ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

<u>Ασκηση 1</u>

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

- Για να υπολογίσουμε τη στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας, αρκεί να υπολογίσουμε τον θεωρητικό μέσο όρο της τυχαίας μεταβλητής A(θ) για το δοσμένο διάστημα [-1/2, 1/2], ο οποίος είναι 0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $\mu(n) = E[X(n,\theta)] = E[\ A(\theta)\ [u(n) - u(n-100)]\ ] =$

$= E[A(\theta)] * E[u(n) - u(n-100)]$

Και γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα [a,b] είναι (a+b)/2 → $\mu(n) = (-1/2 + 1/2) / 2 = 0$

Άρα τελικά $\mu(n) = 0 * E[u(n) - u(n-100)] = 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *rand(·)* της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση:

- Για μικρό αριθμό υλοποιήσεων (π.χ. K = 1 ή 10), η στοχαστική μέση τιμή είναι ασταθής και εμφανίζει μεγάλη διακύμανση.

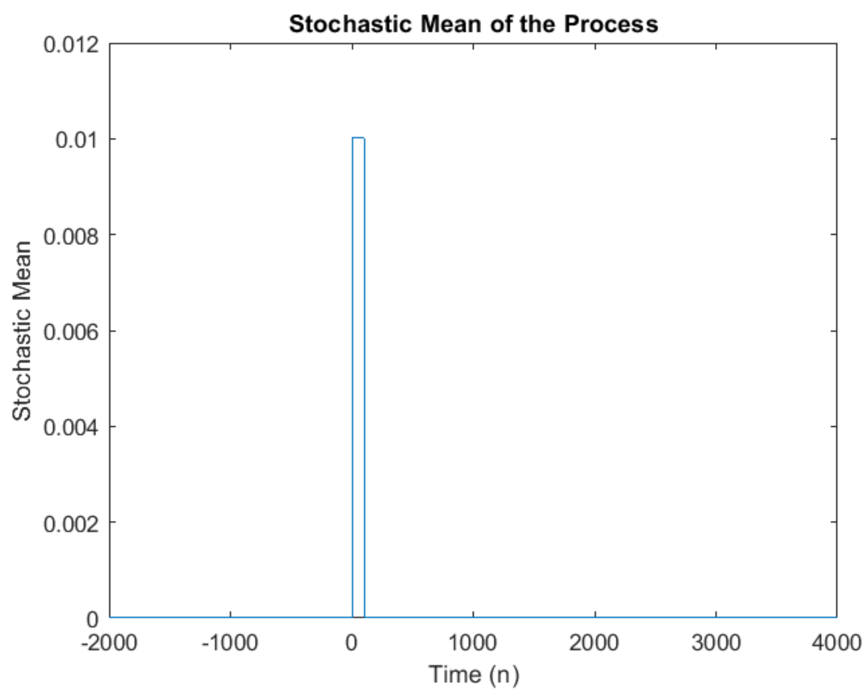
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

- Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων (π.χ. K = 100 ή 1000), η στοχαστική μέση τιμή αρχίζει να σταθεροποιείται και να πλησιάζει τη ***θεωρητική*** στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας (μηδέν στην προκειμένη περίπτωση).

- Αυτό επαληθεύει τον "Νόμο των Μεγάλων Αριθμών", όπου η αριθμητική μέση τιμή των ανεξάρτητων και ομοίως κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει στη θεωρητική στοχαστική μέση τιμή τους όσο αυξάνεται ο αριθμός των δειγμάτων.



