

Introduction au calcul de modèles stellaires

Notations

M	masse totale de l'étoile
R	rayon de l'étoile
L	luminosité de l'étoile
M_{\odot}	masse solaire
R_{\odot}	rayon solaire
L_{\odot}	luminosité solaire

Observables

Les observables classiques sont :

- La luminosité L ;
- La température effective T_{eff} ;
- Le rayon R , lié aux précédents à travers la loi de Stefan-Boltzmann $L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4$;
- La composition chimique en surface.

Luminosité

La luminosité L est la puissance rayonnée par l'étoile. Nous mesurons depuis la Terre le flux $f = L/4\pi d^2$, où d est la distance de la Terre à l'étoile. Pour connaître la luminosité L nous avons donc besoin de connaître la distance. La distance peut se mesurer à travers la parallaxe.

Température

Les étoiles rayonnent presque comme un corps noir. À partir de leur spectres nous pouvons donc estimer leurs températures de surface.

Rayon

Une fois connus la luminosité et la température, nous pouvons calculer le rayon à partir de la loi de Stefan-Boltzmann. Si chaque mètre carré de la surface de l'étoile rayonne une puissance σT^4 , la luminosité est alors $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$.

Composition chimique

La composition chimique à la surface peut être aussi déterminée à partir du spectre.

Masse

La masse d'une étoile isolée est très difficile à déterminer. Mais la masse d'une étoile dans un système binaire (où deux étoiles tournent l'une au tour de l'autre) peut être déterminée à partir des lois de Newton.

Age

L'âge d'une étoile ne peut pas être mesurée directement. La seule façon de la déterminer est avec l'aide de modèles stellaires théoriques.

Le diagramme de Hertzsprung-Russel

Les trois quantités L , R , et T sont reliées par la loi de Stefan-Boltzmann. Nous avons donc besoin de juste deux d'elles pour caractériser la surface de l'étoile, par exemple L et T . Il est traditionnel de placer les étoiles dans un diagramme $T - L$, qui s'appelle le diagramme de Hertzsprung-Russel, ou diagramme HR (voir figure 1).

Dans cette figure la température augmente vers la gauche pour des raisons historiques. Nous voyons que la plupart des étoiles se situent dans une bande étroite dans le diagramme, la *séquence principale*. Au dessus de la séquence principale, vers la droite, nous avons des étoiles brillantes et relativement froides. Elles sont donc très grandes : ce sont les *géantes rouges*. Au dessous de la séquence principale, vers la gauche, nous avons des étoiles peu lumineuses mais chaudes. Elles sont donc très petites : ce sont les *naines blanches*.

Le diagramme HR a une place centrale dans la physique stellaire. Nous y reviendrons souvent.

Ordres de grandeur

$$L_{\odot} = 3.846 \times 10^{26} \text{ W}$$

$$R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$$

$$M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$T_{\odot} = 5777 \text{ K}$$

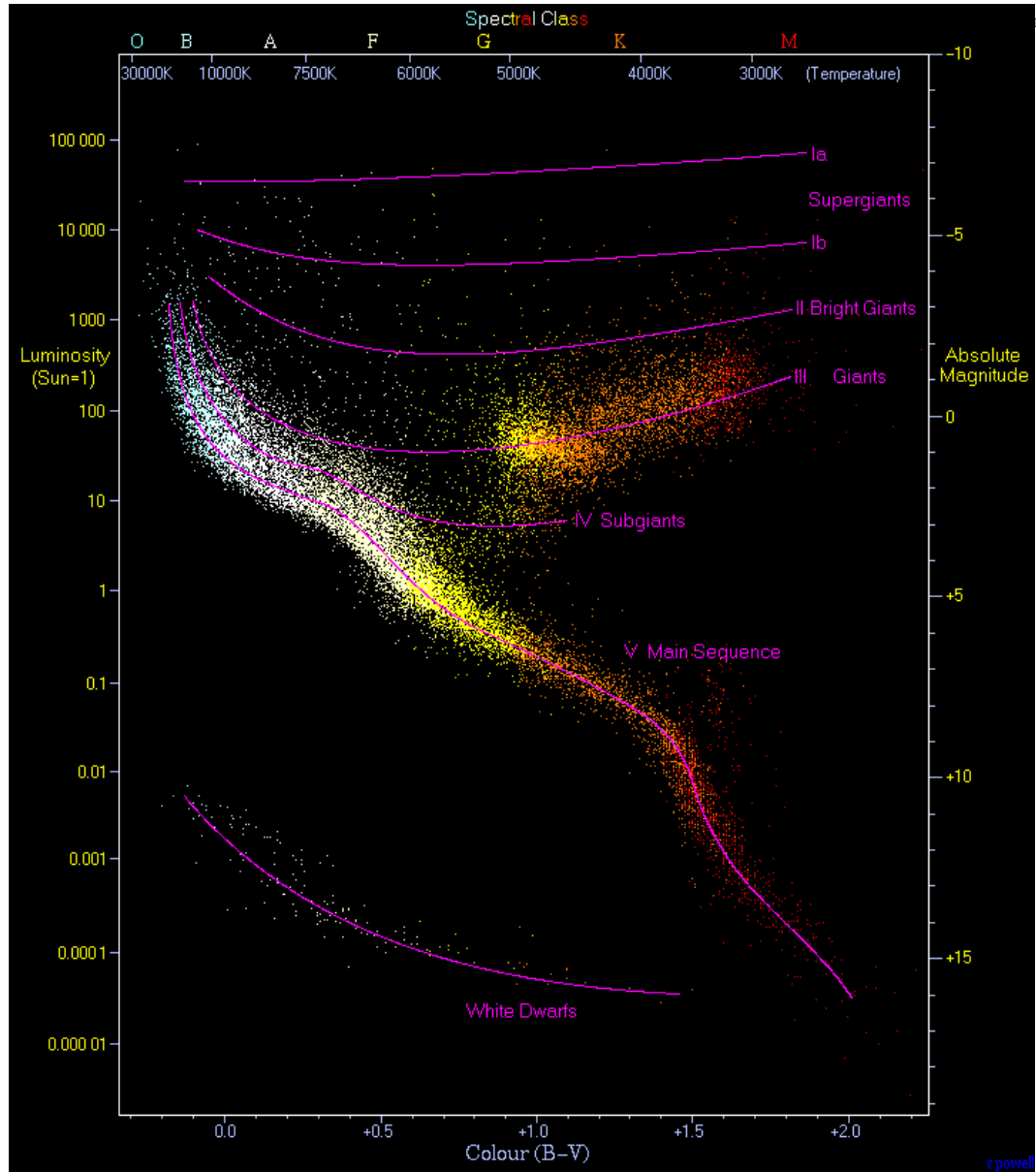
Pour les autres étoiles :

$$10^{-6} L_{\odot} < L < 10^6 L_{\odot}$$

$$10^4 \text{ m} < R < 10^3 R_{\odot}$$

$$0.08 M_{\odot} < M < 200 M_{\odot}$$

$$10^3 \text{ K} < T < 10^5 \text{ K}$$



m HR.

