε ότι αν $x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$, τότε $y \otimes x = \mathrm{vec}(xy^\top)$.

5. Να αποδείξετε αυτό που αναφέρεται στο σύγγραμμα (εξίσωση GvL 1.3.5) ότι ενώ για γενικά μητρώα $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_2}$, $C \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ ισχύει ότι $B \otimes C \neq C \otimes B$ (το αναφέραμε

[1](δεν έχει ακόμα αναρτηθεί).

και δείξαμε παράδειγμα στη Διάλεξη 4), υπάρχουν μητρώα μετάθεσης P, Q τέτοια ώστε $P(B \otimes C)Q = C \otimes B$. Να επιβεβαιώστε ότι τα μητρώα μετάθεσης είναι αυτά που αναφέρονται στο βιβλίο.

6. (GvL A1.3.8 - προσοχή στο βιβλίο εκ παραδρομής αντί του συμβόλου της αναστροφής, γράφτηκε *otimes*.) Να δείξετε ότι αν $B \in \mathbb{R}^{p\times p}$ και $C \in \mathbb{R}^{q\times q}$ και

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, \text{ όπου } x_i \in \mathbb{R}^q$$

τότε

$$x^\top (B \otimes C)x = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \beta_{ij}(x_i^\top C x_j).$$

7. (GvL 1.2.10, παραλλαγή) Δίνονται $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ διανύσματα (στήλες) και k ακέραιος τέτοιος ώστε $k \leq n$. Να δείξετε ότι υπάρχουν μητρώα $U, v \in \mathbb{R}^{n\times k}$ ώστε να ισχύει $(A + uv^\top)^k = A^k + UV^\top$ και να δείξετε πώς να το υπολογίσετε αποδοτικά. Ποιό είναι το αντίστοιχο Ω;

8. Δίνεται $A = \begin{pmatrix} I_n & xy^\top \\ yx^\top & -I_n \end{pmatrix}$ όπου τα $x, y \in \mathbb{R}^n$ είναι διανύσματα στήλες και I είναι ταυτοτικό μητρώο συμβατού μεγέθους (πρόκειται για ειδική περίπτωση Χαμιλτονιανού[2] μητρώου, βλ. GvL ενότητα 1.3.10). Έστω επίσης τυχαίο $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. α) Να κατασκευάσετε συνάρτηση MATLAB η οποία δοθέντων των x, y κατασκευάζει το A. Η συνάρτηση να λέγεται HamIbuild(x,y) όπου x,y είναι ισομεγέθη διανύσματα (στήλες). β) Για n=2.^[6:12] να εκτελέσετε τις εντολές:

```
x=rand(n,1);y=rand(n,1); I = eye(n); B=rand(n,1);
A = HamIbuild(x,y);
C = mtimes(A,B)
```


και να χρονομετρήσετε τα runtimes της τελευταίας εντολής (πολλαπλασιασμού) με αξιόπιστο τρόπο. γ) Να υλοποιήσετε εξειδικευμένο αλγόριθμο πολλαπλασιασμού μητρώων σαν και το παραπάνω με μητρώα $2n \times s$ όπου η δεύτερη διάσταση s είναι πολύ μικρότερη του n. Η συνάρτηση να λέγεται HAMM((x,y,B). Να συγκρίνετε τα runtimes της με τα αποτελέσματα του (β). Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

9. (Παραλλαγή της GvL:A1.3.15.) Δίνονται γενικά μητρώα $A_i, i = 1, 2, 3$ με διαστάσεις $n_i \times m_i$ και έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το $(A_1 \otimes A_2 \otimes A_3)x$ για δοθέν διάνυσμα x. α) Ποιά διάσταση πρέπει να έχει το x ώστε ο πολλαπλασιασμός να είναι καλά ορισμένος; β) Να εξετάσετε διάφορους τρόπους υλοποίησης του πολλαπλασιασμού με ή χωρίς τη χρήση της συνάρτησηςkron και να αποφανθείτε σχετικά με τον ισχυρισμό ότι το Ω παραμένει το ίδιο ανεξαρτήτως τρόπου πολλαπλασιασμού. Αν ισχύει, να το δείξετε, αν όχι, να

[2] Hamiltonian

υλοποιήσετε αλγόριθμο που επιτυγχάνει όσο το δυνατόν μικρότερο Ω. Σημ. Μπορεί να φανούν χρήσιμες οι ενότητες 1.3.7-8.

10. Να υλοποιήσετε σε MATLAB κώδικα αντίστοιχο του strassen που χρησιμοποιεί τη μέθοδο Winograd (βλ. διάλεξη 5). Να συγκρίνετε συστηματικά τις επιδόσεις του strassen.