

Département de physique

Systèmes bouclés

- Rédaction du cours et travail expérimental associé :

Jean-Baptiste Desmoulin (P.R.A.G.)
mail : desmouli@physique.ens-cachan.fr

Sommaire

Chapitre A :

Présentation de la transformée de Laplace et application aux systèmes étudiés

Chapitre B :

Fonction de transfert et stabilité.

Chapitre C :

Systèmes rendus volontairement instables : les oscillateurs.

Oscillateurs étudiés :

- Oscillateur électronique à boucle de réaction.
- Laser à Gaz.

Chapitre D :

Systèmes bouclés stables : application à l'asservissement d'une grandeur physique.

Systèmes asservis étudiés :

- Vitesse d'un moteur à courant continu.
- Flux lumineux d'une photodiode.
- Capteur de courant à zéro de flux.
- Boucle à verrouillage de phase.

Quelques notions importantes sur les systèmes bouclés

L'objectif de ce cours est de présenter quelques notions générales sur les oscillateurs et les systèmes asservis. Le cours commence par une présentation sommaire de la transformée de Laplace qui sera l'outil principal utilisé pour formaliser les modèles employés. Il se poursuit par quelques définitions relatives aux systèmes bouclés et par une présentation de critères permettant de discuter de leur stabilité. On présente alors successivement le cas de systèmes rendus volontairement instables (les oscillateurs) puis le cas de systèmes pour lesquels on recherche absolument la stabilité (les systèmes asservis).

I. Présentation de la transformée de Laplace, application aux systèmes étudiés.

I.1. Systèmes étudiés:

Nous allons nous intéresser à des systèmes linéaires et invariants (ou stationnaires). Il s'agit, par exemple, de systèmes tels, que les relations entre les grandeurs d'entrée et les grandeurs de sortie peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Par ailleurs, si le système n'est pas rigoureusement linéaire, on arrive tout de même souvent à le linéariser autour d'un point de fonctionnement...

I.2. Transformée de Laplace:

La transformée de Laplace permet de remplacer les équations différentielles qui relient les grandeurs caractéristiques de nos systèmes par des relations à base de fractions rationnelles.

I.2.1. Définition.

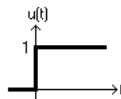
• Considérons une fonction f de la variable réelle t supposée nulle pour les valeurs négatives de t . La transformée de Laplace de f , notée F est une fonction de la variable complexe p définie par

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \cdot dt$$

Cette fonction n'est définie que pour les valeurs de p telles que l'intégrale converge... La convergence de cette intégrale impose notamment que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) \cdot e^{-p \cdot t}) = 0$$

• rq: Par la suite, les fonctions étudiées seront causales (nulles pour des valeurs de t négatives). Toutes les fonctions causales peuvent se mettre sous la forme du produit d'une fonction par l'échelon de Heaviside $u(t)$.



I.2.2. Propriétés.

- unicité.
- linéarité.

I.2.3. Formules.

Si L représente l'action "transformée de Laplace" et si $F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$, alors, on a les relations suivantes:

$$L[f(a \cdot t)] = \frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau \cdot p} \cdot F(p)$$

$$L[e^{-\omega \cdot t} \cdot f(t)] = F(p + \omega)$$

$$L\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = p \cdot F(p) - f(0^-)$$

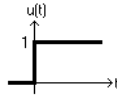
$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0^-) - f'(0^-)$$

$$L\left[\int_0^t f(x) \cdot dx\right] = \frac{F(p)}{p}$$

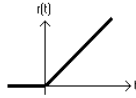
• Produit de convolution:
$$L\left[\int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) \cdot d\tau\right] = F(p) \cdot G(p)$$

I.2.4. Transformée de Laplace de signaux particuliers.

- échelon $u(t)$: $L[u(t)] = \frac{1}{p}$



- fonction rampe : $r(t) = a.t.u(t)$ $L[r(t)] = \frac{a}{p^2}$



- Impulsion de Dirac $\delta(t)$ (nulle partout sauf en 0 et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$) : $L[\delta(t)] = 1$



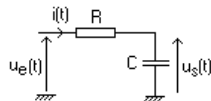
I.2.5. Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.F(p)$$

Ce théorème n'est valable que si $F(p)$ n'a pas de pôles à partie réelle positive ou nulle (tous les pôles à partie réelle strictement négative). Il peut être utile pour connaître la réponse en régime permanent d'un système.

I.3. Définition de la fonction de transfert à partir d'un exemple:

Pour ne pas perdre de temps dans des calculs pénibles, nous allons étudier l'exemple simple suivant



Ce système peut être décrit par l'équation différentielle suivante:

$$u_e(t) = R.i(t) + u_s(t) = R.C. \frac{du_s(t)}{dt} + u_s(t)$$

Si on suppose la capacité initialement déchargée ($u_s(0)=0$), alors, en utilisant la transformée de Laplace, on obtient la relation:

$$U_e(p) = R.C.p.U_s(p) + U_s(p) \text{ d'où la fonction de transfert du système}$$

$$\frac{U_s(p)}{U_e(p)} = \frac{1}{1 + R.C.p}$$

Remarque: Pour l'instant, nous n'avons fait aucune hypothèse sur la forme de $u_e(t)$... Cette façon de définir la fonction de transfert est donc beaucoup plus générale que celle qui ne concerne que les systèmes en régime sinusoïdal forcé ($p = j.\omega$)...

Exemples de réponses:

- réponse à un échelon.

Si $u_e(t) = E.u(t)$ ($u(t)$ = échelon de Heaviside), alors $U_e(p) = E/p$. Dans ce cas, on a

$$U_s(p) = \frac{E}{p} \cdot \frac{1}{1 + R.C.p}$$

que l'on peut décomposer en fraction rationnelle ce qui donne

$$U_s(p) = E \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{-R.C}{1 + R.C.p} \right) = E \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + 1/R.C} \right)$$

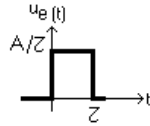
et en identifiant:

$$u_s(t) = E.u(t) - E.e^{-t/R.C}.u(t) = E.u(t) \cdot [1 - e^{-t/R.C}]$$

Ce qui est bien le résultat attendu...

- réponse à une fenêtre (impulsion de Dirac « réelle ») :

Cette fonction se présente sous la forme suivante (on a fait en sorte que son aire soit indépendante de τ):



avec $u_e(t) = (A/\tau).u(t) - (A/\tau).u(t - \tau)$

soit $U_e(p) = \frac{A/\tau}{p} \cdot (1 - e^{-\tau \cdot p})$

Connaissant la fonction de transfert, on en déduit que

$$U_s(p) = \frac{A/\tau}{p} \cdot \frac{1}{1 + R.C.p} \cdot (1 - e^{-\tau \cdot p})$$

et en identifiant

$$u_s(t) = (A/\tau).u(t) \cdot [1 - e^{-t/R.C}] - (A/\tau).u(t - \tau) \cdot [1 - e^{-(t-\tau)/R.C}]$$

• réponse à une impulsion de Dirac (« Aire » A)..

Cette réponse correspond à celle du cas précédent quand τ tend vers 0. On obtient alors

$$u_s(t) = (A/R.C).e^{-t/R.C}.u(t)$$

• Cas du régime sinusoïdal forcé.

Si on pose $p = j.\omega$, la fonction de transfert prend la forme qu'on lui connaît en régime sinusoïdal forcé...ce régime correspond donc au cas particulier où p est imaginaire pur...

Remarque

Dans le cas où l'on considère des signaux quelconques, on peut définir les impédances des dipôles passifs en utilisant la transformée de Laplace :

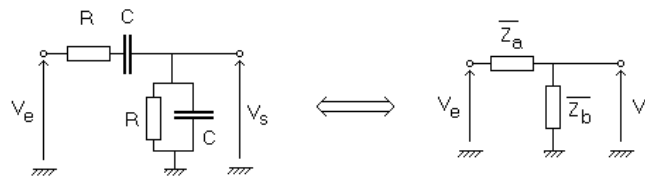
• Inductance : $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ donne $U(p) = L.p.I(p)$ soit $\overline{Z_L} = L.p$

• Condensateur : $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$ donne $I(p) = C.p.U(p)$ soit $\overline{Z_C} = \frac{1}{C.p}$

Rq : Dans le cas particulier du régime sinusoïdal, $p = j.\omega$ et on retombe sur ce que l'on connaît déjà.

• Détermination de la fonction de transfert d'un filtre :

On considère le filtre suivant (on le retrouvera plus tard dans l'oscillateur à pont de Wien) :



La fonction de transfert de ce filtre vaut

$$\frac{\overline{V_s(p)}}{\overline{V_e(p)}} = \frac{\overline{Z_b}}{\overline{Z_a} + \overline{Z_b}}$$

$$\text{avec } \overline{Z_a} = R + \frac{1}{C.p} = \frac{1 + R.C.p}{C.p} \quad \text{et} \quad \overline{Z_b} = \frac{R}{R + \frac{1}{C.p}} = \frac{R}{1 + R.C.p}$$

Finalement, on a

$$\frac{\overline{V_s(p)}}{\overline{V_e(p)}} = \frac{\frac{R}{1 + R.C.p}}{\frac{1 + R.C.p}{C.p} + \frac{R}{1 + R.C.p}} = \frac{1}{1 + \frac{(1 + R.C.p)^2}{R.C.p}} = \frac{1}{3 + \frac{1}{R.C.p} + R.C.p} = \frac{1/3}{1 + (1/3) \cdot \left[R.C.p + \frac{1}{R.C.p} \right]}$$

Cette fonction de transfert correspond, en régime harmonique à un filtre passe-bande de fréquence centrale $1/(2.\pi.R.C)$.

II. Fonction de transfert et stabilité.

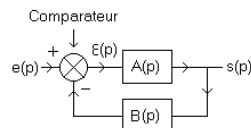
Dans cette partie, nous allons nous intéresser au problème de la stabilité des systèmes bouclés. Commençons par rappeler les définitions essentielles concernant ces derniers.

II.1. Rappels sur les systèmes bouclés.

Un système bouclé comprend au moins une boucle de rétroaction, destinée à ce que le signal d'entrée ait une action tempérée par le signal de sortie. L'objectif est souvent de permettre au système de réagir au mieux, sans action extérieure. Cependant, dans le cas des oscillateurs, le système bouclé est réalisé afin d'être maintenu dans un état instable.

II.1.1. Symbolique.

Un système bouclé peut se représenter par le schéma bloc suivant:



Dans un tel système, les blocs sont orientés. On peut notamment écrire que :

$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= e(p) - B(p).s(p) \\ s(p) &= A(p).\varepsilon(p)\end{aligned}$$

On constate que le comparateur réalise une simple soustraction.

II.1.2. Définitions.

- ε est appelé signal d'erreur.
- $A(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne directe.
- $B(p)$ est la fonction de transfert de la chaîne de retour.
- Le produit $A(p).B(p)$ représente la **fonction de transfert en boucle ouverte**.
- La **fonction de transfert en boucle fermée** du système est le rapport entre la sortie et l'entrée du système bouclé qui vaut

$$\frac{s(p)}{e(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}$$

II.2. Exemples de définitions de la stabilité.

Il existe plusieurs façons d'aborder la notion de stabilité. On peut notamment retenir qu'un système sera dit stable (au sens strict) si et seulement si, quand il est soumis à une impulsion de Dirac en entrée, il revient à sa position initiale de repos après un temps de relaxation.

On pourrait trouver bien d'autres définitions pour aborder ce problème. La définition employée dépend en général du type de système que l'on est amené à étudier.

II.3. Exemples de critères permettant de juger de la stabilité d'un système.

Nous allons présenter quelques techniques pour aborder la stabilité d'un système. Il faut noter qu'il en existe beaucoup d'autres...

Critère algébrique

Pour qu'un système linéaire soit stable au sens strict, il faut et il suffit que sa fonction de transfert **en boucle fermée** ne comporte pas de pôle à partie réelle positive ou nulle. Tous les pôles doivent donc être à partie réelle strictement négative.

On s'intéresse à un système dont la fonction de transfert est une fraction rationnelle. On supposera que le système finit toujours par couper, au-delà d'une fréquence donnée (cas de tout système physique), ce qui implique que l'ordre du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot p^i}{\sum_{k=0}^m \beta_k \cdot p^k} \quad \text{avec } n < m$$

Le dénominateur présente des pôles réels notés a_k et des pôles complexes notés $c_k + j.d_k$. La fonction de transfert peut alors se mettre sous la forme suivante

$$T(p) = \frac{\sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot p^i}{\sum_{k=0}^m \beta_k \cdot p^k} = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{A_k}{p - a_k} + \sum_{k=k_0+1}^m \frac{B_k \cdot p + C_k}{(p - c_k)^2 + d_k^2}$$

On envoie une impulsion de Dirac d'« aire » K en entrée. La transformée de Laplace de la réponse est égale à celle de la fonction de transfert qui, compte tenu des hypothèses faites, peut se mettre sous la forme

$$S(p) = T(p) \cdot K \cdot \text{TL}(\delta(t)) = K \cdot T(p)$$

La réponse temporelle en sortie $s(t)$ peut donc s'écrire sous la forme

$$s(t) = K \cdot \left[\sum_{k=1}^{k_0} A_k \cdot e^{a_k \cdot t} + \sum_{k=k_0+1}^m D_k \cdot e^{c_k \cdot t} \cdot \sin(d_k \cdot t + \Phi_k) \right]$$

Si certains pôles sont à partie réelle positive, on constate que la réponse $s(t)$ sera amenée à diverger quand t va tendre vers l'infini. Dans le cas de pôles à partie réelle nulle, il se peut que le système oscille.

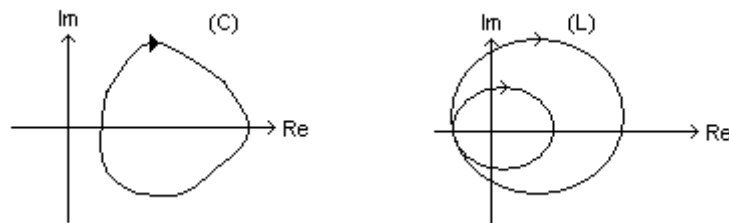
Critères géométriques

Critère général : Critère de Nyquist.

L'intérêt du critère de Nyquist, c'est de déterminer le nombre de pôles à partie réelle positive de la fonction de transfert en boucle fermée, sans avoir à les calculer, car ce n'est pas toujours possible. En effet, alors qu'il est souvent assez simple d'identifier la fonction de transfert en boucle ouverte, il est plus délicat de connaître la fonction de transfert en boucle fermée.

Théorème :

Considérons une variable complexe p décrivant un lieu (C) dans le plan complexe. Considérons une fonction de la variable complexe $F(p)$. Lorsque p décrit (C) , $F(p)$ décrit le lieu (L) .



Le nombre de fois que le lieu (L) entoure l'origine est lié au nombre de pôles et de zéros de $F(p)$ qui sont situés à l'intérieur du lieu (C) . On notera P et Z les nombres respectifs de pôles et de zéros (comptés avec leur ordre de multiplicité si certains pôles sont multiples). Dans ce cas, quand le point p décrit complètement la courbe (C) dans le sens des aiguilles d'une montre, le nombre de tours N qu'effectue dans le sens trigonométrique le lieu de $F(p)$ autour de l'origine est donné par

$$N = P - Z$$

Discussion sur la stabilité d'un système à partir du théorème précédent:

• Nous allons étudier un système bouclé à retour unitaire dont la fonction de transfert en boucle fermée est de type

$$F_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$$

Les pôles de cette fonction de transfert sont les zéros de $1 + H(p)$. Il va nous falloir rechercher le nombre de ces zéros et notamment le nombre de ceux qui sont à partie réelle positive. Nous allons appliquer le théorème précédent

à $1+H(p)$ en utilisant un contour (C) qui décrit tout le demi plan des nombres complexes à partie réelle positive. Nous noterons respectivement P et Z le nombre de pôles et de zéros de $1+H(p)$ dans ce demi plan.

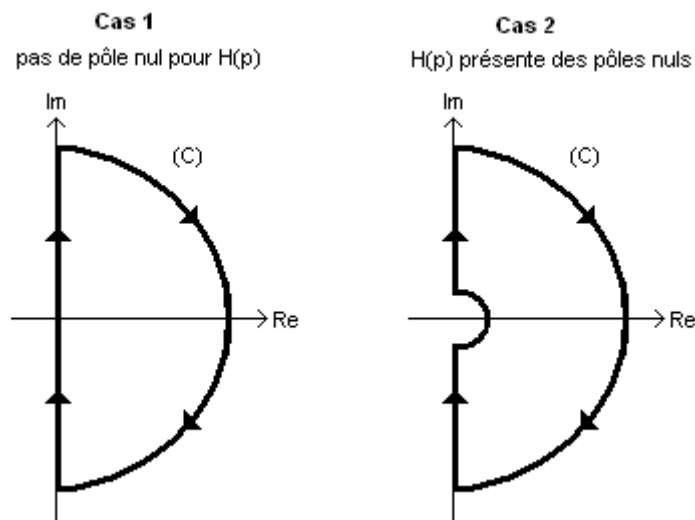
L'objectif de la suite est de déterminer Z, connaissant P et le nombre de tours que fera le contour (L) autour de l'origine. Si Z est nul, le système sera stable, sinon, il sera instable.

Dans la pratique, plutôt que de compter les tours des $1+H(p)$ autour de l'origine, nous nous intéresserons au nombre de tours de $H(p)$, fonction de transfert en boucle ouverte, autour du point « -1 » du plan complexe, ce qui revient au même.

- Pour définir le contour (C), nous allons considérer deux cas différents :

- Si $H(p)$ ne présente pas de pôle nul, alors on choisit le contour (C) qui correspondra au « cas 1 » de la figure suivante. Il s'agit d'un demi cercle de rayon tendant vers l'infini et dont le diamètre complet occupe l'axe imaginaire.

- Si $H(p)$ présente un pôle nul d'ordre n, alors on choisit le contour (C) qui correspondra au « cas 2 » de la figure suivante. Il s'agit d'un demi cercle de rayon tendant vers l'infini et dont le diamètre complet occupe l'axe imaginaire, mais dont on a ôté l'origine du demi-plan au moyen d'un demi cercle de rayon tendant vers 0 et centré sur l'origine. Quand on comptera le nombre de pôles de $H(p)$ par la suite, il faudra penser à ne pas compter les pôles nuls.



Nous allons donc faire décrire à p le contour (C) que nous venons de définir. Nous allons tracer le lieu défini par $H(p)$ dans le plan complexe quand p décrit (C). Nous allons compter le nombre N de tours, comptés positifs dans le sens trigonométrique, que fait ce lieu autour du point « -1 ». C'est la même chose que le nombre de tours de $1+H(p)$ autour de l'origine. On compte le nombre P de pôles à partie réelle positive de $H(p)$ (c'est le même que le nombre de pôles à partie réelle positive de $1+H(p)$).

Si le nombre Z de zéros à partie réelle positive de $1+H(p)$, égal à $P-N$ est nul, le système est stable en boucle fermée. Sinon, il est instable. La stabilité impose donc que $N = P$.

Bilan :

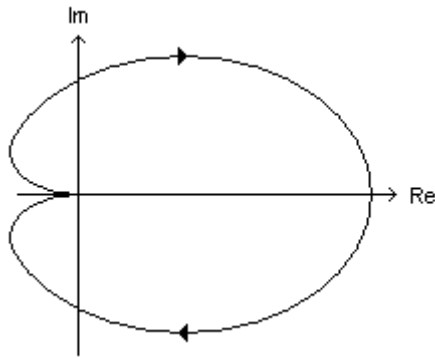
Un système linéaire continu en boucle fermée à retour unitaire est asymptotiquement stable à la condition nécessaire et suffisante que son lieu de transfert en boucle ouverte quand p décrit le contour de Nyquist (C), entoure le point critique « -1 » dans le sens trigonométrique un nombre N de fois égal au nombre P des pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Exemples d'application du critère de Nyquist dans le cas général :

- Exemple 1 : Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \text{avec } K > 0, \tau_1 > 0 \text{ et } \tau_2 > 0$$

$H(p)$ ne présente pas de pôle à partie réelle positive donc $P=0$. Par ailleurs, quand p décrit (C), $H(p)$ décrit le lieu suivant :

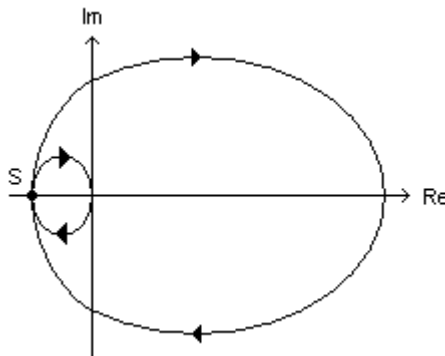


Le nombre de tours de ce lieu autour du point « -1 » est nul donc $N=0$. On a donc bien $N=P$ et ce système est stable en boucle fermée.

- Exemple 2 : Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$H(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p) \cdot (1 + \tau_3 \cdot p)} \quad \text{avec } K > 0, \tau_1 > 0, \tau_2 > 0 \text{ et } \tau_3 > 0$$

$H(p)$ ne présente pas de pôle à partie réelle positive donc $P=0$. Par ailleurs, quand p décrit (C) , $H(p)$ décrit le lieu suivant :



Cette fois, la stabilité du système en boucle fermée demande de discuter de la position du point S de l'axe réel. S correspond-il à un point d'abscisse négative de valeur absolue supérieure ou inférieure à 1 ?

Si l'abscisse de S est de valeur absolue supérieure à 1, le lieu fait deux tours dans le sens des aiguilles d'une montre autour du point « -1 » du plan complexe. On a donc $N = -2$. Sachant que $P = 0$, on a donc $Z = P - N = 2$. La fonction de transfert en boucle fermée présente donc deux pôles à partie réelle positive. Le système est instable.

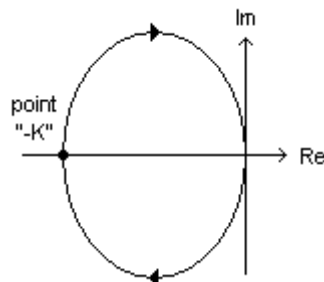
Si l'abscisse de S est de valeur absolue inférieure à 1, le lieu n'entoure pas le point « -1 » et $N = 0$. Sachant que $P = 0$. On a donc bien $Z = 0$. La fonction de transfert en boucle fermée ne présente donc pas de pôle à partie réelle positive ou nulle. Le système est stable.

Ce qui est susceptible de modifier la position de S , c'est la valeur du gain statique K de la boucle ouverte. Plus ce gain est fort, plus le système risque d'être instable en boucle fermée.

- Exemple 3 : Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$H(p) = \frac{-K}{(1 + \tau \cdot p)} \quad \text{avec } K > 0, \tau > 0$$

Il s'agit d'un système dont le gain statique en boucle ouverte $-K$ est négatif. Il ne présente pas de pôle à partie réelle positive ou nulle donc $P = 0$. $H(p)$ décrit le lieu suivant :



Si le point « $-K$ » du plan complexe correspond à un module inférieur à 1, le lieu n'entoure pas le point « -1 ». Alors $N = 0$ et donc $Z = 0$. Le système en boucle fermée est stable car il ne présente aucun pôle à partie réelle

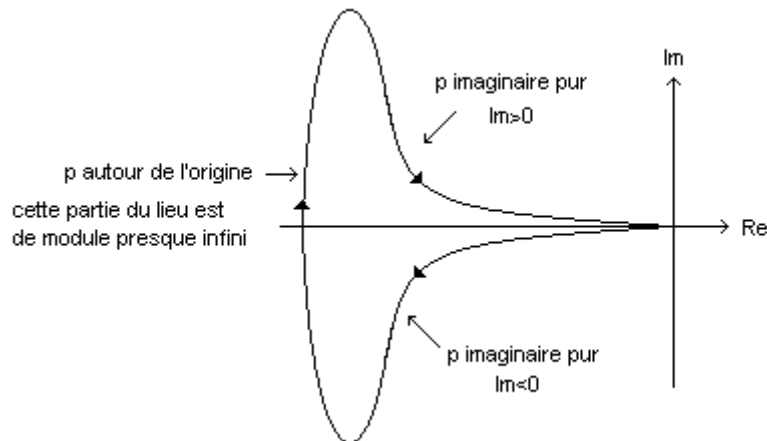
positive. En revanche, pour de plus forte valeurs de K , le point « -K » correspondra à un module supérieur à 1 et le lieu entourera une fois le point « -1 » dans le sens des aiguilles d'une montre. Alors $N = -1$ et donc $Z = P - N = 1$. En boucle fermée, le système présente alors un pôle à partie réelle positive. Le système est donc instable une fois la boucle fermée.

Dans ce cas, vous pouvez vérifier rapidement que l'application du critère algébrique conduit au même résultat que le critère de Nyquist.

