PERTURBATIONS DÉPENDANT DU TEMPS

I. FORMALISME GÉNÉRAL

1°) Position du problème.

2°) Traitement perturbatif.

3°) Exemple "kicked quantum harmonic oscillator"

II. Cas d'un système à 2 niveaux

1°) Représentation en diagrammes

2°) Cas d'une perturbation sinusoïdale

3°) Retour sur l'inégalité de Heisenberg temporelle

III. Cas d'un couplage à un "continuum"

1°) Règle d'or de Fermi

2°) Retour sur l'effet photoélectrique

I 1°) Position du problème

Système quantique $\hat{H}_0$ $\{|\varphi_n\rangle\}$

$$\hat{H}_0|\varphi_n\rangle = \epsilon_n|\varphi_n\rangle$$

Hamiltonien indépendant du tps t

Si à $t=0$ $|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n|\varphi_n\rangle$

alors à t $|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n \underbrace{e^{-i\epsilon_n t/\hbar}}_{\text{évolution temporelle}}|\varphi_n\rangle$

probabilité P_n d'être dans l'état $|\varphi_n\rangle$

$$P_n = |\langle\varphi_n|\psi\rangle|^2$$

$$P_n(t) = P_n(t=0)$$

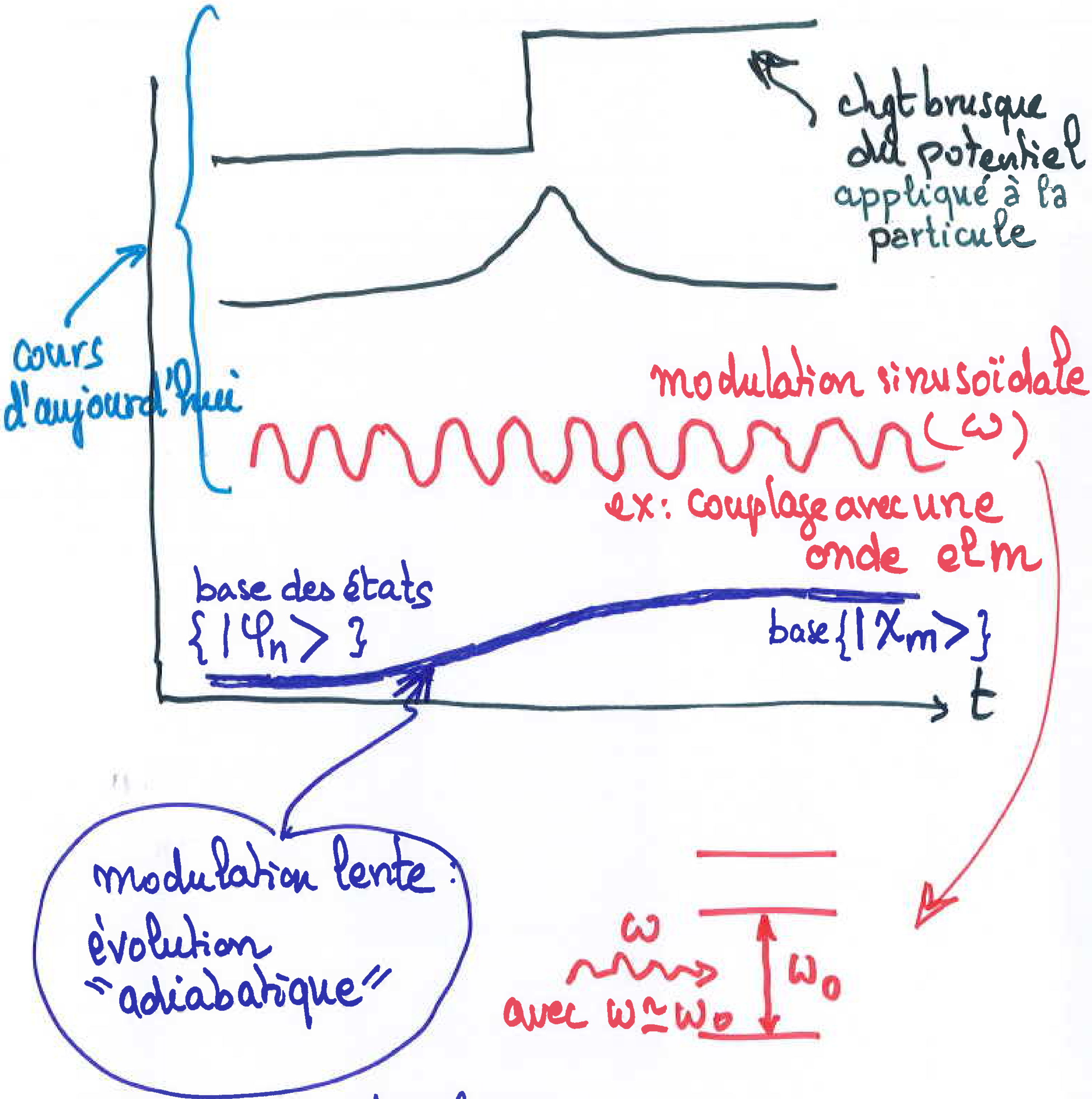
pas de transition entre $|\varphi_n\rangle$ et $|\varphi_{n'}\rangle$ avec $n' \neq n$

