ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

<u>Ασκηση 1</u>

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

- Για να υπολογίσουμε τη στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας, αρκεί να υπολογίσουμε τον θεωρητικό μέσο όρο της τυχαίας μεταβλητής Α(θ) για το δοσμένο διάστημα [-1/2, 1/2], ο οποίος είναι 0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\mu(n) = E[X(n,\theta)] = E[\ A(\theta)\ [u(n) - u(n-100)]\ ] =$

$= E[A(\theta)] * E[u(n) - u(n-100)]$

Και γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα [a,b] είναι (a+b)/2 → $\mu(n) = (-1/2 + 1/2) / 2 = 0$

Άρα τελικά $\mu(n) = 0 * E[u(n) - u(n-100)] = 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *rand(·)* της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση:

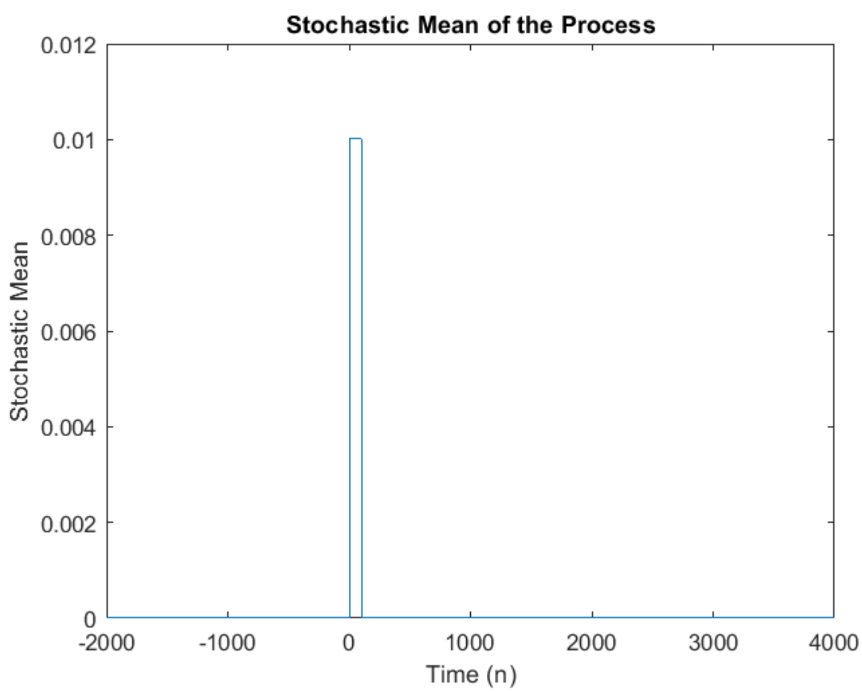
- Για μικρό αριθμό υλοποιήσεων (π.χ. K = 1 ή 10), η στοχαστική μέση τιμή είναι ασταθής και εμφανίζει μεγάλη διακύμανση.
- Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων (π.χ. K = 100 ή 1000), η στοχαστική μέση τιμή αρχίζει να σταθεροποιείται και να πλησιάζει τη ***θεωρητική*** στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας (μηδέν στην προκειμένη περίπτωση).

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

- Αυτό επαληθεύει τον "Νόμο των Μεγάλων Αριθμών", όπου η αριθμητική μέση τιμή των ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει στη θεωρητική στοχαστική μέση τιμή τους όσο αυξάνεται ο αριθμός των δειγμάτων.



Σύγκλιση στοχαστικής μέσης τιμής κοντά στο θεωρητικό μηδέν για K=1000

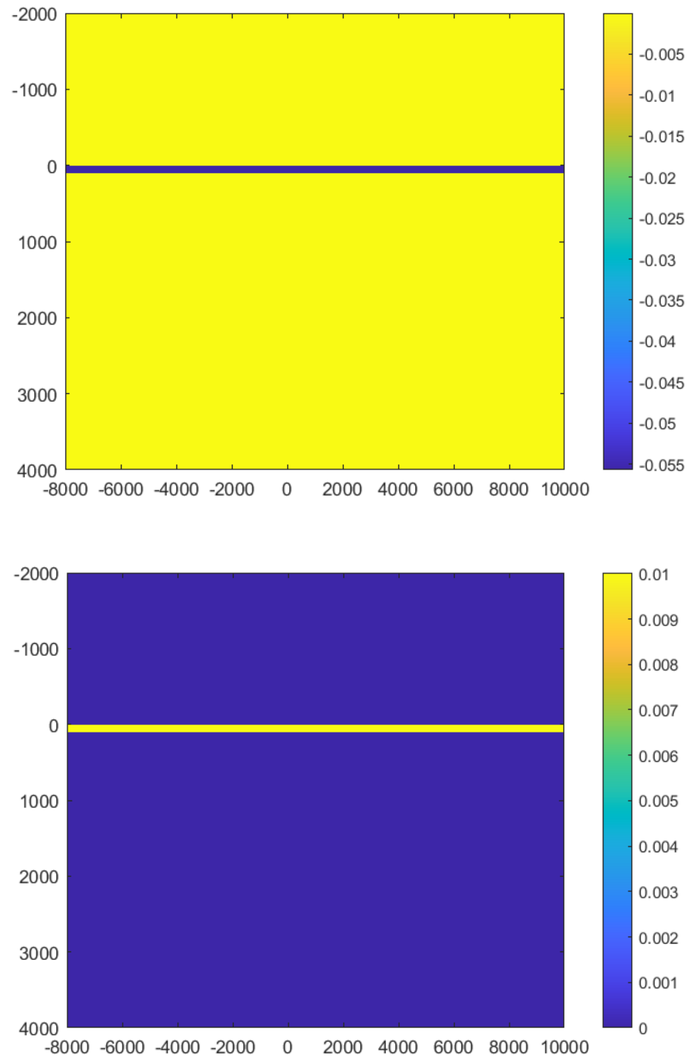
Ακολουθεί αναπαράσταση της στοχαστικής μέσης τιμής και σε εικόνες.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

Για K=1000 παρατηρείται επικράτηση της τιμής 0 (χρώμα **μπλε**) στην εικόνα.