Σύγκλιση στοχαστικής μέσης τιμής κοντά στο θεωρητικό μηδέν για K=1000

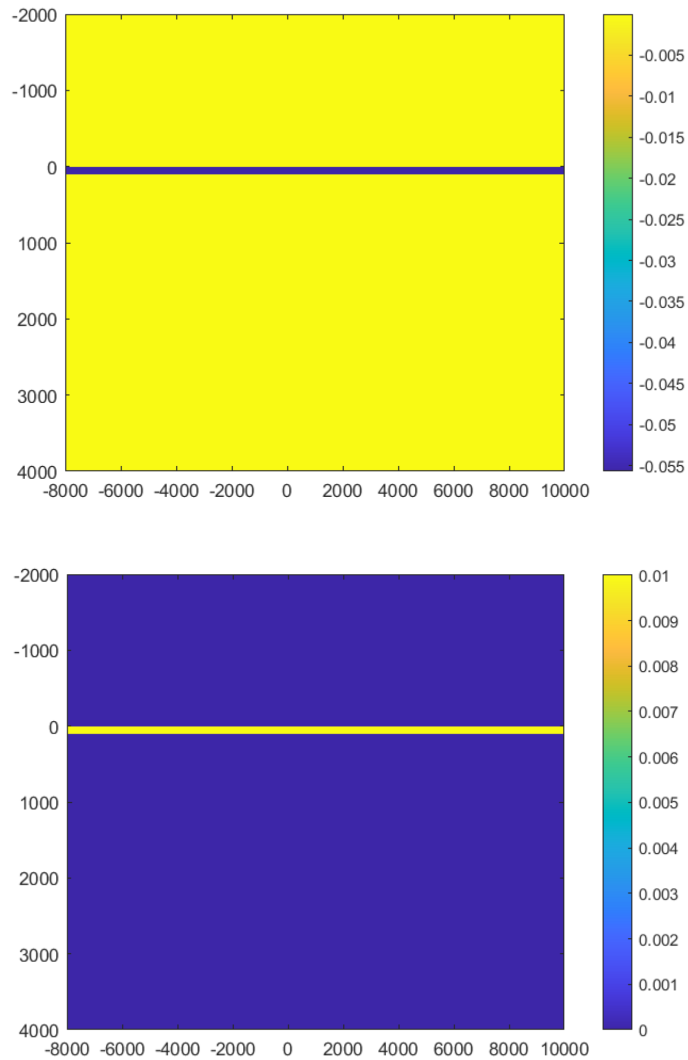
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

Ακολουθεί αναπαράσταση της στοχαστικής μέσης τιμής και σε εικόνες.

Για K=1000 παρατηρείται επικράτηση της τιμής 0 (χρώμα **μπλε**) στην εικόνα.



