

Résonance

MP 31

Romain Rescanières et Corentin Logé

Person: *successfully goes into engineering
after cheating online classes*

Bridges in 2030:



Sommaire

I Objectifs disciplinaires	2
II Introduction : Corde de Melde	2
III Résonance en intensité d'un circuit RLC série.	2
III.1 Détermination de la fréquence de résonance en régime sinusoïdal forcé : protocole	3
III.2 Évaluation du facteur de qualité en fonction de la résistance : protocole	3
IV Finesse d'une cavité Fabry-Perot	3
IV.1 Finesse théorique : protocole	4
IV.2 Finesse expérimentale : théorie	4
IV.3 Finesse expérimentale : protocole	5
V Conclusion	5
VI Matériel	6
VII Critique des choix pédagogiques	6
VIII Remarques des correcteurs	6

IX Questions des correcteurs

7

X Tableau

7

I Objectifs disciplinaires

- Définir les caractéristiques de la résonance (phénomène fréquentiel, max de transfert d'énergie de l'excitateur au résonateur, au niveau des fréquences propres du système si les dissipations sont négligeables, largeur de la résonance)
- Exemples dans des domaines où la résonance est néfaste (méca) ou souhaitée (élec, optique)

II Introduction : Corde de Melde

On considère un système constitué d'une source excitatrice et d'un résonateur, que l'on peut visualiser comme une boîte noire répondant à la sollicitation de la source. On dit de ce système qu'il présente une résonance lorsque, sous certaines conditions d'excitation, le transfert d'énergie entre l'excitateur et le résonateur est maximal.

On visualise assez bien ce transfert sur la corde de Melde. On rappelle que la fréquence fondamentale f_0 de la corde est telle que :

$$f_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{mg}{\mu}}$$

où μ est la masse linéique de la corde, m la masse de la masse qui tend la corde et L la longueur de la corde. Pour une longueur de corde d'environ 120 cm et un masse de 100 g, on trouve $f_0 \sim 10$ Hz.

Lorsqu'on se place à une fréquence inférieure à f_0 (typiquement 5 Hz), l'amplitude de l'oscillation de la corde est très faible, et le transfert d'énergie entre le vibreur et la corde n'est pas optimal. Lorsqu'on s'approche de la dizaine de hertz, l'amplitude augmente, jusqu'à atteindre un maximum. Elle diminue à nouveau au delà de la fréquence de résonance.

Utiliser la corde de Melde pour introduire le vocabulaire et la structure générale d'un système résonant (permet de gagner du temps). Faire remarquer la dépendance en fréquence de la résonance : LA RESONANCE EST UN PHENOMENE FREQUENTIEL.

Faire remarquer l'existence d'une fréquence particulière où le transfert d'énergie est maximal : NOTION DE FREQUENCE DE RESONANCE.

Faire remarquer qu'autour de la fréquence de résonance, on a quand même un transfert significatif d'énergie vers le résonateur : NOTION DE PLAGE DE FREQUENCE SUR LAQUELLE L'EXCITATEUR ET LE RESONATEUR SONT FORTEMENT COUPLES.

On va chercher à caractériser la résonance de différents systèmes pour plusieurs raisons :

- Le transfert maximal d'énergie peut conduire à des dépassements et des dysfonctionnements que l'on veut éviter (cf SI).
- Si l'on réduit la plage de fréquence sur laquelle le système résonne, on crée un système très sensible à certaines fréquences particulières : oscillateur très sélectif!

III Résonance en intensité d'un circuit RLC série.

Remarques générales :

- Attention au branchement du circuit (il faut bien prendre la tension aux bornes de R sans créer de problème de masse).
- Le gain n'est pas égal à 1, mais à $\frac{R}{R+r}$, et Q vaut en fait $Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ avec r qui comptabilise toutes les résistances du circuit, sauf celle aux bornes de laquelle on mesure la tension (résistance de sortie du

GBF, résistance parasite de L et C...). Si on veut négliger l'effet de r (qui vaut environ $70 \Omega^1$), on doit se placer à des valeurs de R assez élevées.

- La bobine a un caractère capacitif au delà de quelques dizaines de kHz...
- L'interprétation de la réponse temporelle à un échelon de ce passe-bande n'est pas immédiate. L'allure est grosso modo la même que la réponse à un échelon d'un passe-bas du 2nd ordre en théorie... Mais en pratique, on voit que si Q augmente, le temps de décroissance diminue... Pas logique... Bon...

