

# Physique non linéaire

Jean-Baptiste Manneville

Prépa Agreg ENS Paris-Saclay 2020-2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Oscillateurs</b>	<b>4</b>
1.1	Oscillateurs couplés . . . . .	4
1.1.1	Exemples . . . . .	4
1.1.2	Cas général . . . . .	6
1.2	Oscillateurs non linéaires . . . . .	7
1.2.1	Linéarité vs. non linéarité . . . . .	7
1.2.2	Exemples d'oscillateurs non linéaires . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Systèmes dynamiques</b>	<b>12</b>
2.1	Dynamiques linéaire et non linéaire, définitions . . . . .	12
2.1.1	Linéarité vs. non linéarité . . . . .	12
2.1.2	Systèmes dynamiques . . . . .	13
2.1.3	Intégrabilité des systèmes hamiltoniens : système intégrable, invariants, systèmes séparables . . . . .	15
2.1.4	Adimensionnement . . . . .	15
2.2	Etude de stabilité linéaire . . . . .	16
2.2.1	Etat de base et stabilité d'un état d'équilibre, points fixes . . . . .	16
2.2.2	Analyse de la stabilité d'un point fixe . . . . .	16
2.2.3	Analyse de stabilité linéaire en dimension 2 . . . . .	18
2.2.4	Cas des systèmes dissipatifs . . . . .	19
2.3	Exemples . . . . .	19
2.3.1	Oscillateur harmonique . . . . .	19
2.3.2	Pendule pesant . . . . .	20
2.3.3	Autres exemples . . . . .	20

<b>3</b>	<b>Bifurcations</b>	<b>24</b>
3.1	Notion de bifurcation . . . . .	24
3.1.1	Stabilité d'un point fixe . . . . .	24
3.1.2	Approche de Landau . . . . .	24
3.2	Bifurcations locales de codimension 1 . . . . .	26
3.2.1	Théorie des formes normales . . . . .	26
3.2.2	Bifurcations stationnaires (1 variable) . . . . .	26
3.2.3	Bifurcations de Hopf (2 variables, solutions oscillantes) . . . . .	28
3.2.4	Analogie avec les transitions de phase : ralentissement critique . . . . .	28
3.3	Exemples . . . . .	29
3.3.1	Bille sur cerceau tournant avec frottements . . . . .	29
3.3.2	Lame ressort (barre d'Euler) et oscillateur de Duffing . . . . .	29
3.3.3	Autres exemples . . . . .	30
<b>4</b>	<b>[Historique et exemples]</b>	<b>31</b>
4.1	Historique des théories des systèmes dynamiques et du chaos . . . . .	31
4.2	Exemples classiques de systèmes dynamiques . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Systèmes chaotiques</b>	<b>32</b>
5.1	Caractéristiques d'un système chaotique . . . . .	32
5.1.1	Exemples de systèmes chaotiques . . . . .	32
5.1.2	Caractérisation des systèmes chaotiques . . . . .	33
5.1.3	Conditions pour le chaos déterministe . . . . .	33
5.2	Chaos dans les systèmes hamiltoniens . . . . .	34
5.2.1	Systèmes à une fréquence, effets des non linéarités . . . . .	34
5.2.2	Systèmes à deux fréquences . . . . .	36
5.2.3	Section de Poincaré et application de premier retour . . . . .	38
5.2.4	Exemple de la boussole dans un champ fixe et un champ tournant . . . . .	38
5.3	Chaos dans les systèmes dissipatifs . . . . .	41
5.3.1	Effet des frottements . . . . .	41
5.3.2	Instabilité des cycles limites . . . . .	42
5.3.3	Instabilité des trajectoires, exposants de Lyapunov . . . . .	44

5.3.4	Dimension d'un attracteur : autosimilarité et dimension fractale d'un attracteur étrange . . . . .	44
5.3.5	Scénarios de transition vers le chaos . . . . .	45
5.3.6	Exemples et illustrations . . . . .	45

# Chapitre 1

## Oscillateurs

Système complexe = superposition d'oscillateurs.

### 1.1 Oscillateurs couplés

Oscillateurs suivant la loi de Hooke (linéaire), couplés : le mouvement général du système couplé est la superposition d'oscillations harmoniques aux fréquences propres  $\omega_i$ .

Exemples : masses en déplacement horizontal couplé par des ressort, pendule double, chaîne de pendules couplés par un fil de torsion, molécule de  $\text{CO}_2$ ...

#### 1.1.1 Exemples

- 2 masses et 3 ressorts

- Système de deux masses  $m_1$  et  $m_1$  (déplacements  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  par rapport à leurs positions d'équilibre) couplés par trois ressorts de raideur  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k_3$  d'allongements respectifs  $x_1$ ,  $x_2 - x_1$  et  $x_2$ .

- Mise en équation (PFD ou formalisme lagrangien) :  $M\ddot{x} = -Kx$  où  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  et

$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$  est appelée **matrice d'inertie** (matrice symétrique) et

$K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix}$  est appelée **matrice de rappel** (matrice symétrique).

- Solution générale : on cherche  $\vec{x}(t)$  sous la forme  $\vec{x}(t) = \text{Re}(\vec{a}e^{i\omega t})$  avec  $\vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{-i\delta_1} \\ \alpha_2 e^{-i\delta_2} \end{pmatrix}$

donc  $\vec{a}$  vérifie  $(K - \omega^2 M)\vec{a} = \vec{0}$ . Pour avoir une solution non triviale ( $\vec{a} \neq \vec{0}$ ), il faut  $\det(K - \omega^2 M) = 0$  (**équation caractéristique du système couplé** = second degré en  $\omega^2$ )  $\Rightarrow$

deux racines  $\omega_1$  et  $\omega_2$  = deux **pulsations propres** du système couplé auxquelles correspondent deux modes propres  $\vec{x}_i(t) = \text{Re}(\vec{a}_i e^{i\omega_i t})$  avec  $i = 1, 2$ . La solution générale s'écrit comme **superposition** des deux modes propres :  $\vec{x}(t) = \sum_{i=1,2} \lambda_i \vec{x}_i$ .

- Cas particulier (1) : deux masses égales  $m_1 = m_2 = m$ , trois ressorts identiques  $k_1 = k_2 = k_3 = k$ . Equation caractéristique  $(2k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0 \Rightarrow$  deux pulsations propres  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ . Deux modes propres, premier mode propre  $\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta)$  = les deux masses

oscillent en phase à la même amplitude, deuxième mode propre  $\vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} A \\ -A \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta)$  = les deux masses oscillent en opposition de phase à la même amplitude (voir Figures 1 et 2).

Solution générale :  $\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)$  (Fig. 3).

Remarque : 4 constantes d'intégration correspondant aux deux équations différentielles du second ordre, soit 4 **degrés de liberté au sens des systèmes dynamiques**, voir § 2.1.

Coordonnées normales : coordonnées dans la base des vecteurs propres de la matrice  $K$ ,  $\xi_1 = (x_1 + x_2)/2$  et  $\xi_2 = (x_1 - x_2)/2$ . et  $K = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 3k \end{pmatrix}$  est diagonale dans cette base. Premier

mode propre  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta)$ , deuxième mode propre  $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta)$ . Coordonnées **normales = découplées**.

- Cas particulier (2) : deux masses égales  $m_1 = m_2 = m$ , couplage faible  $k_1 = k_3 = k \gg k_2$ . Equation caractéristique  $(k + k_2 - m\omega^2)^2 - k_2^2 = 0 \Rightarrow$  deux pulsations propres  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0 - \varepsilon$  et  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2k_2}{m}} = \omega_0 + \varepsilon$  avec  $\varepsilon = (\omega_1 - \omega_2)/2 \ll \omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ . Solution générale en

notation complexe :  $\vec{z}(t) = \left[ C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\varepsilon t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\varepsilon t} \right] e^{i\omega_0 t}$ . En supposant  $C_1 = C_2 = A/2 \in \mathbb{R}$ , on trouve :  $x_1(t) = A \cos(\varepsilon t) \cos(\omega_0 t)$  et  $x_2(t) = A \sin(\varepsilon t) \cos(\omega_0 t)$ , battements rapides (fréquence élevée  $\omega_0$ ) dans une enveloppe lente (fréquence faible  $\varepsilon$ ), déphasage  $\pi/2$  entre  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ . Coordonnées normales  $\xi_1(t) = 1/2 \cos(\omega_1 t)$  et  $\xi_2(t) = 1/2 \cos(\omega_2 t)$ , superposition de deux ondes aux fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

### • Pendule double

- Premier pendule de longueur  $OM_1 = L_1$ , masse  $m_1$ , angle avec la verticale  $\theta_1$ , et deuxième pendule de longueur  $M_1M_2 = L_2$ , masse  $m_2$ , angle avec la verticale  $\theta_2$  (voir Fig. 24).

- Formalisme lagrangien :

Énergie potentielle =  $U(\theta_1, \theta_2) = (m_1 + m_2)gL_1(1 - \cos \theta_1) + m_2gL_2(1 - \cos \theta_2)$

Energie cinétique =  $T(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \frac{1}{2}m_1L_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(L_1^2\dot{\theta}_1^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + L_2^2\dot{\theta}_2^2)$

- Petites oscillations, linéarisation :

Lagrangien  $\mathcal{L} = T - U = \left[ \frac{1}{2}m_1 L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 (L_1^2 \dot{\theta}_1^2 + 2L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + L_2^2 \dot{\theta}_2^2) \right] - \left[ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gL_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}m_2 gL_2\theta_2^2 \right]$ , équations du mouvement  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} \Rightarrow M\ddot{\theta} = -K\theta$  où

$$\vec{\theta}(t) = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \text{ et }$$

$$M = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)L_1^2 & m_2 L_1 L_2 \\ m_2 L_1 L_2 & m_2 L_2^2 \end{pmatrix} \text{ est appelée } \mathbf{matrice d'inertie} \text{ (matrice symétrique) et }$$

$$K = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2)gL_1 & 0 \\ 0 & m_2 gL_2 \end{pmatrix} \text{ est appelée } \mathbf{matrice de rappel} \text{ (matrice symétrique).}$$

- Solution générale : identique au cas des deux masses couplées par trois ressorts, deux pulsations propres données par l'équation caractéristique  $\det(K - \omega^2 M) = 0$ .

- Cas particulier : masses égales  $m_1 = m_2 = m$ , longueurs égales  $L_1 = L_2 = L$ . Equation caractéristique :  $\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \Rightarrow$  deux pulsations propres  $\omega_1^2 = (2 - \sqrt{2})\omega_0^2$  et  $\omega_2^2 = (2 + \sqrt{2})\omega_0^2$ . Solution générale = **superposition** des deux modes propres

$$\theta(t) = A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t - \delta_2)$$

### 1.1.2 Cas général

#### • Hypothèses

Système à  $n$  **degrés de liberté** au sens de la mécanique ( $N = 2n$  degrés de liberté au sens des systèmes dynamiques, voir § 2.1, coordonnées généralisées  $\vec{q} = (q_1, \dots, q_n)$ ), **holonome** (pas de contraintes), **conservatif** (énergie potentielle  $U(q)$ ).

#### • Formulation lagrangienne

Energie potentielle linéarisée autour d'une position d'équilibre stable :  $U(q) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} K_{jk} q_j q_k$  avec

$$K_{jk} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_j \partial q_k}$$

Energie cinétique :  $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} A_{jk}(q) \dot{q}_j \dot{q}_k$ , et à l'ordre 0,  $A_{jk}(q) = \text{cte} = M_{jk}$  donc  $T(q) =$

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k} M_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Lagrangien :  $\mathcal{L} = T(\dot{q}) - U(q)$

#### • Equations du mouvement

$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \Rightarrow n$  équations de Lagrange  $\sum_j M_{ij} \ddot{q}_j = -\sum_j K_{ij} q_j$ , soit sous forme matricielle :

$$M\ddot{q} = -Kq \text{ où } q = \vec{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

$M$  est appelée **matrice d'inertie** (matrice symétrique) et  $K$  est appelée **matrice de rappel** (matrice symétrique).

### • Solutions, modes propres

On cherche la solution  $\vec{q}(t)$  sous la forme  $\vec{q}(t) = \text{Re}(\vec{z}(t))$  avec  $\vec{z} = \vec{a}e^{i\omega t}$  donc  $\vec{a}$  vérifie  $(K - \omega^2 M)\vec{a} = \vec{0}$ . Pour avoir une solution non triviale ( $\vec{a} \neq \vec{0}$ ), il faut  $\det(K - \omega^2 M) = 0$  (**équation caractéristique du système couplé** = polynôme de **degré**  $n$  en  $\omega^2$ )  $\Rightarrow n$  racines,  $n$  **pulsations propres** du système couplé  $\omega_i$  auxquelles correspondent  $n$  modes propres  $\vec{q}_i(t) = \text{Re}(\vec{a}_i e^{i\omega_i t})$  avec  $i = 1 \dots n$ . La solution générale s'écrit comme **superposition** des  $n$  modes propres :  $\vec{q}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{q}_i$ .

### • Coordonnées normales

Mode  $i$  oscillant à la pulsation  $\omega_i$ :  $\vec{q}_i(t) = \text{Re}(\vec{a}_i e^{i\omega_i t}) = \vec{a}_i \cos(\omega_i t - \delta_i)$  où  $\vec{a}_i$  vérifie  $K\vec{a}_i = \omega_i^2 M\vec{a}_i$  avec  $i = 1 \dots n$ .

Les vecteurs propres  $\vec{a}_i$  forment une base pour l'espace des vecteurs  $\vec{q}(t)$  :  $\vec{q}(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{a}_i$  où les coordonnées  $\xi_i$  de  $\vec{q}(t)$  dans cette base sont appelées **coordonnées normales**.

Les coordonnées normales vérifient  $\ddot{\xi}_i = -\omega_i^2 \xi_i$  donc **oscillent indépendamment** chacune à la pulsation  $\omega_i$ .

### • Exemple : trois pendules couplés par des ressorts (Fig. 5)

- Hypothèses : longueurs identiques  $L$ , masses identique  $m$ , ressorts de couplage identiques  $k$ , unités naturelles  $m = 1$  et  $L = 1$ .

- Mise en équation : trois angles  $\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$  vérifient  $M\ddot{\theta} = -K\theta$  avec  $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et

$$K = \begin{pmatrix} g+k & -k & 0 \\ -k & g+2k & -k \\ 0 & -k & g+k \end{pmatrix} \Rightarrow \text{équation caractéristique } \det(K - \omega^2 M) = 0.$$

- Trois pulsations propres :  $\omega_1^2 = g$ ,  $\omega_2^2 = g+k$ ,  $\omega_3^2 = g+3k$ , mode de pulsation  $\omega_1$  = les trois pendules oscillent en phase à la même amplitude, mode de pulsation  $\omega_2$  = pendule central immobile, deux pendules extérieurs en opposition de phase de même amplitude, mode de pulsation  $\omega_3$  = deux pendules extérieurs en phase de même amplitude, pendule central en opposition de phase et d'amplitude double. Voir Fig. 5.

## 1.2 Oscillateurs non linéaires

### 1.2.1 Linéarité vs. non linéarité

- En général les systèmes dynamiques sont **non linéaires**, la linéarité est un cas particulier.

- **Principe de superposition** : pour un système linéaire, on peut superposer les solutions; un système non linéaire n'obéit pas au principe de superposition.



- Systèmes **chaotiques** : la non linéarité est un ingrédient **nécessaire mais non suffisant** pour qu'un système soit chaotique (voir § 5.1 : en plus de non linéarités, il faut que le nombre de degré de liberté  $N$  au sens des systèmes dynamiques soit tel que  $N \geq 3$  pour qu'un système dissipatif soit chaotique).

- Exemples : oscillateur harmonique (linéaire), pendule pesant (non linéaire, non chaotique), problème à deux corps en gravitation (non linéaire, non chaotique, soluble), pendule amorti forcé (non linéaire, chaotique), pendule double (non linéaire, chaotique).

### 1.2.2 Exemples d'oscillateurs non linéaires

#### • Pendule pesant non linéaire

- Mise en équation :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$  avec  $\omega_0^2 = g/L$

1er ordre linéaire :  $\sin \theta \approx \theta$  et  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t - \delta)$  (oscillations sinusoïdales)

Ordre suivant :  $\sin \theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6}$ , le terme non linéaire en  $\theta^3$  va faire apparaître l'**harmonique**  $3\omega_0$  car  $\cos^3(\omega_0 t) = \frac{1}{4}(\cos(3\omega_0 t) + 3\cos(\omega_0 t))$

- Réécriture en prenant comme unité de temps  $\frac{1}{\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi}$  :  $\ddot{\theta} = -\theta + \frac{\theta^3}{6}$  avec les conditions initiales  $\theta(t=0) = \varepsilon \ll 1$  et  $\dot{\theta}(t=0) = 0$  (on note  $t' = \omega_0 t$  par  $t$  dans la suite, ce qui revient à prendre  $\omega_0 = 1$ ).

- Développement perturbatif simple (fréquence  $\omega = \omega_0$ , indépendante de l'amplitude  $\varepsilon$ ) :  $\theta(t) = \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\theta_3 + \dots$

Ordre en  $\varepsilon$  :  $\ddot{\theta}_1 = -\theta_1 \Rightarrow \theta_1 = \cos t$

Ordre en  $\varepsilon^2$  :  $\theta_2 = 0$

Ordre en  $\varepsilon^3$  :  $\ddot{\theta}_3 + \theta_3 = \frac{\theta_1^3}{6} = \frac{1}{24} \cos 3t + \frac{1}{8} \cos t$  : le terme résonant en  $\cos t$  (**terme séculaire**) peut faire diverger la réponse  $\Rightarrow$  il faut tenir compte du fait que l'amplitude peut dépendre de la fréquence (ou que la fréquence peut dépendre de l'amplitude)  $\Rightarrow$  nécessité du développement perturbatif double ci-dessous.

