

Table des matières

I	Mouvement d'une planète : Extrait épreuve A 2018	2
1	Préliminaires	2
1.1	Référentiel utilisé	2
1.2	Champ de gravitation crée par le Soleil	2
1.3	Modèle simplifié du mouvement d'une planète	2
2	Autour de la notion de référentiel galiléen	3
2.1	Passage d'un référentiel à un autre, composition des mouvements	3
2.2	Cas d'un référentiel en translation accéléré par gravité	4
II	Étude d'un atome d'hydrogène	4
3	Approche classique	4
4	Approche quantique	5
5	Théorème de Larmor	6
III	Extrait épreuve A 2019	6
6	Oscillateur harmonique	6
7	Oscillateur anharmonique : stabilité, instabilité, métastabilité	7
IV	Étude d'une bifurcation (Extrait épreuve C 2016)	8
V	Mécanique du solide	9
8	Préliminaire	9
9	Mouvement d'un solide dans le vide	10
10	Mouvement d'une toupie déséquilibrée	10

Ce devoir de vacances vise à vous faire mobiliser des connaissances de mécanique du point et du solide. Il y aura un cours de Mécanique du solide à la rentrée. Mais d'ores et déjà, ce devoir vous permet d'engager des révisions pendant les vacances. Les cinq parties sont indépendantes car issues de sujets différents.

Si vous constatez une erreur dans le devoir, vous indiquez clairement sur votre copie l'erreur et les modifications que vous avez été amenés à prendre.

Bon courage.

Première partie

Mouvement d'une planète : Extrait épreuve A 2018

Cette partie constitue une première approche de quelques aspects de la physique du système solaire. La première section s'intéresse à la théorie classique du mouvement d'une planète dans le champ de gravité solaire.

1 Préliminaires

1.1 Référentiel utilisé

1. Définir un référentiel. Définir un référentiel galiléen.

1.2 Champ de gravitation crée par le Soleil

On assimile le Soleil à une sphère de rayon R_S et de masse volumique uniforme ρ_S . On repère la position d'un point dans un système de coordonnées sphériques, d'origine O, confondue avec le centre du Soleil. On notera R le rayon et \vec{e}_R le vecteur unitaire radial, de sorte qu'un point M est repéré par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_R$.

1. Rappeler le théorème de GAUSS pour la gravitation. En déduire le champ gravitationnel \vec{g}_S créé par le Soleil en un point extérieur à l'étoile. Montrer que ce champ est le même que celui créé par une masse ponctuelle M_S placée au centre de la distribution, où l'on exprimera M_S en fonction de ρ_S et R_S . Aurait-on eu le même résultat si la répartition avait été non-uniforme, mais à symétrie sphérique ?

1.3 Modèle simplifié du mouvement d'une planète

Dans toute la suite, on se place dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen. On étudie le mouvement d'une planète de masse m dans le champ gravitationnel newtonien du Soleil de masse M_S supposé fixe. On néglige toute autre action que celle de ce champ sur la planète.

1. Montrer que le mouvement de la planète est plan. Comment caractériser ce plan ?
On paramètre la trajectoire de la planète dans ce plan en coordonnées polaires, avec les notations (r, θ) . On notera $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$. De manière générale, dans toute la suite, quelle que soit la grandeur A , on notera $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$.
2. Rappeler l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans ce système de coordonnées. En déduire les deux équations différentielles couplées vérifiées par r et θ .

3. Pour cette question uniquement, on se restreint à une trajectoire circulaire de rayon r_C . Exprimer la vitesse angulaire de rotation de m , notée $\Omega(r_C)$, dans ce cas. Dans la suite de l'énoncé, cette vitesse angulaire sera appelée vitesse angulaire képlérienne.
4. On revient au cas général. Montrer que, dans ce système de coordonnées, la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.
5. Montrer que l'énergie mécanique de m est une constante du mouvement. En prenant comme origine des énergies potentielles la situation où la planète est à une distance infinie du Soleil, exprimer cette énergie mécanique E_m et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,\text{eff}}(r), \quad (1.1)$$

où $E_{p,\text{eff}}(r)$ est une fonction uniquement de r , C , m , \mathcal{G} et M_S . Quelle interprétation physique peut-on donner à $E_{p,\text{eff}}(r)$?