- Exemple 4 : Considérons la fonction de transfert en boucle ouverte suivante :

$$H(p) = \frac{K}{p(\tau p - 1)} \quad \text{avec } K > 0, \tau > 0$$

Cette fonction de transfert présente un pôle à partie réelle positive (on ne compte pas le pôle nul). On a donc $P=1$. Par ailleurs, quand p décrit (C), $H(p)$ décrit le lieu suivant :

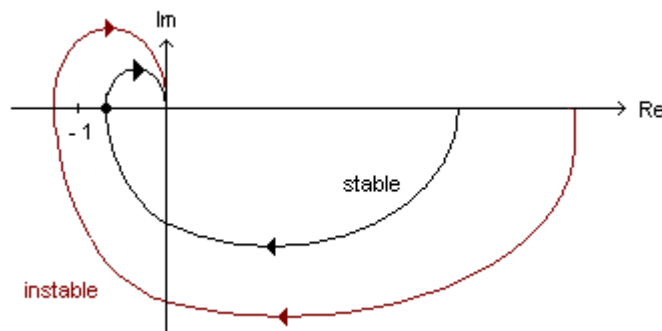


Le lieu fait un tour autour du point « -1 » dans le sens des aiguilles d'une montre car la partie gauche du lieu, qui résulte de la partie du contour au voisinage de l'origine, est renvoyée pratiquement à l'infini quand le rayon du contour tend vers 0. On a donc $N = -1$ car les tours sont comptés positifs dans le sens trigonométrique. Cette fois, $Z = P - N = 2$. La fonction de transfert en boucle fermée présente donc deux pôles à partie réelle positive. Le système correspondant est instable.

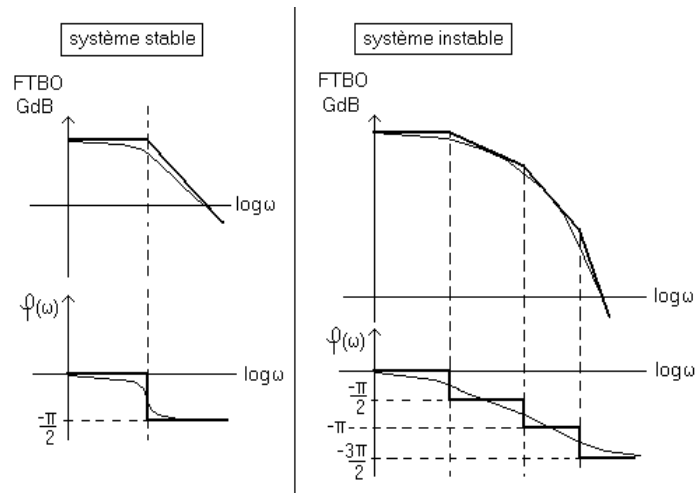
Critère simplifié pour les systèmes qui n'ont ni pôles ni zéros à partie réelle positive en boucle ouverte :

On s'intéresse à sa fonction de transfert en **boucle ouverte** (FTBO) du système bouclé étudié. On veut savoir si la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) est stable ou non. On trace le lieu géométrique défini par la FTBO en prenant $p = j\omega$ et on regarde la position de ce lieu par rapport au point -1.

Si en parcourant le lieu pour des ω croissants, on laisse ce point sur la gauche, le système sera stable (critère du revers).



rq : Le **diagramme de Bode de la FTBO**, souvent utilisé pour tracer le lieu décrit par la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan complexe, permet également de juger de la stabilité, au même titre que le critère du revers. Dans ce cas, on dit que le système est stable quand le diagramme de Bode de la FTBO présente une phase de π pour un gain inférieur à 0dB (ou inférieur à 1 suivant l'échelle choisie).



II.4. Robustesse de stabilité.

Un système stable à un instant donné peut devenir instable si certains de ses paramètres fluctuent à cause de perturbations extérieures (variation de température, évolution du gain d'un amplificateur, usure...). Les risques d'instabilité augmentent quand le lieu défini pour le critère du revers se rapproche de -1 . C'est pourquoi il est préférable, quand un système est stable, d'évaluer sa **robustesse de stabilité**.

Pour cela, on peut par exemple évaluer la marge de phase, i.e. la différence qui existe entre la phase de la FTBO quand le module vaut 1 et -180° .

rq : On rappelle qu'il faut que la phase du système soit supérieure à -180° à cet instant pour que le système soit stable une fois en boucle fermée.

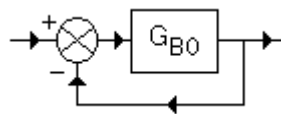
rq : En pratique, on cherche souvent à s'assurer une marge de phase de 45° (i.e. une phase de FTBO de -135° quand le module vaut 1).

II.5. Influence du gain sur la stabilité.

Pour les systèmes bouclés usuels, on note qu'une augmentation du gain statique dans la boucle ouverte conduit souvent à se rapprocher d'un comportement instable, et même parfois à provoquer l'apparition d'oscillations.

Pour illustrer ce problème, nous allons supposer que nous avons réussi à identifier la fonction de transfert en boucle ouverte d'un système physique passe bas.

On réalise une rétroaction négative avec gain à retour unitaire. Le système bouclé peut alors être représenté par le schéma suivant



Pour différents types de fonctions de transfert de systèmes linéaires, nous allons discuter de la stabilité de la boucle fermée en fonction du gain maximum K , en utilisant les critères énoncés précédemment. L'étude sera davantage poussée avec le critère géométrique, car il est plus simple de généraliser les résultats dans ce cas.

II.5.1. Approche graphique sur la boucle ouverte d'un système passe-bas ou passe-bande.

En utilisant un critère géométrique (critère du revers), on constate que la stabilité sera obtenue si l'image de G_{BO} dans le plan complexe passe à droite du point -1 .

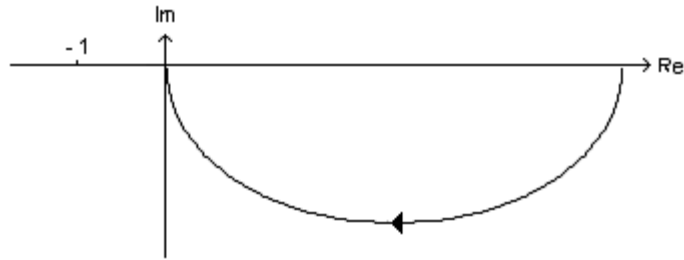
a/ Passe-bas d'ordre 1 :

La FTBO présente la forme suivante

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

Le système présente un gain statique K supposé positif et une constante de temps τ .

Le lieu de Nyquist de ce système se présente sous la forme suivante



Quelle que soit la valeur de K positif, ce système sera stable puisque le point « -1 » restera sur la gauche.

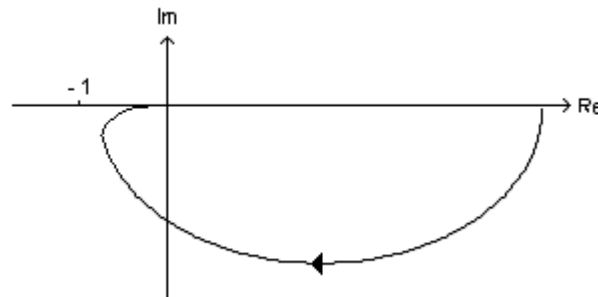
b/ passe-bas d'ordre 2 :

La FTBO présente la forme suivante

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + 2.m.\frac{p}{\omega_o} + \left(\frac{p}{\omega_o}\right)^2}$$

Le système présente un gain statique K supposé positif, un coefficient d'amortissement m et une pulsation caractéristique ω_o donnant l'ordre de grandeur de la pulsation de coupure.

Le lieu de Nyquist de ce système se présente sous la forme suivante

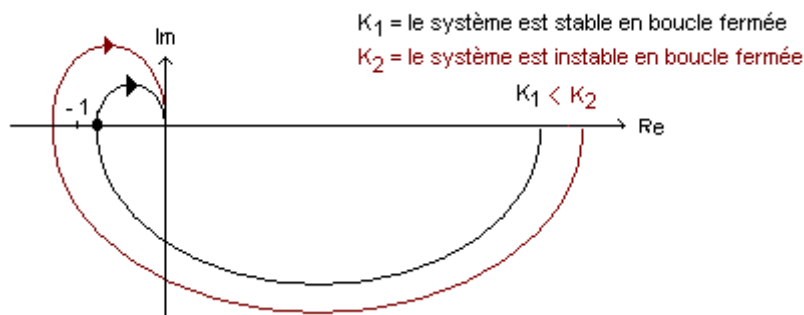


Quelle que soit la valeur de K positif, ce système sera stable puisque le point « -1 » restera sur la gauche.

c/ passe-bas d'ordre 3 :

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \alpha.p + \beta.p^2 + \chi.p^3}$$

Quand ω augmente, le module décroît de K vers 0 alors que la phase décroît de 0 à $-3\pi/2$. Sur la figure suivante, on a représenté la fonction de transfert pour deux valeurs de K.



Si on est amené à augmenter K, le module de G_{BO} va augmenter pour une fréquence donnée, ce qui signifie que le risque de voir passer la courbe à gauche du point -1 sera plus fort. Augmenter le gain de la boucle ouverte augmente donc le risque d'instabilité.

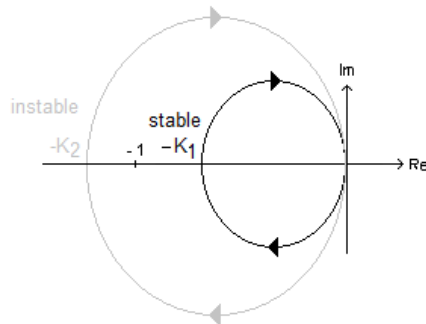
En pratique, avec des filtres passe-bas à gain statique positif, si l'ordre de la fonction de transfert en boucle ouverte est inférieur ou égal à 2, le système sera stable. Il deviendra potentiellement instable si l'ordre devient égal à 3 ou supérieur.

d/ passe-bande :

On considère un filtre passe-bande dont le gain maximum est négatif, égal à -K et dont la fréquence centrale est ω_o .

$$G_{BO}(p) = \frac{-K}{1 + Q \cdot \left(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right)}$$

Le lieu de Nyquist de ce système se présente sous la forme suivante



Si K est supérieur ou égal à 1 (cas de K₂), ce système sera instable. Sinon (cas de K₁), le système sera stable puisque le point « -1 » restera sur la gauche.

II.5.2. Approche algébrique sur la boucle fermée d'un exemple de système passe-bas d'ordre 3.

Nous allons donner des valeurs aux différents paramètres. Supposons qu'après identification de la boucle ouverte, on arrive à

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{(1+p).(1+3.p).(1+2.p)}$$

Alors en boucle fermée on aura

$$G_{BF}(p) = \frac{K}{6.p^3 + 11.p^2 + 6.p + 1 + K}$$

Les valeurs de pôles de cette fonction de transfert sont les suivantes :

Si K = 20 , (p₁ = -2,13..., p₂ = 0,15... + 1,27...i, p₃ = 0,15... - 1,01...i) système instable

Si K = 10, (p₁ = -1,83..., p₂ = + i, p₃ = - i) système instable.. c'est un cas d'école sans réelle signification physique...

Si K = 1, (p₁ = -1,245..., p₂ = -0,29... + 0,426...i, p₃ = -0,29... - 0,426...i) système stable

rq : en utilisant le critère du revers sur cet exemple numérique, on vérifie facilement que le gain K = 10 est le gain statique limite de la boucle ouverte pour séparer les systèmes stables des systèmes instables. En effet, quand p = j.ω, la fonction de transfert est réelle pour ω = 0 rad/s et pour ω = 1 rad/s. Dans le second cas, le module de la fonction de transfert en boucle ouverte vaut alors K/10. Si K est supérieur à 10, le lieu laisse le point « -1 » sur la droite et le système en boucle fermée sera instable. Si K est inférieur à 10, le lieu laisse le point « -1 » sur la gauche et le système en boucle fermée sera stable.

III. Systèmes rendus volontairement instables : les oscillateurs.

• Les oscillateurs se rencontrent dans tous les domaines de la physique, notamment en optique (par exemple le laser) ou en électronique. Dans ce cours, nous nous intéresserons principalement aux seconds. Ils constituent en effet l'une des fonctions de base de l'électronique (analogique comme numérique...). Ils vont être utilisés pour cadencer le fonctionnement des systèmes (horloges de circuits numériques, montres...). Ils peuvent également être utilisés pour fabriquer directement des signaux classiques de tests en électronique (générateurs analogiques) ou pour fabriquer des porteuses en télécommunication.

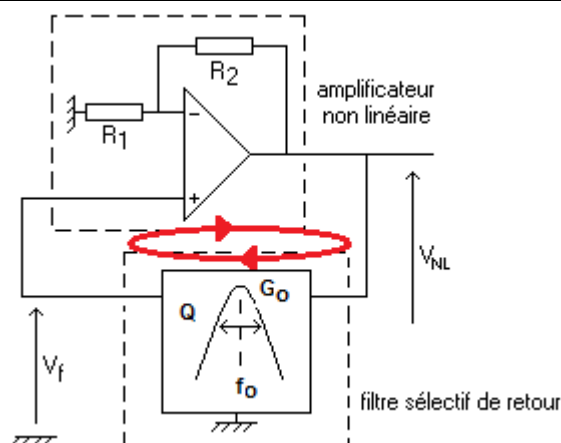
Il existe plusieurs familles d'oscillateurs. Dans le cadre de ce cours, portant sur les systèmes bouclés, nous allons nous intéresser à une famille particulière, celle des oscillateurs à boucle de réaction dont nous présenterons quelques exemples. Dans tous les cas, la modélisation conduira à une fonction de transfert en boucle fermée qui présentera au moins un pôle à partie réelle positive

III.1. Exemple détaillé d'oscillateur quasi sinusoïdal à boucle de réaction.

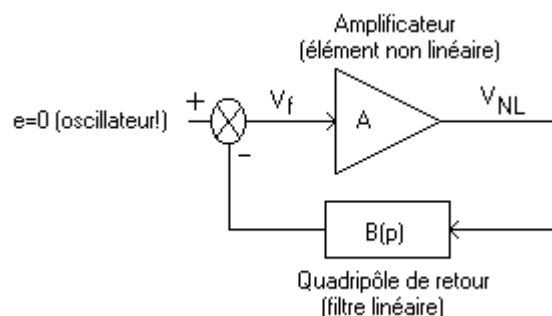
Cet oscillateur, doit comporter un amplificateur non linéaire associé dans une boucle à une cellule résonante (filtre passe bande). Cette dernière comportant forcément des éléments dissipatifs, il va falloir apporter de l'énergie pour maintenir le système en oscillation.

Nous allons tout d'abord faire apparaître la structure générale d'un oscillateur de ce type en identifiant l'amplificateur et le filtre sélectif. Ceci étant fait, nous verrons la condition à vérifier pour que les oscillations apparaissent. Nous pourrons alors calculer les principales grandeurs attendues (fréquence et amplitude des oscillations notamment).

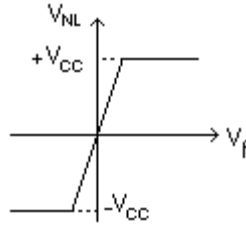
- Structure de l'oscillateur à boucle de réaction. Identification des différents éléments.



On va essayer de se ramener à une symbolique de système bouclé classique (sauf qu'ici, on travaille à entrée nulle puisque l'on étudie un oscillateur...)



♦ Dans sa zone de fonctionnement linéaire, l'amplificateur a un gain $A=1+R_2/R_1$ (pour l'étude du démarrage, ce gain sera suffisant). Cependant la tension de sortie de l'amplificateur est limitée à la plage $[-V_{cc}; +V_{cc}]$. Sa caractéristique entrée-sortie, si on suppose l'amplificateur opérationnel parfait (excepté vis à vis de la saturation) est donc la suivante:



- ♦ Le filtre de retour est un filtre passe bande dont la fonction de transfert est la suivante

$$B(p) = \frac{-V_f}{V_{NL}} = \frac{-G_o}{1 + Q \cdot \left(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right)}$$

- Etude du démarrage des oscillations.

Le démarrage des oscillations vu en utilisant le critère algébrique de stabilité.

Nous avons vu, lors de l'étude de la stabilité des systèmes bouclés qu'un tel circuit sera instable lorsque l'un des pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée a une partie réelle positive. Ces pôles sont les solutions de l'équation

$$A \cdot B(p) = -1$$

Ils peuvent être calculés en résolvant l'équation

$$p^2 + \frac{\omega_o}{Q} (1 - G_o \cdot A) \cdot p + \omega_o^2 = 0$$

Le déterminant de cette relation vaut

$$\Delta = \left(\frac{\omega_o}{Q} \right)^2 \cdot (1 - G_o \cdot A)^2 - 4 \cdot \omega_o^2 = \left(\frac{G_o \cdot \omega_o}{Q} \right)^2 \cdot \left(A^2 - 2 \cdot \frac{A}{G_o} + \frac{1 - 4 \cdot Q^2}{G_o^2} \right)$$

- Le déterminant de cette équation sera positif pour $A < (1-2 \cdot Q)/G_o$ ou $A > (1+2 \cdot Q)/G_o$. Dans ce cas, les racines sont réelles et valent

$$p_{\pm} = \frac{-\frac{G_o \cdot \omega_o}{Q} \left(\frac{1}{G_o} - A \right) \pm \frac{G_o \cdot \omega_o}{Q} \cdot \sqrt{A^2 - 2 \cdot \frac{A}{G_o} + \frac{1 - 4 \cdot Q^2}{G_o^2}}}{2}$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$p_{\pm} = \frac{\frac{G_o \cdot \omega_o}{Q} \cdot \left(A - \frac{1}{G_o} \pm \sqrt{\left(A - \frac{1}{G_o} \right)^2 - \frac{4 \cdot Q^2}{G_o^2}} \right)}{2}$$

Si $A < (1-2 \cdot Q)/G_o$ les racines sont négatives (pas d'oscillations). Si $A > (1+2 \cdot Q)/G_o$ elles sont positives (oscillations).

- Si $(1-2 \cdot Q)/G_o < A < (1+2 \cdot Q)/G_o$, le déterminant est négatif et les racines sont complexes. On constate alors que leur partie réelle sera négative tant que $(1-2 \cdot Q)/G_o < A < 1/G_o$ (pas d'oscillations). En revanche, elle sera positive si $1/G_o < A < (1+2 \cdot Q)/G_o$ (oscillations). Ces racines valent

$$p_{\pm} = \frac{\frac{G_o \cdot \omega_o}{Q} \cdot \left(A - \frac{1}{G_o} \pm j \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot Q^2}{G_o^2} - \left(A - \frac{1}{G_o} \right)^2} \right)}{2}$$

Le calcul des racines montre donc que le montage est instable pour $A > 1/G_o$. De plus, on peut dire que le démarrage sera pseudo-oscillant pour $1/G_o < A < (1+2 \cdot Q)/G_o$ alors qu'il sera exponentiel croissant pour $A > (1+2 \cdot Q)/G_o$.

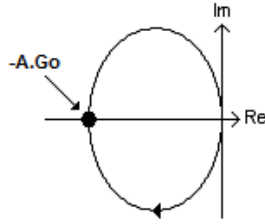
Le démarrage des oscillations vu en utilisant le critère géométrique de stabilité.

De la même façon, on peut utiliser le critère du revers pour déterminer si l'oscillation est susceptible d'apparaître ou non.

En effet, la fonction de transfert en boucle ouverte vaut

$$A \cdot B(p) = \frac{-A \cdot G_o}{1 + Q \cdot \left(\frac{p}{\omega_o} + \frac{\omega_o}{p} \right)}$$

En posant $p = j \cdot \omega$, le lieu de la fonction de transfert en boucle ouverte dans le plan complexe, parcouru à ω croissant, présente la forme suivante :



On constate bien que si $A > 1/G_o$, l'instabilité va démarrer, puisque dans ce cas, le point « -1 » du plan complexe sera laissé sur la droite par le lieu tracé.

• Etude du régime permanent d'oscillation : fréquence et amplitude des oscillations.

- En régime permanent, la non linéarité de l'amplificateur se fait sentir et il n'est plus possible de raisonner aussi simplement que lors du démarrage. On va faire l'hypothèse dite du premier harmonique. Pour une amplitude de signal en entrée de l'amplificateur donnée, on regarde l'allure de la sortie (elle est affectée par la non-linéarité). De la sortie distordue, on extrait le premier harmonique. La non linéarité est alors modélisée par un gain linéaire \bar{N} équivalent, rapport du premier harmonique de la sortie sur l'entrée (ce gain remplace le gain A de l'étude du démarrage).
- Une fois \bar{N} calculé, la condition d'oscillation est donnée par

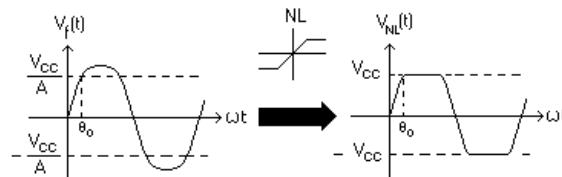
$$\bar{N}.B(j.\omega) = -1$$

La résolution de cette équation complexe nous donnera la fréquence des oscillations ainsi que leur amplitude.

- Dans le cas de notre exemple, nous allons calculer \bar{N} .

Nous allons supposer que $V_f(t) = V \cdot \sin(\omega.t)$ (V et ω sont les inconnues que nous recherchons).

$V_{NL}(t)$ vaut $A.V_f(t)$ tant que $V_f(t)$ est inférieure, en valeur absolue, à V_{cc}/A . Sinon elle vaut $+V_{cc}$ ou $-V_{cc}$.



On constate que la non-linéarité n'introduit pas de déphasage (il n'y a pas d'hystérésis) ce qui signifie que le gain équivalent \bar{N} sera réel. L'amplitude du premier harmonique de V_{NL} est notée V_{NL1} et elle vaut

$$V_{NL1} = \frac{2}{T} \int_0^T V_{NL}(t) \cdot \sin(\omega.t) \cdot dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V_{NL}(\theta) \cdot \sin \theta \cdot d\theta = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_0} A.V \cdot \sin^2 \theta \cdot d\theta + \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V_{cc} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \right]$$

$$V_{NL1} = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_0} A.V \cdot \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \cdot d\theta + \int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} V_{cc} \cdot \sin \theta \cdot d\theta \right] = \frac{4}{\pi} \left[A.V \cdot \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\theta_0} + A.V \cdot \sin \theta_0 \cdot [-\cos \theta]_{\theta_0}^{\pi/2} \right]$$

Sachant que $V_{cc} = A.V \cdot \sin \theta_0$, on trouve

$$\bar{N} = \frac{2.A}{\pi} \cdot \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right)$$

- La condition $\bar{N}.B(j.\omega) = -1$ nous donne que

$$\boxed{\omega = \omega_0} \quad \text{et que} \quad \boxed{\bar{N} = \frac{2.A}{\pi} \cdot \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right) = \frac{1}{G_o}} \quad \text{ce qui permet de trouver } V \text{ (approche graphique)}$$

rq : l'hypothèse du premier harmonique sera d'autant plus justifiée que les harmoniques ont peu d'incidence sur l'entrée de l'amplificateur, c'est à dire que le filtre de retour est sélectif. Dans la pratique, pour éviter une distorsion trop importante, ce qui peut être inacceptable dans certains cas (pour réaliser une porteuse par exemple), on va associer au circuit un dispositif de contrôle automatique de gain, ce qui permet de maintenir l'oscillateur en oscillation au voisinage du gain limite.

- Améliorations indispensables pour un tel montage.

La fréquence d'oscillation du circuit précédent dépend beaucoup des conditions dans lesquelles le circuit est utilisé. Pour faire en sorte d'obtenir une fréquence plus stable, afin de réaliser une montre par exemple, il va falloir modifier les caractéristiques du filtre sélectif.

En effet, la relation $\bar{N}\bar{B}(j\omega) = -1$ permet d'écrire $\text{Arg}(\bar{N}) + \text{Arg}(\bar{B}(j\omega)) = \pi$ ce qui conduit à la fréquence d'oscillation. En différenciant la dernière relation, on trouve

$$\delta\theta + d\phi = 0 \text{ (si } \phi \text{ est l'argument de } \bar{B}) \text{ soit } \delta\theta = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right)_{\omega_0} \cdot d\omega$$

on peut alors écrire que
$$\frac{\delta\omega}{\delta\theta} \approx \frac{-1}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}}$$

Dans le cas d'un filtre passe-bande de facteur de qualité Q et de gain G_o , on a

$$\bar{B}(j\omega) = \frac{-G_o}{1 + Q \cdot \left(\frac{j\omega}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{j\omega} \right)} \approx \frac{-G_o}{1 + 2 \cdot j \cdot Q \cdot \frac{\delta\omega}{\omega_0}} \text{ si } \omega \approx \omega_0 \text{ soit } \phi \approx \pi - \text{Arc tan} \left(2 \cdot Q \cdot \frac{\delta\omega}{\omega_0} \right) \text{ et donc}$$

$$\frac{\delta\omega}{\delta\theta} \approx \omega_0 / 2 \cdot Q$$

Le fait que le filtre de retour ait un fort coefficient de qualité permet de rendre l'oscillateur moins sensible aux éventuelles variations d'état de l'amplificateur (si les variations donnent lieu une variation de phase de ce dernier...). C'est pourquoi on utilise souvent des oscillateurs à quartz, dans lesquels la cellule sélective de retour est réalisée à partir d'un composant piézoélectrique dont le comportement permet d'obtenir des facteurs de qualité supérieurs à 10000. Ce composant est notamment utilisé pour obtenir la seconde dans les montres...

III.2. : Exemple d'oscillateur quasi sinusoïdal optique, le laser.