- Développement perturbatif double (fréquence  $\omega = \omega(\varepsilon)$ , dépend de l'amplitude  $\varepsilon$ ) :  $\theta(t) = \varepsilon\theta_1(\omega t) + \varepsilon^2\theta_2(\omega t) + \varepsilon^3\theta_3(\omega t) + \dots$  et  $\omega(\varepsilon) = 1 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2$  (à l'ordre 2, et avec  $\omega_0 = 1$  à l'ordre 0). Changement de variable  $\tau = \omega t$  donc  $\ddot{\theta} = \omega^2 \frac{d^2\theta}{d\tau^2} = -\theta + \frac{\theta^3}{6}$  puis développement à l'ordre 3 en  $\varepsilon$  en supposant  $\theta_2 = 0$  et  $\omega_1 = 0$  (hypothèses vérifiées *a posteriori*) :

Ordre en  $\varepsilon$  :  $\frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} = -\theta_1 \Rightarrow \theta_1(\tau) = \cos \tau$

Ordre en  $\varepsilon^2$  : vérifié car  $\theta_2 = 0$  et  $\omega_1 = 0$

Ordre en  $\varepsilon^3$  :  $\frac{d^2\theta_3}{d\tau^2} + \theta_3 = -2\omega_2 \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} + \frac{\theta_1^3}{6} = \frac{1}{24} \cos 3\tau + (\frac{1}{8} + 2\omega_2) \cos \tau$  : cette fois-ci, le terme résonant en  $\cos \tau$  peut s'annuler si  $\omega_2 = -1/16$  (=condition de solvabilité)

Dans ce cas, en utilisant les changements de variables sur le temps et en notant l'amplitude  $\varepsilon = \theta_0$  :  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0(1 - \frac{\theta_0^2}{16})t) + \frac{\theta_0^3}{192}(\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)) \Rightarrow$  **enrichissement harmonique** (fréquence  $3\omega_0$ ) et la **fréquence dépend de l'amplitude**.

- **Formule de Borda** (perte d'isochronisme des petites oscillations) : la période  $T$  des oscillations dépend de l'amplitude  $\theta_0$  :  $T(\theta_0) \simeq T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16})$  où  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  est la période des oscillations linéaires.

- Approche énergétique du pendule simple : énergie mécanique  $\mathcal{H} = T + U = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2(1 - \cos \theta) = \text{cte} = K$ . La période des oscillations s'écrit comme  $T = 4 \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos \theta - \cos \theta_m)}}$  où  $\theta_m$  est l'amplitude maximale des oscillations, soit après calcul (changement de variable  $\sin \phi = \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_m}{2}$ )  $T(\theta_0) \simeq T_0(1 + \frac{\theta_0^2}{16})$  pour les petites amplitudes  $\theta_m \ll 1$  (on retrouve la formule de Borda).

### • Oscillateur amorti par frottements solide ou visqueux

Amortissement **fluide** (frottements visqueux) :  $\vec{F} = -\alpha \vec{v} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$  (linéaire)

Amortissement **solide** : composante tangentielle de la force de frottement  $F_t = \left\| \vec{F} \right\|_t = \mu_d mg$  (frottement dynamique si il y a mouvement) ou  $F_t = \left\| \vec{F} \right\|_t < \mu_s mg$  (frottement statique si il n'y a pas mouvement)  $\Rightarrow m\ddot{x} = -kx + \epsilon \mu mg$  avec  $\epsilon = \pm 1$  et  $\epsilon \dot{x} < 0$  (non linéaire)

### • Pendule amorti par frottements visqueux

Linéaire :  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - \alpha \dot{\theta}$

Linéaire forcé :  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - \alpha \dot{\theta} + F(t)$

Non linéaire :  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta - \alpha \dot{\theta}$

Non linéaire forcé (= pendule amorti forcé ou 'PAF') :  $\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin \theta - \alpha \dot{\theta} + F(t) \Rightarrow$  chaotique

### • Oscillateur paramétrique, résonance paramétrique

Equation du pendule  $\ddot{\theta} + \omega_0^2(t)\theta = 0$  où la pulsation  $\omega_0(t)$  dépend du temps (par exemple : pendule de longueur variable  $L(t)$  :  $\omega_0^2(t) = g/L(t)$ , balançoire, botafumeiro).

Cas particulier de **l'équation de Mathieu-Hill** :  $\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 + h \cos(2\omega t))\theta = 0$  (sans amortissement) et  $\ddot{\theta} + \alpha \dot{\theta} + \omega_0^2(1 + h \cos(2\omega t))\theta = 0$  (avec amortissement). Pour le cas sans amortissement, on cherche les solutions sous la forme  $\theta(t) = e^{\mu t} \cos(\omega t + \phi)$  :  $\mu$  vérifie  $\mu^4 + 2(\omega_0^2 + \omega^2)\mu^2 + (\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{h^2}{4}\omega_0^4 = 0$  (second degré en  $\mu^2$ ), **solution instable** si  $\mu^2 > 0 \Rightarrow h > 2 \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right|$ .

### • Oscillateur de Duffing (voir aussi § 2.3, 3.3 et 5.3.6)

- Equation générale de l'oscillateur de Duffing amorti et forcé de la forme :  $\ddot{x} + r\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f \cos \omega t$

- Exemples de réalisations expérimentales :

➤ **Pendule élastique (non linéarité de raideur)** : masse  $m$  contrainte de se déplacer horizontalement sous l'effet d'une force  $F$  et attachée par deux ressorts verticaux (raideur  $k$ , longueur au repos  $L_0$ ), abscisse de la masse  $m$  notée  $x = yL$  ( $x = 0$  quand la masse est à la verticale de ses points d'attache,  $2L$  est la distance verticale qui séparent les deux points d'attache,  $L_0 = \lambda L$ ). L'abscisse adimensionnée  $y = x/L$  vérifie  $m\ddot{y} + 2ky(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y^2}}) = F/L$ , soit  $m\ddot{y} + K(y)y = F/L$  où

$K(y) = 2k(1 - \frac{\lambda}{\sqrt{1+y^2}})$  est la raideur non linéaire. Dans le cas de petites perturbations,  $x \ll L$  soit  $y \ll 1$ , et  $\lambda = L_0/L \ll 1$ , l'équation du pendule élastique devient :  $\ddot{y} + \omega_0^2(1 - \lambda)y + \frac{\omega_0^2\lambda}{2}y^3 = \frac{F}{mL}$  avec  $\omega_0^2 = 2k/m$ . Après adimensionnement ( $\tau = \omega t$  avec  $\omega^2 = \omega_0^2(1 - \lambda)$ ,  $f = \frac{F}{mL\omega^2}$  et  $\epsilon = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$ ), on retrouve l'équation de l'oscillateur de Duffing non amorti :  $\frac{d^2y}{d\tau^2} + y + \epsilon y^3 = f$

➤ **Pendule élastique avec amortissement fluide** : masse  $m$  oscille dans le plan vertical autour d'un pivot de longueur  $L$  couplé à deux ressorts horizontaux de raideur  $k$ , dans un liquide visqueux (voir Fig. 6). Equation sur l'angle  $\theta$  par rapport à la verticale :  $mL^2\ddot{\theta} = mgL\sin\theta - k\theta - \alpha\dot{\theta}$ . Pour les petites oscillations,  $\sin\theta \simeq \theta - \theta^3/6$  et on retrouve l'équation de l'oscillateur de Duffing amorti. Lorsque  $L$  augmente, on a une **bifurcation super-critique** (voir §3.2) avec deux positions d'équilibre.

➤ **Electronique** : deux amplificateurs opérationnels intégrateurs ( $\ddot{x} \rightarrow \dot{x} \rightarrow x$ ) et un quadrupôle non linéaire ( $x \rightarrow x^3$ ) (=multiplicateur/suiveur/multiplicateur :  $x \rightarrow x^2$  puis  $x^2 \rightarrow x^3$ ), voir Fig. 6.

➤ **Lame ressort** (voir § 3.3).

- Mise en équation de l'oscillateur de Duffing sous forme d'un **système dynamique** (voir § 2.1

et 5.3.6) : 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ry - \alpha x - \beta x^3 + f \cos z \\ \dot{z} = \omega \end{cases}$$
 , où on a utilisé l'astuce classique d'introduire une

nouvelle variable  $z$  pour ramener un **système non autonome** (dépendant explicitement du temps) à un **système autonome**. Ce système de trois équations différentielles et 5 paramètres ( $r, \alpha, \beta, f, \omega$ ) peut être ramené à un système à 3 paramètres par **adimensionnement** de  $x$  et  $t$  ( $\tilde{x} = ax$ ,  $\tilde{t} = bt$ )  $\Rightarrow$  système complexe, non linéaire à  $N \geq 3$  degrés de liberté  $\Rightarrow$  chaos possible (voir Fig. 48), bifurcation super-critique : si  $r = 0$ , pas d'amortissement = **chaos hamiltonien** (voir §5.2), si  $r \neq 0$ , amortissement/dissipation = **chaos dissipatif** (voir § 5.3).

➤ Cas particulier (1) : oscillateur de **Duffing sans amortissement** ( $r = 0$ ) et **libre** (sans forçage,  $f = 0$ ) :  $\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = 0$ . Solution par un développement perturbatif double de l'amplitude  $y(t)$  et de la fréquence  $\omega^2$  :  $y(t) = y_0 + \epsilon y_1 + \epsilon^2 y_2 + \dots$  et  $\omega^2 = 1 + \epsilon \omega_1^2 + \epsilon^2 \omega_2^2 + \dots$  (avec l'adimensionnement  $\omega_0^2 = 1$ ). Après un calcul similaire à celui du pendule pesant et en utilisant la **condition de solvabilité** pour éliminer le terme séculaire (résonant à la fréquence  $\omega$ )  $\omega_1^2 = 3A^2/4$  où  $A$  est l'amplitude à l'ordre 0 ( $y_0(t) = A \cos \omega t$ ), on trouve :  $y(t) = A \cos \omega t + \frac{\epsilon}{32} A^3 \cos 3\omega t$  et  $\omega(A)^2 = 1 + 3\epsilon A^2/4 \Rightarrow$  **enrichissement harmonique** et fréquence dépend de l'amplitude = **non isochronisme** :  $\omega$  augmente si  $\epsilon > 0$  (rigidification du ressort avec l'amplitude) et  $\omega$  diminue si  $\epsilon < 0$  (ramollissement du ressort avec l'amplitude). Remarque : dans le cas du pendule élastique,  $\epsilon = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)} > 0$  car  $\lambda \ll 1$ .

➤ Cas particulier (2) : oscillateur de **Duffing sans amortissement** ( $r = 0$ ) et **avec forçage périodique**,  $f = F \cos \Omega t$  :  $\ddot{y} + y + \epsilon y^3 = F \cos \Omega t$ . Solution par un développement perturbatif au premier ordre en  $\epsilon$  :  $y(t) = y_0 + \epsilon y_1$ ,  $\Omega^2 = 1 + \epsilon \Omega_1^2$  et  $F = \epsilon F_0$ . Après un calcul similaire au précédent, la **condition de solvabilité** (élimination du terme séculaire) donne  $\frac{3}{4}\epsilon A^3 - A(\Omega^2 - 1) = F \Rightarrow$  **non unicité** de  $A$  ( $A$  est l'amplitude à l'ordre 0,  $y_0(t) = A \cos \Omega t$ ), **résonance oblique**

$A$  en fonction de  $\Omega$  (voir Fig. 7). Si  $F = 0$  (Duffing libre), on retrouve bien  $\Omega(A)^2 = 1 + 3\epsilon A^2/4$ . Si  $\epsilon = 0$  (oscillateur linéaire), on retrouve la résonance classique  $|A| = \frac{F}{|\Omega^2 - 1|}$ .

- **Oscillateur de Van der Pol** (voir aussi § 2.3, 3.3 et 5.3.6)

- Equation générale de l'**oscillateur de Van der Pol** :  $\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0$

- Réalisations expérimentales en électronique de résistances négatives amplificateur opérationnel, diode à effet tunnel (voir Fig. 8).

- Mise en équation de l'oscillateur de Van der Pol sous forme d'un système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + (\epsilon - x^2)y \end{cases} \Rightarrow \text{bifurcation de Hopf super-critique, apparition d'un cycle limite}$$

(voir § 3.3)

- **Autres exemples d'oscillateurs non linéaires**

Oscillations de relaxation (vase de Tantale), cinétique chimique (réaction de Beluzov-Zhabotinsky), cycle cardiaque, geysers, systèmes proies/prédateurs, dynamique des populations et des écosystèmes, systèmes économiques, climat, inversions du champ magnétique terrestres... (voir §2.3 et 5).

# Chapter 2

## Systemes dynamiques

### 2.1 Dynamiques linéaire et non linéaire, définitions

#### 2.1.1 Linéarité vs. non linéarité

- **Systèmes linéaires et non linéaires**

- Système **linéaire** = les effets sont **proportionnels** aux causes qui les créent, système sans surprise, obéit au **principe de superposition**. Système **non linéaire** = pas de proportionnalité entre effets et causes, **amplifications et saturations** non linéaires, n'obéit pas au principe de superposition (rétroaction et couplages non linéaires). La plupart des systèmes physiques sont non linéaires (linéarité = exception, non linéarité = règle).

- Système non linéaire **régulier** = peut se ramener à un système linéaire par linéarisation. Système **chaotique** : si non linéaire et  $N \geq 3$  degrés de liberté.

- **Prédictibilité et déterminisme**

- But: prédire/anticiper le futur avec une bonne précision et à plus ou moins long terme en connaissant les conditions initiales et la loi d'évolution.

- Problème **déterministe** (nombre de degrés de liberté  $N \leq 2$ , voir § 2.1 ci-dessous) : il existe un état final unique **prédictible**. Si  $N \geq 3$ , système **prédictible à court terme** mais **imprédictible à long terme** (sensibilité aux conditions initiales = SCI)

- Remarque : approche statistique, ok à l'équilibre, complexe hors équilibre

- **Systèmes non distribués/confinés et distribués/étendus**

- Systèmes **confinés**, non distribués dans l'espace : dimension finie  $N < \infty$  (cas que l'on considérera dans la suite), variables **discrètes**  $\vec{X}(t) = (X_i(t))_{i=1\dots N}$ , **temps continu**  $(t, \frac{d}{dt}, \frac{d^2}{dt^2}, \dots) \Rightarrow$  système d'équations différentielles, ou **temps discret**  $(t_i, \vec{X}(t_{i+1}) - \vec{X}(t_i), \dots) \Rightarrow$  applications discrètes (itérations, 'mapping').

- Systèmes **étendus**, distribués dans l'espace : dimension infinie  $N = \infty$ , variables **continues** dans l'espace  $X(\vec{r}, t)$ , temps **continu**  $(t, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \dots) \Rightarrow$  système d'équations aux dérivées partielles différentielles couplées, ou temps **discret**  $(t_i) \Rightarrow$  réseaux d'itérations couplées.

### 2.1.2 Systèmes dynamiques

- **Définition d'un système dynamique**

- Un système dynamique est défini par une **loi d'évolution**  $\mathcal{F}$  (champ de vecteurs) agissant sur le **vecteur d'état**  $\vec{X}(t)$  de dimension  $N$  et par la donnée des  $N$  ( $< \infty$ ) **conditions initiales**  $\vec{X}(t=0)$ , soit :

$$\dot{\vec{X}}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}(t), r, t) \text{ où } r \text{ est un paramètre de contrôle (voir § 3)}$$

- Si le temps n'apparaît pas explicitement, on parle de système dynamique **autonome**.

- Existence des solutions : si le système dynamique est **linéaire**, il existe une **unique solution** connaissant les conditions initiales; si le système dynamique est **non linéaire**, la solution n'est pas forcément unique, mais il y a unicité de la solution localement dans l'espace des  $\vec{X}$  et dans le temps.

- **Représentation d'un système dynamique**

- **Espace des phases** : espace de dimension  $N$  auquel appartiennent les vecteurs d'état  $\vec{X}(t) = (X_1(t), X_2(t) \dots X_N(t))$  à  $t$  donné. La loi d'évolution  $\mathcal{F}$  est un **champ de vecteurs** représentant l'évolution locale de  $\vec{X}(t)$ .

- **Portrait de phase** : évolution du système à partir d'un état  $\vec{X}(t=0) \rightarrow \vec{X}(t)$ . Les trajectoires dans l'espace des phase sont appelées **orbites** : orbites **ouvertes** (= trajectoire 'passante' = non stationnaire, non périodique), orbites **fermées** (= trajectoire périodique), et **points fixes** (= état stationnaire,  $\vec{X}^*$  point fixe de l'espace des phases  $\Rightarrow \mathcal{F}(\vec{X}^*) = \vec{0}$ ).

➤ **Flot** = ensemble des orbites dans l'espace des phases (infinité d'orbites), représentation de l'application  $\vec{X}(t) \rightarrow \vec{X}(t+dt)$ , les orbites sont orientées par une flèche dans le sens du temps. Deux orbites **ne peuvent pas se croiser sauf en un point fixe** (conséquence du déterminisme, mêmes conditions initiales  $\Rightarrow$  même trajectoire).

➤ **Isoclines** = lieux de l'espace des phase où les pentes sont identiques

➤ **Séparatrices** = trajectoires qui séparent les zones de l'espace des phases où les orbites sont fermées (régimes périodiques, résonances, oscillations) et les zones où les orbites sont ouvertes (trajectoires passantes, rotations)

- **Degrés de liberté** : le nombre de degré de liberté (au sens des systèmes dynamiques) est égal à la **dimension de l'espace des phases**.

➤ Remarque : la notion de degré de liberté définie ici est différente de celle définie en mécanique.

➤ Exemple du mouvement dit 'à un degré de liberté' en mécanique :  $N = 2$  pour les systèmes dynamiques,  $\vec{X} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$  où  $q$  est la position et  $p$  est la quantité de mouvement.

➤ Exemple de l'oscillateur harmonique, ressort de raideur  $k$  :  $\dot{\vec{X}} = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ -kq \end{pmatrix} = \mathcal{F}(\vec{X})$ .

➤ Exemple d'un système de  $n$  particules en 3D :  $3n$  degrés de liberté en mécanique,  $N = 6n$  degrés de liberté pour les systèmes dynamiques ( $6n$  équations de Hamilton et  $6n$  conditions initiales).

- **Points fixes** :  $\vec{X}^*$  est un point fixe du système dynamique  $\mathcal{F}$  si  $\vec{X}^* = \mathcal{F}(\vec{X}^*) = \vec{0}$ , notion fondamentale pour l'étude de **stabilité linéaire au voisinage de  $\vec{X}^*$**  (voir § 2.2 ci-dessous).

• **Systèmes dynamiques linéaires et systèmes dynamiques non linéaires**

- Système (resp. non) linéaire :  $\mathcal{F}(\vec{X})$  est (resp. non) linéaire en  $\vec{X}$ .

- Exemple de l'oscillateur harmonique :

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \text{ et } d\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p/m \\ -kq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m \\ -k & 0 \end{pmatrix} \vec{X}$$

• **Systèmes dynamiques hamiltoniens (conservatifs) et systèmes dynamiques dissipatifs**

- Système **hamiltonien (conservatif)** = sans dissipation, sans frottement  $\Rightarrow$  conservation de l'énergie totale.