6. Tracer l'allure de $E_{p,\text{eff}}(r)$. Montrer qu'elle permet d'identifier plusieurs types de mouvements radiaux possibles selon la valeur de l'énergie mécanique E_m .
7. On effectue le changement de variable de BINET en posant $u(\theta)$ telle que $u = 1/r$. Exprimer \dot{r} puis \ddot{r} en fonction de C , de u et/ou de dérivées de u par rapport à θ . En déduire que l'une des équations différentielles établies précédemment peut se réécrire sous la forme

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mathcal{G}M_S}{C^2}. \quad (1.2)$$

8. En déduire que la trajectoire d'une planète est une conique dont le Soleil est un foyer. Donner l'équation polaire $r(\theta)$ de cette conique - on choisira l'origine des angles de sorte que l'expression soit la plus simple possible et on notera l'excentricité e , sans chercher à l'exprimer. Exprimer le paramètre p en fonction de \mathcal{G} , M_S et C . Donner la signification de e . Que peut-on dire du mouvement radial selon sa valeur ? Représenter graphiquement la trajectoire dans le cas $0 < e < 1$.
9. Exprimer l'énergie mécanique E_m en fonction de u et de $\frac{du}{d\theta}$ notamment. Montrer que sa conservation implique une relation entre e , E_m , p , \mathcal{G} , M_S et m que l'on mettra sous la forme $e = f(E_m; p; \mathcal{G}; M_S; m)$. Expliquer en quoi cette relation permet de faire le lien quantitatif entre la discussion de la question 6. et celle de la question 8..

2 Autour de la notion de référentiel galiléen

Dans la sous-section précédente, nous avons considéré le référentiel héliocentrique comme galiléen. L'objectif de cette sous-section est de justifier cette hypothèse.

2.1 Passage d'un référentiel à un autre, composition des mouvements

Soit un référentiel \mathcal{R} d'origine O et un référentiel \mathcal{R}' d'origine O' , dont le mouvement par rapport à \mathcal{R} est caractérisé par la donnée de la vitesse $\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$ et d'un vecteur rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ supposé constant. On rappelle que la loi vectorielle de composition des vitesses, qui lie les vitesses d'un point M dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' , $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{v}'(M)_{/\mathcal{R}'}$, est :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}'(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}_e = \vec{v}'(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}. \quad (2.1)$$

1. Commenter brièvement cette relation, en donnant notamment la signification physique de la vitesse \vec{v}_e . On pourra illustrer les différents termes grâce à des schémas décrivant des situations simples.
De même, la loi vectorielle de composition des accélérations, qui lie les accélérations d'un point M dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' , $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$ et $\vec{a}'(M)_{/\mathcal{R}'}$, s'écrit :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}'(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e + \vec{a}_c, \quad (2.2)$$

avec $\vec{a}_e = \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})$ et $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}'(M)_{/\mathcal{R}'}$.

2. Commenter cette relation et donner la signification physique des accélérations \vec{a}_e et \vec{a}_c . \mathcal{R} étant supposé galiléen, en déduire les conditions pour que \mathcal{R}' le soit aussi.

2.2 Cas d'un référentiel en translation accéléré par gravité

Soit un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen. On considère à présent que le référentiel \mathcal{R}' , d'origine O' , est attaché à un solide de masse $m_{\mathcal{R}'}$, ce solide étant, dans \mathcal{R} , en mouvement de translation accélérée par un champ de gravité extérieur $\vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M)$. A priori, la condition établie précédemment n'est donc pas respectée et \mathcal{R}' n'est pas galiléen. On cherche ici à établir un deuxième critère moins restrictif et applicable en pratique, pour que \mathcal{R}' puisse malgré tout être considéré comme galiléen. Pour cela, on étudie dans \mathcal{R}' le mouvement d'un point M de masse m soumis uniquement à $\vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}$.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à M dans \mathcal{R} . Montrer à l'aide d'une des formules de composition que l'on peut réécrire cette équation de sorte qu'elle soit formellement équivalente à un principe fondamental de la dynamique écrit dans \mathcal{R}' .
2. Exprimer $\vec{a}(O')_{/\mathcal{R}}$. En déduire que tout se passe comme si M subissait dans \mathcal{R}' une force effective $m(\vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(M) - \vec{\mathcal{G}}_{\text{ext}}(O'))$. Comment appelle-t-on ce terme ? Comment est modifiée l'équation précédente si l'on considère en plus l'action d'autres forces que la gravitation, notées \vec{F} ?
3. Quel critère pratique peut-on dès lors donner pour qu'un référentiel en translation accéléré par gravité puisse être considéré comme galiléen ? Présenter succinctement le référentiel héliocentrique. En utilisant le critère précédent, expliquer qualitativement mais précisément pourquoi on peut considérer ce référentiel comme galiléen avec une excellente approximation pour l'étude des mouvements dans le système solaire.

