

Première partie

Établissement de l'équation de Navier-Stokes

1 Description d'un fluide

1.1 Le modèle du fluide continu

1. L'échelle mésoscopique δ est une échelle intermédiaire entre l'échelle moléculaire (0,1 nm) et l'échelle macroscopique (1 m), telle qu'un volume δ^3 de fluide contienne suffisamment de molécules pour pouvoir définir des grandeurs moyennes statistiques, avec des fluctuations négligeables¹; dans les conditions usuelles, δ de l'ordre du micromètre convient. On appelle alors particule de fluide un élément de volume δ^3 .
2. Pour que cette démarche soit valable, il est nécessaire que la taille d'une particule de fluide soit supérieure au libre parcours moyen pour qu'une molécule ne puisse pas traverser la particule de fluide sans avoir de choc. A fortiori, le libre parcours moyen doit être très inférieur à l'échelle macroscopique du problème. Dans les conditions usuelles on a $l^* \approx 0,1 \mu\text{m}$ dans les gaz et $l^* \approx 0,1 \text{ nm}$ dans les liquides, ce qui permet de prendre $\delta \approx 1 \mu\text{m}$. L'approximation des milieux continus peut être prise en défaut dans les gaz raréfiés : par exemple la loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \vec{\text{grad}} T$ est prise en défaut dans le "vide" existant entre les deux vitres d'un double-vitrage.

1.2 Approches lagrangienne et eulérienne

3. Dans la méthode lagrangienne, on découpe le fluide en particules de fluide à $t = 0$ et on suit ensuite chacune des particules de fluide au cours de son mouvement. Cette méthode est cohérente avec les principes de la mécanique car on isole un système fermé. En revanche elle ne permet pas aisément de traduire les conditions aux limites imposées par un obstacle fixe car à chaque instant c'est une particule de fluide différente qui se trouve sur l'obstacle.
4. Dans la méthode eulérienne, on découpe le fluide en particules de fluide à chaque instant t et on affecte au point M à l'instant t la grandeur attachée à la particule de fluide qui passe en M à l'instant t . Ainsi, la vitesse $\vec{v}(M, t)$ est la vitesse de la particule de fluide qui passe en M à l'instant t . Cette méthode a l'avantage de permettre de traduire aisément une condition aux limites sur un obstacle fixe ; en revanche, elle est contradictoire avec les lois de la mécanique car elle ne permet pas de suivre un système fermé.

1. Rappelons que la fluctuation relative dans un échantillon contenant N molécules est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

5. On appelle dérivée particulaire d'un champ eulérien $G(M, t)$ la limite de son taux d'accroissement lorsque dt tend vers zéro, calculé en suivant la particule fluide qui passe en M à l'instant t . On montre alors que :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) G \quad (1.1)$$

où la dérivée locale $\partial G/\partial t$ rend compte des variations de G pour une particule de fluide qui resterait en M alors que la dérivée convective $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) G$ rend compte des variations de G dues au fait que la particule de fluide se déplace dans un champ G inhomogène. Un écoulement est stationnaire si tous ses champs eulériens sont indépendants du temps : un observateur fixe en M voit alors une situation inchangée au cours du temps, les particules de fluide passant en M avec la même grandeur G au cours du temps. La facilité à traduire le caractère stationnaire d'un écoulement est un autre avantage de la méthode eulérienne sur la méthode lagrangienne. Dans un écoulement tel que $\vec{v} = \alpha x \vec{u}_x$, une particule de fluide qui part de $x = a$ avec la vitesse αa possède quand elle passe en $x = 2a$ une vitesse $2\alpha a$ deux fois plus grande : elle est donc accélérée, bien que l'écoulement soit stationnaire.

6. On écrit simplement

$$\frac{DT}{Dt} = (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T) = \alpha v \quad (1.2)$$

donc $T(t) = \alpha v(t - t_f) + T_0$.

7. ▷ On appelle trajectoire d'une particule de fluide le lieu de ses positions successives au cours du temps : c'est un concept lagrangien. On visualise une trajectoire partie d'un point M_0 en plaçant en M_0 à $t = 0$ un marqueur et en faisant une photographie avec un temps de pose long.
- ▷ On appelle ligne de courant d'un écoulement à un instant t une ligne de champ du champ eulérien des vitesses, c'est-à-dire une courbe tangente en tous ses points au champ des vitesses. On visualise les lignes de courant d'un écoulement en dispersant à un instant t des marqueurs dans tout le fluide et en faisant une photographie avec un temps de pose court dt . Alors un marqueur issu de M se déplace de $dM = v(M, t)dt$ et trace sur la photographie un petit segment dM ; l'ensemble de ces petits segments reconstitue alors les lignes de courant².
- ▷ On appelle ligne d'émission à l'instant t le lieu des positions à l'instant t des particules de fluide qui sont parties d'un même point M_0 fixe entre les instants t_0 et t . On les visualise en injectant continûment en M_0 fixe un colorant et en observant la ligne colorée obtenue à l'instant t . Les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission coïncident pour un écoulement stationnaire.

1.3 Équation de conservation de la masse

8. Considérons un élément de surface fixe orienté $d\vec{S}$ au voisinage d'un point M où le champ des vitesses vaut $\vec{v}(M, t)$. Pendant dt , le fluide se déplace de $\vec{v}(M, t)dt$ donc le fluide qui traverse $d\vec{S}$ pendant dt est contenu dans le cylindre oblique de base $d\vec{S}$ et de génératrice $\vec{v}(M, t)dt$, donc de volume $d\vec{S} \cdot \vec{v}dt$. Le volume et la masse de fluide qui traversent $d\vec{S}$ pendant dt valent donc :

$$\delta^2 V = \vec{v} \cdot d\vec{S}dt \quad \text{et} \quad \delta^2 m = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}dt \quad (1.3)$$

Par sommation sur un découpage de la surface \mathcal{S} on obtient en divisant par dt le débit volumique et le débit massique :

$$D_V = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad \text{et} \quad D_m = \iint_{\mathcal{S}} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.4)$$

2. Sauf lorsque l'écoulement est turbulent car dans ce cas, les fluctuations spatiales du champ des vitesses ont une échelle caractéristique de variation trop petite et tout se brouille.

Considérons un volume fixe \mathcal{V} limité par une surface fermée Σ . La masse qui entre dans \mathcal{V} par un élément de surface $d\vec{S}_{\text{ext}}$ vaut par définition du vecteur densité de flux de masse $\vec{j} = \rho \vec{v}$:

$$\delta^2 m_e = -\vec{j} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} dt \quad (1.5)$$

où le signe moins vient du fait que le vecteur-surface est orienté vers l'extérieur. Par sommation on obtient la masse totale qui entre. La variation de la masse d'un élément de volume $d\tau$ centré en un point M fixe³ s'écrit :

$$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

9. En régime stationnaire, l'équation se simplifie en $\text{div } \vec{j} = 0$ de telle sorte que le vecteur \vec{j} est à flux conservatif. En particulier, son flux, c'est-à-dire le débit massique, se conserve dans un tube de courant⁴.

10. L'équation de conservation de la masse s'écrit aussi :

$$0 = \text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \text{div } \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.11)$$

En regroupant les deux derniers termes, on voit apparaître la dérivée particulaire de la masse volumique :

$$\rho \text{div } \vec{v} + \frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad \text{soit} \quad \text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad (1.12)$$

On dit qu'un écoulement est incompressible si toutes les particules de fluide conservent leur volume au cours de leur mouvement. Comme elles conservent aussi leur masse (système fermé), l'écoulement est incompressible si les particules de fluide conservent leur masse volumique. Ceci s'écrit par définition de la dérivée particulaire : $\frac{D\rho}{Dt} = 0$, c'est-à-dire :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad (1.13)$$

en utilisant l'équation de conservation de la masse sous la forme établie en début de question. On dit qu'un fluide est incompressible si ses particules de fluide ne peuvent pas changer de volume (ce qui signifie que le coefficient de compressibilité isentropique χ_S est nul). L'écoulement d'un fluide compressible peut être incompressible : dans ce cas, le volume des particules de fluide

3. La fixité du volume d'étude intervient deux fois dans la démonstration : une fois pour évaluer le débit massique et :

$$d^2 m = \rho(M, t + dt) d\tau - \rho(M, t) d\tau = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau \quad (1.6)$$

D'où par sommation la variation de la masse de \mathcal{V} :

$$dm = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dt d\tau = dt \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau \quad (1.7)$$

Le postulat de conservation de la masse impose que la variation de la masse de \mathcal{V} est due à la masse qui y est entrée :

$$dm = \delta m_e \quad \text{soit} \quad dt \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -dt \oint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} \quad (1.8)$$

En simplifiant par dt et en utilisant le théorème d'OSTROGRADSKI, il vient :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{j} d\tau \quad (1.9)$$

En faisant tendre le volume \mathcal{V} vers zéro au voisinage d'un point M , on obtient alors l'équation de conservation de la masse.