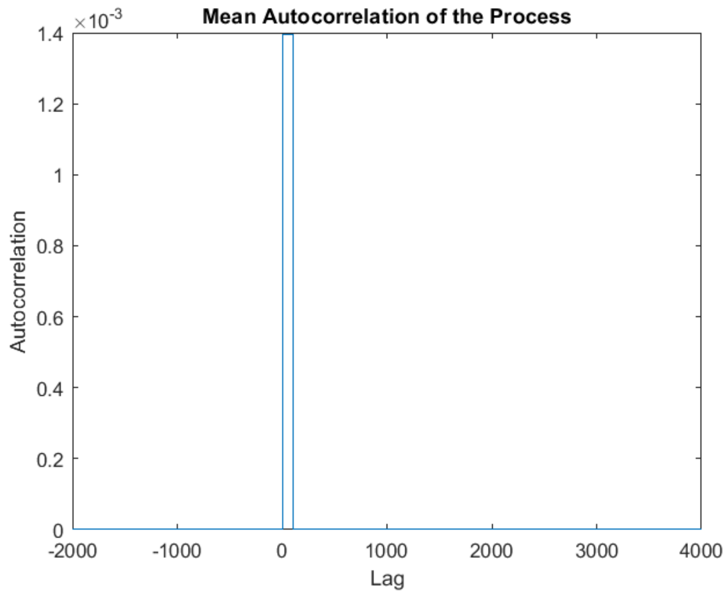
Επάνω: K=10 Κάτω: K=1000

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

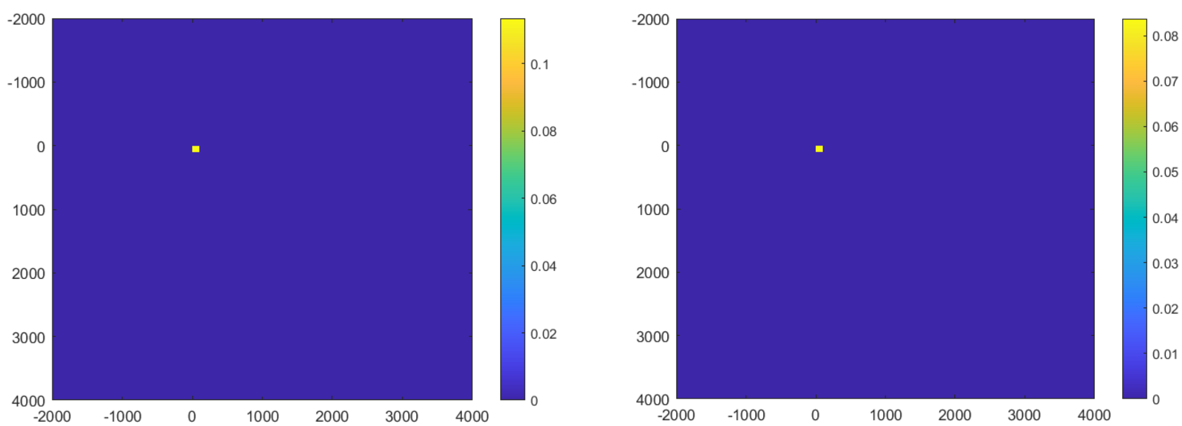
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός Κ των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;



Σύγκλιση αυτοσυσχέτισης στη συνάρτηση δ για Κ=1000.

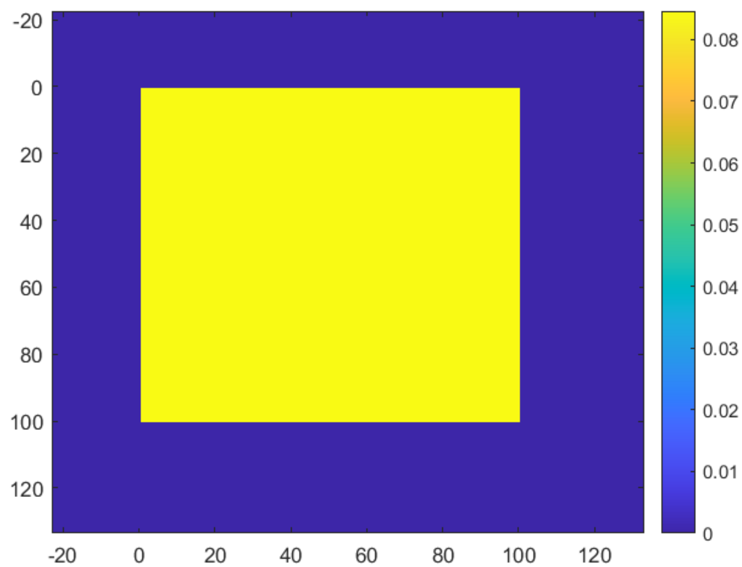


Αναπαράσταση μητρώου αυτοσυσχέτισης σε μορφή εικόνων. Αριστερά: Κ=10, Δεξιά: Κ=1000

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο



Απεικόνιση μητρώου αυτοσυσχέτισης σε μεγέθυνση για K=1000.

- Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας (K),
  η εκτιμώμενη αυτοσυσχέτιση θα συγκλίνει προς την πραγματική αυτοσυσχέτιση της διαδικασίας.

- Η αυτοσυσχέτιση αναπαρίσταται στις εικόνες ως ένα χρωματισμένο(με τιμή διάφορη του μηδενός) τετράγωνο στις συντεταγμένες (0,0) έως (100,100).