Deuxième partie

Étude d'un atome d'hydrogène

3 Approche classique

Nous considérons un atome d'hydrogène constitué d'un proton de masse m_p et un électron de masse m_e repérés respectivement par les vecteurs \vec{r}_p et \vec{r}_e par rapport à un référentiel \mathcal{R} , considéré comme galiléen et muni d'un repère cartésien. Leur charge est respectivement $+e$ et $-e$ et nous négligeons toutes les forces excepté la force électrostatique entre les particules.

1. Définir un référentiel galiléen. Connaissez-vous un référentiel rigoureusement galiléen ? Approximativement galiléen ?
2. Définir précisément le référentiel barycentrique de ce système. Est-il galiléen ? Justifier.
3. Montrer que l'étude de ce système dans le référentiel barycentrique se ramène à l'étude d'une particule fictive de position \vec{r} et de masse μ , que l'on exprimera en fonction des données. Justifier que si $m_e \ll m_p$, le problème se réduit à l'étude du mouvement de l'électron autour d'un proton immobile situé en un point noté O. On se placera dans ce cas pour la suite, et l'on notera simplement $m_e = m$.
4. Montrer que le moment cinétique en O de cette particule se conserve, on le notera \vec{L} . En déduire que la trajectoire est plane, ainsi que la loi des aires de KEPLER.

5. Écrire explicitement l'énergie mécanique E du système en fonction \dot{r} , r , des données et de $L = |\vec{L}|$. On mettra cette énergie sous la forme suivante

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) . \quad (3.1)$$

Démontrer que cette dernière se conserve et commenter les différents types de trajectoires possibles en fonction de la valeur de l'énergie E .

6. À quelle(s) symétrie(s) du système sont associé(es) respectivement la conservation du moment cinétique et la conservation de l'énergie ?
7. On note \vec{P} l'impulsion de l'électron. on introduit le vecteur de RUNGE-LENZ :

$$\vec{A} = \vec{P} \wedge \vec{L} - \frac{me^2}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{r} . \quad (3.2)$$

Démontrer que ce vecteur se conserve au cours du temps. On introduira $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ pour plus de concision par la suite.

8. Calculer la valeur de la quantité scalaire $\vec{A} \cdot \vec{r}$. En déduire que l'on peut mettre r sous la forme d'une courbe paramétrée en polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} , \quad (3.3)$$

où θ est l'angle pris par rapport à un axe (Ox) que l'on définira. L'excentricité e et le paramètre de la conique p seront explicités à partir des données, de $A = |\vec{A}|$ et de L .

