

Chapitre C.4

Cohérences spatiale et temporelle ; conséquences...

Force est de constater que les interférences ne sont pas fréquemment visibles dans la nature. Comme on l'a déjà vu, cela est dû au fait qu'il faut remplir des *conditions de cohérence* afin d'espérer observer des franges...

On s'est contenté jusqu'à présent d'étudier des dispositifs éclairés par une source primaire ponctuelle monochromatique. On aimerait à présent considérer des cas plus compliqués (et plus usuels) :

- **Cas avec source primaire large ou étendue** (*ie* non ponctuelle) :

Il va se poser le problème de la **cohérence spatiale** qui conduit potentiellement au phénomène de localisation, voire au brouillage total des interférences. On verra la place particulière qu'occupent dans cette étude les interféromètres à division d'amplitude, notamment avec l'interféromètre de Michelson utilisé comme tel...

- **Cas avec source polychromatique** (*ie* non monochromatique) :

Il va se poser le problème de la **cohérence temporelle** qui peut être mis à profit en spectrométrie interférentielle.

Il y aurait aussi à considérer le cas de la cohérence de polarisation mais elle n'est pas au programme alors on ne la traitera pas en cours.

Table des matières

I - Cohérence spatiale	2
1/ Constat expérimental/simulé de perte de contraste	2
2/ Interprétation semi-quantitative du brouillage	2
3/ Interprétation spécifique des brouillages périodiques	3
4/ Approche quantitative précise	4
5/ Application : synthèse d'ouverture	5
II - Localisation et division d'amplitude	5
1/ Qu'est-ce que la localisation ?	5
2/ Intérêt de la division d'amplitude	6
3/ Franges d'égale inclinaison de l'interféromètre de Michelson	6
a. Zone de localisation	6
b. Calcul exact de la différence de marche	7
c. Rayons des anneaux d'égale inclinaison	8
d. Conséquences pratiques	8
4/ Franges d'égale épaisseur de l'interféromètre de Michelson	9
a. Zone de localisation	9
b. Différence de marche approchée	10
c. Conséquence pratique	10
III - Cohérence temporelle	11
1/ Doublet du sodium	11
a. Constat expérimental : interférogramme en battements	12
b. Prévision des anticoïncidences ; spectrométrie interférentielle (1)	12
c. Approche quantitative précise	13
2/ Effet de largeur de raie	13
a. Interprétation semi-quantitative du brouillage	14
b. Approche quantitative précise (raie rectangulaire)	15
3/ Spectrométrie interférentielle (2)	15
4/ Interférences en lumière blanche	16
5/ Cas à N ondes : spectromètre à réseau	18
Ann. 1 Anneaux d'égale inclinaison d'une lame de verre	19
Ann. 2 Franges d'égale épaisseur d'un coin de verre	21
Ann. 3 Différence de marche géométrique pour un coin (source à distance finie, division d'amplitude)	23
Ann. 4 Cap ou pas cap ?	24

I - Cohérence spatiale

On suppose dans toute cette section que la source est **monochromatique**, ceci permettant de faire abstraction du problème de cohérence temporelle (étudié ultérieurement).

Le dispositif support de l'étude est essentiellement l'interféromètre à deux trous de Young que l'on connaît déjà assez bien...

1/ Constat expérimental/simulé de perte de contraste

En raison de la petite taille des trous dans l'interféromètre de Young, nécessaire pour obtenir un bon champ d'interférences, la luminosité des franges est en pratique très faible. Une idée pour l'augmenter consiste à accroître l'éclairage par la source primaire en l'élargissant. Est-ce une bonne idée ?

Exercice 1

La page web suivante montre, sur la dernière simulation, l'effet d'élargissement de la source primaire éclairant un interféromètre de Young sur la figure d'interférences :

<http://www.f-vandenbrouck.org/coherence.html>

On peut choisir la longueur d'onde, ainsi que le rapport de la largeur b de la source avec l'interfrange i .

Décrire quel est l'effet de l'élargissement de la source primaire sur la figure d'interférences. Conclure.

Réponse

On se rend compte que le contraste des interférences évolue lorsque b augmente, pour une longueur d'onde fixée :

- il y a une tendance de **diminution globale du contraste** ;
- le contraste présente des **annulations périodiques** (valeurs entières de b/i ici) et réaugmente un peu puis rediminue ensuite ;
- les franges **s'inversent** entre chaque annulation du contraste.

Notons que la simulation ne rend pas compte du gain global en luminosité de la figure lorsque b augmente et que la géométrie adoptée est particulière (distances source-plan percé et plan percé-écran identiques), ce qui rend le rapport b/i pas forcément pertinent (comme vu ensuite)...

Il s'agit dans la suite de comprendre l'origine des observations effectuées, en progressant au gré d'interprétations de plus en plus quantitatives...

2/ Interprétation semi-quantitative du brouillage

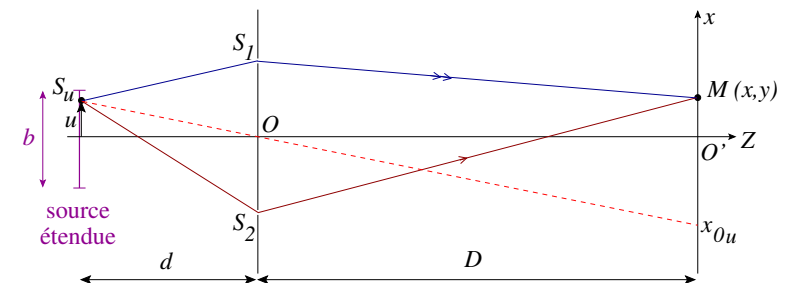
Exercice 2

Proposer une interprétation qualitative de la *tendance globale* en une perte de contraste lors de l'élargissement de la source primaire éclairant le dispositif des trous de Young.

Réponse

Chaque point de la source étendue est **incohérent** avec les autres donc l'intensité sur l'écran est la somme des intensités obtenues en raison de chaque point de la source considéré séparément des autres.

Pour un point donné S_u de la source, on obtient une figure d'interférences respectant la formule de Fresnel et dont l'ordre 0 sur l'écran est sur la droite $(S_u O)$ (avec O milieu de $[S_1 S_2]$), comme démontré au chapitre précédent (voir figure suivante ; x_{0u} est la position de l'ordre 0 relatif à S_u en supposant $d \gg (a, b)$ et $D \gg (a, |x|, |y|)$). L'interfrange, par contre, est indépendant du choix de S_u sur la source.



Par conséquent, l'intensité totale est une somme de sinusoïdes positives identiques mais qui sont décalées latéralement les unes par rapport aux autres (d'autant plus que la source est étendue). Que ce soit qualitativement, ou par diagramme de Fresnel, il est immédiat de prévoir la diminution globale de contraste : **il y a brouillage des franges d'interférences**.

Notons que par cette démarche qualitative, les remontées de contraste et inversions de franges ne sont pas prévues (mais elles ne sont pas générales non plus comme on le voit plus loin alors...).

Définition

La perte de contraste d'interférences liée à la **non ponctualité** de la source correspond à un problème de **cohérence spatiale**.

Le programme adopte un critère pour savoir quand la perte de contraste par brouillage spatial devient trop grande...

Critère semi-quantitatif de brouillage spatial

Il y a brouillage spatial des franges d'interférences en un point M du champ d'interférences obtenu par un interféromètre lorsque

$$|\Delta p(M)| > \frac{1}{2}$$

où $\Delta p(M)$ est la variation d'ordre au point M évaluée sur la moitié de l'étendue spatiale de la source primaire.

Ce critère signifie que le contraste est mauvais dès que l'on superpose des franges d'interférences décalées continûment de plus d'un demi-interfrange...

Exercice 3

Estimer, avec le critère semi-quantitatif de brouillage spatial, la largeur b_s de la source à partir de laquelle les franges d'interférences ont une perte de contraste notable par problème de cohérence spatiale pour le dispositif des trous de Young. On posera les notations et approximations jugées pertinentes et on commentera le résultat en lien avec la simulation précédente.

Réponse

On a déjà vu au chapitre précédent le calcul de la différence de marche en un point M à partir d'un point S_u quelconque de la source. Avec les mêmes notations qu'alors et sous les conditions $d \gg (a, b)$ et $D \gg (a, |x|, |y|)$,

$$\delta_u(M) = \frac{2au}{d}n + \frac{2ax}{D}n \quad \text{donc} \quad p_u(M) = \frac{2au}{\lambda_0 d}n + \frac{2ax}{\lambda_0 D}n$$

représente l'ordre correspondant. Sur la moitié de l'étendue spatiale de la source, u varie de 0 à $b/2$, donc le critère de brouillage s'écrit

$$|\Delta p| = \frac{ab}{\lambda_0 d}n > \frac{1}{2}$$

d'où

$$b > b_s = \frac{\lambda_0 d}{2an} = \frac{D}{d}i$$

en introduisant l'interfrange i . Ceci est cohérent avec la simulation où $d = D$ si l'on oublie les légères remontées de contraste au-delà de $b/i = 1$.

3/ Interprétation spécifique des brouillages périodiques

L'étude précédente (dont le critère semi-quantitatif de brouillage spatial) permet de décrire la perte de contraste *globale* mais pas la périodicité des brouillages. Cette dernière n'est en fait pas très générale et est liée au type de profil de luminosité de la source étendue (en l'occurrence, il s'agit d'une luminosité uniforme : chaque point de la source primaire est équi-intense).

Exercice 4

On poursuit l'étude du dispositif des trous de Young avec une source étendue de largeur b et de luminosité uniforme. Déterminer, *sans expliciter l'intensité sur l'écran*, les valeurs b_q de largeur de source (avec $q \in \mathbb{N}^*$) produisant une figure d'interférences totalement brouillée.

Réponse

L'ordre d'interférence p évolue linéairement avec la position u du point source S_u de la source (on peut tracer $p = f(u)$ pour le visualiser!). Par conséquent, les figures d'interférences issues de chaque point de la source (et qui se superposent en intensité par argument d'incohérence) sont décalées aussi de façon régulière et linéaire.

Une largeur de brouillage b_q doit être telle que pour un point quelconque P de la source, on arrive à trouver un point P' produisant une intensité en opposition ; de plus, les couples (P, P') doivent balayer la source sans repasser sur des points déjà considérés.

Commençons par le cas où P est à l'ordonnée $u \geq 0$ et P' à l'ordonnée $u - b/2$. Le couple (P, P') décrit toute la source sans double passage lorsque u varie de 0 à $b/2$. Si la différence des ordres à partir de ces points est $1/2$ (en absolu), il y a opposition des intensités et brouillage mutuel :

$$|p_P - p_{P'}| = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{2an}{\lambda_0 d} \underbrace{|u_P - u_{P'}|}_{b/2} = \frac{1}{2}$$

d'où

$$b_1 = \frac{\lambda_0 d}{2an} = b_s$$

Pour obtenir les autres largeurs b_q de brouillage **sans en rater**, on reprend le même raisonnement en raisonnant sur des segments de largeur b_q/q de la source (si le brouillage est bon sur l'un de ces segments, il l'est aussi sur les autres). Ainsi, on écrit

$$\frac{2an}{\lambda_0 d} \underbrace{|u_P - u_{P'}|}_{b_q/(2q)} = \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad b_q = q \frac{\lambda_0 d}{2an} = q b_s$$

Dans la simulation, comme $d = D$, on a bien un contraste nul chaque fois que b/i est un entier (non nul).

4/ Approche quantitative précise

L'étude précédente permet de prévoir les largeurs de la source de luminosité uniforme conduisant à un brouillage mais elle reste limitée : on n'a pas accès à la loi précise d'évolution du contraste, ni à l'information de renversement des franges observée avec la simulation.

On peut adopter une approche encore plus raffinée si nécessaire en calculant explicitement l'intensité sur l'écran. Ce calcul étant faisable ici analytiquement, allons-y !

Exercice 5

On considère le dispositif usuel des trous de Young avec une source monochromatique étendue de largeur b (elle est élargie dans la direction (S_1S_2) mais reste centrée sur l'axe de symétrie du dispositif). On suppose que b est très petite devant les distances source-plan percé et plan percé-écran. La luminosité des points de la source est uniforme.

On rappelle la formule trigonométrique

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p - q}{2} \right) \cos \left(\frac{p + q}{2} \right)$$

1. Montrer que l'intensité obtenue en un point M d'observation se met sous la forme

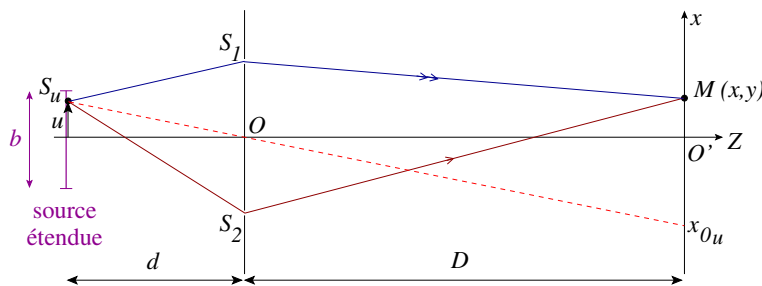
$$I(M) = I_0 \left[1 + \gamma(b) \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right]$$

où $\gamma(b)$ est le **degré de cohérence spatiale** et i l'interfrange.

2. Commenter, schémas adaptés à l'appui.

Réponse

1. Le dispositif est toujours le suivant (figure non à l'échelle)



et la différence de marche est (à partir d'un point S_u quelconque de la source)

$$\delta(M) = \frac{2au}{d} n + \frac{2ax}{D} n$$

L'intensité sur l'écran causée par S_u de largeur du est

$$dI = \frac{I_0}{b} \left[1 + \cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda_0} \right) \right] du$$

Par argument d'incohérence, on somme, soit à calculer

$$I(M) = \int_{u=-b/2}^{b/2} \frac{I_0}{b} \left[1 + \cos \left(\frac{4\pi a n}{\lambda_0} \left[\frac{u}{d} + \frac{x}{D} \right] \right) \right] du$$

soit

$$I(M) = I_0 \left[1 + \frac{\lambda_0 d}{4\pi a n b} \left[\sin \left(\frac{4\pi a n}{\lambda_0} \left[\frac{u}{d} + \frac{x}{D} \right] \right) \right]_{-b/2}^{b/2} \right]$$

Il intervient une différence de sinus que l'on factorise par la formule de l'énoncé en

$$I(M) = I_0 \left[1 + \gamma(b) \cos \left(2\pi \frac{x}{i} \right) \right]$$

avec

$$i = \frac{\lambda_0 D}{2 a n} \quad \text{et} \quad \gamma(b) = \text{sinc} \left(\frac{2\pi a b n}{\lambda_0 d} \right)$$

2. Dans le cas étudié ici (mais cela n'a rien de général), le degré de cohérence spatiale ne dépend pas de la position du point d'observation sur l'écran. On obtient une figure de **contraste uniforme**

$$C = |\gamma(b)|$$

Analysons l'évolution de ce contraste en augmentant progressivement la valeur de b depuis la valeur nulle.