r.powell

La structure interne

Équilibre hydrostatique

En équilibre hydrostatique, le gradient de pression est équilibré par la gravité. En symétrie sphérique (condition appropriée pour les étoiles qui ne tournent pas trop rapidement), nous avons :

$$\frac{dP}{dr} = -g(r)\rho. \quad (1)$$

$$\boxed{\frac{dP}{dr} = -g(r)\rho = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho.} \quad (2)$$

Cette équation fait apparaître une autre quantité $m(r)$, la masse à l'intérieur d'une sphère de rayon r dans l'étoile. A partir de la définition de masse volumique, $m(r)$ doit vérifier

$$\boxed{\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho,} \quad (3)$$

parfois appelée *équation de continuité*. La masse $m(r)$ vérifie $m(0) = 0$ (pas de masse à l'intérieur d'un rayon nul !) et $m(R) = M$ (la masse à l'intérieur d'une sphère de rayon R est la masse totale de l'étoile).

Les deux équations (2) et (3) décrivent complètement la structure d'une étoile si $\rho = \rho(P)$. Mais en général ρ n'est pas une fonction de la pression seule ; elle dépend aussi de la température, $\rho = \rho(P, T)$ (l'équation d'état de la matière). Nous avons ainsi besoin d'une équation qui décrit la variation de la température dans les intérieurs stellaires. Des variations de température impliquent transport d'énergie.

Validité de l'hypothèse d'équilibre hydrostatique

Si l'équilibre hydrostatique n'est pas vérifié, les forces du gradient de pression et de la gravité ne s'équilibrent pas et la force résultante provoque une accélération :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} - \frac{Gm}{r^2}. \quad (4)$$

Supposons que le gradient de pression est entièrement absent. La gravité provoque alors le effondrement de l'étoile, dans une échelle de temps appelée *échelle de temps dynamique*,

$$\tau_{\text{dyn}} = \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \sim (G\bar{\rho})^{-1/2}, \quad (5)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité moyenne de l'étoile. Pour le soleil, $\bar{\rho} = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$ et donc $\tau_{\text{dyn}} \sim 54 \text{ min}$. Cette valeur est évidemment trop petite par rapport à l'âge du Soleil. Nous pouvons alors considérer que le Soleil est en *équilibre hydrostatique*. La plupart des étoiles vérifient aussi cette condition.

Le Théorème du Viriel

Les équations (2) et (3) ne forment donc pas un système fermé. Cependant, nous pouvons les utiliser déjà pour dériver un théorème très important pour l'astrophysique. Ce théorème relie les énergies potentielle gravitationnelle et interne d'un système en équilibre hydrostatique.

L'énergie potentielle est donnée par

$$E_g = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = - \int_0^R \frac{Gm}{r} \cdot 4\pi r^2 \rho dr = - \int_0^R \frac{Gm}{r^2} \rho \cdot 4\pi r^3 dr. \quad (6)$$

Nous reconnaissons dans la dernière intégrale le membre droit de l'équation d'équilibre hydrostatique. Nous allons utiliser cette équation pour faire une intégration par parties :

$$E_g = \int_0^R \frac{dP}{dr} \cdot 4\pi r^3 dr = 4\pi R^3 P_{\text{ext}} - \int_0^R 12\pi r^2 P dr. \quad (7)$$

Ici, P_{ext} est la pression à la surface ; ce terme étant en général négligeable, nous allons l'ignorer. Nous avons :

$$E_g = - \int_0^R 12\pi r^2 P dr = - \int_0^M \frac{3P}{\rho} dm. \quad (8)$$

Nous allons maintenant chercher une interprétation du terme P/ρ . Nous allons considérer deux limites : le cas où les vitesses des particules du gaz sont non-relativistes et le cas où les vitesses sont très proches de la vitesse de la lumière (cas relativiste).

Cas non-relativiste

En général, la pression d'un gas est donné par

$$P = \frac{1}{3} n \langle vp \rangle, \quad (9)$$

où p est la quantité de mouvement des particules du gas, v leur vitesse, et n le nombre de particules par unité de volume. Si le gaz est non-relativiste, $p = m_i v$, où m_i est la masse des particules, et nous avons alors

$$P = \frac{1}{3} n \langle m_i v^2 \rangle = \frac{2}{3} U, \quad (10)$$

où U est l'énergie interne du gaz par unité de volume (chaque particule a une énergie cinétique $m_i v^2/2$). Alors, P/ρ est juste $(2/3) u$, où u est l'énergie interne par unité de *masse*.

Pour un gas non-relativiste,

$$E_g = -3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dm = -2 \int_0^M u dm = -2E_i, \quad (11)$$

où E_i est l'énergie interne totale de l'étoile. Alors,

Théorème du viriel, cas non-relativiste : $2E_i + E_g = 0$.

(12)

Cas relativiste

Si les particules du gaz sont relativistes, $v = c$ et

$$P = \frac{1}{3} \langle pc \rangle = \frac{1}{3} U, \quad (13)$$

où on rappelle que pour une particule relativiste l'énergie est $E = pc$. Alors, $3P/\rho = u$.

Pour un gaz relativiste,

$$E_g = - \int_0^M u \, dm = -E_i. \quad (14)$$

Nous avons alors

Théorème du viriel, cas relativiste : $E_i + E_g = 0$.