cf. résonance magnétique spin $\frac{1}{2}$

le champ magnétique oscillant peut induire une transition entre les 2 niveaux séparés par l'effet Zeeman.

Je vais considérer que le système est soumis à une perturbation $\hat{W}(t)$

Question : $|\varphi_n\rangle$ à $t=0 \xrightarrow{\hat{W}(t)} |\varphi_{n'}\rangle$ à $t>0$



comment $|\varphi_n\rangle$ se transforme en l'état de base $|\chi_m\rangle$?

I2°) Traitement perturbatif

$$H = \hat{H}_0 + \hat{W}(t) = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1(t)$$

paramètre d'interpolation
(à la fin $\lambda = 1$)

représentation d'interaction

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_k c_k(t)\, e^{-i\epsilon_k t/\hbar}\, |\varphi_k\rangle}$$

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = (\hat{H}_0 + \lambda \hat{H}_1)\, |\psi(t)\rangle$$

$$\sum_k e^{-i\epsilon_k t/\hbar} \left[i\hbar \frac{dc_k}{dt} + \cancel{\epsilon_k c_k} \right] |\varphi_k\rangle$$

$$= \sum_k c_k e^{-i\epsilon_k t/\hbar} \left(\cancel{\epsilon_k |\varphi_k\rangle} + \lambda \hat{H}_1 |\varphi_k\rangle \right)$$

Appliquons $e^{i\epsilon_n t/\hbar}\langle \varphi_n|$ sur les deux membres de l'égalité :

$$i\hbar \frac{dc_n}{dt} = \boxed{\lambda} \sum_k e^{i(\epsilon_n - \epsilon_k)t/\hbar} c_k(t) \times \langle \varphi_n | \hat{H}_1 | \varphi_k \rangle$$

équation qui couple les évolutions des paramètres $c_n(t)$

Principe du traitement perturbatif :

on cherche $|\psi(t)\rangle$ sous la forme d'un développement en série de puissances de λ :

$$c_n(t) = c_n^{(0)}(t) + \lambda\, c_n^{(1)}(t) + \lambda^2\, c_n^{(2)}(t) + \dots$$

$\longrightarrow$ relations de récurrence donnant les ordres successifs en λ :

- ordre zéro :

$$i\hbar \frac{dc_n^{(0)}}{dt} = 0$$

- ordre un :

$$i\hbar \frac{dc_n^{(1)}}{dt} = \sum_k e^{i(\epsilon_n - \epsilon_k)t/\hbar}\, c_k^{(0)}(t)\, \langle \varphi_n | \hat{H}_1 | \varphi_k \rangle$$

- ordre deux :

$$i\hbar \frac{dc_n^{(2)}}{dt} = \sum_k e^{i(\epsilon_n - \epsilon_k)t/\hbar}\, c_k^{(1)}(t)\, \langle \varphi_n | \hat{H}_1 | \varphi_k \rangle$$

etc....

En général, nous allons nous contenter du <u>premier ordre</u> de ce traitement perturbatif.