4. Signalons ici la nécessité d'avoir un vocabulaire précis : dire que le débit massique est « constant » ne dit pas par rapport à quelle variable il ne varie pas. En particulier, si « constant » fait référence à l'indépendance par rapport au temps, tout est constant en régime stationnaire.

est susceptible de varier (fluide compressible) mais la structure du champ des vitesses fait qu'il ne varie pas (écoulement incompressible). Pour un tube de courant dont la section décroît, en intégrant l'équation 1.13 sur le volume \mathcal{V} puis en utilisant le théorème d'OSTROGRADSKI, on obtient :

$$\oint_{\Sigma} \vec{v} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = 0 \quad (1.14)$$

On en conclut alors la conservation du produit $\|\vec{v}\|S$, donc lorsque la section décroît, $\|\vec{v}\|$ augmente.

11. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE dans le vide multipliée par \vec{E} donne

$$\vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.15)$$

On utilise l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \text{rot} \vec{E} \cdot \vec{B} - \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot} \vec{B} \cdot \vec{E} \quad (1.16)$$

On trouve alors :

$$\frac{1}{\mu_0} \text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (1.17)$$

En posant $u_{\text{em}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$ et $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$, on obtient :

$$\text{div} \vec{\Pi} + \frac{\partial u_{\text{em}}}{\partial t} = 0 \quad (1.18)$$

En considérant un volume \mathcal{V} délimité par une surface fermée Σ , on intègre sur ce volume \mathcal{V} puis en utilisant le théorème d'OSTROGRADSKI, on obtient l'équation macroscopique de conservation de l'énergie électromagnétique :

$$\oint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} + \frac{dE_{\text{em}}}{dt} = 0 \quad (1.19)$$

où $E_{\text{em}}(t)$ est l'énergie électromagnétique comprise dans le volume \mathcal{V} à l'instant t . Le vecteur $\vec{\Pi}$ caractérise le transport de l'énergie électromagnétique. Par exemple, il permet de définir le rayon lumineux. Il permet de quantifier la puissance électromagnétique transmise par unité de surface.

12. L'équation de conservation de la chaleur est analogue aux équations de conservation précédentes :

$$\text{div} \vec{j}_Q + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.20)$$

2 Mouvements et déformations des particules de fluide

2.1 Vecteur tourbillon

13. Le champ des vitesses $\vec{w} = \vec{v}_0 + \vec{v}_3$ s'écrit :

$$\vec{w}(M) = \begin{pmatrix} v_x(0,0) \\ v_y(0,0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e_{xy} - e_{yx}) y \\ (e_{yx} - e_{xy}) x \end{pmatrix} = \vec{w}(O) + \frac{1}{2} (e_{yx} - e_{xy}) \vec{u}_z \wedge \overrightarrow{OM} \quad (2.1)$$

ce qui s'identifie à la formule de VARIGNON donnant le champ des vitesses d'un solide :

$$\vec{w}(M) = \vec{w}(O) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} \quad (2.2)$$

avec un vecteur-rotation :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} (e_{yx} - e_{xy}) \vec{u}_z = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \quad (2.3)$$

14. Ainsi le vecteur-tourbillon $\vec{\Omega}$ décrit la rotation des particules de fluide au voisinage de chaque point⁵. Un écoulement est tourbillonnaire si $\vec{\Omega}$ n'est pas identiquement nul. L'écoulement $\vec{v} = \alpha y \vec{u}_x$ est tourbillonnaire car $\text{rot} \vec{v} = -\alpha \vec{u}_z \neq \vec{0}$ et ses lignes de champ sont rectilignes. Un écoulement est irrotationnel si $\vec{\Omega}$ est identiquement nul. L'écoulement $\vec{v} = (C/2\pi r) \vec{u}_\theta$ est irrotationnel à l'extérieur d'un cylindre de rayon a et d'axe Oz ; ses lignes de champ sont des cercles d'axe Oz ⁶.

2.2 Variation de volume

15. Avec $\vec{v}_1 = e_{xx}x \vec{u}_x + e_{yy}y \vec{u}_y$, le point O a une vitesse nulle de telle sorte que $O' = O$. Les nouvelles positions A' , B' , C' des points $A(a, 0)$, $B(a, a)$ et $C(0, a)$ sont telles que :

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{v}(A)dt = \begin{vmatrix} e_{xx}adt \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

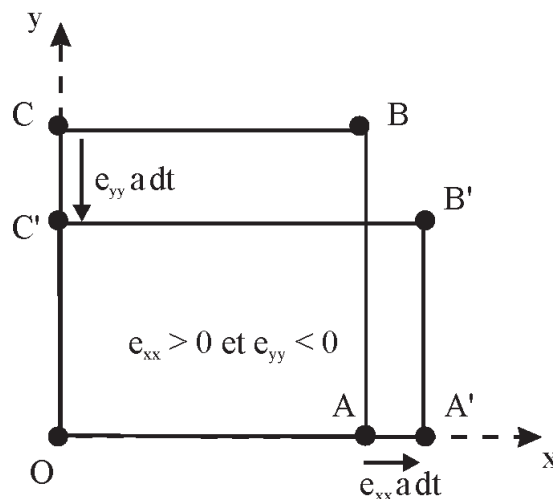
$$\overrightarrow{BB'} = \vec{v}(B)dt = \begin{vmatrix} e_{xx}adt \\ e_{yy}adt \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$\overrightarrow{CC'} = \vec{v}(C)dt = \begin{vmatrix} 0 \\ e_{yy}adt \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

D'où le nouveau volume de la particule de fluide en limitant les calculs à l'ordre un en dt :

$$V' = a'b'c' = a^3(1 + e_{xx}dt)(1 + e_{yy}dt) \approx a^3(1 + (e_{xx} + e_{yy})dt) \quad (2.7)$$

On en déduit la variation relative de volume de la particule de fluide :



$$\frac{V' - V}{V} = (e_{xx} + e_{yy})dt = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) dt \quad \text{soit} \quad \frac{V' - V}{V} = \text{div} \vec{v}_1 dt \quad (2.8)$$

Ainsi la divergence du champ des vitesses est proportionnelle au taux de variation relative du volume de la particule de fluide. Ceci est cohérent avec le critère d'incompressibilité établi en 1.13 : si $\text{div} \vec{v}_1 = 0$, alors le volume des particules de fluide ne varie pas.

5. À la différence d'un solide toutefois, le vecteur $\vec{\Omega}$ d'un fluide dépend du point : c'est un concept local.

6. Dans ce cas, les particules de fluide sont en translation circulaire.

2.3 Déformation de pincement

16. En posant $\alpha = (e_{xy} + e_{yx})/2$ on a $\vec{v}_2 = \alpha y \vec{u}_x + \alpha x \vec{u}_y$. Le vecteur-vitesse en O est nul donc $O' = O$. Les nouvelles positions A' , B' , C' des points $A(a, 0)$, $B(a, a)$ et $C(0, a)$ sont telles que :

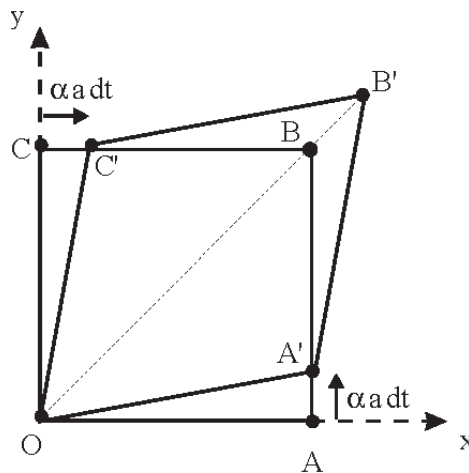
$$\overrightarrow{AA'} = \vec{v}(A)dt = \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha a dt \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

$$\overrightarrow{BB'} = \vec{v}(B)dt = \begin{vmatrix} \alpha a dt \\ \alpha a dt \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

$$\overrightarrow{CC'} = \vec{v}(C)dt = \begin{vmatrix} \alpha a dt \\ 0 \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

D'où la figure ci-dessus où il est clair que le volume de la particule de fluide se conserve par compensation, ce qui est cohérent avec le fait que $\text{div} \vec{v}_2 = 0$. Par ailleurs la direction de la diagonale de la particule de fluide reste inchangée : la particule de fluide ne tourne pas, ce qui est cohérent avec $\text{rot} \vec{v}_2 = \vec{0}$.

En définitive, le développement local du champ des vitesses fait apparaître dans le cas le plus



général une translation décrite par $\vec{v}(O)$, une rotation décrite par le vecteur-tourbillon $\vec{\Omega} = (1/2)\text{rot} \vec{v}(O)$, c'est-à-dire par la partie antisymétrique du tenseur des taux de déformation et une déformation décrite par la partie symétrique du tenseur des taux de déformation. Cette déformation peut s'accompagner ou non d'une variation de volume selon que $\text{div} \vec{v}$ est nulle ou non-nulle.

3 Viscosité dans un fluide

3.1 Définition

17. Soit un écoulement de la forme $\vec{v} = v(y, t) \vec{u}_x$. On considère un élément de surface $dS = dx dz$ d'ordonnée y . Les forces exercées par le fluide situé au dessus de z sur le fluide situé en dessous obéissent à : $d\vec{F}_t = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{u}_x dS$

18. Cette loi phénoménologique est analogue aux lois de FICK et FOURIER :

$$\vec{j}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \quad \text{et} \quad \vec{j}_Q = -K \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (3.1)$$

Cette loi caractérise la réponse linéaire d'un système soumis à une hétérogénéité. Il se produit un phénomène de transport. Pour la viscosité, il s'agit d'un transport de quantité de mouvement des zones où le fluide est rapide vers les zones où le fluide s'écoule plus lentement.