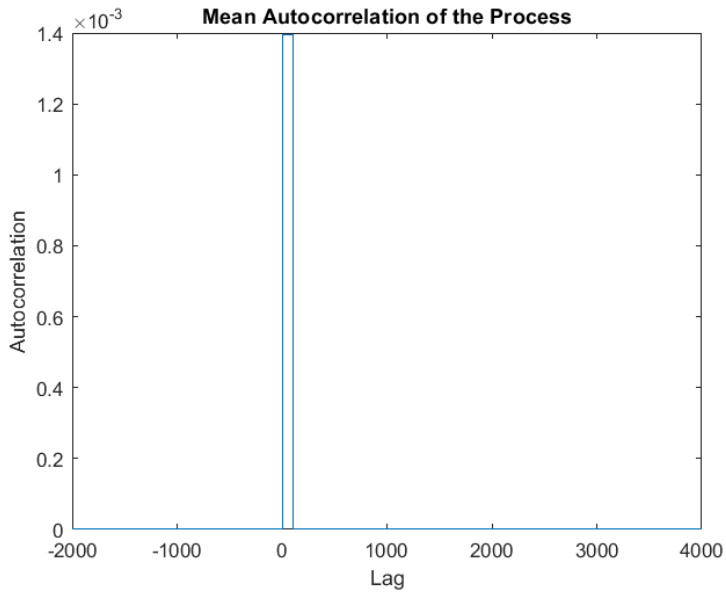
Επάνω: K=10 Κάτω: K=1000

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

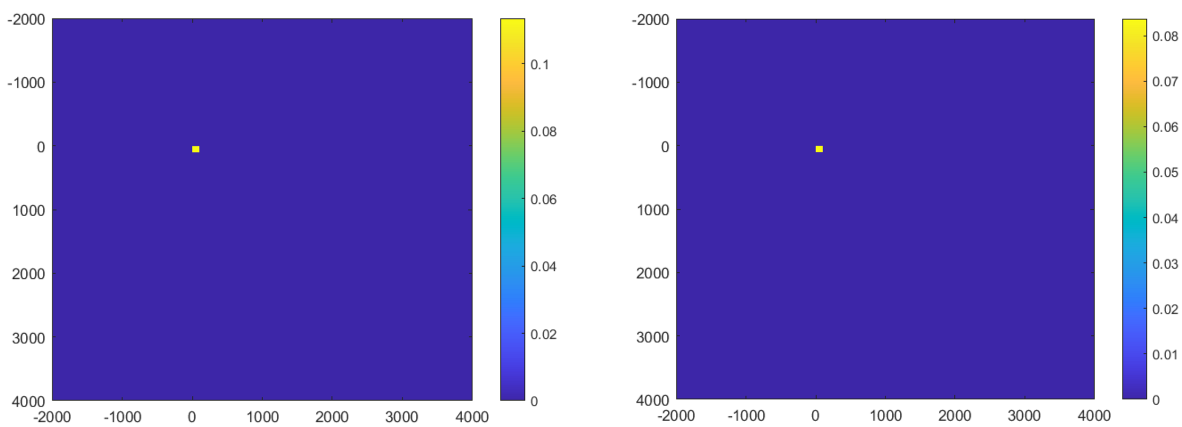
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός K των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;



Σύγκλιση αυτοσυσχέτισης στη συνάρτηση δ για K=1000.



Σύγκλιση αυτοσυσχέτισης στη συνάρτηση δ σε μορφή εικόνων. Αριστερά: K=10, Δεξιά: K=1000

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

- Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας (K), η εκτιμώμενη αυτοσυσχέτιση θα συγκλίνει προς την πραγματική αυτοσυσχέτιση της διαδικασίας.

- Η αυτοσυσχέτιση αναπαρίσταται στις εικόνες ως ένα κεντρικό χρωματισμένο τετράγωνο, υποδηλώνοντας ισχυρή συσχέτιση της διαδικασίας με τον εαυτό της και ασθενή προς μηδενική συσχέτιση με τις χρονικές μετατοπίσεις της (προσεγγίζει την συνάρτηση δ).

(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

- Μια διαδικασία είναι "λευκή" όταν η αυτοσυσχέτιση είναι μηδενική για όλες τις μη μηδενικές χρονικές καθυστερήσεις, δείχνοντας έλλειψη συσχέτισης μεταξύ των δειγμάτων της διαδικασίας εκτός από την αυτοσυσχέτιση σε μηδενική καθυστέρηση. Επιπλέον, η στοχαστική μέση τιμή μιας λευκής διαδικασίας είναι 0. Προηγουμένως αποδείχτηκε ότι η εν λόγω διαδικασία έχει στοχαστική μέση τιμή 0 και η αυτοσυσχέτισή της εκτιμήθηκε πως τείνει σημαντικά στη συνάρτηση δ. Επομένως, μπορεί όντως να θεωρηθεί μια λευκή διαδικασία.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

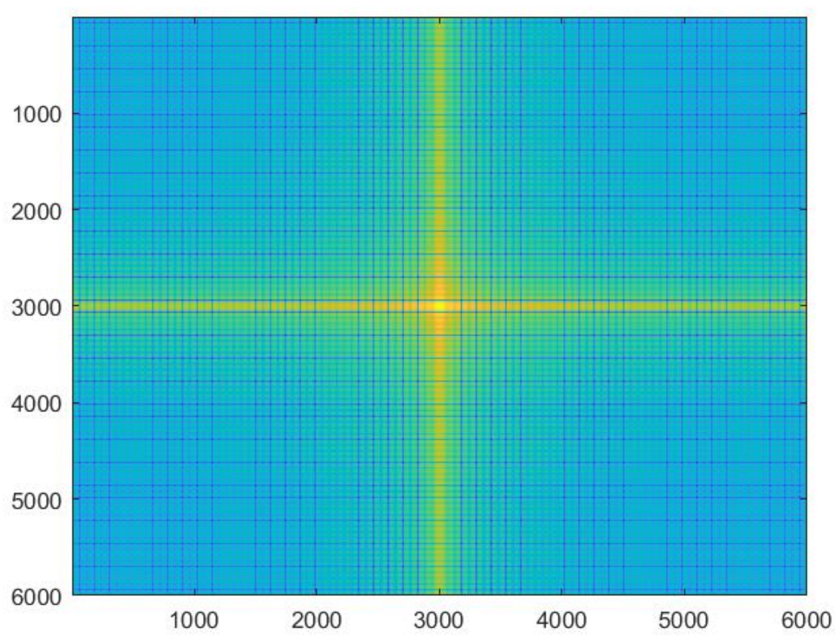
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

