



Devoir en temps limité : Mécanique des fluides

Nathan Lardier[†], Département de physique, ENS Paris-Saclay

7 novembre 2020

Table des matières

I	Établissement de l'équation de Navier-Stokes	3
1	Description d'un fluide	3
1.1	Le modèle du fluide continu	3
1.2	Approches lagrangienne et eulérienne	3
1.3	Équation de conservation de la masse	4
2	Mouvements et déformations des particules de fluide	4
2.1	Vecteur tourbillon	5
2.2	Variation de volume	5
2.3	Déformation de pincement	5
3	Viscosité dans un fluide	5
3.1	Définition	5
3.2	Fluide non-newtonien	6
3.3	Force volumique de viscosité	6
II	Nombre de Reynolds	6
4	Définition	6
5	Nombre de Reynolds et traînée d'un solide	7
5.1	Traînée d'une sphère	7
5.2	Application : vitesse maximale d'un cycliste	7
5.3	Application : sédimentation	7
III	Écoulements visqueux	7
6	Régime laminaire de l'écoulement de Couette	7
7	Régime laminaire de l'écoulement de Poiseuille	8
8	Influence de la viscosité sur la propagation du son dans l'air	9
IV	Capillarité et hydrodynamique	10
9	Généralités sur la capillarité	10
10	Loi de Laplace	10
11	L'angle de contact	10
11.1	Loi de Young-Dupré	10

[†]nathan.lardier@ens-paris-saclay.fr

11.2	Mesure optique d'un angle de contact	12
11.3	Forme d'une flaque	12
12	Les larmes de vin	13
12.1	Étude de l'interface vin-air	14
12.2	Champ de vitesse dans le film.	14
13	Instabilité de Rayleigh-Taylor	14

Ce devoir a une durée de 5 h. La calculatrice est autorisée, mais il doit être réalisé sans documents. Si vous pensez repérer une erreur d'énoncé, précisez-la et détaillez les initiatives personnelles que vous êtes amené à prendre en conséquence. La majorité des questions de ce devoir sont indépendantes. Vous pourrez faire référence à la numérotation des équations dans votre copie pour gagner du temps dans la rédaction.

On rappelle les formules d'analyse vectorielle suivantes :

$$\operatorname{div}(f \vec{a}) = f \operatorname{div}(\vec{a}) + \vec{a} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \quad (0.1)$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \quad (0.2)$$

$$\frac{D\vec{a}}{Dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{a} \quad (0.3)$$

$$(\vec{a} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}) \vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left(\frac{a^2}{2} \right) + \operatorname{rot} \vec{a} \wedge \vec{a} \quad (0.4)$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b} \quad (0.5)$$

On donne les valeurs numériques suivantes :

- ▷ constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
- ▷ nombre d'AVOGADRO : $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- ▷ constante de BOLTZMANN : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
- ▷ champ de pesanteur terrestre : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- ▷ masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- ▷ masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{eau}} \approx 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Première partie

Établissement de l'équation de Navier-Stokes

1 Description d'un fluide

1.1 Le modèle du fluide continu

1. À partir des grandeurs moléculaires, on affecte en mécanique des fluides à chaque *particule de fluide* des grandeurs moyennées à l'*échelle mésoscopique* comme la vitesse \vec{v} ou la masse volumique ρ . Préciser la signification des mots en italique.
2. À quelle condition sur le libre parcours moyen cette démarche est-elle valable ? Citer un exemple de situation où l'*approximation des milieux continus* est mise en défaut.

1.2 Approches lagrangienne et eulérienne

3. Rappeler la définition de la méthode lagrangienne pour suivre le mouvement des particules de fluide. Citer un avantage et un inconvénient de cette méthode.
4. Dans la suite, on adopte plutôt la méthode eulérienne. Rappeler la définition eulérienne du champ des vitesses $\vec{v}(M, t)$. Citer un avantage et un inconvénient de cette méthode.
5. Rappeler la définition de la *dérivée particulaire* d'un champ eulérien scalaire ou vectoriel, qu'on notera $\frac{D}{Dt}$. Préciser l'expression et la signification concrète de la *dérivée locale*. Même question

pour la *dérivée convective*. Qu'appelle-t-on écoulement *stationnaire*? Donner un exemple d'écoulement stationnaire pour lequel les particules de fluide sont accélérées.

6. Un parachutiste de vitesse constante $\vec{v} = v\vec{u}_z$ avec $v < 0$ veut déterminer le champ de température de l'atmosphère supposé stationnaire. Ce champ est de la forme :

$$T(z) = T_0 + \alpha z, \quad (1.1)$$

avec $\alpha < 0$. Utiliser la notion de dérivée particulière pour déterminer la loi de variation de $T(t)$ mesurée par le parachutiste qui touche le sol $z = 0$ à $t = t_f$.

7. Définir la *trajectoire* d'une particule de fluide. Qu'appelle-t-on *ligne de courant*? *ligne d'émission*? Dans quel cas particulier ces trois familles de courbes sont-elles confondues?