- Système **non hamiltonien (dissipatif)** = frottement  $\Rightarrow$  attracteurs et cycles limites dans l'espace des phases.

- **Conservation des aires (théorème de Liouville)** : un système hamiltonien conserve les aires dans l'espace des phases,  $\text{div } \mathcal{F}(\vec{X}) = 0$  pour tout  $\vec{X} = (q_i, p_i)$  (analogue à un fluide incompressible dans l'espace des phases). [Démonstration :  $\frac{d\vec{X}}{dt} = (\dot{q}_i, \dot{p}_i)$  et équations de Hamilton vérifiées  $\Rightarrow \text{div}(\frac{d\vec{X}}{dt}) = \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) = 0$ ]. Pour un système dissipatif, il y a **contraction des aires** dans l'espace des phases ( $\text{div } \mathcal{F}(\vec{X}) < 0$ ).

• **Système dynamiques autonomes et systèmes dynamiques forcés**

- Système dynamique **autonome** :  $\dot{\vec{X}}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}(t))$ , ne dépend pas explicitement du temps.

- Système dynamique **forcé** :  $\dot{\vec{X}}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}(t), t)$ , dépend explicitement du temps. Dans le cas d'un **forçage périodique**,  $\mathcal{F}(t) = \cos \omega t$ , on se ramène à un système autonome de dimension  $N + 1$  en ajoutant la variable  $\varphi = \omega t$  telle que  $\dot{\varphi} = \omega$  et le terme de forçage s'écrit  $\mathcal{F}(t) = \cos \varphi$ .

### 2.1.3 Intégrabilité des systèmes hamiltoniens : système intégrable, invariants, systèmes séparables

#### • Système intégrable

- Un système est **intégrable** si il est possible de déterminer complètement les trajectoires du système dans son espace des phases. Tout **système hamiltonien de dimension  $N = 2$  est intégrable**. Pour un système hamiltonien de dimension  $N > 2$ , les trajectoires appartiennent à un sous-espace de dimension  $N - 1$  par conservation de l'énergie.

- Généralisation de la notion d'intégrabilité : un système dynamique est intégrable si il peut être séparé en variables conjuguées indépendantes les unes des autres (c'est-à-dire en oscillateurs indépendants)

- Exemple 1 : deux masses (identiques  $m$ ), trois ressorts (dont deux identiques,  $k_1 = k_3 = k$ )

(voir § 1.1.1).  $\vec{X} = \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$  et  $\frac{d\vec{X}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 0 & 0 \\ k - k_2 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/m \\ -k & 0 & k - k_2 & 0 \end{pmatrix} \vec{X}$ . A priori,  $N = 4$ ,

invariance de l'énergie  $\Rightarrow N = 3$ , symétrie (base dans laquelle la matrice  $\mathcal{F}$  est symétrique  $u = q_1 + q_2$  et  $v = q_1 - q_2$  (coordonnées normales)  $\Rightarrow N = 2$ , disparition du couplage, 2 oscillateurs indépendants.

- Exemple 2 : problème à deux corps, force centrale. A priori  $N = 12$ , translation uniforme du centre de masse ( $\vec{v} = \vec{cte}$ , on se place dans le référentiel du centre de masse)  $\Rightarrow N = 6$ , invariance du moment cinétique  $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$ , mouvement plan  $\Rightarrow N = 4$  ( $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$ ), énergie mécanique  $H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$  avec  $U_{eff}(r) = U_{int}(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$  où  $L = \|\vec{L}\| = mr^2\dot{\theta} = cte \Rightarrow N = 2$  ( $r, \dot{r}$ ) et le système est intégrable (le mouvement est la composition d'une oscillation dans le potentiel  $U_{eff}(r)$  entre  $r_{min}$  et  $r_{max}$  et d'une rotation à la vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$  soit deux oscillateurs indépendants, voir Fig. 9).

- Rôle des symétries et invariants : les **symétries et invariants** permettent de séparer les variables et d'intégrer le système. Pour un système hamiltonien à  $N = 2n$  dimensions/degrés de liberté, si le système est intégrable, alors il existe  $n$  invariants; si le système n'est pas intégrable, alors la trajectoire explore un sous-espace de dimension  $2n - 1$  au plus (l'énergie est le seul invariant).

### 2.1.4 Adimensionnement

But : **réduire** le nombre de paramètres pour simplifier les équations lors de l'étude analytique ou numérique du système dynamique (= mettre les équations sous forme 'normale' ou sous la forme d'une 'équation maîtresse'). Il y a trois méthodes principales :

#### • Simplification des paramètres

Exemple : pendule pesant amorti :  $ml\ddot{\theta} + \mu l\dot{\theta} + mg \sin \theta = 0$ . En divisant par  $ml$ , on passe de quatre paramètres ( $m, l, \mu, g$ ) à deux paramètres ( $a = \mu/m, b = g/l$ ) et l'équation s'écrit alors  $\ddot{\theta} + a\dot{\theta} + b \sin \theta = 0$



- **Substitution de variable**

Exemple : nombre de photons émis par un laser :  $\dot{n} = \alpha n - \beta n^2$  (deux paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ ). En posant  $n(t) = \frac{\alpha}{\beta} x(t)$ , on trouve que  $x(t)$  vérifie  $\dot{x} = \alpha x(1 - x)$  (un seul paramètre  $\alpha$ ) = fonction logistique (voir § 2.3.3).

- **Changement de base de temps**

- Exemple :  $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \alpha x$  (un paramètre  $\alpha$ ). En posant  $\tau = \alpha t$ , on a  $\frac{dx}{d\tau} = x$  (zéro paramètre).

⇒ Chaque changement permet de réduire le nombre de paramètre d'une unité.

- Remarque : l'ordre des changements est important pour réduire au maximum le nombre de paramètres.

## 2.2 Etude de stabilité linéaire

### 2.2.1 Etat de base et stabilité d'un état d'équilibre, points fixes

**Etat de base** = état qui va être perturbé pour en étudier la stabilité

**Stabilité d'un état d'équilibre** au sens de Lyapunov = état stable si la réponse à une perturbation d'amplitude finie reste d'amplitude finie, état instable sinon.

**Point fixe** = point d'équilibre = solution stationnaire  $\vec{X}^*$  telle que  $\frac{d\vec{X}^*}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}^*) = 0$ .

### 2.2.2 Analyse de la stabilité d'un point fixe

On se place **au voisinage d'un point fixe**  $\vec{X}^*$  (étude locale). Au voisinage de  $\vec{X}^*$ , on approxime  $\mathcal{F}(\vec{X})$  par une application **linéaire** au voisinage de  $\vec{X}^*$  notée  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  et appelée **application tangente** à  $\mathcal{F}$  en  $\vec{X}^*$  ou **matrice Jacobienne** en  $\vec{X}^*$ . On a donc, au voisinage du point fixe  $\vec{X}^*$ :  $\frac{d\vec{X}}{dt} = [\mathcal{L}_{X^*}] \vec{X}$ .

- **Méthode perturbative, expression de la matrice Jacobienne**

Au voisinage du point fixe  $\vec{X}^*$ , on pose  $\vec{X}(t) = \vec{X}^* + \vec{\varepsilon}(t)$  avec  $\|\vec{\varepsilon}\| \ll 1$ , soit en composantes  $x_i(t) = x_i^* + \varepsilon_i(t)$ .

La perturbation  $\vec{\varepsilon}(t)$  vérifie alors :  $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = [\mathcal{L}_{X^*}] \vec{\varepsilon}$  au premier ordre en  $\vec{\varepsilon}$ , où  $\mathcal{L}_{ij} = \left( \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j} \right)_{\vec{X}^*}$  sont les composantes de l'application tangente à  $\mathcal{F}$  en  $\vec{X}^*$  (matrice Jacobienne en  $\vec{X}^*$ ), soit en composantes  $\frac{d\varepsilon_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \left( \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j} \right)_{\vec{X}^*} \varepsilon_j(t)$ .

- **Base des vecteurs propres de la matrice Jacobienne et stabilité de la perturbation**

Les vecteurs propres  $\vec{\xi}_j$  de la matrice Jacobienne  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  associés aux valeurs propres  $\lambda_j$  vérifient  $[\mathcal{L}_{X^*}] \vec{\xi}_j = \lambda_j \vec{\xi}_j$ . Dans la base des vecteurs propres  $(\vec{\xi}_j)$ , la perturbation  $\vec{\varepsilon}(t)$  s'écrit :

$\vec{\varepsilon}(t) = \sum_j a_j(t) \vec{\xi}_j$  où les  $a_j(t)$  sont les coordonnées de  $\vec{\varepsilon}(t)$  dans cette base. Les coordonnées  $a_j(t)$  vérifient  $\dot{a}_j(t) = \lambda_j a_j(t)$  donc  $a_j(t) = a_j(0)e^{\lambda_j t}$ .

La stabilité de la perturbation  $\vec{\varepsilon}(t)$  est déterminée par le **signe de la partie réelle des valeurs propres** : si  $\text{Re}(\lambda_j) > 0$  alors le point fixe  $\vec{X}^*$  est **instable**, si  $\text{Re}(\lambda_j) < 0$  alors le point fixe  $\vec{X}^*$  est **stable**.

### • Critère de stabilité

- Si  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  est **diagonalisable** :

➤ Valeurs propres  $\lambda_j$  toutes réelles et distinctes  $\Rightarrow \vec{\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^N a_j(0)e^{\lambda_j t} \vec{\xi}_j$  et le point fixe  $\vec{X}^*$  est **instable** si au moins une valeur propre  $\lambda_j$  est strictement positive.

➤ Couples de valeurs propres complexes conjuguées  $\lambda_j^\pm = \sigma_j \pm i\omega_j$  de vecteurs propres associés  $\vec{\xi}_j^+$  et  $\vec{\xi}_j^- \Rightarrow \vec{\varepsilon}(t) = \sum_{j=1}^N e^{\sigma_j t} \left[ a_j^+(0)e^{i\omega_j t} \vec{\xi}_j^+ + a_j^-(0)e^{-i\omega_j t} \vec{\xi}_j^- \right]$  et le point fixe  $\vec{X}^*$  est **instable** si au moins une valeur propre est de **partie réelle  $\sigma_j$  strictement positive**.

- Si  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  est **non diagonalisable** :  $k$  valeurs propres réelles  $\lambda_l$  de multiplicité  $\nu_l$  ( $1 \leq l \leq k$ ) et  $m$  valeurs propres complexes conjuguées  $\sigma_l \pm i\omega_l$  de multiplicité  $\mu_l$  ( $1 \leq l \leq m$ )  $\Rightarrow \vec{\varepsilon}(t) = \sum_{l=1}^k p_l(t)e^{\lambda_l t} \vec{\xi}_l + \sum_{l=1}^m e^{\sigma_l t} \left[ q_l^+(t)e^{i\omega_l t} \vec{\xi}_l^+ + q_l^-(t)e^{-i\omega_l t} \vec{\xi}_l^- \right]$  (où  $p_l(t)$  est un polynôme de degré  $< \nu_l$  et  $q_l^\pm(t)$  sont des polynômes de degré  $< \mu_l$ ) et le point fixe  $\vec{X}^*$  est **instable** si au moins une des valeurs propres est de **partie réelle strictement positive**.

### • Critère de stabilité en pratique

- La perturbation autour du point fixe  $\vec{X}^*$  évolue comme  $\vec{\varepsilon}(t) = \sum_j a_j(t) \vec{\xi}_j = \sum_j a_j(0)e^{\lambda_j t} \vec{\xi}_j$ , où  $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$  est valeur propre de  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  et  $\vec{\xi}_j$  est le vecteur propre associé à  $\lambda_j$ .

➤ Si  $\forall j, \sigma_j < 0$  (toutes les valeurs propres sont de **partie réelle négative**) alors  $\vec{X}^*$  est un **point fixe asymptotiquement stable** (toutes les directions  $\vec{\xi}_j$  sont stables).

➤ Si  $\exists j, \sigma_j > 0$  (au moins une des valeurs propres est de **partie réelle strictement positive**) alors  $\vec{X}^*$  est un **point fixe linéairement instable** (la directions  $\vec{\xi}_j$  est instable).

- Remarques :

1) Aux temps longs, la dynamique du système est **dominée** par le vecteur propre dont la partie réelle  $\sigma_m > 0$  est **la plus grande**. Ce mode  $m$  (valeur propre  $\lambda_m = \sigma_m + i\omega_m$ , vecteur propre  $\vec{\xi}_m$ ) est appelé **mode le plus instable**. On a alors aux temps longs :  $\vec{\varepsilon}(t) \simeq a_m(0)e^{(\sigma_m + i\omega_m)t} \vec{\xi}_m$ .

2) Le **temps caractéristique** d'établissement du régime permanent est  $\tau = 1/\sigma_m$ .

3) En pratique, on procède en **trois étapes** lors de l'étude de stabilité linéaire : (1) trouver les points fixes ; (2) déterminer les valeurs et vecteurs propres de  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  : les directions stables (resp. instables) correspondent aux vecteurs propres pour lesquels la valeur propre est de partie réelle négative (resp. positive) ; (3) tracer le portrait de phase autour des points fixes.

### 2.2.3 Analyse de stabilité linéaire en dimension 2

#### • Equation caractéristique

On considère un point fixe  $\vec{X}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$  tel que  $\frac{d\vec{X}^*}{dt} = \vec{X}^* = \mathcal{F}(\vec{X}^*) = 0$  et une perturbation

$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$  autour de  $\vec{X}^*$  telle que  $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = \dot{\vec{\varepsilon}} = [\mathcal{L}_{X^*}] \vec{\varepsilon}$ . En dimension  $N = 2$ , la matrice

jacobienne de l'application  $\mathcal{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}$  s'écrit :  $[\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) \end{pmatrix}$ .

- Les vecteurs propres  $\vec{\xi}_j$  de  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  sont tels que  $[\mathcal{L}_{X^*}] \vec{\xi}_j = \lambda_j \vec{\xi}_j$  pour  $j = 1, 2$  soit  $([\mathcal{L}_{X^*}] - \lambda_j) \vec{\xi}_j = \vec{0}$

- Les valeurs propres associées  $\lambda_j$  vérifient l'équation caractéristique  $\det([\mathcal{L}_{X^*}] - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}] \lambda + \det[\mathcal{L}_{X^*}] = 0$  (équation du **second degré en  $\lambda$** , deux solutions  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  telles que  $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}]$  et  $\lambda_1 \lambda_2 = \det[\mathcal{L}_{X^*}]$ ).

#### • Différents types de points fixes

Différents cas en fonction du signe du discriminant  $\Delta = (\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}])^2 - 4 \det[\mathcal{L}_{X^*}]$

➤  $\det[\mathcal{L}_{X^*}] < 0 : \Delta > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles et de signes contraires  $\Rightarrow \vec{X}^*$  est un **point col** ('saddle', ou point hyperbolique).

➤  $\det[\mathcal{L}_{X^*}] > 0$  et  $4 \det[\mathcal{L}_{X^*}] \leq (\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}])^2 : \Delta > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles et de même signe ( $\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}]}{2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \det[\mathcal{L}_{X^*}]}{(\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}])^2}} \right)$ ); si  $\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}] > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont positives  $\Rightarrow \vec{X}^*$  est un **noeud répulsif** (ou instable); si  $\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}] < 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont négatives  $\Rightarrow \vec{X}^*$  est un **noeud attractif** (ou stable).

➤  $\det[\mathcal{L}_{X^*}] > 0$  et  $4 \det[\mathcal{L}_{X^*}] \geq (\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}])^2 : \Delta < 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont complexes conjuguées ( $\lambda_{\pm} = \frac{\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}]}{2} \left( 1 \pm i \sqrt{\frac{4 \det[\mathcal{L}_{X^*}]}{(\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}])^2} - 1} \right)$ ); si  $\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}] > 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de parties réelles positives  $\Rightarrow \vec{X}^*$  est un **foyer répulsif** (ou instable); si  $\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}] < 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de parties réelles négatives  $\Rightarrow \vec{X}^*$  est un **foyer attractif** (ou foyer stable ou puits); si  $\text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}] = 0$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont imaginaires purs ( $\lambda = \pm i \sqrt{\det[\mathcal{L}_{X^*}]}$ )  $\Rightarrow \vec{X}^*$  est un **centre**.

➤  $\det[\mathcal{L}_{X^*}] = 0 : \lambda = 0$  (une analyse de stabilité non linéaire d'ordre  $\varepsilon^2$  ou plus élevé est alors nécessaire pour déterminer la stabilité de  $\vec{X}^*$ ) ou  $\lambda = \text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}]$

#### • Représentation des différents types de points fixes

On peut représenter les points fixes dans le plan  $(\det[\mathcal{L}_{X^*}], \text{Tr}[\mathcal{L}_{X^*}])$  : voir schéma.

#### • Dégénérescence des valeurs propres

On parle de dégénérescence des valeurs propres si  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  a deux valeurs propres identiques  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ . La perturbation évolue alors comme  $\vec{\varepsilon}(t) = u_0 e^{\lambda t} \vec{\xi}_1 + (v_0 + v_1 t) e^{\lambda t} \vec{\xi}_2$  (terme séculaire en  $v_1 t$  dans la direction du vecteur propre  $\vec{\xi}_2$ ).

➤  $\lambda < 0$  :  $\vec{X}^*$  est un **noeud impropre stable**

➤  $\lambda > 0$  :  $\vec{X}^*$  est un **noeud impropre instable**

## 2.2.4 Cas des systèmes dissipatifs

- Point fixe **stable** = 'attire' les trajectoires.

- Point fixe **instable** = 'repousse' les trajectoires (dans une direction au moins).

- Notion d'attracteurs et de bassins d'attraction : pour un système **hamiltonien**, la conservation des aires dans l'espace des phases interdit l'existence de points fixes attractifs; pour un système **dissipatif**, la non conservation des aires (amortissement) permet l'existence d'**attracteurs** et de **cycles limites** (voir exemples ci-dessous).

## 2.3 Exemples

### 2.3.1 Oscillateur harmonique

- **Oscillateur harmonique sans frottement** (Fig. 10)

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x \end{cases}, \text{ unique point fixe } \vec{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } [\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$\det [\mathcal{L}_{X^*}] > 0$  et  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}] = 0$  donc  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$  et  $\vec{X}^*$  est un **centre**.