(15)

Conséquences du théorème du viriel

1. L'énergie totale d'une étoile est la somme des énergies interne et potentielle gravitationnelle. L'étoile est un système lié si l'énergie totale est négative, car dans ce cas il faut fournir de l'énergie pour la disperser.

Dans le cas non-relativiste, $E_g = -2E_i$ et

$$E_{\text{tot}} = E_i + E_g = -2E_i < 0, \quad (16)$$

car l'énergie interne est toujours positive. Dans le cas relativiste, $E_g = -E_i$ et

$$E_{\text{tot}} = 0. \quad (17)$$

Le système n'est pas lié, une petite perturbation suffit pour le disperser.

Un gaz relativiste (exemple : un gaz de photons) ne peut pas former un système stable en équilibre hydrostatique. Ceci explique la limite supérieure de la masse des étoiles ($\sim 200M_\odot$) : quand la température est très élevée, la pression de la radiation domine, et l'étoile n'est plus stable (le gaz de photons est naturellement un gaz relativiste).

2. Supposons maintenant que le gaz de l'étoile est non-relativiste et que l'étoile n'a pas de sources d'énergie nucléaire. L'énergie rayonnée par unité de temps est alors l'énergie perdue par l'étoile :

$$L = - \frac{dE_{\text{tot}}}{dt}. \quad (18)$$

Nous avons vu que dans ce cas $E_{\text{tot}} = -E_i$, et nous avons

$$L = \frac{dE_i}{dt} > 0. \quad (19)$$

Contrairement à une braise, par exemple, l'étoile rayonne, perd de l'énergie et... se réchauffe ! L'explication de ce paradoxe apparent est que l'étoile a aussi un puits d'énergie gravifique qu'elle va utiliser : elle perd de l'énergie gravifique, la moitié de laquelle est utilisée pour réchauffer l'étoile, l'autre moitié est rayonnée et perdue.

Transport d'énergie

L'énergie peut être transportée dans l'intérieur des étoiles par convection ou par rayonnement (le transport par conduction est presque toujours négligeable). Nous abordons le transport par rayonnement d'abord.

Transport d'énergie par rayonnement

Dans l'intérieur des étoiles les photons sont sans cesse dispersés, absorbés et re-émis par les ions et électrons. Leur libre parcours moyen est donné par

$$\ell = \frac{1}{n\sigma}, \quad (20)$$

où n est le nombre de particules par unité de volume que interagissent avec les photons et σ est la section efficace. La section efficace mesure la probabilité d'absorption ou dispersion d'un photon par une particule. Les astrophysiciens préfèrent utiliser la section efficace par unité de masse (au lieu de par particule), aussi appelée l'opacité κ . Dans un volume V donné (avec une masse M),

$$n\sigma = \frac{N}{V}\sigma = \frac{\Sigma}{V} = \frac{M\kappa}{V} = \rho\kappa. \quad (21)$$

où Σ est la section efficace totale ($\sigma = \Sigma/N$ est la section efficace par particule, $\kappa = \Sigma/M$ la section efficace par unité de masse). L'équation (21) nous permet alors d'écrire, pour le libre parcours moyen,

$$\ell = \frac{1}{\kappa\rho}. \quad (22)$$

L'opacité est une fonction de la température et de la masse volumique, $\kappa = \kappa(\rho, T)$. Nous remarquons que plus l'opacité est élevée plus le parcours libre moyen est petit. Pour la zone radiative solaire, les valeurs typiques sont $\rho \sim 1 \text{ g cm}^{-3}$ et $\kappa \sim 1 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$. Le parcours libre moyen d'un photon est alors $\ell \sim 1 \text{ cm}$. Cette valeur est bien plus petite que le rayon solaire ($R_\odot = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$), ce que justifie l'*approximation diffusive*¹. Dans cette approximation le transport d'énergie par rayonnement est traité comme une diffusion :

$$\vec{F} = -D\vec{\nabla}u_{\text{rad}}, \quad (23)$$

où \vec{F} est le flux d'énergie transporté par rayonnement (énergie par unité de temps par unité de surface), D est le coefficient de diffusion et u_{rad} est l'énergie volumique du champ de radiation,

$$u_{\text{rad}} = aT^4. \quad (24)$$

Le coefficient de diffusion est donné par

$$D = \frac{1}{3}v\ell, \quad (25)$$

1. L'approximation diffusive peut être justifiée quand le parcours libre moyen des particules est très inférieur à l'échelle de variation de la quantité transportée.

où v est la vitesse des photons ($v = c$) et ℓ leur libre parcours moyen ($\ell = 1/\kappa\rho$). Le flux d'énergie transporté par rayonnement est alors

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \nabla T. \quad (26)$$

En symétrie sphérique seule la composante r du gradient est non nulle et nous avons

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}. \quad (27)$$

La luminosité $L(r)$ est l'énergie qui traverse une surface sphérique d'un rayon r à l'intérieur de l'étoile par unité de temps. Au centre, $L(0) = 0$ et $L(R) = L$ à la surface. La luminosité est donnée par $L(r) = 4\pi r^2 F$. Elle vérifie alors

$$L(r) = -\frac{16\pi r^2 acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr}, \quad (28)$$

ou

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L(r)}{16\pi r^2 acT^3}. \quad (29)$$

L'équation (29) décrit comment varie la température si l'énergie est transportée par rayonnement. Nous remarquons que le gradient de température devient élevé si :

- Le flux $F = L(r)/4\pi r^2$ est élevé.
- L'opacité κ est élevée.