1.3 Équation de conservation de la masse

8. Établir l'expression du débit massique traversant une surface fixe \mathcal{S} . Établir l'équation locale de conservation de la masse.
9. Quelle propriété mathématique possède alors le champ de vecteurs $\vec{j} = \rho\vec{v}$ en régime stationnaire? Quelle conséquence en tire-t-on pour le débit massique dans un tube de courant (démonstration non demandée)?
10. Mettre l'équation locale de conservation de la masse sous une forme faisant apparaître $\frac{D\rho}{Dt}$. Donner la définition d'un *écoulement incompressible* et préciser la distinction avec la notion de *fluide incompressible*. Quelle propriété possède le champ de vecteurs \vec{v} pour un écoulement incompressible? Que peut-on en conclure sur l'évolution de $\|\vec{v}\|$ dans un tube de courant dont la section décroît?
11. Établir l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique dans le vide à partir des équations de MAXWELL. En déduire l'équation macroscopique de conservation de l'énergie électromagnétique. Quel est le nom du vecteur analogue au vecteur \vec{j} défini précédemment? Préciser sa signification physique.
12. Donner une autre équation de conservation locale analogue aux deux équations locales précédentes.

2 Mouvements et déformations des particules de fluide

On considère un écoulement au voisinage d'un point qu'on prend pour origine. On suppose pour simplifier l'écoulement *plan*, i.e. de la forme :

$$\vec{v} = v_x(x, y)\vec{u}_x + v_y(x, y)\vec{u}_y \quad (2.1)$$

En un point $M(x, y)$ au voisinage de O , on peut écrire un champ des vitesses sous la forme d'un développement de TAYLOR d'ordre 3 :

$$v_x(x, y) = v_x(0, 0) + xe_{xx} + ye_{xy} \quad (2.2)$$

$$v_y(x, y) = v_y(0, 0) + xe_{yx} + ye_{yy} \quad (2.3)$$

avec $e_{ij} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{\{x=0, y=0\}}$ où le tenseur $[e_{ij}]$ est appelé *tenseur des taux de déformations*. Dans la suite, on évalue ce tenseur en un point fixe O de telle sorte que les e_{ij} sont des constantes. On peut réécrire la relation précédente sous la forme :

$$\vec{v}(M) = \begin{vmatrix} v_x(0, 0) \\ v_y(0, 0) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_{xx}x \\ e_{yy}y \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (e_{xy} + e_{yx})y \\ (e_{xy} + e_{yx})x \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (e_{xy} - e_{yx})y \\ (e_{yx} - e_{xy})x \end{vmatrix} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \quad (2.4)$$

2.1 Vecteur tourbillon

13. Montrer que le champ des vitesses $\vec{v}_0 + \vec{v}_3$ est exactement celui d'un solide.
14. En déduire l'expression en fonction de $\text{rot}(\vec{v})$ du *vecteur tourbillon* $\vec{\Omega}$ d'un écoulement et sa signification concrète. Définir la notion d'*écoulement tourbillonnaire* et citer un exemple dont les lignes de champ sont rectilignes. Définir la notion d'*écoulement irrotationnel* et citer un exemple dont les lignes de champ sont des cercles.

2.2 Variation de volume

On considère une particule de fluide, assimilée à un pavé de côtés a, b, c , dont un sommet est O , à l'instant t (voir figure 1) dans le plan xOy .

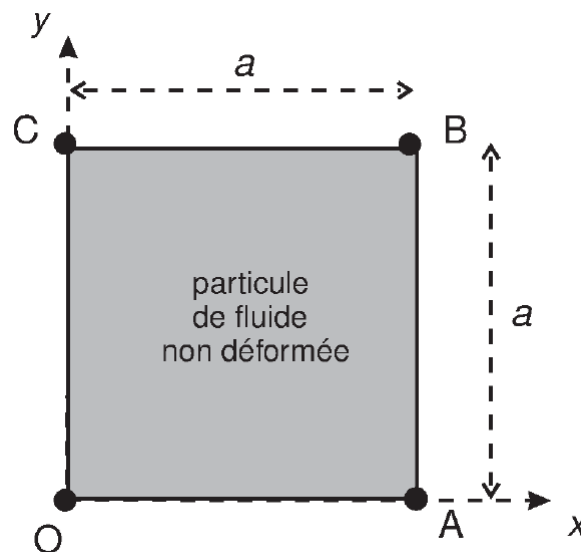


Fig. 1 – Particule de fluide non déformée

15. Évaluer les déplacements - supposés petits - de ses sommets A, B, C entre t et $t + dt$ sous l'effet du seul champ \vec{v}_1 et faire une figure dans le plan xOy à l'instant $t + dt$ en reliant ses nouveaux sommets O, A', B', C' . Montrer que la particule de fluide conserve une forme de pavé et évaluer ses nouveaux côtés a', b' et c' . En déduire la variation relative de volume de la particule de fluide et la relier à $\text{div}(\vec{v}_1)$. Faire le lien avec la définition donnée en 10..

2.3 Déformation de pincement

16. Évaluer les déplacements - supposés petits - de ses sommets A, B, C entre t et $t + dt$ sous l'effet du seul champ \vec{v}_2 et faire une figure dans le plan xOy à l'instant $t + dt$ en reliant ses nouveaux sommets O, A', B', C' . On calcule aisément $\text{rot}(\vec{v}_2) = \vec{0}$ et $\text{div}(\vec{v}_2) = 0$, ce qu'on ne demande pas de faire. Comment se manifeste la nullité de ces grandeurs sur la figure ?

3 Viscosité dans un fluide

3.1 Définition

17. Définir la viscosité dynamique η d'un fluide en considérant un écoulement unidirectionnel $\vec{v} = v(y, t)\vec{u}_x$.
18. Commenter cette définition et donner deux lois analogues.