- Lorsque $b \simeq 0$, la source est ponctuelle et le contraste vaut l'unité : les franges sombres sont bien noires.
- Lorsque b augmente, le contraste diminue et vient à s'annuler lorsque l'argument du sinus cardinal dans le degré de cohérence spatiale est égal à π , soit pour

$$b_1 = b_s = \frac{\lambda_0 d}{2 a n}$$

Il s'agit d'un brouillage par perte de cohérence spatiale. On ne distingue plus de franges dans le champ d'interférences.

- Lorsque b augmente encore, le contraste remonte un peu et on peut distinguer des franges inversées par rapport à $b < b_1$ (car le facteur $\gamma(b)$ a changé de signe !) : les franges brillantes se trouvent à présent sur la position des franges sombres lorsque $b < b_1$.

- Le contraste s'annule à nouveau pour d'autres valeurs de b (largeurs de brouillage périodiques) :

$$b_q = q b_1 = q \frac{\lambda_0 d}{2 a n} \quad (\text{avec } q \in \mathbb{N}^*)$$

Attention !

Dans le cas étudié, le degré de cohérence spatiale ne dépend pas du point sur l'écran et le contraste est uniforme **mais ce n'est pas général**. Essayez par exemple de reprendre le calcul avec le dispositif du miroir de Lloyd... On revient sur ceci dans la section suivante du chapitre, la non uniformité du contraste étant en lien avec la notion de localisation des franges...

5/ Application : synthèse d'ouverture

Il existe un lien entre le degré de cohérence spatiale et le profil de luminosité de la source large (théorème hors-programme de Zernike et Van Cittert). **De ce fait, on peut obtenir expérimentalement par interférométrie des informations sur la largeur et le profil de luminosité de la source** ; il s'agit de la technique de **synthèse d'ouverture**.

Exercice 6

Comment peut-on mesurer le diamètre angulaire de la source large (une étoile par exemple) se trouvant devant le dispositif des trous de Young précédent (en supposant que la distance $2a$ entre les trous est modifiable¹) ?

Réponse

Un filtre est ajouté au dispositif pour œuvrer en lumière monochromatique. On commence avec une valeur de a suffisamment faible de sorte que

$$b \ll b_1 = \frac{\lambda_0 d}{2 a n}$$

Alors, on observe des franges d'interférences contrastées. Ensuite, on augmente progressivement la valeur de a (éloignement des trous), ce qui entraîne une diminution du contraste par perte de cohérence spatiale. Il arrive un moment où l'on estime le contraste nul. Alors, on a $a = a_c$ telle que

$$b = \frac{\lambda_0 d}{2 a_c n}$$

1. Il est difficile de déplacer des trous sur un plan (de façon régulière en plus...). Par contre, on peut réaliser un système équivalent aux trous de Young avec une distance $2a$ variable (par exemple avec l'ingénieux interféromètre stellaire de Michelson vu en TD).

La mesure de a_c et la connaissance de λ_0 et n permettent d'en déduire la valeur de b/d qui est le diamètre angulaire de la source.

Définition

On appelle **largeur angulaire de cohérence** la largeur angulaire θ_s de la source vue depuis l'interféromètre à partir de laquelle on constate une dégradation notable de contraste (perte de cohérence spatiale) pour un dispositif interférentiel donné.

Exercice 7

Estimer pour un dispositif de trous de Young usuel la valeur de la largeur angulaire de cohérence θ_s . Conclure.

Réponse

Dans le cas des trous de Young étudiés précédemment, on peut considérer que

$$\theta_s = \frac{b_s}{d} = \frac{\lambda_0}{2 a n} = 6,0 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

avec $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$, $d = 50 \text{ cm}$, $2a = 1 \text{ mm}$ et $n = 1,00$. On ne peut pas élargir beaucoup la source pour gagner en luminosité car on perd alors tout de suite fortement en contraste... à moins de l'élargir dans la bonne direction (fentes de Young). Pour $d = 50 \text{ cm}$, la largeur critique de la source est seulement $b_s = d \theta_s \simeq 0,3 \text{ mm}$!

Attention !

La largeur angulaire de cohérence est complètement liée à la structure de l'interféromètre ! Il ne faut pas la confondre avec la longueur de cohérence (spécifique à la source primaire).

II - Localisation et division d'amplitude

1/ Qu'est-ce que la localisation ?

Avec une source **ponctuelle** monochromatique, on obtient des interférences dans tout le champ d'interférences mais, lorsqu'on élargit cette source, le contraste peut se détériorer nettement par effet de **brouillage** (perte de cohérence spatiale).

Définitions

Les interférences sont dites **localisées** lorsque, avec une source étendue, il y a brouillage dans tout le champ d'interférences, sauf au niveau d'une zone (appelée **zone de localisation**) où le contraste est suffisant pour observer des franges.

Avec une source ponctuelle, les interférences sont dites **non localisées** ou **délocalisées** (pas de problème de cohérence spatiale).

Quelques précisions sont utiles dès à présent :

- Dans certains montages, on travaille volontairement avec une source étendue (ou large) afin de gagner en **luminosité** (par rapport au cas d'une source « ponctuelle ») mais il faut avoir conscience que cela entraîne fréquemment une localisation des interférences. Il faut alors observer les franges au bon endroit (avec le bon dispositif de projection)...
- L'effet de brouillage dépend fortement du dispositif interférentiel. Par exemple, on peut avoir un brouillage uniforme sur l'écran comme dans le cas des trous de Young vu dans la section précédente. On peut aussi avoir un brouillage non uniforme comme dans le cas du miroir de Lloyd. La simulation suivante met bien en évidence que, pour ce dispositif, le brouillage est d'autant plus important sur l'écran que l'on s'éloigne du niveau du plan du miroir :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/cortial/bibliohtml/lloyd_j.html

2/ Intérêt de la division d'amplitude

On a déjà vu que l'obtention d'interférences à partir d'une source primaire peut être réalisée grâce à deux types de « division de la lumière » : la division du front d'ondes et la division d'amplitude. Le théorème suivant (appelé théorème de localisation) permet de se rendre compte d'une particularité importante de la division d'amplitude vis-à-vis de la localisation des interférences.

Théorème 1

Avec une source étendue, les interférences se brouillent **sauf dans deux cas** :

- Le système interférentiel possède un plan de symétrie, donne des franges rectilignes orthogonales à ce plan et est éclairé par une fente source parallèle à ces franges.
- Le système offre la possibilité de la **division d'amplitude** : les interférences sont alors *nécessairement* localisées au voisinage de la **surface de localisation** définie par l'intersection des rayons émergents issus de chaque rayon incident divisé en amplitude.

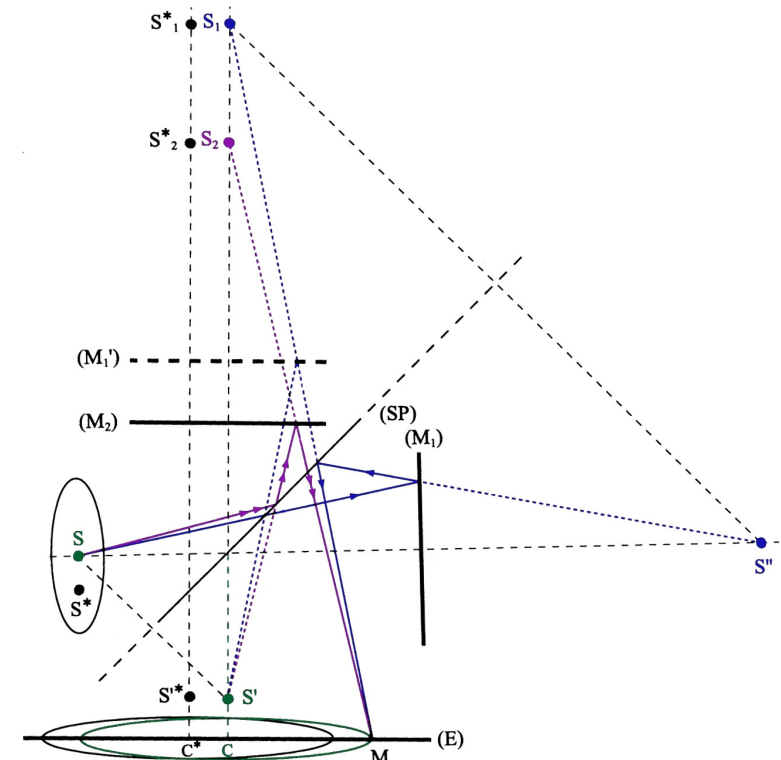
Ce théorème est admis. Le premier cas correspond par exemple à la situation des **fentes de Young**. Le second cas met en exergue l'intérêt de la division d'amplitude et on va expliquer plus les choses sur les cas classiques des lame et coin d'air formés grâce à l'interféromètre de Michelson.

3/ Franges d'égale inclinaison de l'interféromètre de Michelson**a. Zone de localisation**

On a travaillé dans le chapitre précédent avec l'interféromètre de Michelson éclairé par une source ponctuelle. En pratique, il est bien plus fréquent d'utiliser plutôt une **source étendue (source large)**, ce qui permet notamment de gagner en luminosité quand on n'emploie pas un laser... Cependant...

Exercice 8

Expliquer, figure suivante à l'appui², la perte de visibilité des franges circulaires de la lame d'air lorsqu'on utilise une source large et un écran (E) à distance finie.



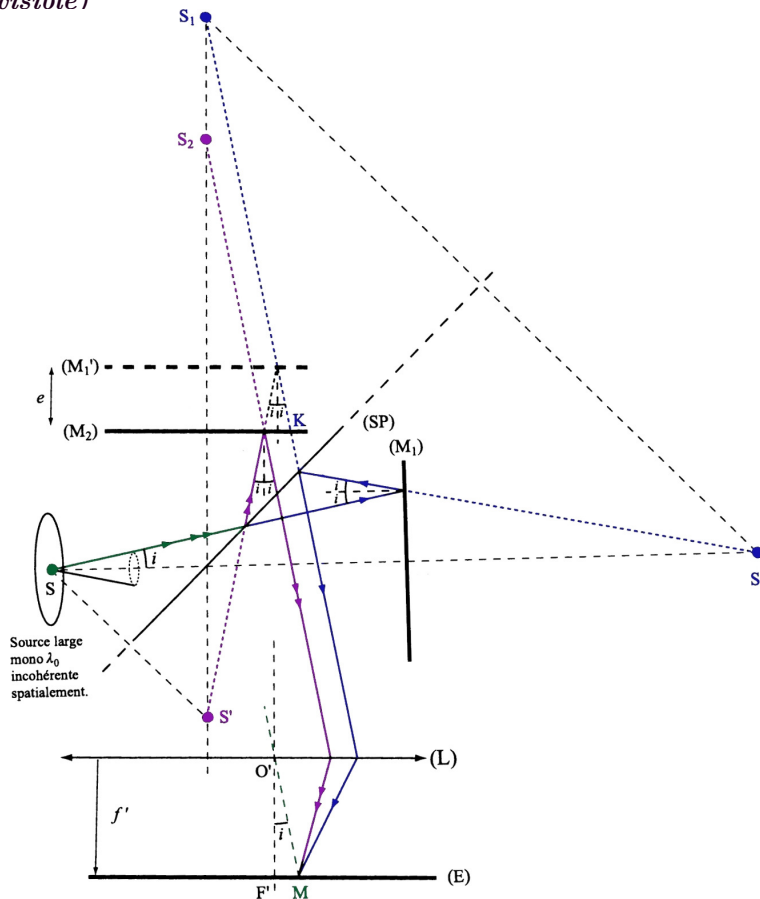
² La figure est ici donnée pour un gain de temps mais vous devez savoir la refaire en totale autonomie.

Réponse

Soit un point S quelconque de la source étendue (incohérent avec les autres !). Ce point donne des anneaux centrés sur l'axe (S_1S_2), les rayons de ceux-ci étant fixés pour une épaisseur de lame donnée. Un autre point S^* donne des anneaux de mêmes rayons, mais centrés sur un axe ($S_1^*S_2^*$) différent. En superposant toutes les intensités consécutives de chaque point de la source étendue, il y a brouillage par perte de cohérence spatiale (on superpose des anneaux décalés ; critère de brouillage $|\Delta p(M)| > 1/2$)...

Théorème 2

Un interféromètre de Michelson en configuration **lame d'air** et éclairé par une **source large** produit des **interférences par division d'amplitude, localisées à l'infini**. Leur observation est possible sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente (dispositif d'observation à l'infini).

Démonstration (visible)

On voit dans l'exercice précédent que ce qui entraîne le brouillage de la figure d'interférences est le décalage entre les axes (S_1S_2) associés à chaque point de la source large. Cependant, si l'on se place à l'infini, ce décalage devient négligeable !

Par conséquent, les rayons en sortie de l'interféromètre doivent interférer à l'infini, ce qui revient à les prendre parallèles. La figure précédente montre que ces rayons sont obligatoirement produits à partir d'un **unique rayon incident** sur la séparatrice : on a bien à présent des **interférences par division d'amplitude** (contrairement à ce que l'on avait étudié jusque-là qui était de la division du front d'onde).

Quelque soit le point source, pour un angle i donné, les anneaux se correspondent dans le plan focal image de la lentille (L). Il n'y a aucun décalage d'ordre d'interférence suivant le point choisi sur la source primaire.