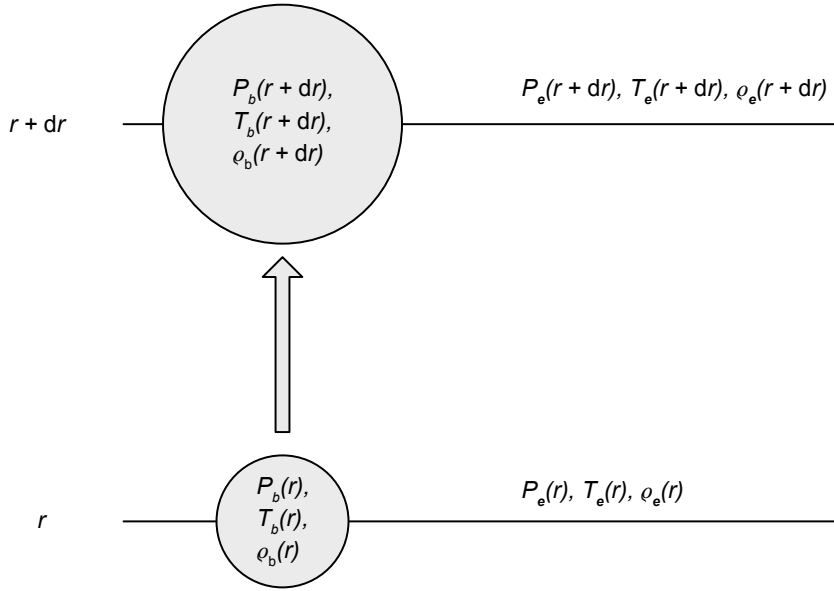
Transport d'énergie par convection

Le gradient de température ne peut pas augmenter indéfiniment. Pour voir pourquoi, considérons une couche située à une distance r du centre. Cette couche est caractérisée par une pression $P(r)$, une température $T(r)$ et une masse volumique $\rho(r)$. Nous déplaçons ensuite une bulle de gas de cette couche verticalement (voir Figure 2). Sa nouvelle position est $r + dr$. Le déplacement est supposé assez rapide pour qu'il se fasse sans perte de chaleur (c'est un processus adiabatique).

Pendant le déplacement la bulle se trouve en équilibre mécanique avec le milieu (sa pression P_b est égale à la pression de l'environnement P_e), mais pas forcément en équilibre thermique. Dans sa nouvelle position, $P_b(r + dr) = P_e(r + dr)$, mais en général $T_b(r + dr) \neq T_e(r + dr)$ et $\rho_b(r + dr) \neq \rho_e(r + dr)$. Si $T_b(r + dr) > T_e(r + dr)$, alors $\rho_b(r + dr) < \rho_e(r + dr)$. Dans ce cas la poussée d'Archimède éloigne la bulle davantage de sa position de départ : le milieu est instable et la convection démarre. Au contraire, si $T_b(r + dr) < T_e(r + dr)$, $\rho_b(r + dr) > \rho_e(r + dr)$. Alors la poussée d'Archimède pousse la bulle de retour à sa position de départ : le milieu est stable et il n'y a pas de convection.

Nous allons déterminer quel est le gradient de température critique pour la convection. Supposons que l'entropie massique du milieu augmente avec le

FIGURE 2: Une bulle est déplacée de r à $r + dr$.



rayon : $s_e(r + dr) > s_e(r)$. La bulle a conservé son entropie de départ (elle s'expand adiabatiquement) : $s_b(r + dr) = s_e(r)$. Alors la bulle est à la même pression que le milieu mais a une entropie inférieure. Comme

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \frac{c_P}{T} > 0, \quad (30)$$

la bulle est plus froide que le milieu. Elle est alors plus dense² et la poussée d'Archimède la pousse vers la position de départ. Le milieu est stable. Au contraire, si l'entropie du milieu diminue avec le rayon, l'entropie de la bulle devient supérieure à l'entropie du milieu. La bulle est plus chaude et moins dense que le milieu : la poussée d'Archimède l'éloigne davantage de la position de départ. Le milieu est instable. Le critère de stabilité que nous venons de dériver peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} > 0 & \quad \text{stable} \\ \frac{ds}{dr} < 0 & \quad \text{instable.} \end{aligned} \quad (31)$$

Cependant, le critère (31) n'est pas très convenient, car il introduit une nouvelle variable $s(r)$. Nous voulons plutôt avoir un critère qui concerne

2. Gaz parfaits : à pression constante la densité est inversement proportionnelle à la température

dT/dr . Pour le faire, nous allons considérer l'entropie comme une fonction de P et T . Alors,

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T dP. \quad (32)$$

La première dérivée thermodynamique est juste

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = \frac{c_P}{T}; \quad (33)$$

la seconde peut s'écrire³

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T = - \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P, \quad (34)$$

où nous avons utilisé le volume massique $V = 1/\rho$. Dans un gaz parfait,

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P = -\frac{\rho}{T}, \quad (35)$$

et nous écrivons

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P} \right)_T = -\frac{1}{\rho T}. \quad (36)$$

Nous divisons ensuite l'équation (32) par dr :

$$\frac{ds}{dr} = \frac{c_P}{T} \frac{dT}{dr} - \frac{1}{\rho T} \frac{dP}{dr} = \frac{c_P}{T} \frac{dT}{dr} + \frac{g}{T}, \quad (37)$$

ou

$$\frac{dT}{dr} = \frac{T}{c_P} \frac{ds}{dr} - \frac{g}{c_P}. \quad (38)$$

Le critère (31) s'écrit maintenant de la forme

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &> -\frac{g}{c_P} && \text{stable} \\ \frac{dT}{dr} &< -\frac{g}{c_P} && \text{instable.} \end{aligned} \quad (39)$$

Conservation et génération d'énergie

Considérons une couche entre r et $r + dr$. L'énergie qui entre dans cette couche par unité de temps est $L(r)$. L'énergie qui sort par unité de temps est $L(r + dr)$. La différence $L(r) - L(r + dr)$ est alors l'énergie gagnée (si positive) ou perdue (si négative) par la couche par unité de temps. Supposons d'abord que la couche n'a pas de source d'énergie nucléaire. Soit dq/dt l'énergie gagné par unité de masse dans la couche. Nous avons

$$[L(r) - L(r + dr)] \frac{1}{dm} = \frac{dq}{dt}, \quad (40)$$

où $dm = 4\pi r^2 dr$ est la masse de la couche. Utilisant la première loi de la thermodynamique ,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{du}{dt} + P \frac{dV}{dt}, \quad (41)$$

3. Utilisons l'énergie libre de Gibbs

$g = u - Ts + PV$, où u est l'énergie interne massique. Nous avons $dg = -sdt + VdP$, alors $(\partial g / \partial T)_P = -s$ et $(\partial g / \partial P)_T = V$. Enfin, nous utilisons le théorème de Schwartz $\partial / \partial V (\partial g / \partial T) = \partial / \partial T (\partial g / \partial V)$ pour obtenir $-(\partial s / \partial P)_V = (\partial V / \partial T)_P$.