- **Oscillateur harmonique amorti** (Fig. 11)

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\alpha y \end{cases}, \text{ unique point fixe } \vec{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } [\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\alpha \end{pmatrix},$$

$\det [\mathcal{L}_{X^*}] > 0$  et  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}] < 0$  donc si  $\omega_0 > \alpha$  alors  $\lambda_{\pm} = -\alpha \left( 1 \pm i\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\alpha^2} - 1} \right)$  et  $\vec{X}^*$  est un **foyer attractif (puits)**; si  $\omega_0 < \alpha$  alors  $\lambda_{\pm} = -\alpha \left( 1 \pm i\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\alpha^2}} \right)$  et  $\vec{X}^*$  est un **noeud attractif (stable)**.

- **Oscillateur harmonique sans frottement forcé**

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = \cos \omega t \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x + \cos z \\ \dot{z} = \omega \end{cases} \quad (\text{on ramène un système non autonome à un système autonome en introduisant le nouveau degré de liberté } z \text{ et } N = 3)$$

### 2.3.2 Pendule pesant

- **Pendule pesant sans frottement (non amorti)** (Fig. 12)

- Points fixes et stabilité :

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin x \end{cases}, \text{ points fixes } \begin{pmatrix} 0 \pmod{2\pi} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \pi \pmod{2\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

➤ Stabilité en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  :  $[\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det [\mathcal{L}_{X^*}] > 0$  et  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}] = 0$  donc  $\lambda_{\pm} = \pm i\omega_0$

et  $\vec{X}^*$  est un **centre**.

➤ Stabilité en  $\begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$  :  $[\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det [\mathcal{L}_{X^*}] < 0$  et  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}] = 0$  donc  $\lambda_{\pm} = \pm\omega_0$  et

$\vec{X}^*$  est un **point col** (vecteurs propres associés à  $\lambda_{\pm} = \pm\omega_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\omega_0 \end{pmatrix}$ )

- Période des oscillations, divergence logarithmique du temps de parcours :

➤ Energie (massique) invariante car système conservatif donc  $E_m = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \omega_0^2(1 - \cos x) = \text{cte}$

➤ Période des oscillations :  $T = 4 \int_0^{x_m} \frac{dx}{\sqrt{2E_m - 2\omega_0^2(1 - \cos x)}}$

➤ Sur la séparatrice définie par  $x_m = \pi$  et  $E_m = 2\omega_0^2$ , on a une **divergence logarithmique** de  $T$  : si  $x_m \rightarrow \pi$  alors  $T \rightarrow \infty$  et  $\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{2(2\omega_0^2) - 2\omega_0^2(1 - \cos x)}} \simeq \int_0^{\varepsilon} \frac{du}{\omega_0 u}$

- Remarque : la **divergence logarithmique du temps de parcours** d'une trajectoire passant par un point fixe instable (maximum d'énergie potentielle) est un phénomène général.

- **Pendule pesant amorti** (Fig. 13)

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 \sin x - \alpha \dot{x} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 \sin x - \lambda y \end{cases}, \text{ les centres du pendule non amorti en } \begin{pmatrix} 0 \pmod{2\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

deviennent des **foyers stables** (puits).

### 2.3.3 Autres exemples

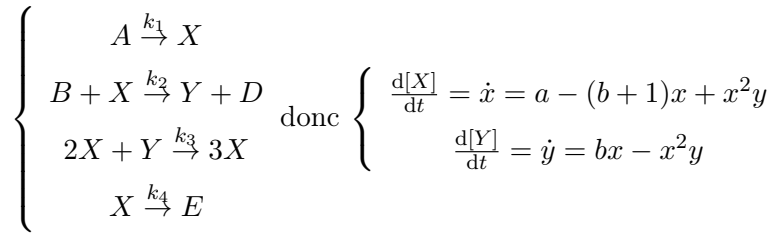
- **Potentiel à deux puits** (Fig. 14)

$$\ddot{x} = x - x^3 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}, \text{ trois points fixes } \vec{X}^* = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } [\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 2x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

➤ Stabilité en  $\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  :  $[\mathcal{L}_{(\pm 1,0)}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det [\mathcal{L}_{X^*}] > 0$  et  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}] = 0$  donc  $\vec{X}^*$  est un **centre**.

➤ Stabilité en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  :  $[\mathcal{L}_{(0,0)}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det [\mathcal{L}_{X^*}] < 0$  donc  $\vec{X}^*$  est un **point col**.

• **Cinétique chimique** (Brusselator)



⇒ réactions oscillantes (Belousov-Zhabotinsky)

• **Dynamique des populations : compétition entre espèces** (Fig. 15)

- Deux espèces ( $x$  lapins et  $y$  moutons) sont en compétition pour de la nourriture ⇒

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ax(1 - bx - cy) \\ \dot{y} = dy(1 - ex - fy) \end{array} \right.$$

- Adimensionnement du système ( $\tau = at, u = bx, v = fy, \rho = d/a, \alpha = c/f, \beta = e/b$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = u(1 - u - \alpha v) \\ \dot{v} = \rho v(1 - v - \beta u) \end{array} \right.$$

- Quatre points fixes :  $\vec{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta} \\ \frac{1-\beta}{1-\alpha\beta} \end{pmatrix}$  et

$$[\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 1 - 2u - \alpha v & -\alpha u \\ -\beta \rho v & \rho(1 - 2v - \beta u) \end{pmatrix}$$

- Stabilité des points fixes, portrait de phase, voir Fig. 15.

• **Dynamique des populations : modèle proies/prédateurs de Lotka-Volterra** (Figs. 16 et 17)

- Deux espèces ( $x$  proies de taux de natalité  $a$  et  $y$  prédateurs de taux de mortalité  $c$ ) ⇒

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{array} \right.$$

- Adimensionnement du système ( $\tau = at, u = x d/c, v = y b/a, \alpha = c/a$ ) :  $\left\{ \begin{array}{l} \dot{u} = u(1 - v) \\ \dot{v} = \alpha v(u - 1) \end{array} \right.$

- Deux points fixes :  $\vec{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $[\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 1-v & -u \\ \alpha v & \alpha(u-1) \end{pmatrix}$

➤ Stabilité en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  :  $[\mathcal{L}_{(0,0)}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix}$ ,  $\det [\mathcal{L}_{X^*}] < 0$  donc  $\vec{X}^*$  est un **point col** ( $\lambda = 1$  et  $\lambda = -\alpha$ ).

➤ Stabilité en  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  :  $[\mathcal{L}_{(1,1)}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\det [\mathcal{L}_{X^*}] > 0$  et  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}] = 0$  donc  $\vec{X}^*$  est un **centre** ( $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$ ).

- Portrait de phase, dynamique d'oscillations avec déphasage (maximum de proies suivi par un maximum de prédateurs), voir Figs. 16 et 17.

### • Oscillateur de Van der Pol (Fig. 18)

- Equation de l'oscillateur de Van der Pol :  $\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0$ , où est le **paramètre de contrôle** (voir § 1.2.2).

- Qualitativement : si  $\epsilon < 0$ , il y a toujours dissipation et le point fixe ( $x = 0, \dot{x} = 0$ ) est **asymptotiquement stable** (régime indépendant du temps); si  $\epsilon > 0$ , il y a amplification et  $x$  augmente jusqu'à ce que le terme de dissipation non linéaire ( $-x^2\dot{x}$ ) domine le terme d'amplification ( $-\epsilon\dot{x}$ ), on a alors l'apparition d'un régime périodique, la trajectoire dans l'espace des phases reste à distance finie du point fixe  $(0, 0)$  = on parle de **cycle limite**.

Ce changement qualitatif du portrait de phase lorsqu'on passe de  $\epsilon < 0$  à  $\epsilon > 0$  (passage de stabilité linéaire à stabilité non linéaire) est appelé **bifurcation** (voir §3).

Cas où  $1 \gg \epsilon > 0$ , estimation de l'amplitude des oscillations (= rayon du cycle limite) : sur le cycle limite, on suppose les oscillations quasi sinusoïdales de période  $T = 2\pi$  et d'amplitude  $a$  ( $x(t) \sim a \cos t$ ); l'énergie mécanique est  $E_m = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}x^2$  et en moyenne sur une période  $\langle \frac{dE_m}{dt} \rangle = \langle (\epsilon - x^2)\dot{x}^2 \rangle = 0$  soit  $a = 2\sqrt{\epsilon}$ .

- Mise sous forme d'un système dynamique :  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = (\epsilon - x^2)y - x \end{cases}$ , ou après changement de

notations (deux paramètres  $\mu = \epsilon \ll 1, \beta = 1/\epsilon$ , au lieu d'un seul  $\epsilon$ ) :  $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - \beta x^2)y - x \end{cases}$ ,

unique point fixe  $\vec{X}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et

$[\mathcal{L}_{X^*}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\beta\mu xy - 1 & \mu(1 - \beta x^2) \end{pmatrix}$  soit  $[\mathcal{L}_{(0,0)}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$ ,  $\det [\mathcal{L}_{(0,0)}] = 1 > 0$  et  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{(0,0)}] = \mu > 0$  (avec  $4 \det [\mathcal{L}_{X^*}] \geq (\text{Tr} [\mathcal{L}_{X^*}])^2$  car  $\text{Tr} [\mathcal{L}_{(0,0)}] = \mu \ll 1$  et  $\det [\mathcal{L}_{(0,0)}] = 1$ ),  $\lambda_{\pm} = \frac{\mu}{2} \pm i\frac{\sqrt{4-\mu^2}}{2}$  ( $\text{Re}(\lambda) > 0$ ) donc  $\vec{X}^*$  est un **foyer instable**.

- Portrait de phase, cycle limite : on écrit  $x$  sous la forme  $x(t) = a(t)e^{it} + a^*(t)e^{-it}$  (période  $T = 2\pi$ ) où  $a(t)$  est complexe et varie lentement sur une période ( $\dot{a}(t) \simeq \langle \dot{a}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t) dt$  et  $|\frac{\dot{a}}{a}| \ll 1$ ). Alors  $a$  vérifie  $\dot{a} = \frac{\mu}{2}(1 - 3\beta|a|^2)a$  qui correspond à la forme normale de la **bifurcation de Hopf** (voir § 3.2), deux points fixes  $a = 0$  (**foyer instable**) et  $|a|^2 = 1/3\beta$  (**cycle limite**, stable).

- **Fonction logistique**

Exemple à  $N = 1$  :  $\dot{x} = \alpha x(1 - x)$  (voir modèle du nombre de photons d'un laser  $\dot{n} = \alpha n - \beta n^2$  au §2.1.4). Points fixes  $x = 0$  et  $x = 1$ .



## Chapter 3

# Bifurcations

- On considère un système dynamique  $\dot{\vec{X}}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}(t), \mu, t)$  où  $\mu$  est un **paramètre de contrôle**. On parlera de **bifurcation** si il y a un changement qualitatif du portrait de phase du système lorsqu'un paramètre de contrôle varie ( $\mu > \mu_c$  ou  $\mu < \mu_c$ , avec  $\mu_c$  la **valeur critique** du paramètre de contrôle).
- Exemple : oscillateur de Van der Pol (voir § 2.3.3 ci-dessus) = bifurcation de Hopf (point fixe stable  $\rightarrow$  cycle limite stable).
- Analogie avec les transition de phase.
- Transition vers le chaos par bifurcations successives (voir § 5)

### 3.1 Notion de bifurcation

#### 3.1.1 Stabilité d'un point fixe

- Bifurcation = **changement de la stabilité d'un point fixe**  $\vec{X}^*$  lorsqu'un paramètre de contrôle  $\mu$  varie, dû à un **changement de signe de la partie réelle d'une valeur propre**  $\lambda_j$  de  $[\mathcal{L}_{X^*}]$ .
- Exemple : noeud attractif (stable)  $\rightarrow$  point col (instable)
- La perturbation autour d'un point fixe  $\vec{X}^*$  évolue comme  $\vec{\varepsilon}(t) = \sum_j a_j(t) \vec{\xi}_j$ , avec  $a_j(t) = a_j(0)e^{\lambda_j t}$  où  $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$  est valeur propre de  $[\mathcal{L}_{X^*}]$  et  $\vec{\xi}_j$  est le vecteur propre associé à  $\lambda_j$  (voir étude de stabilité linéaire, § 2.2). Le **mode propre le plus instable** (mode propre dominant) est tel que  $\sigma_m = \text{Re}(\lambda_m)$  soit la plus grande.

#### 3.1.2 Approche de Landau

- **Développement de Landau**

- Les non linéarités peuvent avoir des **effets stabilisants ou déstabilisants** sur la stabilité du point fixe. L'amplitude du mode propre  $j$  évolue selon  $\dot{a}_j = \frac{da_j}{dt} = \lambda_j a_j$ . Pour simplifier, on

suppose ici que les valeurs propres  $\lambda_j$  sont réelles :  $\lambda_j = \sigma_j$  où  $\sigma_j$  est appelé **taux de croissance**. Si  $\sigma_j > 0$ , alors  $a_j(t)$  va croître et ne pourra plus être considéré comme petit comme dans l'analyse de stabilité linéaire. Il faudra alors tenir compte des termes non linéaires d'ordres supérieurs et de leurs effets d'amplification et de saturation. Pour cela, on **développe le taux de croissance  $\sigma_j$  en puissance de l'amplitude de la perturbation  $a_j$**  :  $\sigma_j(a_j) = \sigma_j + \kappa_1 a_j + \kappa_2 a_j^2 + \dots$

- Exemple : pendule non amorti (valeurs propres imaginaires pures, invariance  $x \rightarrow -x$ , pulsation effective développée en puissance de  $x$ )

- Cas général : invariance  $a_j \rightarrow -a_j \Rightarrow \sigma_j(a_j)$  est paire et  $\sigma_j(a_j) = \sigma_j - \kappa a_j^2(t) =$  **développement de Landau** à l'ordre 2 (premier ordre non nul) où  $\kappa$  est appelé **paramètre de Landau**.

### • Equation de Landau

$\frac{da_j}{dt} = \lambda_j a_j$  donc on en déduit l'évolution de l'amplitude du mode  $j$  :  $\frac{da_j}{dt} = [\sigma_j - \kappa a_j^2(t)] a_j = \sigma_{j,eff} a_j$  où  $\sigma_{j,eff} = [\sigma_j - \kappa a_j^2(t)]$  est le taux de croissance effectif.

- Cas sous-critiques et super-critiques : si  $\sigma_j > 0$  alors le mode  $j$  est instable et les effets de la non linéarité dépendent du **signe** de  $\kappa$ .

➤ si  $\kappa > 0$  (cas **super-critique**), la non linéarité freine l'instabilité si  $a_j > \sqrt{\sigma_j/\kappa} \Rightarrow$  non linéarité stabilisante, **saturation non linéaire**.

➤ si  $\kappa < 0$  (cas **sous-critique**), la non linéarité amplifie l'instabilité  $\Rightarrow$  non linéarité déstabilisante, **amplification non linéaire** (les termes d'ordres supérieurs peuvent éventuellement stabiliser le système).

### • Stabilité structurelle (au voisinage d'un point fixe)

- **Equivalence topologique** de deux systèmes dynamiques = 'ressemblance' des deux portraits de phase, bijection bicontinue permettant de passer d'un système à l'autre en conservant le sens du temps.

- **Stabilité structurelle** d'un système dynamique = le système reste topologiquement équivalent à lui-même suite à une petite perturbation du flot. Remarque : l'oscillateur harmonique est structurellement instable.

- Cas du **point fixe hyperbolique** (point col) : **théorème de Hartman-Grobman** = au voisinage d'un point fixe hyperbolique, le système dynamique  $\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}(t))$  est topologiquement équivalent à sa linéarisation  $\frac{d\vec{\varepsilon}}{dt} = [\mathcal{L}_{X^*}] \vec{\varepsilon}$  où  $[\mathcal{L}_{X^*}] = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{X}} \Big|_{\vec{X}^*}$  est la matrice Jacobienne. Conséquence : la stabilité linéaire implique la stabilité non linéaire.

- Exemples : puits et foyer attractif sont topologiquement équivalents, mais foyer instable et cycle limite ne sont pas topologiquement équivalents (oscillateur de Van der Pol : bifurcation lors du changement du paramètre de contrôle  $\epsilon < 0$  (foyer instable)  $\rightarrow \epsilon > 0$  (cycle limite)).

### • Bifurcations locales des points fixes, notion de codimension

Système dynamique à  $p$  paramètres de contrôle  $\mu_{i=1\dots p} : \dot{\vec{X}}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}(t), \mu_{i=1\dots p}, t)$

- **Bifurcation locale** = si un des paramètres de contrôle  $\mu_i$  franchit une valeur critique  $\mu_{i,c}$  ('locale' car  $\mu_i \simeq \mu_{i,c}$ ).

- **Codimension** = plus petite dimension de l'espace des paramètres de contrôle pour que la bifurcation existe. **Codimension 1** = un seul paramètre de contrôle suffit pour provoquer une bifurcation quand ce paramètre varie

- Lors d'une bifurcation, il apparait, au voisinage d'un point fixe, un portrait de phase pour  $\mu > \mu_c$  (resp.  $\mu < \mu_c$ ) **non topologiquement équivalent** au portrait de phase pour  $\mu < \mu_c$  (resp.  $\mu > \mu_c$ ). Le nombre de valeurs propres de partie réelle positive change et on parle de perte d'hyperbolicité du point fixe.

## 3.2 Bifurcations locales de codimension 1

### 3.2.1 Théorie des formes normales

On considère un système dynamique à un seul paramètre de contrôle  $\mu$  (codimension 1) :  $\dot{\vec{X}}(t) = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}(t), \mu)$ . On choisit l'origine des vecteurs  $\vec{X}$  telle que  $\vec{X}^* = \vec{0}$  soit un point fixe et l'origine des paramètres de contrôle  $\mu$  telle que  $\mu = \mu_c = 0$  quand la bifurcation se produit.

- **Cas 1 (1D, une variable  $x$ )** : une valeur propre réelle non dégénérée s'annule en  $x = 0, \mu = 0$

$\mathcal{F}(x=0, \mu=0) = 0$  (point fixe) et  $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x}(x=0, \mu=0) = 0$  (bifurcation  $\Rightarrow$  valeur propre réelle de la matrice Jacobienne s'annule en  $\mu = 0$ )

➤ Forme normale d'une bifurcation à une variable ( $x$ ) (bifurcation **stationnaire**, voir §3.2.2) :

$$\dot{x} = \mathcal{F}(x, \mu) = \left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \right|_{\text{éq}} \mu + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^2} \right|_{\text{éq}} \frac{x^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x \partial y} \right|_{\text{éq}} x\mu + \left. \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \mu^2} \right|_{\text{éq}} \frac{\mu^2}{2} + \text{ordre } 3 + \dots$$

**Diagramme de bifurcation** : on trace la valeur du point fixe en fonction du paramètre de contrôle  $x^*(\mu)$  au voisinage du point ( $x^* = 0, \mu = 0$ ). Remarque : le diagramme de bifurcation n'est pas l'espace des phases.