Définition

Les franges d'interférences **à l'infini** d'un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air s'appellent **anneaux d'égal inclinaison** (ou anneaux d'Haidinger).

b. Calcul exact de la différence de marche**Théorème 3**

L'expression de la différence de marche pour les anneaux d'égal inclinaison est

$$\delta(M) = 2e \cos i(M)$$

Démonstration

On base le calcul sur la figure précédente. Soit un point S quelconque de la source. Le rayon émis avec un angle i parvient en un point M de l'écran tel que $\widehat{F'O'M} = i$ (en pensant au rayon fictif passant par le centre de la lentille non dévié).

Les sources secondaires S_1 et S_2 sont en phase (comme déjà vu). De plus, si l'on imagine une source ponctuelle fictive en M , elle produit un faisceau parallèle après la lentille (L) associé à des surfaces d'onde planes. En exploitant le principe de retour inverse de la lumière, cela signifie que la différence de marche est

$$\delta(M) = S_1H$$

où H est le projeté orthogonal de S_2 sur le rayon (S_1K). Or, $S_1S_2 = 2e$, d'où

$$\delta(M) = 2e \cos i(M)$$

Ce résultat ne dépend pas du point choisi sur la source, ce qui permet de retrouver le fait qu'il n'y a pas de brouillage quand on réalise l'observation des interférences « à l'infini ».

On comprend mieux la dénomination « anneaux d'égale inclinaison » : un anneau donné de la figure d'interférences correspond à une valeur d'incidence i donnée !

Bien entendu, l'intensité pour une source monochromatique est donnée par la formule de Fresnel des interférences à deux ondes dans le cas de contraste optimal (intensités propres $I_1 = I_2 = I_0/2$) :

$$I(M) = I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi \delta(M)}{\lambda_0} \right) \right]$$

c. Rayons des anneaux d'égale inclinaison

On a vu au chapitre précédent le calcul du rayon des franges circulaires délocalisées lorsque la source était ponctuelle. Ici, on va effectuer le même type de calcul pour les anneaux d'égale inclinaison...

Exercice 9

1. Déterminer le rayon angulaire i_q du q^{e} anneau brillant d'égale inclinaison dans les conditions de Gauss.
2. En déduire le rayon ρ_q de cet anneau sur l'écran dans le plan focal image de la lentille de projection.
3. Montrer que, hors conditions de Gauss, le rayon du q^{e} anneau brillant est (en notant p_0 l'ordre au centre)

$$\rho_q = f' \sqrt{\frac{p_0^2}{(E(p_0) - q + 1)^2} - 1}$$

Réponse

1. L'ordre d'interférence pour l'incidence i est

$$p = \frac{2e}{\lambda_0} \cos i$$

Pour $i = 0$, l'ordre d'interférences est maximal (en raisonnant avec une épaisseur e **absolue**) et vaut

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda_0}$$

Il n'est pas forcément entier (puisque l'on n'impose pas un centre brillant). Le premier anneau brillant correspond à la première valeur entière inférieure à p_0 de l'ordre, soit $p = E(p_0)$. Les anneaux brillants suivants ont les valeurs d'ordre entier inférieures ; pour le q^{e} anneau, son ordre est $E(p_0) - q + 1$. Par conséquent,

$$E(p_0) - q + 1 = p_0 \cos i_q \quad (*)$$

Dans les conditions de Gauss, $\cos i_q \simeq 1 - i_q^2/2$, d'où

$$i_q = \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (q - 1 + \varepsilon)}$$

où l'on a posé $\varepsilon = p_0 - E(p_0)$ l'excédent fractionnaire de l'ordre au centre p_0 .

2. En utilisant le rayon fictif passant par le centre de la lentille de projection, on a

$$\frac{\rho_q}{f'} = \tan i_q \simeq i_q$$

donc

$$\rho_q = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (q - 1 + \varepsilon)}$$

La figure d'interférences comporte des anneaux de plus en plus resserrés (elle est du même type que celle obtenue avec une source ponctuelle).

3. Hors conditions de Gauss, on exploite la relation (*) et le rayon fictif passant par le centre de la lentille de projection :

$$E(p_0) - q + 1 = p_0 \cos i_q = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \tan^2 i_q}} = \frac{p_0}{\sqrt{1 + \rho_q^2 / f'^2}}$$

et on en déduit bien la formule donnée dans l'énoncé.

Attention !

Luttez contre les croyances fausses d'élèves d'ordre au centre nul et d'ordre croissant en s'éloignant du centre des anneaux : c'est totalement faux en général (comme on vient de le voir).

d. Conséquences pratiques

On dispose d'un théorème analogue à celui rencontré lors de l'étude des franges circulaires délocalisées (source ponctuelle) mais au programme cette fois-ci !

Théorème 4

Soit un interféromètre de Michelson en configuration lame d'air et éclairé par une source large. Alors,

- les anneaux d'égale inclinaison **rentrent dans le centre** quand on se **rapproche** du contact optique (diminution de l'épaisseur de lame d'air) ;
- les anneaux d'égale inclinaison visibles sur l'écran sont **plus grands et moins nombreux** quand on se **rapproche** du contact optique.

Démonstration (visible)

Considérons une épaisseur e (positive) de lame d'air. Alors, un anneau donné de rayon ρ et d'ordre p vérifie

$$p = \frac{2e}{\lambda_0} \cos i = \frac{2e}{\lambda_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2/f'^2}}$$

Suivons cet anneau (p fixé) lorsque e diminue. La relation précédente montre que ρ diminue : l'anneau évolue vers le centre (pour y disparaître).

On a vu avec l'exercice précédent que le rayon des anneaux vus suit la loi

$$\rho_q = f' \sqrt{\frac{p_0^2}{(E(p_0) - q + 1)^2} - 1}$$

Soit q fixé (pour s'intéresser au rayon du q^e anneau visible). La diminution de e entraîne l'augmentation p_0 et l'étude mathématique de cette fonction (rigolote) montre que ρ_q augmente. On retrouve cette augmentation de rayon bien plus facilement en s'appuyant sur les anneaux de valeur d'intensité égale à celle au centre (pour esquiver la pénible partie entière. . .) ; on peut aussi raisonner plus simplement dans les conditions de Gauss avec la relation démontrée dans l'exercice précédent

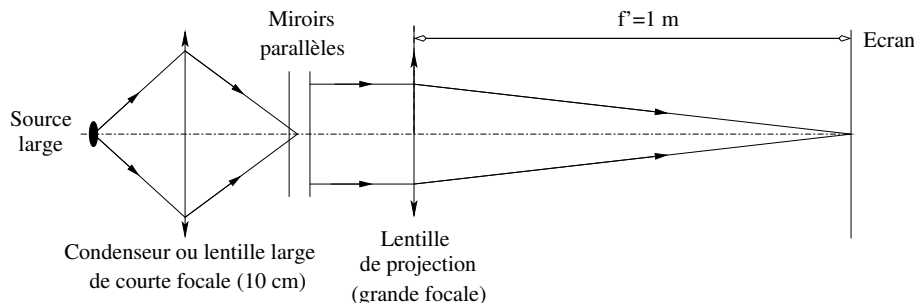
$$\rho_q = f' \sqrt{\frac{\lambda_0}{e} (q - 1 + \varepsilon)}$$

Le champ observé restant le même, le nombre d'anneaux visibles diminue quand e diminue (puisque les anneaux vus sont de plus en plus grands).

Quand on tend vers le contact optique $e \rightarrow 0$, le rayon des anneaux diverge, ce qui est logique puisque l'on tend vers une teinte uniforme (différence de marche nulle en tout point).

Observation des anneaux d'égale inclinaison

Le dispositif d'observation pratique des anneaux d'égale inclinaison à connaître parfaitement est le suivant :



Il est bien plus facile de retenir ce dispositif si l'on comprend les raisons de sa réalisation (et elles sont souvent demandées)...

Exercice 10

1. Justifier le rôle de la seconde lentille et sa focale $f' = 1$ m.
2. Justifier le rôle de la première lentille de courte focale.

Réponse

1. La seconde lentille permet d'observer les interférences localisées à l'infini dans son plan focal image. On choisit une grande distance focale pour avoir un grand champ d'observation sur l'écran (mais on est en pratique limité en place et on perd en intensité lumineuse si on travaille avec une plus grande valeur de f').
2. La première lentille permet d'attaquer l'interféromètre avec un large intervalle de valeurs d'incidences i , ce qui permet d'avoir sur l'écran plus d'anneaux !

Finalement, le phénomène de localisation des franges par problème de cohérence spatiale est contraignant mais surmontable avec l'interféromètre fonctionnant en diviseur d'amplitude ! Un autre exemple, un peu plus compliqué avec une lame de verre, est traité en annexe page 19.

Une exploitation pratique de l'interféromètre de Michelson produisant des anneaux d'égale inclinaison sera abordée plus loin (spectrométrie interférentielle).

4/ Franges d'égale épaisseur de l'interféromètre de Michelson**a. Zone de localisation**

On s'intéresse à présent à la configuration en coin d'air de l'interféromètre de Michelson avec une source étendue. Ce cas, différent de celui du chapitre précédent où la source était ponctuelle, doit permettre de gagner en luminosité. . . Cependant. . .

Attention !

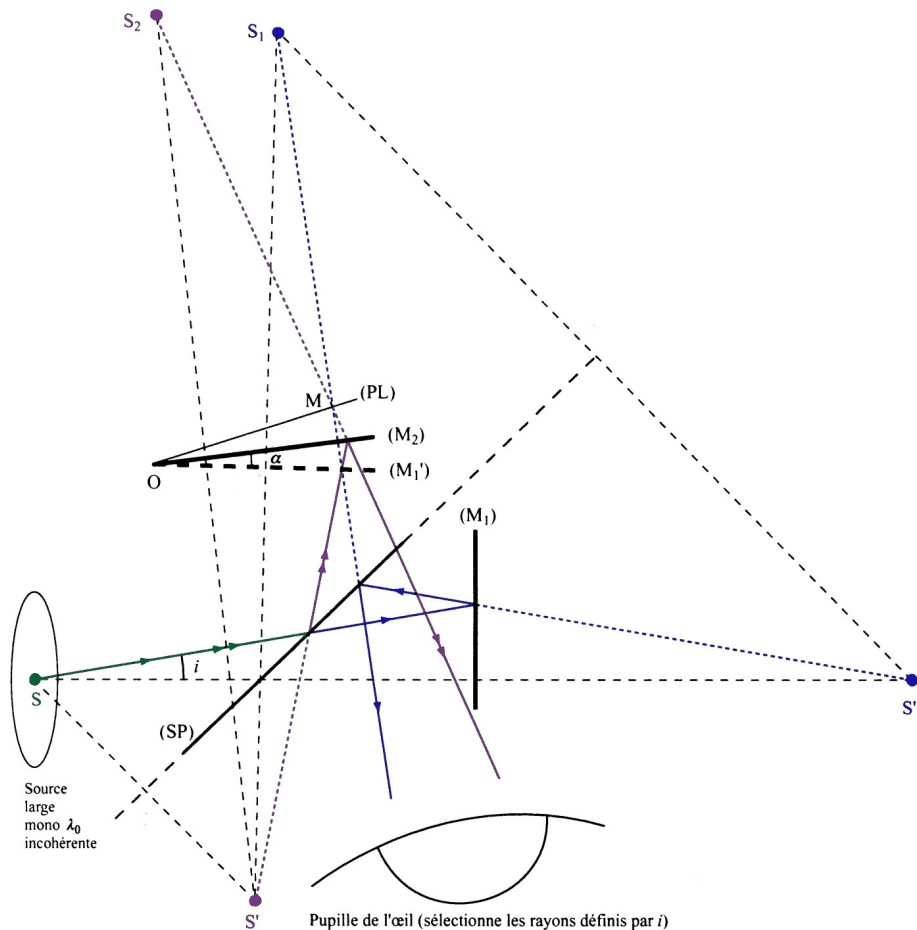
Prendre une source large provoque un problème de **cohérence spatiale**, tout comme le cas de l'interféromètre en lame d'air **mais le phénomène de localisation est très différent !**

Le programme demande d'admettre le théorème suivant (mais les curieux peuvent consulter l'annexe page 21 permettant d'en saisir l'origine)...

Théorème 5

Un interféromètre de Michelson en configuration **coin d'air** et éclairé par une **source large** produit des **interférences par division d'amplitude, localisées au niveau du coin d'air et plus contrastées près de l'arête.**

Le dessin suivant précise mieux les rayons qui interfèrent après division d'amplitude. **Les interférences au point M sont virtuelles** et l'œil parvient à les observer par conjugaison de celles-ci sur la rétine. La zone de localisation se trouve au niveau du « plan³ » (PL) et, même si la source illumine l'interféromètre avec de larges angles d'incidences (qui tendent à brouiller les interférences jusque très près de l'arête du coin), la sélection par la pupille de seulement une partie des incidences permet d'avoir un meilleur contraste ! C'est subtil, mais intéressant.



Définition

Les franges d'interférences **localisées** d'un interféromètre de Michelson réglé en coin d'air s'appellent **franges d'égale épaisseur** (ou franges de Fizeau).

3. C'est en fait plutôt une portion de cercle très aplatie (HP).

b. Différence de marche approchée

Théorème 6

L'expression **approchée**⁴ de la différence de marche associée aux **franges d'égale épaisseur** est

$$\delta(M) \simeq 2e(M)$$

où $e(M)$ est l'épaisseur locale du coin d'air au niveau du point M. **Ce résultat suppose que $|\alpha| \ll 1$ et des incidences quasi-normales sur le coin.**

Démonstration

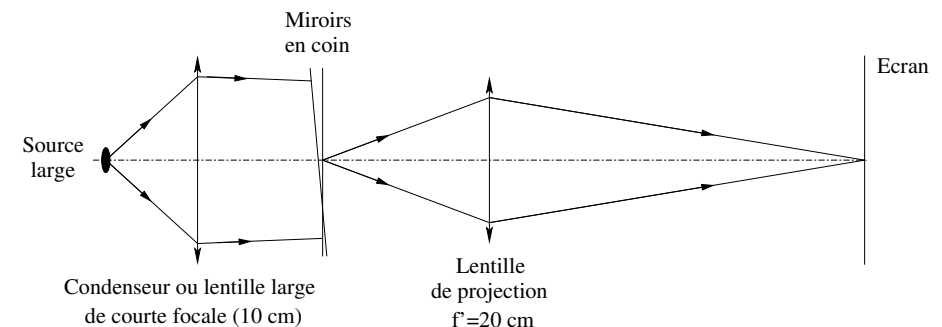
On s'intéresse à une incidence quasi-normale des rayons sur le coin et on se place directement sur la surface de localisation en travaillant en division d'amplitude. Comme on se contente de rechercher le résultat à l'ordre le plus bas, on peut se contenter de travailler pour l'incidence nulle. Alors, on voit rapidement, avec $|\alpha| \ll 1$, que $\delta(M) \simeq 2e(M)$ où $e(M) \simeq \alpha x$ est l'épaisseur locale du coin (x distance à l'arête).