9. Commenter les différents types de trajectoire selon la valeur de e . Réaliser des schémas pour les différentes situations, en explicitant pour chaque cas les longueurs caractéristiques et en faisant bien apparaître le vecteur \vec{A} .
10. Expliciter $||\vec{A}||^2$ en fonction des données, de L et de l'énergie totale E . Puis en observant le lien entre e et E , montrer que la dernière question est cohérente avec la question 5.
11. Soit $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ un repère orthonormé direct du plan contenant le mouvement et dans lequel \vec{e}_x est aligné avec l'axe (Ox) défini précédemment. En projetant $\vec{L} \wedge \vec{A}$ sur \vec{e}_x et \vec{e}_y , déduire deux équations reliant p_x et p_y en fonction des données, de A , L et θ l'angle défini à la question 8. Montrer que si l'on représente la trajectoire dans un diagramme (p_x, p_y) (appelé hodographe), celle-ci parcourt un cercle dont on déterminera le rayon R et le centre C .
12. On considère des trajectoires elliptiques. Lorsque $p_y = 0$, exprimer les deux valeurs que peuvent prendre p_x en fonction de m et E . Montrer que l'expression de A^2 trouvée question 10. peut s'interpréter géométriquement sur l'hodographe comme un simple théorème de pythagore dans le triangle rectangle défini par C , $(p_x; p_y) = (0; 0)$ et un des deux points $(p_x; p_y) = (p_x; 0)$.
13. Prouver à partir des questions précédentes que l'on peut passer continûment d'une orbite électronique à une autre (de moment cinétique différent) tout en maintenant son énergie constante. Cette possibilité de transformer l'orbite de l'électron sans changer son énergie vient d'une symétrie subtile qui peut être relié à la conservation du vecteur de RUNGE-LENZ.

4 Approche quantique

Pour décrire la structure de l'atome d'hydrogène et notamment prédire les différentes raies spectrales en les associant à des transitions énergétiques d'une orbite à l'autre, BOHR propose de quantifier les valeurs que peut prendre le moment cinétique total de l'électron par la formule $L = n\hbar$ où $n \in \mathbb{N}^*$. On se place dans la suite dans le cas d'une trajectoire parfaitement circulaire, et on note v_n , r_n et E_n respectivement la norme de la vitesse, le rayon et l'énergie de l'électron pour une certaine valeur donnée de n .

1. Relier r_n et v_n par la définition de L .
2. Relier r_n et v_n par application du principe fondamental de la dynamique.
3. En déduire r_n et v_n en fonction de n . Puis déduire E_n . Effectuer l'application numérique pour $n = 1, 2$ et 3 .
4. Déduire plus rapidement l'expression de E_n en utilisant la relation entre l'excentricité e et l'énergie E de la question 10..
5. La stabilité de l'atome peut-elle être assurée par ce modèle simple ? Justifier.
6. Dans un modèle quantique plus élaboré de l'atome d'hydrogène, quel nombre quantique quantifie la valeur moyenne de l'observable moment cinétique \hat{L} ? Ce nombre a-t-il, comme dans le modèle de BOHR, une influence sur la valeur de l'énergie E_n du niveau dans lequel on se place ? Comprendre qualitativement ce fait en s'appuyant sur la question 13. de la dernière partie.

5 Théorème de Larmor

On plonge maintenant l'atome dans un champ magnétique dirigé selon un axe (Oz) , que l'on note \vec{B} .

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron en prenant en compte le champ magnétique, toujours par rapport à un référentiel \mathcal{R} galiléen.
2. Soit \mathcal{R}' un référentiel tournant autour de l'axe (Oz) avec une vitesse de rotation Ω par rapport à \mathcal{R} . Écrire le principe fondamental de la dynamique dans ce nouveau référentiel, puis choisir Ω de telle manière à ce que la dynamique de l'électron dans \mathcal{R}' ne dépende plus du champ \vec{B} . On notera cette vitesse Ω_L , vitesse de rotation de LARMOR. Calculer cette vitesse pour $\|\vec{B}\| = 1$ T.
3. En utilisant les résultats numériques de la partie précédente, comparer en ordre de grandeur les deux termes restants. En supprimant le terme négligeable, à quoi se réduit la dynamique de l'électron dans le référentiel de LARMOR ? Ce résultat constitue le théorème de LARMOR.
4. Supposons que l'électron possède une orbite bien définie dans le référentiel \mathcal{R} , quel sera l'effet du champ magnétique \vec{B} ?

On se place dans le cas d'une orbite circulaire de BOHR de rayon r_1 . Le moment cinétique \vec{L} de l'électron est dirigé selon la même direction et le même sens que \vec{B} . Lorsque qu'on moyenne le mouvement de l'électron sur plusieurs périodes, on peut considérer que l'on a affaire à une bobine de courant, ayant un certain moment magnétique \vec{m} . On admettra que ce dernier s'écrit $\vec{m} = -\frac{e}{2} \vec{r} \wedge \vec{v}$.