où $V = 1/\rho$ est le volume par unité de masse. L'équation (40) devient alors

$$\frac{dL}{dr} = -4\pi r^2 \rho \left(\frac{du}{dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right). \quad (42)$$

Cette équation s'interprète de la façon suivante : si $dL/dr < 0$, il y a plus d'énergie qui entre dans la couche que celle que sort par unité de temps. Cette énergie est absorbée par la couche, et utilisée pour augmenter son énergie interne et réaliser du travail en dilatant la couche. Si, au contraire, $dL/dr > 0$, il y a génération d'énergie dans la couche, énergie qui vient de l'énergie interne de la couche et/ou du travail réalisé par la contraction. Le terme entre parenthèses dans l'équation (42) s'appelle souvent le taux de génération d'énergie gravifique $\varepsilon_{\text{grav}}$:

$$\varepsilon_{\text{grav}} = -\frac{du}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (43)$$

S'il y a des réactions nucléaires, nous définissons le taux de génération d'énergie nucléaire $\varepsilon(\rho, T)$ comme l'énergie générée par unité de masse par unité de temps. C'est naturellement une fonction de ρ et T , ainsi que de la composition chimique. Avec des réactions nucléaires, l'équation de conservation d'énergie est

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho (\varepsilon + \varepsilon_{\text{grav}}). \quad (44)$$

Coordonnées lagrangiennes et eulériennes

Les dérivées par rapport au temps dans la définition de $\varepsilon_{\text{grav}}$, eq. (43), doivent être calculées à $m(r)$ constant. En effet, nous comparons l'énergie et masse volumique de même couche physique à ages différents. La même couche physique peut avoir un rayon différent à un age différent. Si nous calculons les dérivées dans (43) à rayon constant, nous comparons des couches différentes à des instants différents.

Il est donc pratique de utiliser la coordonnée m au lieu de r . Comme m identifie une couche physique, cette coordonnée est une coordonnée lagrangienne : une coordonnée qui permet de suivre un élément de matière. La coordonnée r est une coordonnée eulérienne : c'est une coordonnée de position. A chaque instant un différent élément de matière peut se situer au même rayon r .

Pour exprimer les équations de structure interne en fonction de la coordonnée m au lieu de r , il suffit d'utiliser l'équation de continuité pour exprimer les dérivée par rapport à m : $d/dr = (dm/dr) d/dm$.

Les équations de structure interne

— Forme eulérienne :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho \quad (45)$$

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (46)$$

$$\frac{dT}{dr} = \begin{cases} -\frac{3\kappa\rho L(r)}{16\pi r^2 ac T^3}, & \text{si } \nabla < \nabla_{\text{ad}} \text{ (zone radiative)} \\ -\frac{T}{P} \nabla_{\text{ad}} \frac{Gm}{r^2} \rho, & \text{si } \nabla = \nabla_{\text{ad}} \text{ (zone convective)} \end{cases} \quad (47)$$

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \left(\varepsilon - \frac{du}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \right) \quad (48)$$

— Forme lagrangienne :

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{Gm}{4\pi r^4} \quad (49)$$

$$\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \quad (50)$$

$$\frac{dT}{dm} = \begin{cases} -\frac{3\kappa L(r)}{64\pi^2 r^4 ac T^3}, & \text{si } \nabla < \nabla_{\text{ad}} \text{ (zone radiative)} \\ -\frac{T}{P} \nabla_{\text{ad}} \frac{Gm}{4\pi r^4}, & \text{si } \nabla = \nabla_{\text{ad}} \text{ (zone convective)} \end{cases} \quad (51)$$

$$\frac{dL}{dm} = \varepsilon - \frac{du}{dt} + \frac{P}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (52)$$

Les solutions de ces équations sont les fonctions $P(r)$, $T(r)$, $m(r)$ et $L(r)$, dans le cas eulérien, et $P(m)$, $T(m)$, $r(m)$ et $L(m)$ dans le cas lagrangien.

Pour les obtenir, nous avons besoin de spécifier les *ingrédients physiques* :

- une description thermodynamique de la matière : l'équation d'état $\rho(P, T)$, ainsi que $u(P, T)$, $\nabla_{\text{ad}}(P, T)$, etc. ;
- une description de l'interaction entre la matière et la radiation : l'opacité $\kappa(\rho, T)$;
- les taux de génération d'énergie nucléaire $\varepsilon(\rho, T)$.

Les ingrédients physiques

L'équation d'état

L'équation d'état d'un gaz parfait est une bonne approximation pour les intérieurs stellaires :

$$P_{\text{gas}} = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T. \quad (53)$$

Cependant, quand la température est élevée la contribution de la pression de la radiation n'est pas négligeable :

$$P_{\text{rad}} = \frac{aT^4}{3}. \quad (54)$$

La pression est alors

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}. \quad (55)$$

Quand la densité est élevée, des effets quantiques apparaissent : la dégénérescence (voir plus tard).

L'opacité

Il y a trois sources principales d'opacité dans une étoile :

- Transitions libre-libre : interaction entre un photon et des ions / électrons libres. La matière est complètement ionisée. Une bonne approximation pour cette opacité est la loi de Kramers :

$$\kappa(\rho, T) = \kappa_0 \rho T^{-3.5}. \quad (56)$$

Cette source d'opacité décroît avec la température.

- Transitions lié-libre et lié-lié : un atome où un ion partiellement ionisé absorbe un photon. Très compliqué à modéliser : dépend de la structure des couches de l'atome. Augmente avec la température (normalement !).
- Dispersion de Thomson : dispersion de photons par des électrons libres. Dépend juste du nombre d'électrons par unité de volume n_e :

$$\kappa(\rho, T) = \kappa_e n_e. \quad (57)$$

Les taux de production d'énergie nucléaire

Nous allons voir que les taux de production d'énergie nucléaire dépendent très fortement de la température :

$$\varepsilon(\rho, T) = \varepsilon_0 \rho^a T^b, \quad (58)$$

avec $a \sim 1 - 2$ et $b \sim 4 - 40$. Les réactions nucléaires sont donc concentrées au centre de l'étoile.

Lois d'échelle

Les équations de structure interne peuvent être résolues numériquement. Nous pouvons cependant avoir déjà une idée de comment se comportent les étoiles en utilisant des lois d'échelle.