Le laser est un oscillateur quasi-sinusoïdal. Nous nous limiterons au cas particulier des lasers à gaz. Lors de la représentation du laser comme oscillateur, nous allons retrouver un certain nombre d'éléments fondamentaux déjà vus sur les exemples électroniques. Cependant, avant d'en arriver là, nous allons présenter les phénomènes physiques qui permettent le fonctionnement du laser.

III.2.1. Etats d'énergie d'un atome et émission de lumière.

Considérons E_1 et E_2 , deux des niveaux d'énergie d'un atome, avec $E_2 > E_1$.

En présence d'un grand nombre d'atomes de ce type, à l'équilibre thermique à température T , le rapport du nombre N_1 d'atomes dans l'état E_1 sur le nombre N_2 d'atomes dans l'état E_2 est donné par la relation

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{\frac{-(E_2 - E_1)}{k \cdot T}} \quad (k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} \text{ constante de Boltzmann})$$

A l'équilibre thermodynamique, il y a donc plus d'atomes dans les états d'énergie faibles que dans ceux d'énergie élevée. Si l'atome passe de l'état d'énergie E_2 à l'état d'énergie E_1 , la transition se fera avec l'émission d'un photon de fréquence ν , telle que

$$E_2 - E_1 = h \cdot \nu \quad (h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s, constante de Planck})$$

Cette émission peut être spontanée. Dans ce cas, l'émission est fortement influencée par les interactions entre atomes et elle est fortement aléatoire.

Mais l'émission peut aussi être induite par une onde incidente. Dans ce cas, l'onde incidente influe fortement sur le processus d'émission qui devient moins aléatoire que dans le cas précédent. L'onde émise devient alors plus cohérente. C'est à ce type d'émission que correspond le fonctionnement d'un laser.

III.2.2. Structure et fonctionnement d'un laser à gaz (type He-Ne par exemple).

Dans un laser à gaz, une onde lumineuse incidente induit dans un matériau une émission de lumière. Cette nouvelle émission est assimilable à une amplification du faisceau incident d'où le nom de « Light Amplification by Stimulated Emission of Radiations ». Pour que le système fonctionne, on va imposer à l'onde amplifiée de repasser plusieurs fois dans le milieu chargé de l'émission stimulée. C'est pourquoi, ce milieu sera inséré dans une cavité constituée de deux surfaces réfléchissantes qui se comportera comme un interféromètre de Fabry-Pérot.

- Inversion de population dans le milieu amplificateur et saturation de gain.

Considérons un type d'atome dans lequel on étudiera la transition entre le niveau E_2 et le niveau E_1 ($E_2 > E_1$). Une onde incidente de fréquence ν , égale à $[E_2 - E_1]/h$, qui traverse le milieu constitué de ces atomes, qui se propage dans la direction repérée par z , verra son intensité I évoluer avec la distance parcourue z afin que

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot z}$$

Le coefficient μ est proportionnel à $N_1 - N_2$, si N_1 et N_2 représentent respectivement la population d'atomes dans l'état d'énergie E_1 et E_2 . Dans un matériau qui n'est pas stimulé, μ est donc positif et l'onde va s'amortir en pénétrant dans le matériau.

Si on veut une amplification et donc une intensité I qui augmente avec z , il va falloir que μ soit négatif, ce qui demande que N_2 soit supérieur à N_1 . Pour cela, il va falloir mettre le matériau hors d'équilibre en augmentant N_2 , au moyen d'une excitation extérieure. Cette opération, appelée pompage, consiste à amener des atomes dans un niveau E_3 très légèrement supérieur à E_2 afin de permettre, par une transition sans rayonnement de surpeupler le niveau E_2 par rapport à l'état d'équilibre. Un pompage suffisant va permettre de réaliser une inversion de population et donc une amplification de toute onde incidente dans le matériau, en particulier d'une transition spontanée entre E_2 et E_1 .

Dans le matériau stimulé, μ est donc négatif ce qui signifie que l'intensité augmente avec la distance parcourue. Cependant, ce gain va décroître avec l'intensité du faisceau. Tant que l'intensité reste assez faible, on pourra définir G_0 constante telle que

$$I = I_0 \cdot e^{G_0 \cdot z}$$

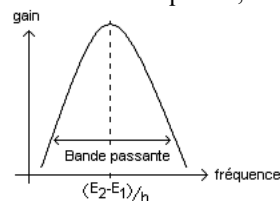
Mais dès que I prend des valeurs plus importantes, la croissance de l'intensité avec la distance parcourue sera moins rapide et finira par saturer ce qui explique qu'il n'y ait pas de divergence de l'intensité émise.

Le milieu dans lequel on crée l'inversion de population apparaît donc comme un milieu amplificateur de l'intensité lumineuse. L'amplification est non linéaire et présente une saturation ce qui permet de stabiliser l'amplitude du faisceau émis.

Dans le cas d'un laser He-Ne, les niveaux E_2 et E_1 sont respectivement les niveaux $3s2$ et $2p4$ du néon. Le niveau E_3 qui sert au pompage est soit le niveau $2s3$ soit le niveau $2s1$ de l'hélium, niveaux métastables atteints par les atomes d'hélium grâce à l'application d'un champ électrique extérieur.

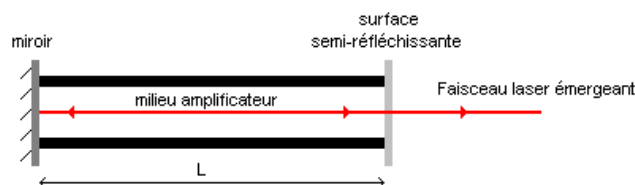
• Pouvoir d'amplification du milieu en fonction de la fréquence.

La bande passante du milieu amplificateur est égale à la largeur de raie de transition entre les niveaux E_2 et E_1 . Cette largeur est due à l'effet Doppler résultant des collisions entre particules se déplaçant suivant des distributions complexes de vitesses. Elle est centrée sur la fréquence correspondant exactement à $(E_2 - E_1)/h$. Si on représente le gain pour un aller simple dans la cavité en fonction de la fréquence, on obtient la courbe d'allure suivante :



• Rôle de la cavité.

Si une onde issue d'une transition spontanée, traverse un milieu dans lequel on a réalisé une inversion de population, elle sera donc amplifiée, en conduisant à une émission stimulée. Pour démultiplier cet effet, on va faire en sorte que l'onde traverse un grand nombre de fois le milieu dans lequel on a réalisé le pompage afin de maintenir une intensité importante dans le milieu, malgré l'émission d'une partie de l'onde vers l'extérieur... ce qui est l'objectif de ce type de dispositif... Pour cela, on peut utiliser la structure suivante :



Entre les deux miroirs, seules certaines ondes, interférant constructivement pourront avoir une amplitude notable. Pour cela, il faudra que la longueur d'onde λ du rayonnement vérifie

$$2 \cdot L = k \cdot \lambda \quad (k \text{ entier})$$

d'où, en terme de fréquence ν , la relation $\nu = k \cdot \frac{c}{2 \cdot L}$ où c est la célérité de la lumière dans le milieu.

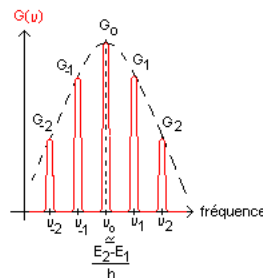
L'écart entre deux fréquences successives pour lesquelles on a interférences constructives est appelé intervalle spectral libre.

Le laser est donc susceptible d'émettre sur des fréquences discrètes déterminées par la taille de la cavité. Ces différentes fréquences sont les modes du laser. La largeur des raies des modes dépend notamment du coefficient de réflexion sur les surfaces réfléchissantes de la cavité (Cf interféromètre de Fabry-Pérot). Suivant la longueur d'onde considérée, l'amplitude sera définie par la courbe du paragraphe précédent.

• Structure du laser ; modélisation comme oscillateur à boucle de réaction.

Nous allons supposer que le coefficient de réflexion R est le même sur les deux miroirs pour simplifier, sachant qu'en réalité, il doit être légèrement inférieur sur la surface semi-réfléchissante afin de laisser une partie du faisceau s'échapper vers l'extérieur.

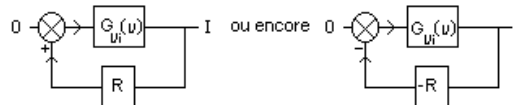
On appellera $G(v)$ le gain pour un aller simple du faisceau dans la cavité. Compte tenu du pouvoir d'amplification du milieu avec la fréquence, et des propriétés de la cavité de Fabry Pérot, $G(v)$ se présente sous la forme suivante :



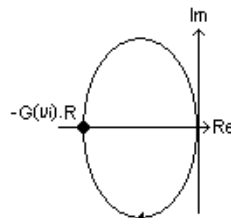
Pour simplifier l'étude, nous allons considérer séparément les différents extréma de G aux fréquences ν_i (i allant de -2 à +2 sur la figure précédente). Nous allons supposer que le milieu amplificateur se comporte comme un filtre passe-bande autour de chaque fréquence ν_i . Nous noterons G_{ν_i} le gain autour de la fréquence ν_i .

Le faisceau subit une succession de séquences d'amplification dans le milieu (Gain $G_{\nu_i}(v)$) immédiatement suivies de réflexion sur un miroir.

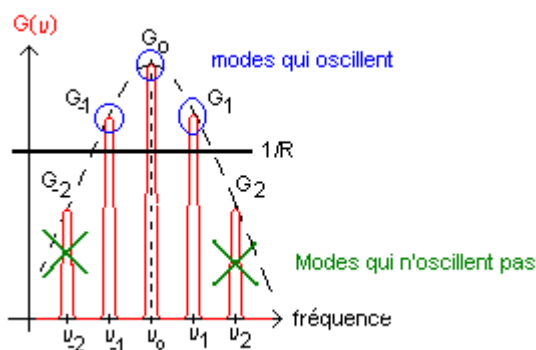
Pour un très grand nombre d'aller-retour on peut représenter le système par le schéma bloc suivant :



Le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte au voisinage de ν_i présente une allure de forme suivante :



Le système est susceptible d'osciller autour de la fréquence ν_i si $G(\nu_i) > 1/R$. Finalement, seuls les modes pour lesquels le gain du milieu amplificateur est supérieurs à $1/R$ vont osciller.



Le laser fonctionne aléatoirement et successivement sur les différents modes susceptibles d'osciller. Quand plusieurs modes sont autorisés, le laser est dit multimodes. Chaque mode peut être traité indépendamment des autres.

IV. Système bouclé stable : application à l'asservissement d'une grandeur physique.

Dans de nombreux processus industriels, mais aussi dans bon nombre d'expériences scientifiques complexes, il est indispensable de maîtriser certains paramètres physiques afin de protéger les systèmes ou d'obtenir de leur part des comportements reproductibles.

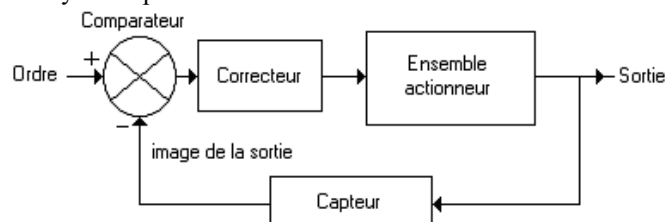
Exemples:

- Contrôle de température à réguler sans intervention humaine (corps humain, habitation, et tout système physique que l'on cherche à rendre le plus invariant possible vis-à-vis des fluctuations de température...).
- Contrôle d'un courant (amélioration de la réponse en couple d'un moteur, microscope à effet tunnel...).
- Contrôler le débit d'une source de tension malgré les fluctuations imposées par sa charge.
- Contrôle de position (robotique, positionnement fin de miroirs, compensation de vibrations...).
- Contrôle de la puissance optique émise par une source (éclairage d'une pièce, compensation de l'effet de la température sur la puissance émise par une diode laser...).
- Contrôler la vitesse d'un moteur (traction ferroviaire, obtention de la vitesse constante d'un escalator quel que soit le nombre d'usagers qui l'utilisent...).

Structure d'un système asservi:

Pour cela, on va être amené à concevoir des dispositifs dans lesquels un capteur rend compte de la sortie du système qui va devoir s'aligner sur ce que l'on a demandé en entrée. On a donc un système bouclé (réaction de la sortie sur le signal d'entrée).

On peut alors représenter le système par:



L'ordre donné en entrée est comparé avec l'image de la sortie fournie par le **capteur**. Le signal obtenu en sortie du **comparateur** (appelé souvent signal d'erreur ε) va permettre de commander la chaîne d'action composée de deux éléments principaux, le **correcteur** et l'**ensemble actionneur**.

Le rôle du correcteur est d'adapter le signal d'erreur afin d'obtenir une réponse optimale de l'actionneur. Les critères choisis peuvent être divers: précision, rapidité, stabilité... Nous verrons que ces derniers sont souvent antagonistes ce qui demande de faire des compromis. La forme du correcteur va dépendre des critères choisis...

L'actionneur est chargé de réaliser l'action demandée par l'ordre d'entrée, à partir du signal de sortie du correcteur. C'est en général l'élément qui apporte la puissance pour l'action.

remarque: Pour une action humaine, l'ensemble (comparateur-correcteur) sera réalisé par le cerveau alors que l'ensemble actionneur est constitué de l'ensemble (muscle-outil)... Le capteur peut être l'œil, l'oreille, le nez, la peau...

Définitions:

- Quand la grandeur de sortie suit une grandeur d'entrée qui varie dans le temps, on parle d'**asservissement** (asservissement de vitesse, de position...).
- Quand la grandeur de sortie suit une grandeur d'entrée constante, on parle plutôt de **régulation** (régulation de température, de pression...).

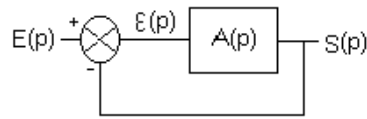
IV.1. Que cherche-t-on en réalisant un asservissement ?

Nous avons vu que le premier problème, quand on intègre un système physique dans une boucle fermée, c'est de savoir si l'ensemble va fonctionner de façon stable. Une fois que l'on s'est assuré d'une stabilité satisfaisante (assez robuste pour résister aux éventuelles fluctuations du système), il est possible d'améliorer certains aspects de la réponse du système bouclé, notamment la rapidité et la précision.

IV.1.1. Précision.

- Obtenir une bonne précision consiste à faire en sorte que la sortie du système finisse par tendre vers une valeur la plus proche possible de l'entrée. L'intérêt principal de la précision, c'est de permettre au système asservi

d'atteindre, après un transitoire, un état de la sortie parfaitement défini, quel que soit l'état du système (penser au problème que peut poser la dérive d'un gain). Pour illustrer ce point, on va supposer que le système se présente sous la forme suivante :



• Améliorer la précision revient à dire que l'on cherche à **minimiser le signal d'erreur $\varepsilon(t)$** quand t tend vers l'infini. En général, on a accès à la fonction de transfert. Il est, par conséquent, plus simple de travailler en variable de Laplace. C'est pourquoi on va utiliser le **théorème de la valeur finale** défini précédemment, soit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p)$$

Le système sera donc réellement précis quand

$$\lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{E(p)}{1 + A(p)} = 0$$

Il faut noter que la précision dépend de la nature du signal d'entrée. Par la suite, on se limitera au cas de la réponse à un échelon de tension.

• Pour discuter de la précision, on peut également s'intéresser au gain statique du système. Si on étudie la réponse à un échelon, avoir un système précis revient à dire que ce système a un gain statique de 1 en boucle fermée. A vrai dire, il faut surtout que le gain statique soit un nombre, et non une grandeur qui dépend des paramètres physiques du système étudié. Si le gain est 2 ou tout autre nombre réel, on peut toujours dire que le système est précis. En fait, dans ce cas, le gain statique est différent de 1 car on a intercalé un gain en cascade avec la boucle fermée étudiée, en général pour appliquer un niveau de tension de commande plus simple à réaliser que celui délivré par la sortie de la boucle fermée.

Exemples :

• Considérons un système du premier ordre en boucle ouverte tel que

$$A(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On attaque ce système par un signal échelon. On a donc

$$E(p) = \frac{a}{p}$$

Dans ce cas l'erreur au bout d'un temps suffisamment long sera de la forme

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{a}{1 + K}$$

Pour diminuer cette erreur, on peut chercher à augmenter K , mais on risque alors de rendre le système instable si ce dernier n'est pas un « vrai premier ordre ». Tant que l'erreur statique n'est pas nulle, l'état de la sortie dépend de l'état du système à travers K .

• Supposons maintenant que le système soit tel que

$$A'(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + \tau \cdot p}$$

Dans ce cas, si on applique un signal échelon en entrée, on aura une erreur ε qui tend vers 0 au bout d'un temps suffisamment long. La fonction de transfert $A'(p)$ peut être vue comme le produit de $A(p)$ par $1/p$. Ce dernier terme correspond à une intégration, opération que l'on peut réaliser avec un étage correcteur dont nous verrons la réalisation par la suite.

IV.1.2 Rapidité.

On s'intéresse à la durée nécessaire pour que le système atteigne le régime permanent. La rapidité est liée à la valeur des paramètres du système. Un système physique est d'autant plus rapide que sa bande passante est élevée...on peut par exemple penser à un système du premier ordre pour s'en convaincre.

Pour améliorer la rapidité du système, on va devoir agir sur le signal d'erreur...ce sera le rôle du correcteur, qui va en général amplifier ce dernier lors du régime transitoire afin d'amplifier la réponse de la chaîne directe. Il s'agit d'une sorte de coup de fouet au système.

L'inconvénient, c'est qu'augmenter la rapidité de la réponse peut conduire à un dépassement ou même une oscillation... Augmenter la rapidité revient la plupart du temps à rapprocher le système d'un régime de fonctionnement instable. On dégrade donc la stabilité.

C'est alors à l'utilisateur de faire un compromis entre avantages et inconvénients afin d'optimiser son asservissement...

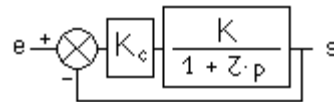
IV.2. Intérêt d'un élément correcteur.

Le correcteur est placé dans la chaîne directe. Il peut se présenter sous forme d'un circuit analogique ou sous forme d'un système numérique (convertisseur analogique numérique, mémoire, calculateur et convertisseur numérique analogique). Les correcteurs les plus simples réalisent principalement des fonctions de type « proportionnelle », « intégrale », « dérivée » ou une combinaison de certaines d'entre elles. On peut envisager d'autres actions (retard, ...) mais elles ne seront pas traitées par la suite.

IV.2.1. L'action proportionnelle.

- Une action proportionnelle permet de substituer, en entrée de la chaîne d'action, le signal $\varepsilon(t)$ à un signal $K\varepsilon(t)$ où K est un simple gain réel. Son rôle sera de dilater ou d'atténuer l'effet de l'erreur pour que le système réagisse de façon plus ou moins violente (comme si l'erreur était plus ou moins importante qu'elle ne l'est en réalité).

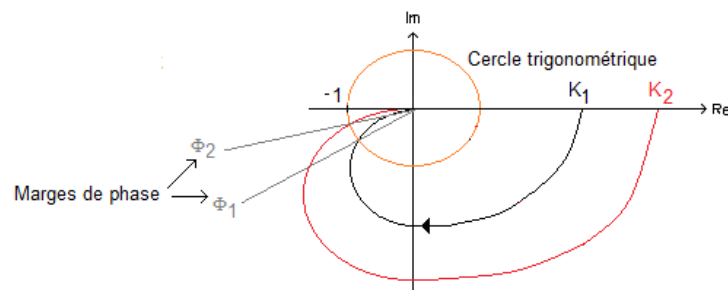
L'intérêt de l'action proportionnelle est en général de rendre le système plus rapide. Pour s'en convaincre, on peut prendre l'exemple d'un système en boucle ouverte de type passe-bas du premier ordre que l'on va associer, dans une boucle fermée avec un correcteur proportionnel.



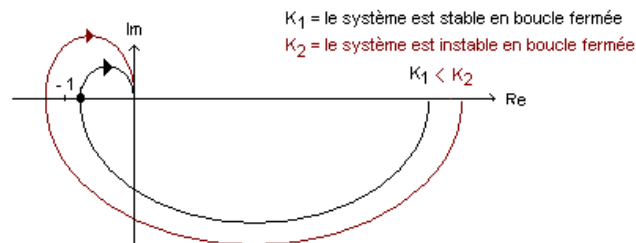
Si avant correction, on a $G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$, alors $G_{BF}(p) = \frac{K'}{1 + \tau' \cdot p}$ avec $K' = \frac{K \cdot K_c}{1 + K \cdot K_c}$ et $\tau' = \frac{\tau}{1 + K \cdot K_c}$

On constate qu'en augmentant K_c , on va diminuer τ' et donc rendre le système plus rapide.

- Le risque d'un gain trop fort est l'apparition de dépassements qui peuvent être préjudiciables (surintensité mortelle pour le système électronique, ou dépassement de position d'un bras de robot à proximité d'un mur ou d'une personne...). Par exemple, pour un système passe-bas d'ordre 2, l'augmentation du gain va conduire à une diminution de la marge de phase, ce qui se traduit par une diminution du coefficient d'amortissement et donc des risques plus importants de dépassement.



- On peut même rendre le système instable si la fonction de transfert en boucle ouverte est passe-bas d'ordre supérieur ou égal à 3. On le constate en observant la valeur de la phase quand le module de la fonction de transfert en boucle ouverte avec correcteur vaut 1.



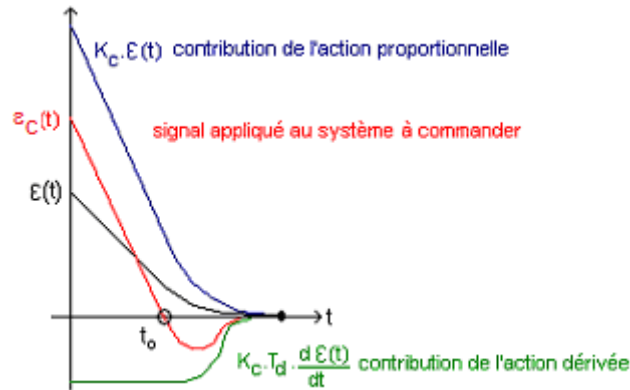
IV.2.2. L'action dérivée.

Cette action va permettre de fournir, en entrée du processus à commander, un signal qui va dépendre du signe et de la vitesse de variation du signal d'erreur ε .

Supposons que l'on veuille positionner un objet très proche d'un mur sans risque de choc avec ce dernier (bras de robot, navire qui accoste). Si on a recours à une action proportionnelle dérivée, le signal $\varepsilon_c(t)$, construit par le correcteur à partir de $\varepsilon(t)$ sera de la forme

$$\varepsilon_c(t) = K_c \left[\varepsilon(t) + T_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]$$

On peut alors mettre en parallèle les deux signaux et essayer d'expliquer leurs allures respectives.



On constate que, dans un premier temps, l'action proportionnelle est prépondérante (c'est elle qui va permettre une convergence rapide vers une erreur faible). Cependant, dans le cas d'une simple action proportionnelle, on aurait risqué de dépassement (imaginer un bateau qui se rapproche d'un quai sans pouvoir inverser la rotation des hélices... il s'écraserait sur le quai entraîné par son inertie...).

A partir de t_0 , le signal $\varepsilon_c(t)$ qui commande le processus s'inverse et c'est l'action dérivée qui devient prépondérante (même si elle décroît en amplitude). Cette action va tempérer l'action proportionnelle et ainsi permettre une approche en douceur, sans dépassement de la position souhaitée. La conjonction des deux actions permet donc une convergence rapide (action proportionnelle) et stable (action dérivée qui évite un dépassement).

IV.2.3. L'action intégrale.

On attend souvent d'une action intégrale de supprimer une erreur statique. Tant qu'une erreur statique ε subsiste, elle va être intégrée ce qui va conduire à un signal en sortie du correcteur (entrée de la chaîne d'action) de plus en plus important. Le système va donc agir pour limiter l'erreur.

La commande intégrale peut être considérée comme progressive mais persévérante. Un automobiliste qui appuie sur l'accélérateur jusqu'à atteindre la vitesse désirée et maintenant l'accélérateur afin de conserver une vitesse constante réalise une action proportionnelle intégrale.

IV.3. Problème de la modélisation et de l'identification du système.

Pour asservir un système de façon convenable, il est nécessaire de connaître certaines de ses caractéristiques, afin d'élaborer un correcteur qui permettra d'obtenir des réponses plus satisfaisantes (rapidité de la réponse, précision...). Pour cela, deux approches (souvent complémentaires) sont possibles.

On peut soit élaborer un modèle physique de la chaîne à commander (modèle de connaissance), soit tester directement la réponse de cette dernière à des signaux particuliers et en déduire une forme approchée de la fonction de transfert (modèle de comportement). On se moque alors de ce qu'il y a dans le système... La première approche permet de comprendre le rôle des différents paramètres, ce qui la rend indispensable lorsque l'on cherche à réaliser une optimisation. En revanche, l'identification correcte d'un tel modèle est souvent délicate.

IV.3.1. Représentation des systèmes au moyen de modèles physiques.

C'est l'approche la plus satisfaisante pour le physicien, mais ce n'est pas toujours la plus efficace. En effet, elle est longue à mettre en œuvre et elle est dépendante des imperfections des modèles et de l'identification... Néanmoins, elle peut se révéler utile pour commander des systèmes complexes car elle permet d'avoir une idée approchée du rôle des différents paramètres... Le modèle obtenu est appelé **modèle de connaissance**...