On comprend mieux pourquoi on parle de **franges d'égale épaisseur** puisque chaque frange correspond à une épaisseur donnée du coin. Les miroirs de l'interféromètre étant de très bonne planéité, $e(M)$ évolue linéairement quand on s'éloigne de l'arête du coin : **les franges sont rectilignes et parallèles à l'arête du coin.**

c. Conséquence pratique

Observation des franges d'égale épaisseur

Le dispositif d'observation pratique des franges d'égale épaisseur à **connaître parfaitement** est le suivant :



4. Pour une incidence i quelconque, vous pouvez démontrer que $\delta(M) \simeq 2e \cos i$ (pourvu que $|\alpha| \ll 1$). Ce résultat est peu utile vu les conditions pratiques d'utilisation de l'interféromètre...

Il est bien plus facile de retenir ce dispositif si l'on comprend les raisons de sa réalisation (et elles sont souvent demandées)...

Exercice 11

1. Justifier le rôle de la seconde lentille et sa focale $f' = 20$ cm.
2. Justifier le rôle de la première lentille de courte focale.

Réponse

1. La seconde lentille permet d'observer les interférences localisées sur le coin d'air sur un écran par conjugaison optique.

On choisit une distance focale suffisamment grande pour avoir un bon grandissement (ce qui permet une meilleure vision des franges). Cependant, il ne faut pas oublier que la conjugaison effectuée n'est possible que si la distance D objet-image est telle que

$$D \geq 4 f'$$

Avec $f' = 20$ cm, cela impose déjà $D = 80$ cm qui est une distance usuelle en TP (augmenter cette distance est certes toujours possible mais on perd en luminosité).

2. La première lentille permet d'attaquer l'interféromètre avec une incidence quasi-normale sur les miroirs, ce qui permet de limiter le brouillage par perte de cohérence spatiale quand on s'éloigne de l'arête du coin d'air (voir l'annexe page 21). De plus, cela donne une luminosité uniforme au niveau des miroirs, donc au niveau des franges localisées.

En tout cas, on n'a pas du tout intérêt à réaliser l'image de la source sur les miroirs sinon on va voir une image de la source sur l'écran (qui ne permet pas de visualiser proprement les interférences!).

Attention !

Il ne faut surtout pas confondre les dispositifs d'observation des anneaux d'égalé inclinaison et des franges d'égalé épaisseur ! **Rien n'est identique** : les parties éclairage et projection changent, ainsi que la configuration des miroirs de l'interféromètre (bien sûr). On verra en TP si vous y prenez garde. . .

Exercice 12

On considère que les franges d'égalé épaisseur commencent à être « agréablement » visibles sur l'écran pour une distance interfrange de 1 mm. Sachant qu'en pratique la lentille de projection introduit un grandissement absolu de l'ordre de 10, quelle contrainte a-t-on sur l'angle α du coin d'air ? Commenter.

Réponse

L'incidence sur le coin d'air est quasi-normale et faisons l'hypothèse $|\alpha| \ll 1$ (validée par le résultat final. . .).

Alors, on peut utiliser l'expression approchée de la différence de marche $\delta(x) = 2\alpha x$ qui conduit à l'interfrange

$$i = \frac{\lambda_0}{2|\alpha|} \quad \text{soit, sur l'écran,} \quad i_{\text{écran}} = \frac{|\gamma| \lambda_0}{2|\alpha|}$$

On veut $i_{\text{écran}} \geq 1$ mm. En prenant $\lambda_0 \simeq 6.10^{-7}$ m, il vient

$$|\alpha| \leq 3.10^{-3} \text{ rad}$$

L'hypothèse d'un coin d'angle très faible est raisonnable et on comprend pourquoi des réglages de précision sont utiles pour orienter les miroirs de l'interféromètre de Michelson.

Des exemples d'application des franges d'égalé épaisseur seront présentés plus loin dans le chapitre, ainsi que dans des exercices, en devoirs, aux concours. . .

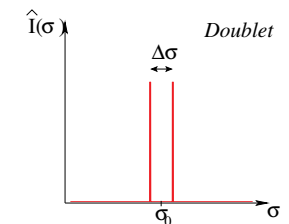
III - Cohérence temporelle**Définition**

La perte de contraste d'interférences liée à la **non monochromaticité** de la source correspond à un problème de **cohérence temporelle**.

1/ Doublet du sodium

On peut modéliser le spectre d'une lampe à vapeur de sodium par un doublet jaune symétrique de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. Ce spectre $\hat{I}(\sigma)$ est représenté en fonction du nombre d'onde⁵ σ sur la figure ci-contre.

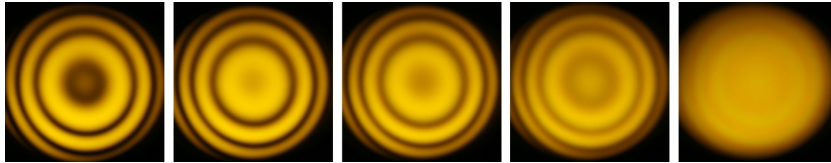
Quelle est la conséquence de ce spectre particulier sur une figure d'interférences obtenue avec une telle source ?



5. Le nombre d'onde est ici l'inverse de la longueur d'onde : $\sigma = 1/\lambda$ (il existe une autre définition où c'est $2\pi/\lambda$, norme du vecteur d'onde. . .). On travaille plutôt avec un spectre en nombre d'onde car ça arrange les calculs et les résultats (on pourrait aussi travailler, de façon aussi simple, avec la fréquence $\nu = c\sigma = c/\lambda$).

a. Constat expérimental : interférogramme en battements

Considérons l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air et éclairé par une lampe spectrale à vapeur de sodium. Les images suivantes sont des photos des anneaux d'égale inclinaison obtenus pour diverses épaisseurs e de la lame (c'est-à-dire après divers chariotages) :



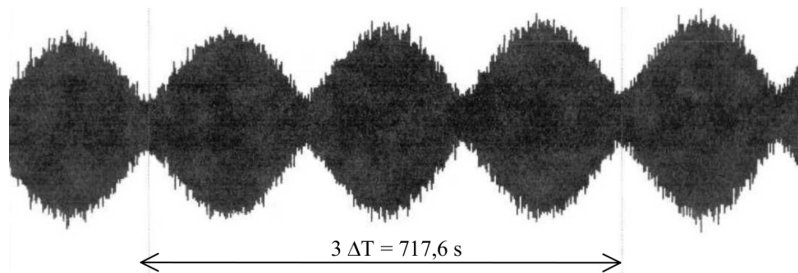
Il est manifeste que le **contraste évolue** avec e , donc avec la différence de marche $\delta = 2e \cos i$, chose non prévue si la source était vraiment monochromatique.

Une autre visualisation s'avère pratique pour quantifier plus précisément le phénomène.

Définition

On appelle **interférogramme** la représentation de l'intensité obtenue par un interféromètre en fonction de la différence de marche (**courbe $I(\delta)$**).

On peut réaliser un interférogramme avec l'interféromètre de Michelson de la façon suivante : on place une cellule de détection supposée quasi-ponctuelle au centre C des anneaux d'égale inclinaison. De plus, un moteur permet de charioter à vitesse constante ($v = 1,21 \mu\text{m/s}$ pour la figure suivante) le miroir translatable. Cela donne accès à un relevé brut de l'intensité perçue par le détecteur (ordonnée) en fonction du temps (abscisse) :



Il n'y a plus qu'à rectifier l'axe des abscisses pour avoir $I(\delta)$ (sachant qu'au centre des anneaux $\delta = 2e(t) = 2vt$ en prenant l'origine des temps au contact optique).

L'interférogramme montre des **battements** qui sont en fait caractéristiques de la présence d'un doublet spectral pour la source. Il s'agit d'interpréter, par approches successives de plus en plus élaborées, cet interférogramme.

b. Prédiction des anticoïncidences ; spectrométrie interférentielle (1)

Définition

On appelle **point de brouillage** ou **point d'anticoïncidence** chaque point de l'interférogramme où le contraste est (quasi-)nul.

L'interférogramme de la lampe spectrale à vapeur de sodium présente des *anticoïncidences* (approchées car son doublet spectral n'est pas symétrique...) et cette dénomination n'est pas anodine.

Exercice 13

On reprend l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, éclairé par une lampe à vapeur de sodium dont on suppose le spectre en doublet symétrique d'écart $\Delta\sigma$ en nombre d'onde.

1. Trouver *sans déterminer l'expression de la courbe d'interférogramme $I(\delta)$* les valeurs de différence de marche donnant une anticoïncidence.
2. On mesure un intervalle de temps $3\Delta T = 717,6 \text{ s}$ pour trois battements avec une vitesse de chariotage $v = 1,21 \mu\text{m/s}$. Que vaut l'écart $\Delta\lambda$ du doublet spectral de la lampe sachant que la longueur d'onde moyenne est $\lambda_0 = 589,3 \text{ nm}$?

Réponse

1. Une anticoïncidence se produit pour les valeurs de différence de marche δ_q telles que les intensités des interférences obtenues par chaque raie spectrale sont en opposition (**anticoïncidence justement !**), soit, en notant σ_0 le nombre d'onde moyen du doublet,

$$2\pi (\sigma_0 + \Delta\sigma/2) \delta_q = 2\pi (\sigma_0 - \Delta\sigma/2) \delta_q + (2q + 1)\pi \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{Z}$$

soit

$$\delta_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\Delta\sigma}$$

La périodicité de ces valeurs est cohérente avec celle des anticoïncidences sur l'interférogramme expérimental.

2. Supposons que $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ (hypothèse validée à la fin). Alors,

$$\Delta\sigma \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \quad \text{donc} \quad \Delta\lambda = \lambda_0^2 \Delta\sigma$$

Or, l'intervalle en différence de marche entre deux brouillages est $1/\Delta\sigma$, donc

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\delta} = \frac{\lambda_0^2}{2v\Delta T} = 0,600 \text{ nm}$$

Ce résultat (sur lequel on peut même être plus précis en pratique...) est cohérent avec les valeurs de longueurs d'onde annoncées au début de section pour une telle lampe.

Notons que la mesure de la longueur d'onde moyenne (de valeur admise dans l'exercice précédent) peut être réalisée de façon précise avec un spectromètre à réseau ou à prisme par exemple.

De plus, les antioïncidences expérimentales ne présentent pas un contraste nul car le doublet spectral du sodium n'est pas parfaitement symétrique (intensités spectrales légèrement différentes)...

c. Approche quantitative précise

On souhaite à présent avoir accès à l'expression analytique précise de l'interférogramme relatif au doublet du sodium (dans son modèle symétrique).

Exercice 14

On reprend l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air, éclairé par une lampe à vapeur de sodium dont on suppose le spectre en doublet symétrique de nombre d'onde moyen σ_0 et d'écart $\Delta\sigma$.

1. Montrer que l'intensité obtenue en un point M d'observation se met sous la forme

$$I(M) = I_0 [1 + \gamma(M) \cos(2\pi \sigma_0 \delta(M))] \quad \text{avec} \quad \gamma(M) = \cos(\pi \Delta\sigma \delta(M))$$

$\gamma(M)$ est une fonction appelée **degré de cohérence temporelle**.

2. Représenter l'interférogramme ainsi que le contraste en fonction de la différence de marche. Commenter.

Réponse

1. Les raies spectrales de la source sont **incohérentes** entre elles donc on peut sommer les intensités produites en M par chacune prise seule :

$$I(M) = \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(2\pi \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \delta(M) \right) \right] + \frac{I_0}{2} \left[1 + \cos \left(2\pi \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \right) \delta(M) \right) \right]$$

On a pris le même facteur arbitraire $I_0/2$ en raison des intensités spectrales identiques de chaque raie. Il ne reste qu'à factoriser cette somme par formule trigonométrique et il vient bien la forme proposée avec le degré de cohérence temporelle

$$\gamma(M) = \cos(\pi \Delta\sigma \delta(M))$$

2. L'interférogramme est précisé ci-contre. Il est obtenu sachant que $\Delta\sigma \ll \sigma_0$: le degré de cohérence temporelle varie lentement par rapport à l'oscillation due à une raie simple qui aurait un nombre d'onde moyen σ_0 .

Par conséquent, les oscillations rapides, de période environ $1/\sigma_0 \simeq \lambda_0$ (longueur d'onde moyenne du doublet) sont modulées par les courbes d'enveloppe $I_0 [1 \pm \gamma(\delta)]$.

On retrouve les **battements** (typiques de la somme de sinusoides de fréquences voisines).

Le contraste varie lentement en fonction de la différence de marche. En effet, localement autour d'un point M,

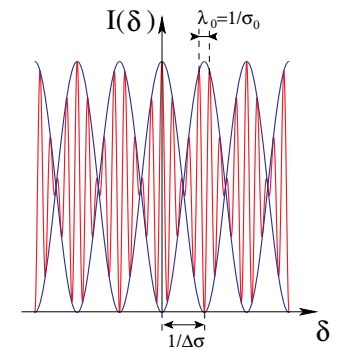
$$C(M) = \left(\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \right)_M$$

$$\text{et on a} \quad I_{\max} = I_0 [1 + |\gamma(M)|] \quad \text{et} \quad I_{\min} = I_0 [1 - |\gamma(M)|]$$

donc

$$C(\delta) = |\gamma(\delta)| = |\cos(\pi \Delta\sigma \delta)|$$

Le tracé de $C(\delta)$ montre des annulations périodiques du contraste (pour chaque valeur « demi-entière » de $1/\Delta\sigma$). Les points d'antioïncidences sont bien sûr retrouvés !