- Condition initiale à $t=0$: $|\Psi(0)\rangle = |\varphi_i\rangle$

  - $c_i(0) = 1 \longrightarrow c_i^{(0)} = 1$ à $t=0$ par choix
    et donc $c_i^{(0)}(t) = 1$

  - $c_k(0) = 0$ pour $k \neq i \longrightarrow c_k^{(0)}(t) = 0$

  à l'ordre zéro, la perturbation n'agit pas. Le système est initialement dans l'état $|\varphi_i\rangle$ et il reste dans cet état $|\varphi_i\rangle$.

- Calculons $c_n^{(1)}(t)$ au moyen de la relation de récurrence qui couple $c_n^{(1)}(t)$ aux $c_k^{(0)}(t)$:

$$i\hbar \frac{dc_n^{(1)}}{dt} = e^{i(\epsilon_n - \epsilon_i)t/\hbar} \langle \varphi_n | \hat{H}_1(t) | \varphi_i \rangle$$

soit sous forme intégrale:

$$\boxed{c_n^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{i(\epsilon_n - \epsilon_i)t/\hbar} \langle \varphi_n | \hat{H}_1(t') | \varphi_i \rangle dt'}$$

- Probabilité d'être dans l'état $|\varphi_n\rangle$?

$$P_{i\to n}(t) = |c_n^{(1)}(t)|^2 \quad (\times \lambda^2)$$

qu'on peut intégrer dans $\hat{H}_1$ ou faire $\lambda = 1$.

représente la probabilité d'un "saut quantique" entre les deux états, qui existe <u>si et seulement si</u>

$$\langle \varphi_n | \hat{H}_1(t) | \varphi_i \rangle \neq 0$$

$$\boxed{\text{Pour } \langle \varphi_n | \hat{H}_1 | \varphi_i \rangle = 0 \ : \ \text{transition } i \to n \text{ interdite !}}$$

3°) Exemple : perturbation impulsionnelle d'un oscillateur harmonique à une dimension

On considère $\hat{H}_0 = \hbar\omega\left(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\right)$

et on suppose qu'à $t = -\infty$, le système est dans l'état fondamental $|0\rangle$

On applique sur cet oscillateur une impulsion centrée sur $t = 0$, de largeur temporelle τ. modélisée par une gaussienne :

$$\hat{W}(t) = -\,\hat{\vec{d}}\,.\,\mathcal{E}\vec{e}_x\; e^{-t^2/\tau^2}$$

$$\rightarrow \hat{W}(t) = -\,e\,\mathcal{E}\,\hat{x}\; e^{-t^2/\tau^2}$$

par ex. effet d'un champ. électrique sur une charge e

Est-ce que cette perturbation peut transférer le système dans un état excité, par ex. l'état $|1\rangle$ (premier niveau excité) ?

$$C_0(t = -\infty) = 1 \longrightarrow C_0(t) = 1$$

$\forall\, t$ de $-\infty$ à $+\infty$

$$C_1^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\; \underbrace{e^{i\omega_{10}t'}}\;\underbrace{W_{10}(t')}_{\text{couplage}}.$$

Calculons le terme de couplage de $|0\rangle \to |1\rangle$:

$$W_{10}(t') = -e\mathcal{E}\, e^{-t'^2/\tau^2} \langle 1|\hat{x}|0\rangle$$

Pour calculer $\langle 1|\hat{x}|0\rangle$ nous pouvons utiliser les opérateurs "échelle" $\hat{a}$ et $\hat{a}^+$ de l'oscillateur harmonique

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^+\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |1\rangle = \hat{a}^+|0\rangle \\ \langle 1| = \langle 0|\hat{a} \end{cases}$$

$$\langle 1|\hat{x}|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\ \underbrace{\langle 1|(\hat{a}+\hat{a}^+)|0\rangle}_{\langle 1|\hat{a}|0\rangle + \langle 1|\hat{a}^+|0\rangle}$$

$$\underbrace{\langle 1|\hat{a}|0\rangle}_{\substack{=0 \\ \text{(le nombre)}}} + \langle 1|\underbrace{\hat{a}^+|0\rangle}_{=|1\rangle}$$

soit $\langle 1|(\hat{a}+\hat{a}^+)|0\rangle = \underbrace{\langle 1|1\rangle}_{\substack{=1 \\ \text{(le nombre)}}}$

donc :

$$c_1^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{i\omega t'} \times \left[-e\mathcal{E}\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\, e^{-t'^2/\tau^2}\right]$$

$$= i\,\frac{e\mathcal{E}}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{i\omega t'}\, e^{-t'^2/\tau^2}$$