3.2 Fluide non-newtonien

19. Un fluide est dit non-newtonien lorsque le tenseur des contraintes visqueuses n'est pas une fonction linéaire du tenseur des déformations ; autrement dit, lorsque sa vitesse de déformation (ou taux de cisaillement) n'est pas directement proportionnelle à la force qu'on lui applique. Le dentifrice est un exemple de fluide non-newtonien : il existe un seuil de contrainte en dessous duquel le fluide ne s'écoule pas. Le mélange eau/fécule de maïs est un autre exemple de fluide non-newtonien (rhéoépaississant)
20. On peut prendre de nombreux exemples de fluide non-newtoniens :
- ▷ les solutions de polymères sont rhéofluidifiantes : on interprète cette diminution de viscosité par la séparation puis l'alignement progressif de macromolécules enchevêtrées pendant l'écoulement.
 - ▷ les suspensions colloïdales sont pour la plupart rhéofluidifiantes : on peut citer par exemple le sang (suspension de cellules dans le plasma), la peinture (suspension de pigments dans l'eau), la boue (suspension de particules de terre ou d'argile dans l'eau), etc. La diminution de viscosité provient de la destruction des structures de particules solides qui se sont formées (agrégats), et également, si les particules ne sont pas sphériques, de l'orientation de ces particules dans le sens de l'écoulement.
 - ▷ les émulsions (lait, vinaigrette, mayonnaise, etc.) sont également rhéofluidifiantes : les gouttelettes se déforment sous l'effet de l'écoulement et deviennent elliptiques.
 - ▷ le mélange eau/fécule de maïs occupe une place particulière : bien qu'il s'agisse d'une suspension, il est clairement rhéoépaissant. Dans des proportions idoines, l'encombrement stérique des particules de la suspension s'oppose d'autant plus au cisaillement que celui-ci est élevé.
21. Les sables mouvants, le mucus de l'escargot, le sperme, le yaourt, la mousse à raser, etc. sont des fluides thixotropes. Pour la plupart, il s'agit de suspensions colloïdales. Si beaucoup de fluides thixotropes sont rhéofluidifiants, les deux notions ne sont pas équivalentes : la thixotropie correspond à la diminution de viscosité avec le temps à contrainte fixée alors que la rhéofluidification correspond à la diminution de viscosité avec la contrainte.

3.3 Force volumique de viscosité

22. On considère une particule de fluide assimilée à un pavé de volume $d\tau = dx dy dz$ et on cherche la force volumique de viscosité :

$$d\vec{F}_v = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} (y + dy) \vec{u}_x dS - \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} (y) \vec{u}_x dS = \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy \right) \vec{u}_x dx dz = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \vec{u}_x d\tau \quad (3.2)$$

23. La viscosité est liée au fait que la quantité de mouvement des molécules se transfère lors des chocs microscopiques.
24. $\eta_{air} \approx 10^{-5} \text{ Pl}$, $\eta_{eau} \approx 10^{-3} \text{ Pl}$ et $\eta_{gly} \approx 1 \text{ Pl}$.

Deuxième partie

Nombre de Reynolds

4 Définition

25. Le nombre de REYNOLDS est défini comme le rapport en ordre de grandeur du terme convectif de l'équation de NAVIER-STOKES sur le terme diffusif :

$$\mathcal{Re} = \frac{\|\rho (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}\|}{\|\eta \vec{\Delta} \vec{v}\|} \approx \frac{\rho V^2 / L}{\eta V / L^2} \quad \text{soit} \quad \mathcal{Re} = \frac{\rho V L}{\eta} = \frac{V L}{\nu} \quad (4.1)$$

26. ▷ Dans le cas d'une voiture sur l'autoroute, on peut prendre $L = 1 \text{ m}$, $U = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu = 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ de sorte que $\mathcal{Re} = 10^6$.
 ▷ Pour un nageur aux Jeux Olympiques, $L = 1 \text{ m}$, $U = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ d'où $\mathcal{Re} = 10^6$.
 ▷ Pour une miette de pain tombée dans un pot de miel, $L = 10^{-3} \text{ m}$, $U = 1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ donc $\mathcal{Re} = 10^{-3}$.
27. Nous vivons dans un monde à grand nombre de REYNOLDS ce qui n'est pas mathématiquement confortable car l'équation de NAVIER-STOKES est non linéaire (dans ce cas le terme $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$ est non négligeable). Les écoulements à bas REYNOLDS sont bien plus faciles à appréhender car l'équation de NAVIER-STOKES se simplifie en une équation linéaire.
28. Si $\mathcal{Re} \ll 1$ on peut négliger le terme convectif de l'équation de NAVIER-STOKES. En négligeant les termes de pression et de forces volumiques, l'équation devient :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \eta \vec{\Delta} \vec{v} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \nu \vec{\Delta} \vec{v} \quad (4.2)$$

ce qui est bien une équation de diffusion, dont le coefficient de diffusion est la viscosité cinématique ν .

On peut alors comparer le temps $\tau_{\text{diff}} = L^2 / \nu$ nécessaire pour que la diffusion de quantité de mouvement soit efficace sur une échelle spatiale L et le temps $\tau_{\text{conv}} = L / V$ nécessaire pour transporter de la quantité de mouvement par convection à vitesse V sur la même distance L :

$$\frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}} \approx \frac{L^2 / \nu}{L / V} \quad \text{soit} \quad \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}} = \mathcal{Re} \quad (4.3)$$

5 Nombre de Reynolds et traînée d'un solide

5.1 Traînée d'une sphère

29. La traînée a pour expression :

$$F_t = 6\pi\eta R V \quad \text{pour} \quad \mathcal{Re} < 1 \quad (5.1)$$

$$F_t = C \rho \pi \eta R^2 V^2 \quad \text{pour} \quad \mathcal{Re} > 10^3 \quad (5.2)$$

Le graphe 1 donnant le coefficient de traînée en fonction du nombre de REYNOLDS en échelle log-log rend compte de ce comportement ⁷.

30. On constate que pour \mathcal{Re} faible, la carte de champ est comme sur la figure 2. La vitesse est

7. Une erreur classique consiste à croire que la traînée quadratique d'un écoulement turbulent ne faisant pas apparaître la viscosité, celle-ci joue un rôle négligeable : si ceci est vrai loin de l'obstacle, il n'en est rien dans le sillage et dans la couche limite où elle joue au contraire un rôle essentiel. Le nombre de REYNOLDS global ne rend pas compte dans ce cas du poids des termes diffusifs par rapport aux termes convectifs dans l'équation de NAVIER-STOKES car l'échelle caractéristique des variations spatiales du champ des vitesses ne vaut L que dans l'écoulement externe ; dans la couche limite et dans le sillage, cette échelle est beaucoup plus faible et il faudrait introduire un nombre de REYNOLDS local qui serait lui très faible, validant le fait que les termes diffusifs sont dominants dans la couche limite et dans le sillage.

Autre erreur classique : croire que la traînée quadratique s'applique pour l'écoulement d'un fluide parfait (hélium superfluide à $T = 0 \text{ K}$) car dans ce cas le nombre de REYNOLDS est strictement infini puisque la viscosité est strictement nulle. En fait dans ce cas il n'y a ni sillage ni couche limite et la traînée est nulle. Ceci dit ce cas n'est pas réaliste car pour $T \neq 0 \text{ K}$ il y a toujours une composante visqueuse dans l'hélium.

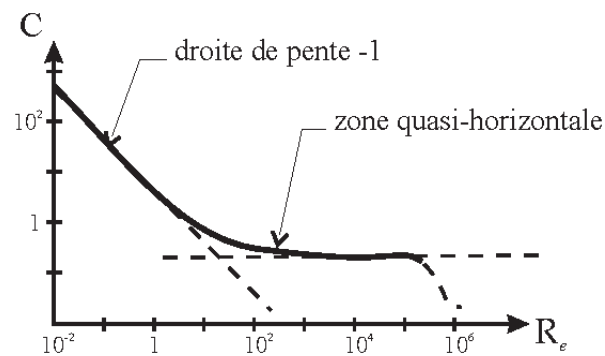


Fig. 1 – Évolution de la traînée d'une sphère en fonction du nombre de REYNOLDS.