III.1 Détermination de la fréquence de résonance en régime sinusoïdal forcé : protocole

On applique en entrée une excitation sinusoïdale à la fréquence f , d'amplitude 10 Vpp (pas de saturation des composants a priori). On observe à l'oscillo la réponse temporelle aux bornes de R, ainsi que l'entrée (respectivement sur les voies 2 et 1 car on va utiliser Igor par la suite). Mettre les mêmes échelles en ordonnée sur les deux voies, et une valeur de résistance de 1 k Ω .

Mesurer le déphasage entre l'entrée et la sortie, en faisant varier la fréquence, en mode XY en zoomant par exemple. A la résonance, le déphasage est nul : évaluer f_0 et son incertitude.

III.2 Évaluation du facteur de qualité en fonction de la résistance : protocole

On se place en réponse impulsionnelle en utilisant la macro d'Igor. Ici, $f_0 \approx 1$ kHz, donc on va envoyer de la puissance jusqu'à 10 kHz, c'est-à-dire choisir un pulse de durée $T_p = 10^{-4}$ s = 10 ms. Le nombre de points que l'on verra dans le diagramme de Bode est alors donnée par $N = \frac{T_0}{T_p}$ où T_0 est la durée acquise. On peut prendre par exemple $N = 500$ points. Sur le diagramme de Bode en phase², on mesure alors pour chaque valeur de résistance, le gain, la fréquence de résonance, les deux fréquences de coupure à -3 dB (qui correspondent au passage de la phase à 45° et -45°), ainsi que toutes les incertitudes. On peut ainsi calculer Q par $Q = \frac{f_0}{\Delta f}$ et tracer ensuite $Q = f(\frac{1}{R})$.

Indiquer que l'on vient d'étudier la réponse en régime forcé du système, et que l'on va maintenant s'intéresser à la réponse en régime libre. Cela revient à regarder la réponse du système à chaque fréquence indépendante. Mettre une valeur de résistance pour laquelle on n'a pas pris de point en préparation. Rajouter alors un point sur le graphe. Faire un ajustement de la droite donnant Q en fonction de $\frac{1}{R}$ pour les grandes valeurs de R seulement, et en déduire la valeur expérimentale de $\sqrt{\frac{L}{C}}$. Comparer à la valeur théorique.

(Si on regarde la réponse fréquentielle de l'entrée : décroissance au niveau de la résonance, car max de courant appelé, et donc chute liée à la résistance interne du GBF.)

IV Finesse d'une cavité Fabry-Perot

La finesse d'une cavité Fabry-Perot est l'analogue du facteur de qualité de circuit RLC. Elle mesure la finesse des pics de transmission de la cavité. Elle dépend, en pratique, du coefficient de réflexion des miroirs de la cavité selon la relation :

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

valable pour R proche de 1.

Remarques générales :

- Bien rapprocher les miroirs pour visualiser les anneaux dans le Fabry-Perot (le moindre défaut de parallélisme fera qu'on ne verra pas d'anneaux sinon)

1. Il peut être utile d'évaluer r . Pour cela, envoyer un sinus d'amplitude fixée à l'entrée, et de fréquence la fréquence de résonance, en mettant une grande valeur de R (typiquement 1 ou 2 k Ω . Mesurer l'amplitude A_0 de la sortie, puis diminuer R jusqu'à ce que l'amplitude de la sortie vaille la moitié de A_0 . On a alors $R = r$.

2. Beaucoup plus précis!

- Ne pas hésiter à regarder directement dans le Fabry-Perot en lampe spectrale (avec un dépoli à l'entrée!) pour régler l'appareil. On peut ensuite projeter les anneaux à l'aide d'une lentille de 1000 et les régler avec les vis de réglage fin pour améliorer la netteté (bien vérifier qu'on a placé l'écran dans le plan focal de la lentille, sinon les anneaux sont brouillés localement).
- Si on règle avec la lampe à Na, il peut être judicieux de chariotter si on se trouve au niveau d'une anti-coïncidence, sinon on voit trouble...

IV.1 Finesse théorique : protocole

On a accès expérimentalement à la finesse dite théorique en utilisant une diode laser en entrée de la cavité. (*Pas de laser épuré, car les points seraient beaucoup trop larges!*) L'idée est de mesurer R et d'en déduire \mathcal{F} avec la formule donnée plus haut. On règle grossièrement le Fabry-Perot en regroupant les taches en sortie de la cavité (regarder sur un écran à l'infini). Ensuite, on ajoute un petit angle afin de voir plusieurs taches, qui correspondent à des rayons successifs sortant de la cavité. L'intensité de chacun de ces rayons est égale au produit de l'intensité du rayon qui le procède par le facteur R^2 (deux réflexions dans la cavité).