Attention !

Il ne faut faire appel au calcul précédent que si il s'avère vraiment nécessaire. S'il s'agit d'obtenir seulement les points d'antioïncidence, il est préférable d'essayer en premier lieu la méthode prévisionnelle vue juste avant.

2/ Effet de largeur de raie

Comme on l'a déjà vu au chapitre C.1, une radiation réelle d'une source **n'est jamais rigoureusement monochromatique** pour au moins trois raisons : élargissement naturel (durée d'émission limitée), élargissement Doppler (typiquement gaussien, lié à l'agitation thermique) et élargissement collisionnel (typiquement lorentzien, lié à la modification des niveaux d'énergie électroniques par les chocs).

a. Interprétation semi-quantitative du brouillage

Exercice 15

Expliquer qualitativement, en terme de contraste, l'effet sur la figure d'interférences de l'élargissement de la raie spectrale d'une source primaire ponctuelle (initialement quasi-monochromatique) éclairant le dispositif des trous de Young.

Réponse

Chaque émission spectrale de la source est **incohérente** avec les autres donc l'intensité sur l'écran est la somme des intensités obtenues en raison de chacune d'elles.

Pour chaque composante spectrale, on obtient une figure d'interférences respectant la formule de Fresnel et dont l'ordre 0 sur l'écran est toujours à la même position (sur la médiatrice de $[S_1S_2]$ si la source est aussi sur celle-ci). Par contre, l'interfrange, proportionnel à la longueur d'onde, dépend de la composante spectrale donc plus on s'éloigne de l'ordre 0, plus le contraste va être rendu mauvais par l'élargissement spectral de la source par superposition d'intensités sinusoïdales décalées. La perte de contraste n'est donc pas uniforme mais cela reste très lié à la structure de l'interféromètre.

À cet effet de perte de contraste peut s'ajouter un effet coloré pour des élargissements spectraux importants et on y revient plus loin dans le cas de la lumière blanche (chaque chose en son temps!).

La page web suivante montre, sur la première simulation, l'effet d'un élargissement spectral (très modéré...) de la source primaire éclairant un interféromètre de Young sur la figure d'interférences :

<http://www.f-vandenbrouck.org/coherence.html>

On peut choisir la longueur d'onde moyenne de radiation, ainsi qu'un élargissement relatif de celle-ci. Augmenter ce dernier conduit à l'observation de la prévision de l'exercice précédent.

Le programme adopte un critère pour savoir quand la perte de contraste par brouillage temporel devient trop grande...

Critère semi-quantitatif de brouillage temporel

Il y a brouillage « temporel » des franges d'interférences en un point M du champ d'interférences obtenu par un interféromètre lorsque

$$|\Delta p(M)| > \frac{1}{2}$$

où $\Delta p(M)$ est la variation d'ordre au point M évaluée sur la moitié de l'étendue spectrale de la source primaire.

Ce critère signifie que le contraste est mauvais dès que l'on superpose des franges d'interférences décalées continûment de plus d'un demi-interfrange (c'est le même esprit que le critère semi-quantitatif de brouillage spatial, sans surprise!).

Exercice 16

1. Estimer, avec le critère semi-quantitatif de brouillage temporel, la différence de marche minimale δ_{\min} (en valeur absolue) à partir de laquelle les franges d'interférences ont une perte de contraste notable par problème de cohérence temporelle pour un dispositif interférentiel où la différence de marche ne dépend pas de la longueur d'onde⁶. On supposera la source primaire ponctuelle à radiation unique de largeur typique $\Delta\sigma$ en nombre d'onde.
2. Discuter le résultat en terme de longueur de cohérence ℓ_c .

Réponse

1. On pose δ la différence de marche indépendante du nombre d'onde σ d'une émission spectrale considérée (incohérente avec les autres). L'ordre d'interférence est alors $p = \sigma\delta$ et, σ variant typiquement de σ_0 à $\sigma_0 + \Delta\sigma/2$ sur la moitié de l'étendue spectrale de la source, le critère de brouillage s'écrit

$$|\Delta p| = \frac{\Delta\sigma}{2} |\delta| > \frac{1}{2} \quad \text{d'où} \quad |\delta| > \delta_{\min} = \frac{1}{\Delta\sigma}$$

2. Pour une largeur spectrale en nombre d'onde $\Delta\sigma$, la largeur en fréquence correspondante est $\Delta f = c\Delta\sigma$ et on sait, d'après le chapitre C.1, que $\Delta f\tau_c \sim 1$ et $\ell_c = c\tau_c$. Par conséquent, il y a brouillage temporel dès lors que

$$|\delta| > \delta_{\min} = \ell_c$$

On a donc tout intérêt à avoir une source de longueur de cohérence assez grande pour espérer observer des interférences contrastées sur une zone suffisamment large du champ d'interférences ! De ce fait, le laser est très intéressant, avec son faisceau intense.

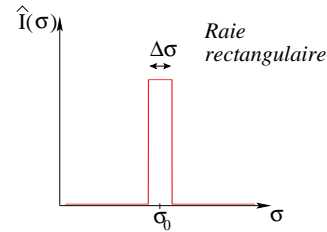
Le tableau suivant rappelle notamment des longueurs de cohérence ℓ_c typiques (voir chapitre C.1), ce qui permet d'avoir une vision plus quantitative du critère dégagé avec ℓ_c dans l'exercice précédent.

Source lumineuse	Laser He-Ne ordinaire (TP)	Lampe Hg basse pression	Lampe Hg haute pression	Lumière blanche
ℓ_c	0,3 m	0,3 m	0,3 mm	0,75 μm

6. C'est le cas du dispositif de Young ou de l'interféromètre de Michelson si l'on néglige les variations d'indice optique en fonction de la longueur d'onde, mais ce n'est pas toujours acceptable (on peut avoir par exemple un phénomène de frange achromatique en lumière blanche en raison de ces variations (HP)).

b. Approche quantitative précise (raie rectangulaire)

On souhaite préciser davantage l'effet de l'élargissement de raie sur le contraste d'une figure d'interférences. On va utiliser ici le **modèle de la distribution spectrale rectangulaire** (voir figure ci-contre) pour lequel les calculs sont les plus simples. . .



Exercice 17

On considère l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air éclairé par une lampe avec une seule raie spectrale modélisée par un profil rectangulaire (centre en σ_0 , largeur $\Delta\sigma$).

1. Montrer que l'intensité obtenue en un point M d'observation se met sous la forme

$$I(M) = I_0 [1 + \gamma(M) \cos(2\pi \sigma_0 \delta(M))]$$

avec le degré de cohérence temporelle

$$\gamma(M) = \text{sinc}(\pi \Delta\sigma \delta(M))$$

2. Représenter l'interférogramme ainsi que le contraste en fonction de la différence de marche. Commenter.

Réponse

1. Les divers émissions des éléments spectraux infinitésimaux de la source (nombre d'onde σ et largeur $d\sigma$) sont **incohérents** entre eux donc on peut sommer les intensités produites en M par chacun d'eux pris seuls :

$$I(M) = \frac{I_0}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_0 - \Delta\sigma/2}^{\sigma_0 + \Delta\sigma/2} [1 + \cos(2\pi \sigma \delta)] d\sigma$$

Le préfacteur a été choisi de sorte à ce que le résultat final se mette sous la forme souhaitée (ce choix n'a rien de restrictif physiquement parlant). Il reste à mener le calcul :

$$I(M) = \frac{I_0}{\Delta\sigma} \left[\sigma + \frac{\sin(2\pi \sigma \delta)}{2\pi \delta} \right]_{\sigma_0 - \Delta\sigma/2}^{\sigma_0 + \Delta\sigma/2}$$

$$\text{soit } I(M) = I_0 \left[1 + \frac{\sin\left(2\pi \left(\sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2}\right) \delta\right) - \sin\left(2\pi \left(\sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}\right) \delta\right)}{2\pi \delta \Delta\sigma} \right]$$

Il n'y a plus qu'à factoriser la différence des sinus par formule trigonométrique et il vient bien la forme proposée avec le degré de cohérence temporelle

$$\gamma(M) = \text{sinc}(\pi \Delta\sigma \delta(M))$$

2. L'interférogramme est précisé ci-contre. Il est obtenu sachant que $\Delta\sigma \ll \sigma_0$: le degré de cohérence temporelle varie lentement par rapport à l'oscillation due à une raie de largeur nulle. Par conséquent, les oscillations rapides, de période environ $1/\sigma_0 \simeq \lambda_0$ (longueur d'onde moyenne) sont modulées par les courbes d'enveloppe $I_0 [1 \pm \gamma(\delta)]$.

Le contraste varie lentement en fonction de la différence de marche. En effet, localement autour d'un point M, on a déjà vu que

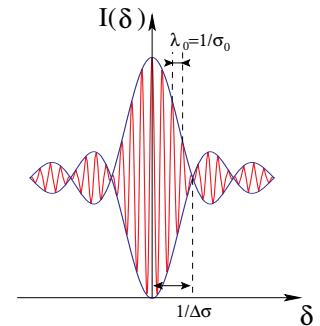
$$C(M) = \left(\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \right)_M$$

$$\text{avec } I_{\max} = I_0 [1 + |\gamma(M)|] \quad \text{et} \quad I_{\min} = I_0 [1 - |\gamma(M)|]$$

entraîne

$$C(\delta) = |\gamma(\delta)| = |\text{sinc}(\pi \Delta\sigma \delta)|$$

Le tracé de $C(\delta)$ montre que le critère semi-quantitatif de brouillage est respecté mais apporte l'information supplémentaire des annulations périodiques du contraste (pour chaque multiple entier de $1/\Delta\sigma$). Ceci est dû à la forme très particulière de raie adoptée.

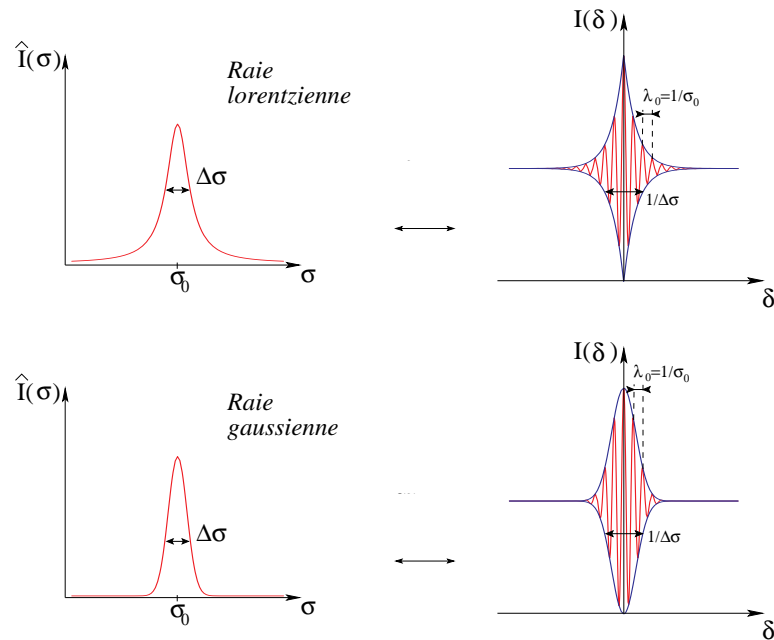


3/ Spectrométrie interférentielle (2)

Les calculs d'interférogrammes faits pour le doublet et la raie rectangulaire mettent en évidence l'existence d'un lien fort entre le spectre de la source et le degré de cohérence temporelle $\gamma(M)$. Les figures suivantes donnent deux autres exemples d'interférogrammes typiques de raies élargies.

Le lien spectre-interférogramme est donné par un théorème hors-programme (dit de Wiener-Khintchine). **La mesure expérimentale d'un interférogramme permet d'obtenir des informations sur le spectre de la source** et c'est sur cela que repose la technique de **spectrométrie interférentielle**.

Le théorème de Wiener-Khintchine fait intervenir une transformée de Fourier normalisée du spectre de la source, ce qui fait que l'extension caractéristique de l'enveloppe de l'interférogramme **évolue en l'inverse** de la largeur spectrale $\Delta\sigma$ de la source. C'est de là que vient plus quantitativement le critère semi-quantitatif de brouillage temporel vu précédemment.

**Remarque**

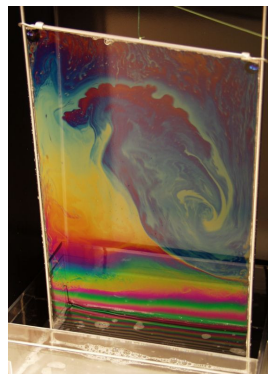
Dans le cas du doublet du sodium, chaque raie présente une certaine largeur $\Delta\sigma$. Ceci entraîne en pratique une diminution progressive du contraste des battements sur une échelle de l'ordre de $\ell_c = 1/\Delta\sigma$.

4/ Interférences en lumière blanche

D'après le critère de cohérence temporelle précédent, il est manifestement difficile d'observer des interférences en lumière blanche car la longueur de cohérence ℓ_c est inférieure au micromètre!! On a une perte de contraste trop forte dès que la condition $|\delta| \leq \ell_c$ n'est plus respectée.

On arrive malgré tout à en observer : les **irisations** au niveau de lames d'eau savonneuse, de flaques d'eau huileuses, sur les ailes de papillons ou certaines plumes d'oiseaux en sont de beaux exemples.

Essayons de comprendre les irisations en procédant en deux temps.