- **Cas 2 (2D, deux variables  $x, y$ )** : la partie réelle d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées s'annule en  $z = x + iy = 0, \mu = 0$

➤ Forme normale d'une bifurcation à deux variables ( $z = x + iy$ ) (**bifurcation de Hopf**, solutions oscillantes, voir §3.2.3) :  $\dot{z} = \mu z - g|z|^2 z - h|z|^4 z$

### 3.2.2 Bifurcations stationnaires (1 variable)

Correspond au cas 1 (1D) où une valeur propre réelle non dégénérée s'annule en  $x = 0, \mu = 0$ .

- **Bifurcation nœud-col** (Fig. 19)

Cas générique de forme normale (noeud-col ou 'saddle-node')

- Forme normale :  $\dot{x} = \mu - x^2$
- Points fixes (= points critiques) :  $x^* = x_{\pm} = \pm\sqrt{\mu}$
- Stabilité :  $x_+$  est stable (valeur propre associée négative, analogue 2D = noeud stable),  $x_-$  est instable (valeur propre associée positive, analogue 2D = point col)
- Diagramme de bifurcation, 4 cas  $\dot{x} = \pm\mu \pm x^2$  (voir Fig. 19).

### • Bifurcation transcritique

Cas de persistance d'un équilibre

- Forme normale :  $\dot{x} = (\mu - x)x = \mu x - x^2$
- Points fixes (= points critiques) :  $x^* = 0$  ou  $\mu$
- Stabilité :  $x^* = 0$  est stable si  $\mu < 0$ , instable sinon;  $x^* = \mu$  est stable si  $\mu > 0$ , instable sinon.
- Diagramme de bifurcation (voir schéma)

### • Bifurcation fourche super-critique (ou sur-critique)

Cas où il y a parité (invariance  $x \rightarrow -x$ )

- Forme normale :  $\dot{x} = \mu x - x^3$
- Points fixes (= points critiques) : si  $\mu < 0$ , seul point fixe  $x^* = 0$ ; si  $\mu > 0$ , trois points fixes  $x^* = 0, -\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}$
- Stabilité : si  $\mu < 0$ ,  $x^* = 0$  est stable; si  $\mu > 0$ ,  $x^* = 0$  est instable et  $x^* = \pm\sqrt{\mu}$  sont stables
- Diagramme de bifurcation = **fourche super-critique** car le système à le choix entre les deux états  $\pm\sqrt{\mu}$  quand  $\mu$  devient positif ('fourche') et la solution bifurquée apparaît pour  $\mu \geq 0$  c'est-à-dire après le point de bifurcation ('super-critique'). La bifurcation est **continue** et **sans hysteresis** (voir schéma).
- Retour à l'équilibre : temps de relaxation vers l'équilibre  $\tau = 1/\mu$  si  $\mu < 0$  et  $\tau = 1/2\mu$  si  $\mu > 0$
- Analogie avec une **transition de phase du second ordre** : point de bifurcation  $\Leftrightarrow$  point critique; super-critique  $x^* \propto \sqrt{\mu - \mu_c} \Leftrightarrow$  second ordre, aimantation  $M \propto \sqrt{T - T_c}$

### • Bifurcation fourche imparfaite

- Forme normale :  $\dot{x} = \mu x - x^3 + h$  où  $h$  représente l'imperfection (exemples : bille sur cerceau tournant, barre d'Euler, voir § 3.3)
- Diagramme de bifurcation : la perturbation  $h$  joue un rôle près du point de bifurcation en levant la dégénérescence (une des branches est favorisée, voir schéma).

### • Bifurcation fourche sous-critique

- Forme normale :  $\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5$  (le terme en  $x^5$  sature la déstabilisation due au terme en  $+x^3$ )
- Points fixes (= points critiques) :  $x^* = 0$  et  $x^*$  tel que  $x^4 - x^2 - \mu = 0$  donc 4 points fixes supplémentaires ( $x^* = \pm \left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4\mu}}{2}\right)^{1/2}$ , 2 stables et 2 instables) si  $-1/4 < \mu < 0$  ou 2 points fixes supplémentaires (2 stables) si  $\mu \geq 0$ .
- Stabilité : solution triviale  $x^* = 0$  stable si  $\mu < 0$ , instable si  $\mu > 0$ ; deux solutions non triviales stables et la solution stable  $x^* = 0$  coexistent pour  $-1/4 < \mu < 0$ .
- Diagramme de bifurcation = fourche sous-critique car un saut d'une solution à l'autre a lieu pour  $\mu < 0$  lorsque  $\mu$  diminue, c'est-à-dire avant le point de bifurcation. La bifurcation est **discontinue** et **présente une hysteresis**. Voir schéma.
- Analogie avec une **transition de phase du premier ordre** (exemple : transition liquide/vapeur)

### 3.2.3 Bifurcations de Hopf (2 variables, solutions oscillantes)

Correspond au cas 2 (2D, deux variables  $x, y$ ) où la partie réelle d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées s'annule en  $z = x + iy = 0, \mu = 0$ .

- **Forme normale de la bifurcation de Andronov-Hopf** (Fig. 20)

- Système 2D, variable complexe  $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$ , forme normale :  $\dot{z} = \mu z - g|z|^2 z$  où  $\mu = \mu_r + i\mu_i$  est le paramètre de contrôle et  $g = g_r + ig_i$ .

- Décomposition sur  $\rho$  et  $\theta$  : 
$$\begin{cases} \dot{\rho} = \mu_r \rho - g_r \rho^3 \\ \dot{\theta} = \mu_i \end{cases} \Rightarrow \text{composition d'une } \mathbf{bifurcation \text{ fourche}} \text{ pour } \rho(t) \text{ et d'une } \mathbf{rotation} \text{ à la vitesse angulaire } \mu_i (\text{phase } \theta(t) = \mu_i t) \Rightarrow \mathbf{cycle \text{ limite}}$$

- **Cas où  $g_r > 0$ : bifurcation de Hopf super-critique**

La non linéarité en  $-g_r \rho^3$  sature l'instabilité  $\Rightarrow$  bifurcation **fourche super-critique** pour  $\rho(t)$ .

- **Cas où  $g_r < 0$ : bifurcation de Hopf sous-critique**

La non linéarité en  $+|g_r|\rho^3$  amplifie l'instabilité  $\Rightarrow$  nécessité d'ajouter un terme d'ordre 5 pour saturer l'instabilité :  $\dot{\rho} = \mu_r \rho - g_r \rho^3 - h_r \rho^5 \Rightarrow$  bifurcation **fourche sous-critique** pour  $\rho(t)$ .

### 3.2.4 Analogie avec les transitions de phase : ralentissement critique

Théorie de Landau des transitions de phase : **premier ordre** = transition discontinue, avec hysteresis  $\Leftrightarrow$  fourche sous-critique ; **second ordre** = transition continue, sans hysteresis  $\Leftrightarrow$  fourche super-critique.

- **Ralentissement critique**

Dans le cas de la fourche super-critique, le **temps de relaxation pour le retour à l'équilibre** est  $\tau \propto 1/\mu$  donc  $\tau \rightarrow \infty$  quand  $\mu \rightarrow 0$ ; dans le cas de la bifurcation de Hopf, le **nombre de rotations** pour approcher le cycle limite augmente si  $\mu \rightarrow 0$  (voir Fig. 20).

- **Analogie entre la bifurcation fourche super-critique et la théorie de Landau des transitions de phase du second ordre**

Cas de la transition ferromagnétique/paramagnétique : énergie libre  $F(M) = \frac{1}{2} \frac{T-T_c}{T_c} M^2 + \frac{1}{4} M^4$  où  $M$  est l'aimantation,  $T$  est la température.

Minimum d'énergie  $\frac{\partial F}{\partial M} = 0 \Rightarrow M = 0$  ou  $M = \pm \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^\beta$  avec l'exposant critique  $\beta = 1/2$ . Pour la bifurcation fourche super-critique, l'analogue de  $\frac{T_c - T}{T_c}$  est  $\mu$  et l'analogue de  $M$  est  $x^*$ .

### 3.3 Exemples

#### 3.3.1 Bille sur cerceau tournant avec frottements

- Géométrie : cerceau de rayon  $R$  tournant autour de son axe vertical à la vitesse angulaire  $\omega$ , masse  $m$  se déplaçant sur le cerceau.
- Mise en équation :  $mR\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta} - mg \sin \theta + mR\omega^2 \sin \theta \cos \theta$ . En négligeant le terme inertiel (hypothèse  $mR\ddot{\theta} \ll$  autres termes) et en adimensionnant, on a :  $\dot{\theta} = (\mu \cos \theta - 1) \sin \theta$  avec  $\mu = \frac{R\omega^2}{g} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ .
- Etude des points fixes et de leur stabilité  $\theta^* = 0, \pi, \pm \arccos(1/\mu)$  si  $\mu > 1$ . Bifurcation au voisinage de  $\theta^* = 0$  :  $\theta = \theta^* + \varepsilon = \varepsilon \Rightarrow \omega_0^2 \varepsilon = \left( (\omega^2 - \omega_0^2) - \left( \frac{4\omega^2 - \omega_0^2}{6} \right) \varepsilon^2 \right) \varepsilon = (\sigma - \kappa \varepsilon^2) \varepsilon$  (avec les notations du § 3.1.2) où le coefficient de Landau est  $\kappa = \frac{4\omega^2 - \omega_0^2}{6} \Rightarrow$  instabilité super-critique et **bifurcation fourche super-critique**.
- Diagramme de bifurcation et portrait de phase (voir schéma).
- Retour sur l'hypothèse  $mR\ddot{\theta} \ll$  autres termes, par exemple le terme d'amortissement  $-\lambda\dot{\theta} \Rightarrow$  hypothèse de **fort amortissement**, permet de ramener un problème à  $N = 2$  à un problème à  $N = 1$ .
- Remarque : si on décale l'axe de rotation du cerceau par rapport à son axe principal d'inertie (axe vertical), on favorise une des deux positions d'équilibre  $\Rightarrow$  bifurcation imparfaite.

#### 3.3.2 Lampe ressort (barre d'Euler) et oscillateur de Duffing

- Géométrie : masse  $m$  en haut d'une barre verticale d'élasticité  $k$  et de longueur  $l$  dans un fluide visqueux (amortissement  $\lambda$ ).
- Hypothèse de **fort amortissement** (on néglige le terme inertiel) :  $-\lambda\dot{\theta} = -k\theta + mgl \sin \theta \Rightarrow \dot{\theta} = \mu\theta - \beta\theta^3$  avec  $\mu = \frac{mgl - k}{\lambda}$  et  $\beta = \frac{mgl}{6\lambda} > 0 \Rightarrow$  oscillateur de Duffing, **bifurcation fourche super-critique**.

- Etude des points fixes et de leur stabilité :  $\theta^* = 0$  et  $\theta^* = \pm \sqrt{\frac{\mu}{\beta}}$  si  $\mu > 0$  c'est-à-dire si  $m > m_c$  où la masse critique est  $m_c = k/gl$ .

- Expérimentalement : barre d'Euler (ou lame de scie), détermination du module d'Young  $E$  de la barre connaissant son moment d'inertie  $I$  et en mesurant  $m_c = \frac{EI}{g} \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2$ .

### 3.3.3 Autres exemples

#### • Laser

- Nombre de photons émis  $n(t)$ , inversion de population = atomes excités  $N(t)$ , gain  $G$ , pompage  $p$ , perte de photons  $k$ , taux d'émission spontanée  $f$  :

$$\begin{cases} \dot{n} = GNn - kn \\ \dot{N} = -GNn + p - fN \end{cases}$$

- Analyse faiblement non linéaire :  $\dot{n} = \frac{Gp-fk}{f}n - \frac{G^2p}{f^2}n^2 = \alpha n - \beta n^2 = cn(1-n)$ , forme canonique de la **bifurcation transcritique**.

#### • Oscillateur de Van der Pol (Fig. 21)

$$\ddot{x} - (\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + (\epsilon - x^2)y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \mu(1 - \beta x^2)y - x \end{cases} = \text{bifurcation de Hopf super-critique, apparition d'un cycle limite}$$

En notation complexe  $z = x + iy$  (voir § 2.3.3 et 3.2.3), on a  $\dot{z} = \frac{\mu}{2}(1 - 3\beta|z|^2)z = \frac{\mu}{2}z - g|z|^2z$  = forme normale de la bifurcation de Hopf.

Ici, le système est non conservatif (dissipation non linéaire en  $-x^2\dot{x}$ ) et hors équilibre (source d'énergie nécessaire pour la résistance négative).

#### • Dynamique de populations : épidémie d'insectes (Fig. 22)

- Exemple de la tordeuse du pin (*Choristoneura fumiferana*)

- Après adimensionnement,  $\dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - \frac{x^2}{1+x^2}$  où  $r$  est le taux de natalité et  $k$  est la quantité de nourriture

- Etude graphique des points fixes, apparition discontinue de points stables à  $x^*$  grand si  $k$  et  $r$  augmentent ( $k > k_c$ ) ('explosion').

#### • Dynamique de populations : modèle de Rosenzweig-McArthur

Modification du modèle proies ( $x$ )/prédateurs ( $y$ ) de Lotka-Volterra par ajout d'une compétition entre proies (terme en  $\frac{x}{1+x}$ ) :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \frac{x}{\gamma}) - \frac{xy}{1+x} \\ \dot{y} = \beta y(\frac{x}{1+x} - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \text{bifurcation de Hopf et cycle limite.}$$

## Chapter 4

# [Historique et exemples]

### 4.1 Historique des théories des systèmes dynamiques et du chaos

### 4.2 Exemples classiques de systèmes dynamiques

Classement en fonction du nombre de degrés de liberté et du caractère non linéaire, tableau récapitulatif



## Chapter 5

# Systèmes chaotiques

### 5.1 Caractéristiques d'un système chaotique

Un système **chaotique** est un système non intégrable (voir §2.1).

#### 5.1.1 Exemples de systèmes chaotiques

Nous donnons ici deux exemples de systèmes déterministes non intégrables en mécanique.

- **Pendule magnétique** (Fig. 23)

On considère un pendule pesant magnétique constitué d'un aimant attaché à un point, repéré par l'angle  $\theta(t)$  et pouvant osciller au-dessus de deux aimants situés dans le plan  $z = 0$  et séparés d'une distance  $d$  (voir Fig. 23). On note  $(x, y)$  les coordonnées de l'aimant projetées sur le plan  $z = 0$ . Il s'agit d'un **problème à deux corps dans un champ de force non central**. Contrairement au problème à deux corps dans un champ de force central, ce qui serait le cas si on place un seul aimant sous le pendule magnétique (on parlera de pendule magnétique **régulier**), (voir §1.2.1 et §2.1.3) pour lequel le nombre de degré de libertés (au sens des systèmes dynamiques) se réduit à  $N = 2$ , on a ici  $N = 3$  (a priori  $N = 6$ , réduit à  $N = 4$  ( $x, \dot{x}, y, \dot{y}$ ) car la longueur du pendule est constante puis à  $N = 3$  par conservation de l'énergie). On a donc un système **non linéaire** ( $\sin \theta$ ) à  $N = 3$  degrés de libertés, donc possibilité de **trajectoires chaotiques** (voir Fig. 23) et on parlera de pendule magnétique **chaotique**.

- **Pendule double** (Fig. 24)

On considère un **pendule double** constitué de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  pouvant osciller dans un plan vertical autour d'un point  $O$ , repérées par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  par rapport à la verticale. Les deux masses sont reliées entre elles par une tige rigide de longueur  $l_2$  et la masse  $m_1$  est reliée au point  $O$  par une tige rigide de longueur  $l_1$ . On a ici  $N = 4$  ( $\theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2$ ) qui se réduit à  $N = 3$  par conservation de l'énergie. Le système est **non linéaire** ( $\sin \theta_1, \sin \theta_2$ ) à  $N = 3$  degrés de libertés, donc possibilité de **trajectoires chaotiques** (voir Fig. 24).

### 5.1.2 Caractérisation des systèmes chaotiques

#### • Spectre de puissance

On note  $I(\omega)$  le **spectre de puissance** (ou densité spectrale de puissance, PSD pour *power spectral density* en anglais) d'un signal  $X(t)$  comme le carré du module de la transformée de Fourier de  $X(t)$  :  $I(\omega) = |\tilde{X}(\omega)|^2$  où  $\tilde{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt$  (remarque :  $I(\omega)$  est aussi la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de  $X(t)$  :  $I(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t)e^{-j\omega t}dt$  où  $\gamma(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X^*(t)X(t+T)dt$  est la fonction d'autocorrélation de  $X(t)$ ).

- Pour un **système intégrable** : le système peut être mis sous la forme d'une somme d'oscillateurs de pulsations  $\omega_i$  donc le spectre est **quasi périodique** et montre des **raies fines** aux pulsations  $\omega_i$  et leurs combinaisons linéaires. C'est le cas du pendule magnétique régulier (Fig. 25).

- Pour un **système chaotique** : le spectre est un **spectre large** (comme un bruit blanc) sur lequel des raies plus fines peuvent se superposer. C'est le cas du pendule magnétique chaotique (Fig. 26).

#### • Sensibilités aux conditions initiales (SCI)

Une autre caractéristique des systèmes chaotiques est leur **sensibilité aux conditions initiales (SCI)** : pour un système chaotique, les trajectoires correspondant à des conditions initiales proches divergent. Les deux exemples du §5.1.1 sont des systèmes déterministes mais non intégrables : si les conditions initiales sont les mêmes, on a la même trajectoire dans l'espace des phases. Le déterminisme impose l'unicité des trajectoires dans l'espace des phases.

- Pour un système déterministe **régulier** (non chaotique), deux trajectoires initialement proches dans l'espace des phases se décalent de façon **linéaire** (les trajectoires restent corrélées à tout temps). C'est le cas du pendule magnétique régulier (Fig. 27).