Απάντηση:

- Η πυκνότητα φάσματος μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier της αυτοσυσχέτισης. Η ποιότητα της εκτίμησης της πυκνότητας φάσματος εξαρτάται από τον αριθμό των υλοποιήσεων της διαδικασίας (K). Καθώς αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων, η εκτίμηση προσεγγίζει πιο κοντά στην ιδανική πυκνότητα φάσματος.



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

Άσκηση 2

(α) Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.

Απάντηση:

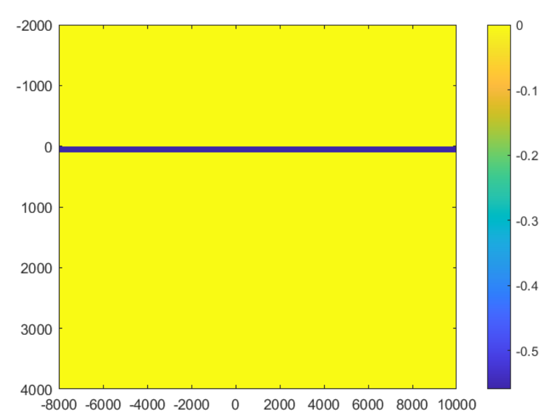
- Ο μέσος όρος της τυχαίας μεταβλητής στην περίπτωση αυτή θα ισούται με την παράμετρο μ της κανονικής/γκαουσιανής κατανομής η οποία σύμφωνα με την εκφώνηση είναι της μορφής $N(\mu,\sigma^2) = N(0,1)$.

- Άρα $E[A(\theta)] = \mu = 0$ και επομένως $\mu(n) = 0 * E[u(n) - u(n - 100)] = 0$.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση *randn(·)* της MATLAB δημιουργήστε K υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής; Απεικονίστε την μέση υλοποίηση στον παρακάτω πίνακα.

Απάντηση:

Ακολουθεί αναπαράσταση της στοχαστικής μέσης τιμής σε εικόνες.