**Attention !**

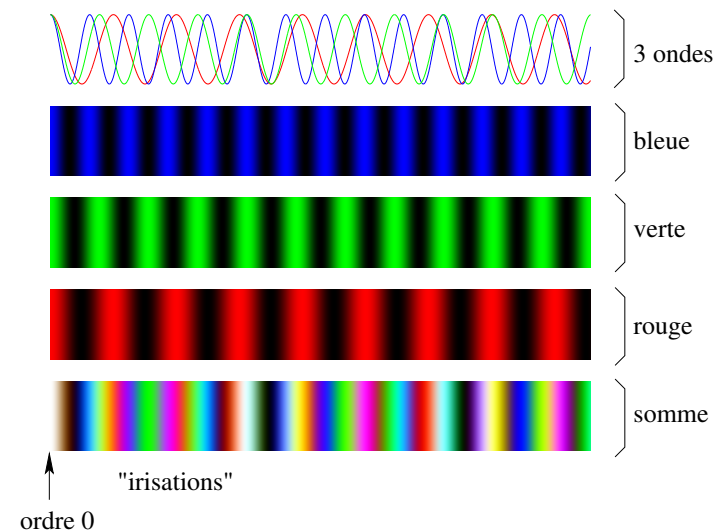
Il faut savoir, dessins à l'appui, interpréter qualitativement les observations en lumière blanche donc il faut bien comprendre ce qui suit...

• Source trichromatique

Soit une source comportant un spectre avec trois fréquences équivalentes éclairant un interféromètre où **la différence de marche est purement géométrique et ne dépend pas de la longueur d'onde**⁷.

La représentation suivante montre en première ligne les trois profils d'intensité séparément, puis trois lignes montrent les figures pour chaque couleur et enfin la dernière ligne précise la figure effectivement obtenue (correspondant à la somme des intensités précédentes par incohérence des raies entre elles).

En abscisse se trouve la différence de marche, nulle à l'extrémité gauche.

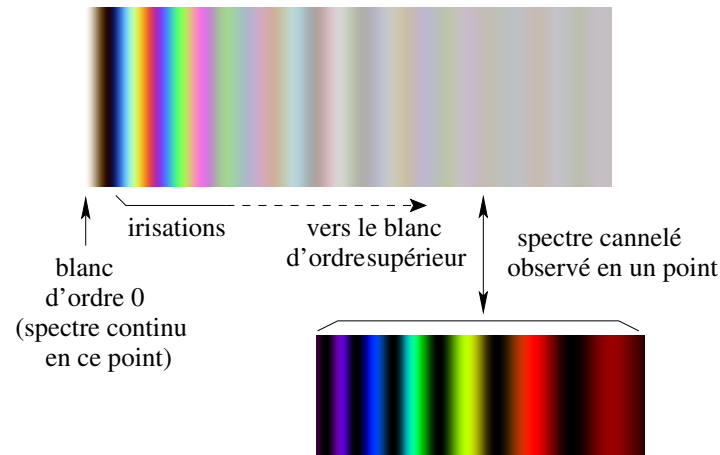


On voit bien que la non-monochromaticité de la source entraîne un effet coloré qui correspond *presque* à des irisations.

• Source de lumière blanche

On procède de la même façon qu'avec la source trichromatique, mais cette fois-ci, il s'agit d'une lumière blanche (spectre continu et quasi-uniforme sur le domaine visible). La superposition des intensités obtenues par chaque élément spectral infinitésimal donne le résultat suivant :

7. Dans le cas contraire, on peut avoir affaire au phénomène de frange achromatique dont l'analyse est un peu plus complexe (mais faisable dans le même esprit).



Définitions

On appelle **blanc d'ordre 0** (ou **teinte plate**) la teinte obtenue en lumière blanche à l'ordre 0 et qui correspond à la couleur de la source.

On appelle **blanc d'ordre supérieur** la teinte « blanchâtre » obtenue en lumière blanche pour un ordre quelconque tel que $|\delta| \gg \ell_c$ (zone de brouillage par perte de cohérence temporelle).

On appelle **irisations** l'échelle des teintes intermédiaires⁸.

Les blancs d'ordre 0 et d'ordre supérieur ne sont pas les mêmes et la meilleure façon de s'en rendre compte est de considérer leur spectre. Pour le blanc d'ordre 0, le spectre est celui de la source tandis que pour le blanc d'ordre supérieur, il manque des « bandes » appelées **cannelures** : on parle de **spectre cannelé**⁹.

Exercice 18

Soit le dispositif classique des trous de Young considéré avec une source ponctuelle de lumière blanche (indice de l'air $n = 1,00$). Préciser quelles sont les longueurs d'ondes correspondant aux cannelures du spectre de la lumière arrivant en un point donné de l'écran.

Réponse

En reprenant les notations usuelles, la différence de marche au point d'observation de « coordonnée » x_0 est

8. Lorsque la frange centrale est blanche, on parle d'échelle des teintes de Newton à centre blanc ; lorsque la frange centrale est noire (en raison d'un déphasage ondulatoire supplémentaire de π , comme pour le cas des bulles de savons...), on parle d'échelle des teintes de Newton à centre noir.

9. Ne confondez surtout pas la figure d'interférences avec le spectre ! Ce n'est pas la même chose...

$$\delta(x_0) = \frac{2ax_0}{D}$$

Les cannelures correspondent aux longueurs d'onde $\lambda_{0,q}$ donnant une intensité propre sur l'écran nulle en x_0 , soit

$$\delta(x_0) = \left(q + \frac{1}{2}\right) \lambda_{0,q} \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{Z}$$

donc

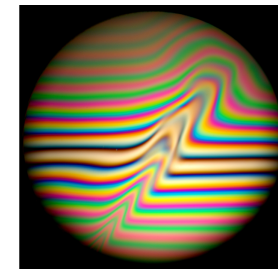
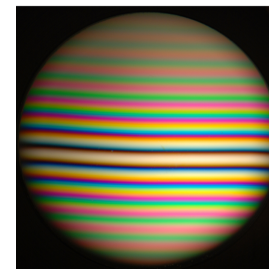
$$\lambda_{0,q} = \frac{2ax_0}{\left(q + \frac{1}{2}\right) D}$$

Seules les valeurs d'entier relatif q donnant une longueur d'onde dans le visible sont à retenir. On note que les cannelures ne sont pas équi-espacées en longueur d'onde (et le dispositif de spectrométrie ne compense en général pas ce fait).

Les interférences en lumière blanche permettent par exemple des mesures de différence de marche à partir des teintes observées. Elle présentent de plus l'intérêt de pouvoir identifier l'ordre 0 (chose infaisable en éclairage quasi-monochromatique, toutes les franges nous paraissant semblables!).

Exercice 19

1. La figure suivante, de gauche, est une photographie de franges d'égale épaisseur obtenues avec une source de lumière blanche par l'interféromètre de Michelson. Commenter.
2. Pourquoi les franges ne sont-elles pas parfaitement rectilignes (sachant qu'il ne s'agit pas d'un effet de distorsion de l'objectif de l'appareil photographique) ? En déduire une application possible de l'interféromètre.
3. La figure suivante, de droite, est une photographie correspondant à la même situation que précédemment, à ceci près qu'un filet de gaz circule devant l'un des miroirs. En déduire une application possible de l'interféromètre.



Réponse

1. On observe les franges d'égale épaisseur en lumière blanche : la frange centrale (ici blanche) est parfaitement identifiable, avec les irisations autour. Cette frange permet de localiser l'arête du coin d'air.
2. Les franges ne sont pas parfaitement rectilignes. Ceci peut être dû à un défaut de qualité optique d'une partie de l'interféromètre. Typiquement, la planéité des miroirs n'est pas parfaite, ce qui entraîne des franges d'**égale épaisseur** déformées par rapport au cas idéal.

On peut, en étudiant les franges localisées au niveau des miroirs déterminer la forme d'un miroir (l'autre étant supposé plan). C'est une méthode pour tester, par exemple, la régularité de surface d'un miroir sphérique (pour lequel, les franges d'égale épaisseur doivent être idéalement des anneaux). Procéder avec une source spectrale étendue est suffisant dans ce cas.

3. Le filet de gaz entraîne une différence de marche complémentaire

$$\delta_{\text{comp}} = 2(n_{\text{gaz}} - 1)e_{\text{filet}}$$

où n_{gaz} est l'indice du gaz et e_{filet} est l'épaisseur locale du filet de gaz. Ceci explique la déformation visible des franges et on peut en déduire la valeur de cette différence de marche complémentaire (le décalage observé est à peine plus que l'interfrange moyen, donc δ_{comp} est de l'ordre de la longueur d'onde!).

L'interféromètre réglé en coin d'air permet de remonter à des mesures de perturbations de chemin optique par décalage de franges (mesure d'indice si épaisseur connue ou mesure d'épaisseur si indice connu)...

5/ Cas à N ondes : spectromètre à réseau

Le réseau a été rencontré en MPSI dans le cadre de son utilisation la plus fréquente qui est celle de la spectroscopie (avec des mesures angulaires précises au goniomètre).

Exercice 20

1. Expliquer sans calcul en quoi le réseau est intéressant pour concevoir un spectroscopie.
2. Reprendre la question précédente dans le cas du prisme.
3. Voyez-vous des différences manifestes élémentaires entre un spectroscopie à réseau et un spectroscopie à prisme ? Pour information, l'indice optique du verre d'un prisme suit la loi de Cauchy $n(\lambda_0) = A + B/\lambda_0^2$ où A et B sont des constantes strictement positives.
4. Quel est l'intérêt éventuel de l'ordre 0 du réseau en spectroscopie ?

Réponse

1. D'après la formule fondamentale du réseau, celui-ci (utilisé en conditions de Fraunhofer) conduit à des ordres dont les angles dépendent de la longueur d'onde, sauf pour l'ordre 0 qui correspond à la direction de l'optique géométrique. De ce fait, le réseau présente un caractère dispersif exploitable pour la spectroscopie.

De plus, plus le nombre de motifs éclairés du réseau est important, plus les ordres sont « fins » et cela contribue à l'obtention d'une résolution spectrale élevée.

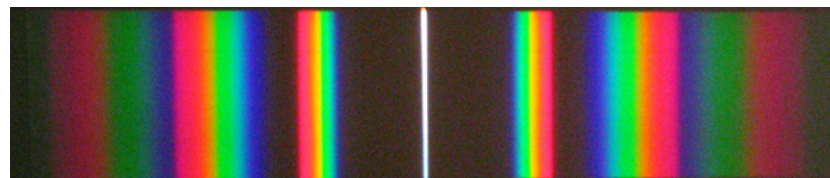
2. Le prisme est constitué d'un milieu dispersif (souvent du verre lourd) avec un indice dépendant de la longueur d'onde. Cela autorise son utilisation en spectroscopie dans la mesure où la déviation des rayons lumineux qui le traversent dépend de la longueur d'onde.
3. Plus la longueur d'onde est élevée, moins le milieu du prisme est réfringent : le prisme dévie plus les radiations bleues que les rouges, ce qui est le contraire pour le réseau !

De plus, le réseau donne plusieurs spectres (un par ordre visible, les extrêmes pouvant être incomplets si la condition $|\sin \theta_p| \leq 1$ n'est plus respectée).

4. L'ordre 0 du réseau correspond à la direction de l'optique géométrique, comme si le réseau n'était pas là. Il a la couleur de la source et n'a pas d'intérêt direct a priori en spectroscopie. Toutefois, il permet de connaître rapidement la direction d'incidence.

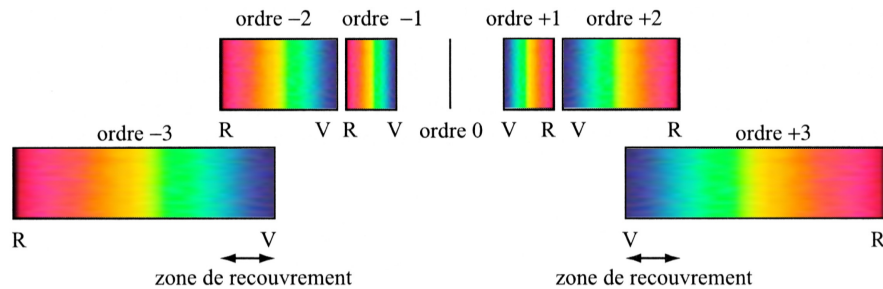
L'utilisation d'un spectromètre à réseau nécessite de connaître un effet particulier qui lui est spécifique : l'effet de **recouvrement des ordres**.

La photographie suivante montre ce que l'on obtient sur un écran avec un spectromètre à réseau (en montage de Fraunhofer) à partir d'une fente source de lumière blanche :



On distingue au centre l'ordre 0, non dispersif donc blanc, et de chaque côté des spectres pour chaque ordre observable **mais certains se recouvrent** ! Seuls les spectres d'ordres +1 et -1 sont isolés des autres et exploitables... Ici, la superposition du rouge de l'ordre 2 avec le violet de l'ordre 3 donne par synthèse additive une teinte magenta...

La figure suivante détaille schématiquement l'effet de recouvrement précédent pour l'incidence normale (les lettres R et V désignent le rouge et le violet) :

**Exercice 21**

Vérifier par le calcul que les ordres 2 et 3 se recouvrent en lumière blanche.

Réponse

On écrit pour les longueurs d'onde limites (rouge d'ordre p et violet d'ordre $p+1$) la formule fondamentale des réseaux :

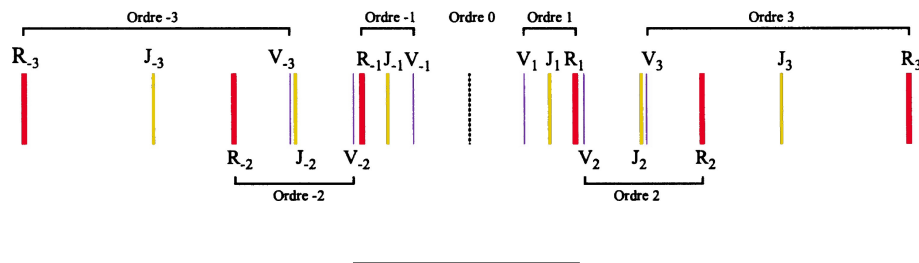
$$\sin \theta_{R,p} = \sin \theta_0 + p \frac{\lambda_R}{a} \quad \text{et} \quad \sin \theta_{V,p+1} = \sin \theta_0 + (p+1) \frac{\lambda_V}{a}$$

Le recouvrement débute entre les spectres d'ordre p et $p+1$ (positifs, ce qui n'est pas restrictif par « symétrie ») lorsque

$$\sin \theta_{V,p+1} < \sin \theta_{R,p} \quad \text{soit} \quad (p+1) \lambda_V < p \lambda_R$$

Compte tenu de $\lambda_R \simeq 1,9 \lambda_V$, il vient effectivement $p_{\min} = 2$ pour le recouvrement...