5. Calculer la variation d'aimantation $\Delta\vec{m} = \vec{m} - \vec{m}_0$ entre l'aimantation \vec{m} avec le champ magnétique et l'aimantation \vec{m}_0 que le système aurait si $\vec{B} = \vec{0}$.
6. Commenter l'orientation relative entre $\Delta\vec{m}$ et \vec{B} , puis calculer numériquement sa norme. Comment se nomme ce phénomène physique ?

Troisième partie

Extrait épreuve A 2019

6 Oscillateur harmonique

On considère un pendule élastique constitué d'un point matériel M de masse m astreint à se déplacer sur un axe horizontal (Ox) . L'axe (Ox) est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

L'origine des abscisses O constitue une extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 dont l'autre extrémité est fixée au point M . Initialement le point M est lâché sans vitesse initiale depuis un point d'abscisse $x_0 > l_0$. On considère que le mouvement de M sur l'axe (Ox) s'effectue sans aucun frottement.

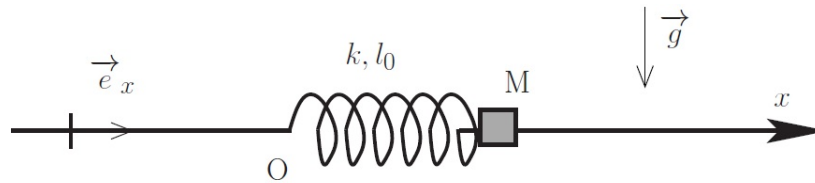


Fig. 1 – Pendule élastique horizontal

1. Montrer que l'équation du mouvement de M peut se mettre sous la forme

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 l_0, \quad (6.1)$$

où ω_0 s'exprimera en fonction de k et m .

2. Quelle(s) est (sont) la (les) force(s) qui travaille(nt) au cours du mouvement de M . Montrer qu'elle(s) dérive(nt) d'une énergie potentielle $E_p(x)$ qu'on exprimera en rappelant au préalable les propriétés générales d'une fonction énergie potentielle.
3. Tracer l'allure de cette fonction $E_p(x)$ et en déduire le domaine des valeurs de x accessibles au cours du mouvement.
4. Résoudre l'équation (6.1) et vérifier la compatibilité du résultat avec celui de la question précédente.
5. On généralise l'étude précédente dans le cas où le point M , toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal (Ox) est soumis à une résultante de forces qui dérive d'une énergie potentielle $E(x)$. On suppose qu'une position d'équilibre x_e existe pour M . Quelle propriété possède l'énergie potentielle en $x = x_e$? En étudiant les petits mouvements de M autour de sa position d'équilibre, obtenir une condition sur $\frac{d^2 E}{dx^2}(x_e)$ pour que cet équilibre soit stable. Que peut-on dire alors de $E(x)$ en x_e ?
6. Dans l'exemple du pendule élastique précédent, où est sa position d'équilibre? Est-elle stable ou instable?

7 Oscillateur anharmonique : stabilité, instabilité, métastabilité

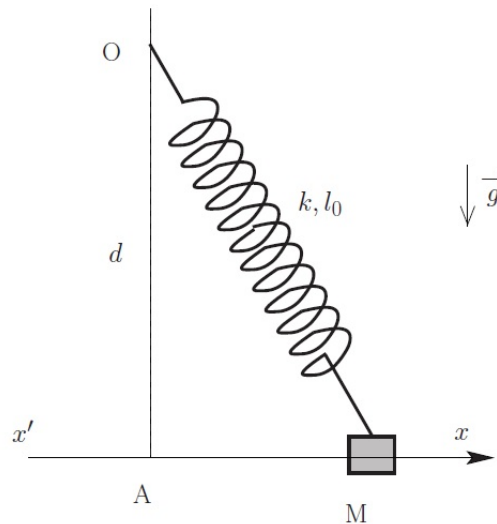
On considère la nouvelle configuration du pendule représentée (2). Le point M est toujours astreint à se déplacer sur l'axe horizontal $x'Ax$ en ne subissant aucun frottement. L'origine des x est prise en A . L'étude se fera dans le référentiel galiléen où l'axe Ax est fixe.