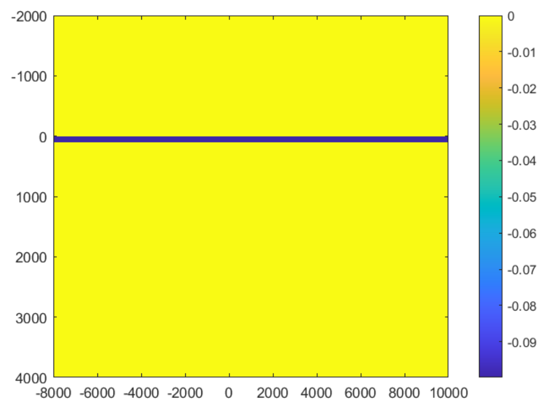


Για K=1000

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο



Για K=10

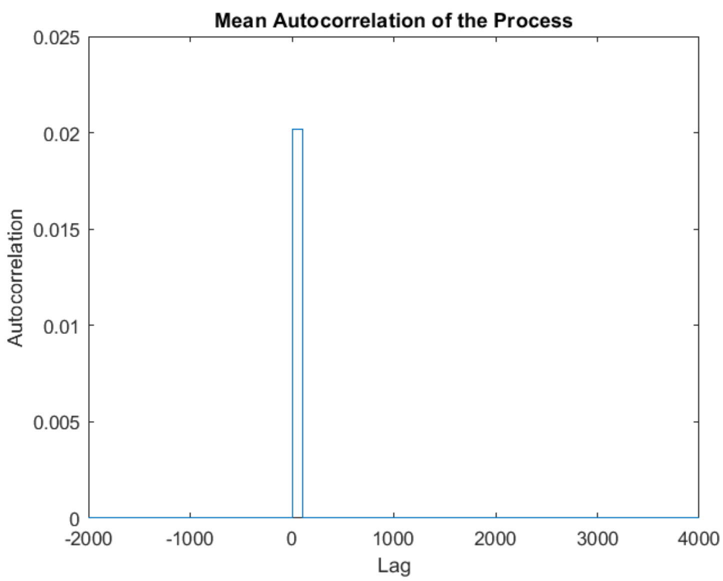
Παρατηρώ ότι ανεξάρτητα από την τιμή του K η προσέγγιση της στοχαστικής μέσης τιμής είναι πολύ ακριβής!!

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

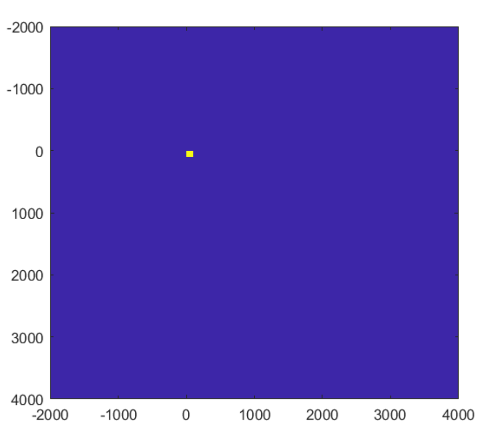
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

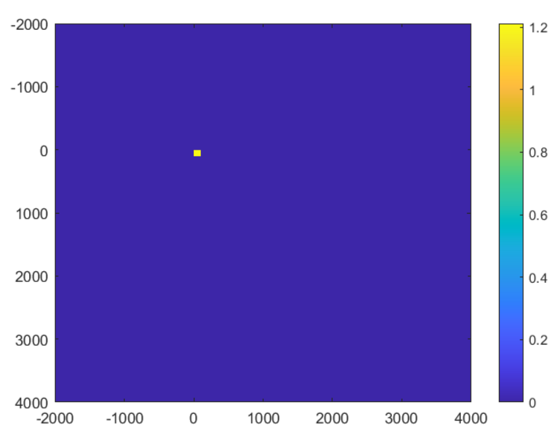
(γ) Υπολογίστε και απεικονίστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός Κ των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;



Για K=1000



Για K=10



Για K=1000

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

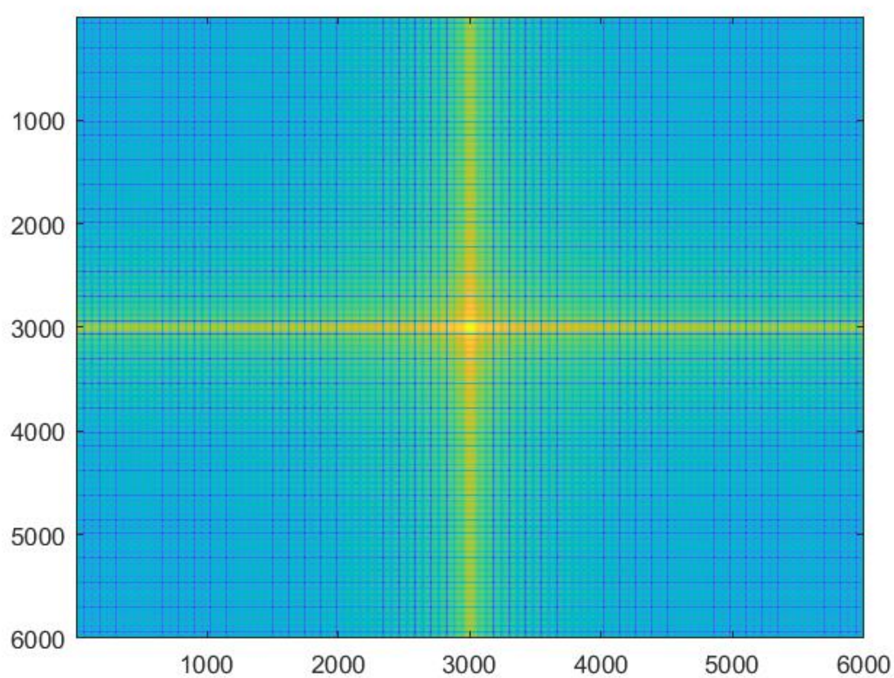
(δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία "λευκή"; Αιτιολογείστε την απάντησή σας.