- Pour un système **chaotique**, une petite différence entre les conditions initiales s'amplifie et la distance entre deux trajectoires initialement proches augmente **exponentiellement**. Si on a deux conditions initiales  $CI_1$  et  $CI_2$  telles que  $CI_1 = CI_2 + \epsilon_0$  à  $t = 0$  où  $\epsilon_0$  est une petite perturbation, alors la distance entre les deux trajectoires se comporte comme  $\epsilon(t) = \epsilon_0 e^{\lambda t}$  (voir §5.3.2 sur les exposants de Liapunov). C'est le cas du pendule magnétique chaotique (Fig. 28). La **précision** à laquelle sont connues les conditions initiales d'un système chaotique est donc cruciale (exemple du climat et 'butterfly effect' de Lorenz, 1972).

### 5.1.3 Conditions pour le chaos déterministe

Pour qu'un système déterministe soit chaotique, il faut que la **dimension de l'espace des phases**  $N$  soit telle que  $N \geq 3$  et que le système soit **non linéaire**.

#### • Dimension de l'espace

- Si  $N \leq 2$  (topologie  $\mathbb{R}^2$ ), la dynamique reste **simple** et les solutions convergent vers un point fixe ou vers un cycle limite (solution périodique = comportement le plus complexe possible si  $N = 2$ ). C'est le **théorème de Poincaré-Bendixson**.

- Si  $N \geq 3$  (ou si  $N = 2$  dans un espace des phases de topologie non triviale, par exemple un anneau de Moebius), des comportements **complexes** sont possibles et les solutions peuvent être chaotiques.

➤ Remarque 1 : dans les deux exemples du §5.1.1, on a bien  $N = 3$ .

➤ Remarque 2 : on peut passer d'un système dynamique à  $N = 2$  dimensions à un système dynamique à  $N = 3$  dimensions par **forçage temporel à une période  $T$**  et les trajectoires peuvent alors devenir chaotique. C'est le cas du pendule non linéaire forcé (voir §5.2.1 ci-dessous).

### • Systèmes hamiltoniens vs. systèmes dissipatifs

Les **systèmes hamiltoniens** sont conservatifs et il y a conservation des aires (ou volumes) dans l'espace des phases. Il n'y aura donc pas d'attracteurs dans les systèmes hamiltoniens (voir §5.2). Au contraire, dans les **systèmes dissipatifs**, il n'y a pas conservation des aires (ou volumes) dans l'espace des phases et les trajectoires peuvent être 'attirées' par des **attracteurs** (éventuellement 'étranges') (voir §5.3 et Figs. 29 et 30).

### • Universalité du chaos déterministe

On parle de **chaos déterministe** pour un système dont la dimension de l'espace des phases est  $N \geq 3$  et pour lequel les équations sont déterministes et non linéaires : il n'y a pas de 'hasard' mais le système est **imprédictible à long terme**. La théorie du chaos déterministe (1970-1990) est universelle et s'applique à de nombreux domaines (physique, économie, écologie, biologie...).

## 5.2 Chaos dans les systèmes hamiltoniens

On considère ici un système **hamiltonien** (= **conservatif**) **non linéaire intégrable** et une solution régulière  $\vec{X}(t)$  de ce système. On va perturber cette solution régulière par une perturbation variable  $\vec{\varepsilon}(t)$ . Si l'amplitude de la perturbation augmente à cause des non linéarités, on peut obtenir une solution chaotique  $\vec{X}(t) + \vec{\varepsilon}(t)$  de structure complexe dans l'espace des phases.

### 5.2.1 Systèmes à une fréquence, effets des non linéarités

#### • Traitement en perturbations

Comme nous le verrons sur les trois exemples ci-dessous, les **non linéarités** ont deux effets sur un système à une fréquence  $\omega$  (c'est-à-dire un système qui peut osciller à la fréquence  $\omega$ ) : 1) des **harmoniques** apparaissent aux fréquences  $2\omega, 3\omega, \dots$  ; et 2) la fréquence de oscillations **dépend de l'amplitude** de la perturbation  $\varepsilon$  soit  $\omega = \omega(\varepsilon)$ .

#### • Exemple du pendule

On considère le pendule non linéaire  $\ddot{\theta} = -\theta + \frac{\theta^3}{6}$  (voir §1.2.2) avec les conditions initiales à  $t = 0$  :  $\theta(0) = \varepsilon \ll 1$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ . On effectue le **développement perturbatif double** en  $\varepsilon$  sur  $\theta$  et  $\omega$  :

$$\theta(\varepsilon) = \varepsilon\theta_1 + \varepsilon^2\theta_2 + \varepsilon^3\theta_3 + \dots$$

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

A l'ordre 0, on a :  $\theta_1(t) = \cos(\omega t)$ . L'ordre 2 est automatiquement vérifié. A l'ordre 3, la **condition de solvabilité** permet d'éliminer le **terme résonant** (=terme 'séculaire' en  $t \sin t$  non physique car diverge aux temps longs) et  $\omega_2 = -1/16$ . On a donc :

$$\theta(\omega t) = \varepsilon \cos(\omega t) + \frac{\varepsilon}{192}(\cos(\omega t) - \cos(3\omega t)) \text{ et } \omega(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}.$$

La non-linéarité entraîne l'apparition d'**harmoniques** ( $3\omega$ ) et une **dépendance** de la fréquence en fonction de l'amplitude ( $\omega(\varepsilon)$ ).

• **Exemple du potentiel à deux puits** (Fig. 31)

On considère une particule dans un potentiel à deux puits  $U(q) = \frac{1}{4}q^4 - \frac{1}{2}q^2$  dont dérive la force  $f(q) = q - q^3$ . On se place au voisinage de  $q = 1$  et on pose  $u = q - 1 \sim 0$ . Sous la forme d'un système dynamique, on a :

$$\begin{cases} v = \dot{u} \\ \frac{dv}{dt} = -2u - 3u^2 - u^3 \end{cases}$$

- On traite le terme en  $u^2$  en **perturbation simple** en  $\varepsilon$  de sorte que  $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$ . A l'ordre 0, on a :  $u_0 = A \cos \omega_0 t$  avec  $\omega_0^2 = 2$ . A l'ordre 1 en  $\varepsilon$ , on trouve :  $u_1 = -\frac{3A^2}{4} + \frac{A^2}{4} \cos 2\omega_0 t$  (ce qui traduit un déplacement de la position moyenne vers les  $u < 0$ , ou de façon équivalente vers les  $q < 1$ , donc vers la partie moins raide du potentiel  $U(q)$ , voir schéma).

- On traite le terme en  $u^3$  en **perturbation double** en  $\varepsilon$  sur  $u$  et sur  $\omega$ . Comme pour le pendule simple, le développement double permet d'annuler le **terme séculaire** (= condition de solvabilité). On pose donc :

$$u(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$$

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \dots$$

A l'ordre 0, on retrouve :  $u_0 = A \cos \omega_0 t$  avec  $\omega_0^2 = 2$ . A l'ordre 1, on choisit  $\omega_1$  pour faire disparaître le terme séculaire, soit  $\omega_1 = \frac{3A^2}{8\omega_0}$  et  $\omega(\varepsilon) = \omega_0(1 + \varepsilon \frac{3A^2}{8\omega_0^2})$ .

Là encore, les non-linéarités entraînent l'apparition d'**harmoniques** ( $2\omega, 3\omega$ ) et la fréquence des oscillations **dépend de l'amplitude** ( $\omega(\varepsilon)$ ).

• **Exemple de la boussole dans un champ fixe**

On considère une boussole d'aimantation  $M = \|\vec{M}\|$  et de moment d'inertie  $J$  dans un champ magnétique fixe  $\vec{B}$ . On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$ . Les équations du mouvement mises sous la forme d'un système dynamique sont :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{MB}{J} \sin \theta \end{cases}$$

- Si  $B = 0$ ,  $\dot{\theta} = \text{cte}$ , la boussole tourne à vitesse angulaire constante et les trajectoires dans l'espace des phases sont des droites horizontales. Si  $B \neq 0$ , il y a apparition d'une **résonance** dans l'espace des phases en  $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$ . On peut tracer les trajectoires dans l'espace des phases pour caractériser la structure de la résonance lorsque  $B$  augmente : le champ magnétique tord le flot (initialement horizontal) et sépare les orbites pour faire apparaître un **centre** en  $(0, 0)$  et deux **points cols** en  $(\pm\pi, 0)$  et insérer un îlot d'oscillations autour du point centre. Sur la **séparatrice** entre les **trajectoires passantes** (de la forme  $\theta(t) = \omega t + \varphi$ ) et les **trajectoires oscillantes** (de la forme  $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$ ), on a  $\theta_{max} = \pm\pi$  et  $\dot{\theta}_{max} = 2\sqrt{\frac{MB}{J}} = 2\omega_0$  (en  $\theta = 0$ ) où  $\omega_0$  est la fréquence des petites oscillations. La valeur de  $\dot{\theta}_{max}$  est appelé **demi-largeur de la résonance** (c'est-à-dire la moitié de son extension en  $\theta = 0$  sur l'axe des  $\dot{\theta}$  (axe vertical) (cf. schéma).
- De manière générale, on parle de **résonance** lorsque des îlots d'oscillations apparaissent dans l'espace des phases.

### 5.2.2 Systèmes à deux fréquences

A l'aide d'exemples, nous illustrons ici de façon qualitative la **transition vers le chaos** dans les systèmes hamiltoniens (=conservatifs). Le forçage à une fréquence donnée  $\Omega$  ajoute une dimension à l'espace des phases et fait apparaître des résonances : un système intégrable peut alors devenir non intégrable et chaotique, sous certaines conditions de **recouvrement des résonances** (=critère de stochasticité, voir l'exemple de la boussole sous forçage ci-dessous).

#### • Exemple de la boussole dans un champ fixe et un champ tournant

La boussole de l'exemple précédent (§5.2.1) est mise en présence d'un champ magnétique  $\vec{B}_1$  tournant à une fréquence (pulsation)  $\Omega = \text{cte}$  (champ de forçage) qui se superpose au champ fixe  $\vec{B}_0$ . En notant  $\phi = \Omega t$  l'angle entre le champ tournant et le champ fixe, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{MB_0}{J} \sin \theta - \frac{MB_1}{J} \sin(\theta - \phi) \\ \frac{d\phi}{dt} = \Omega \end{cases}$$

Le système est de dimension  $N = 3$  et non linéaire donc peut présenter des solutions chaotiques. Pour comprendre le cas général où les deux champs sont présents, on considère tout d'abord les cas simples où un seul champ est présent.

- Si  $B_0 \neq 0$  et  $B_1 = 0$  (champ tournant nul) : on est ramené à la boussole dans un champ fixe du paragraphe précédent (§5.2.1) et le portrait de phase présente **une résonance** au point  $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 0)$ .
- Si  $B_0 = 0$  et  $B_1 \neq 0$  (champ fixe nul) : le changement de variable  $\theta_1 = \theta - \phi = \theta - \Omega t$ , soit  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta} - \Omega$ , permet de montrer la rotation du champ entraîne un simple **décalage de la résonance** du point  $(0, 0)$  vers le point  $(0, \Omega)$  de l'espace des phases.
- Si  $B_0 \neq 0$  et  $B_1 \neq 0$  (champ fixe et champs tournant non nuls) : on **superpose les deux résonances** obtenues dans les deux cas précédents. La résonance due au champ fixe centrée en

$(0, 0)$  a pour demi-largeur  $2\sqrt{\frac{MB_0}{J}} = 2\omega_0$ . La résonance due au champ tournant centrée en  $(0, \Omega)$  a pour demi-largeur  $2\sqrt{\frac{MB_1}{J}} = 2\omega_1$ . Si les deux résonances sont **bien séparées**, les trajectoires dans l'espace des phases restent régulières. En revanche, si les deux résonances **se rapprochent**, les deux résonances se 'mélangent' et des trajectoires chaotiques apparaissent. Qualitativement, la boussole ne sait plus quel champ choisir et le chaos apparaît car une trajectoire ne peut pas appartenir aux deux résonances à la fois. De manière générale, on définit un paramètre  $S$  appelé **paramètre ou facteur de stochasticité** tel que si  $S \geq 1$ , les résonances se recouvrent et des trajectoires chaotiques existent. C'est le **critère de stochasticité**.

Ici, on définit  $S$  par :  $S = \frac{2(\omega_0 + \omega_1)}{\Omega} = \frac{2\sqrt{\frac{MB_0}{J}} + 2\sqrt{\frac{MB_1}{J}}}{\Omega}$ . Les résonances se recouvrent si  $S \geq 1$ . A valeur du champ fixe  $B_0$  fixée, ce sera le cas si le champ tournant  $B_1$  est suffisamment grand ou si la fréquence de forçage  $\Omega$  est suffisamment petite.

### • Exemple du pendule paramétrique

On considère un pendule pesant (masse  $m$ , longueur  $l(t)$ ) dont la longueur varie à la fréquence de forçage  $\Omega$  de sorte que  $l(t) = l(1 + a \cos \Omega t)$ . L'équation du mouvement est alors :  $ml^2\ddot{\theta} = -mgl(1 + a \cos \Omega t) \sin \theta$  où  $\theta$  est l'angle que fait le pendule avec la verticale. Elle se met sous la forme du système dynamique suivant, avec  $\phi = \Omega t$  :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{ag}{2l} \sin(\theta - \phi) - \frac{ag}{2l} \sin(\theta + \phi) \\ \frac{d\phi}{dt} = \Omega \end{cases}$$

Ce système est analogue à une boussole soumise à 3 champs : un champ constant qui induit une résonance à  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  et deux champs de même amplitude (proportionnelle à  $a$ ) et tournant aux fréquences  $\pm\Omega$ . **Trois résonances** apparaissent dans l'espace des phases : aux points  $(0, 0)$ ,  $(0, \Omega)$  et  $(0, -\Omega)$  (chéma). Si les résonances se superposent, des trajectoires chaotiques apparaissent.

### • Exemple du mapping standard

Le système dynamique discret (application discrète où le temps est discrétisé) suivante représente une boussole subissant des impulsions de champ magnétique à la fréquence  $\Omega/2\pi$  :

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n - K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \end{cases}$$

L'équivalent continu est :

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ \frac{d\dot{\theta}}{dt} = 2\pi M \sin \theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - 2n\pi) = 2\pi M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sin(\theta - nt) \end{cases}$$

Le système présente donc une **infinité de résonances** en  $\dot{\theta} = n$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 5.2.3 Section de Poincaré et application de premier retour

- **Coupe ou section de Poincaré** (Figs. 32, 33, 34)

- Cas particulier d'un forçage à une fréquence  $\Omega$  :

Le forçage ajoute une dimension à l'espace des phases :  $\phi = \Omega t$  soit  $\frac{d\phi}{dt} = \Omega$  (+ condition initiale  $\phi(t=0)$  donnée). Si on part d'un système à  $N = 2$  dimensions, par exemple  $(\theta, \dot{\theta})$ , on a après forçage un système à  $N = 3$  dimensions  $(\theta, \dot{\theta}, \phi)$ . Pour représenter l'espace des phases à 3 dimensions, on peut couper les trajectoires par des plans  $\phi = \text{cte}$ . C'est ce qu'on appelle une **coupe ou section de Poincaré**. On peut alors observer le système à des intervalles de temps réguliers  $t_n = n\frac{2\pi}{\Omega}$ , c'est-à-dire que l'on effectue une **stroboscopie du système** à la fréquence  $\Omega$  (voir Figs. 32, 33, et 34). On obtient une suite de points d'intersection de la trajectoire avec le plan  $\phi = \text{cte}$  à intervalles de temps réguliers.

- Cas général sans forçage :

Dans le cas général où il n'y a pas de forçage (système autonome), une **section de Poincaré** est définie comme l'ensemble des points d'intersection d'une trajectoire de l'espace des phases avec un plan  $(II)$  quelconque de l'espace des phases. On obtient une suite de points d'intersection de la trajectoire avec le plan  $(II)$  choisi, mais ces points ne sont pas forcément séparés par le même intervalle de temps comme c'était le cas pour un système forcé. Les sections de Poincaré permettent de représenter des trajectoires complexes dans l'espace des phases, mais il faut varier le plan de coupe si on veut obtenir toute la dynamique du système.

- **Application de premier retour** (Figs. 35 et 36)

On considère une trajectoire d'un espace des phases de dimension  $N = 3$  qui coupe le plan  $(II)$  en un point  $M_1$  à l'instant  $t_0$ , puis en un point  $M_2$  à l'instant  $t_0 + T$ . Dans le cas d'un système hamiltonien (conservatif) forcé,  $T$  est la **période du forçage**. Dans le cas d'un système non hamiltonien (dissipatif) présentant un cycle limite,  $T$  est la **période du cycle limite**. Les intersections de la trajectoire avec le plan  $(II)$  à des intervalles de temps  $T$  définissent une suite de points  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ . On définit l'**application de premier retour** comme l'application  $\Phi$  telle que  $M_{n+1} = \Phi(M_n)$  (Fig. 35).

- Cas du **cycle limite** pour un système non hamiltonien (voir §5.3). Par définition, un point  $P$  du plan  $(II)$  et appartenant au cycle limite est un **point fixe de  $\Phi$**  si  $\Phi(P) = P$ . Si le cycle est stable, alors la suite des points  $M_n$  tend vers le point  $P$  (Fig. 36). Etudier la stabilité d'un cycle limite revient donc à étudier la stabilité de l'application de premier retour  $\Phi$  (voir §5.3.2).

- De manière générale, pour une dimension  $N$  quelconque de l'espace des phases,  $(II)$  est un hyperplan de dimension  $N - 1$ , la section de Poincaré est une hypersurface de dimension  $N - 1$  et transverse au cycle limite au point  $P$ .

### 5.2.4 Exemple de la boussole dans un champ fixe et un champ tournant

- **Trajectoires passantes entre deux résonances** (Figs. 34 et 37)

On revient sur l'exemple de la boussole dans un champ tournant. La perturbation due au champ tournant induit un forçage à la fréquence  $\Omega$  et l'apparition d'une résonance supplémentaire au point  $(\dot{\theta}, \theta) = (0, \Omega)$  dans l'espace des phases en plus de la résonance au point  $(\dot{\theta}, \theta) = (0, 0)$  (voir §5.2.2). On s'intéresse ici aux **trajectoires passantes entre les deux résonances** (de la forme  $\theta(t) = \omega t + \varphi$ ). On suppose que ces trajectoires sont faiblement perturbées par les deux résonances (trajectoires quasi horizontales) de sorte que  $\dot{\theta} \simeq \text{cte} = \omega$  et donc  $\ddot{\theta} \simeq 0$  (Fig. 37). L'angle  $\theta$  vérifie l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} = -\varepsilon \frac{MB_0}{J} \sin \theta - \varepsilon \frac{MB_1}{J} \sin(\theta - \Omega t)$$

où le premier terme représente le champ fixe et le deuxième terme représente le champ tournant. On a introduit  $\varepsilon \ll 1$  pour spécifier que  $\ddot{\theta}$  est petit sur les trajectoires considérées. On pose  $\mathcal{M} = \frac{MB_0}{J}$  et  $\mathcal{P} = \frac{MB_1}{J}$  pour simplifier l'écriture et donc :  $\ddot{\theta} = -\varepsilon \mathcal{M} \sin \theta - \varepsilon \mathcal{P} \sin(\theta - \Omega t)$ .