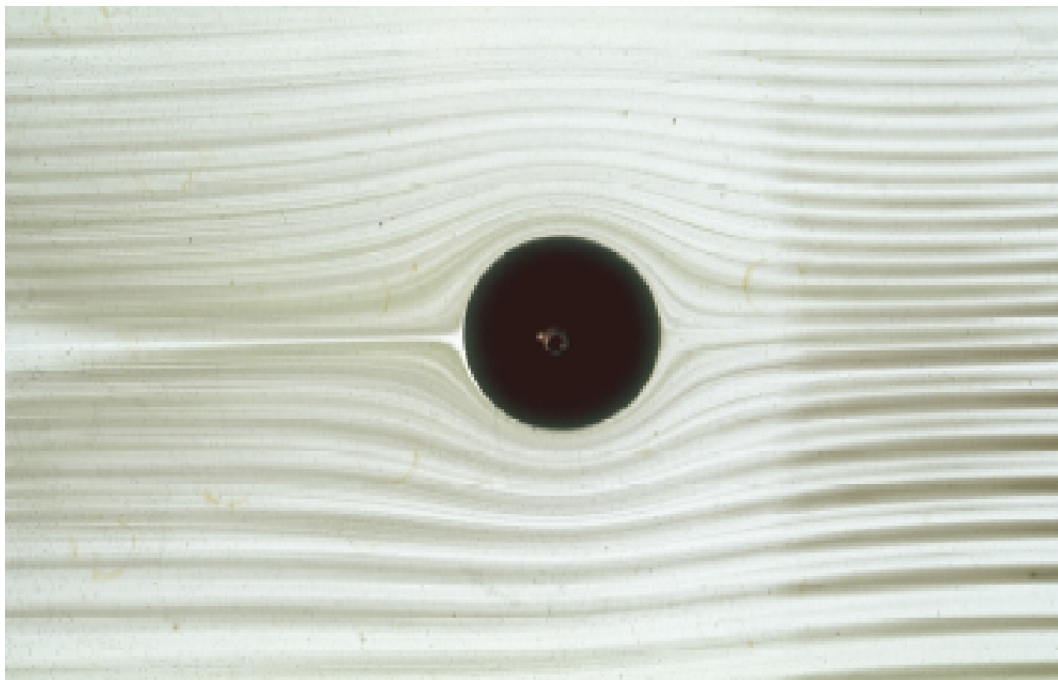


Fig. 2 – Lignes de champ à bas nombre de REYNOLDS.

déterminée en chaque point de l'espace. Les lignes de courant sont bien définies : l'écoulement est dit "laminaire".

A grand nombre de REYNOLDS, il existe une zone située derrière le cylindre où l'écoulement est instable, chaotique. La vitesse n'y est pas définie et on ne peut représenter les lignes de champ. L'écoulement est qualifié de turbulent.

On peut voir la transition laminaire/turbulent en ouvrant un robinet.

5.2 Application : vitesse maximale d'un cycliste

31. La puissance associée au saut en hauteur évoqué (qu'on suppose représentatif de l'effort maximum d'un être humain) vaut :

$$\mathcal{P}_{\max} \approx \frac{mgh}{\tau} \approx 10^3 \text{ W} \quad (5.3)$$

Pour un cycliste roulant à $V = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, le nombre de REYNOLDS vaut $Re \approx 10 \times 1/10^{-5} = 10^6$ de telle sorte que l'écoulement est turbulent et qu'il convient d'adopter une traînée quadratique de la forme $C_x \rho S V^2$. La puissance fournie par un cycliste roulant sur une piste horizontale sert

essentiellement à compenser la puissance $C_x \rho S V^3$ de la traînée soit avec $C_x \approx 0,1$ et $S \approx 1 \text{ m}^2$:

$$C_x \rho S V^3 \approx \mathcal{P}_{\max} \quad \text{puis} \quad V_{\max} = \left(\frac{\mathcal{P}_{\max}}{C_x \rho S} \right)^{1/3} \approx 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \quad (5.4)$$

ce qui semble réaliste.

En se plaçant derrière un paravent tracté par une automobile, le cycliste échappe à la traînée et améliore considérablement son record de vitesse.

5.3 Application : sédimentation

- 32.** Le temps de séjour permet de calculer l'ordre de grandeur de la vitesse $V \approx H/\tau = 1,2 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et le nombre de REYNOLDS $Re \approx Vr/\nu = 10^5$. L'écoulement est donc laminaire et la traînée est donnée par la formule de STOKES. En régime stationnaire, le poids, la poussée d'ARCHIMÈDE et la traînée s'équilibrent :

$$0 = \frac{4\pi r^3(\rho - \rho_{\text{eau}})g}{3} - 6\pi\eta r v \quad \text{soit} \quad v \propto r^2 \quad \text{et} \quad \tau \propto v^{-1} \propto r^{-2} \quad (5.5)$$

ce qui explique bien que le temps de séjour soit divisé par 100 si le rayon des particules est multiplié par 10.

Troisième partie

Écoulements visqueux

6 Régime laminaire de l'écoulement de Couette

- 33.** Dans cette expérience, le fluide initialement au repos est mis en mouvement orthoradial, ce qui impose l'existence d'une force de contact tangentielle entre le cylindre mobile et le fluide au contact. Puis, cette force doit entraîner le fluide de proche en proche, ce qui impose l'existence de contraintes tangentielles dans le fluide.
- 34. a)** Au niveau des interfaces fluide/cylindre, l'adhérence du fluide sur le cylindre s'écrit : $v(y = r_1) = 0$ et $v(y = r_2) = \omega r_2$.
- b)** Dans la géométrie plane équivalente, la projection de l'équation de NAVIER-STOKES sur \vec{u}_x s'écrit en régime stationnaire :

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (6.1)$$

soit, avec $v_x(y)$ et p indépendants de x :

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0 \quad (6.2)$$

c'est-à-dire :

$$v_x(y) = \alpha y + \beta \quad (6.3)$$

Les conditions aux limites permettent alors de déterminer les constantes d'intégration α et β :

$$0 = \alpha r_1 + \beta \quad \text{et} \quad r_2 \omega = \alpha r_2 + \beta \quad \text{d'où} \quad (6.4)$$

$$\alpha = \frac{r_2 \omega}{r_2 - r_1} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{r_1 r_2 \omega}{r_2 - r_1} \quad \text{donc} \quad (6.5)$$

$$v_x(y) = \frac{r_2 \omega (y - r_1)}{r_2 - r_1} \quad (6.6)$$

- 35.** Dans cette géométrie cartésienne, la force exercée par le fluide sur un élément de surface dS du cylindre fixe (1) s'écrit :

$$d\vec{F} = \eta \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=r_1} dS \vec{u}_x \quad \text{soit} \quad d\vec{F} = \frac{\eta r_2 \omega}{r_2 - r_1} dS \vec{u}_x \quad (6.7)$$

De même la force exercée par le cylindre mobile (2) sur un élément de surface dS de fluide vaut :

$$d\vec{F} = \eta \left(\frac{dv_x}{dy} \right)_{y=r_2} dS \vec{u}_x \quad \text{soit} \quad d\vec{F} = \frac{\eta r_2 \omega}{r_2 - r_1} dS \vec{u}_x \quad (6.8)$$

- 36. a)** La force surfacique s'écrit désormais $d\vec{F} = dF \vec{u}_\theta$ de telle sorte que le moment par rapport à Oz de la force exercée par le fluide sur le cylindre fixe vaut immédiatement $d\Gamma = r_1 dF$. D'où le couple total en remplaçant dF par son expression établie à la question précédente et en intégrant :

$$\Gamma = \iint_{S_1} r_1 \left(\frac{\eta r_2 \omega}{r_2 - r_1} \right) dS = \frac{\eta r_1 r_2 \omega}{r_2 - r_1} \iint_{S_1} dS \quad \text{soit} \quad \Gamma = \frac{\eta 2\pi r_2 r_1^2 L \omega}{r_2 - r_1} \quad (6.9)$$

- b) En régime stationnaire, le cylindre fixe est en équilibre sous l'effet de ce couple et du couple de torsion. Le théorème du moment cinétique projeté sur Oz s'écrit :

$$0 = \Gamma - C\alpha_{\text{eq}} \quad \text{soit} \quad \alpha_{\text{eq}} = \frac{\Gamma}{C} \propto \eta \quad (6.10)$$

de telle sorte que la mesure de α_{eq} donne accès à la viscosité η : on a bien fabriqué un viscosimètre.

- 37.** La force exercée par le cylindre mobile sur un élément de surface de fluide vaut désormais $d\vec{F} = dF \vec{u}_\theta$ et sa puissance vaut :

$$d\mathcal{P} = d\vec{F} \cdot \vec{v} = (dF \vec{u}_\theta) \cdot (r_2 \omega \vec{u}_\theta) = r_2 \omega dF \quad (6.11)$$

En remplaçant dF par son expression et en intégrant sur la surface de contact fluide-cylindre (2) on obtient la puissance totale fournie par le cylindre (2) au fluide :

$$\mathcal{P} = \iint_{S_2} r_2 \omega \left(\frac{\eta r_2 \omega}{r_2 - r_1} \right) dS = \frac{\eta r_2^2 \omega^2}{r_2 - r_1} \iint_{S_2} dS \quad \text{soit} \quad \mathcal{P} = \frac{\eta 2\pi r_2^3 L \omega^2}{r_2 - r_1} > 0 \quad (6.12)$$

de telle sorte que les forces de viscosité extérieures exercées par le cylindre (2) sur le fluide sont motrices. En régime stationnaire, l'énergie cinétique du fluide est indépendante du temps. Ce fluide reçoit de l'extérieur une puissance \mathcal{P} de la part du cylindre (2) et une puissance nulle de la part du cylindre (1) car les particules de fluide ont une vitesse nulle à l'interface cylindre (1) - fluide. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a donc :

$$0 = \frac{DE_c}{Dt} = \mathcal{P} + \mathcal{P}_{\text{int}} \quad \text{soit} \quad \mathcal{P}_{\text{int}} = -\mathcal{P} = -\frac{\eta 2\pi r_2^3 L \omega^2}{r_2 - r_1} < 0 \quad (6.13)$$

Ce résultat est très général : les forces intérieures de viscosité sont toujours dissipatives. La comparaison du premier principe de la thermodynamique :

$$DU + DE_c = \delta Q + \delta W_{\text{ext}} \quad (6.14)$$

et du théorème de l'énergie cinétique :

$$DE_c = \delta W_{\text{ext}} + \delta W_{\text{int}} \quad (6.15)$$

montre immédiatement que pour une évolution adiabatique ($\delta Q = 0$) on a :

$$DU + \delta W_{\text{int}} = 0 \quad (6.16)$$

de telle sorte que le travail des forces intérieures de viscosité est converti en énergie interne⁸.