1. Montrer que la résultante des forces s'appliquant sur M dans le référentiel d'étude dérive d'une énergie potentielle $E'_p(x)$ qu'on calculera puis qu'on mettra sous la forme suivante ('a une constante près) :

$$E'_p(x) = \frac{1}{2} k l_0^2 \left(\sqrt{\alpha^2 + \left(\frac{x}{l_0} \right)^2} - 1 \right)^2, \quad (7.1)$$

où $\alpha = \frac{d}{l_0}$.

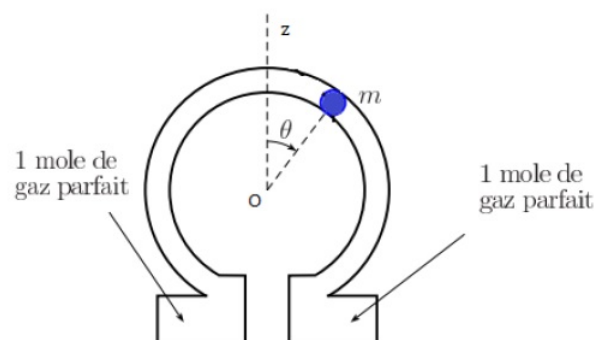
2. Préciser les positions d'équilibre dans les cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$.

**Fig. 2** – Oscillateur anharmonique

3. Tracer, dans chacun des cas $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$, l'allure de la fonction $E'_p(x)$. Qu'en déduire quant à la stabilité des différentes positions d'équilibre ?
4. On considère le cas $\alpha > 1$. Déterminer l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable(s). Montrer que ce mouvement se ramène à celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la période T_{sup} en fonction de k , m et α .
5. On considère le cas $\alpha < 1$. Déterminer l'équation des petits mouvements autour de la (les) position(s) d'équilibre stable(s). Montrer que ce mouvement se ramène à celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la période T_{inf} en fonction de k , m et α .
6. Interpréter brièvement la valeur obtenue pour T_{inf} quand $\alpha = 0$. Proposer aussi une explication physique pour les valeurs obtenues pour T_{sup} et T_{inf} quand $\alpha \rightarrow 0$.

Quatrième partie

Étude d'une bifurcation (Extrait épreuve C 2016)

**Fig. 3** – Modèle mécanique de bifurcation

Nous étudions le système décrit Figure 3 : un tube en forme de Ω dont la partie circulaire est

de centre O et de rayon L , contenant deux compartiments d'une mole de gaz parfait chacun à la température T et placé dans un champ de pesanteur uniforme vertical selon l'axe (Oz) : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. L'aire de la section du tube est \mathcal{A} , et lorsque la masse m est positionnée en $\theta = 0$, le volume du gaz dans les deux parties droite et gauche est égal à V_0 . On définira les coordonnées polaires (r, θ) par rapport au centre O et l'angle θ est défini par rapport à l'axe (Oz) comme sur la figure 3. On note $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ la base associée. On admettra que $\mathcal{A}L/V_0 \ll A$.

1. Démontrer que lorsque la masse possède un angle θ , elle est soumise à une force de la forme $\vec{F} = -aT\theta\vec{u}_\theta$ où l'on déterminera l'expression de a en fonction des données du problème.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse. En déduire une équation différentielle sur θ .
3. Proposer une méthode graphique pour rechercher les valeurs des positions d'équilibres θ_0 du système. Déterminer la température critique au-delà de laquelle nous avons $\theta_0 = 0$ nécessairement.
4. Prouver que le comportement de $\theta_0(T)$ suit, juste en dessous de la température critique, le comportement suivant :

$$\theta_0(T) = A|T - T_c|^\beta, \quad (7.2)$$

pour $T \rightarrow T_c^-$. On explicitera β et A .