• Principe.

Cette approche nécessite de connaître les caractéristiques physiques du système à commander. On obtient alors des systèmes d'équations différentielles que l'on va éventuellement devoir linéariser autour de points de

fonctionnement. Au moyen de la transformée de Laplace, on peut alors remonter à la fonction de transfert du système.

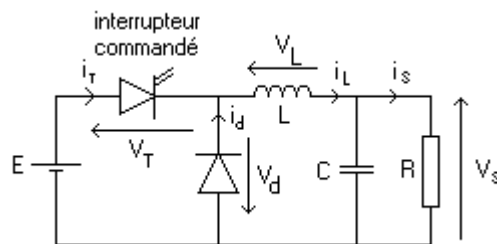
Cette approche est longue à mettre en œuvre, car il faut mesurer un à un les paramètres du modèle... Elle n'est pas toujours très fiable. En effet, on est à la merci des erreurs de mesures lors de l'identification. De plus, un modèle est toujours une image (plus ou moins) simplifiée du réel...

Néanmoins, si elle est bien conduite, elle va permettre de prévoir le comportement du système et éventuellement de le modifier pour optimiser certains paramètres, afin de rendre la commande plus facile et plus performante...

- Exemple d'une alimentation régulée (réalisée à partir d'un hacheur).

Le hacheur est un convertisseur d'énergie qui permet de réaliser une conversion du continu fixe vers du continu variable. Dans notre exemple, nous allons nous intéresser au cas particulier d'un hacheur série dont on peut commander le rapport cyclique.

Aspect statique (principe de fonctionnement du hacheur série).



La charge est constituée par la résistance R. Les éléments L et C forment un filtre dont le but est de limiter l'ondulation résultant du découpage sur la tension et le courant de sortie. Si ces éléments sont correctement calculés, on peut supposer que i_s et v_s sont continus (on néglige l'ondulation résiduelle). L'ensemble (filtre + charge) peut être composé différemment, mais nous raisonnerons sur cet exemple par la suite.

Le cycle de fonctionnement, de période de hachage T ($T=1/f$), comporte deux étapes.

- Lors de la première, on rend le transistor (interrupteur commandé) passant et la diode, polarisée en inverse, est bloquée. Cette phase dure de 0 à $\alpha.T$, avec α compris entre 0 et 1. α est appelé rapport cyclique.

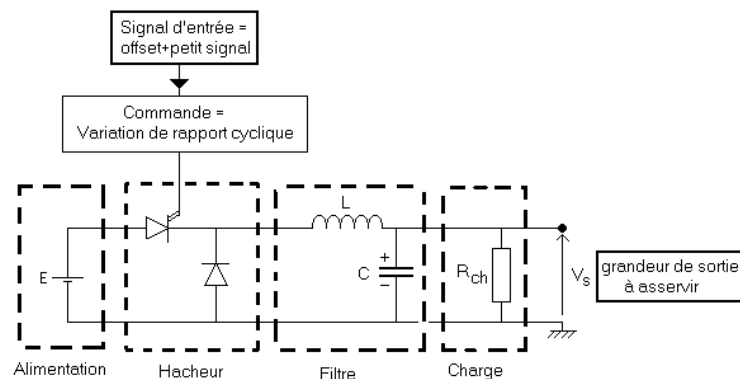
- Lors de la seconde, on bloque le transistor. La diode devient passante. Cette phase dure de $\alpha.T$ à T.

Globalement, dans des conditions optimales de fonctionnement, on a

$$V_s = \alpha.E$$

Principe de la commande.

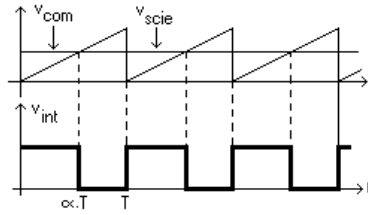
Nous allons nous intéresser au cas d'un hacheur série décrit au paragraphe précédent



- On suppose que les ondulations de courant sont négligeables (inductance suffisamment forte et fréquence de hachage élevée), ce qui justifie de raisonner en valeur moyenne. On suppose alors que

$$V_s = \alpha.E \quad \text{où } \alpha \text{ est le rapport cyclique proportionnel à la tension de commande.}$$

- Pour obtenir α , on compare la tension d'entrée (v_{com} = tension de commande) à un signal en dents de scie (V_{scie}) généré par la partie commande du hacheur. Le fruit de la comparaison est le signal de commande (V_{int}) envoyé sur les transistors (IGBT ou MOS).



Si la dent de scie est de pente λ , alors on a

$$\lambda \cdot \alpha \cdot T = v_{com} \quad \text{soit} \quad \alpha = \frac{v_{com}}{\lambda \cdot T}$$

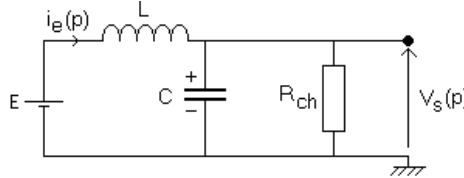
- La relation entre v_{com} et V_s peut donc se mettre sous la forme d'un gain statique G_0 avec

$$G_0 = \frac{E}{\lambda \cdot T}$$

Aspect dynamique de la commande du hacheur.

Pour commander notre système, nous allons supposer que la tension E délivrée par l'alimentation stabilisée est constante et que le paramètre d'entrée susceptible de varier est le rapport cyclique α (on va faire fluctuer la tension v_{com} d'entrée). Suivant l'état de l'interrupteur commandé, le hacheur va se présenter comme l'un des deux circuits suivants :

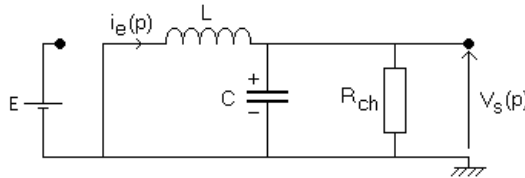
- Lors du premier, sur l'intervalle de temps $[0 ; \alpha T]$, le transistor est passant et la diode est bloquée. On se retrouve donc avec un circuit dans l'état suivant :



Ce qui nous conduit aux équations suivantes :

$$E = L \cdot p \cdot i_e(p) + V_s(p) \quad (1) \quad \text{et} \quad i_e(p) = C \cdot p \cdot V_s(p) + \frac{V_s(p)}{R_{ch}} \quad (2)$$

- Lors du second, sur l'intervalle de temps $[\alpha T ; T]$, le transistor est bloqué et la diode passante ce qui correspond à un nouveau circuit :



On en déduit les deux équation suivantes :

$$0 = L \cdot p \cdot i_e(p) + V_s(p) \quad (3) \quad \text{et} \quad i_e(p) = C \cdot p \cdot V_s(p) + \frac{V_s(p)}{R_{ch}} \quad (4)$$

- Modèle moyen : En supposant que la fréquence de découpage est très grande devant les fréquences caractéristiques du système et les évolutions de l'entrée α , on peut supposer que le comportement de ce dernier correspond à la moyenne temporelle des deux circuits. La réponse obtenue est celle que l'on obtient en faisant la moyenne temporelle de (1) et (3) puis la moyenne de (2) et (4). On est donc ramené à deux nouvelles équations :

$$\alpha(p) \cdot E = L \cdot p \cdot i_e(p) + V_s(p) \quad \text{et} \quad i_e(p) = C \cdot p \cdot V_s(p) + \frac{V_s(p)}{R_{ch}}$$

d'où la réponse :

$$\frac{V_s(p)}{\alpha(p)} = \frac{E}{1 + \frac{L}{R_{ch}} \cdot p + L \cdot C \cdot p^2} = \frac{A}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0} \right)^2}$$

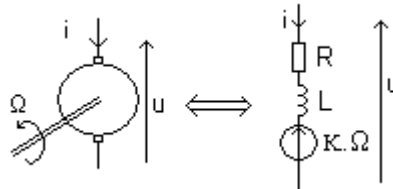
Nous verrons que cette réponse est celle d'un système passe-bas du second ordre de caractéristiques suivantes

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2 \cdot R_{ch}} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

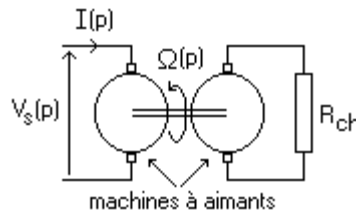
Le fait d'avoir suivi cette démarche nous permet, par exemple, de comprendre que pour obtenir un système suffisamment amorti ($m > 1$), il va falloir travailler avec une résistance de charge assez faible (forte charge) et une inductance la plus forte possible... On prévoit ainsi l'incidence des différents paramètres sur le comportement global du système...

- Exemple de la réponse en courant et en vitesse d'une machine à courant continu.

Nous allons nous intéresser à une machine à aimants (on ne contrôle pas le flux d'excitation). Nous allons supposer que l'induit de la machine est de résistance R , d'inductance L (cette inductance comprend également l'inductance de lissage en sortie du hacheur quand on alimente la machine avec ce type de convertisseur) et que sa f.e.m. à vide E_v est donnée par la relation $E_v = K \cdot \Omega$, si Ω est la vitesse de rotation. Electriquement, on va donc représenter la machine à courant continu par le circuit suivant :



Nous supposons que l'ensemble fixé à l'arbre de la machine est de moment d'inertie J et que le moment du couple de frottement est négligeable.



rq : les banc de machines de faible puissance présentent des couples de frottements secs importants ce qui conduit à un moment de couple de frottements de forme $C = C_0 + f \cdot \Omega$. Cependant si la machine est chargée par une génératrice, on verra que le couple résistant appliqué par cette dernière est un couple de forme $C_r = K' \cdot \Omega$, ce qui permet de dire que le couple qui s'oppose au couple moteur a un moment pratiquement proportionnel à Ω .

Le modèle va permettre d'écrire les relations suivantes

- Equation électrique:
$$V_s(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + K \cdot \Omega(t)$$

soit en variable de Laplace
$$V_s(p) = R \cdot I(p) + L \cdot p \cdot I(p) + K \cdot \Omega(p)$$

d'où
$$I(p) = \frac{1}{L \cdot p + R} \cdot [V_s(p) - K \cdot \Omega(p)]$$

- Equation mécanique:
$$J \cdot \frac{d\Omega(t)}{dt} = K \cdot i(t) - C_{ch}(t)$$

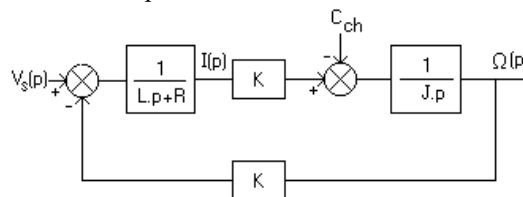
soit en variable de Laplace
$$J \cdot p \cdot \Omega(p) = K \cdot I(p) - C_{ch}(p)$$

ce qui permet d'écrire que
$$\Omega(p) = \frac{1}{J \cdot p} \cdot [K \cdot I(p) - C_{ch}(p)]$$

rq: $C_{ch}(t)$ est le moment du couple de charge

- Schéma bloc :

finalement, on peut représenter le moteur par le schéma suivant:



- Fonction de transfert tension-courant:

Si on suppose que la charge mécanique de notre moteur est une génératrice à courant continu débitant sur une charge R_{ch} , alors on peut dire, en négligeant la dynamique sur la génératrice, que

$$C_{ch} = K.I_{ch} = K \cdot \frac{E}{R_{ch}} = \frac{K^2}{R_{ch}} \cdot \Omega \quad \text{soit} \quad C_{ch} = \frac{K^2}{R_{ch}} \cdot \Omega = K' \cdot \Omega$$

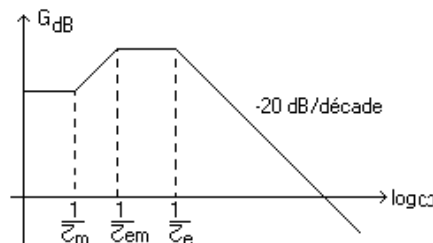
Compte tenu des équations précédentes, on a alors

$$T_I(p) = \frac{I(p)}{V_s(p)} = \frac{J \cdot p + \frac{K^2}{R_{ch}}}{K^2 + (L \cdot p + R) \cdot (J \cdot p + \frac{K^2}{R_{ch}})}$$

Pour les fréquences élevées, ce système va avoir un comportement identique à un passe-bas du premier ordre. C'est pourquoi, en pratique, quand on cherche à asservir le courant dans un tel système, on l'identifie souvent comme tel. Moyennant quelques hypothèses, on peut préciser davantage l'allure de la fonction de transfert. Si on suppose que le dénominateur de la fonction de transfert permet de faire apparaître des constantes de temps (que nous appellerons τ_e et τ_{em}), alors on peut écrire que

$$T_I(p) = A \cdot \frac{(1 + \tau_m \cdot p)}{(1 + \tau_e \cdot p) \cdot (1 + \tau_{em} \cdot p)}$$

Pour de nombreuses machines (inertie mécanique assez forte...), on a $\tau_e \ll \tau_{em} \ll \tau_m$. Dans ce cas, on peut donner le diagramme asymptotique de Bode suivant:



- Fonction de transfert tension-vitesse:

Pour le système utilisé, on a vu que

$$C_{ch} = \frac{K^2}{R_{ch}} \cdot \Omega = K' \cdot \Omega$$

Par calcul, on peut montrer que

$$T_\Omega(p) = \frac{\Omega(p)}{V_s(p)} = \frac{K_m}{1 + (T_{em} + \mu \cdot T_e) \cdot p + T_e \cdot T_{em} \cdot p^2}$$

$$\text{avec } K_m = \frac{K}{K^2 + R \cdot K'}, \quad \mu = \frac{R \cdot K'}{K^2 + R \cdot K'}, \quad T_e = \frac{L}{R}, \quad T_{em} = \frac{R \cdot J}{K^2 + R \cdot K'}$$

Cette fonction correspond à un comportement de type second ordre. Elle peut être simplifiée en faisant certaines hypothèses sur la machine employée.

rq : on remarque qu'une variation de la charge entraîne une modification du modèle du système.

IV.3.2. Modélisation par une approche de type "boîte noire".

Cette fois, on se contente de savoir quelles sont les entrées et quelles sont les sorties. On envoie des signaux de test sur les entrées (créneaux, sinusoïde...) et l'étude des sorties nous conduit à un modèle mathématique du système. On parle alors de **modèle de comportement**.

Lorsque l'on met au point une modélisation très fine des systèmes que l'on étudie, on va souvent arriver à des modèles complexes et donc à des fonctions de transfert qui dépendent de très nombreux paramètres. C'est parfois intéressant pour comprendre l'incidence de différentes grandeurs physiques sur le comportement d'un système. En revanche, c'est très souvent difficile à exploiter directement en pratique. En effet, les paramètres sont d'autant plus difficiles à identifier précisément qu'ils sont nombreux. Pour identifier un modèle, par exemple lorsque l'on va chercher à asservir un système, on va souvent se contenter d'identifier un modèle simple (peut être parfois simpliste... c'est à l'expérimentateur de juger jusqu'où il peut aller). Pour nous, ce sera souvent un système passe bas du premier ou du second ordre.

rq : pour la coupure haute, elle s'explique par le fait que tout système physique cesse de répondre lorsqu'on le sollicite trop rapidement. La bande passante des systèmes n'est évidemment pas toujours aussi simple que celle d'un passe bas mais nous nous contenterons d'étudier ce type de cas par volonté de simplification. Par ailleurs, il

arrive qu'un système plus complexe qu'un passe-bas puisse être considéré comme tel lorsque le spectre du signal d'entrée est assez étroit.

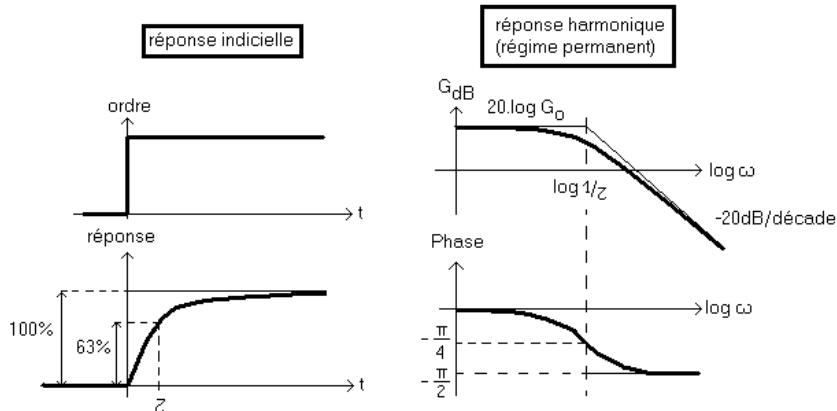
- Filtre passe-bas du premier ordre.

En terme de variable de Laplace, le gain d'un tel système va s'écrire de la façon suivante :

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + \tau.p}$$

G_0 et τ sont les paramètres caractéristiques du modèle (τ est la constante de temps).

Pour identifier le système, on choisira soit la réponse à un échelon, soit la réponse fréquentielle.



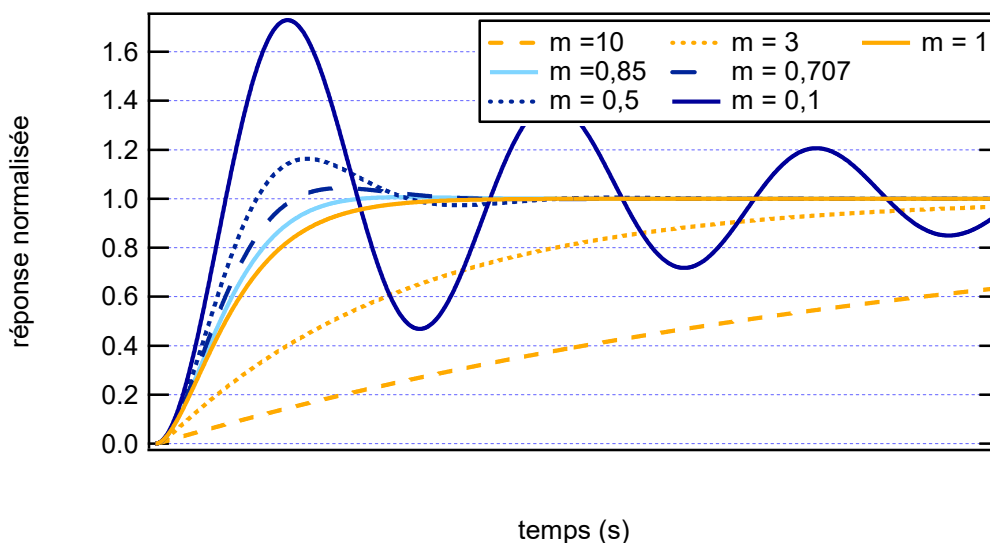
- Filtre passe-bas du second ordre.

En terme de variable de Laplace, le gain d'un système passe-bas du second ordre peut s'écrire de la façon suivante

$$G(p) = \frac{G_0}{1 + 2.m.\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

G_0 , m et ω_0 sont les paramètres caractéristiques (m est le coefficient d'amortissement).

♦ Pour la réponse à un échelon, on obtient une sortie normalisée du système correspondant à la figure suivante :



- si $m > 1$: pas de dépassement.
- si $1 > m > 1/\sqrt{2}$: dépassement sans pseudo-oscillations.
- si $m < 1/\sqrt{2}$: dépassement et pseudo-oscillations.

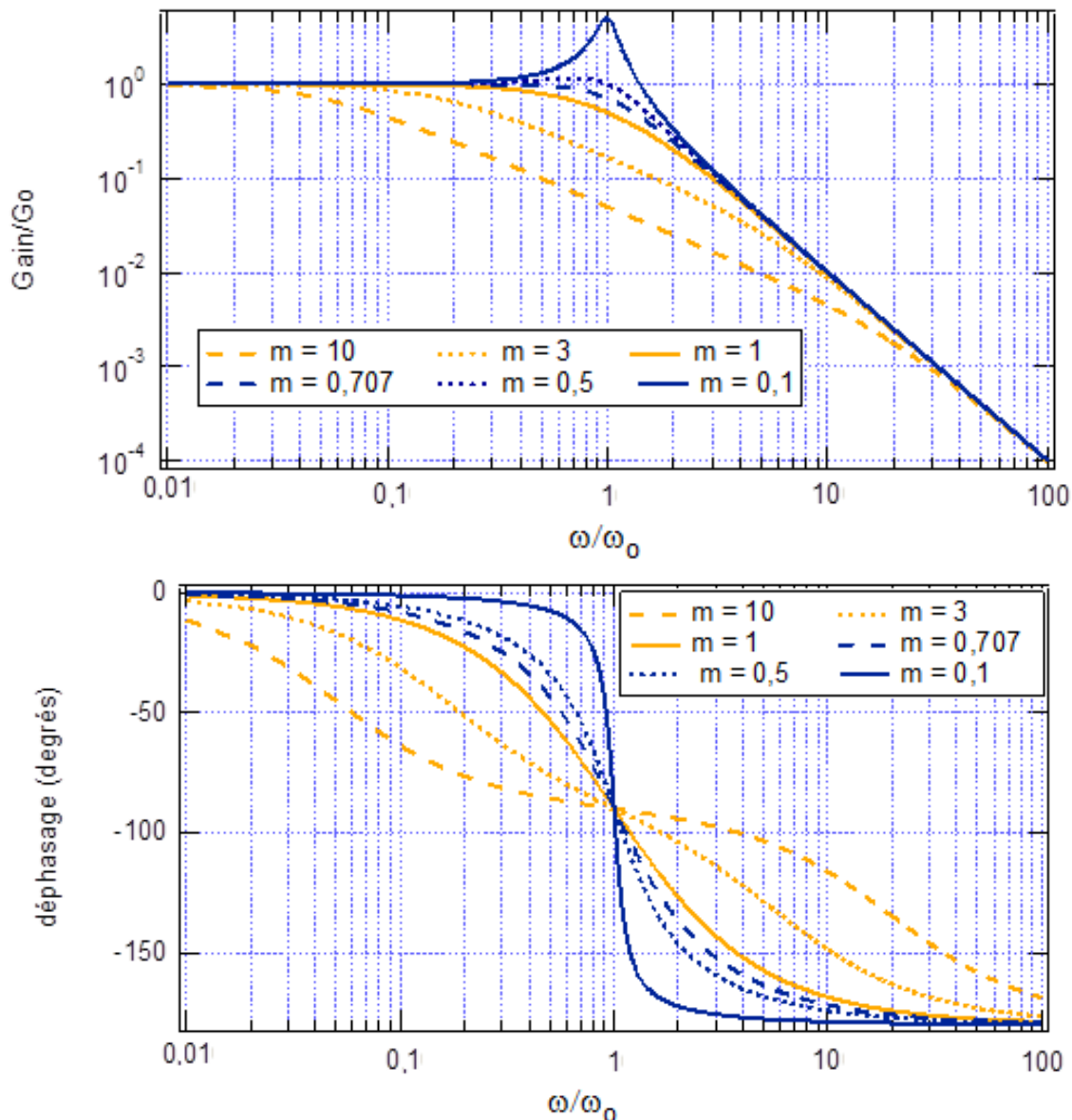
Quand le système dépasse, à partir de la mesure de la mesure du temps t_m de premier passage par le régime permanent et de D dépassement en pourcentage du régime permanent, on peut remonter aux valeurs des trois paramètres qui interviennent dans le modèle. Pour cela, on peut utiliser des tables.

Sinon, quel que soit m , on peut réaliser un ajustement numérique connaissant l'expression de la réponse temporelle à un échelon d'un tel système (Cf annexe II).

♦ *Pour la réponse fréquentielle*, on ne s'intéresse qu'au régime permanent atteint, lorsque l'on applique une entrée sinusoïdale. La fonction de transfert est de la forme

$$G(j\omega) = \frac{G_o}{1 + 2 \cdot j \cdot m \cdot \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \cdot \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

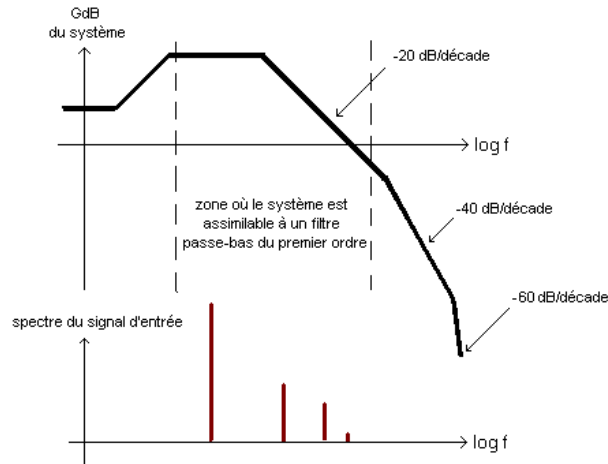
La réponse en gain et en phase d'un tel système correspond aux figures suivantes pour lesquelles on a choisi de représenter en abscisse ω/ω_0



On constate que le Bode d'amplitude se situe sous le diagramme asymptotique quand m est supérieur à 1 alors qu'il est au dessus dans le cas contraire. On observe une pseudo résonance pour $m < 1/\sqrt{2}$ (penser au cas du circuit RLC et à la résonance de tension qui n'est observée que pour des valeurs assez faibles de résistance...). On peut également vérifier que les constantes de temps ne seront **séparables** que lorsque **m sera supérieur à 1** (pas de pseudo-résonance). La phase décroît, quant à elle, progressivement de 0 à $-\pi$.