Une estimation de la pression typique de l'intérieur d'une étoile peut être obtenue à partir de l'équation d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2} \rho. \quad (59)$$

Nous pouvons remplacer la densité dans cette équation par

$$\rho \sim \frac{M}{R^3}, \quad (60)$$

la dérivée dP/dr par P/R , m par M . Nous obtenons ainsi

$$P \sim \frac{GM^2}{R^4}. \quad (61)$$

Pour le soleil, notre estimation donne alors $P \sim 10^{15}$ Pa. La température peut être estimée en utilisant l'équation d'état d'un gas parfait :

$$T = \frac{\mu P}{\mathcal{R} \rho}. \quad (62)$$

Nous remplaçons P avec l'équation (61), ρ avec (60) :

$$T \sim \frac{\mu G}{\mathcal{R}} \frac{M}{R}. \quad (63)$$

Pour le soleil, avec $\mu \sim 0.6$ nous obtenons $T \sim 1.4 \times 10^7$ K.

Nous allons maintenant estimer la luminosité dans le cas d'une étoile dominée par le transport par rayonnement. Nous allons utiliser l'équation de transport d'énergie dans la forme (29). Nous remplaçons dT/dr par T/R , et nous obtenons

$$L \sim \frac{16\pi ac}{3} \frac{R^4 T^4}{M \kappa}. \quad (64)$$

Si l'étoile n'est pas trop massive (si sa température n'est pas trop élevée), l'opacité dans la plupart de son intérieur est l'opacité de Kramers $\kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}$. Alors,

$$L \sim L_0 \frac{M^{5.5}}{R^{0.5}}, \quad (65)$$

où L_0 est une constante.

Si la masse de l'étoile est élevée, son opacité est dominée par l'opacité de Thomson qui est une constante. Alors,

$$L \sim L_1 M^3, \quad (66)$$

où L_1 est une constante.

Les équations (65) et (66) nous montrent un fait surprenant : la luminosité ne dépend pas des taux de production d'énergie nucléaire ! En fait, la luminosité d'une étoile est celle que l'opacité laisse échapper : les réactions nucléaires se chargent de produire cette énergie automatiquement. Nous allons voir plus tard comment elles le font.

Les équations (65) et (66) peuvent être utilisées pour estimer la variations du temps de vie des étoiles en fonction d leurs rayons et masses. La quantité de carburant nucléaire disponible par l'étoile est proportionnelle à la masse de l'étoile. Le temps de vie est alors

$$\tau \sim \frac{M}{L}. \quad (67)$$

Pour une étoile moins massive,

$$\tau \sim \frac{R^{0.5}}{M^{4.5}}; \quad (68)$$

pour une étoile plus massive,

$$\tau \sim \frac{1}{M^2}. \quad (69)$$

Le temps de vie d'une étoile dépend fortement de la masse : une étoile massive a une durée de vie bien plus courte.

Exemples de structure interne

Cas $M = 1M_{\odot}$

Cette étoile est encore jeune. Elle a un coeur convectif, mais il va disparaître bientôt. Pendant le temps que cette étoile brûle hydrogène en hélium, elle a un coeur radiatif et une enveloppe convective. La convection dans l'enveloppe est due à l'opacité très élevée.

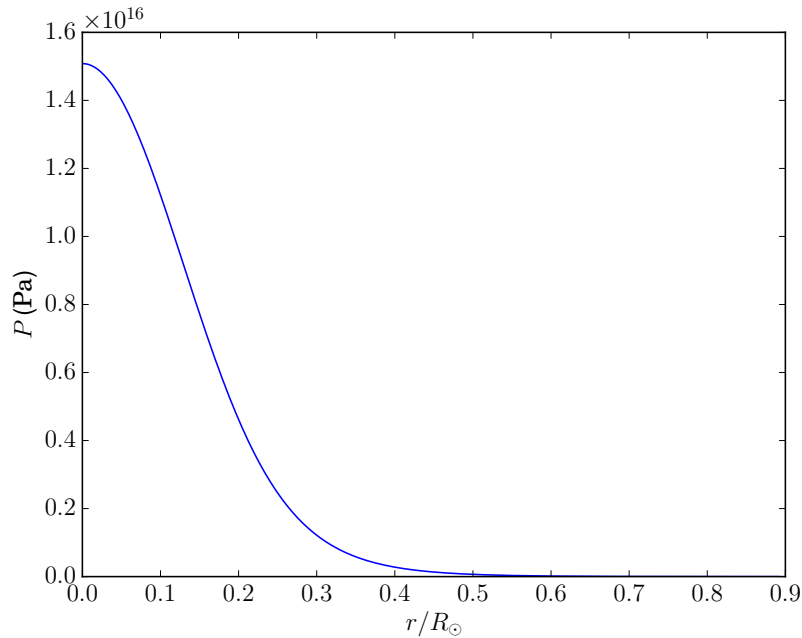


FIGURE 3: Pression $P(r)$ dans une étoile de $M = 1M_{\odot}$. Comparez les valeurs avec l'estimation donnée par l'équation (61).

Cas $M = 3M_{\odot}$

Cette a un coeur convectif, et une enveloppe radiative. L'enveloppe est radiative parce que sa température est plus élevée que la température de l'enveloppe de l'étoile de $1M_{\odot}$. Son opacité (décrite par la loi de Kramers) est alors plus petite. Le coeur est convectif car les réactions nucléaires sont très concentrées au centre. La luminosité dans les régions centrales ne peut être transportée par rayonnement seulement.