5. Représenter $\theta_0(T)$ en fonction de la température. Étudier la stabilité de chaque branche.
6. On ajoute une force constante $\vec{F}_h = h\vec{u}_\theta$, avec $h \ll mg$. On se restreint aux cas où $\theta > 0$. On note $\theta_h = \theta_0 + \Delta\theta$ la nouvelle position d'équilibre, déplacement de la position d'équilibre à $h = 0$ d'une petite valeur $\Delta\theta$. Représenter qualitativement θ_h en fonction de la température.
7. Calculer la susceptibilité mécanique $\chi = \left. \frac{\partial \theta_h}{\partial h} \right|_{h=0}$ pour $T \rightarrow T_c^-$ et $T \rightarrow T_c^+$. Les mettre sous la forme $\chi \propto |T - T_c|^{-\gamma}$ où l'on déterminera γ . Tracer χ en fonction de la température.
8. On se place maintenant sur l'isotherme critique $T = T_c$. Montrer que $\theta_h \propto h^{1/\delta}$ où l'on déterminera δ .

Cinquième partie

Mécanique du solide

8 Préliminaire

1. Soit un référentiel \mathcal{R} , dont le repère spatial associé est (O, x, y, z) , ainsi qu'un autre référentiel \mathcal{R}' , de repère spatial associé (O', x', y', z') en rotation par rapport au premier avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$. Soit \vec{A} un vecteur quelconque dépendant du temps. Relier $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$ et $\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$.
2. Définir le référentiel barycentrique d'un solide constitué d'un ensemble de point matériel $\{A_i; m_i\}_i$. Montrer que dans ce référentiel le moment cinétique de l'ensemble ne dépend pas du point par rapport auquel il est pris et rappeler les deux théorèmes de Kœnig.
3. Ce solide est en rotation autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire ω . Écrire son énergie totale ainsi que son moment cinétique, et les relier au moment d'inertie J_Δ que l'on définira.
4. Ce solide a maintenant une rotation quelconque autour d'un point fixe C caractérisé par un vecteur rotation instantané $\vec{\omega}$. Définir ce qu'est une matrice d'inertie, les axes principaux d'inertie et les moments principaux d'inertie.

9 Mouvement d'un solide dans le vide

Nous considérons tout d'abord un solide isolé. On se place dans un référentiel supposé galiléen auquel est attaché un repère fixe $(G; x, y, z)$. On considère un deuxième référentiel décrit par le repère $(G; X, Y, Z)$ attaché au solide dont les axes coïncident avec ses axes principaux d'inertie. On note $\vec{\omega}$ le vecteur rotation instantané du solide. On note les moments principaux d'inertie I_X , I_Y et I_Z respectivement par rapport à (GX) , (GY) et (GZ) .

1. Appliquer le théorème du moment cinétique au solide.
2. En déduire trois équations différentielles couplées pour ω_X , ω_Y et ω_Z . Elles mettront en jeu les moments d'inertie principaux.
3. On suppose maintenant que le solide est une toupie possédant une symétrie de révolution par rapport à OZ . Quels seront les moments d'inertie principaux égaux ? On les notera simplement I , tandis que le moment d'inertie restant sera noté I' . En déduire que ω_Z est constant.
4. Résoudre explicitement les équations précédentes, et montrer que le vecteur $\vec{\omega}$ a un mouvement de précession autour de l'axe (OZ) à la pulsation $\Omega = \frac{I - I'}{I} \omega_Z$.

10 Mouvement d'une toupie déséquilibrée

Nous souhaitons maintenant décrire le mouvement d'une toupie de symétrie de révolution touchant le sol en un point noté O . On note (Oz') l'axe de symétrie de révolution de la toupie. Cette toupie est plongée dans un champ de pesanteur et subie l'action mécanique $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$, \vec{e}_z un vecteur unitaire ascendant de l'axe vertical (Oz) . On notera θ l'angle entre (Oz) et (Oz') .

Pour décrire ce problème, nous introduirons les angles d'EULER définis ainsi :