- On cherche une solution en perturbation soit  $\theta = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots$  :

➤ Ordre 0 : on trouve  $\theta_0(t) = \omega t + \varphi$  où  $\varphi$  est une constante.

➤ Ordre 1 : on trouve  $\theta_1(t) = \frac{\mathcal{M}}{\omega^2} \sin(\omega t + \varphi) + \frac{\mathcal{P}}{(\omega - \Omega)^2} \sin((\omega - \Omega)t + \varphi) = \frac{\mathcal{M}}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{\mathcal{P}}{(\omega - \Omega)^2} \sin \theta'_0$  où  $\theta_0 = \omega t + \varphi$  et  $\theta'_0 = (\omega - \Omega)t + \varphi$ . Le premier terme est une perturbation à la fréquence  $\omega$  de rotation de la boussole due au champ fixe (tournant à la fréquence  $\omega$  dans le référentiel de la boussole) et le deuxième terme est dû au champ tournant à la fréquence  $\Omega$  (tournant à la fréquence  $\omega' = \omega - \Omega$  dans le référentiel de la boussole).

➤ Ordre 2 : on trouve  $\theta_2(t) = -\mathcal{M} \cos \theta_0 \left[ \frac{\mathcal{M}}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{\mathcal{P}}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right] - \mathcal{M} \cos \theta'_0 \left[ \frac{\mathcal{M}}{\omega^2} \sin \theta_0 + \frac{\mathcal{P}}{\omega'^2} \sin \theta'_0 \right]$ . Les termes en  $\cos \theta_0 \sin \theta_0$  et  $\cos \theta'_0 \sin \theta'_0$  correspondent à des perturbations aux harmoniques  $2\omega$  et  $2\omega'$  respectivement. Les termes en  $\cos \theta_0 \sin \theta'_0$  et  $\cos \theta'_0 \sin \theta_0$  donnent des termes en  $\omega \pm \omega'$  et  $\omega' \pm \omega$ . Puisque  $\omega' = \omega - \Omega$ , si  $\omega = \Omega/2$  alors  $\omega' = -\Omega/2$  et  $\omega + \omega' = 0$ . Dans ce cas, on a apparition d'un terme en  $\sin 2\varphi$  tel que  $\ddot{\theta}_2 \propto -\sin 2\varphi$  qui donne naissance à une divergence non physique en  $-t^2 \sin 2\varphi$ . On parle d'**accrochage 1/2**. Comme pour le terme séculaire du pendule pesant ou de la particule dans le potentiel à deux puits (voir §5.2.1), on doit faire un double développement en perturbation.

- **Cas de l'accrochage 1/2** ( $\omega = \Omega/2$ ). Au lieu de développer la fréquence  $\omega(\varepsilon)$  de  $\theta = \omega t + \varphi = \frac{\Omega}{2}t + \varphi$  comme pour les exemples du §5.2.1, on laisse ici varier la phase  $\varphi = \varphi(\varepsilon, t)$ . Pour simplifier, on se place dans le cas où les champs fixe et tournant sont de même intensité soit  $\mathcal{P} = \mathcal{M}$ . La phase  $\varphi$  vérifie alors  $\ddot{\varphi} = -2\varepsilon \mathcal{M} \sin \varphi \cos \frac{\Omega}{2}t$ . On a donc trois points fixes correspondants à  $\varphi = 0$  ou  $\varphi = \pm\pi$  :  $(\dot{\theta}, \theta) = (\Omega/2, 0)$  et  $(\Omega/2, \pm\pi)$ . Pour résoudre en perturbation au voisinage du point fixe  $(\Omega/2, 0)$ , on suppose que la phase est petite et oscille lentement à une fréquence  $\varepsilon\omega_0$  autour de 0 de sorte que  $\varphi(\varepsilon, t) = e^{j\varepsilon\omega_0}(u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \varepsilon^2 u_2(t) + \dots)$ . Le calcul permet de trouver la forme de la fréquence des oscillations de phase  $\varepsilon\omega_0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{8\mathcal{M}^2}{\Omega^2}$ . Cette oscillation de phase correspond aux trajectoires elliptiques autour des trois points fixes de la figure 34.

- **Spectre de la vitesse et nombre de rotation** (Figs. 34 et 37). L'étude précédente montre que des fréquences multiples de  $\omega$  (due au champ constant) et de  $\omega' = \omega - \Omega$  (due au champ tournant) apparaissent dans le mouvement de rotation de la boussole à cause des non linéarités. De manière générale, aux ordres plus élevés en  $\varepsilon$ , on peut montrer que le spectre en puissance de la vitesse  $\dot{\theta}$  présente des **raies aux combinaisons linéaires** de  $\omega$  et  $\omega'$  soit aux fréquences



$p\omega \pm q\omega'$  où  $p, q \in \mathbb{Z}$  (voir Fig. 37). A chaque fois que le rapport  $\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\omega}{\omega - \Omega} = \frac{p}{q}$  est **rationnel**, il y a accrochage en fréquence : une trajectoire passante se scinde en  $q$  petites résonances et il apparaît  $q$  points centres et  $q$  points cols sur la trajectoire (plus  $q$  est petit, plus l'amplitude de résonances secondaires est grande, comme pour l'accrochage  $1/2$ , figure 34). Pour déterminer la stabilité d'une trajectoire passante, on définit le **nombre de rotation** par  $\sigma = \frac{\omega}{\Omega}$  (remarques : 1) avec cette définition  $0 \leq \sigma \leq 1$  et  $\sigma = 1/2$  pour l'accrochage  $1/2$ ; 2) on peut aussi définir de façon équivalente le nombre de rotation par  $\sigma = \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\omega}{\omega - \Omega}$ ).

➤ Si  $\sigma$  est rationnel, il y a accrochage en fréquence et la trajectoire se **déstabilise en résonances secondaires**.

➤ Si  $\sigma$  est **irrationnel**, il n'y a pas d'accrochage en fréquence, le développement en  $\varepsilon$  converge et la trajectoire peut passer entre les deux résonances principales en restant **régulière** (tant que le facteur de stochasticité  $S$  n'est pas trop grand, voir §5.2.2 ci-dessus et la discussion sur les trajectoires appartenant à une résonance ci-dessous). Ceci est une illustration du **théorème KAM (Kolmogorov/Arnold/Moser)** : certaines trajectoires (appelées '**tores de KAM**') d'un système dynamique non intégrable restent régulières.

• **Trajectoires appartenant à une résonance** (Fig. 38)

On considère maintenant les **trajectoires appartenant à une résonance**, c'est-à-dire les trajectoires oscillantes autour du champ fixe à la fréquence  $\omega$  (de la forme  $\theta(t) = \theta_m \sin(\omega t + \varphi)$ ). A cause des non linéarités, la fréquence  $\omega$  dépend de l'amplitude maximale des oscillations  $\theta_m$  (ou de la vitesse angulaire  $\dot{\theta}_m$ ) et varie continuellement depuis la fréquence des petites oscillations  $\omega_0 = \sqrt{\frac{MB}{J}}$  jusqu'à 0 lorsque l'amplitude des oscillations augmente et que l'on s'éloigne de la résonance. Comme pour les trajectoires passantes, il va donc y avoir une succession d'accrochages en fréquence et de trajectoires régulières ('tores de KAM') à mesure que  $\omega$  varie de  $\omega_0$  à 0 : des îlots de **résonances secondaires** (trajectoires périodiques) apparaissent en fonction du caractère rationnel du **nombre de rotation** par  $\sigma = \frac{\omega}{\Omega}$ .

- Evolution de l'espace des phases en fonction du **facteur de stochasticité**. Dans le cas particulier où le champ fixe et le champ tournant ont la même amplitude ( $B_0 = B_1$ ), le facteur de stochasticité défini au §5.2.2 s'écrit :  $S = \frac{2(\omega_0 + \omega_1)}{\Omega} = \frac{2\sqrt{\frac{MB_0}{J}} + 2\sqrt{\frac{MB_1}{J}}}{\Omega} = \frac{4\omega_0}{\Omega}$  ( $S$  augmente si l'amplitude du champ fixe  $B_0$  augmente; si  $S > 1$  les résonances se recouvrent et le chaos peut apparaître, sauf au centre de la résonance). Le nombre de rotation est donc **borné** par le facteur de stochasticité :  $\sigma = \frac{\omega}{\Omega} < \frac{\omega_0}{\Omega} = \frac{S}{4}$ , et la valeur du paramètre de stochasticité limite la valeur maximale du nombre de rotation. Lorsque  $\sigma = \frac{p}{q}$  est rationnel, l'amplitude des résonances secondaires est plus grande si  $q$  est petit et donc si  $\sigma$  est grand. Par exemple : pour atteindre  $\sigma = 1/3$ , il faut avoir  $S \geq 4/3$ ; pour atteindre  $\sigma = 1/2$ , il faut avoir  $S \geq 2$ .

- Hierarchie des résonances quand le facteur de stochasticité  $S$  augmente. La figure 38 montre les sections de Poincaré de la boussole pour des valeurs croissantes de  $S$ . Lorsque  $S$  augmente (respectivement  $S = 0.8, 1, 4/3, 2$ ), le nombre de rotation peut atteindre des valeurs croissantes (respectivement  $\sigma = 1/5, 1/4, 1/3, 1/2$ ). Pour les valeurs faibles de  $S$  et  $\sigma$ , des îlots d'oscillations apparaissent au centre de la résonance. Puis lorsque les valeurs de  $S$  et  $\sigma$  augmentent, la structure

change : des îlots se forment à distance finie du centre et, lorsque  $\sigma \sim 1/2$ , les résonances se scindent en deux. Une résonance principale donne naissance à deux **résonances secondaires** (dédoublément de fréquence) et l'espace des phases prend une **structure autosimilaire**.

- **Stochasticité et chaos à grande échelle** . Lorsque le facteur de stochasticité augmente, le nombre de trajectoires stochastiques (pour lesquelles  $\sigma$  est rationnel) augmente alors que le nombre de trajectoires régulières (= 'tores de KAM', près des coeurs des résonances, pour lesquelles  $\sigma$  est irrationnel) diminue. Les **domaines chaotiques** de l'espace des phases, séparés des **domaines réguliers** par une trajectoire régulière, s'étendent alors que les domaines réguliers rétrécissent. Au-delà d'une certaine valeur de  $S$  (élevée), la dernière trajectoire régulière (dernier tore de KAM) disparaît et on parle alors de chaos à grande échelle : les trajectoires chaotiques sont enchevêtrées et explorent tout l'espace et le voisinage de toutes les résonances.

### 5.3 Chaos dans les systèmes dissipatifs

On considère ici des systèmes **non hamiltoniens**, c'est-à-dire des systèmes dissipatifs possédant une (ou plusieurs) source de dissipation, par exemple des frottements. Nous allons voir que les frottements simplifient l'analyse de ces systèmes, en comparaison des systèmes hamiltoniens moins intuitifs, grâce à l'existence de **cycles limites**. En fonction de l'**instabilité du cycle limite**, il existe trois types de **transition vers le chaos**.

#### 5.3.1 Effet des frottements

Pour un système non hamiltonien, les frottements ramènent le système vers un minimum d'énergie potentielle. Contrairement aux systèmes hamiltoniens pour lesquels chaque condition initial détermine une trajectoire unique, des conditions initiales différentes peuvent aboutir au même état d'équilibre final (pour  $t \rightarrow \infty$ ). Dans ce sens, les systèmes dissipatifs sont plus simples que les systèmes hamiltonien puisque les frottements permettent de sélectionner certaines trajectoires dans l'espace des phases. Par exemple, les trajectoires 2D dans l'espace des phases de l'oscillateur harmonique amorti  $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$ , convergent vers un point 1D de l'espace des phases : en spirale vers le foyer attractif stable  $(0,0)$  si  $4km > \gamma^2$  (solution libre :  $x_0(t) = x_{t=0}e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos(\frac{\sqrt{4km-\gamma^2}}{em}t + \varphi)$  ) ou en amortissement surcritique vers le noeud attractif stable  $(0,0)$  si  $4km < \gamma^2$  (voir §2.3.1 et Fig. 11).

##### • Contraction des aires

Pour un système **dissipatif sans apport d'énergie** (ce n'est pas le cas pour l'oscillateur de Van der Pol par exemple), toutes les trajectoires terminent à l'origine  $(0,0)$  donc tout volume de l'espace des phases se **contracte** (voir §2.1.2). Si le système dynamique est  $\dot{\vec{X}} = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X})$  alors  $\text{div } \mathcal{F}(\vec{X}) = \sum_j \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial x_j} < 0$ .

##### • Attracteurs étranges

Pour un système **dissipatif avec apport d'énergie** (système hors équilibre, par exemple amplification via une résistance négative), il existe des **cycles limites** qui attirent les trajectoires dans

l'espace des phases. La **déstabilisation** de ces cycles limites conduit à l'apparition d'**attracteurs 'étranges'** qui traduisent la présence de chaos déterministe et, comme les cycles limites, attirent les trajectoires.

### 5.3.2 Instabilité des cycles limites

- **Exemple de l'oscillateur harmonique forcé** (Fig. 39)

On considère l'oscillateur harmonique amorti forcé à la fréquence  $\omega$  :  $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = a \cos \omega t$  (voir §2.3.1). Le système dynamique correspondant a  $N = 3$  dimensions :  $(x, \dot{x}, \phi = \omega t)$ . Le système est linéaire. On superpose la solution forcée oscillante à la fréquence  $\omega$   $x_1(t) = \frac{a}{m(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega} \cos \omega t$  (où  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ) à la solution libre  $x_0(t)$  qui correspond à un régime transitoire et relaxe vers  $(0, 0)$  (voir §5.3.1 ci-dessus) pour obtenir la solution générale :  $x(t) = x_1(t) + x_0(t)$ . Dans l'espace des phases  $(x, \dot{x})$ , la solution forcée oscillante  $x_1(t)$  est une **ellipse** et la solution libre relaxante  $x_0(t)$  est une **spirale** aboutissant en  $(0, 0)$ . La **superposition** des deux solutions  $x(t)$  est donc une trajectoire qui spirale vers un **cycle limite** pour  $t \rightarrow \infty$  (schéma et Fig. 39). Le cycle limite correspond à un régime permanent oscillatoire. Il est **stable** dans le cas de l'oscillateur harmonique amorti car le système est linéaire. Ce sont les non linéarités qui vont pouvoir déstabiliser les cycles limites et conduire au chaos dans les systèmes dissipatifs.

- **Théorie de Floquet (stabilité linéaire des cycles limites)**

On suppose que le système dynamique non hamiltonien  $\dot{\vec{X}} = \frac{d\vec{X}(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X})$  admet comme solution périodique un **cycle limite de période  $T$**  noté  $\vec{X}_*$ . Le cycle limite  $\vec{X}_*$  vérifie donc  $\frac{d\vec{X}_*(t)}{dt} = \mathcal{F}(\vec{X}_*)$ . On perturbe le cycle limite par une petite perturbation  $\vec{\varepsilon}(t)$  soit  $\vec{X} = \vec{X}_* + \vec{\varepsilon}(t)$ .  $\vec{X}$  étant solution du système dynamique, la perturbation vérifie  $\frac{d\vec{\varepsilon}(t)}{dt} = [\mathcal{L}_{\vec{X}_*}] \vec{\varepsilon}$  où  $[\mathcal{L}_{\vec{X}_*}]$  est l'**application tangente** à  $\mathcal{F}$  en  $\vec{X}_*$  (ou **opérateur tangent**, ou **matrice Jacobienne** en  $\vec{X}_*$ ). Puisque  $\vec{X}_*$  est périodique de période  $T$ , la perturbation peut se mettre sous la forme  $\vec{\varepsilon}(t) = e^{st} \vec{w}(t)$  où  $\vec{w}(t)$  est périodique de période  $T$ . La **théorie de Floquet** consiste à effectuer une **stroboscopie du cycle limite** à la période  $T$  pour ramener le système continu étudié à un système itératif (application discrète). On va donc étudier la stabilité d'un point du cycle dans une **section de Poincaré** (plan perpendiculaire au cycle, voir §5.2.3).

- **Section de Poincaré et application de premier retour.** Le cycle limite  $\vec{X}_*$  coupe la section de Poincaré en une suite de points  $\vec{X}_n$  tous séparés d'un temps  $T$  (où  $n$  est l'indice du tour sur le cycle limite) et tels que  $\vec{X}_{n+1} = \Phi(\vec{X}_n)$  où  $\Phi$  est l'**application de premier retour** (voir §5.2.3) définie par  $\Phi(\vec{X}_*(t)) = \vec{X}_*(t + T)$  dans la section de Poincaré.

- **Stabilité du cycle et stabilité de l'application de premier retour.** Etudier la stabilité du cycle (globalement, sur la courbe  $\vec{X}_*(t)$ ) revient à étudier la stabilité de l'application de premier retour  $\Phi$  (localement, aux points  $\vec{X}_n$  dans la section de Poincaré). On considère un point  $P$  du cycle limite  $\vec{X}_*$  et appartenant à la section de Poincaré ( $\Pi$ ), et un point  $M(\vec{X} = \vec{X}_* + \vec{\varepsilon})$  appartenant à la section de Poincaré ( $\Pi$ ) et proche de  $P$ . On dit que le cycle est **stable** si le point  $M$  s'approche de  $P$  au cours du temps et que le cycle est **instable** si  $M$  s'éloigne de  $P$ . Si

on note  $M_1$  (resp.  $M_2, M_3, \dots, M_n$ ) la position de  $M$  au temps  $t+T$  (resp.  $t+2T, t+3T, \dots, t+nT$ ), on a, par définition de l'application de premier retour,  $M_2 = \Phi(M_1) = \Phi(P) + [J_P(\Phi)] \vec{\epsilon}$  où  $[J_P(\Phi)] = \left[ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} \right]_P$  est la **matrice jacobienne** de  $\Phi$  en  $P$  (aussi appelée **matrice de Floquet**).