Calculons la limite de cette probabilité $c_1^{(1)}(t)$ pour $t \to +\infty$

$$c_1^{(1)}(+\infty) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, e^{i\omega t'} \, e^{-t'^2/\tau^2}}_{\text{on reconnaît la transformée de Fourier d'une gaussienne, qui est une gaussienne}}$$

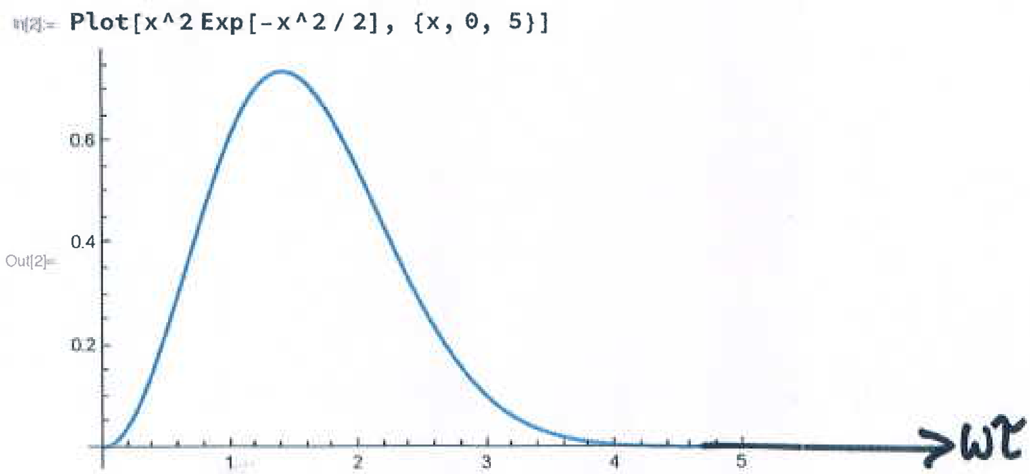
Rem : $\omega = \omega_{01}$

on reconnaît la transformée de Fourier d'une gaussienne, qui est une gaussienne

$$= \sqrt{\pi}\, \tau \, e^{-\frac{1}{4}\omega^2\tau^2}$$

d'où $\quad P_{0\to1}^{(1)}(t\to+\infty) = \left| c_1^{(1)}(+\infty) \right|^2$

$$\boxed{P_{0\to1}^{(1)}(t\to+\infty) = \frac{\pi(e\mathcal{E}\tau)^2}{2m\hbar\omega}\, e^{-\frac{1}{2}\omega^2\tau^2}}$$