- Pourquoi peut-on souvent se ramener à des systèmes d'ordre 1 ou 2 ?

Considérons par exemple un système dont la réponse fréquentielle aurait l'allure suivante :



Il ne s'agit manifestement pas d'un passe-bas du premier ordre. Cependant, si les harmoniques du signal d'entrée, sont tous (du moins ceux de puissance notable) compris dans la plage de fréquence telle que le gain est constant ou décroît à -20 dB/décade, la réponse en sortie sera la même que pour un passe-bas du premier ordre. En identifiant un passe-bas du premier ordre, on ne rend pas compte de toute la complexité du système étudié et le modèle risque de se révéler insuffisant si la sollicitation d'entrée présente un spectre plus large. Cependant, dans bien des cas, on peut se contenter d'une telle approche.

rq : l'exemple présenté correspond à la réponse en courant d'un moteur à courant continu (moteur + capteur).

• Cas d'un système présentant un retard (exemple parmi d'autres...).

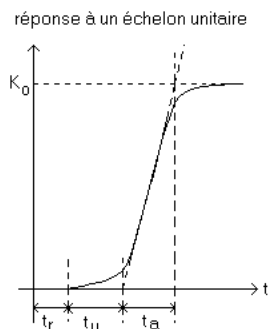
Quand le système présente un retard, que la réponse est apériodique et ne comporte qu'un point d'inflexion, on peut avoir recours à la méthode de Strejc.

L'objectif est de représenter le système par un modèle approché de type

$$G = \frac{K_0 \cdot e^{-\tau \cdot p}}{(1 + T \cdot p)^n}$$

K_0 , n , τ et T sont les paramètres à déterminer.

Pour cela, on envoie l'échelon en entrée et on déduit les paramètres de la réponse en relevant les paramètres t_r , t_u et t_a .



On détermine K_0 en faisant le rapport entre la valeur statique de la réponse en sortie et celle de l'échelon d'entrée. T et n sont déterminés à partir du tableau suivant

n	1	2	3	4	5	6
t_u/t_a	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493
t_a/T	1	2,718	3,695	4,463	5,119	5,699

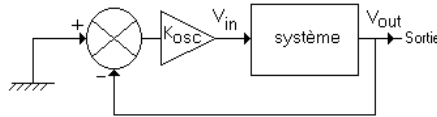
Si on obtient directement une valeur exacte de n , alors $t_r = \tau$. Sinon, on prend la valeur n entière directement inférieure et on calcule à partir du tableau une valeur t'_u . On aura alors

$$\tau = t_r + (t_u - t'_u)$$

Il existe bon nombre de méthodes de ce genre, toutes aussi empiriques, qui permettent d'obtenir une identification convenable pour des systèmes particuliers...

• Système dont on ne connaît pas précisément la fonction de transfert :

Il n'est pas toujours indispensable de connaître précisément un modèle du système à asservir pour établir un correcteur. Il existe en effet des méthodes qui conduisent directement à un correcteur par interprétation de la réponse à une sollicitation donnée. On peut citer la méthode de Ziegler-Nichols bien adaptée à des systèmes passe-bas potentiellement instables. Elle consiste à boucler le système sans signal d'entrée et à augmenter le gain K_{osc} jusqu'à ce qu'une oscillation apparaisse en sortie sur V_{out} (on fabrique un oscillateur...).



En fonction de la fréquence d'oscillation observée, on en déduit les caractéristiques de la correction à réaliser pour assurer une stabilité robuste, tout en optimisant la rapidité et/ou la précision. Nous verrons un exemple d'identification de ce type dans la suite.

Si on veut réaliser une correction proportionnelle intégrale, dont la fonction de transfert est de la forme

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_c \cdot p} \right)$$

Si le gain qui conduit à une oscillation de période T_{osc} est K_{osc} , la méthode préconise de prendre

$$K_c = 0,45 \cdot K_{osc} \quad \text{et} \quad T_c = 0,83 \cdot T_{osc}$$

Des explications sur l'origine de cette méthode sont données en annexe à la fin du polycopié.

-

IV.4. Asservissement de vitesse d'une machine à courant continu.

Nous allons nous intéresser à l'asservissement de la vitesse d'une machine électrique. Nous étudierons le cas de la machine à courant continu, dont l'asservissement est le plus simple à réaliser (la machine asynchrone demande d'avoir recours à des techniques et des matériels beaucoup plus complexes).

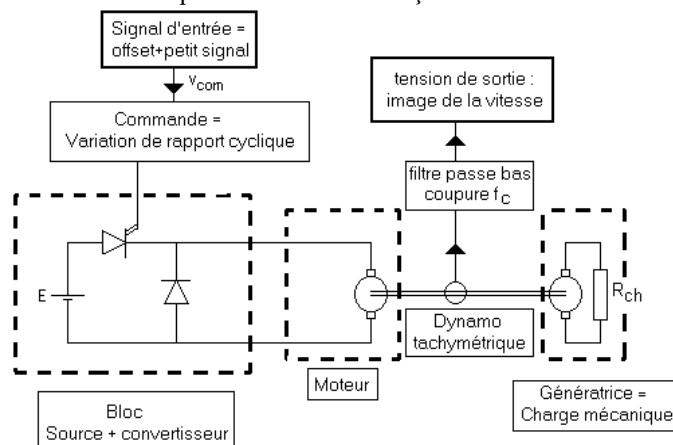
L'entrée du système en boucle ouverte est l'entrée de commande du hacheur. La sortie est celle de la dynamo tachymétrique.

Objectif.

Nous allons chercher à faire en sorte que la vitesse de la machine soit contrôlée par une tension de référence délivrée par un GBF. Notre objectif final est, qu'en l'absence de fluctuation de la tension du GBF, la vitesse soit insensible (sur une plage à déterminer) à une fluctuation d'un des éléments du système (nous verrons l'incidence de deux paramètres : la tension délivrée par l'alimentation de puissance qui sera découpée par le hacheur, ainsi que la charge mécanique sur l'arbre de rotation).

Analyse linéaire du système et remarques pratiques.

Le système en boucle ouverte étudié se présente donc de la façon suivante :



• L'ensemble (hacheur + moteur) peut être représenté par un filtre passe-bas du second ordre. Nous savons également que dans certains cas particuliers, quand les constantes de temps sont séparables, il est possible de négliger les plus élevées. C'est ce que nous ferons en supposant que le système est un passe-bas du premier ordre. On suppose donc que la constante de temps électrique est suffisamment faible devant la constante de temps

mécanique pour être négligée (on fait donc implicitement l'hypothèse que les constantes de temps sont séparables...).

- La dynamo tachymétrique est une petite génératrice à courant continu destinée à fonctionner à vide. On supposera qu'elle est d'inertie suffisamment faible pour être considérée comme un simple gain scalaire dans la plage de fonctionnement étudiée, ce qui signifie qu'on négligera les effets de sa bande passante, potentiellement déstabilisants...

- Pour le filtre de la dynamo tachymétrique (parfois nécessaire car ces systèmes sont très bruités), nous choisirons une fréquence de coupure assez élevée pour pouvoir être négligée lors de l'identification, et assez faible pour pouvoir éliminer une partie des perturbations présentes sur le signal.

- Pour limiter le bruit, on peut par ailleurs mettre à la masse la carcasse des différentes machines (moteur, génératrice et dynamo tachymétrique) afin d'éviter des couplages capacitifs entre elles. On peut ainsi parfois éviter de placer un filtre.

- *Bilan* : Quand on dit que le système est du premier ordre, c'est que l'on a déjà négligé implicitement les constantes de temps apportées par la dynamo tachymétrique et le filtre qui lui sera associé ainsi qu'une partie de la coupure apportée par le moteur. Simplifier un modèle est une démarche courante. Reste à savoir jusqu'où on peut aller. C'est à l'expérience et au cahier des charges de nous le dire.

Nous verrons par la suite que le choix d'un modèle du premier ordre est assez rapidement contredit par les observations expérimentales. Cependant, si le correcteur déterminé à partir de l'identification de ce modèle simpliste suffit à obtenir une réponse en boucle fermée satisfaisante, notamment en terme de précision, il est inutile d'aller chercher un modèle plus complexe...

Éléments non-linéaires susceptibles de limiter la plage d'asservissement.

- Le hacheur est l'élément qui permet de contrôler la tension appliquée sur le moteur et donc la vitesse de ce dernier. Pour cela, on agit sur le rapport cyclique. C'est à ce niveau que se situe la principale non linéarité du système. Le rapport cyclique évolue entre 0 et 1 et ne peut pas sortir de cette plage, ce qui signifie que la tension de commande, qui est proportionnelle au rapport cyclique doit elle aussi rester dans une plage limitée pour que le fonctionnement soit linéaire.

Par exemple, pour le hacheur que nous avons utilisé, on a

$\alpha = 0$ si la tension de commande v_{com} est négative

$\alpha = k \cdot v_{com}$ si la tension de commande v_{com} est comprise entre 0 et 10V

$\alpha = 1$ si la tension de commande v_{com} est supérieure à 10V

Si E est la tension délivrée par l'alimentation stabilisée, la tension appliquée au moteur est comprise entre 0 et E , ce qui correspond à une plage de vitesse bornée, de 0 à Ω_{max} . Si on envoie une tension de commande destinée à conduire à une vitesse supérieure à Ω_{max} , alors le système va réagir de façon non-linéaire et la vitesse restera bloquée à Ω_{max} , avec $\alpha = 1$.

- Par ailleurs, il peut arriver que l'alimentation stabilisée utilisée sature en courant. On veillera donc, en début d'expérience, à ce que le niveau de courant que peut délivrer l'alimentation soit connu et réglé à une valeur assez forte pour pouvoir satisfaire la charge mécanique maximale que nous sommes susceptibles d'appliquer. Cette dernière dépend de la valeur minimale de R_{ch} et de la vitesse de fonctionnement.

Caractéristiques des signaux de tests à appliquer sur l'entrée du système en boucle ouverte.

En pratique, on va envoyer en entrée du système un signal qui est la somme d'une composante continue (offset) et d'un signal en créneau ayant une période valant quelques constantes de temps du système étudié. La composante continue et l'amplitude des créneaux sont choisis afin d'avoir un comportement linéaire. Par exemple, pour l'identification de la boucle ouverte, si la plage linéaire est entre 0 et 10V, on peut choisir une composante continue de 5V et un créneau d'amplitude 1V crête à crête afin de solliciter le système dans une zone suffisamment éloignée des effets non linéaires.

Pour la fréquence des créneaux, on fait en sorte que le fondamental de ce dernier soit dans la bande passante afin de pouvoir identifier correctement la réponse à l'échelon. Dans le cas contraire, la variation est trop rapide pour que le système puisse se rapprocher suffisamment du régime permanent ce qui signifie que les fluctuations d'entrée seront trop fortement filtrées. Dans le cas de l'étude d'un banc de moteur, compte tenu de l'ordre de grandeur des constantes de temps mécaniques, la fréquence des créneaux sera voisine du Hz.

Effet d'une perturbation en boucle ouverte.

En boucle ouverte, pour un niveau de signal d'entrée constant compris dans la zone linéaire, si on fait varier E sur une plage donnée on observe une variation de vitesse qui correspond à cette perturbation. Expérimentalement, on peut noter la relation entre la variation de E et celle de Ω .

De même, on peut faire varier brutalement la charge mécanique que la génératrice représente pour le moteur en faisant varier rapidement la résistance de charge R_{ch} branchée sur la seconde machine et mesurer la variation de vitesse correspondante une fois le régime permanent atteint.

Lorsque que le système aura été corrigé, l'asservissement permettra de compenser l'effet de la perturbation pour maintenir une vitesse constante en régime permanent, excepté durant un transitoire qui dépendra de la dynamique de la boucle. Cependant, il faut noter que ces remarques n'ont de sens que dans la mesure où la perturbation appliquée ne provoque pas l'apparition de phénomènes non linéaires.

Identification du système.

Pour la boucle ouverte sans correcteur, on va chercher à identifier la fonction de transfert suivante :

$$G_{BO}(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

On récupère, à l'oscilloscope, la réponse à un échelon en utilisant bien tout l'écran et en faisant un moyennage pour éliminer le bruit.

Pour τ , on va rechercher directement à l'oscilloscope de temps de réponse à 63%.

Pour le gain, on peut appliquer un signal continu, dans la plage linéaire, en entrée, et faire le rapport de la tension de sortie sur la tension d'entrée. On peut également, en régime crête, faire le rapport de l'amplitude de la variation de sortie (quand on atteint le régime permanent), sur l'amplitude de la variation d'entrée.

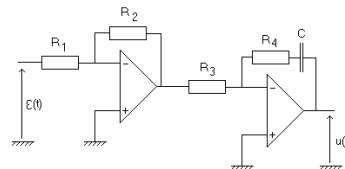
Donc pour l'instant, nous avons

$$v_{com} \rightarrow \left[\frac{K}{1 + \tau \cdot p} \right] \rightarrow v_{\Omega}$$

Réalisation de la correction.

Pour faire en sorte que le système soit indépendant de perturbations extérieures comme une fluctuation de E ou du couple de charge, on réalise une correction de type proportionnelle intégrale, ce qui nous permet d'éliminer l'erreur statique.

Ce type de correcteur présente la structure suivante :



Son gain vaut

$$C(p) = \left(\frac{R_2 \cdot R_4}{R_1 \cdot R_3} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{R_4 \cdot C \cdot p} \right) = K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_c \cdot p} \right)$$

Pour obtenir une réponse en boucle fermée satisfaisante, on choisit la constante de temps du correcteur pour compenser le pôle du système, c'est-à-dire que $\tau_c = \tau$. Dans ce cas, la nouvelle boucle ouverte, avec le correcteur est un intégrateur pur, ce qui signifie que la boucle fermée avec le proportionnel intégral est un passe-bas du premier ordre avec un gain statique égal à 1. Le système a donc un gain constant dans toute la bande passante et présente une réponse en régime permanent qui ne dépend pas des paramètres physiques de notre système.

Pour le gain, si le modèle identifié est satisfaisant, on peut jouer sur K_c pour rendre le système plus rapide. Dans un premier temps, on peut choisir K_c afin d'obtenir le même temps de réponse en boucle fermée corrigée que ce que l'on avait initialement en boucle ouverte sans le correcteur. On va ainsi éviter de faire apparaître les limites de notre modélisation dans un premier temps.

Une fois le système bouclé avec le correcteur, on a donc

$$v_e \rightarrow \left[K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_c \cdot p} \right) \right] \rightarrow v_{com} \rightarrow \left[\frac{K}{1 + \tau \cdot p} \right] \rightarrow v_{\Omega}$$

Détermination de la plage d'asservissement.

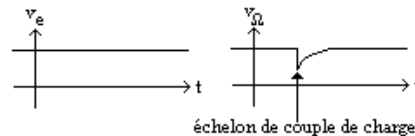
Une fois le correcteur réalisé et la boucle fermée, on applique, comme tension d'entrée un niveau continu. On remarque que la sortie suit parfaitement l'entrée sur une plage de tension limitée. En fait, comme la tension appliquée au moteur est comprise entre 0 et E , ce dernier ne peut tourner qu'entre 0 et Ω_{max} ce qui signifie que la dynamo tachymétrique ne peut délivrer que des tensions comprises entre 0 et $v_{\Omega_{max}}$. Si on donne un ordre avec une tension négative ou supérieure à $v_{\Omega_{max}}$, le système asservi ne pourra pas suivre et l'asservissement va décrocher.

Il est impératif de déterminer cette plage d'asservissement avant de continuer l'étude, car par la suite, tout ce que nous allons faire suppose que l'on travaille bien dans cette plage.

Fonctionnement en régulation : effet des perturbations en boucle fermée.

Avec une tension d'entrée constante dans la plage d'asservissement, on observe bien que la tension v_{Ω} suit parfaitement la tension d'ordre appliquée en entrée du comparateur v_e .

- Si on réalise une perturbation sur le couple de charge sur le moteur en modifiant brutalement la résistance R_{ch} , on observe que v_{Ω} s'écarte de v_e pendant un transitoire puis revient à v_e . Par exemple, si on diminue brutalement R_{ch} , on observe une diminution transitoire de la vitesse relative à échelon sur le couple de charge.



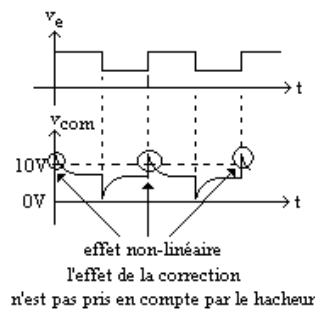
Pour que ce transitoire soit visible, il ne faut pas que le système soit trop rapide et que la perturbation soit suffisante.

- Si on réalise une modification de E , tension délivrée par l'alimentation continue, on constate de même que v_{Ω} suit v_e en régime permanent. Si on diminue fortement E , on constate que l'asservissement finit par décrocher. Alors, α vaut 1 et ne peut plus augmenter. Dans ce cas, v_{com} a dépassé 10V.

Fonctionnement en régime dynamique : rapidité stabilité et non linéarité.

- En appliquant en entrée, sur v_e , une tension qui est la somme d'une composante continue et d'un créneau, telle que l'ensemble est intégralement compris dans la plage d'asservissement, on va pouvoir observer la réponse sur v_{Ω} quand on augmente le gain K_c du correcteur proportionnel intégral. Dans un premier temps, on observe une diminution du temps de réponse conformément à ce qui est attendu, mais on va également observer l'apparition d'un dépassement ce qui n'est pas possible pour un système passe bas d'ordre 1. Le modèle que nous avons identifié était donc simpliste.

- Si on augmente encore K_c , on risque de voir apparaître un comportement non linéaire. Pour s'en assurer, il suffit d'observer le signal v_{com} appliqué en entrée du hacheur et de constater qu'il sort de la plage de fonctionnement linéaire de la commande du hacheur (de 0 à 10V pour notre système). Le signal v_{com} présente en effet l'allure suivante



La partie du signal qui sort de la plage comprise entre 0 et 10V n'est pas prise en compte. On n'améliore donc pas la dynamique autant que ce que l'on aurait voulu. Par ailleurs, les pics de v_{com} seront d'autant plus marqués que le gain K_c est élevé.

- Dans certains cas, on peut même faire apparaître une oscillation sur v_{Ω} , ce qui signifie que l'on a rendu le système instable. Cette observation confirme que le modèle de notre boucle ouverte est simpliste dans la mesure où l'oscillation n'est possible que pour un système d'ordre supérieur ou égal à 3. Cette oscillation ne sera pas toujours observable, car il arrive qu'elle soit rendue impossible par les effets non linéaires. Elle sera d'autant plus facile à observer que les systèmes ont des fréquences de coupures proches les unes des autres (dynamo tachymétrique dont l'inertie est voisine du moteur ou moteur présentant des fréquences de coupures mécaniques et électriques rapprochées).

- L'alimentation en courant du système constitue également une source importante de non-linéarité. Pour éviter les problèmes, on veillera à régler l'alimentation afin qu'elle débite un courant allant jusqu'à la valeur maximale supportée par le moteur, ou la valeur la plus proche possible de ce maximum. Si on appelle davantage, elle sature. Par ailleurs, lors des phases de décélération, le courant ne pouvant changer de signe avec ce type de hacheur, on risque d'observer un courant qui s'annule et reste bloqué à zéro. Le hacheur est alors en conduction discontinue.

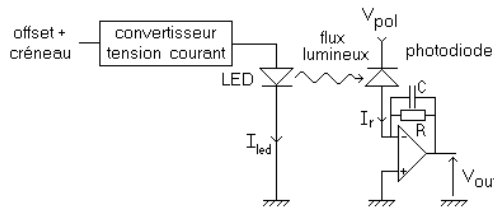
IV.5. Asservissement du flux lumineux émis par une LED.

Cet asservissement va nous permettre d'adopter une démarche différente de ce qui a été vu précédemment. Cette fois, on va faire en sorte, par une méthode empirique, de déterminer les caractéristiques d'un correcteur, sans connaître précisément les caractéristiques du système commandé. Le correcteur obtenu garantit la stabilité, sans que les autres performances du système (notamment la rapidité) ne soient trop altérées.

rq : il n'est pas nécessaire de connaître le système, mais il faut avoir conscience que les méthodes empiriques, qui sont fort nombreuses, et adaptées à des types de problèmes particuliers, ne fonctionnent pas systématiquement. Si on emploie une méthode plutôt qu'une autre, c'est que l'on a une petite idée du comportement général (sans le connaître précisément).

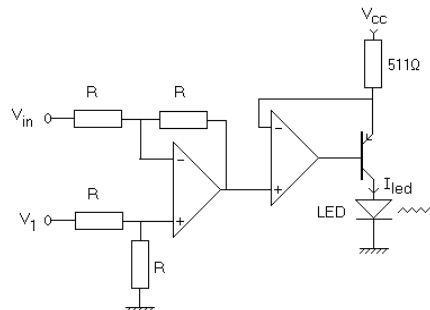
IV.5.1. Structure du système et analyse du problème.

Le système étudié se présente sous la forme suivante :



• le convertisseur tension/courant :

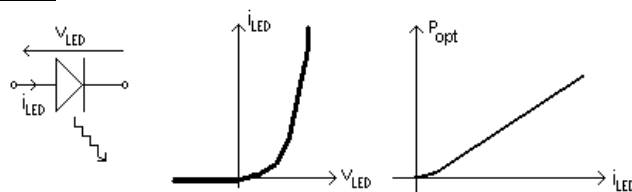
Le flux lumineux émis par la LED est contrôlé par le courant I_{led} . Ce courant est commandé par une tension au moyen d'un circuit électronique adapté (réalisé avec un transistor et des amplificateurs opérationnels). Il est réalisé de la façon suivante :



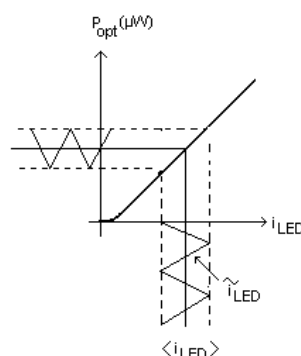
La tension V_1 est continue et permet de polariser correctement la LED. La tension V_{in} est une composante variable qui permet de moduler le faisceau. La polarisation de la LED se fait par l'intermédiaire d'une tension de polarisation V_{cc} à travers une résistance R_o . Avec ce système, on injecte, dans la LED un courant I_{led} , tel que

$$I_{led} = \frac{V_{cc} - (V_1 - \tilde{V}_{in})}{R_o}$$

• fonctionnement de la LED :



Pour moduler le flux émis par une LED, il faut injecter une composante continue de courant à laquelle on va ajouter une petite fluctuation, suffisamment faible pour rester dans la plage de courant conduisant à une réponse affine de la puissance optique. Grâce au circuit décrit précédemment, on va pouvoir fixer la composante continue de i_{LED} par $V_{cc}-V_1$ et moduler l'intensité lumineuse émise par V_{in} qui permet de contrôler l'ondulation de i_{LED} .

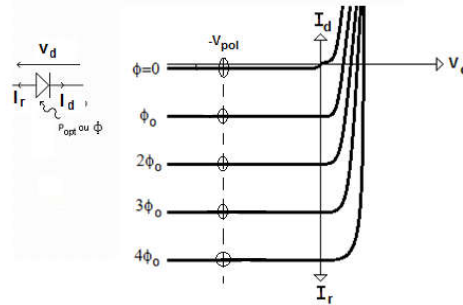


En régime dynamique, ce système va, comme tout système physique, avoir un temps de réponse ce qui va, dans notre cas, nécessiter de faire apparaître au moins une fréquence de coupure.

• fonctionnement de la photodiode :

Le flux lumineux émis par la LED va être en partie converti en courant par la photodiode. Ce courant I_r sera alors converti en tension V_{out} (plus facile à visualiser que I_r) au moyen d'un montage transconductance.

Régime statique : Compte tenu de la structure du montage transconductance, la photodiode est directement polarisée sous la tension $-V_{pol}$. Sur la figure suivante, on a représenté la caractéristique courant en fonction de la tension de la photodiode, pour différents flux lumineux reçus. En la polarisant en inverse (sous $-V_{pol}$) on se retrouve donc sur des points de fonctionnement du type de ceux qui sont entourés.

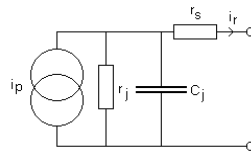


Dans ce cas, le courant inverse I_r dans la photodiode peut s'écrire, pour des éclairagements suffisants

$$i_r = I_{obs} + K \cdot \Phi \approx K \cdot \Phi$$

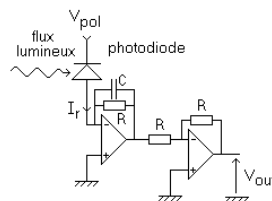
I_{obs} s'appelle courant d'obscurité (courant quand ϕ est nul) et ϕ représente la puissance optique reçue. En statique, on peut donc dire que le courant dans la photodiode est pratiquement proportionnel à la puissance lumineuse reçue. Dans notre cas, la puissance lumineuse provient de la LED et de l'éclairage ambiant (lumière naturelle et éclairage... attention aux fluctuations à 100 Hz apportées par ce dernier)

Régime dynamique : en dynamique, la photodiode peut être représentée de la façon suivante :



En pratique, on peut considérer que r_j (résistance de jonction) est pratiquement infinie et que r_s (résistance de connectique) est très faible. C_j est la capacité de jonction (elle est d'autant plus faible que la jonction est fortement polarisée en inverse). Le courant i_p est le courant résultant du flux lumineux ϕ .