- Εάν η διαδικασία ήταν λευκή, τότε το μητρώο αυτοσυσχέτισης θα ήταν διαγώνιο και συνεπώς θα παρατηρούσαμε μία κίτρινη διαγώνιο εκτεινόμενη από το pixel (0,0) έως το (100,100) με όλα τα υπόλοιπα pixel να έχουν μπλε χρώμα - υποδηλώνοντας ότι η αυτοσυσχέτιση των τυχαίων σημάτων της διαδικασίας x είναι μηδενική για όλες τις μη μηδενικές χρονικές καθυστερήσεις εκτός από την αυτοσυσχέτιση σε μηδενική καθυστέρηση. Αντί αυτού, όλα τα pixels έχουν μη μηδενικές τιμές τις χρονικές στιγμές 0 ως 100, γεγονός που δείχνει την συσχέτιση μεταξύ όλων των δειγμάτων στα σήματα της διαδικασίας x. ***Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη της βηματικής συνάρτησης !!***

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

- Μια διαδικασία είναι "λευκή" όταν η αυτοσυσχέτιση είναι μηδενική για όλες τις μη μηδενικές χρονικές καθυστερήσεις, δείχνοντας έλλειψη συσχέτισης μεταξύ των δειγμάτων της διαδικασίας εκτός από την αυτοσυσχέτιση σε μηδενική καθυστέρηση. Δηλαδή όταν είναι της μορφής: $R_x(n1,n2) = R_x(n1,n1) * \delta_{n1-n2}$. Επιπλέον, η στοχαστική μέση τιμή μιας λευκής διαδικασίας είναι 0. Προηγουμένως αποδείχτηκε ότι η εν λόγω διαδικασία έχει στοχαστική μέση τιμή 0 αλλά η αυτοσυσχέτισή της δεν είναι μηδενική για τις μη μηδενικές χρονικές καθυστερήσεις. Επομένως, δεν μπορεί να θεωρηθεί λευκή η εν λόγω διαδικασία.

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το Κ;

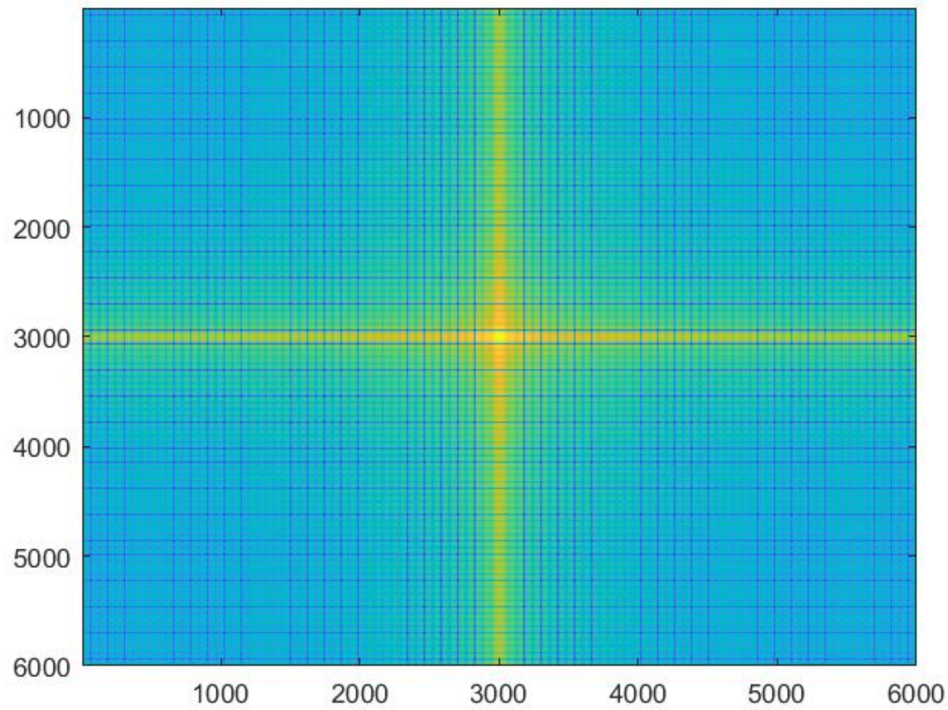
Απάντηση:

- Η πυκνότητα φάσματος μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier της αυτοσυσχέτισης που υπολογίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Η ποιότητα της εκτίμησης της πυκνότητας φάσματος εξαρτάται από τον αριθμό των υλοποιήσεων της διαδικασίας (Κ). Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων, η εκτίμηση προσεγγίζει πιο κοντά στην ιδανική πυκνότητα φάσματος.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο



Αναπαράσταση της Πυκνότητας Φάσματος σε εικόνα.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

<u>Άσκηση 2</u>

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

- Ο μέσος όρος της τυχαίας μεταβλητής στην περίπτωση αυτή θα ισούται με την παράμετρο μ της κανονικής/γκαουσιανής κατανομής η οποία σύμφωνα με την εκφώνηση είναι της μορφής $N(\mu,\sigma^2) = N(0,1)$.

- Άρα $E[A(\theta)] = \mu = 0$ και επομένως $\mu(n) = 0 * E[u(n) - u(n-100)] = 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *randn(·)* της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

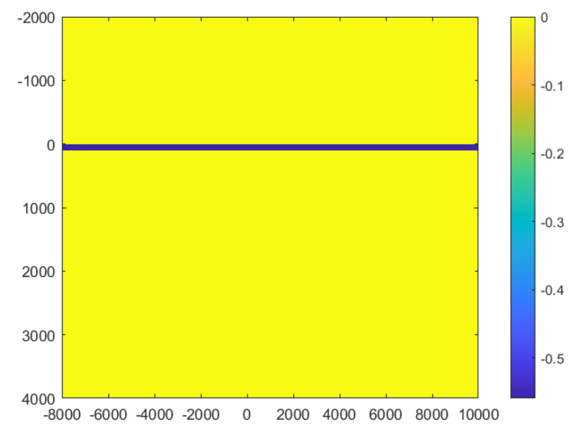
Απάντηση:

Ακολουθεί αναπαράσταση της στοχαστικής μέσης τιμής σε εικόνες.

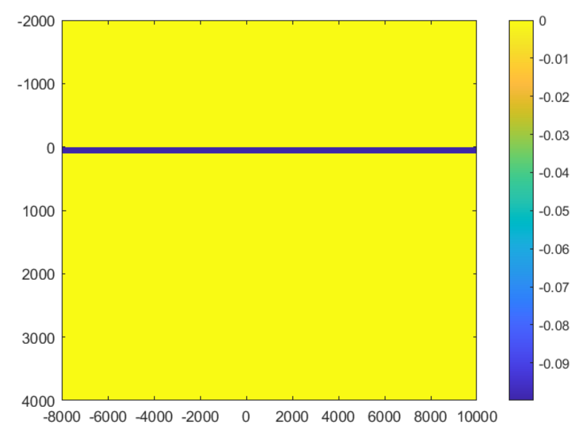
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο



Για K=1000



Για K=10

Παρατηρώ ότι ανεξάρτητα από την τιμή του K η προσέγγιση της στοχαστικής μέσης τιμής είναι πολύ ακριβής!!