8. En revanche si on maintient la température constante, on a $DU = 0$ et les relations précédentes imposent $\delta Q = \delta W_{\text{int}} < 0$ de telle sorte que le travail des forces intérieures de viscosité est converti en chaleur cédée au thermostat qui maintient la température constante.

7 Régime laminaire de l'écoulement de Poiseuille

38. L'écoulement est incompressible donc :

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v}{\partial z} \quad \text{donc } v \text{ ne dépend pas de } z. \quad (7.1)$$

D'autre part, avec $\vec{v} = v(r) \vec{u}_z = v(x, y) \vec{u}_z$, l'accélération convective vaut :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{v} = v \frac{\partial v}{\partial z} \vec{u}_z = \vec{0} \quad \text{puisque } v \text{ ne dépend pas de } z. \quad (7.2)$$

Comme l'accélération locale est nulle (écoulement stationnaire), en définitive, l'accélération des particules de fluide est nulle⁹.

39. L'équation de NAVIER-STOKES se limite donc à :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{v} \quad \text{soit} \quad \overrightarrow{\operatorname{grad}} p = \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \vec{u}_z \quad (7.3)$$

En projetant sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ , on obtient :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad \text{et} \quad 0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \quad (7.4)$$

de telle sorte que la pression p ne dépend que de z . En projection sur \vec{u}_z , il vient en remarquant que désormais les dérivées sont droites car il n'y a plus qu'une seule variable par fonction :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} = C \quad (7.5)$$

où C est une constante puisque la pression p ne dépend que de z et la vitesse v que de r .

40. a) On intègre :

$$p(z = L) - p(z = 0) = \eta C L = p_2 - p_1 \quad \text{d'où} \quad C = \frac{p_2 - p_1}{\eta L} \quad (7.6)$$

Puis le champ des vitesses est solution de :

$$r \frac{dv}{dr} = \frac{C r^2}{2} + D \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dr} = \frac{C r}{2} + \frac{D}{r} \quad (7.7)$$

où D est une constante d'intégration. Comme dv/dr doit rester borné¹⁰ en $r = 0$, on a $D = 0$ et l'équation se réintègre en :

$$v(r) = \frac{C r^2}{4} + E \quad (7.8)$$

La condition aux limites $v(r = R) = 0$ sur les parois fixes du tube impose alors :

$$v(r) = \frac{C(r^2 - R^2)}{4} \quad (7.9)$$

En remplaçant C par son expression, il vient :

$$v(r) = \frac{(p_1 - p_2)(R^2 - r^2)}{4\eta L} \quad (7.10)$$

9. Un point de vue lagrangien s'avérerait ici très efficace : avec $\vec{v} = v(r) \vec{u}_z$, une particule de fluide décrit une droite $r = \text{cste}$ et conserve la même vitesse au cours du temps ; son accélération est donc nulle.

10. En effet, il s'agit à une constante multiplicative près de la force surfacique de viscosité.

b) Par définition le débit volumique s'écrit :

$$D_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_S v(r) r dr d\theta = 2\pi \int_0^R r v(r) dr \quad (7.11)$$

En remplaçant $v(r)$ par l'expression que l'on vient d'établir, on obtient :

$$D_V = \frac{2\pi(p_1 - p - 2)}{4\eta L} \int_0^R (rR^2 - r^3) dr = \frac{2\pi(p_1 - p - 2)}{4\eta L} \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta L} \quad (7.12)$$

- c) Pour vérifier cette loi on peut mesurer la perte de charge $p(z) - p(0)$ dans une conduite munie de prises de pression régulièrement réparties. Pour mesurer la pression par rapport à la pression atmosphérique, on peut par exemple mesurer la dénivellation dans un tube en U rempli d'eau.
- d) Dans le cas où le tube est placé verticalement, on réécrit la loi de POISEUILLE :

$$D_V = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2 + \rho g L)}{8\eta L} \quad (7.13)$$

- e) Par analogie avec la loi d'OHM $I = (V_1 - V_2)/R$ on peut associer la pression avec la tension électrique et le débit volumique avec l'intensité du courant. La loi de POISEUILLE donne alors l'expression de la résistance hydraulique :

$$R_h = \frac{p_1 - p_2}{D_V} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \propto \frac{1}{R^4} \quad (7.14)$$

conformément à ce qu'affirme l'énoncé. La grande différence entre la circulation du courant électrique et d'un fluide tient à la différence des conditions aux limites : la vitesse du fluide visqueux doit s'annuler sur les parois alors que seule la composante normale du vecteur densité de courant \vec{j} doit s'annuler sur les parois isolantes d'un fil électrique. Il en résulte que \vec{j} est uniforme dans une section alors que \vec{v} a un profil parabolique.

8 Influence de la viscosité sur la propagation du son dans l'air

41. L'équation de la masse linéarisée à l'ordre 1 s'écrit :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0 \quad (8.1)$$

L'équation de NAVIER-STOKES devient :

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \quad (8.2)$$

42. On dérive la première équation par rapport au temps et la deuxième par rapport à x . En substituant, il vient alors :

$$-\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \quad (8.3)$$

Or, à l'ordre 1, $\rho_1 = \chi_S \rho_0 p_1$. L'équation de conservation de la masse implique alors :

$$\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} = -\chi_S \frac{\partial^3 p_1}{\partial t \partial x^2} \quad (8.4)$$

L'équation de propagation de la surpression est donc :

$$\chi_S \rho_0 \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} + \eta \chi_S \frac{\partial^3 p_1}{\partial t \partial x^2} \quad (8.5)$$

43. On étudie la propagation d'une pseudo-OPPH du type $p_1 = Ae^{j(\omega t - kx)}$ avec k complexe. On obtient la relation de dispersion :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \eta \chi_s j \omega k^2 \quad \text{avec} \quad c^2 = \frac{1}{\chi_s \rho_0} \quad (8.6)$$

En posant $\tau = \frac{\eta}{\rho_0 c^2}$, on obtient :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2(1 + j\omega\tau) \quad (8.7)$$

44. On peut supposer que l'amortissement est faible c'est-à-dire que $\omega\tau \ll 1$. On a alors :

$$k = \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{1}{2}j\omega\tau\right) \quad (8.8)$$

On trouve alors que la partie réelle de k qui caractérise la propagation est $k' = \frac{\omega}{c}$. La vitesse de phase est donc $v_\varphi = c$.

La partie imaginaire de k est $k'' = -(1/2)\omega^2\tau/c$. La longueur d'absorption est

$$\delta = -\frac{1}{k''} = \frac{2c}{\omega^2\tau} \quad (8.9)$$

45. La propagation n'est pas dispersive à cet ordre puisque v_φ ne dépend pas de ω . On peut prendre $\omega = 1000 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et $\delta = 10^8 \text{ m}$.

Cette longueur est très grande et ce n'est certainement pas la viscosité qui atténue l'onde sonore (mais plutôt le fait qu'une onde sphérique a son amplitude qui décroît en $1/r$).

Quatrième partie

Capillarité et hydrodynamique

9 Généralités sur la capillarité

46. Cette question est une question très générale qui appelle des réponses courtes.

- ▷ Si on s'en remet au dictionnaire, la capillarité est le « phénomène physique par lequel un liquide tend à monter le long d'un tube capillaire ou au travers d'un corps poreux ». Plus généralement, on appelle capillarité l'ensemble des phénomènes liés à l'existence d'une tension de surface.
- ▷ L'origine de la tension superficielle réside dans la distribution anisotrope des forces d'attraction subies par les molécules d'un liquide à la surface de contact avec l'air. Au sein du liquide (pur), toute molécule est soumise de la part des autres à des forces attractives dont la résultante est nulle. Par contre, une molécule à la surface subit une force d'attraction nette dirigée vers l'intérieur du liquide puisque les forces d'attraction des molécules d'air sont négligeables. La surface de contact entre l'air et l'eau est donc réduite au maximum. A l'inverse, augmenter l'aire de la surface de contact (interface) nécessite l'application d'une force et la réalisation d'un travail proportionnel à l'accroissement de surface visée.
- ▷ La tension de surface est une énergie libre par unité de surface :

$$\gamma = \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T,V} \quad (9.1)$$

- ▷ La tension de surface diminue avec la température et s'annule au point critique.