3.2 Fluide non-newtonien

19. Qu'est-ce-qu'un fluide non-newtonien ? Donner deux exemples de tels fluides en précisant les comportements associés.
20. En choisissant un exemple de fluide, donner une interprétation structurelle de son caractère non-newtonien.
21. Un fluide est dit *thixotrope* si, à contrainte ou taux de cisaillement constant, sa viscosité diminue avec le temps. Donnez un exemple de fluide *thixotrope*. Quelle différence faites-vous entre *thixotropie* et *rhéofluidification* ?

3.3 Force volumique de viscosité

Pour une particule de fluide assimilée à un pavé de volume $d\tau = dx dy dz$, on montre alors que la somme des forces de viscosité s'écrit :

$$d\vec{F}_v = \eta \vec{\Delta} \vec{v} d\tau. \quad (3.1)$$

22. Établir cette relation pour un écoulement unidirectionnel $\vec{v} = v(y, t) \vec{u}_x$.

Dans toute la suite, on admet que cette expression est générale pour tous les écoulements incompressibles de fluides newtoniens. Dans ces conditions, on obtient l'équation de NAVIER-STOKES :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\vec{\text{grad}} p + \eta \vec{\Delta} \vec{v} + \vec{f}_a + \vec{f}_i \quad (3.2)$$

où on note \vec{f}_a les forces volumiques appliquées et \vec{f}_i les éventuelles forces volumiques d'inertie.

23. Quelle est l'origine des forces de viscosité ?
24. Donner l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique de l'air, de l'eau et de la glycérine.

Deuxième partie

Nombre de Reynolds

4 Définition

25. On envisage un écoulement pour lequel l'ordre de grandeur de la vitesse est V , l'échelle spatiale caractéristique de ses variations est L et l'échelle temporelle de ses variations est τ . Définir le nombre de REYNOLDS Re en formant le rapport du terme convectif de l'équation de NAVIER-STOKES sur le terme de viscosité. Définir et introduire la viscosité cinématique ν .
26. Évaluer le nombre de REYNOLDS des écoulements correspondants aux situations suivantes
 - ▷ voiture sur l'autoroute ;
 - ▷ nageur aux Jeux Olympiques (épreuve du 50 m) ;
 - ▷ miette de pain tombée dans un pot de miel.
27. Dans les écoulements les plus courants a-t-on plutôt un faible ou un grand nombre de REYNOLDS ? Est-ce une situation mathématiquement confortable ? Pourquoi ?
28. Montrer que, dans la limite $Re \ll 1$, l'équation de NAVIER-STOKES prend la forme d'une équation de diffusion en l'absence de gradient de pression et de forces volumiques. En déduire une autre interprétation de Re comme le rapport d'un temps de diffusion à un temps de convection de la quantité de mouvement.

5 Nombre de Reynolds et traînée d'un solide

5.1 Traînée d'une sphère

On rappelle que la force de traînée F_t exercée par un fluide en écoulement à la vitesse U sur un obstacle de section frontale S est caractérisée par le coefficient de traînée C_t défini par :

$$C_t = \frac{F_t}{\frac{1}{2}\rho U^2 S} \quad (5.1)$$

29. Rappeler sans justification les expressions de la traînée d'une sphère de rayon R en mouvement uniforme à vitesse \vec{v} dans un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η , selon que le nombre de REYNOLDS est faible ou élevé. Donner alors l'allure du graphe du coefficient de traînée C_t en fonction du nombre de REYNOLDS Re en échelle log-log.
30. Décrire les lignes de champ à bas et grand nombre de REYNOLDS. Comment qualifie-t-on les écoulements correspondants ?

5.2 Application : vitesse maximale d'un cycliste

31. Évaluer la puissance maximale d'un être humain en faisant référence à un saut d'une hauteur $h \approx 1$ m, une masse $m \approx 100$ kg en une durée $\tau \approx 1$ s dans le champ de pesanteur $g \approx 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. En déduire l'ordre de grandeur du record de vitesse d'un cycliste sur une piste horizontale. Quel peut être l'intérêt de se placer derrière un paravent tracté par une automobile ?

5.3 Application : sédimentation

Dans une usine de traitement des eaux polluées, on veut faire décanter les particules solides qui se trouvent en suspension dans un bassin de hauteur $H = 1$ m : il s'agit de faire en sorte qu'au bout d'un temps de séjour τ le plus court possible, toutes les particules se retrouvent au fond du bassin où elles sont collectées. Les particules sont assimilées à des sphères solides de rayon $r = 1 \mu\text{m}$, de masse volumique $\rho = 8 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

32. On constate que le temps de séjour nécessaire vaut $\tau \approx 1$ jour si $r = 1 \mu\text{m}$, mais que τ est divisé par 100 si on fait flocculer les particules, *i.e.* si on les force à s'agréger par un procédé chimique en des particules de rayon dix fois plus élevé. Interpréter cette observation en utilisant l'expression convenable de la traînée.

Troisième partie

Écoulements visqueux

6 Régime laminaire de l'écoulement de Couette

On envisage ici le dispositif de COUETTE qui permet d'illustrer le concept de viscosité (voir figure 2) : un liquide de viscosité dynamique η se trouve entre deux cylindres coaxiaux de hauteur L et de rayons r_1 et $r_2 \approx r_1$; le cylindre (1) est suspendu à un fil de torsion exerçant sur lui un moment $-C\alpha$ lorsqu'il tourne d'un angle α autour de son axe Oz ; un opérateur impose au cylindre (2) une rotation à vitesse angulaire ω constante. En régime stationnaire, le cylindre (1) s'immobilise en tournant d'un angle α_{eq} par rapport à sa position initiale.