Dans ce cas, l'ensemble photodiode + montage transconductance peut être représenté, pour ce qui concerne les variations par une fonction de transfert d'ordre 2.

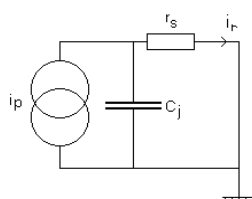


Pour comprendre ce point, on peut procéder de la façon suivante. Le courant i_r qui sort de la photodiode conduit à la tension V_{out} par l'intermédiaire d'une fonction de transfert telle que

$$v_{out}(p) = \frac{R}{1 + R \cdot C_j \cdot p} \cdot i_r(p)$$

Le rôle de l'amplificateur inverseur est de compenser le gain statique négatif du circuit transconductance, chargé de réaliser la conversion courant/tension.

Ce courant i_r est lié au courant i_p résultant du flux lumineux incident. Compte tenu de la structure du montage transconductance, pour trouver la relation entre i_p et i_r , on peut raisonner, en régime variable, à partir du schéma suivant :



on a alors

$$i_r(p) = i_p(p) \cdot \frac{1}{1 + r_s \cdot C_j \cdot p}$$

Globalement, on a donc

$$v_{out}(p) = \frac{R}{1 + R \cdot C \cdot p} \cdot \frac{1}{1 + r_s \cdot C_j \cdot p} \cdot i_p(p)$$

Le gain global de la boucle ouverte sera donc d'ordre supérieur strictement à 2. En effet, il faut ajouter à ce qui vient d'être calculé, la fréquence de coupure de la LED et les limitations en fréquence des amplificateurs opérationnels... Le système est donc potentiellement instable ce qui permet d'envisager d'utiliser la méthode de Ziegler Nichols.

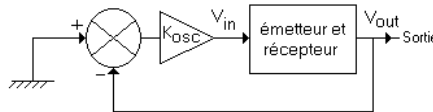
• comment déterminer un correcteur dans ce cas ?

Dans le cas de cet exemple, on pourrait, comme précédemment chercher à faire une identification de la boucle ouverte et en déduire un correcteur qui permettrait d'avoir la réponse désirée en boucle fermée. Cependant, dans le cas qui nous intéresse, il apparaît assez rapidement que l'ordre du système est au moins égal à 3 (à cause de la LED, des amplificateurs opérationnels, de la photodiode, de l'amplificateur de courant en sortie). Pour des systèmes d'ordre élevé, il n'est pas évident de déterminer précisément l'ordre auquel on peut se permettre de s'arrêter dans la modélisation (et donc dans l'identification).

Plutôt que de perdre son temps dans de fastidieuses et probablement infructueuses réflexions et expériences, on peut choisir d'adopter une méthode empirique, qui nous conduira directement à un correcteur satisfaisant (PI ou PID). Nous pouvons, par exemple, choisir la méthode de Ziegler Nichols, qui est adaptée à notre système

IV.5.2. Détermination du correcteur.

• Tout d'abord, on va identifier la réponse du système dans des conditions particulières. On fait en sorte de fermer la boucle d'asservissement. Le signal récupéré sur la photodiode est injecté sur l'entrée «-» du comparateur et l'entrée «+» est mise à la masse. En sortie du comparateur, on place un simple correcteur proportionnel de gain réglable. On règle ce gain jusqu'à la valeur K_{osc} pour laquelle on a apparition d'oscillations. On note alors K_{osc} , ainsi que T_{osc} , la période de ces oscillations.



• Ensuite, on déduit des valeurs obtenues les paramètres caractéristiques du correcteur P.I. par les relations suivantes :

$$K_c = 0,45 \cdot K_{osc} \quad \text{et} \quad T_c = 0,83 \cdot T_{osc}$$

rq : on rappelle que le correcteur P.I. a pour fonction de transfert

$$C(p) = K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{T_c \cdot p} \right)$$

• On remplace alors le correcteur proportionnel par le PI calculé, on applique la consigne désirée en entrée, et on constate que le système est stable et qu'il est sans erreur statique.

En appliquant une entrée de commande constante, on observe que la plage d'asservissement est restreinte. Pour les tensions négatives, la diode étant éteinte, il n'y a pas asservissement (plus de moyen d'action sur l'éclairage de la photodiode). Pour les valeurs de commande positives mais trop fortes, le niveau de courant injecté dans la LED nécessaire pour atteindre l'éclairage demandé ne peut pas être délivré par l'alimentation (ce qui permet de protéger la LED d'une destruction certaine).

En se plaçant dans la plage d'asservissement que nous venons de définir, on peut faire différentes observations.

A entrée de commande constante, si on écarte émetteur et récepteur (c'est-à-dire si on augmente la perturbation due à l'éclairage ambiant), on constate que la LED éclaire de moins en moins jusqu'à s'éteindre (l'asservissement cesse alors de fonctionner puisque l'on a perdu notre moyen d'action sur l'éclairage de la photodiode qui ne dépend plus alors que des perturbation ambiantes).

On peut également étudier la réponse dynamique de notre boucle (appliquer un signal offset + créneaux en entrée afin de solliciter le système dans sa plage d'asservissement). Ce temps de réponse peut être diminué en augmentant K_c , mais le fait d'augmenter K_c va finir par rendre le système instable... On met alors clairement en évidence le compromis existant entre rapidité et stabilité.

IV.6. Principe du capteur de courant à zéro de flux.

Dans ce paragraphe, nous allons étudier un système susceptible de donner l'image d'un fort courant traversant un circuit électrique. Afin de rendre ce système le plus indépendant de l'état de certains de ses éléments

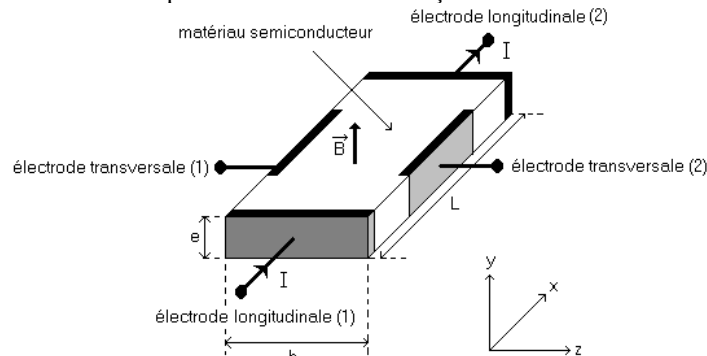
(température et positionnement du capteur à effet Hall, saturation du circuit magnétique...), il est intéressant d'utiliser une boucle d'asservissement.

IV.6.1. Le capteur à effet Hall.

Le capteur à effet Hall permet de récupérer une image du flux magnétique qui traverse un barreau semi-conducteur. Nous allons voir que l'on peut l'utiliser pour réaliser un capteur de courant (système qui délivre une tension proportionnelle au courant à observer).

• Structure de base.

En simplifiant, on peut réaliser un capteur à effet Hall de la façon suivante :

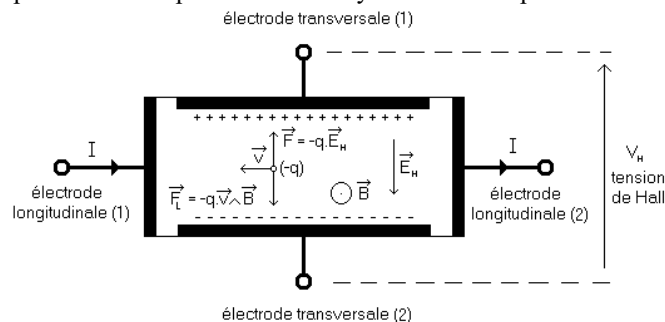


On distingue un barreau de semi-conducteur sur lequel arrivent quatre électrodes reliées à des plaques métalliques. On fait passer un courant I entre les deux électrodes longitudinales. Nous allons chercher à comprendre ce qui se passe lorsque l'ensemble est plongé dans le champ d'induction magnétique B orienté comme sur la figure.

rq : la zone utile de semi-conducteur est d'épaisseur e , de hauteur h et de longueur L . On peut par ailleurs définir la section S du canal conducteur par $S = e.h$.

• Principe de fonctionnement.

Nous allons commencer par faire une représentation du système dans le plan Oxz



Nous allons supposer que la conduction (courant I) est assurée par les électrons (densité de porteur n et mobilité μ). Sous l'action du champ magnétique, ces charges négatives vont être déviées vers l'électrode transversale (2) (force de Lorentz). Cette accumulation de charges va provoquer l'apparition d'un champ électrique E (entre les électrodes transversales). Il va être à l'origine d'une force qui s'oppose à la force de Lorentz. On finit par atteindre un régime stationnaire lorsque les deux forces s'équilibrent. Le champ électrique qui règne alors entre les électrodes transversales explique la différence de potentiel V_H qui existe entre elles. La tension V_H est appelée tension de Hall.

Quantitativement, on peut écrire qu'en régime stationnaire, on a

$$-q.E_H = -q.v \frac{V_H}{h} = -q.v.B$$

De plus

$$I = j.S = \rho.v.S = -q.n.v.S$$

(où j est la densité de courant, ρ la densité volumique de charges, n le nombre de charges par unité de volume, S la section de conducteur, v la vitesse moyenne des porteurs, I le courant considéré).

De ces deux équations, on déduit que

$$V_H = \left(\frac{-1}{q.n} \right) \frac{I.B}{e} = K_H.B$$

• Ainsi, si on injecte un courant I connu fixé, on récupère une tension V_H proportionnelle à B (que B soit continu ou variable ce qui est un grand avantage par rapport aux capteurs de flux inductifs classiques).

• Si on applique un champ magnétique B connu fixé, V_H est directement proportionnel à I .

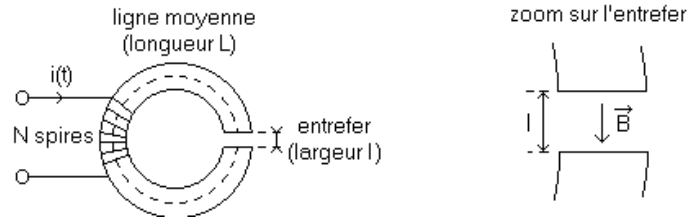
- Dans tous les cas, on remarque que K_H est d'autant plus forte que la densité de porteurs est faible. Si on veut une tension suffisante, il ne faudra pas doper trop fortement le matériau semi-conducteur.
- La densité de porteurs susceptibles de participer à la conduction va dépendre de la température. T va donc avoir une influence sur K_H .

IV.6.2. Application à la mesure de courant.

Nous allons essayer de comprendre comment utiliser un capteur à effet Hall pour récupérer une tension image d'un courant à étudier. Il faut savoir que les principes qui vont être énoncés correspondent à ce qui se passe dans les pinces de courant qui permettent de détecter des courants continus comme des courants variables (dans la limite de la bande passante).

• Première approche :

Dans un premier temps, on peut envisager la structure simple suivante :



Le bobinage entourant le circuit magnétique est parcouru par un courant $i(t)$. De ce courant va résulter un champ d'induction B_e proportionnel à i dans l'entrefer. En effet :

- le théorème d'ampère donne

$$H_f(t).L + H_e(t).l = N.i(t)$$

- Si on considère que le circuit magnétique canalise suffisamment les lignes de champ, on peut négliger les flux de fuite et par conservation du flux, on aura

$$B_e.S_e = B_f.S_f$$

où B_e et B_f représentent respectivement le champ d'induction moyen dans l'entrefer et dans le matériau magnétique et où S_e et S_f représentent respectivement la section de l'entrefer et du circuit magnétique.

- Si on suppose que le matériau magnétique est assez doux (faible champ coercitif) et qu'il n'est pas trop saturé (probable en raison de l'existence de l'entrefer), alors on peut raisonnablement définir une perméabilité relative μ_r telle que

$$B_f = \mu_o.\mu_r.H_f$$

L'équation déduite du théorème d'ampère peut alors être transformée de la façon suivante :

$$\frac{B_f}{\mu_o.\mu_r}.L + \frac{B_e}{\mu_o}.l = N.i \quad \text{ou encore} \quad B_e.\left(\frac{S_e/S_f}{\mu_o.\mu_r}.L + \frac{l}{\mu_o}\right) = N.i \quad \text{et ainsi}$$

$$B_e(t) = \alpha.i(t)$$

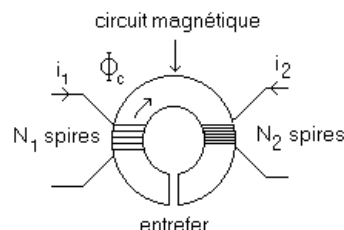
Si on place un capteur à effet Hall dans l'entrefer, il est soumis à B_e . On peut alors imposer le courant I continu (fixé le plus précisément possible) qui traverse le barreau de semi conducteur. On va alors récupérer une tension V_H proportionnelle à B_e c'est à dire

$$V_H = K_H.B_e = K_H.\alpha.i(t)$$

Il suffit alors de faire un étalonnage pour déterminer le coefficient de proportionnalité entre $V_H(t)$ et $i(t)$. Cependant, ce système présente un défaut important. En effet, le coefficient peut être modifié par les conditions expérimentales (température, position du capteur, saturation magnétique...), ce qui rend la procédure d'étalonnage caduque. On peut alors envisager un système un peu plus complexe, mais moins sensible aux différentes perturbations expérimentales. On va faire en sorte que le capteur ne soit plus destiné qu'à détecter un zéro de flux (ce qui élimine les effets de la fluctuation du coefficient de proportionnalité).

• Amélioration du système précédant (capteur à zéro de flux):

On va considérer la structure suivante :



Si on applique le théorème d'ampère à la structure suivante (Φ_c est le flux global dans le circuit magnétique et \mathfrak{R} est la réluctance de ce dernier), alors

$$N_1 \cdot i_1(t) - N_2 \cdot i_2(t) = \mathfrak{R} \cdot \Phi_c(t)$$

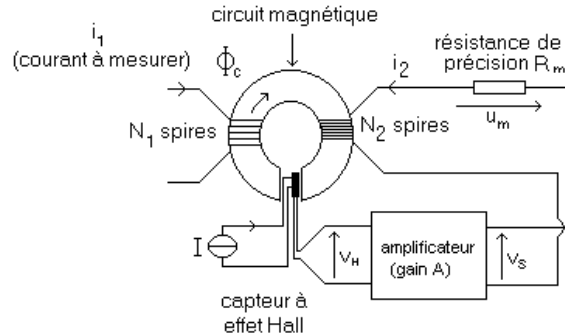
Si on parvient à faire en sorte que $\Phi_c(t)$ soit nul, alors, on aura

$$i_2(t) = \frac{N_1}{N_2} \cdot i_1(t)$$

C'est grâce au capteur à effet Hall que l'on va réussir à réaliser l'annulation du flux. L'intérêt de ce montage, c'est que, lorsque l'on cherche à observer un courant i_1 de forte valeur, il suffit de prendre un rapport de spires adapté afin de pouvoir se contenter de travailler avec i_2 de beaucoup plus faible valeur directement proportionnel à i_1 avec un rapport de proportionnalité connu. On place alors une résistance de précision connue dans le circuit parcouru par i_2 et on observe la tension à ses bornes. On obtient alors une image directe du courant i_1 .

♦ *Schématisation :*

Pour parvenir à annuler le flux, on va instrumenter le système de la façon suivante :



Dans le capteur à effet Hall, on fait à nouveau passer un courant continu I fixé le plus stable possible afin que la tension de Hall V_H détectée soit directement proportionnelle à la valeur du champ d'induction B_e dans l'entrefer. La tension V_H est amplifiée par l'intermédiaire d'un gain A .

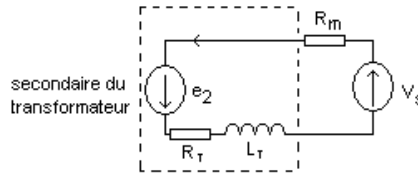
♦ *Mise en équations :*

Pour comprendre le fonctionnement de l'ensemble, on va modéliser le système constitué du circuit magnétique et des deux bobinages comme un transformateur.

On peut alors écrire les équations suivantes :

$$N_1 \cdot i_1 - N_2 \cdot i_2 = \mathfrak{R} \cdot \Phi_c \quad (1)$$

Par ailleurs, si R_T et L_T représentent respectivement la résistance de bobinage et l'inductance de fuite ramenées au secondaire, on se retrouve, au secondaire, avec le circuit électrique suivant :



On peut donc écrire que

$$e_2 + v_s = (R_m + R_T) \cdot i_2 + L_T \cdot \frac{di_2}{dt}$$

Par ailleurs

$$e_2 = -N_2 \cdot \frac{d(-\Phi_c)}{dt} = N_2 \cdot \frac{d\Phi_c}{dt}$$

En passant en variable de Laplace, on a donc

$$i_2(p) = \frac{1}{\frac{R_m + R_T}{1 + \frac{L_T}{R_m + R_T} \cdot p}} \cdot [v_s(p) + N_2 \cdot p \cdot \Phi_c(p)] \quad (2)$$

La tension de Hall v_H est proportionnelle à B_e champ d'induction dans l'entrefer, lui même proportionnel à Φ_c . Si S est la section du circuit magnétique, on a

$$v_H = K_H \cdot B_e = \frac{K_H}{S} \cdot \Phi_c$$

Si A représente le gain de l'ensemble amplificateur de tension, on a

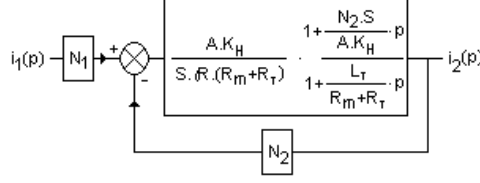
$$A.v_H(p) = v_s(p)$$

Globalement, on a donc :

$$v_s(p) = \frac{A.K_H}{S} \cdot \Phi_c(p) \quad (3)$$

♦ *Fonction de transfert :*

A partir des équations (1), (2) et (3), on peut représenter notre capteur de courant avec le schéma suivant



Globalement, la fonction de transfert en boucle fermée s'écrit

$$\left(\frac{i_2}{i_1} \right)(p) = \frac{N_1}{N_2 + \frac{S.R.(R_m + R_T)}{A.K_H}} \cdot \frac{1 + \frac{N_2.S}{A.K_H} \cdot p}{\frac{L_T.S.R. + N_2^2.S}{L_T.S.R. + N_2^2.S}} = G_0 \cdot \frac{1 + \tau_a \cdot p}{1 + \tau_b \cdot p} = G_0 \cdot F_a(p) \cdot F_b(p)$$

En ajustant correctement les paramètres, on peut faire en sorte que la fonction de transfert présente un gain constant.

En effet, à basse fréquence, le système présente un gain constant G_{bf} tel que

$$\left(\frac{i_2}{i_1} \right)_{bf} = G_{bf} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{S.R.(R_m + R_T)}{A.K_H.N_2}}$$

Si on fait en sorte d'avoir un gain important de la chaîne directe (fortes valeurs de A et K_H), de travailler avec beaucoup de spires au secondaire et que l'on minimise la réluctance du circuit magnétique et les résistances du système, on a $G_{bf} = N_1/N_2$.

A haute fréquence, le gain est également constant et vaut G_{hf} , tel que

$$\left(\frac{i_2}{i_1} \right)_{hf} = G_{hf} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R.L_T}{N_2^2}}$$

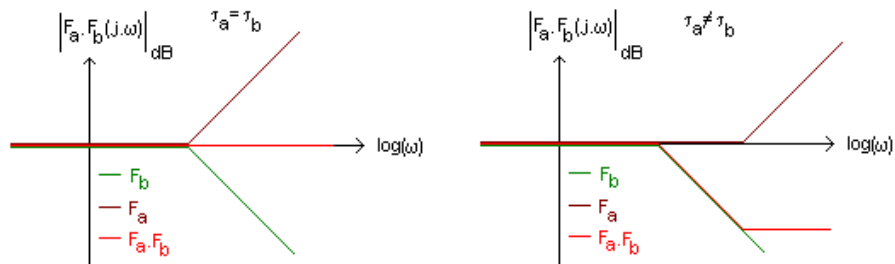
Si on fait en sorte d'avoir un circuit peu réluctant, avec peu de fuites et que le nombre de spires au secondaire est important, alors, là encore, on a $G_{hf} = N_1/N_2$.

Or le rapport τ_b/τ_a vaut

$$\frac{\tau_b}{\tau_a} = \frac{1 + \frac{S.R.(R_m + R_T)}{A.K_H.N_2}}{1 + \frac{L_T.R}{N_2^2}}$$

Si on fait en sorte qu'en haute et basse fréquence le gain soit N_1/N_2 , alors $\tau_b/\tau_a \approx 1$ et la fonction de transfert en boucle fermée est assimilable à un gain statique G_0 qui est effectivement très proche de N_1/N_2 compte tenu des hypothèses.

Si on trace le diagramme de Bode du gain du système en boucle fermée divisé par G_0 , on se retrouve avec la le diagramme de Bode de $F_a.F_b$ qui a l'allure présentée sur la figure suivante :



On peut donc avoir un gain constant quelle que soit la fréquence. Ce gain ne dépend pas des conditions d'utilisation du capteur (température, stabilité de gain des éléments électroniques...).

rq : En pratique, le système n'a évidemment pas une bande passante infinie, notamment parce que le transformateur à haute fréquence, voit sa structure devenir capacitive en raison des couplages capacitifs entre les spires jointives des bobinages.

rq : Pour une modélisation plus fidèle, il faudrait prendre en compte la bande passante de l'amplificateur ainsi que celle du capteur à effet Hall. La fonction de transfert devient alors beaucoup plus complexe. Dans la pratique, l'incidence de ces deux fréquences de coupure rend délicat l'obtention d'une réponse en courant constante quelle que soit la fréquence avant la coupure.

rq : Ce type de capteur est couramment utilisé pour observer des courants de l'ordre de l'ampère ou plus dans les systèmes d'électronique de puissance. Pour qu'ils fonctionnent correctement, il est nécessaire de les alimenter avant de leur appliquer un courant à observer afin d'être certain de travailler à un flux nul dans le circuit magnétique. Si ça n'est pas le cas, le fait de leur appliquer un courant continu en entrée risque d'introduire une aimantation rémanente du circuit magnétique que se traduira par un offset sur le signal délivré par le capteur. Il sera alors nécessaire de réaliser une désaimantation du circuit magnétique pour obtenir un résultat correct.

IV.7. Boucle à verrouillage de phase.

Dans bon nombre d'applications électroniques (télécommunications, instrumentation...), on doit pouvoir disposer de signaux indépendants, strictement à même fréquence. Par exemple, pour démoduler un signal, on va souvent devoir disposer de la fréquence de porteuse. Dans le cas d'un récepteur, il va souvent falloir reconstruire la porteuse à partir du signal reçu. Il serait illusoire de chercher à fabriquer un oscillateur local ayant la même fréquence que celui qui a servi à la modulation. En effet, quand bien même on parviendrait à un instant donné à égaliser les deux fréquences, par la suite, les deux systèmes évoluant indépendamment (variations de température, vieillissement...), les fréquences seraient forcément proches, mais différentes. Pour une démodulation, ce faible écart est catastrophique...

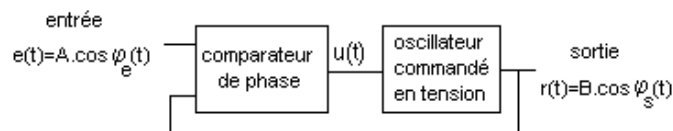
La boucle à verrouillage de phase permet d'éviter ce problème. Elle est principalement constituée d'un oscillateur commandé en tension, intégré dans une boucle d'asservissement, qui permet d'accrocher la fréquence de l'oscillateur sur une fréquence du signal d'entrée (dans l'exemple cité précédemment, on fera par exemple en sorte que cette fréquence soit celle de la porteuse si elle fait partie du signal modulé).

• Avant d'aller plus loin, on rappelle la notion de phase et de fréquence instantanées. Si on considère un signal $s(t) = S_m \cdot \cos(\varphi(t))$, on peut donner les définitions suivantes :

- $\varphi(t)$ est la phase instantanée
- la pulsation instantanée est $\omega(t) = d\varphi(t)/dt$
- la fréquence instantanée $f(t) = \omega(t)/2\pi$

IV.7.1. Présentation de la structure de la P.L.L.

Le système se présente sous la forme d'un système bouclé dans lequel on va trouver les éléments suivants :

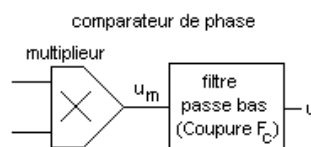


• Le comparateur de phase :

En statique, ce système doit fournir un signal $u(t)$ de la forme

$$u(t) = K_c \cdot (\varphi_e - \varphi_s)$$

Il existe plusieurs façons de le réaliser. L'une des méthodes consiste à réaliser une multiplication (avec un multiplieur ou un mélangeur) et à placer en sortie un filtre passe bas.