Faire en sorte que les points dont on va mesurer l'intensité s'alignent sur une droite horizontale. Placer alors une photodiode³ au niveau de ces points et mesurer la tension en sortie de la photodiode⁴. Puis, mesurer la tension correspondante au bruit et la soustraire. Tracer alors $\ln(I_n)$ en fonction du numéro n du point. On trouve une droite car :

$$\ln(I_n) = \ln(I_0(R^2)^n) = \ln(I_0) + n \ln(R^2)$$

En notant α la pente de cette droite, on a :

$$R = \exp\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

On en déduit alors \mathcal{F}_{th} , qui doit être de l'ordre de 10-15.

IV.2 Finesse expérimentale : théorie

La finesse est donnée par le rapport de la taille des pics de transmission sur l'écart entre deux pics. On peut y accéder (à l'aide d'une approximation) en mesurant la taille des anneaux et leur écartement. En effet, pour les faibles angles (ie les petits rayons), on a :

$$\mathcal{F} \approx \frac{R_{k+1} - R_{k-1}}{2\delta R_k}$$

où R_k est le rayon du k -ième anneau et δR_k sa largeur.

Démo de la formule Sur l'écran : $R = f'i$ (aux petits angles).

Or, le déphasage $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2e \cos(i) \simeq \frac{4\pi}{\lambda} \times e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow i_k^2 &= 2 \left(1 - \frac{\lambda \varphi_k}{4\pi e}\right) \\ \Rightarrow R_k^2 &= 2f'^2 \left(1 - \frac{\lambda \varphi_k}{4\pi e}\right) \end{aligned}$$

(explique pourquoi les anneaux se rapprochent si on s'éloigne du centre : $\varphi_k = 2\pi k$)

3. La CCD a l'inconvénient d'être souvent très bruitée au niveau des sommets des pics : elle est mauvaise pour mesurer des intensités. Donc : photodiode pour l'intensité et CCD pour la position

4. En sortie de la photodiode, on obtient généralement un courant, qui est converti en tension. Ce courant est proportionnel au flux lumineux reçu par la photodiode.

D'où :

$$\begin{aligned}
 R_{k+1}^2 - R_{k-1}^2 &= \frac{-2f'^2\lambda}{4\pi e} \underbrace{(\varphi_{k+1} - \varphi_{k-1})}_{=2\Delta\varphi} \\
 &= -\frac{4f'^2\lambda}{4\pi e} \Delta\varphi \\
 &= (R_{k+1} - R_{k-1}) \underbrace{(R_{k+1} + R_{k-1})}_{\simeq 2R_k}
 \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
 \delta(R_k^2) &= 2R_k\delta(R_k) \\
 &= -\frac{2f'^2\lambda}{4\pi e}\delta\varphi
 \end{aligned}$$

Et donc :

$$\frac{R_{k+1} - R_{k-1}}{2\delta R_k} = \frac{\Delta\varphi}{\delta\varphi} = \mathcal{F}_{exp}$$

(Comme $\mathcal{F}_{exp} = cste$, si les anneaux se rapprochent, ils s'affinent !)

Influence d'une source non monochromatique Pour mesurer le vrai \mathcal{F} , on veut $\delta\varphi \gg$ Variation de φ liée à $\delta\lambda$. D'où :

$$\delta\varphi \gg \frac{2\pi}{\lambda_0^2} \delta\lambda \times \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \times \frac{\delta\lambda}{\lambda_0}$$

Pour un laser : $\delta\nu \sim 1$ kHz, donc $\delta\varphi \gg 4 \times 10^{-8}$. Si on évalue $\delta\varphi$ liée à ce qu'on pourrait mesurer si on translait le miroir (on réfléchit comme si on allait mesurer expérimentalement $\delta\varphi$), on aurait à $i = 0$: $\delta\varphi \sim \frac{4\pi}{\lambda_0} \delta e$. D'où : $\delta e \gg 2 \times 10^{-15}$ m (avec $e \sim 10^{-3}$ m) ! Ceci sera toujours vérifié, rien qu'avec les vibrations de la table ! Donc, l'influence de la largeur spectrale du laser est négligeable !