- ▷ On peut donner quelques tensions de surface typiques à 20 °C : $\gamma_{\text{eau}} = 72,8 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$, $\gamma_{\text{éthanol}} = 22,1 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$ et $\gamma = 37,5 \text{ mJ}\cdot\text{m}^{-2}$ pour l'eau savonneuse.
47. Il y a plusieurs techniques de mesures de la tension de surface. On peut en citer quelques unes :
- ▷ Méthode de la lame de WILHELMY. Dans la méthode standard, on plonge vers la surface du liquide une fine lame (d'environ 40 mm de périmètre) et la force orientée vers le bas est mesurée. La tension superficielle est le quotient de la force par le périmètre de la lame. Deux points très importants de cette méthode doivent être pris en compte. Premièrement, la lame doit être complètement mouillée avant la mesure pour s'assurer que l'angle de contact de la lame avec la surface du liquide est nul. S'il n'est pas nul, la méthode de la lame de WILHELMY n'est pas valide. Deuxièmement, on doit s'assurer que la position de la lame est correcte, c'est-à-dire que le bord inférieur de la lame est exactement au même niveau que la surface du liquide. Autrement l'effet de poussée doit être calculé séparément.
 - ▷ Méthode de l'anneau de DU NOÛY. Dans cette méthode, une traction est exercée sur un anneau (d'environ 60 mm de périmètre standard) vers l'interface liquide/air et la force maximale appliquée sur l'anneau est mesurée. Remarquez que la force diminuera légèrement avant que l'anneau ne se détache de l'air. Cette méthode n'est pas directe. On doit utiliser des facteurs de correction qui prennent en compte les dimensions de l'anneau (le périmètre, l'épaisseur du fil et l'effet des bords internes opposés à la mesure).
 - ▷ Méthode de la goutte pendante. Avec une aiguille on injecte le liquide de manière à former une goutte à l'extrémité de l'aiguille. La goutte est observée au moyen d'un système optique et la tension superficielle est calculée en fonction de la forme de la goutte. Pour les tensiomètres qui utilisent cette méthode, il est préférable de posséder un instrument contrôlé par ordinateur et un logiciel perfectionné. Cette méthode est utilisée lorsque les valeurs de tensions superficielles sont si faibles que les tensiomètres utilisant les méthodes précédentes ne peuvent pas fournir de mesures.
 - ▷ Méthode de la goutte tournante. Une petite goutte d'un échantillon est injectée à l'intérieur d'un petit tube contenant un autre liquide. Le tube subit alors une rotation à grande vitesse et la tension interfaciale est calculée à partir de la vitesse angulaire du tube et de la forme de la goutte.
 - ▷ Méthode de la pression de bulle. Dans cette méthode on immerge un tube capillaire dans un échantillon de liquide. Un débit constant de gaz est envoyé dans le tube, formant ainsi des bulles dans l'échantillon de liquide. On mesure la pression nécessaire pour former une bulle. La tension superficielle de l'échantillon est calculée à partir de la différence de pression à l'intérieur et à l'extérieur de la bulle et du rayon de la bulle. Ce type de tensiomètre est utilisé lorsque les mesures « en ligne » sont requises.
48. Évaluons les dimensions des différentes grandeurs en jeu : $[\rho] = ML^{-3}$, $[\gamma] = MT^{-2}$ et $[g] = LT^{-2}$. Si l'on souhaite construire une grandeur qui ait la dimension d'une longueur, il n'y a qu'une seule possibilité :

$$\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} \quad (9.2)$$

À température ambiante, l'application numérique donne $\kappa^{-1} = 2,7 \text{ mm}$. La longueur capillaire est la longueur qui caractérise la compétition tension de surface-gravité. Au-delà, la gravité domine. En deçà, la tension de surface domine. C'est typiquement le rayon d'une goutte de pluie.

10 Loi de Laplace

49. La loi de LAPLACE relie la différence de pression à la courbure d'une interface :

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \gamma \mathcal{C} \quad (10.1)$$

où \mathcal{C} est la courbure de l'interface. La courbure est une grandeur algébrique qui s'exprime à partir des rayons de courbure principaux :

$$\mathcal{C} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (10.2)$$

Les rayons de courbure sont comptés positivement lorsque le centre de courbure est placé à l'intérieur du liquide. La figure 3 donne un exemple de courbure positive et un exemple de courbure négative. Pour une goutte sphérique :

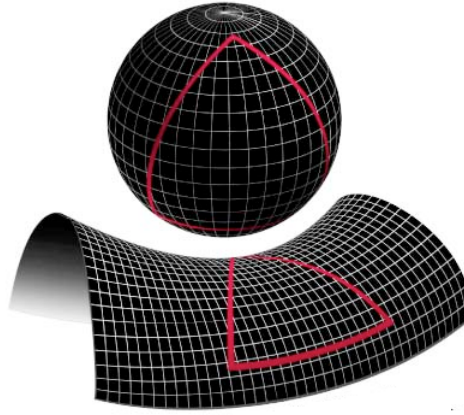


Fig. 3 – Deux courbures spatiales possibles : positive (haut), négative (bas).

$$p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{2\gamma}{R} \quad (10.3)$$

50.

$$\frac{2\gamma}{R_{\text{eq}}} > \frac{P_0}{100} \quad \text{pour} \quad R_{\text{eq}} < \frac{200\gamma}{P_0} \quad (10.4)$$

On prend $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ d'où

$$R_{\text{eq}} < 0,14 \text{ mm} \quad (10.5)$$

La surpression est non négligeable pour les petites gouttes.

51. On applique la relation fondamentale de l'hydrostatique entre le bas de la colonne et le ménisque où la pression est

$$P = P_0 - \rho gh \quad (10.6)$$

On applique la loi de LAPLACE au ménisque, de rayon r (la concavité est dirigée vers l'extérieur) :

$$P = P_0 - \frac{2\gamma}{r} \quad (10.7)$$

Avec un dessin, on voit que $r = R/(\cos \theta)$ de sorte que

$$\rho gh = \frac{2\gamma \cos \theta}{R} \quad \text{donc} \quad h = \frac{2\lambda_c^2 \cos \theta}{R} \quad (10.8)$$

52. Pour $\theta > \frac{\pi}{2}$, la concavité du ménisque change et on observe un phénomène de descente capillaire. Sur la figure 4, on a représenté le mercure qui vérifie ce comportement.

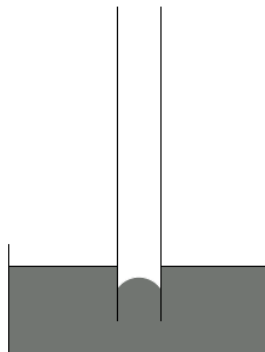


Fig. 4 – Descente capillaire du mercure.

11 L'angle de contact

11.1 Loi de Young-Dupré

53. La condition d'équilibre entre les trois forces projetée selon l'horizontale s'écrit pour un élément dl :

$$\gamma_{SV}dl = \gamma_{LS}dl + \cos\theta\gamma_{LV}dl \quad (11.1)$$

On a donc la loi de YOUNG-DUPRÉ donnant l'angle de contact

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LV}} \quad (11.2)$$

54. La projection précédente a été réalisée dans le plan de l'interface solide-liquide. Dans le plan orthogonal à ce dernier, si l'on ne prend en compte que les forces présentes sur le schéma du sujet et en supposant que l'on se trouve à l'équilibre mécanique on obtient :

$$0 = \sin\theta\gamma_{LV} \quad (11.3)$$

ce qui est impossible car $\sin\theta$ et γ_{LV} ne sont pas nuls. Il faut donc remettre en cause une des hypothèses du modèle :

- ▷ soit le bilan des forces est incomplet, et dans ce cas il existe une force portée par la tangente à l'interface liquide-gaz (au niveau de la ligne triple), dirigée vers le solide¹¹ ;
 - ▷ soit on ne se trouve pas à l'équilibre mécanique : le point triple se déplace.
55. a) Évaluons les dimensions des différentes grandeurs en jeu : $[E] = ML^{-1}T^{-2}$, $[\gamma_{LV}] = MT^{-2}$ et $[\delta] = [R] = L$. D'après le théorème II de BUCKINGHAM, on peut construire une infinité de grandeurs homogènes à des énergies. Il faut donc s'interroger sur le sens des constantes proposées :
- ▷ le module élastique caractérise la capacité du solide à se déformer. On s'intéresse à sa déformation dans le plan orthogonal à l'interface solide-liquide, donc sur une distance δ et la goutte a une aire proportionnelle à R^2 . On peut donc construire une première énergie $\mathcal{E}_1 = E\delta R^2$
 - ▷ la tension de surface s'exerce sur toute la surface courbe de la goutte. En supposant qu'il s'agit d'une demie-sphère, elle est proportionnelle à R^2 . $\mathcal{E}_2 = \gamma_{LV}R^2$
- b) \mathcal{E}_1 caractérise les effets élastiques et \mathcal{E}_2 les effets capillaires.
- c) Comme $l_{éc}$ rend compte de la compétition entre ces deux effets, on peut écrire l'égalité des énergies $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ soit

$$E\delta R^2 = \gamma_{LV}R^2 \quad \text{soit} \quad E\delta = \gamma_{LV} \quad (11.4)$$

11. Mais cette force remettrait en cause l'équation établie à la question précédente ...

Dans cette situation particulière, δ s'identifie à la longueur élasto-capillaire définie par :

$$l_{\text{éc}} = \frac{\gamma_{\text{LV}}}{E} \quad (11.5)$$

d) En prenant $E = 7 \times 10^7 \text{ Pa}$ et $\gamma_{\text{LV}} = 7 \times 10^{-2} \text{ J}\cdot\text{m}^{-2}$, on a lorsque les effets élastiques et capillaires s'équilibrent :

$$\delta \approx 1 \text{ nm} \quad (11.6)$$

11.2 Mesure optique d'un angle de contact

56. Pour une question d'optique géométrique, il faut bien sûr faire un dessin . En utilisant le théorème

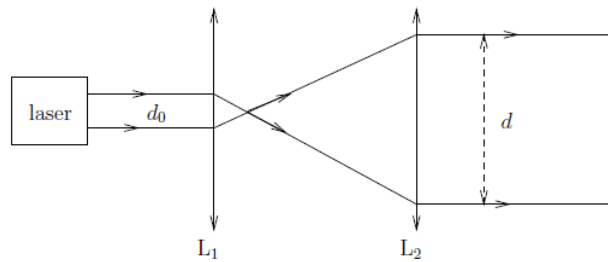


Fig. 5 – Élargissement d'un faisceau laser.