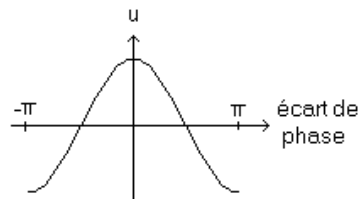


Dans ce cas, on récupère en sortie du multiplieur le signal

$$u_m(t) = k \cdot A \cdot B \cdot \cos(\varphi_e) \cdot \cos(\varphi_s) = \frac{k \cdot A \cdot B}{2} \cdot [\cos(\varphi_e + \varphi_s) + \cos(\varphi_e - \varphi_s)]$$

Si le système est asservi en fréquence, ce signal est voisin de la somme d'une sinusoïde de fréquence $2f_e$ avec un signal basse fréquence. Si le filtre passe-bas élimine le premier terme, on se retrouve avec

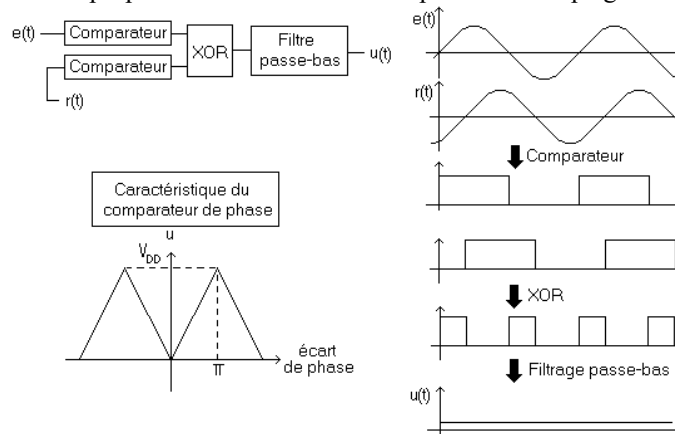
$$u(t) = \frac{k.A.B}{2} \cdot \cos(\varphi_e - \varphi_s)$$



La relation obtenue n'est pas linéaire. Cependant, si l'écart de phase, une fois la boucle accrochée se stabilise, alors on peut linéariser autour de ce point, pourvu que l'écart ne soit pas trop important. Alors, en raisonnant sur les variations, on a,

$$\tilde{u}(t) = k_{cp} \cdot (\tilde{\varphi}_e - \tilde{\varphi}_s)$$

rq : dans les systèmes numériques, on utilise une autre technique, qui consiste à transformer, via un comparateur, les signaux d'entrée et de sortie en des créniaux de même phase. Les deux créniaux obtenus sont envoyés dans un ou exclusif (XOR). On prend alors la valeur moyenne grâce à un filtre passe bas, ce qui permet de récupérer un signal réellement proportionnel à la variation de phase sur une plage de fréquence donnée.

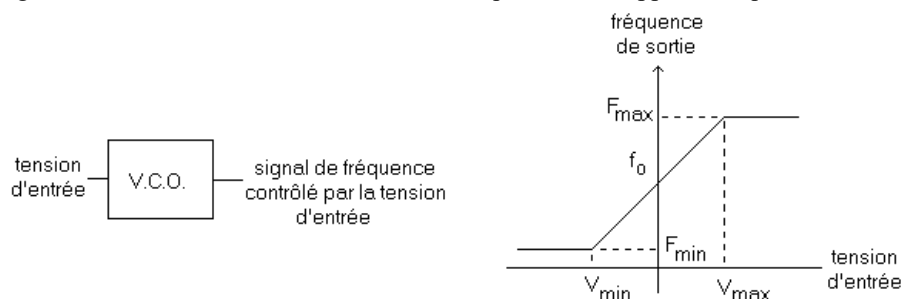


Entre 0 et π , la réponse du comparateur est donc de la forme

$$u = \frac{V_{DD}}{\pi} \cdot (\varphi_e - \varphi_s) = k_{cp} \cdot (\varphi_e - \varphi_s)$$

- L'oscillateur commandé en tension (V.C.O. = voltage controlled oscillator):

Un oscillateur commandé en tension a, en simplifiant, une caractéristique donnant une variation de fréquence évoluant linéairement avec la tension d'entrée pour une plage $[V_{min}; V_{max}]$. En revanche, en dehors de cette zone, la fréquence du signal de sortie est fixée à F_{min} ou F_{max} . La fréquence f_0 est appelée fréquence centrale du VCO.



Remarque : suivant les oscillateurs utilisés, la pente de la courbe précédente peut être positive ou négative.

IV.7.2. Fonctionnement de la boucle : capture et verrouillage.

- Pour décrire le comparateur de phase réalisé avec un multiplieur, nous avons fait l'hypothèse que le signal d'entrée de la boucle et le signal de sortie du V.C.O. avaient des variations de phase proches. Pour que cela soit vrai, il est nécessaire que la boucle soit verrouillée, c'est à dire que la fréquence du signal d'entrée prenne une valeur comprise dans une plage étroite qui dépend des éléments qui la composent.

- La plage qui permet au système de s'accrocher est appelée plage de capture (plage d'accrochage, "acquisition range"...). Elle est centrée sur la fréquence centrale du VCO et sa largeur dépend principalement de la fréquence de coupure du filtre passe-bas.

- Une fois que la boucle est accrochée, la plage de fréquence qui lui permet de rester dans cet état est appelée plage de verrouillage (plage de poursuite, plage de maintien, tracking range, lock range...). Cette plage dépend principalement de zone de fréquence dans laquelle le V.C.O. et le comparateur de phase se comportent linéairement. Elle doit être plus large que la plage d'accrochage...

La Capture.

- Présentation du problème: On suppose que la boucle n'est pas accrochée. On rapproche progressivement la fréquence f_e du signal d'entrée de la fréquence centrale du V.C.O. f_0 . Dès que f_e rentre dans une plage de fréquence $[f_0 - F_c; f_0 + F_c]$, la boucle va s'accrocher et la fréquence de sortie du V.C.O. va atteindre f_e après un régime transitoire caractérisant la dynamique de la boucle...

- La boucle n'est pas encore accrochée.

Si $f_e < f_0 - F_c$, le V.C.O. oscille à f_0 . En effet, dans ce cas, le signal d'entrée présente les fréquences $f_0 - f_e$ et $f_0 + f_e$ qui sont toutes les deux supérieures à F_c ce qui fait que le signal en sortie du passe-bas est nul, d'où une fréquence F_0 en sortie de l'oscillateur.

On aurait pu raisonner en faisant décroître la fréquence d'entrée à partir d'un état où la boucle n'est pas accrochée ce qui aurait fait apparaître le caractère particulier de la fréquence $f_0 + F_c$.

- La boucle s'accroche: état permanent atteint par le système.

Lorsque f_e va rentrer dans la plage $[f_0 - F_c; f_0 + F_c]$, il va apparaître une tension non nulle en sortie du filtre passe-bas, ce qui va faire évoluer la fréquence de sortie de l'oscillateur.

Pour comprendre l'évolution du système, on va présenter ce dernier en terme de système bouclé dans lequel tous les éléments ont un comportement linéaire (simplification).

On supposera que le filtre passe-bas est du premier ordre. On va faire un changement de variable, afin de travailler avec des fréquences f_e' et f_s' qui sont les écarts des fréquences d'entrée f_e et de sortie f_s à la fréquence centrale du V.C.O. f_0 . On pourra ainsi éviter de travailler avec des grandeurs continues, délicates à gérer en terme de variables de Laplace.

On a alors

$$f_s'(t) = f_s(t) - f_0 = K_0 \cdot u(t) \quad \text{soit} \quad f_s'(p) = K_0 \cdot u(p)$$

En terme de phase, on en déduit que

$$\frac{d\varphi_s'(t)}{dt} = 2\pi \cdot K_0 \cdot u(t) \quad \text{soit} \quad \varphi_s'(p) = \frac{2\pi \cdot K_0}{p} \cdot u(p)$$

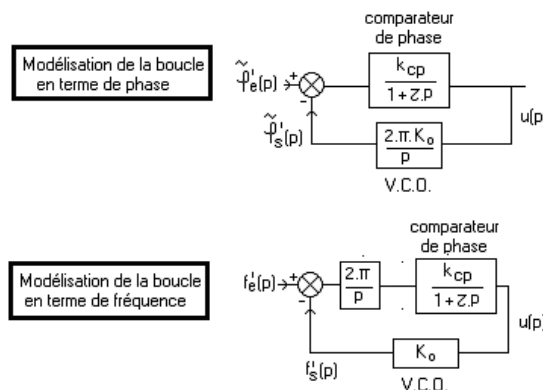
De plus

$$f_e' = f_e - f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\varphi_e'}{dt} \quad \text{soit} \quad \varphi_e'(p) = \frac{2\pi \cdot f_e'}{p}$$

En linéarisant le comparateur de phase autour de son point de fonctionnement, on a

$$\tilde{u}(p) = \frac{k_{cp}}{(1 + \tau \cdot p)} \cdot (\tilde{\varphi}_e(p) - \tilde{\varphi}_s(p)) = \frac{k_{cp}}{(1 + \tau \cdot p)} \cdot (\tilde{\varphi}_e'(p) - \tilde{\varphi}_s'(p))$$

Les expressions précédentes permettent alors d'établir les schémas suivants :



La fonction de transfert en boucle fermée du système a la forme suivante :

$$\frac{f'_s(p)}{f'_e(p)} = \frac{\frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}}{1 + \frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0} \cdot p + \frac{\tau}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0} \cdot p^2} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

On constate qu'il s'agit d'un système du second ordre avec

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0}{\tau}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi \cdot k_{cp} \cdot K_0 \cdot \tau}}$$

Le gain statique de ce système vaut 1 ce qui signifie qu'en régime permanent, f'_s tend vers f'_e , et donc que f_s tend vers f_e .

remarque : La tension en entrée du V.C.O. reste nulle tant que la fréquence d'entrée n'est pas dans la plage de capture. Dès que f_e rentre dans cette plage, la tension u évolue afin que f_s tende vers f_e . Une fois que le système a atteint le régime permanent, u prend une valeur constante. Si on fait alors fluctuer lentement f_e par rapport à la dynamique de la boucle, u va suivre les évolutions de cette dernière ...

• Bilan :

On en déduit donc la plage dans laquelle la fréquence du signal d'entrée permet au système de s'accrocher:

$$[f_0 - F_c ; f_0 + F_c]$$

Le fait d'appliquer une sinusoïde dans cette plage en entrée de la boucle va permettre d'obtenir, en régime permanent, un signal $r(t)$ de même fréquence mais déphasé.

Le verrouillage.

♦ Calcul du déphasage entre le signal d'entrée et le signal de sortie du V.C.O. :

Si le signal de sortie de V.C.O. est de même fréquence que la sinusoïde d'entrée, une fois le régime permanent établi, on va vérifier que ces deux signaux sont déphasés l'un par rapport à l'autre.

Dans le cas d'un comparateur de phase à base de multiplieur et de filtre passe-bas, le signal $u(t)$ est de forme

$$u(t) = k_{cp} \cdot \cos(\varphi_e(t) - \varphi_s(t)) = k_{cp} \cdot \cos \varphi(t)$$

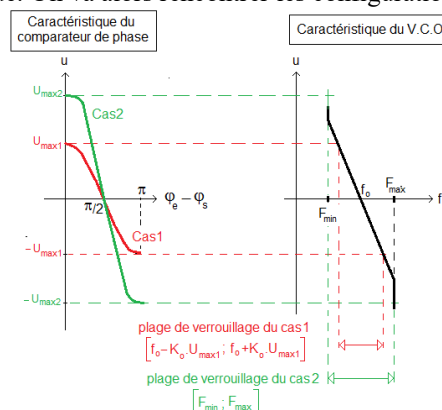
En régime permanent, on a égalité de fréquence pour $e(t)$ et $r(t)$ et $\varphi(t)$ est constante. On peut donc écrire que

$$f_e = f_s = f_0 + k_{cp} \cdot K_0 \cdot \cos \varphi \quad \text{soit que} \quad \cos \varphi = \frac{f_e - f_0}{k_{cp} \cdot K_0}$$

Dans le cas particulier où $f_e = f_0$, on trouve donc que $\cos \varphi = 0$, ce qui signifie que le déphasage peut prendre les valeurs $+\pi/2$ ou $-\pi/2$. La position stable dépend du signe du gain du V.C.O. et du comparateur de phase...

♦ Estimation de la plage de verrouillage :

On suppose que la boucle a accroché. Si on fait augmenter f_e , initialement très voisin de f_0 , f_s suit f_e alors que le déphasage entre les tensions évolue. On va alors rencontrer les configurations suivantes :

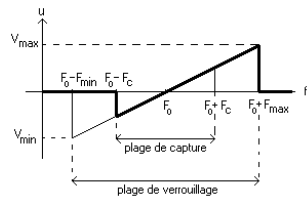


Le cas 1 correspond à une plage de verrouillage imposée par le comparateur de phase (la plage de verrouillage est alors $[f_0 \pm K_0 \cdot U_{max}]$). En pratique U_{max} peut évoluer avec l'amplitude du signal d'entrée, ce qui signifie que la plage de verrouillage peut varier notablement suivant l'utilisation que l'on fait de la P.L.L.... Cette dernière joue le rôle d'un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est réglable avec la fréquence centrale du VCO et dont la bande passante est également ajustable par l'intermédiaire de U_{max} , réglable avec le niveau de tension fourni par le VCO. Cependant, ce dispositif n'est pas un filtre linéaire !

Le cas 2 correspond à une plage de verrouillage imposée par le V.C.O. (la plage de verrouillage est alors $[F_{min} ; F_{max}]$).

Caractéristique statique générale.

On peut caractériser les différents états du V.C.O. suivant la fréquence du signal d'entrée sur la caractéristique suivante (on suppose ici que c'est le V.C.O. qui limite la plage de verrouillage):



En gras, on a représenté l'évolution de la tension du V.C.O. (image de la fréquence de sortie) pour un signal d'entrée présentant une fréquence croissante... A $f_0 - F_c$, on observe la capture, alors qu'à $f_0 + F_{max}$, on observe le décrochage (on sort de la plage de verrouillage)...

rq : les états transitoires n'ont pas été représentés... On suppose que l'évolution conduisant à cette caractéristique se fait de façon quasi-statique.

IV.7.3. Exemples d'applications de la boucle à verrouillage de phase.

La boucle à verrouillage de phase est un outil qui va pouvoir être utilisé à travers de très nombreuses applications. Nous allons en présenter deux. La démodulation de fréquence et la reconstruction de porteuse en vue de la réalisation d'une démodulation cohérente.

a/ Démodulation de fréquence.

- Si on envoie, en entrée de la boucle, un signal modulé en fréquence, dont une partie du spectre est dans la plage de capture, ce qui autorise l'accrochage, et dont l'ensemble du spectre est tout juste compris dans la plage de verrouillage, alors, l'oscillateur commandé en tension va reproduire le signal modulé en fréquence. L'intérêt de cette opération, c'est que la variation du signal d'entrée de l'oscillateur est proportionnelle à la variation de fréquence du signal de sortie. En effet, puisque la boucle est accrochée, on a

$$f_s(t) = f_o + K_o \cdot u(t)$$

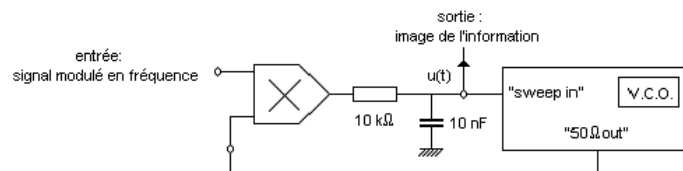
Pour un signal modulé en fréquence si $m(t)$ est l'information, on a également

$$f_s(t) = f_o + k \cdot m(t)$$

Finalement, on peut écrire que

$$u(t) = \frac{f_p - f_o}{K_o} + \frac{k}{K_o} \cdot m(t)$$

Pourvu que la plage de capture et la plage de verrouillage soient correctement adaptées au signal à démoduler, la boucle à verrouillage de phase est donc un démodulateur de fréquence.



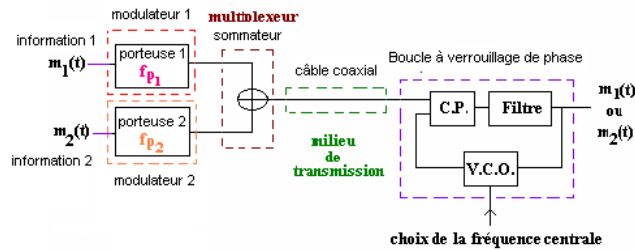
- Pour mettre en œuvre rapidement une démodulation de fréquence, on fabrique un signal modulé en fréquence avec une porteuse de quelques dizaines de kHz, d'amplitude 3 volts crête et une profondeur de modulation de quelques kHz. Comme modulante, on prend un simple signal sinusoïdal d'une fréquence voisine de la centaine de Hz. On règle la tension de sortie du V.C.O. à 3V crête et la fréquence centrale sur une fréquence la plus proche possible de celle de la porteuse.

On envoie alors le signal modulé sur la boucle, on synchronise sur la modulante, et on observe l'entrée du V.C.O. qui doit nous restituer une image du modulant. Il faut noter que le niveau des tensions joue sur la plage de verrouillage. Il faut souvent un peu d'ajustage pour obtenir un résultat correct. On peut également essayer une modulante en triangles ou en créneaux. Pour une fréquence de modulante trop élevée, la boucle va filtrer. Pour observer cet effet, on peut prendre une modulante en créneaux et augmenter sa fréquence jusqu'à quelques kHz.

- Application dans le cas d'un démultiplexage : Avec un tel système, on peut proposer une expérience permettant de réaliser un multiplexage avec deux signaux modulés en fréquence. Pour réaliser chaque signal modulé, on utilise un V.C.O. en appliquant le signal informatif sur l'entrée de balayage. Les signaux informatifs peuvent être pris sur la sortie analogique d'un walkman ou d'une radio. Comme V.C.O., les générateurs Agilent 33220 sont très pratiques pour ce type d'expérience, en raison de la grande finesse du réglage de la fréquence de porteuse et du réglage intégré de l'amplitude de modulation.

On règle l'amplitude de sortie des sources de signaux sonores afin que notre système démodule correctement chacun d'entre eux. Les porteuses de modulation sont choisies assez éloignées pour permettre une démodulation plus simple (on choisira 100kHz et 200kHz). En effet, si ces fréquences sont trop proches, on risque d'avoir un chevauchement des signaux modulés dans le domaine spectral.

Les deux signaux modulés sont additionnés. Pour cela, on utilise le comparateur du boîtier comparateur correcteur ENSC325 avec un correcteur proportionnel de gain 1 (deux inverseurs en cascade). On les transmet en même temps dans un câble coaxial qui est connecté à l'entrée de la boucle à verrouillage de phase. On peut observer en FFT le signal dans le câble et constater que l'on obtient effectivement deux spectres disjoints.



L'amplitude du signal de sortie du V.C.O. est réglée à 1,5V crête environ. Sur la boucle, il suffit de régler la fréquence centrale du V.C.O. de la boucle sur une valeur proche de f_{p1} ou de f_{p2} pour récupérer respectivement $m_1(t)$ ou $m_2(t)$. La sortie de la boucle (entrée du V.C.O. dans ce cas) est envoyée sur un amplificateur de puissance relié à un haut parleur.

Il faut noter que l'étape qui consiste à démoduler sur les deux canaux avec la même boucle est délicate et il qu'il faut souvent ajuster les différents niveaux de tension et la fréquence centrale avant d'avoir un résultat correct.

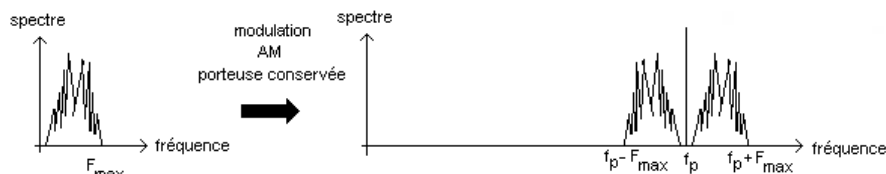
Une fois que l'expérience fonctionne correctement, on peut essayer, alors que l'on démodule sur une voie, de rapprocher la portuse de l'autre voie, afin d'observer l'effet de superposition des spectres dans le canal de transmission. On constate que le son restitué est très perturbé, ce qui souligne l'importance d'un transport de l'information dans des plages de fréquences disjointes. Cette expérience est présentée sur un film associé.

b/ Reconstruction de portuse : application à la démodulation d'amplitude.

Le spectre d'un signal modulé en amplitude, à portuse conservée est de forme suivante :

$$s_m(t) = S_o \cdot (1 + m(t)) \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot t)$$

si $m(t)$ représente l'information et f_p la fréquence de portuse



Pour démoduler un tel signal, on peut envisager de réaliser une détection cohérente. Pour cela, on multiplie le signal modulé par un signal sinusoïdal à la même fréquence que la portuse, déphasé de ϕ par rapport à la portuse de démodulation, ce qui nous donne une signal $s_d(t)$ (le facteur $1/10$ représente le gain du multiplieur).

$$s_i(t) = S \cdot (1 + m(t)) \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot t) \cdot \frac{1}{10} \cdot S_d \cdot \cos(2\pi \cdot f_p \cdot t + \phi) = \frac{S \cdot S_d}{20} \cdot (1 + m(t)) \cdot (\cos \phi + \cos(4\pi \cdot f_p \cdot t + \phi))$$

Ensuite on filtre pour éliminer les fréquences voisines de $2 \cdot f_p$ et récupérer l'information à une constante près.

$$s_d(t) = \frac{S \cdot S_d}{20} \cdot (1 + m(t)) \cdot \cos \phi$$

On constate que pour récupérer un signal non nul, il faut éviter que la portuse de démodulation soit en quadrature de phase par rapport à la portuse de modulation.

Si on choisit une boucle à verrouillage de phase qui présente une plage de verrouillage centrée sur une fréquence proche de la portuse et assez étroite pour ne pas mordre sur les bandes latérales et ainsi ne reproduire que la fréquence portuse, on récupérera en sortie une sinusoïde à une fréquence asservie sur la fréquence portuse. En jouant légèrement sur la fréquence centrale du VCO de la boucle, ou en utilisant un circuit déphaseur, on pourra faire en sorte de s'éloigner suffisamment de la quadrature entre portuse de modulation et portuse reconstruite, ce qui donnera un niveau de signal suffisant en sortie de la détection cohérente.

IV.7.4. Réalisation pratique.

Il existe des composants électroniques qui comportent tous les éléments d'une boucle à verrouillage de phase, excepté le filtre (4046, ...). Cependant, il est également possible de réaliser une boucle avec des éléments séparés, ce qui est un peu plus pédagogique. Pour cela, on peut réaliser l'ensemble (comparateur de phase / filtre) avec un multiplieur analogique (AD633 par exemple) et un filtre passe bas de type RC. Comme oscillateur commandé en tension, on utilise un générateur avec une entrée de wobulation (« sweep in ») comme par exemple un générateur Thandar. On fixe la plage de capture avec le filtre RC (prendre quelques kHz de bande passante) et on choisit une

fréquence centrale de l'oscillateur (fréquence pour l'entrée « sweep in » nulle) de quelques 100 kHz (par exemple 200 kHz).

On applique alors en entrée de la boucle un signal sinusoïdal de fréquence assez inférieure à 200 kHz (hors de la plage de capture). Dans ce cas, les deux oscillateurs sont non synchrones et si on les observe à l'écran, la trace dérive.

En augmentant la fréquence du signal d'entrée, celle-ci finit par rentrer dans la plage de capture et l'oscillateur commandé s'accroche sur le signal d'entrée. Les deux traces à l'écran sont alors stables et le restent tant que l'on est dans la plage de verrouillage (pourvu que la fréquence n'évolue pas trop vite).

Annexe 1: réponse temporelle à un échelon d'un système du second ordre.