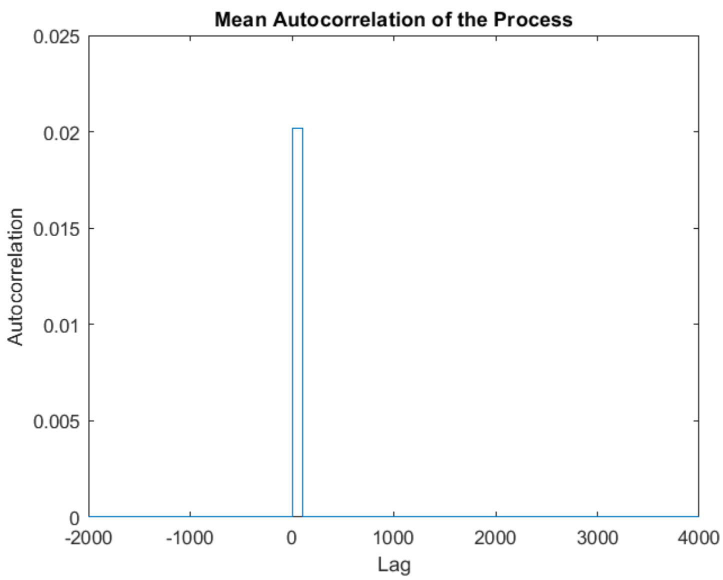
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

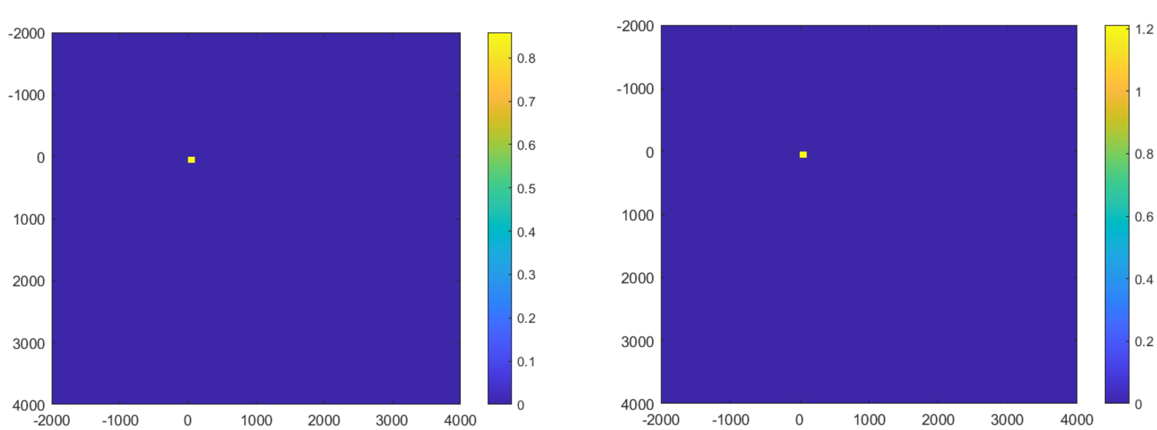
Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;

- Τα συμπεράσματα είναι ίδια με εκείνα του Ερωτήματος (γ) της Άσκησης 1.



Για K=1000

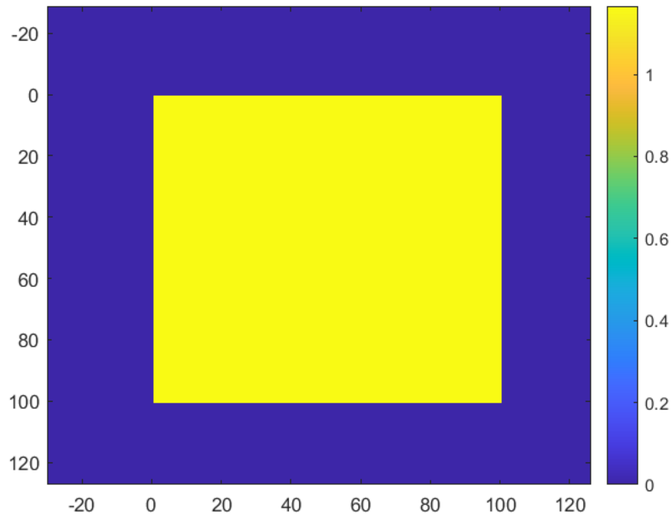


Αναπαράσταση μητρώου αυτοσυσχέτισης σε μορφή εικόνων. Αριστερά: K=10, Δεξιά: K=1000

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο



Απεικόνιση μητρώου αυτοσυσχέτισης σε μεγέθυνση για K=1000.

(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Η παραπάνω διαδικασία δεν είναι λευκή διότι, ναι μεν απεδείχθη προηγουμένως με βάση τη θεωρία ότι η στοχαστική μέση τιμή της είναι 0, ωστόσο η αυτοσυσχέτισή της δεν είναι της μορφής $R_x(n1,n2) = R_x(n1,n1) * \delta_{n1-n2}$.