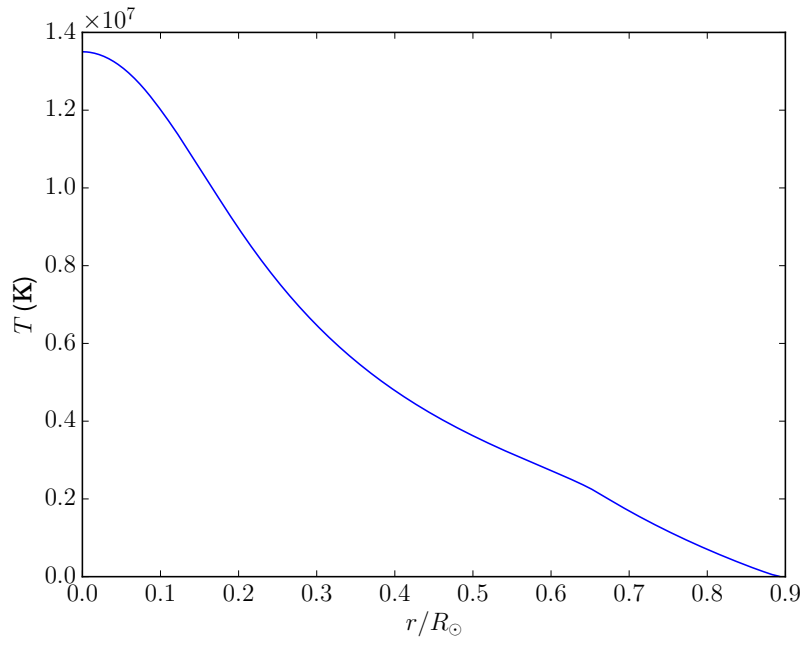


FIGURE 4: Température $T(r)$ dans une étoile de $M = 1M_{\odot}$. Comparez les valeurs avec l'estimation donnée par l'équation (63)

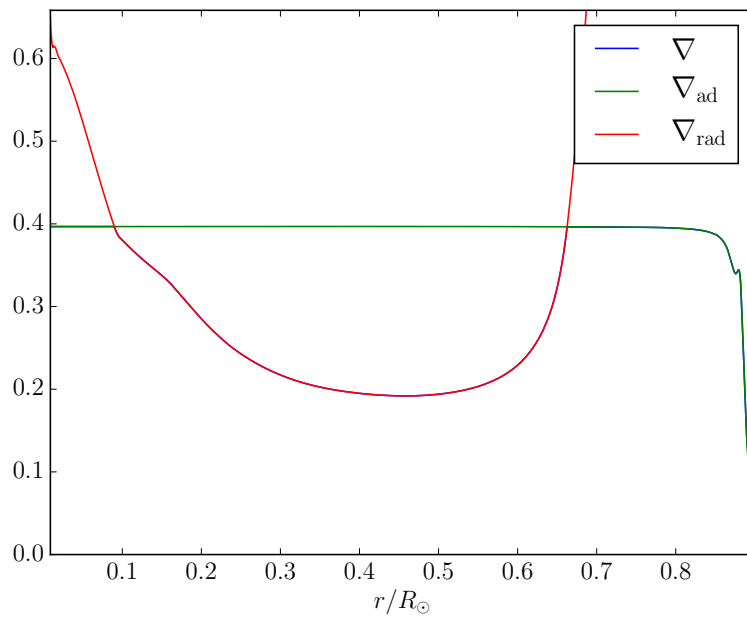


FIGURE 5: Les gradients ∇ dans une étoile de $M = 1M_{\odot}$. On remarque que le coeur est convectif (il est en train de devenir radiatif), ainsi que l'enveloppe.

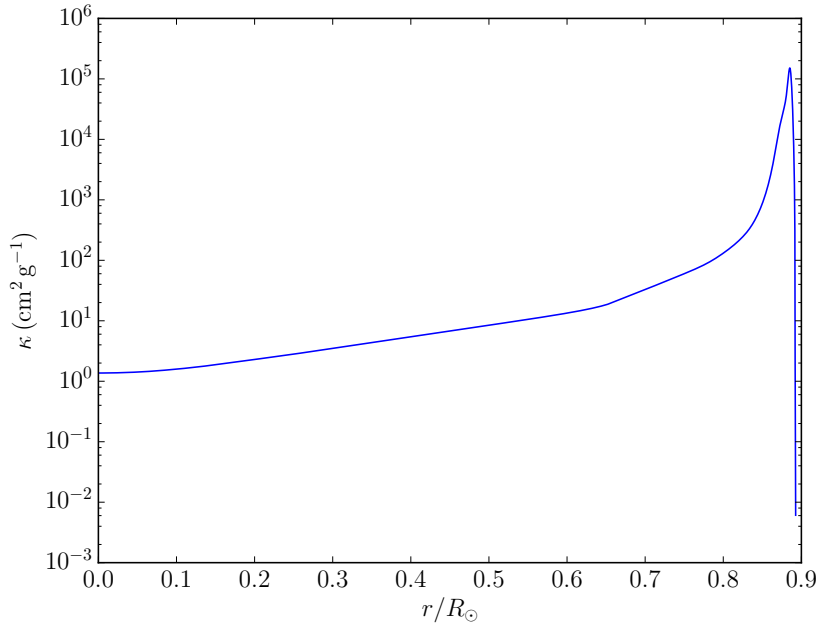


FIGURE 6: L'opacité dans une étoile de $M = 1M_\odot$. L'opacité au centre est presque constante (opacité de Thomson). Elle augmente (beaucoup) vers l'extérieur. Cette augmentation est due au fait que la température décroît vers l'extérieur, et que l'opacité est l'opacité de Kramers dans cette zone.

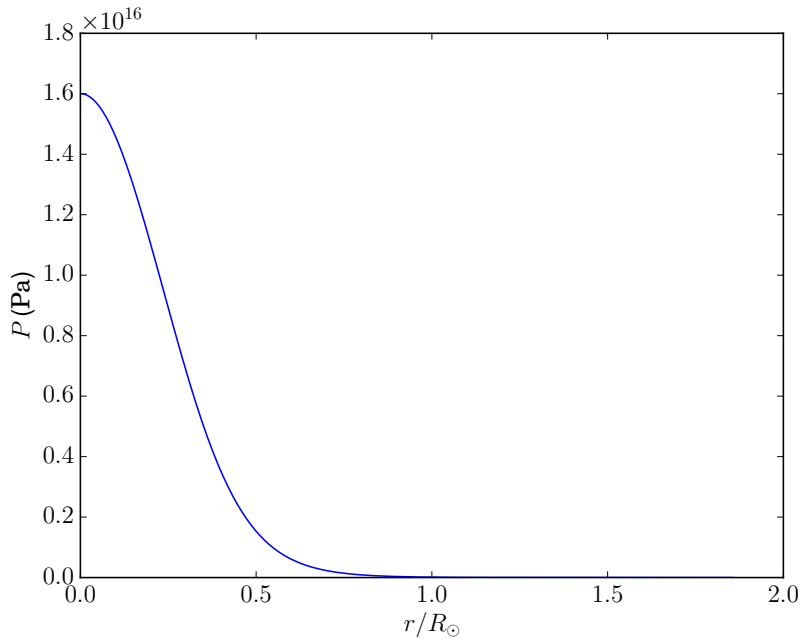


FIGURE 7: Pression $P(r)$ dans une étoile de $M = 3M_\odot$.