33. En quoi cette expérience apporte-t-elle la preuve de l'existence de forces de viscosité ?

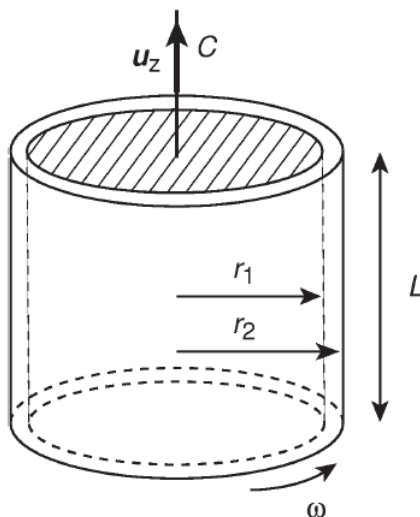


Fig. 2 – Expérience de COUETTE

Dans toute la suite, l'écoulement est supposé stationnaire, incompressible et homogène de masse volumique ρ , et le champ des vitesses n'a pas de composante selon la verticale \vec{u}_z . On néglige la pesanteur.

34. On suppose dans cette question pour simplifier qu'on peut négliger la courbure des cylindres et les remplacer par des plans infinis $y = r_1$ et $y = r_2$. On cherche un champ des vitesses de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{u}_x$.
- Écrire les conditions aux limites $v(y = r_1)$ et $v(y = r_2)$.
 - On suppose le champ de pression uniforme. Montrer que $\frac{d^2v}{dy^2} = 0$ et déterminer $v(y)$ en fonction de r_1 , r_2 et ω .
35. En déduire que le fluide exerce sur un élément de surface dS du cylindre fixe une force :

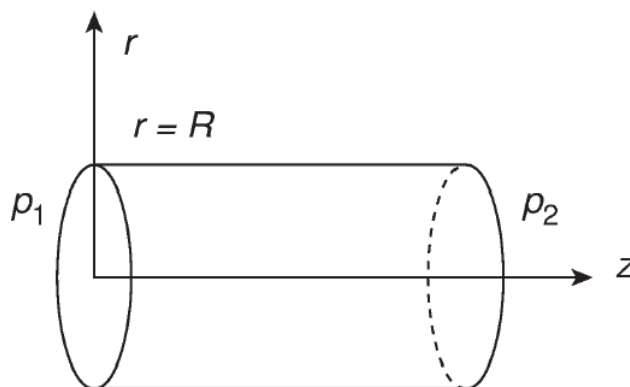
$$d\vec{F} = \frac{\eta r_2 \omega}{r_2 - r_1} dS \vec{u}_x \quad (6.1)$$

et que le cylindre mobile exerce sur un élément de surface dS de fluide la même force $d\vec{F}$.

36. On revient à la géométrie réelle avec les deux cylindres et on admet que la force surfacique s'écrit désormais $d\vec{F} = dF \vec{u}_\theta$ où dF vérifie l'équation 6.1.
- Déterminer le moment par rapport à Oz des forces exercées par le fluide sur le cylindre fixe en fonction de η , r_1 , r_2 , ω et L .
 - Expliquer comment ce dispositif peut servir de viscosimètre.
37. Calculer la puissance fournie par le cylindre mobile au fluide en fonction de η , r_2 , ω , r_1 et L puis commenter son signe. Calculer la puissance fournie par le cylindre fixe au fluide. En remarquant que l'énergie cinétique du fluide est constante, en déduire l'expression de la puissance des forces intérieures au système et commenter son signe. Comment se manifeste cette puissance si on suppose que le fluide évolue de manière adiabatique ?

7 Régime laminaire de l'écoulement de Poiseuille

Lorsqu'on impose les pressions $p(z = 0) = p_1$ et $p(z = L) = p_2 < p_1$ aux extrémités d'un tube horizontal de longueur L et de rayon intérieur R , rempli d'un fluide homogène de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η , on observe un écoulement stationnaire et incompressible décrit par



le champ des vitesses $\vec{v} = v(r, z) \vec{u}_z$ en coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz . On rappelle que pour un tel champ de vecteurs, on a :

$$\text{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (7.1)$$

$$\Delta \vec{v} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \vec{u}_z \quad (7.2)$$

38. Montrer que $v(r, z)$ ne dépend pas de z et que l'accélération des particules de fluide est nulle.

39. Montrer que la pression ne dépend ni de r ni de θ . Justifier ensuite que :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) = C = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dz} \quad (7.3)$$

où C est une *constante*.

40. On cherche alors à trouver la loi de POISEUILLE de la façon suivante :

- Exprimer C en fonction de p_1 , p_2 , η et L . En déduire le profil des vitesses $v(r)$.
- En déduire l'expression du débit volumique en fonction des constantes du problème.
- Décrire un dispositif expérimental qui permet de vérifier cette loi.
- Comment faudrait-il modifier cette loi si le tube était placé verticalement ?
- Cette loi est analogue à la loi d'OHM dans un conducteur filiforme ; définir la *résistance hydraulique* du tube et donner son expression en fonction de L , R et η . Comment expliquer sans calcul que la résistance hydraulique est proportionnelle à R^{-4} alors que la résistance hydraulique est proportionnelle à R^{-2} ?