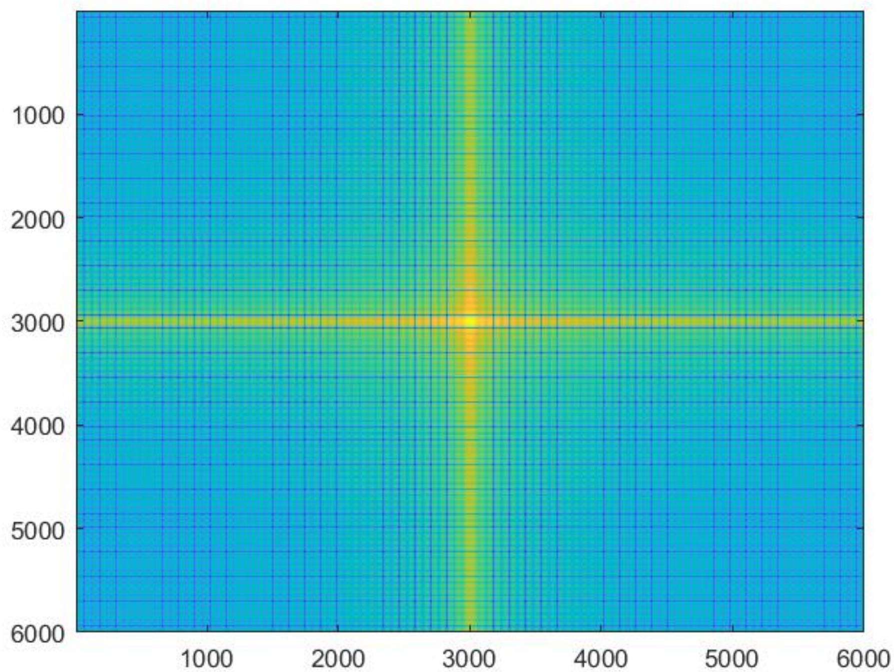
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το Κ;

Απάντηση:



Αναπαράσταση της Πυκνότητας Φάσματος σε εικόνα.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

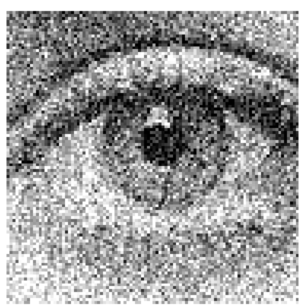
<u>Άσκηση 3</u>

(α) Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.

Απάντηση:

Σύμφωνα με τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών, εάν έχω ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κοινό στοχαστικό μέσο όρο και κοινή διασπορά σ^2 και αρκετές τιμές αυτών των μεταβλητών και πάρω τον αριθμητικό μέσο όρο τους, τότε το αποτέλεσμα θα συγκλίνει στον στοχαστικό μέσο όρο τους.

Εφαρμόζοντας την πράξη του αριθμητικού μέσου όρου με τη συνάρτηση mean() στην θορυβοποιημένη εικόνα επιβεβαιώνεται όντως το παραπάνω θεώρημα.



Εικόνα μετά την αφαίρεση θορύβου.

Ο προστιθέμενος θόρυβος υπολογίστηκε ότι έχει μέση τιμή και διασπορά:

mean_noise = -1.9327e-18 (μέση τιμή πολύ κοντά στο 0)

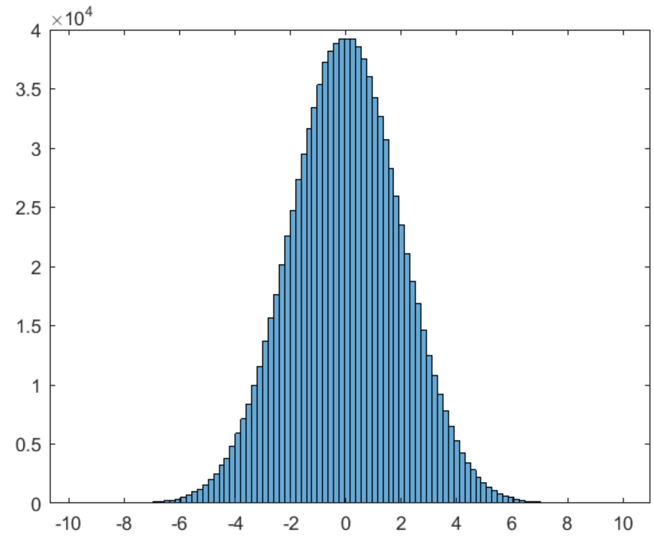
std_noise = 3.9613 (διασπορά = 4)

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	AM:	1093316	Έτος:	3ο

Η κατανομή του θορύβου εκτιμάται πως πρόκειται για κανονική κατανομή με μέσο όρο μηδέν.



Κατανομή του θορύβου.

(β) Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Απάντηση:

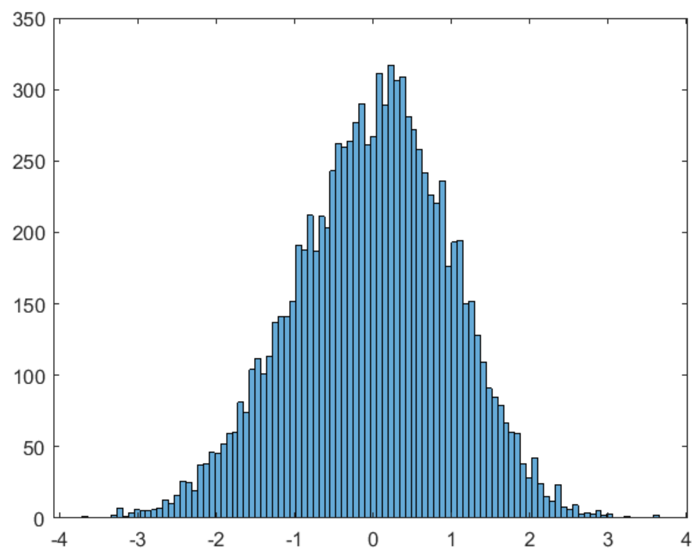
Στον κώδικα του Παραρτήματος, επιβεβαιώνεται το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ως εξής:

- Αρχικά, υπολογίζεται ο μέσος όρος (mean_approx) και η τυπική απόκλιση (std_approx) των τιμών των pixel στη μέση εικόνα (approx), η οποία προκύπτει από τον υπολογισμό του μέσου όρου των εικόνων του συνόλου (I).

- Στη συνέχεια, η μέση εικόνα (approx) κανονικοποιείται, ώστε να έχει μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Αυτό γίνεται με την αφαίρεση της μέσης τιμής από κάθε pixel της εικόνας και τη διαίρεση με την τυπική απόκλιση.