Après  $n$  itérations et puisque  $P$  est sur le cycle limite ( $\Phi(P) = P$ ), on aura :  $M_n = P + [J_P(\Phi)]^n \vec{\epsilon}$ . Le cycle est **linéairement stable** si toutes les valeurs propres de  $[J_P(\Phi)]$  (appelées **multiplicateurs de Floquet**) sont de module **inférieur ou égal à 1**. Le cycle est **linéairement instable** si au moins une valeur propre de  $[J_P(\Phi)]$  est de module **supérieur à 1**.

### • Trois cas d'instabilités d'un cycle limite

Comme pour la théorie des bifurcations d'un système continu (voir §3), il y a **déstabilisation d'un cycle stable** (bifurcation) si une **valeur propre traverse le cercle unité** lorsqu'un paramètre de contrôle varie. C'est l'équivalent pour un système discrétisé (par stroboscopie à la période  $T$ ) de la perte d'hyperbolicité d'un point fixe pour un système dynamique continu (voir schéma et §3). Comme pour les bifurcations d'un système continu (voir §3), la théorie des **formes normales** permet de classer les différents cas possibles. On note  $\lambda$  la valeur propre qui traverse le cercle unité et on distingue trois types d'instabilités selon que  $\lambda$  traverse le cercle unité en  $+1$ ,  $-1$  ou en  $\alpha \pm i\beta$  (cas générique).

- **Cas 1** :  $\lambda = +1$  - Intermittence de type I. La forme normale est  $X_{n+1} = \epsilon + X_n + aX_n^2$  où  $\epsilon$  est le paramètre de contrôle. C'est l'équivalent de la **bifurcation noeud-col** pour un système continu (voir §3.2.2). L'**intermittence de type I** est caractérisée par une succession de 'bouffées' laminaires (régulières) entrecoupées de chaos.

Exemples : oscillateur de Duffing forcé périodiquement, convection de Rayleigh-Bénard.

- **Cas 2** :  $\lambda = -1$  - Fourches super-critique (doublement de période) et sous-critique (intermittence de type III). La forme normale est  $X_{n+1} = -(1 + \epsilon)X_n + aX_n^2 + bX_n^3$ .

➤ Si  $a^2 + b > 0$ , on a une bifurcation **fourche super-critique** caractérisée par une cascade de **dédoublment de période** appelée cascade sous harmonique pour des valeurs  $\epsilon = \epsilon_n$  du paramètre de contrôle. Par analogie avec les transitions de phase (pour  $\epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n$ , la période diverge), on définit un exposant critique universel  $\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_n - \epsilon_{n-1}}{\epsilon_{n+1} - \epsilon_n} = 4.669201\dots$  appelé constante de Feigenbaum. Exemples : 'mapping' logistique ou quadratique, convection de Rayleigh-Bénard, boussole dissipative dans un champ tournant.

➤ Si  $a^2 + b < 0$ , on a une bifurcation **fourche sous-critique** appelée **intermittence de type III**. Exemple : convection de Rayleigh-Bénard.

- **Cas 3** : cas générique où  $\lambda$  traverse le cercle unité en  $\alpha \pm i\beta$ . La forme normale est  $z_{n+1} = e^{2j\pi\alpha_0} \left( (1 + \epsilon)z_n - g|z_n|^2 z_n \right)$  où  $\epsilon$  est le paramètre de contrôle et  $g = g_r + ig_i$ . C'est l'équivalent de la **bifurcation de Hopf** pour un système continu et elle trouve son origine dans les frottements non linéaires.

➤ Si la partie réelle de  $g$  est telle que  $g_r < 0$ , on est dans le cas **sous-critique (intermittence de type II, non observée expérimentalement)**.

➤ Si  $g_r > 0$ , on est dans le cas **super-critique** et on observe une **dynamique bipériodique** à deux fréquences de rotation (avec possibilité d'accrochage en fréquence analogue à l'accrochage observé pour un système hamiltonien à deux fréquences, voir §5.2.2 et §5.3.5 ci-dessous).

### 5.3.3 Instabilité des trajectoires, exposants de Lyapunov

Les propriétés de **sensibilité aux conditions initiales** (SCI) d'un système chaotique rendent les trajectoires instables. On parle d'**attracteur 'étrange'** car les trajectoires sont SCI et donc chaotiques. Pour quantifier les propriétés SCI et l'instabilité des trajectoires, on utilise les exposants de Lyapunov que nous introduisons ici sur l'exemple d'une itération 1D (dimension  $N = 1$ )  $X_{n+1} = F(X_n)$ .

- On considère deux **conditions initiales différentes proches**  $X_0$  et  $X_0 + \delta X_0$ . L'itération de la condition initiale  $X_0 + \delta X_0$  est proche de l'itération de la condition initiale  $X_0$  :  $F(X_0 + \delta X_0) = X_1 + \delta X_1$ . Puisque  $F(X_0) = X_1$  et  $\delta X_0 \ll X_0$ , on a :  $\delta X_1 = \left. \frac{dF}{dX} \right|_{X_0} \delta X_0$ . Après  $n$  itérations :  $\delta X_n = \prod_{i=0}^{n-1} \left. \frac{dF}{dX} \right|_{X_i} \delta X_0$ . On définit alors l'**exposant de Lyapunov** pour la condition initiale  $X_0$  comme  $\lambda(X_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \left. \frac{dF}{dX} \right|_{X_i} \right|$ . L'exposant de Lyapunov caractérise la **divergence** entre deux trajectoires proches et donc la stabilité des trajectoires. Si  $\lambda(X_0) > 0$ , alors les deux trajectoires proches initialement ( $X_0$  et  $X_0 + \delta X_0$ ) divergent et la trajectoire partant de  $X_0$  est chaotique.

- Exemple : itération dyadique (Fig. 40) :  $X_{k+1} = 2X_k \pmod{1}$  pour laquelle  $\lambda = \ln 2 > 0$  donc chaotique.

- La notion d'exposant de Lyapunov s'étend à des systèmes de dimension  $N > 1$  : dans ce cas, on a un **spectre d'exposants de Lyapunov** et le système est chaotique si l'exposant de Lyapunov le plus grand est positif.

### 5.3.4 Dimension d'un attracteur : autosimilarité et dimension fractale d'un attracteur étrange

#### • Définition de la dimension fractale

Pour caractériser les propriétés géométriques d'un attracteur étrange, on utilise la **dimension fractale de Hausdorff** définie par :  $d_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{N}(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon}$  où  $\mathcal{N}(\varepsilon)$  est le nombre de boules de taille  $\varepsilon$  nécessaires pour recouvrir l'attracteur. Le nombre de boules se comporte alors comme  $\mathcal{N}(\varepsilon) \sim (1/\varepsilon)^{d_f}$ .

#### • Exemples

- Segment  $[0, 1]$  :  $d_f = 1$
- Carré  $1 \times 1$  :  $d_f = 2$
- Ensemble de Cantor (schéma) :  $2^j$  segments de taille  $(1/3)^j$  donc  $d_f = \log 2 / \log 3 \simeq 0.63$
- Flocon de Koch (schéma) :  $3 \times 4^j$  segments de taille  $(1/3)^{j+1}$  donc  $d_f = \log 4 / \log 3 \simeq 1.26$
- Ensemble de Mandelbrot :  $d_f = 2$

### 5.3.5 Scénarios de transition vers le chaos

La classification des bifurcations des cycles limites vue au §5.3.2 permet de lister les différents scénarios de transition vers le chaos :

- **Bipériodisme** (Ruelle-Takens-Newhouse). Le chaos apparaît à la suite de **bifurcations de Hopf successives** (cas 3 super-critique du §5.3.2). Une première bifurcation de Hopf donne naissance à un cycle limite à la fréquence  $f_1$  qui se déstabilise suite à une deuxième bifurcation de Hopf. Il apparaît une deuxième fréquence  $f_2$  et un nouveau cycle limite se développe sur le premier : le système devient bipériodique et les trajectoires s'enroulent sur un tore  $\mathbb{T}^2$ .

➤ Si  $\alpha = f_1/f_2 = p/q$  est rationnel, il y a accrochage entre les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  et les trajectoires ne recouvrent pas tout le tore : le système n'est plus quasi-périodique et peut devenir chaotique par doublement de période ou intermittence (voir ci-dessous).

➤ Si  $\alpha = f_1/f_2$  est irrationnel, les trajectoires recouvrent tout le tore et le système quasi-périodique peut être déstabilisé par une troisième bifurcation de Hopf qui aboutit au chaos (scénario de Ruelle-Takens-Newhouse, Fig. 41).

- **Cascade sous-harmonique** (dédoublment de période, Feigenbaum). Une cascade de dédoublement de période (ou de fréquence) conduit au chaos (cas 2 super-critique du §5.3.2). Ce scénario est universel : les seuils de dédoublement de période sont identiques pour tous les systèmes qui suivent ce scénario.

- **Intermittence** (Pomeau-Manneville). Des phases régulières (laminaires) succèdent à des phases ('bouffées') chaotiques (cas 1, cas 2 sous-critique et cas 3 sous-critique du §5.3.2 pour l'intermittence de type I, de type III et de type II respectivement)(Fig. 42).

### 5.3.6 Exemples et illustrations

Les exemples suivants (non exhaustifs) montrent l'**universalité** des phénomènes concernés par les systèmes dynamiques chaotiques.

#### • Pendule amorti forcé (Fig. 43)

- Equation du mouvement :  $ml^2\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta} - mgl \sin \theta + f(t)$  où  $f(t) = f_0 \sin \omega t$  dans le cas d'un forçage sinusoïdal.

- Caractéristiques : chaos par dédoublement de fréquence, structure fractale autosimilaire des sections de Poincaré (voir Fig. 43).

#### • Application ou itération ('mapping') logistique (ou quadratique) (Fig. 44)

- Equation :  $X_{n+1} = rX_n(1 - X_n)$

- Caractéristiques : chaos par dédoublement de période (voir Fig. 44).

#### • Itération dyadique (Fig. 40)

- Equation :  $X_{n+1} = 2X_n \pmod{1}$

- Caractéristiques : chaos mais non déterministe ici (application pas inversible, une image a deux antécédents).

• **Attracteur de Hénon** (Fig. 45)

- Equation : 
$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n + 1 - \alpha X_n^2 \\ Y_{n+1} = \beta X_n \end{cases}$$

- Caractéristiques : dissipatif si  $|\beta| < 1$ , Jacobien  $\begin{vmatrix} -\alpha & 1 \\ \beta & 0 \end{vmatrix} = -\beta$ , SCI, attracteur étrange de dimension fractale  $d_f = 1.26$  (voir Fig. 45).

• **Instabilité convective de Rayleigh-Bénard**

- Description : chauffage d'un fluide par dessous.

- Caractéristiques : bifurcation fourche lors de l'apparition des rouleaux de convection, diagramme de bifurcation avec pour paramètre de contrôle le nombre de Rayleigh Ra, structures dissipatives avec sélection de longueur d'onde, modèle pour la convection = modèle de Lorenz (voir ci-dessous).

• **Attracteur de Lorenz** (Fig. 46)

- Equation : 
$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - xz - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \text{ où } r \text{ est la paramètre de contrôle de la convection (proportionnel au nombre de Rayleigh Ra)}$$

- Caractéristiques : chaos par dédoublement de période (cascade sous-harmonique, doublement de période  $T, 2T, 4T, \dots$ ), attracteur étrange de Lorenz de dimension fractale entre 2 et 3 en fonction des paramètres du modèle (voir Fig. 46).

• **Modèle de Ricker** (dynamique de populations) (Fig. 47)

- Equation :  $X_{n+1} = \beta X_n e^{-X_n}$

- Caractéristiques : bifurcations successives par dédoublement de période.

• **Oscillateur de Duffing forcé** (Fig. 48)

- Equation du mouvement :  $\ddot{x} + r\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = f \cos \omega t$  ou bien  $\ddot{x} - x + x^3 + \gamma \dot{x} = d \cos \omega t$  soit

sous la forme d'un système dynamique 
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 - \gamma y + d \cos z \\ \dot{z} = \omega \end{cases}$$

- Caractéristiques : différents cas (avec ou sans amortissement, voir §1.2.2), exemple de réalisation expérimentale (barre d'Euler=lame ressort, voir §3.3.2), bifurcation de Hopf  $\rightarrow$  cycle limite, régimes sous harmoniques, chaos si le forçage est fort ( $d > d_c$ ) (voir Fig. 48).

• **Oscillateur de Van der Pol** (Fig. 49)

- Equation du mouvement :  $m\ddot{x} + \gamma(x^2 - 1)\dot{x} + kx = f(t) = f_0 \cos \omega t$  ou soit sous la forme d'un

$$\text{système dynamique} \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + (\epsilon - x^2)y + d \cos z \\ \dot{z} = \omega \end{cases}$$

- Caractéristiques : différents cas et réalisations expérimentales (voir §1.2.2, §3.3.3 et §3.3.3), bifurcation de Hopf super-critique, chaotique par accorçage en fréquence si le forçage est suffisamment fort.

- Modélisation de crises économiques par un oscillateur de Van der Pol modifié (voir Fig. 49) :

$$\begin{cases} \dot{x} = ky + mx(b - y^2) \\ \dot{y} = -x + sz \\ \dot{z} = px - qy \end{cases} \quad (\text{attracteur étrange}).$$

• **Modèle de Roessler**

$$\text{- Equation : } \begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + 0.2y \\ \dot{z} = 0.2 + zx - 5.7z \end{cases}$$

- Caractéristiques : exemple purement théorique proche du modèle de Lorenz, attracteur étrange de dimension fractale  $d_f = 2.01 - 2.02$ .



## Bibliographie

Mécanique Classique – J.R. Taylor (de Boeck 2012)

Instabilité, chaos et turbulence – P. Manneville (Editions de l'école polytechnique 2004)

Instabilités hydrodynamiques – F. Charru (EDP Sciences 2007)

L'ordre dans le chaos – P. Bergé, Y. Pomeau, C. Vidal (Hermann 2004)

M. Peyrard, T. Dauxois – Physique des solitons (EDP Sciences 2004)

[+ L Landau & E Lipschitz, TWB Kibble & FH Berkshire, H Goldstein CP Poole & JL Safko, VI Arnold]

+ cours de V. Croquette, P. Manneville, S. Fauve, T. Dudok de Wit, C. Coste, J. Zyss, E. de Langre/A-L. Bianche.

*BUPs*

744 – Le portrait de phase des oscillateurs – H. Gié, J.P. Sarmant (1992)

804 – Physique non linéaire et bifurcations – V. Bourges (1998)

804 – De l'oscillateur harmonique à Van der Pol – L. Sartre (1998)

891 – Etude expérimentale des oscillateurs mécaniques – R. Duffait (2004)

891 – Etude des effets non linéaires observés sur les oscillations d'un pendule simple – T. et A. Gibaud (2007)

689 – Expériences sur les propriétés mécaniques des métaux – M-C et M. Michel (1986)

709 – Mise en évidence de quelques phénomènes non linéaires dans un oscillateur – R. Quere (1988)

## Sujets

2019 Composition (...)Stabilités (oscillateur paramétrique, convection...)

2016 Problème (méthodes variationnelles en mécanique, équations d'Euler-Lagrange)

2015 Problème (oscillateurs, résonance)

2011 Composition (oscillations de molécules)

## Leçons 2018-2019

5. Lois de conservation en dynamique.48. Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

49. Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.

## Montages 2018-2019

1. Dynamique du point et du solide.
28. Instabilités et phénomènes non-linéaires.
31. Résonance.
32. Couplage des oscillateurs.
33. Régimes transitoires.

## Sites Internet

<http://experiences.math.cnrs.fr/>

[http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/par\\_theme](http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/par_theme)

<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/pendules-couples-soliton.xml>

[http://www.fast.u-psud.fr/index\\_en.php](http://www.fast.u-psud.fr/index_en.php)

<http://www.agregation-physique.org/>

<http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/selections.php>

<http://www.physagreg.fr/>

<http://www.physagreg.fr/video.php>

<https://www.ph-suet.fr/agregation/>

## Videos et exemples

- Oscillateur paramétrique, botafumeiro, Santiago de Compostela : <https://www.youtube.com/watch?v=uHzUzlg8w7o>
- Exemples mécaniques : bille qui rebondit sur haut-parleur, boussole dans champ tournant
- Pendule double : <https://www.youtube.com/watch?v=63uVU3GR-qI>
- Pendule et double aimant, barre d'Euler
- Simulations numériques : attracteurs étranges <https://images.math.cnrs.fr/Sculptures-du-chaos.html> et fractales : Cantor Mandelbrot
- Réactions chimiques oscillantes : Beluoz-Zhabotinsky, MinC/MinE en biologie cellulaire
- Instabilités hydrodynamiques Mascaret, soliton Turbulence Rayleigh-Bénard
- Patterns dans les plantes, expérience Fibonacci :

<https://www.youtube.com/watch?v=t6Zt4XCHj3U>

<https://www.youtube.com/watch?v=QPB-j2O9J6I>

- Convection en milieu poreux, magnetoconvection, géodynamo, ferrofluides, réaction-diffusion, comportements collectifs :

<https://www.youtube.com/watch?v=saaE9FRiZ5U>

[https://www.youtube.com/watch?v=psxi\\_WZnkYg](https://www.youtube.com/watch?v=psxi_WZnkYg)

<https://www.youtube.com/watch?v=9AVy9weN8Oo>

<https://www.youtube.com/watch?v=O5CXGTqbU8g>

<https://vimeo.com/187117379>

<https://www.youtube.com/watch?v=mr9nIifM0Y0>

<https://www.youtube.com/watch?v=gNGFtNt16Sk>

<https://www.youtube.com/watch?v=SJDcyyY01p4>

<https://www.youtube.com/watch?v=PnOy1fSxBdI>

<https://www.youtube.com/watch?v=AYUvo9kxAr4&list=PLsx0IxD0u9vJh68wkdTgyK8VtSELqdCoq&index=1>

[https://www.youtube.com/watch?v=PUsQ\\_NgMl1w](https://www.youtube.com/watch?v=PUsQ_NgMl1w)

<https://www.youtube.com/watch?v=6rPL-QkUFf8>

<https://www.youtube.com/watch?v=9MAs4yHeZyk>

<https://www.youtube.com/watch?v=15B8qN9dre4>

<https://www.youtube.com/watch?v=eakKfY5aHmY>