8 Influence de la viscosité sur la propagation du son dans l'air

On s'intéresse dans cette partie à la propagation d'une onde sonore dans l'air le long de l'axe Ox en tenant compte de la viscosité dynamique η de l'air. On ne considère pas que l'écoulement est parfait mais on admet que l'évolution des particules est isentropique avec un coefficient de compressibilité isentropique χ_s . Les grandeurs vibratoires de pression, masse volumique et vitesse ne dépendent que de x et t :

$$p = p_0 + p_1(x, t) \quad (8.1)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t) \quad (8.2)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1(x, t) \quad (8.3)$$

41. Linéariser l'équation de conservation de la masse de l'équation de NAVIER-STOKES dans l'approximation acoustique.

42. En utilisant le coefficient χ_s , déterminer l'équation de propagation du son pour la surpression.
43. En déduire la relation de dispersion. On introduira la quantité $\tau = \frac{\eta}{\rho_0 c^2}$ où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos et c la célérité du son en négligeant la viscosité.
44. À l'aide d'un développement limité que l'on justifiera, déterminer la vitesse de phase et la longueur caractéristique d'absorption de l'onde.
45. La propagation est-elle dispersive ? Donner un ordre de grandeur de la longueur caractéristique d'amortissement. Commenter.

Quatrième partie

Capillarité et hydrodynamique

9 Généralités sur la capillarité

46. Qu'est-ce-que le phénomène de capillarité ? Quelle en est l'origine physique ? Comment définit-on la tension superficielle ? Justifier votre réponse. Donner l'ordre de grandeur de la tension de surface de l'eau, de l'éthanol, d'une eau savonneuse.
47. Décrire deux techniques de mesure de la tension superficielle γ d'un liquide. Pourquoi utilise-t-on suivant les cas l'une ou l'autre de ces techniques ?
48. Pour un fluide de masse volumique ρ , de tension de surface γ , placé dans le champ de pesanteur \vec{g} , montrer qu'il est possible de construire une longueur κ^{-1} appelée *longueur capillaire* par un simple argument d'analyse dimensionnelle. Évaluer l'ordre de grandeur de cette longueur pour l'eau à température ambiante. Comment peut-on « visualiser » expérimentalement cette longueur ?

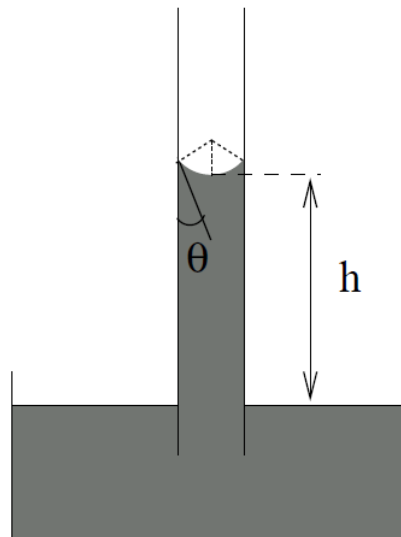
10 Loi de Laplace

49. Lorsqu'on traverse une interface entre deux fluides, caractérisée par une tension interfaciale γ et une courbure \mathcal{C} , on observe un saut de pression Δp . Rappeler la loi de LAPLACE qui relie le saut de pression à la traversée d'une interface à la courbure de cette interface. On vous demande de faire un schéma sur lequel vous dessinerez un exemple de courbure négative et un exemple de courbure positive. En déduire la différence de pression Δp_1 entre l'intérieur et l'extérieur d'une goutte sphérique de rayon R .
50. À partir de quel rayon la pression au sein d'une goutte d'eau est-elle supérieure de 1% à la pression atmosphérique ?
51. Lorsqu'on plonge un tube de verre très propre, cylindrique et de faible rayon R dans un liquide de masse volumique ρ , on constate que le liquide s'élève dans le tube d'une hauteur h . Le ménisque a la forme d'une calotte sphérique qui se raccorde aux parois avec un angle θ (voir figure 3). Montrer la relation (appelée loi de JURIN) liant h à l'angle θ , à R et à la constante $\lambda_c = \frac{\gamma}{\rho g}$.
52. Que se passe-t-il pour $\theta > \frac{\pi}{2}$? Connaissez-vous un exemple de fluide ayant ce comportement ?

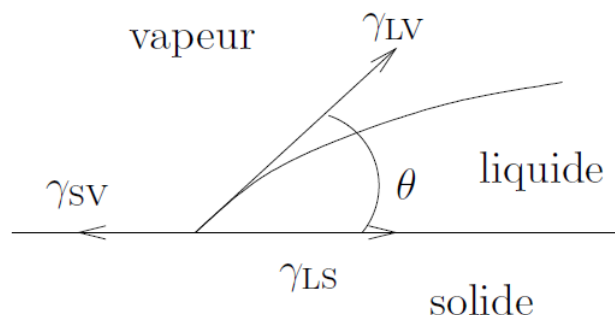
11 L'angle de contact

11.1 Loi de Young-Dupré

On dépose un liquide sur une interface horizontale plane. La ligne où se coupent les trois interfaces solide/liquide, liquide/vapeur et vapeur/solide est appelée ligne triple ; ici nous considérons que c'est

**Fig. 3** – Montée capillaire

un cercle. On peut interpréter la tension superficielle en terme de force linéique : pour une longueur dl , la ligne est soumise aux forces de tension superficielle exercées par les trois interfaces : $\gamma_{LS}dl$, $\gamma_{SV}dl$ et $\gamma_{LV}dl$ (voir figure 4).