IV.3 Finesse expérimentale : protocole

(On ne peut pas juste translater le miroir et mesurer avec une photodiode $I = f(e)$, car pour $\Delta e = 10$ μ m, on fait défiler plein d'anneaux...)

Utiliser la lampe à vapeur de Sodium pour régler le Fabry-Perot. Projeter les anneaux sur un écran (avec un doublet de 1000) et ajuster le réglage. Changer la lampe à Na par un laser épuré. (Le laser épuré sert à avoir plein d'angles par diffraction ici !) On doit voir les anneaux sur l'écran. Mettre un doublet de 200 (il ne faut pas que $R = f'i$ soit trop grand pour la CCD), et placer dans son plan focal un capteur CCD. A l'aide de l'intensité en fonction de la position sur la barrette, mesurer R_{k+1} , R_{k-1} et δR_k (prendre une seule valeur de k car pas le temps et pas assez précis pour repérer les sommets de plein de pics avec la CCD...). Pour nous, le pic central était crade : donc on le sature, et on mesure avec les pics latéraux. Ça n'a même pas vraiment de sens de calculer une incertitude tellement elle serait grande avec notre lecture foireuse à la CCD...

Calculer \mathcal{F}_{exp} , qui doit être inférieure à \mathcal{F}_{th} à cause des pertes par vibration de la cavité principalement.

V Conclusion

Le Fabry-Perot est un instrument très utile en pratique : il permet par exemple de résoudre le doublet du sodium, ce qu'un Michelson est incapable de faire (finesse trop faible).

VI Matériel

Corde de Melde

- GBF
- Ampli de puissance
- Vibreur + corde
- Poulie, potence, noix
- Masse
- Balance
- Réglet

RLC

- RLC de JBD (caché dans son K-Jibé secret...)
- Plaquette avec potentiomètres (moins fluctuant !)
- Oscilloscope
- GBF
- RLC-mètre : mesurer L et C au niveau de f_0

Fabry-Perot

- Cavité Fabry-Perot (la grosse, celle des TP de L3)
- Lampe Na
- Laser  pur 
- Diode laser
- Capteur CCD Ovio
- Photodiode et voltmètre
- Doublet de 1000 mm et 200 mm
-  cran

VII Critique des choix pédagogiques

- Volonté de montrer un réel outil où on utilise la résonance (et pas que le RLC) !
- On aurait pu faire le Collpitts pour la partie élec (résonance plus fine) : moins pédagogique mais plus utilisé.
- Possibilité de mesurer le doublet du Na avec le Fabry-Perot, s'il reste du temps (attention, le vernier du Fabry-Perot de L3 est **faux** ! Il y a un facteur multiplicatif de 8.25 à appliquer...).

VIII Remarques des correcteurs

- Le correcteur aurait ajusté $Q = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}}$ direct, sans fixer le 0. Donc idée : on trace pour plein de R , puis on dit : c'est pas une droite. Donc, autre effet. L , on explique et on ajuste par le modèle le plus complet.
- Mesure du f_0 du RLC : le mode XY permet d'être plus pédagogique que "MEAS", car on fait une mesure à la main. Et on peut être plus précis que l'oscillo en dilatant à fond les échelles.
- Tracer $I = f(\varphi)$ serait bien pour le F-P. Idée : tenter de le faire avec la cavité confocale asservie : on maitrise e beaucoup plus précisément ! Attention : le laser a plusieurs modes, il faudrait filtrer les modes non utiles (avec un polariseur ?).
- Parler si possible, du lien dissipation - résonance avec Q : diagramme de phase d'un RLC en sortie sur C ou pendule, diapason...