- ▷ Nous partons d'un repère orthonormé $\mathbf{R} = (O; x; y; z)$. Par une rotation d'angle ψ et d'axe (Oz) , nous passons au repère $(O; u; v; z)$.
 - ▷ Par une rotation d'angle θ et d'axe (Ou) , nous passons de $(O; u; v; z)$ à $(O; u; w; z')$.
 - ▷ Par une rotation d'angle ϕ et d'axe (Oz') , nous passons de $(O; u; w; z')$ à $\mathbf{R}' = (O; x'; y'; z')$.
1. Dessiner un ou plusieurs schémas soignés présentant les angles d'EULER, ainsi que les différents repères.
 2. Écrire l'expression de la vitesse de rotation du repère \mathbf{R}' par rapport à \mathbf{R} noté $\vec{\Omega}_{\mathbf{R}'/\mathbf{R}}$ en fonction des vecteurs unitaires \vec{e}_z , \vec{e}_u et $\vec{e}_{z'}$.
 3. Démontrer que dans la base \mathbf{R}' , nous avons :

$$\vec{\Omega}_{\mathbf{R}'/\mathbf{R}} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \vec{e}_{x'} + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) \vec{e}_{y'} + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{e}_{z'}. \quad (10.1)$$

4. En appliquant cette description au problème, l'axe (Oz') du repère \mathbf{R}' coïncide avec l'axe de symétrie de révolution de la toupie, tandis que l'axe (Oz) coïncide avec la verticale aligné sur le champ de pesanteur. \mathbf{R} est un repère d'un référentiel considéré galiléen. Justifier que la matrice d'inertie $[I]$ est une matrice diagonale, d'éléments diagonaux $(I, I, I_{z'})$ dans la base $(\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'})$ dans \mathbf{R}' . Expliquer en quoi cette expression sera en fait toujours valable dans le repère intermédiaire $(O; u; w; z')$ que l'on notera \mathbf{R}_i .
5. Exprimer d'une part la vitesse de rotation de \mathbf{R}_i par rapport à \mathbf{R} , $\vec{\Omega}_{\mathbf{R}_i/\mathbf{R}}$, exprimé dans la base du repère \mathbf{R}_i , et d'autre part le vecteur rotation instantané $\vec{\omega}$ du solide dans cette même.
6. On note ℓ la distance entre O et le centre de gravité de la toupie noté G . Par application du théorème du moment cinétique à ce système puis par changement de référentiel de \mathbf{R} à \mathbf{R}_i montrer que la dynamique de ce système est décrite par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
0 &= I\ddot{\theta} + (I_{z'} - I)\dot{\psi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_{z'}\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta - \ell m g \sin \theta, \\
0 &= I\ddot{\psi} + (2I - I_{z'})\dot{\theta}\dot{\psi} \cos \theta - I_{z'}\dot{\theta}\dot{\phi}, \\
0 &= \ddot{\psi} \cos \theta - \dot{\theta}\dot{\psi} \sin \theta + \ddot{\phi}.
\end{aligned}$$

7. Ce système est très complexe à résoudre en général. Nous pouvons néanmoins faire une approximation, dite gyroscopique, si nous considérons la vitesse de rotation $\dot{\phi}$ très supérieure à $\dot{\psi}$ et à $\dot{\theta}$ (cas particulier de l'approximation gyroscopique). Ceci se produit par exemple si nous lançons la toupie très vite. Simplifier les équations ci-dessus en vous plaçant dans ce cas et les résoudre. Montrer qu'il s'agit d'un mouvement de précession dont on déterminera la pulsation Ω .
8. Nous cherchons à obtenir ce même résultat de manière plus rapide. Pour cela nous faisons directement l'hypothèse que le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est aligné sur l'axe (Oz') : $\vec{\omega} = \dot{\phi}\vec{e}_{z'}$. Appliquer le théorème du moment cinétique au système et démontrer que :

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} \right|_{\mathbf{R}} = \gamma \vec{e}_z \wedge \vec{\sigma}_O, \quad (10.2)$$

où le facteur γ sera à expliciter.

9. Démontrer que $\|\vec{\sigma}_O\|$ et $\vec{\sigma}_O \cdot \vec{e}_z$ se conserve dans le temps.
10. Par une formule de changement de référentiel de \mathbf{R} à \mathbf{R}_i , démontrer que le mouvement est exactement équivalent à celui trouvé à la question (7.).
11. On considère une toupie cylindrique avec une base de rayon $r = 5$ cm et une hauteur $h = 10$ cm, tournant à $\dot{\phi} = 20$ tr.s⁻¹. Déterminer la période de précession d'un tel solide.
12. En quoi ce modèle permet de comprendre la précession des équinoxes de la terre ?

★ FIN DU DEVOIR ★