- Τέλος, παρουσιάζεται το ιστόγραμμα των κανονικοποιημένων τιμών (normalized_approx). Αν αυτές οι τιμές προσεγγίζουν μια κανονική κατανομή, τότε αυτό επιβεβαιώνει το κεντρικό οριακό θεώρημα, δείχνοντας ότι η κανονικοποιημένη μέση εικόνα ακολουθεί μια κανονική κατανομή, ανεξάρτητα από την αρχική κατανομή των pixel των εικόνων.

Βλέπουμε στην παρακάτω εικόνα ότι αυτό ισχύει.



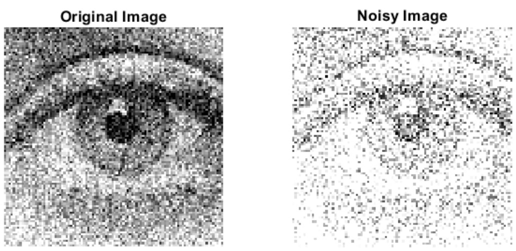
Κατανομή της μέσης θορυβοποιημένης εικόνας.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

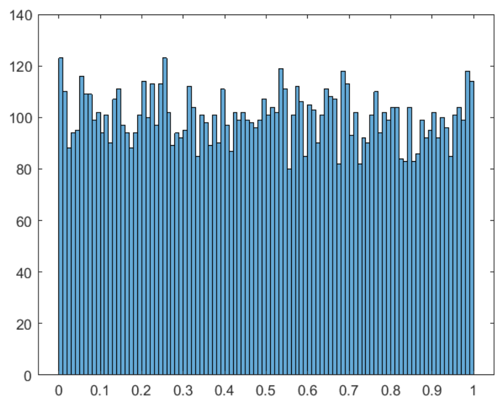
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

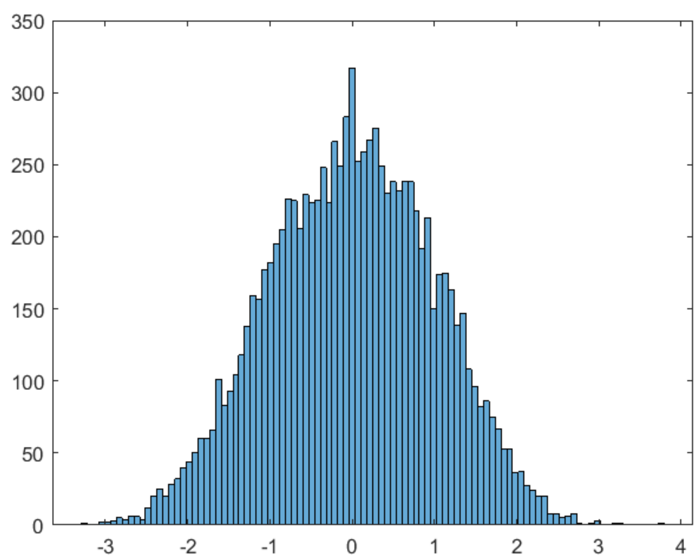
(γ) Επαναλάβετε το (β) προσθέτοντας θόρυβο από ομοιόμορφη κατανομή της επιλογής σας στην αποθορυβοποιημένη εικόνα που προέκυψε από το (α) και σχολιάστε το αποτέλεσμα.



Εικόνα πριν και μετά την προσθήκη θορύβου ομοιόμορφης Κατανομής.



Ομοιόμορφη κατανομή του θορύβου που προστέθηκε.



Κατανομή της μέσης θορυβοποιημένης εικόνας (με θόρυβο ομοιόμορφης κατανομής).

- ✓ Από τις παραπάνω εικόνες επιβεβαιώνεται πράγματι το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

<u>Άσκηση 4</u>

(α) Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας $\omega_0 = 0.25$ και τη συνάρτηση *randn(·)*, δημιουργήστε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;

Απάντηση:

- Η σχέση (2) περιγράφει μια αυτοπαλίνδρομη διαδικασία πρώτης τάξης (AR(1) process):

$$v(n) = \alpha\, v(n-1) + w(n),\ \alpha = 0.6,\ w(n) \sim N(0,1)$$

Πρόκειται για μια διαδικασία που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση της παλινδρόμησης, όπου το τρέχον δείγμα v(n) εξαρτάται από το προηγούμενο δείγμα v(n−1) και προστίθεται θόρυβος w(n).

- Για τη δημιουργία μερικών υλοποιήσεων αυτής της διαδικασίας, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εντολή randn() της MATLAB για τη δημιουργία του θορύβου w(n) και να υπολογίσουμε τις τιμές του v(n).

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

- Φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου:

mean_v = -0.1403

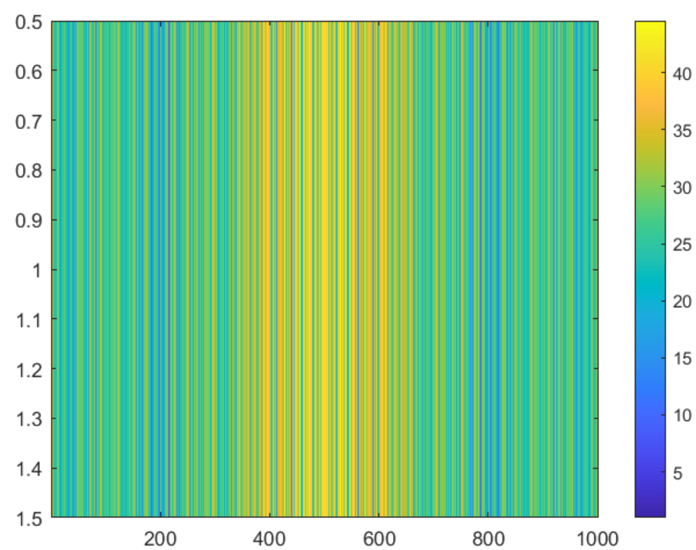
var_v = 1.5693

- Θεωρητικά χαρακτηριστικά:

$$E[v(n)]=0 \text{ και}$$

$$Var(v(n)) = \sigma_w^2 / (1-\alpha)^2 = 1 / (1-0.6)^2 = 1/0.64 \approx 1.5625$$

Παρατηρώ πως τα φασματικά χαρακτηριστικά που υπολογίστηκαν συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα.