Fonction de transfert de type

$$F(p) = \frac{K}{1 + 2.m \cdot \frac{p}{\omega_o} + \frac{p^2}{\omega_o^2}}$$

Réponse à un échelon d'amplitude E :

$$0 < m < 1 : s(t) = K.E \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m.\omega_o.t} \cdot \sin\left(\omega_o \cdot \sqrt{1-m^2} \cdot t + \text{Arc cos } m\right) \right)$$

$$m = 1 : s(t) = K.E \cdot (1 - (1 + \omega_o.t) \cdot e^{-\omega_o.t})$$

$$\text{si } m > 1 : s(t) = K.E \cdot \left(1 - \frac{m + \sqrt{m^2 - 1}}{2 \cdot \sqrt{m^2 - 1}} \cdot e^{(-m.\omega_o + \omega_o \cdot \sqrt{m^2 - 1}).t} + \frac{m - \sqrt{m^2 - 1}}{2 \cdot \sqrt{m^2 - 1}} \cdot e^{(-m.\omega_o - \omega_o \cdot \sqrt{m^2 - 1}).t} \right)$$

Réponse impulsionnelle d'aire A :

$$0 < m < 1 : s(t) = K.A \cdot \frac{\omega_o}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m.\omega_o.t} \cdot \sin\left(\omega_o \cdot \sqrt{1-m^2} \cdot t\right)$$

$$m = 1 : s(t) = K.A \cdot \omega_o^2 \cdot t \cdot e^{-\omega_o.t}$$

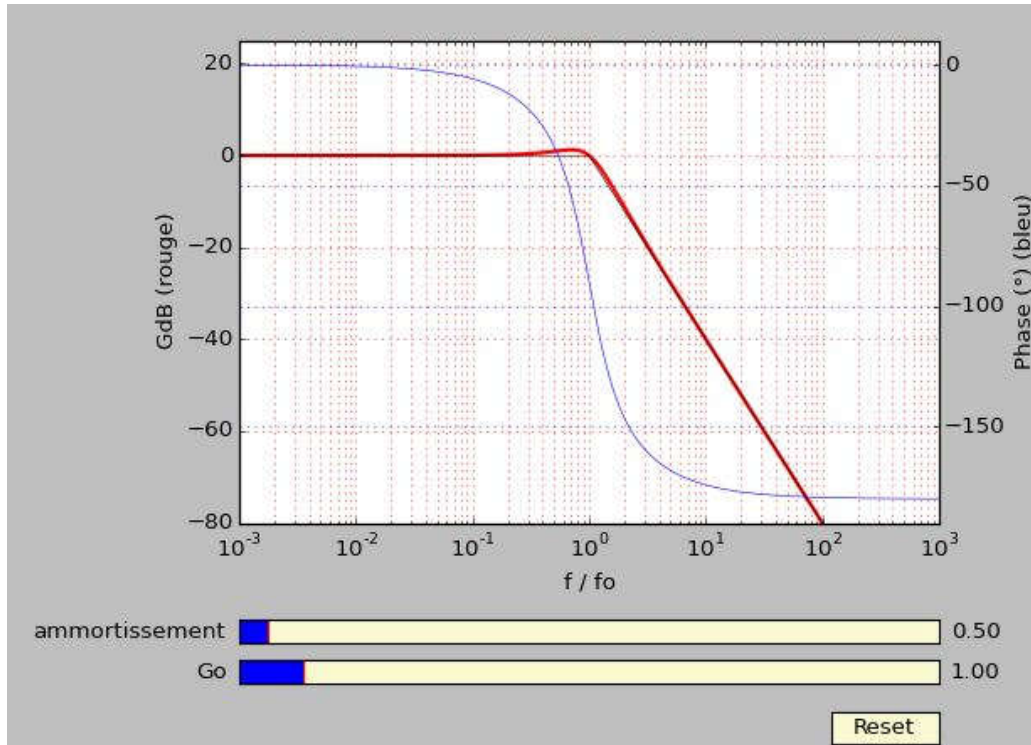
$$\text{si } m > 1 : s(t) = K.A \cdot \frac{\omega_o}{\sqrt{m^2 - 1}} \cdot e^{-m.\omega_o.t} \cdot \text{sh}\left(\omega_o \cdot \sqrt{m^2 - 1} \cdot t\right)$$

Annexe 2 : diagramme de bode d'un passe-bas du second ordre

Vous disposez d'un programme en python vous permettant de représenter le diagramme de Bode (gain en décibels et phase) d'un filtre passe-bas du second ordre de fonction de transfert

$$G(p) = \frac{G_o}{1 + 2.m.\frac{p}{\omega_o} + \frac{p^2}{\omega_o^2}}$$

Le programme vous représente également le diagramme asymptotique (un programme similaire vous permet d'étudier un passe-bande).



La courbe en rouge représente le module du gain, la courbe en bleu le déphasage introduit par le filtre et les portions de droite en noir le diagramme asymptotique de Bode.

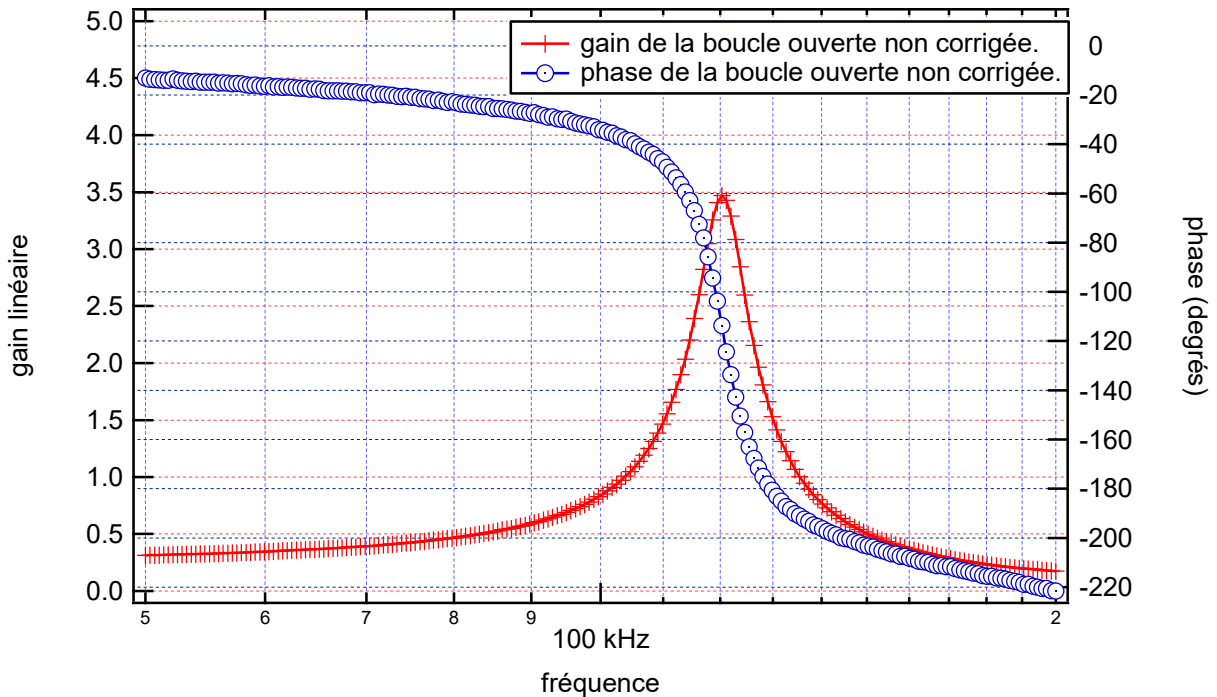
Les curseurs en bas de la figure permettent d'ajuster la valeur du coefficient d'amortissement m et du gain G_o . L'échelle de fréquence est une échelle relative.

Annexe 3: quelques explications sur la méthode de Ziegler-Nichols.

Pour illustrer nos explications sur la méthode de Ziegler-Nichols nous allons nous baser sur l'exemple du contrôle de flux lumineux présenté parmi les exemples du polycopié.

Il s'agit d'un système dont la boucle ouverte correspond à la mise en cascade de plusieurs éléments passe-bas, dont les fréquences de coupures sont échelonnées entre quelques centaines de kHz et 100Mz. Ce système correspond forcément à un passe-bas d'ordre supérieur à 3. Il est donc potentiellement instable en boucle fermée si on augmente suffisamment le gain de la chaîne directe.

Nous avons relevé la fonction de transfert en boucle ouverte du système. Le gain et la phase ont l'allure suivante :



Quand le gain est réel, son module vaut 1.54 environ. De cette figure, on peut donc déduire que le gain qui conduira à faire osciller ce système doit être supérieur à 0.65.

La pulsation pour laquelle la fonction de transfert est réelle vaut 134000 rad/s. Si on suppose que l'élément qui réalise ce gain n'introduit pas d'effet sur le déphasage, si le système est mis en oscillation, la période d'oscillation sera 7,5µs environ.

A partir de ces deux valeurs, on a tracé la nouvelle fonction de transfert en boucle ouverte une fois qu'on a placé un correcteur proportionnel intégral de fonction de transfert

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_c \cdot p} \right)$$

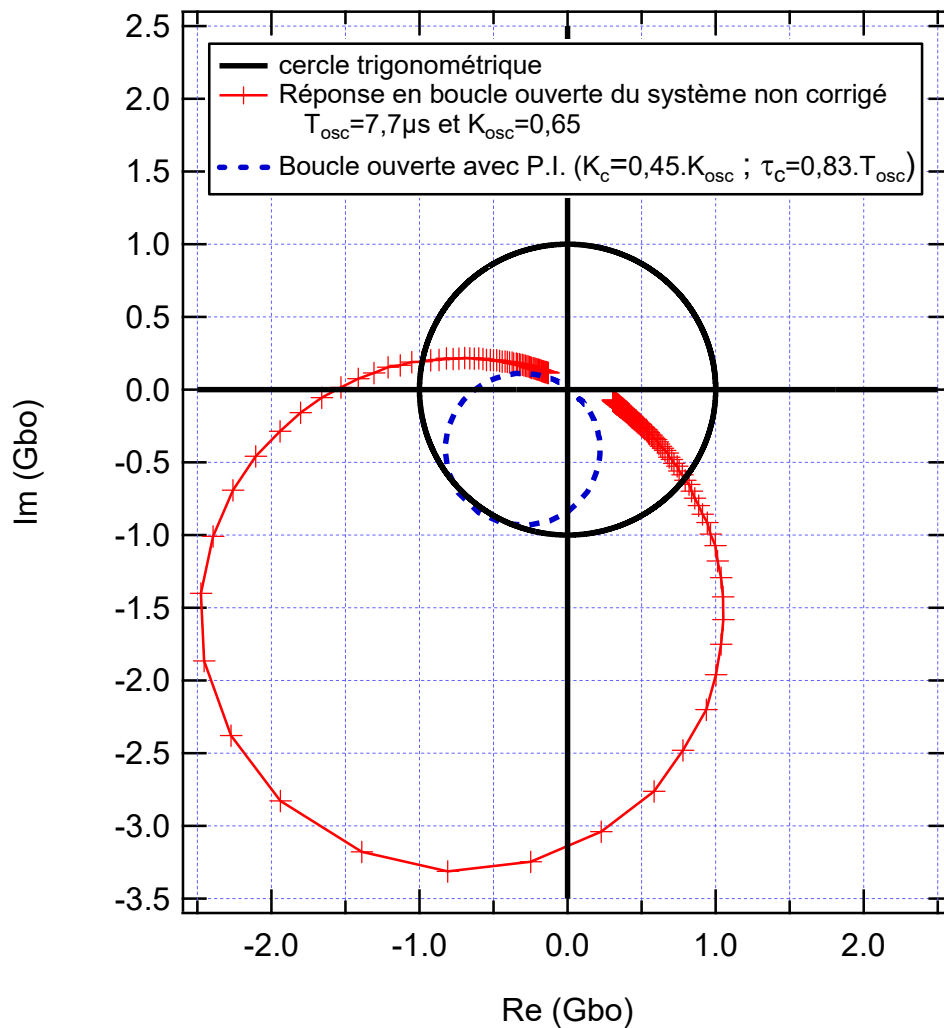
dont les paramètres ont été calculé suivant les valeurs données par

$$K_c = 0,45 \cdot K_{osc} \quad \text{et} \quad T_c = 0,83 \cdot T_{osc}$$

L'effet de K_c sera de rapprocher la courbe de façon homothétique du centre O tout en rendant le module inférieur à 1 quand le gain est réel.

L'intégration doit permettre d'obtenir un système précis, c'est-à-dire un état de sortie qui ne dépend que de la consigne d'entrée et pas de l'état physique du système. Si T_c est voisin de T_{osc} ou si elle est beaucoup plus élevée, l'intégration ne risque pas de mettre en défaut la stabilité obtenue par le gain calculé précédemment. Si T_c devient inférieure à T_{osc} , la constante d'intégration sera de plus en plus faible (le système réagira de façon plus rapide et plus violent à un écart à la consigne) et le système sera moins stable voir instable.

Les lieux de Nyquist de la boucle ouverte corrigée avec les coefficients calculés d'après Ziegler Nichols et de la boucle ouverte non corrigée sont représentés sur la figure suivante :



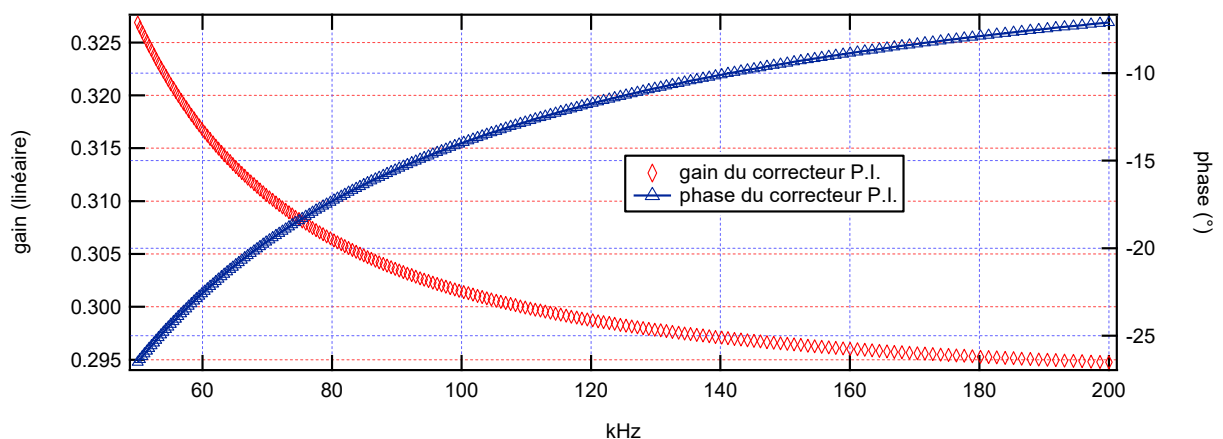
Le système obtenu après correction est bien stable avec une marge de phase proche de 45° , ce qui garantit une stabilité assez robuste.

Effet de K_c :

Si on s'écarte de la valeur donnée pour K_c en augmentant K_c , la marge de phase va se réduire et le système finira par devenir instable. Il suffit pour s'en convaincre de faire une homothétie de centre O sur la figure bleue en pointillés en augmentant ses dimensions.

Effet de T_c :

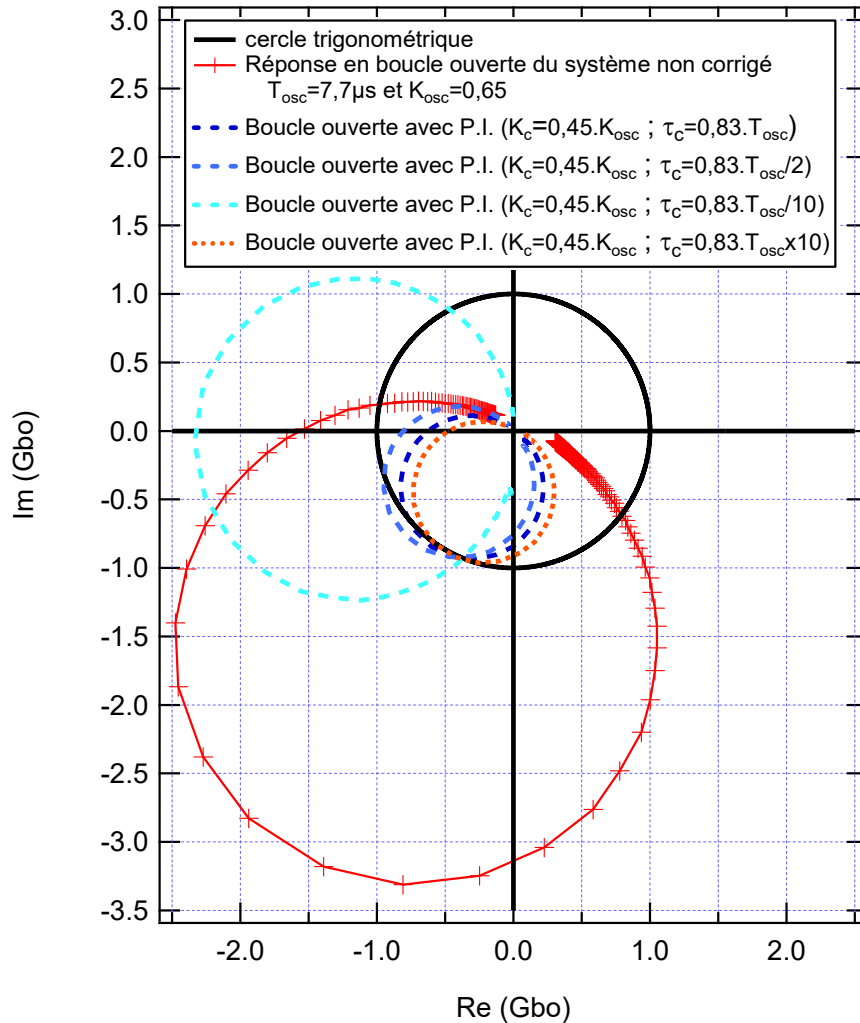
Le correcteur calculé en utilisant les coefficients donnés par la méthode de Ziegler-Nichols présente un gain et une phase d'allures suivantes :



Augmenter T_c revient à décaler cette courbe vers la gauche. Dans la zone critique, on va donc diminuer le module du gain du système corrigé tout en rapprochant la phase de la boucle fermée de zéro. Le système sera plus stable.

Diminuer T_c produit l'effet inverse. On aura plus de gain dans la zone critique avec une phase qui décroît vers des valeurs de plus en plus négatives. Le système sera moins stable.

C'est bien ce que l'on constate expérimentalement avec notre système. Si on prend des valeurs plus fortes de T_c que ce qui est préconisé par la méthode, la figure se modifie peu et plutôt dans le sens d'un système plus stable (augmentation de la marge de phase). En revanche, si on prend des valeurs inférieures à T_c , la marge de phase se réduit et le système finit par devenir instable comme on le voit sur la figure suivante :



Remarque : en pratique, il ne s'agit pas de s'accrocher aux valeurs des coefficients du correcteur prévus par la méthode. On prend les coefficients donnés par la méthode et on les adapte en fonction de la marge de stabilité dont on a besoin.

Remarque : Sur les lieux de Nyquist, l'effet de l'augmentation très importante du module du gain quand la fréquence tend vers zéro n'apparaît pas sur les lieux tracés, dans la mesure où l'on n'a pas fait de relevé à fréquence assez basse pour constater cet effet. Néanmoins, il faut avoir conscience que le correcteur P.I. modifie énormément le lieu de Nyquist de la boucle ouverte au voisinage des basses fréquences. Le gain tend alors vers l'infini avec une phase de $-\pi/2$. Le lieu tangente donc l'axe des ordonnées avec une partie réelle positive, en venant de $-\infty$.

Simulation en python pour le choix de correcteur à partir d'une réponse en boucle ouverte.

On relève le diagramme de Bode (gain et phase) de la fonction de transfert en boucle ouverte du système sans correcteur. A partir de ces valeurs, on va ajuster ces données pour identifier une fonction de transfert du troisième ordre qui correspond le mieux possible au système étudié. En variable de Laplace, elle sera de la forme

$$G(p) = \frac{G_o}{1 + a.p + b.p^2 + c.p^3}$$

On va donc chercher à identifier G_o , a , b et c .

Pour ça, on ne passera pas par la réponse en gain qui ne fait pas apparaître la phase. Si faisait comme ça, l'ajustement serait très imprécis sur certains paramètres, la vision du système étant trop incomplète. On va plutôt calculer, à partir du gain et du déphasage la partie réelle de la fonction de transfert, puis ajuster nos valeurs de partie réelles à la partie réelle de notre fonction de transfert du troisième ordre.

En pratique, on trouve

$$a=6,9 \cdot 10^{-7} \quad ; \quad b=1,8 \cdot 10^{-12} \quad ; \quad c=1,05 \cdot 10^{-18} \quad ; \quad G_o=0,27$$

Expérimentalement, en mettant le système précédent en cascade avec un gain réel dans une boucle fermée, on observe la valeur de gain à appliquer pour faire osciller le système bouclé ainsi que la fréquence d'oscillation. On trouve

$$K_{osc} = 0.65 \quad \text{et} \quad T_{osc} = 7,7 \mu s$$

Est-ce cohérent avec le modèle identifié ? D'après ce modèle, quand le gain devient réel négatif, il vaut approximativement -1.5 et alors ça correspond à une pulsation $\omega_{osc} = \frac{2\pi}{T_{osc}} = 2\pi \cdot \sqrt{a/c}$ (pour ça, on écrit la fonction de transfert en posant $p=j\omega$ et on regarde quand elle est réelle, ce qui est possible pour $\omega = 0$ et ω_{osc}). Or on constate bien que $1/1.5 \approx 0.65$ et $2\pi \cdot \sqrt{a/c} \approx 7,7 \cdot 10^{-6} s$... Donc notre modèle représente bien ce qui se passe, au moins jusqu'à ω_{osc}

Ceci étant fait, on va tracer le lieu de Nyquist de la mise en cascade du système précédent modélisé par $G(p)$ avec un correcteur P.I. dont la fonction de transfert est de la forme

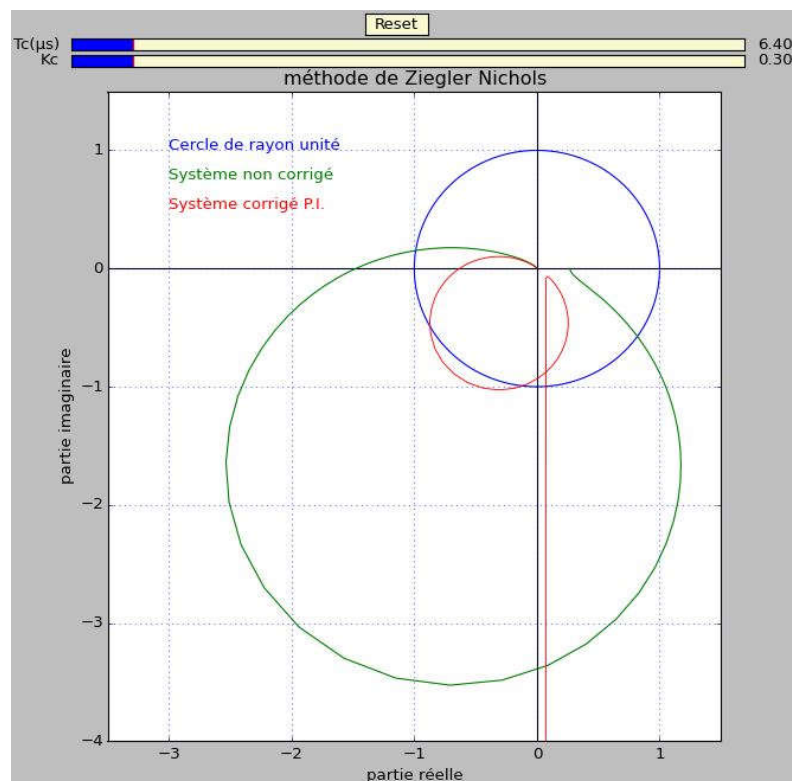
$$C(p) = K_c \cdot \left(1 + \frac{1}{T_c \cdot p}\right)$$

Le programme utilisé permet de modifier la valeur de K_c et T_c à partir de ce que propose la méthode de Ziegler Nichols à savoir

$$K_c = 0,45 \cdot K_{osc} \approx 0,3 \quad \text{et} \quad T_c = 0,83 \cdot T_{osc} \approx 6,4 \cdot 10^{-6} s$$

On constate que quand on augmente T_c , le système devient plus stable : la marge de phase augmente ce qui signifie qu'on s'éloigne davantage du point « -1 ». C'est logique puisqu'au voisinage de ω_{osc} , diminuer T_c revient à diminuer le module du gain du correcteur PI.

De même, quand on augmente K_c , on constate que le système se rapproche de plus en plus de l'instabilité et il devient même instable au-delà d'une valeur donnée...



On peut ajuster K_c et T_c en jouant avec le curseur sur la bande bleue en haut de la fenêtre. La courbe bleue est le cercle trigonométrique, la courbe en vert la fonction de transfert en boucle ouverte sans aucune correction et la courbe en rouge la fonction de transfert en boucle ouverte quand on met le système non corrigé en cascade avec un correcteur P.I. dont les paramètres caractéristiques sont K_c et T_c .

Bibliographie :

- Pour tout ce qui concerne les problèmes généraux d'asservissement « Cours d'automatique », Tome 1, 2 et 3, Rivoire & Ferrier, Eyrolles. Le tome 1 reprend les généralités mathématiques (transformée de Laplace, annexe avec les expressions des réponses impulsionnelles de différents filtres, etc...) et le tome 2 traite des asservissements à proprement parler (actions des différents correcteurs, techniques d'indentification, etc...). Le tome 3 traite des asservissements numériques qui ne sont pas abordés dans ce cours.

- Pour les oscillateurs électroniques, j'ai essentiellement travaillé avec
« Transmission de signaux », C. More, Tec & Doc pour les aspects généraux
et avec « Introduction au diapason à quartz », J.M. Friedt et E. Carry, UDP, vol. 99 décembre 2005 pour les caractéristiques du diapason à quartz.

- Pour les exemples de systèmes asservis, la biblio est plus rare et ce qui a été écrit provient surtout des expériences montées au laboratoire. La biblio donnée ne répond donc qu'à une partie du problème.

Pour le capteur de courant à zéro de flux, concernant la modélisation du système, je me suis inspiré d'une partie d'un problème d'agrégation de génie électrique (épreuve C – 1995).

Pour l'asservissement de la tension de sortie d'un hacheur ou de la vitesse d'une MCC

- « Commande des machines à courant continu à vitesse variable » J.P. Louis, B. Multon & M. Lavabre, Techniques de l'ingénieur, D3III-3610

- « Alimentations à découpage – convertisseurs à résonance - principes, composants, modélisation » J.P. Ferrieux & F. Forest, DUNOD.

Pour la boucle à verrouillage de phase

- « Transmission de signaux », C. More, Tec & Doc

Version de mars 2019