Απάντηση:

Ναι.

(ε) Υπολογίστε και απεικονίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος 4 και πως επηρεάζεται από το K;

Απάντηση:



ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

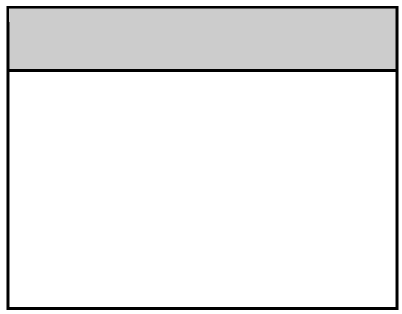
Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο

<u>Άσκηση 3</u>

(α) Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.

Απάντηση:



(β) Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

Απάντηση:

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	AM:	1093316	Έτος:	3ο

<u>Άσκηση 4</u>

(α) Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας $\omega_0 = 0.25$ και τη συνάρτηση *randn(·)*, δημιουργήστε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;

Απάντηση:

(β) Ποιά η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.

Απάντηση:

(γ) Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(δ) Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση rand(·), δημιουργείστε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματα σας.

Απάντηση:

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	AM:	1093316	Έτος:	3ο

(ε) Εκφράστε την έξοδο του FIR φίλτρου Wiener μήκους Μ συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.

Απάντηση:

(στ) Σχεδιάστε το βέλτιστο FIR φίλτρο Wiener μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Απάντηση:

(ζ) Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

M = 3	M =4	M = 5	M = 6

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	AM:	1093316	Έτος:	3ο

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κώδικας Άσκησης 1

```
clear;clc;close all

%% ΕΡΩΤΗΜΑ β)

% Parameters
% K = 10
K = 1000;
n = [-2000:4000]';

% Generating random amplitudes
A = rand(1,K) - 1/2;

% Generating the signal
x = A .* ((n > 0) - (n - 100 > 0));

% Plotting the signal
figure; plot(n,x);



% Calculate the stochastic mean at each time step
stochastic_mean = mean(x, 2);

% Plotting the stochastic mean
figure;
plot(n, stochastic_mean);
title('Stochastic Mean of the Process');
xlabel('Time (n)');
ylabel('Stochastic Mean');


% Plotting the stochastic mean as an image
figure; imagesc(n,n,stochastic_mean); colorbar;
```

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις στο τέταρτο σετ εργαστηριακών ασκήσεων

Ον/μο:	Χαράλαμπος Αναστασίου	ΑΜ:	1093316	Έτος:	3ο


```
%% ΕΡΩΤΗΜΑ γ)

% Computing the autocorrelation matrix
Acor = x*x'/K;

% Calculate the mean autocorrelation at each time step
mean_autocorr = mean(Acor, 2);


% Plotting the mean autocorrelation
figure;
plot(n, mean_autocorr);
title('Mean Autocorrelation of the Process');
xlabel('Lag');
ylabel('Autocorrelation');


% Plotting the autocorrelation matrix as an image
figure; imagesc(n,n,Acor); colorbar;


%% ΕΡΩΤΗΜΑ ε)

% Computing the spectral density
Sd = 20*log10(fftshift(abs(fft2(Acor))));

% Plotting the spectral density as an image
figure; imagesc(Sd);
```

Κώδικας Άσκησης 2

Ίδιος με την Άσκηση 1 απλά αντί για τη συνάρτηση rand(.) χρησιμοποιώ την randn(.)