Φασματική πυκνότητα χρωματισμένου θορύβου

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

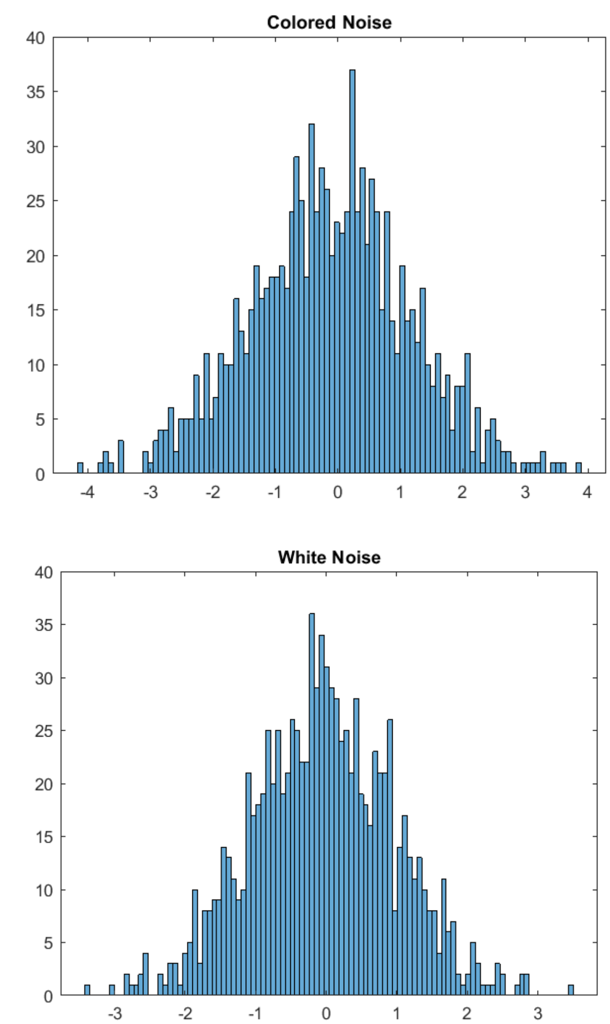
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(β) Ποιά η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.

Απάντηση:

- Το Σύστημα Λεύκανσης είναι ένα φίλτρο που εφαρμόζεται στο σήμα v(n) για να αφαιρέσει την αυτοσυσχέτιση και να το μετατρέψει σε λευκό θόρυβο. Δηλαδή, μετατρέπει το χρωματισμένο θόρυβο σε λευκό θόρυβο.



Επάνω: πριν τη λεύκανση Κάτω: μετά τη λεύκανση

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(γ) Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

- Η πηγή του σήματος s(n) = sin(ωn+φ) είναι στοχαστική επειδή η φάση φ είναι τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0, 2π]. Αυτό σημαίνει ότι το s(n) έχει τυχαίες ιδιότητες που εξαρτώνται από την κατανομή της φάσης.

(δ) Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση rand(·), δημιουργείστε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματα σας.

Απάντηση:

- Σύμφωνα με το σύγγραμμα του Γ. Μουστακίδη(σελ. 337), ένα σήμα καλείται ασθενώς στάσιμο $1^{ης}$ τάξης όταν ο στοχαστικός μέσος όρος του είναι μια σταθερά ανεξάρτητη του χρόνου.

- Ένα σήμα καλείται ασθενώς στάσιμο $2^{ης}$ τάξης όταν είναι ασθενώς στάσιμο $1^{ης}$ τάξης και επιπλέον η συνάρτηση ετεροσυσχέτισης είναι επίσης ανεξάρτητη του απόλυτου χρόνου και εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά δύο χρονικών στιγμών.

Η μέση τιμή του s(n) είναι: $E[s(n)] = E[\sin(\omega_0 n+\phi)]$

Η φάση ϕ είναι μια στοχαστική μεταβλητή με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα [0,2π]. Λόγω της συμμετρίας της ημιτονοειδούς συνάρτησης και της ομοιόμορφης κατανομής της φάσης, η μέση τιμή του σήματος είναι μηδενική:

$$E[\sin(\omega_0 n+\phi)] = 0$$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	AM:	1093316	Έτος:	3ο

Η αυτοσυσχέτιση του s(n) ορίζεται ως:

$$Rs(m)=E[s(n)s(n+m)]$$

Για να υπολογίσουμε αυτή την ποσότητα, θεωρούμε:

$s(n) = \sin(\omega_0 n+\phi)$

$s(n+m)= \sin(\omega_0(n+m)+\phi) = \sin(\omega_0 n+\omega_0 m+\phi)$

Η αυτοσυσχέτιση είναι: $Rs(m)=E[\sin(\omega_0 n+\phi)\sin(\omega_0 n+\omega_0 m+\phi)]$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα για το γινόμενο των ημιτόνων:
$\sin A\sin B=12[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

έχουμε:

$\sin(\omega_0 n+\phi)\sin(\omega_0 n+\omega_0 m+\phi)=12[\cos(\omega_0 m)-\cos(2\omega_0 n+\omega_0 m+2\phi)]$

Η αναμενόμενη τιμή της πρώτης συνιστώσας είναι: $E[\cos(\omega_0 m)]=\cos(\omega_0 m)$

και της δεύτερης συνιστώσας, λόγω της στοχαστικής φύσης της ϕ, είναι μηδενική:
$E[\cos(2\omega_0 n+\omega_0 m+2\phi)]$

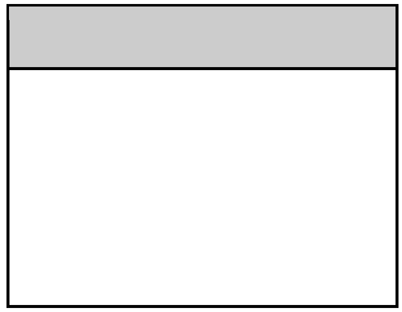
Συνεπώς, η αυτοσυσχέτιση είναι: $Rs(m)=12\cos(\omega_0 m)$

- Πράγματι επομένως, η μέση τιμή του σήματος s(n) είναι σταθερή και η αυτοσυσχέτισή του εξαρτάται μόνο από τη χρονική διαφορά m, όχι από το απόλυτο χρόνο n.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο



(ε) Εκφράστε την έξοδο του FIR φίλτρου Wiener μήκους M συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.