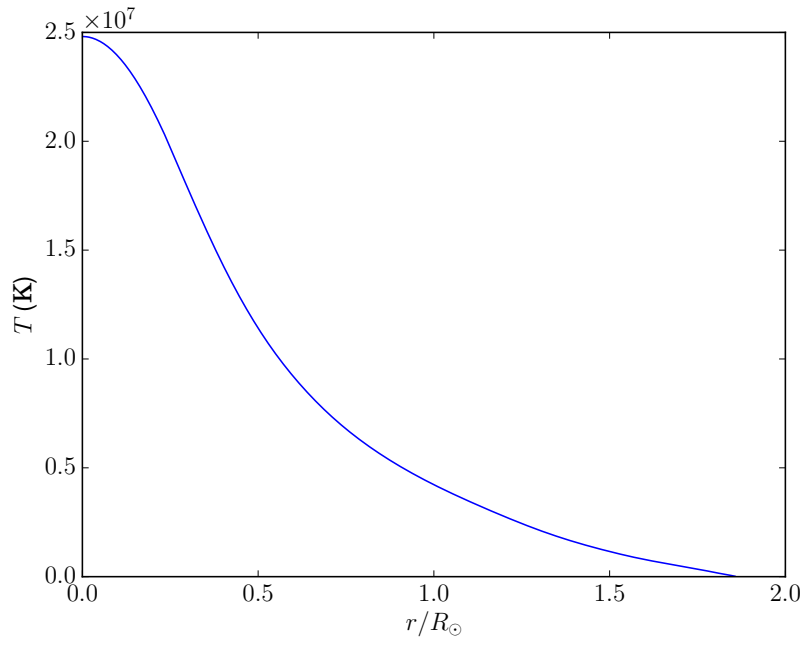


FIGURE 8: Température $T(r)$ dans une étoile de $M = 3M_{\odot}$.

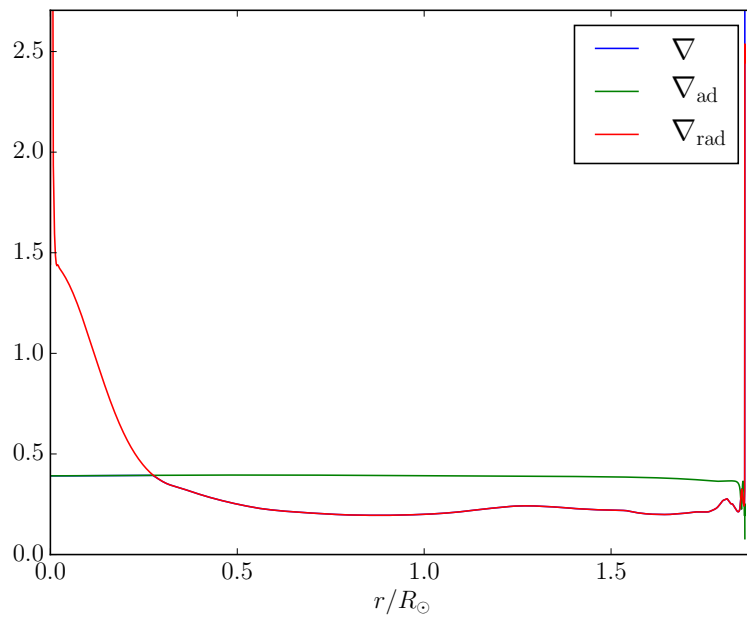


FIGURE 9: Les gradients ∇ dans une étoile de $M = 1M_{\odot}$. On remarques que le coeur est convectif et l'enveloppe est radiative.

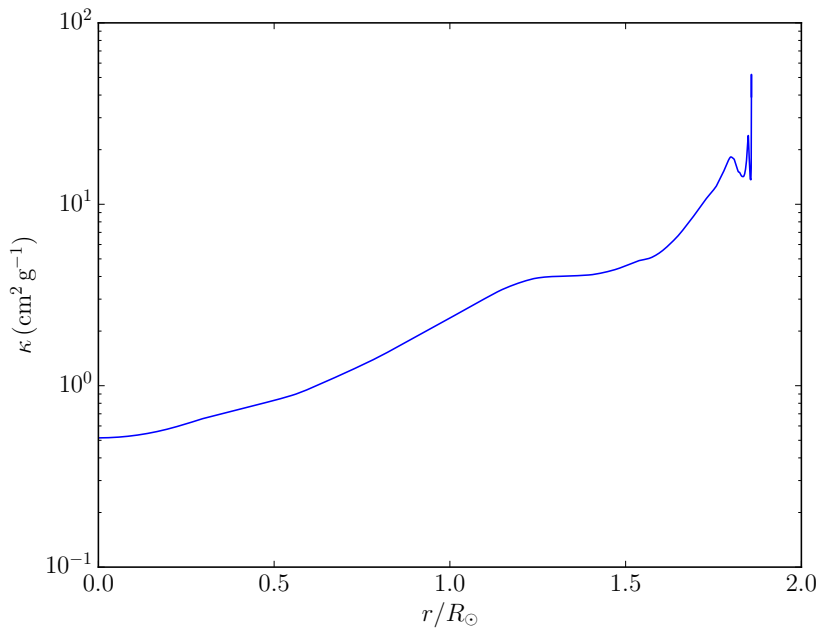


FIGURE 10: L'opacité dans une étoile de $M = 3M_{\odot}$. L'opacité au centre est presque constante (opacité de Thomson). Elle augmente vers l'extérieur. Cette augmentation est due au fait que la température décroît vers l'extérieur, et que l'opacité est l'opacité de Kramers dans cette zone. Cependant, l'opacité n'augmente autant que dans le cas $1M_{\odot}$ car la température est plus élevée ici.