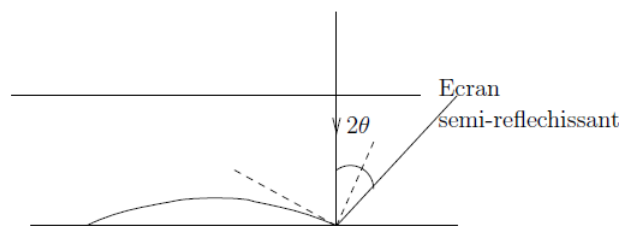
de THALÈS, on a immédiatement :

$$\frac{d_0}{d} = \frac{f'_1}{f'_2} \quad (11.7)$$

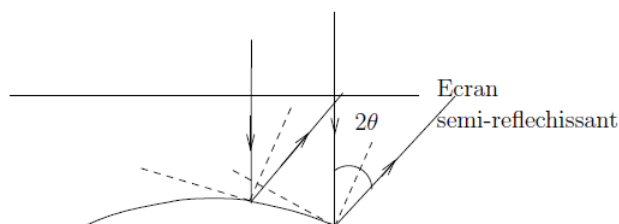
Les applications numériques donnent :

$$f'_2 = \frac{f'_1 d}{d_0} = 5 \text{ cm} \quad \text{et} \quad L = f'_1 + f'_2 = 6 \text{ cm} \quad (11.8)$$

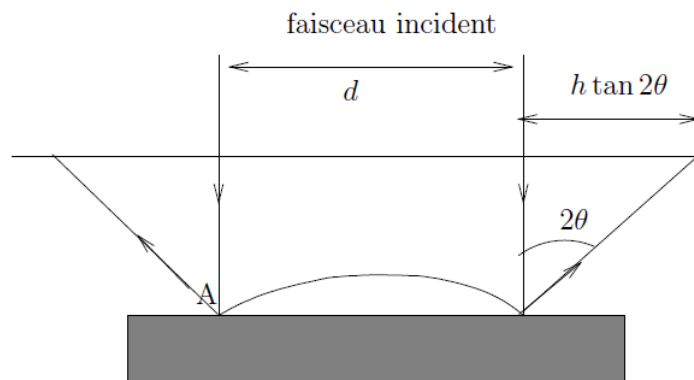
57. Là aussi, en faisant un dessin, on remarque simplement que l'angle cherché vaut 2θ .



58. Vous savez quoi ? On va faire un dessin ! L'angle fait par le rayon réfléchi est inférieur à 2θ de



sorte qu'il ne contribue pas à la tache observée.



59. Mesdames et messieurs, pour la dernière fois, un dessin. Ainsi, en prenant en compte les contributions de chaque côté de la goutte, on obtient :

$$D = d + 2h \tan(2\theta) \quad (11.9)$$

Ainsi,

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \frac{D - d}{2h} = 4,4^\circ \quad (11.10)$$

11.3 Forme d'une flaque

60. Il faut se placer loin de $x = 0$ où le rayon de courbure est infini et donc la pression continue. On applique alors simplement la loi fondamentale de l'hydrostatique :

$$P(z) = P_0 + \rho g(e_M - z) \quad (11.11)$$

La pression est constante sur une horizontale en statique et vaut donc $P(z)$. On a donc en projetant selon x :

$$dF_x = (P_0 - P(z))L dl \sin \alpha(x) \quad (11.12)$$

Comme $dz = dl \sin \alpha$, il vient :

$$dF_x = \rho g L (z - e_M) dz \quad (11.13)$$

On intègre alors entre A et B :

$$F_x = \int_0^{e(x)} dF_x = \int_0^{e(x)} \rho g L (z - e_M) dz = \rho g L \left(\frac{1}{2} e^2(x) - e(x) e_M \right) \quad (11.14)$$

61. L'interface AB subit aussi les forces de tension superficielle de normes $L\gamma_{SV}$ et $L\gamma_{LS}$ en A et de norme $L\gamma_{LV}$ en B . L'élément de longueur considéré est ici L et

$$F'_x = L (-\gamma_{SV} + \gamma_{LS} + \gamma_{LV} \cos \alpha(x)) \quad (11.15)$$

62. On écrit l'égalité vectorielle des deux forces à l'équilibre : $F_x + F'_x = 0$, soit :

$$\rho g L \left(\frac{1}{2} e^2(x) - e(x) e_M \right) + L (-\gamma_{SV} + \gamma_{LS} + \gamma_{LV} \cos \alpha(x)) = 0 \quad (11.16)$$

En utilisant la loi de YOUNG-DUPRÉ, on obtient :

$$\gamma_{SV} - \gamma_{LS} = \gamma_{LV} \cos \theta \quad (11.17)$$

Pour finir, en utilisant la définition de la longueur capillaire $\gamma_{LV} = \rho g \lambda_c^2$, il vient :

$$e_M e(x) - \frac{1}{2} e^2(x) = \lambda_c^2 (\cos \alpha(x) - \cos \theta) \quad (11.18)$$

63. On utilise cette relation en $x = +\infty$ où $\alpha = 0$:

$$e_M = \lambda_c \sqrt{2(1 - \cos \theta)} \quad (11.19)$$

64. On fait un développement limité à l'ordre 2 :

$$\cos \alpha(x) = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2(x) \quad (11.20)$$

L'équation 11.18 devient :

$$e_M e(x) - \frac{1}{2}e^2(x) = \lambda_c^2 \left(1 - \cos \theta - \frac{1}{2}\alpha^2(x)\right) \quad (11.21)$$

L'équation 11.19 élevée au carré permet d'obtenir :

$$e_M e(x) - \frac{1}{2}e^2(x) = \frac{1}{2} \left(e_M^2 - \lambda_c^2 \alpha^2(x)\right) \quad \text{soit} \quad (e_M - e(x))^2 = \lambda_c^2 \alpha^2(x) \quad (11.22)$$

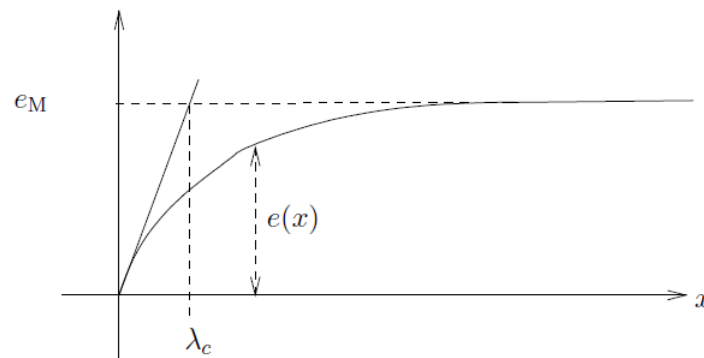
Or $e(x) < e_M$ et $\alpha(x) = \frac{de}{dx}$, de sorte que l'on a finalement :

$$e(x) + \lambda_c \frac{de}{dx} = e_M \quad (11.23)$$

L'équation différentielle se résout simplement avec $e(0) = 0$:

$$e(x) = e_M \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\lambda_c}\right)\right) \quad (11.24)$$

Représentons l'allure de la forme de la flaque : La flaque a la forme d'une exponentielle croissante



de longueur caractéristique λ_c . La forme de la flaque étant gouvernée par la compétition gravité-tension de surface, il n'est pas surprenant de retrouver comme longueur caractéristique la longueur capillaire λ_c . Le modèle adopté semble donc raisonnable.

11.4 Étude de l'interface vin-air

65. Lorsque z augmente, la proportion en éthanol décroît et la proportion d'eau croît. La tension superficielle air-éthanol est inférieure à la tension superficielle air-eau. La tension superficielle du vin se rapproche de celle de l'eau lorsque z augmente et augmente donc : $a > 0$.