Απάντηση:

- Η έξοδος του FIR φίλτρου Wiener μήκους M, $\hat{w}(n)$, εκφράζεται ως:

$$\hat{w}(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h_k * v(n-k)$$

(στ) Σχεδιάστε το βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Απάντηση:

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(ζ) Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

M = 3	M =4	M = 5	M = 6

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

Κώδικας Άσκησης 1

```
clear;clc;close all

%% ΕΡΩΤΗΜΑ β)

% Parameters
K = 1000;
n = [-2000:4000]';

% Generating random amplitudes
A = rand(1,K) - 1/2;

% Generating the signal
x = A .* ((n > 0) - (n - 100 > 0));

% Plotting the signal
figure; plot(n,x);



% Calculate the stochastic mean at each time step
stochastic_mean = mean(x, 2);

% Plotting the stochastic mean
figure;
plot(n, stochastic_mean);
title('Stochastic Mean of the Process');
xlabel('Time (n)');
ylabel('Stochastic Mean');


% Plotting the stochastic mean as an image
figure; imagesc(n,n,stochastic_mean); colorbar;



%% ΕΡΩΤΗΜΑ γ)

% Computing the autocorrelation matrix
Acor = x*x'/K;

% Calculate the mean autocorrelation at each time step
mean_autocorr = mean(Acor, 2);


% Plotting the mean autocorrelation
```

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	AM:	1093316	Έτος:	3ο


```
figure;
plot(n, mean_autocorr);
title('Mean Autocorrelation of the Process');
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');


% Plotting the autocorrelation matrix as an image
figure; imagesc(n,n,Acor); colorbar;


%% ΕΡΩΤΗΜΑ ε)

% Computing the spectral density
Sd = 20*log10(fftshift(abs(fft2(Acor))));

% Plotting the spectral density as an image
figure; imagesc(Sd);
```

Κώδικας Άσκησης 2

Ίδιος με την Άσκηση 1 απλά αντί για τη συνάρτηση rand(.) χρησιμοποιώ την randn(.)

Κώδικας Άσκησης 3

```
clear; clc; close all

load eye.mat
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

```
%% ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ α),β)


% display only the first image from the loaded data
figure;
imshow(I(:,:,1))

% calculates the mean of all images along the third dimension and
% display the mean image
approx = mean(I,3);
figure
imshow(approx);


% noise added to each image
% calculated by subtracting the mean image (approx) from each image in I
noise = I - repmat(approx,[1,1,size(I,3)]);


% calculate the noise statistics
mean_noise = mean(noise(:))
std_noise = std(noise(:));
var_noise = std_noise^2

% noise distribution
figure;
histogram(noise(:),100);

% check the central limit theorem from approx
% each pixel is a random variable
mean_approx = mean(approx(:));
std_approx = std(approx(:));

% normalize approx to get N(0,1)
normalized_approx = (approx - mean_approx)/std_approx;

figure;
histogram(normalized_approx(:),100);



%% ΕΡΩΤΗΜΑ γ)

% creation of noise
even_noise = rand(size(approx));
noisy_approx = approx + even_noise;

% noise distribution
figure;
histogram(even_noise(:),100);
```

```
% noisy image display
figure;
subplot(1,2,1); imshow(approx); title('Original Image');
subplot(1,2,2); imshow(noisy_approx); title('Noisy Image');


% check the central limit theorem from noisy_approx
% each pixel is a random variable
mean_noisy_approx = mean(noisy_approx(:));
std_noisy_approx = std(noisy_approx(:));

% normalize noisy_approx to get N(0,1)
normalized_noisy_approx = (noisy_approx - mean_noisy_approx)/std_noisy_approx;

figure;
histogram(normalized_noisy_approx(:),100);
```

Κώδικας Άσκησης 4

```
clear
close all
clc

% Signal Generation
n=0:1000;
phi = rand(1)*2*pi;        % random phase uniformly distributed between 0 and 2π
s = sin(0.25*n+phi);       % deterministic signal s(n)


% White Gaussian Noise Generation
w = randn(1,length(n));
v = filter(1,[1,-0.6],w);
x = s + w;

% White Noise statistics
mean_v = mean(v)
var_v = var(v)
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο


```
% Computing the spectral density of Colored Noise
Sd = 20*log10(fftshift(abs(fft2(v))));

% Displaying it as an image
figure; imagesc(Sd); colorbar;

% White Noise distribution
figure;
histogram(w(:),100); title('White Noise');

% Colored Noise distribution
figure;
histogram(v(:),100); title('Colored Noise');
```

```
%%
%{% Autocorrelation of the White Noise --> not wanted in the exercise

w1 = w(1:end-1);
w2 = w(2:end);
W = [w2;w1];
Rww = W*W'/length(w1);

%}
%%
```

```
% Autocorrelation of the Colored Noise
% v1 and v2 are shifted versions of the colored noise v.
% V is a matrix with v2 as the first row and v1 as the second row.
v1 = v(1:end-1);
v2 = v(2:end);

V = [v2;v1];
Rvv = V*V'/length(v1);    % autocorrelation matrix of v
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

```
% Cross-Correlation between Colored Noise and White Noise
rwv = zeros(2,1);
rwv(1) = sum(v(2:end) .* w(2:end));
rwv(2) = sum(v(1:end-1) .* w(2:end));

% Normalize rsx
rwv = rwv / (length(v) - 1);



% Wiener filter coefficients (solving the linear system Rvv*h=rwv)
hW = Rvv\rwv;


% apply to Colored Noise to make it white again
w_hat = filter(hW,1,v);


% error of noise approximation by the Wiener filter
norm(w-w_hat)


% Noise Removal
x_hat = x-w_hat;

figure;
subplot(131);plot(s);title('original');
subplot(132);plot(x);title('Noisy');
subplot(133);plot(x_hat);title('Filtered');
```