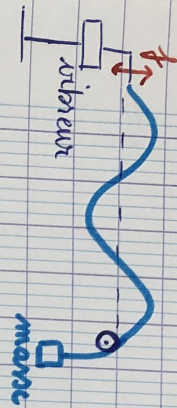
IX Questions des correcteurs

- Corde de Melde : nom donné aux fréquences de résonance ? Régime forcé vs libre ? Lien entre ces deux régimes ?
- Moyennage sur l'oscillo ?
- Pourquoi envoyer un sinc avec Igor ? *Par habitude : ici, on fait le Bode, donc on peut envoyer de la puissance différente sur les différentes fréquences.* Choix de la période d'envoi des impulsions ?
- Plage de résistances choisies ici ? Il se passe quoi si R plus faible ? Source principale de résistance parasite ? *Résistance interne du GBF* Comment s'en affranchir ? *Suiveur !* Entre C et L , qui a le r le plus grand ? *Bobine : plus de cuivre*
- Réponse temporelle du RLC : on peut trouver Q ?
- Représenter la finesse sur un graphe au tableau ? **OUBLI : à faire !**
- On voit des points laser de réflexion à l'arrière du Fabry-Perot : sécurité ? *Mettre un écran, comme ça, on nous embêtera pas...*
- Intérêt du laser épuré ?
- Pourquoi régler le F-P avec Na ? *On voit déjà des anneaux avec le laser. Mais donc, pas sûr qu'il soit bien régler, et que la théorie s'applique bien... Donc, on le règle, puis on passe en laser.*
- Pourquoi un F-P résonne ? *N ondes toutes en phase : max d'intensité transmise*
- Formule pour mesurer \mathcal{F}_{exp} ?
- Écart entre \mathcal{F}_{exp} et \mathcal{F}_{th} ? *Vibration de la table surtout !*
- Message de la dernière manip ?
- Pourquoi avoir fait un ajustement linéaire et non affine pour le RLC ? *Le correcteur dit qu'il a du mal à imaginer $Q = 0...$ Donc, il ferait avec du affine, et ça améliore le résultat. Donc, on a ajouté des ddl qui ont suffisamment amélioré le résultat : donc on améliore notre critère de bon modèle !*

X Tableau

HP331 : Résonance

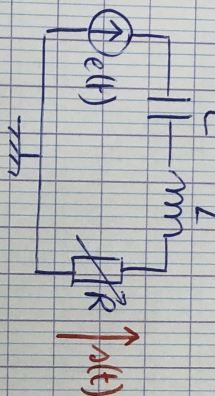
Introduction : Cord de Helde.



Excitation : Résonateur d'énergie

I - Résonance en intensité d'un circuit RLC série :

Protocole :



Explication :

① Mesure de la fréquence de résonance en régime forcé

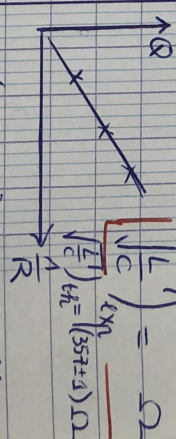
Déphasage $\Delta\varphi$ à la résonance : $\Delta\varphi = 0$

$$f_{0,exp} = 148$$

$$f_{0,th} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = (965 \pm 2) \text{ Hz}$$

② Evaluation du facteur de qualité en régime forcé

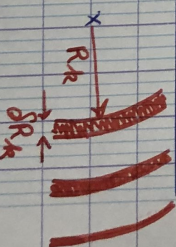
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



Résonance impulsionnelle

② Finex expérimentale :

Explication :



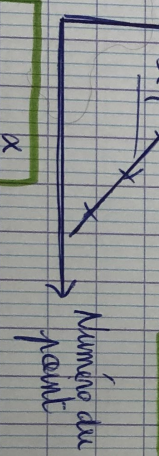
$$F_{exp} = \frac{R_{k+1} - R_{k-1}}{2 \delta R_k}$$

$$F_{exp} =$$

Explication :

$I_m(V_m)$

$$I_m = I_d(R^2)^m$$



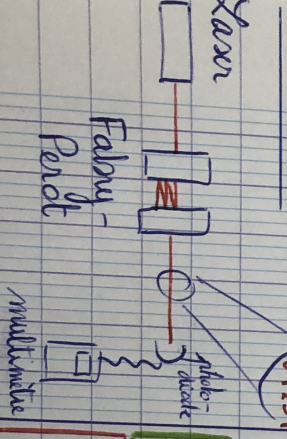
$$R = \frac{\alpha}{z}$$

$$F_{th} = \frac{\pi \sqrt{R}}{1 - R}$$

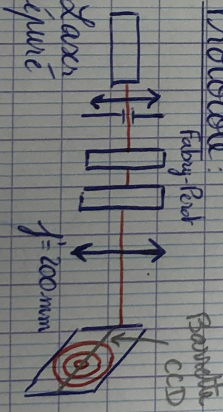
II - Finex d'une cavité Fabry-Pérot :

① Finex théorique :

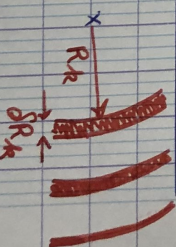
Protocole :



Protocole :



Explication :



$$F_{exp} = \frac{R_{k+1} - R_{k-1}}{2 \delta R_k}$$

$$F_{exp} =$$