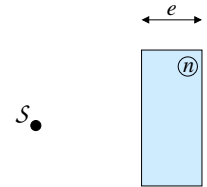
Le recouvrement des ordres est gênant pour la lumière blanche mais pas pour les spectres de raies. Il suffit de bien identifier les spectres pour chaque ordre en partant de l'ordre 0 de la couleur de la source. La figure suivante précise un cas trichromatique (rouge, jaune, violet) en incidence normale :



Annexe I : Anneaux d'égale inclinaison d'une lame de verre

Exercice 22

Soit une lame de verre à faces parallèles d'indice n et d'épaisseur e éclairée par une source S monochromatique de longueur d'onde λ_0 . On considère les interférences par réflexion.



- On s'intéresse dans un premier temps à la situation où S est ponctuelle. Justifier que l'on peut considérer des interférences à deux ondes sachant que les ordres de grandeur des coefficients de réflexion et de transmission en amplitude des ondes à une interface 1-2 (l'onde incidente étant dans le milieu 1) sont estimables par les relations suivantes (exactes en incidence normale) :

$$r_{1-2} \simeq \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t_{1-2} \simeq \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$$

Les interférences sont elles-localisées ? Préciser sans calcul la nature des franges observées sur un écran disposé parallèlement à la lame.

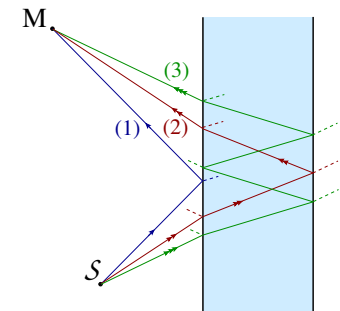
- Expliquer le phénomène de brouillage observé lorsque S est une source étendue. Où sont localisées les interférences ? Comment les observer ?
- Montrer que la différence de marche est alors

$$\delta(M) = 2 n e \cos r + \lambda_0/2$$

où r est l'angle de réfraction dans la lame. Justifier la dénomination « anneaux d'égale inclinaison » donnée aux interférences associées.

Réponse (visible)

- A priori, on s'attend à des interférences entre une infinité de rayons (réflexions multiples dans la lame ; voir figure où l'on n'a représenté que les trois premiers rayons arrivant en M). Cependant, les amplitudes des divers rayons ne sont pas identiques et on peut effectuer des estimations grâce aux expressions des coefficients de réflexion et de transmission fournis dans l'énoncé. Avec $n = 1,5$ pour le verre et un indice unité pour l'air, on trouve



$$r_{\text{air-verre}} = -r_{\text{verre-air}} = -0,2$$

$$t_{\text{air-verre}} = 0,8$$

$$t_{\text{verre-air}} = 1,2$$

Posons a_0 l'amplitude des rayons issus de S et en incidence sur la lame¹⁰. Alors, le rayon (1) directement réfléchi a une amplitude $a_1 = r_{\text{air-verre}} a_0$ et les rayons suivants (2), (3) et ainsi de suite ont des amplitudes

$$a_2 = t_{\text{air-verre}} r_{\text{verre-air}} t_{\text{verre-air}} a_0 \quad a_3 = r_{\text{air-verre}} r_{\text{verre-air}} a_2 \quad \dots$$

Numériquement, $a_2 \simeq -a_1$ alors que $a_3 = -0,04 a_2$ donc le rayon (3) est d'amplitude négligeable et il en est de même pour les réflexions suivantes encore moins intenses¹¹. On peut se contenter d'étudier les interférences à deux ondes (entre les familles (1) et (2) de rayons).

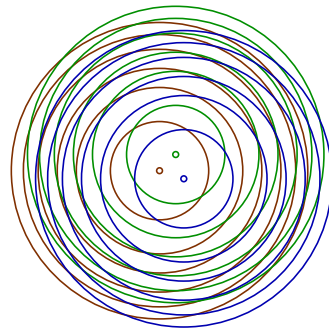
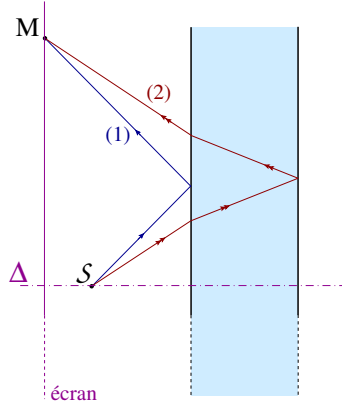
Les interférences **ne sont pas localisées** (i.e. sont délocalisées) puisque la source S est ponctuelle !

Enfin, les franges sur l'écran sont des anneaux d'axe la normale Δ à la lame passant par S puisque Δ est axe de symétrie de révolution du problème (en ce qui concerne les chemins optiques).

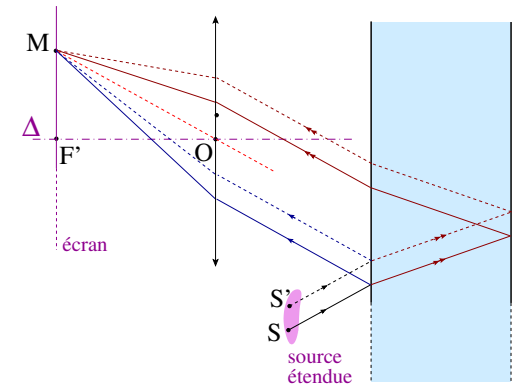
Les calculs ne sont pas demandés ici mais on pourrait montrer que les anneaux sont de plus en plus resserrés quand on s'éloigne de leur centre. Par contre, **il est clair que la différence de marche géométrique au centre des anneaux n'est pas nulle**¹² !

2. Les divers points de la source génèrent des ondes incohérentes avec celles des autres points donc on somme les intensités des interférences qu'ils généreraient seuls. Or, pour chaque point source, l'axe Δ des anneaux est différent et ils sont alors centrés différemment, d'où un effet de **brouillage** (d'autant plus important que l'on place l'écran près de la lame). La figure ci-contre montre l'effet de brouillage avec seulement trois systèmes d'anneaux (songer au critère de brouillage $|\Delta p(M)| > 1/2$ de décalage supérieur à un demi-interfrange)...

Le brouillage n'a pas lieu lorsqu'on considère les interférences **à l'infini**, ce qui correspond à une situation de **division d'amplitude** (conformément au théorème de localisation).

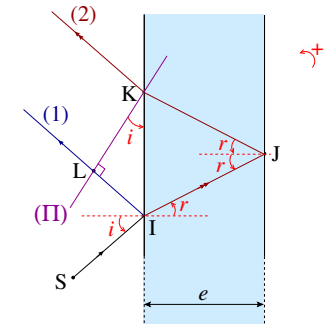


L'observation des interférences **localisées à l'infini** est faisable en plaçant l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente par exemple. La figure ci-contre (pas à l'échelle) précise cette configuration et la division d'amplitude pour deux points de la source. Il n'y a pas de brouillage sur l'écran puisque tous les anneaux ont même axe (axe focal Δ de la lentille).



3. On se place bien entendu dans le cadre de la division d'amplitude avec observation des interférences à l'infini.

On note qu'après le plan (II), il n'y a aucune contribution à la différence de marche (ce plan est équiphase¹³ grâce au théorème de Malus vis-à-vis du retour inverse de la lumière en imaginant une source fictive au niveau du point M d'observation des interférences). Du coup, en n'oubliant pas la différence de marche supplémentaire¹⁴ due à la réflexion sur un milieu d'indice supérieur pour le rayon (1),



$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = n [IJ + JK] - IL + \lambda_0/2$$

$$\text{Or,} \quad IJ = JK = \frac{e}{\cos r} \quad \text{et} \quad IL = IK \sin i = 2e \tan r \sin i$$

$$\text{soit} \quad \delta(M) = \frac{2ne}{\cos r} - 2e \tan r \sin i + \lambda_0/2$$

En utilisant la loi de réfraction de Descartes, il vient

$$\delta(M) = 2ne \frac{1 - \sin^2 r}{\cos r} + \lambda_0/2$$

et on en déduit la formule souhaitée grâce à $\cos^2 r + \sin^2 r = 1$.

On parle d'**anneaux d'égale inclinaison** car la différence de marche ne dépend que de r , donc de l'angle d'incidence i des rayons sur la lame : chaque frange

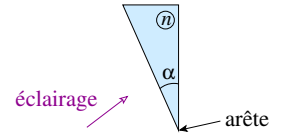
10. On suppose que c'est le même a_0 pour chaque rayon car on raisonne en ordre de grandeur.

11. Il existe des dispositifs avec des indices tels que les réflexions multiples ne sont pas négligeables (Fabry-Pérot, filtres interférentiels...) et on a alors des interférences avec une infinité d'ondes à traiter.

circulaire sur l'écran correspond à une valeur d'incidence donnée. Si on veut observer beaucoup d'anneaux, il faut une grande ouverture de la source (grande plage de valeurs de i).

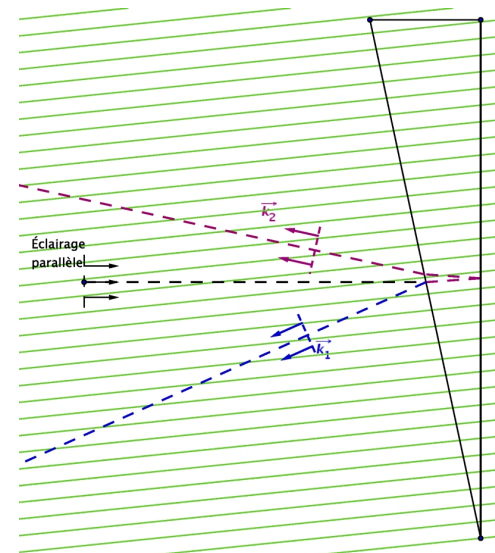
Annexe 2 : Franges d'égale épaisseur d'un coin de verre

Soit un coin de verre d'indice n et d'angle α faible éclairé par une source monochromatique **à l'infini**¹⁵. On s'intéresse aux interférences par réflexion à deux ondes¹⁶. Toutes les figures sont issues d'une simulation disponible sur :

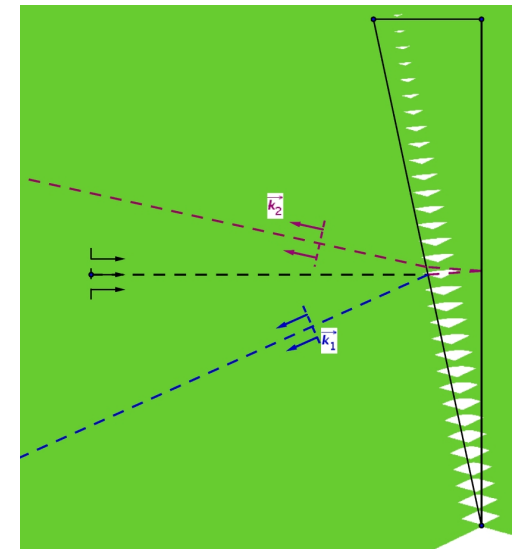


<http://mpstarcllem.free.fr/ScPhysDocs/ScPhysSimulations/coin03.html>

L'étude suivante englobe la situation du coin d'air de l'interféromètre de Michelson : il suffit de prendre le cas d'indice $n = 1$ et de ne pas prendre en compte un déphasage ondulatoire supplémentaire si l'interféromètre n'en fait pas intervenir un (autrement dit, les franges sombres deviennent brillantes et vice-versa).



(a) Source ponctuelle



(b) Source étendue

15. Ce cas est plus simple que celui d'une source à distance finie, mais il est déjà assez compliqué au niveau des constructions pour qu'il ne soit pas mis intégralement sous forme d'exercice.

16. On se contente de deux ondes par la même argumentation que dans l'exercice précédent de la lame de verre.

Source ponctuelle

Les interférences sont **délocalisées**. La source ponctuelle étant à l'infini¹⁷, on peut modéliser le faisceau incident par une onde plane et celle-ci conduit par le coin en réflexion à deux ondes planes responsables d'interférences.

On sait que les franges dans le champ d'interférences sont une famille de plans (en vert sur la figure¹⁸) parallèles à l'arête du coin et à la première bissectrice des vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 des deux faisceaux parallèles qui interfèrent.

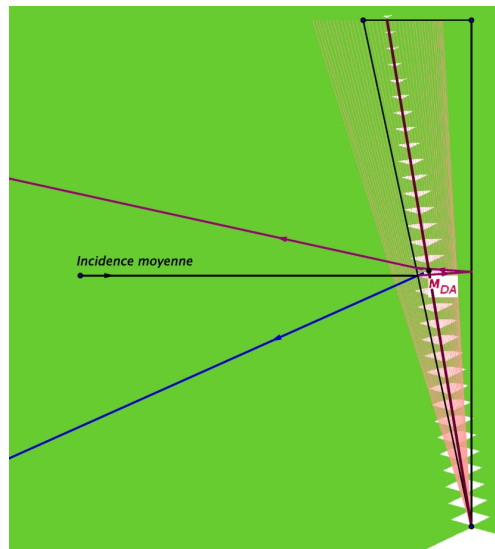
Source étendue

Chaque point de la source étendue¹⁹ étant incohérent avec les autres, on peut sommer les intensités des interférences obtenues à partir de chacun d'eux. Or, pour chacun de ces points, on obtient pour les franges des familles de plans parallèles d'inclinaisons différentes (mais toujours espacés de la même distance). On peut alors montrer graphiquement la localisation des interférences en représentant ces familles de plans obtenues pour les divers points de la source (divers angles d'incidence sur le coin).

Les franges ne se correspondent pas bien dans tout le champ d'interférences (effet de brouillage; voir la figure précédente de droite et la figure ci-contre) : il y a **localisation au voisinage du coin** et le brouillage est **plus important lorsqu'on s'éloigne de l'arête**.

Le théorème de localisation précise que la zone de localisation est *nécessairement au voisinage* de la surface de localisation obtenue par division d'amplitude.

On le vérifie ici en superposant le tracé de la surface de localisation pour l'**incidence moyenne** (trait rouge foncé passant par M_{DA}). La zone « saumon » correspond à l'ensemble des surfaces de localisation déterminées par la division d'amplitude (en modifiant l'angle d'incidence).