**Fig. 4** – Équilibre d'une ligne triple

53. Montrer à l'équilibre la loi de YOUNG-DUPRÉ donnant l'angle de contact :

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LV}} \quad (11.1)$$

54. Dans quel plan la projection précédente a-t-elle été réalisée ? Que dire de la résultante dans le plan orthogonal à ce dernier ? Qu'en conclure ?

55. a) Par des arguments d'analyse dimensionnelle, construire deux énergies mises en jeu lors de la déformation du solide en fonction du module élastique E du solide, de la déformation δ du solide, du rayon R de la goutte et de la tension superficielle γ_{LV} .

b) Quels effets caractérisent ces deux énergies ?

c) Montrer alors que l'on peut construire une longueur $l_{éc}$ appelée *longueur élasto-capillaire* qui rend compte de la compétition entre les deux effets précédents.

d) Pour une goutte d'eau sur du verre de module de YOUNG $E = 69 \text{ GPa}$, donner un ordre de grandeur de la déformation du verre δ .

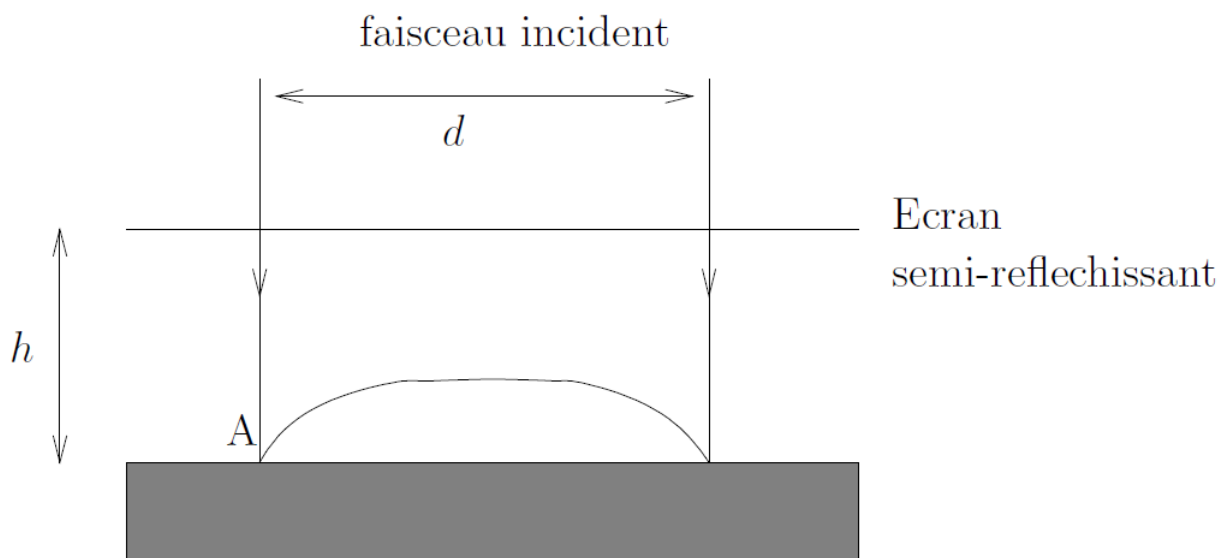


Fig. 5 – Mesure optique d'un angle de contact

11.2 Mesure optique d'un angle de contact

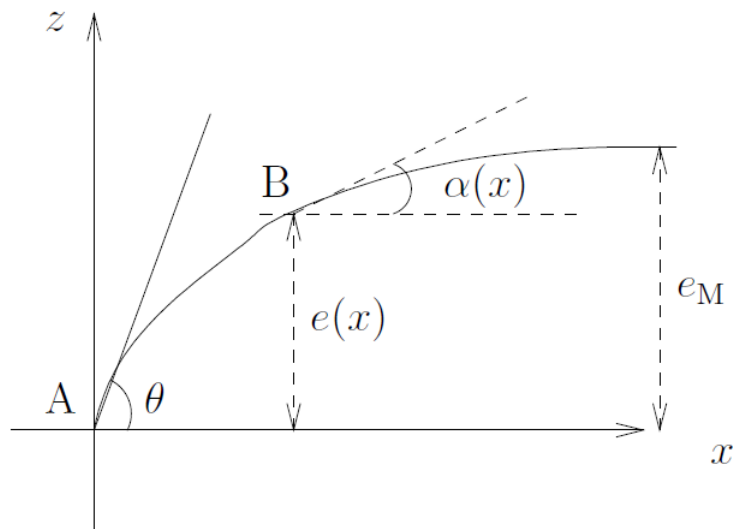
On envisage le dispositif représenté figure 5 : une goutte de liquide ayant la symétrie de révolution autour de l'axe Oz est posée sur le plan $z = 0$; elle est éclairée par un faisceau laser élargi d'axe Oz et de section circulaire de diamètre $d = 5$ mm. La trace du faisceau réfléchi par la goutte sur un écran semi-transparent confondu avec le plan $z = h$ est un disque de diamètre $D > d$.