66. La composante selon y de la force de tension superficielle est :

$$dF_y + dF_{y+dy} = (-\gamma(y, z)dz + \gamma(y + dy, z)dz) = \frac{\partial \gamma}{\partial y} dy dz \quad (11.25)$$

Cette force est nulle car γ ne dépend pas de y . Selon z ,

$$dF_z + dF_{z+dz} = (-\gamma(y, z)dy + \gamma(y, z + dz)dy) = \frac{\partial \gamma}{\partial z} dy dz \quad (11.26)$$

Or $\gamma(z) = \gamma_0 + az$ d'où $\frac{\partial \gamma}{\partial z} = a$ donc :

$$dF_{ts} = a dy dz \quad (11.27)$$

67. On applique la relation fondamentale de la dynamique à un élément de surface $dydz$ de masse quasi-nulle. On peut donc négliger son poids. Son accélération étant nulle, il vient :

$$d\vec{F}_{\text{visc}} + d\vec{F}_{ts} + d\vec{F}_p = \vec{0} \quad (11.28)$$

Évaluons chacun des termes :

▷ la force de pression est normale à l'élément de surface et est selon \vec{e}_x . Il faut prendre en compte la force de pression de l'air et celle du vin. Il vient :

$$d\vec{F}_p = (-p_0 dy dz + p(x = h, y, z) dy dz) \vec{e}_x \quad (11.29)$$

car on se place à l'interface air-vin donc en $x = h$.

▷ la force de tension de surface évaluée dans la question précédente :

$$d\vec{F}_{ts} = a dy dz \vec{e}_z \quad (11.30)$$

▷ la force de viscosité exercée par le vin situé aux abscisses inférieures à $x = h$ et qui vaut donc :

$$d\vec{F}_{\text{visc}} = -\eta \frac{\partial v}{\partial x}(x = h) dy dz \vec{e}_z \quad (11.31)$$

En projetant sur \vec{e}_x et \vec{e}_z , on obtient alors :

$$-\eta \frac{dv}{dx}(x = h) + a = 0 \quad \text{et} \quad p(x = h, y, z) = p_0. \quad (11.32)$$

11.5 Champ de vitesse dans le film

68. L'accélération d'une particule de fluide comporte deux termes :

▷ un terme d'accélération temporelle locale nul car le régime est permanent ;

▷ un terme d'accélération convective $(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = v_x(x) \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_z = \vec{0}$ car $\vec{v} = v(x) \vec{e}_z$.

L'accélération est donc nulle.

69. D'après ce qui précède, l'équation de NAVIER-STOKES projetée selon \vec{e}_x donne :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (11.33)$$

donc la pression ne dépend pas de x . Or, d'après l'équation 11.32, la pression ne dépend ni de y , ni de z . Donc la pression est uniforme et vaut p_0 .

70. On projette l'équation de NAVIER-STOKES selon z . Il vient :

$$\eta \frac{d^2 v}{dx^2} - \rho g = 0 \quad (11.34)$$

puisque la pression est uniforme. En intégrant :

$$v(x) = \frac{\rho g}{2\eta} x^2 + Ax + B \quad (11.35)$$

En $x = 0$, le vin est en contact avec la paroi. Le vin est un fluide visqueux et « colle » à la paroi. Celle-ci ne bouge pas et $v(x = 0) = 0 = B$. L'équation 11.32 (encore elle !) permet de déterminer la deuxième condition aux limites :

$$\frac{dv}{dx}(x = h) = A + \frac{\rho g}{\eta} h = \frac{a}{\eta} \quad \text{d'où} \quad A = \frac{a - \rho g h}{\eta} \quad (11.36)$$

On obtient en définitive :

$$v(x) = \frac{\rho g}{\eta} \frac{x^2}{2} + \frac{a - \rho g h}{\eta} x \quad (11.37)$$

71. Par définition,

$$D_m = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (11.38)$$

La vitesse est selon \vec{e}_z , d'où :

$$D_m = \int_{y=0}^{y=L} \int_{x=0}^{x=h} \rho v(x) dx dy = \rho L \left(\frac{\rho g}{\eta} \frac{h^3}{6} + \frac{a - \rho g h}{\eta} \frac{h^2}{2} \right) \quad (11.39)$$

En définitive :

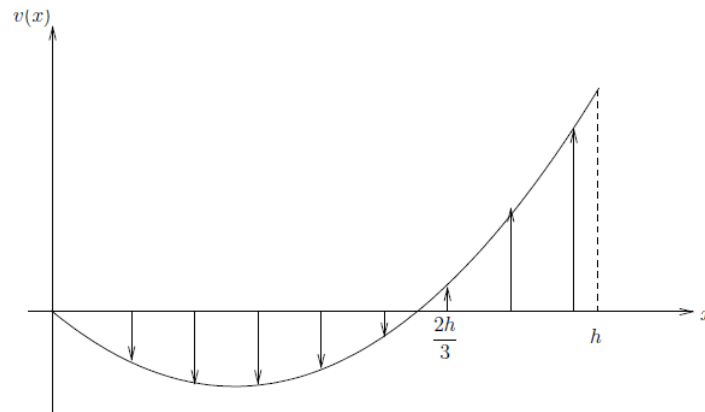
$$D_m = \frac{\rho L}{\eta} \left(\frac{a}{2} - \frac{\rho g h}{3} \right) h^2 \quad (11.40)$$

72. Il y a transport vers le haut si le débit est positif, donc si $a > \frac{2\rho g h}{3} = a_c$.

73. Si $a = a_c$, on a :

$$v(x) = \frac{\rho g}{\eta} \frac{x^2}{2} - \frac{\rho g h x}{3\eta} \quad (11.41)$$

La vitesse s'annule donc pour $x = 0$ et pour $x = \frac{2}{3}h$. Le profil des vitesses est :



12 Instabilité de Rayleigh-Taylor

74. Détaillons les deux effets antagonistes :

- ▷ l'énergie par unité de longueur relative à la tension de surface vaut $E_{ts,1} = \int \gamma ds$ pour le film liquide ondulant (avec s l'abscisse curviligne décrivant le profil $e(x)$) et $E_{ts,0} = \int \gamma dx$ pour le film plat. On obtient directement :

$$\Delta E_{ts} = \int_{x=0}^{x=\lambda} \gamma (ds - dx) \quad (12.1)$$

- ▷ pour l'énergie par unité de longueur relative à la gravité, il faut intégrer une première fois par rapport à z ¹² en remarquant que $dm = yzdx$:

$$\Delta E_g = \iint \rho g \frac{dm}{y} dz = \int_{x=0}^{x=\lambda} \int_{z=-e_0}^{z=-e(x)} \rho g z dx dz = -\rho g \int_{x=0}^{x=\lambda} \left(\int_{z=e_0}^{z=e(x)} z dz \right) dx \quad (12.2)$$

La compétition entre gravité et tension superficielle s'écrit donc :

$$\Delta E = - \int_{x=0}^{x=\lambda} \frac{1}{2} \rho g (e^2 - e_0^2) dx + \int_{x=0}^{x=\lambda} \gamma (ds - dx) \quad (12.3)$$

Or, par définition de l'abscisse curviligne s , on a :

$$ds = \sqrt{dx^2 + de^2} \approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{de}{dx} \right)^2 \right) \quad (12.4)$$

Or, $de/dx = \delta e q(-\sin(qx))$. On réécrit alors :

$$\Delta E = - \int_0^\lambda \frac{1}{2} \rho g (\delta e)^2 \cos^2(qx) dx + \int_0^\lambda \gamma \frac{1}{2} (\delta e q(-\sin(qx)))^2 dx \quad (12.5)$$

puis en remarquant que $\lambda = 2\pi/q$, on peut intégrer en faisant le changement de variable $du = qdx$:

$$\Delta E = -\frac{1}{4} \lambda \rho g (\delta e)^2 + \frac{1}{4} \lambda \gamma (\delta e)^2 q^2 = \frac{1}{4} \gamma \delta e^2 \lambda (q^2 - \kappa^2) \quad (12.6)$$

avec $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma/\rho g}$ la longueur capillaire.

- 75.** L'instabilité se développe si l'état perturbé est d'énergie plus faible, c'est-à-dire si $\Delta E < 0$. Cela se produit si $\lambda > 2\pi\kappa^{-1}$.
- 76.** Il s'agit d'une simple équation différentielle du premier ordre sans second membre à coefficient constant. En posant

$$\tau^{-1} = \frac{\gamma e_0^3}{3\eta} q^2 (\kappa^2 - q^2) \quad (12.7)$$

on obtient

$$\delta e(t) = \delta e(0) \exp \frac{t}{\tau} \quad (12.8)$$

- 77.** En dérivant τ par rapport à q , on obtient :

$$\frac{d\tau}{dq} = \frac{6\eta}{\gamma e_0^3} \frac{2q^2 - \kappa^2}{q^3(\kappa^2 - q^2)^2} \quad (12.9)$$

On constate que τ est minimal pour $q = \kappa/\sqrt{2}$. La longueur d'onde de l'instabilité est donc :

$$\lambda = 2\pi\sqrt{2}\kappa^{-1} \quad (12.10)$$

- 78.** La longueur capillaire pour de l'eau étant égale à 2,7 mm, l'application numérique donne une longueur d'onde de l'instabilité de typiquement 2 cm.

12. Un esprit plus astucieux que le mien m'a fait remarquer qu'on peut se passer de cette intégration en avançant que le centre de gravité de la tranche de fluide du film ondulant de profil $e(x)$ (respectivement du film plat) se trouve à $e(x)/2$ (respectivement $e_0/2$).