17. Ce qui se réalise par exemple avec une source ponctuelle placée au foyer objet d'une lentille convergente.

18. En raison du déphasage supplémentaire dû à la réflexion sur un milieu d'indice supérieur pour le rayon réfléchi directement sur le coin de verre, il y a une inversion des franges : les franges qui passent par l'arête du coin sont sombres et ce sont les franges sombres que l'on a représenté sur la figure.

19. Toujours à l'infini (source étendue au foyer objet d'une lentille convergente).

Attention !

On vérifie que le théorème de localisation énonce une condition *nécessaire* mais non suffisante : les franges se brouillent en s'éloignant de l'arête, même en restant sur la surface de localisation donnée par la division d'amplitude.

Enfin, les interférences sont généralement **virtuelles**. Afin de les observer, il faut utiliser un dispositif de projection : on peut prendre une lentille convergente conjuguant les **interférences localisées sur le coin** à un écran²⁰.

Exercice 23

On suppose que $|\alpha| \ll 1$ et que l'incidence des rayons de la source étendue est quasi-normale sur le coin de verre.

1. Exprimer à l'ordre le plus bas non nul la différence de marche aux points des interférences observées.
2. Justifier la dénomination « franges d'égale épaisseur » donnée à cette situation interférentielle (n est uniforme).

Réponse (visible)

1. On s'intéresse à une incidence quasi-normale des rayons sur le coin de verre et on se place directement sur la surface de localisation en travaillant en division d'amplitude (voir figure précédente et le point M_{DA}). Comme on se contente de rechercher le résultat à l'ordre le plus bas, on peut se contenter de travailler pour l'incidence nulle. Alors, on voit rapidement avec $\alpha \ll 1$ (sans oublier le chemin optique supplémentaire déjà évoqué) que

$$\delta(M_{DA}) \simeq 2n e(M_{DA}) + \lambda_0/2$$

où $e(M_{DA}) \simeq \alpha x$ est l'épaisseur locale du coin (x est la distance à l'arête).

2. On parle de **franges d'égale épaisseur** puisque chaque frange correspond à une épaisseur donnée (n est uniforme).

Attention !

La source étant **étendue**, il faut bien avoir le réflexe de se placer dans le cadre de la **division d'amplitude** ! Cela donne aussi la surface de localisation (voir théorème de localisation et les exemples donnés).

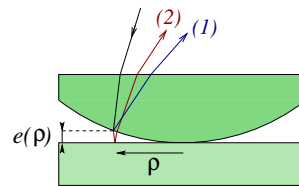
20. L'œil arrive aussi à voir les interférences par projection de celles-ci, grâce au cristallin, sur la rétine... mais il ne faut pas faire ça si la source est un laser...

L'exercice précédent n'attend pas le calcul pour une incidence quelconque de la différence de marche pour $\alpha \ll 1$ (qui est rarement utile vu les conditions pratiques de réalisation des interférences). Pour ceux que cela intéresse (et pour le plaisir de voir de beaux raisonnements angulaires...), des détails sont données à ce sujet en annexe page 23.

Attention !

L'étude est généralisable à tout dispositif assimilable localement à des coins.

Par exemple, considérons le dispositif des anneaux de Newton : il s'agit d'une lentille posée sur une surface plane réfléchissante²¹ et éclairée par une source étendue « à l'infini ». Alors, on peut montrer²² que l'on obtient des **anneaux** localisés au voisinage de l'espace entre la lentille et la surface réfléchissante et dus aux interférences descriptibles par la division d'amplitude de chaque rayon incident. La différence de marche à la distance ρ du point de contact est celle du coin local d'air d'épaisseur $e(\rho)$ et d'indice unité :



$$\delta(\rho) = 2e(\rho) + \lambda_0/2$$

Le centre de la figure d'interférences est sombre en raison du déphasage ondulatoire supplémentaire. L'épaisseur $e(\rho)$ est calculable si l'on donne la forme de la surface de la lentille.

Autre exemple : les irisations visibles sur les flaques d'eau huilees sont des franges d'égale épaisseur produites en raison de l'éclairage par la source étendue « à l'infini » qu'est le Soleil. On a localement des coins d'huile sur l'eau qui se comportent comme précédemment et les irisations viennent du fait que la source est polychromatique (problème de cohérence temporelle).

On peut vérifier en pratique que les franges sont bien localisées au niveau de la flaque : on a l'impression qu'elles sont peintes dessus (elles ne bougent pas par rapport à la flaque quand on se déplace, ce qui ne serait pas le cas s'il s'agissait de franges d'égale inclinaison par exemple...).

Annexe 3 : Différence de marche géométrique pour un coin (source à distance finie, division d'amplitude)

Exercice 24

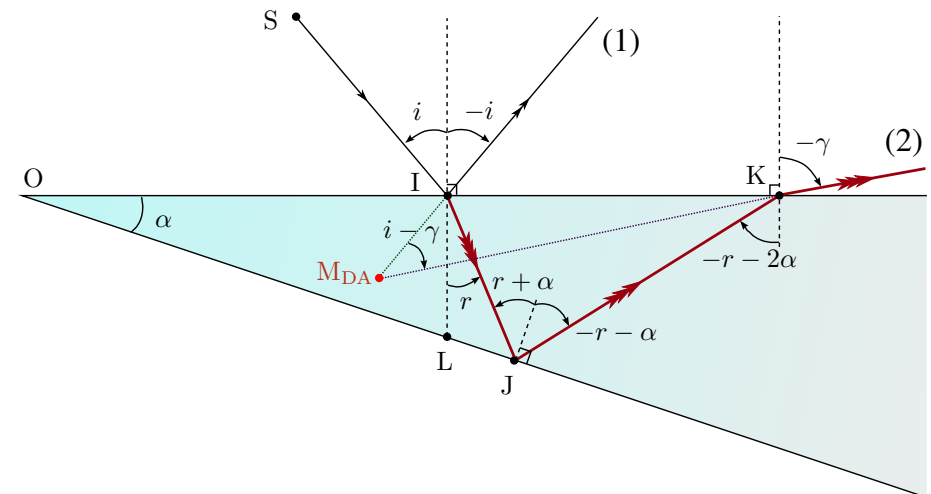
On considère un coin de verre d'indice n et d'angle au sommet α éclairé par une source S à distance finie. Montrer que la différence de marche géométrique en un point M_{DA} pour la division d'amplitude d'un rayon arrivant avec un angle d'incidence i quelconque en I sur le premier dioptré est, pour $\alpha \ll 1$,

$$\delta_{\text{géom}}(M_{DA}) \simeq 2n e(I) \cos r$$

où r est l'angle de réfraction par le dioptré d'entrée et $e(I)$ est l'épaisseur locale en I du coin.

Réponse (visible)

Afin de s'en sortir, il est obligatoire de faire une grande et belle figure respectant les lois de l'optique géométrique et précisant les angles remarquables (voir figure suivante où les angles sont orientés en sens trigonométrique).



Les angles r et γ vérifient les lois de Descartes de la réfraction :

$$\sin i = n \sin r \quad \text{et} \quad n \sin(r + 2\alpha) = \sin \gamma \quad (1,2)$$

21. Il existe aussi le cas où la surface est celle d'une autre lentille.

22. On aura l'occasion de le voir au moins en exercice...

La différence de marche géométrique au point M_{DA} (noté M pour alléger dans les calculs) est, en prenant garde aux trajets virtuels,

$$\delta_{geom}(M) = (SIJKM)_2 - (SIM)_1 = n IJ + n JK - KM + IM$$

Le calcul des diverses distances peut être effectué de beaucoup de façons. Par exemple, on peut travailler dans un repère (par intersection de droites...). Proposons une démarche exploitant le théorème des sinus dans des triangles :

- Théorème des sinus dans le triangle (ILJ) :

$$\frac{\sin \widehat{IJL}}{IL} = \frac{\sin \widehat{JLI}}{IJ} \quad \text{conduit à} \quad \frac{\cos(\alpha + r)}{e(I)} = \frac{\cos \alpha}{IJ} \quad (3)$$

- Théorème des sinus dans le triangle (IJK) :

$$\frac{\sin \widehat{IKJ}}{IJ} = \frac{\sin \widehat{JKI}}{JK} = \frac{\sin \widehat{KJI}}{IK} \quad \text{donne} \quad \frac{\cos(r + 2\alpha)}{IJ} = \frac{\cos r}{JK} = \frac{\sin(2r + 2\alpha)}{IK} \quad (4,5)$$

- Théorème des sinus dans le triangle (IKM) :

$$\frac{\sin \widehat{IKM}}{IM} = \frac{\sin \widehat{KMI}}{IK} = \frac{\sin \widehat{MIK}}{KM} \quad \text{donne} \quad \frac{\cos \gamma}{IM} = \frac{\sin(\gamma - i)}{IK} = \frac{\cos i}{KM} \quad (6,7)$$

Les relations (3) à (7) permettent d'expliciter la différence de marche géométrique sans approximation, soit après calcul élémentaire

$$\delta_{geom}(M) = \frac{n e(I) \cos \alpha}{\cos(r + \alpha)} \left[1 + \frac{\cos r}{\cos(r + 2\alpha)} \right] - \frac{e(I) \cos \alpha \sin(2r + 2\alpha)}{\cos(r + \alpha) \cos(r + 2\alpha)} \frac{\cos i - \cos \gamma}{\sin(\gamma - i)}$$

À ce point, on se place comme demandé dans la condition $\alpha \ll 1$ et on recherche l'ordre le plus bas non nul. L'épaisseur locale $e(I)$ est d'ordre 1 et on prend le reste, en facteur, à l'ordre 0. Or, les équations (1) et (2) montrent que pour $\alpha \ll 1$, les angles i et γ deviennent voisins donc, par règle de l'Hôpital,

$$\frac{\cos i - \cos \gamma}{\sin(\gamma - i)} \simeq \sin i$$

$$\text{Ainsi, } \delta_{geom}(M) \simeq \frac{2 n e(I)}{\cos r} - \frac{e(I) \sin(2r)}{\cos^2 r} \sin i = \frac{2 n e(I)}{\cos r} - \frac{n e(I) \sin(2r)}{\cos^2 r} \sin r$$

en exploitant l'équation (1). Or, $\sin(2r) = 2 \sin r \cos r$ donc

$$\text{Ainsi, } \delta_{geom}(M) \simeq \frac{2 n e(I)}{\cos r} - \frac{2 n e(I) \sin^2 r}{\cos r}$$

et on parvient au résultat attendu puisque $1 - \sin^2 r = \cos^2 r$.

Annexe 4 : Cap ou pas cap ?

Voici une liste non exhaustive de « **capacités** » relatives à ce chapitre dont le but est de vous permettre de mieux cerner ce que l'on peut attendre de vous, en plus de la simple connaissance des définitions, théorèmes et bases du cours bien sûr ! Que pensez-vous savoir faire et ne pas savoir faire ?

Justifier un droit éventuel à sommer des intensités d'ondes en un point.

Distinguer les problèmes de cohérence temporelle de ceux de cohérence spatiale.

Expliquer, sans calcul mais avec dessin, la possibilité de brouillage par perte de cohérence.

Justifier et exploiter les critères semi-quantitatifs de brouillage spatial et temporel ($|\Delta p(M)| > 1/2$).

Caractériser, sans calcul d'intensité, des points de brouillage (cf anticoincidence pour le doublet du sodium en cohérence temporelle, largeurs de brouillage de source large équi-lumineuse pour les trous de Young en cohérence spatiale...).

Déterminer des degrés de cohérence temporelle ou spatiale pour des cas concrets.

Distinguer contraste et luminosité ; expliciter un contraste.

Représenter soigneusement un interférogramme. Donner des exemples caractéristiques selon le spectre de la source (spectrométrie interférentielle).

Expliquer les origines possibles de largeur non nulle d'une raie spectrale.

Expliquer l'observation d'irisations pour les interférences en lumière blanche, ainsi que le spectre cannelé ; déterminer les longueurs d'onde de cannelures.

Expliquer la synthèse d'ouverture.

Identifier l'existence d'un effet de localisation des interférences.

Distinguer division du front d'ondes et division d'amplitude. Justifier l'intérêt de cette dernière.

Obtenir une surface de localisation (par raisonnement en division d'amplitude).

Justifier les dénominations : « anneaux d'égale inclinaison », « franges d'égale épaisseur ».

Réaliser des manipulations/mesures avec un interféromètre de Michelson (ne s'apprend qu'en TP...).

Construire soigneusement des trajets de rayons dans un interféromètre de Michelson (grande figure colorée, sans faire déborder quoique ce soit de la page !).

Positionner et exploiter des sources secondaires ; justifier le passage au schéma équivalent à deux miroirs fictifs.

Discuter/identifier l'évolution d'anneaux vus sur un écran en fonction du chariotage (sens de déplacement, effet de resserrement, de taille apparente...).

Expliquer, figure à l'appui, la localisation des interférences avec une source étendue pour l'interféromètre de Michelson en lame d'air. Préciser la zone de localisation.

Démontrer rapidement l'expression de la différence de marche associée aux anneaux d'égale inclinaison (Haidinger) ; obtenir les rayons d'anneaux, discuter leur évolution en fonction de e...

Justifier complètement chaque partie (éclairage, projection...) du montage d'observation des anneaux d'égale inclinaison (à connaître!!).

Expliquer la spectrométrie interférentielle avec un interféromètre de Michelson.

Préciser la zone de localisation des franges d'égale épaisseur (Fizeau).

Démontrer rapidement l'expression de la différence de marche approchée associée aux franges d'égale épaisseur.

Justifier complètement chaque partie (éclairage, projection avec la condition $D \geq 4f'$ avec une lentille...) du montage d'observation des franges d'égale épaisseur (à connaître!!).

Obtenir l'interfrange sur un écran (en tenant compte du grandissement introduit par le dispositif de projection).

Identifier un sens de défilement de franges d'égale épaisseur (en suivant l'arête du coin d'air...).

Démontrer et appliquer la formule fondamentale des réseaux, aussi bien en transmission qu'en réflexion.

Comparer les spectroscopies à prisme et à réseau.

Étudier qualitativement et quantitativement l'effet de recouvrement d'ordres en lumière polychromatique.

...