56. Le faisceau réellement issu du laser possède un diamètre $d_0 = 1$ mm. Proposer un montage permettant d'en faire un faisceau de diamètre $d = 5$ mm à l'aide d'une lentille convergente de focale $f'_1 = 1$ cm suivi d'une lentille convergente de focale f'_2 . Déterminer f'_2 et la distance L entre les deux lentilles.
57. Soit un rayon incident arrivant en un point de la ligne triple. Déterminer l'angle que fait le rayon réfléchi avec Oz en fonction de θ .
58. Soit un rayon frappant la goutte ailleurs que sur la ligne triple. Montrer que ce rayon ne contribue pas au bord de la tache observée.
59. En déduire le diamètre D de la tache observée en fonction de θ , d et h . Calculer numériquement l'angle de contact θ pour une goutte d'eau sur un verre sachant que $d = 5$ mm, $h = 12$ cm et $D = 4,2$ cm.

11.3 Forme d'une flaque

Lorsque les dimensions d'une goutte sont suffisamment amples, la gravité l'applatit : on parle de flaque. On cherche ici la forme d'une flaque sur un plan $z = 0$. On supposera que le profil de l'interface est repéré par l'équation $z = e(x)$ et que la flaque est semi-infinie dans la direction x (de profondeur L). On note $\alpha(x)$ l'angle que fait son plan tangent avec l'horizontale. On prend l'origine des abscisses au niveau de la ligne triple : $\alpha(x = 0) = \theta$. On note e_M l'épaisseur de la flaque pour x très grand ; l'angle α correspondant est nul. La pression extérieure est uniforme et vaut p_0 (voir figure 6).

60. Déterminer la résultante des forces de pression selon x subie par l'interface AB en fonction de e_M , ρ , g , $e(x)$ et L .
61. L'interface AB subit aussi les forces de tension superficielle de normes $L\gamma_{SV}$ et $L\gamma_{LS}$ en A et de norme $L\gamma_{LV}$ en B . Déterminer la composante selon x des forces de tension superficielle subies par AB .

**Fig. 6** – Forme d'une flaque

62. En déduire qu'à l'équilibre, le profil $e(x)$ vérifie l'équation :

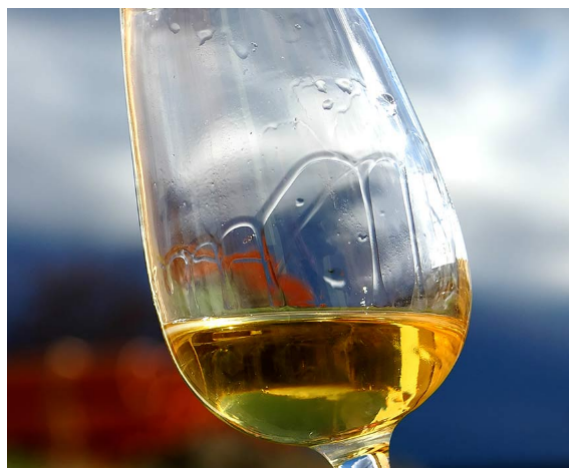
$$e_M e(x) - \frac{1}{2} e^2(x) = \lambda_C^2 (\cos \alpha(x) - \cos \theta) \quad (11.2)$$

où θ vérifie la loi de YOUNG-DUPRÉ.

63. En déduire l'expression de e_M en fonction de λ_C et θ .

64. On suppose $\alpha(x)$ et θ petits et on limite les calculs à l'ordre 2. Déduire des relations précédentes l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par $e(x)$. Déterminer $e(x)$ en fonction de e_M , x et λ_C . Tracer l'allure de $e(x)$. Interpréter.

12 Les larmes de vin

**Fig. 7** – Larmes de vin

Lorsque l'on fait tourner doucement un verre partiellement rempli de vin (tenu verticalement), il se forme sur les parois un film liquide qui évolue de façon surprenante. On constate que le vin remonte sur les parois et tend à s'accumuler vers le haut du verre en formant un bourrelet. Au bout de quelques instants, ce bourrelet se rompt par endroit et le vin redescend en gouttes évoquant

des larmes : ce sont les « larmes de vin » (voir figure 7). Ce phénomène, qui a été analysé pour la première fois par THOMSON en 1855 puis partiellement expliqué par MARANGONI en 1865, fait encore aujourd'hui l'objet de recherches actives comme exemple d'instabilité hydrodynamique.

Le vin forme un liquide vertical, d'épaisseur h supposée constante (x compris entre 0 et h). L'écoulement du vin, considéré comme un fluide incompressible visqueux (de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η supposées constantes), s'effectue le long d'une paroi qu'on suppose plane et infinie pour simplifier, confondue avec le plan yOz . La pression de l'air p_0 est supposée uniforme et constante. On s'intéressera seulement aux écoulements laminaires permanents de champ de vitesses $\vec{v} = v(x)\vec{e}_z$. Pour une interface uniforme eau pure-air : $\gamma(y, z) = \gamma_e = 70 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Pour une interface uniforme éthanol pur-air : $\gamma(y, z) = \gamma_{ol} = 24 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Le coefficient de tension superficielle du vin, considéré comme un mélange d'éthanol et d'eau, dépend de sa teneur en alcool en surface. Dans l'expérience des larmes du vin, l'évaporation de l'alcool entraîne une diminution de la concentration en éthanol à la surface du film lorsque z augmente. Le coefficient de tension superficielle dépend donc de z , mais pas de y : on le notera $\gamma(z)$. C'est le gradient vertical de tension superficielle qui entraîne le fluide (cet effet porte le nom d'effet MARANGONI). Dans toute la suite, on prendra $\gamma(z) = \gamma_0 + az$, où γ_0 et a sont des constantes.

12.1 Étude de l'interface vin-air

65. Justifier qualitativement que $a > 0$.
66. On considère un élément de surface $dydz$ de l'interface air-vin. Calculer la résultante dF_{ts} des forces de tension superficielle en fonction de a et de $dydz$.
67. Montrer que $\eta \frac{dv}{dx}(x = h) = a$ et $p(x = h, y, z) = p_0$.

12.2 Champ de vitesse dans le film

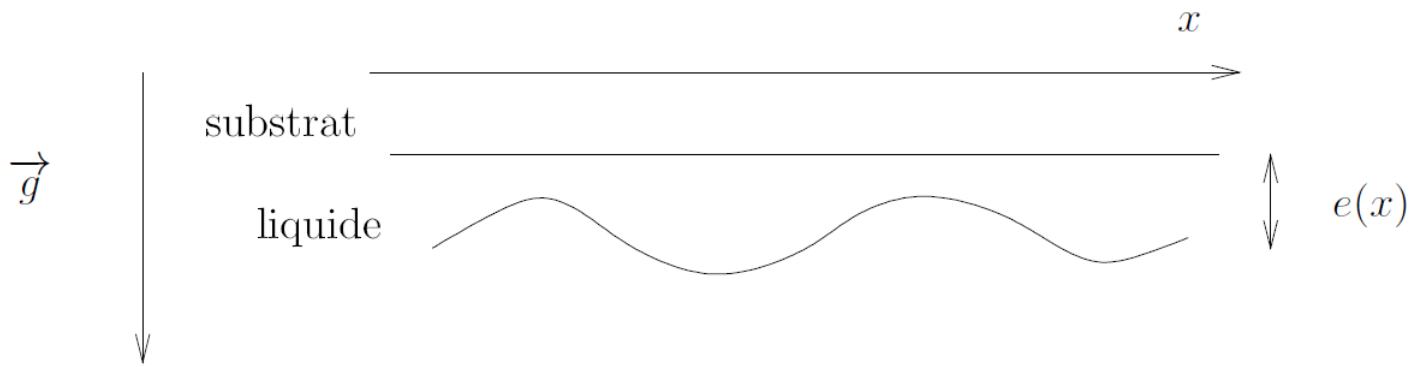
68. Justifier avec soin que pour le champ des vitesses étudié ici, l'accélération d'une particule fluide est nulle.
69. Montrer que la pression dans le fluide est uniforme et vaut p_0 .
70. Déterminer $v(x)$ en fonction de ρ , g , η , h et a .
71. Calculer le débit massique D_m transporté vers les z croissants sur une largeur L de film.
72. Montrer que pour qu'il y ait transport vers le haut, il faut que $a > a_c$, où a_c est une constante à déterminer en fonction de ρ , g et h .
73. Pour $a = a_c$, représenter le profil des vitesses $v(x)$.

13 Instabilité de Rayleigh-Taylor

L'instabilité de RAYLEIGH-TAYLOR, nommée en hommage aux physiciens britanniques Lord RAYLEIGH et G. I. TAYLOR, est une instabilité de l'interface séparant deux fluides de densités différentes, le plus lourd étant situé au-dessus du plus léger. Cette situation physique est clairement instable et l'instabilité se développe avec une longueur d'onde bien précise. On peut voir un exemple de l'instabilité formée d'un arrangement régulier de gouttes sur la paroi intérieure haute du réfrigérateur.

On étudie ici l'écoulement d'une épaisseur e_0 d'un liquide initialement déposé sur un substrat que l'on a retourné, de sorte que le liquide surplombe l'air. Initialement, l'épaisseur du liquide est e_0 et on considère une perturbation du type :

$$e(x) = e_0 + \delta e \cos qx \quad (13.1)$$

**Fig. 8** – Instabilité de RAYLEIGH-TAYLOR

avec $q = \frac{2\pi}{\lambda}$; $e(x)$ est donc l'épaisseur perturbée du fluide (voir figure 8). On suppose $\delta e \ll e_0 \ll \lambda$.

Deux effets antagonistes agissent sur la surface : la gravité tend à la déformer tandis que la tension superficielle s'oppose à l'accroissement de la déformation.

- 74.** Montrer que la différence d'énergie par unité de longueur dans la direction perpendiculaire entre un film ondulant de profil $e(x)$ et un film plat d'épaisseur e_0 est :

$$\Delta E = \frac{1}{4} \gamma \delta e^2 \lambda (q^2 - \kappa^2) \quad (13.2)$$

et exprimer κ en fonction des constantes pertinentes.

- 75.** Interpréter physiquement cette relation et préciser quelles longueurs d'onde sont instables.

On étudie maintenant la dynamique de l'instabilité : la grandeur $e(x, t)$ dépend du temps *via* son amplitude : $e(x, t) = e_0 + \delta e(t) \cos qx$. On montre alors en utilisant l'approximation de lubrification que $\delta e(t)$ obéit à l'équation différentielle suivante que l'on admettra :

$$\frac{d\delta e}{dt} = \delta e \frac{\gamma e_0^3}{3\eta} q^2 (\kappa^2 - q^2) \quad (13.3)$$

- 76.** Déterminer $\delta e(t)$ en fonction de $\delta e(0)$. Introduire un temps caractéristique τ .
- 77.** Comme l'avait compris RAYLEIGH, c'est la longueur d'onde correspondant au développement le plus rapide qui est sélectionnée. Étudier $\tau(q)$ et déterminer la longueur d'onde de l'instabilité.
- 78.** Estimer la longueur d'onde de l'instabilité observée dans le réfrigérateur.

★ FIN DU DEVOIR ★