La probabilité est maximale pour $\quad \tau \simeq \dfrac{1}{\omega_{01}}$

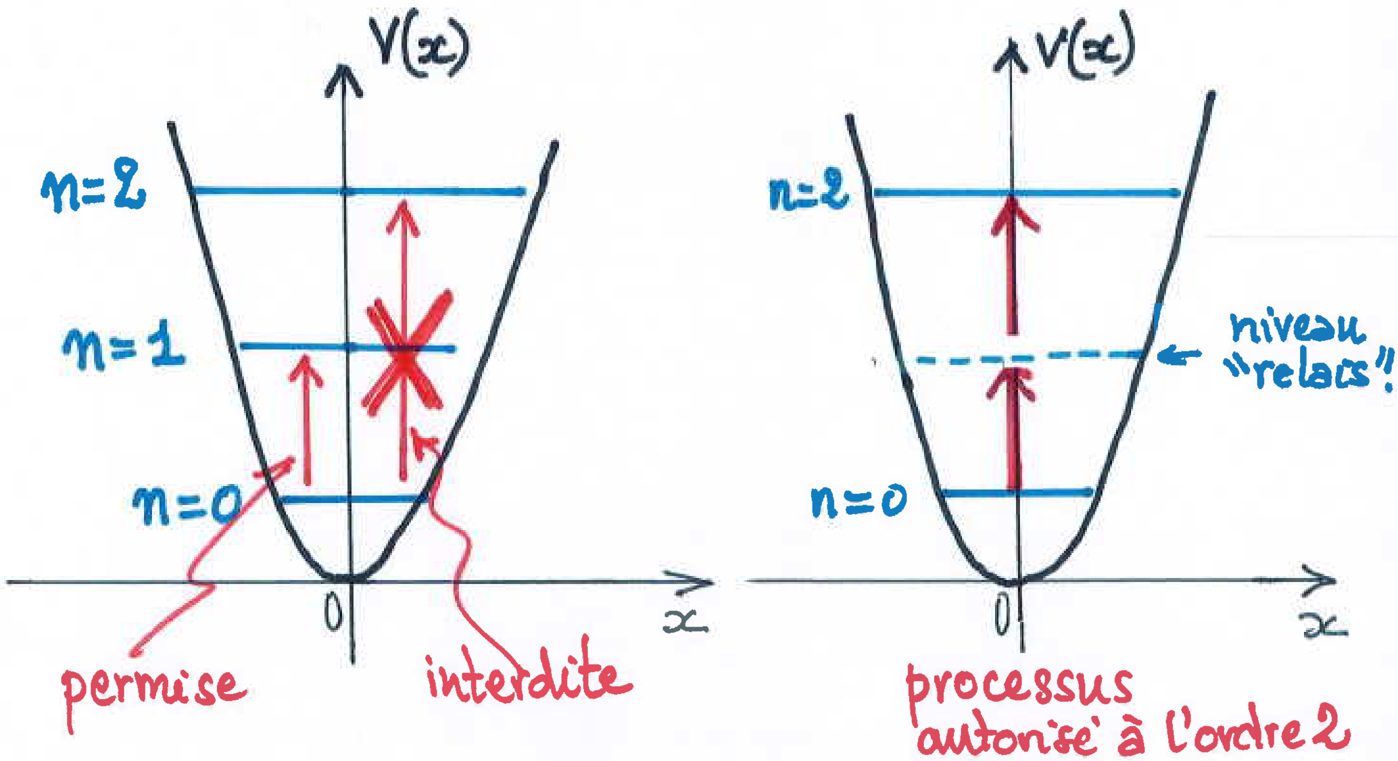
Rem : à l'ordre 1 du traitement perturbatif, la transition directe de $|0\rangle$ vers $|2\rangle$ ne peut pas se produire puisque

$$\langle 2|\hat{W}|0\rangle \propto \langle 2|\hat{x}|0\rangle = 0$$

on parle donc d'une transition interdite.

Par contre, cette transition peut avoir lieu à l'ordre 2 de notre traitement perturbatif :

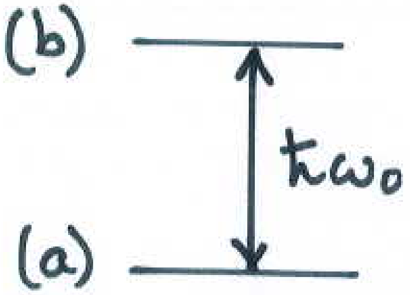
$$C_0^{(0)} \xrightarrow{\hat{W}} C_1^{(1)} \xrightarrow{\hat{W}} C_2^{(2)}$$



C'est le principe des transitions multiphotoniques (dans ce cas une transition à 2 photons pour passer du niveau $n=0$ au niveau $n=2$) en optique.

II. Cas d'un système à deux niveaux

On considère l'effet d'une perturbation $\hat{W}(t)$ appliquée sur deux niveaux (a) et (b) séparés par la fréquence de Bohr $\omega_0 = \dfrac{E_b - E_a}{\hbar}$



← initialement, le système est ds (a).

1°) Représentation en "diagrammes" du traitement perturbatif.

ordre zéro : $c_a^{(0)}(t) = 1$ et $c_b^{(0)}(t) = 0$

ordre un : $c_a^{(1)}(t) = 0$

$$c_b^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t W_{ba}(t')\, e^{i\omega_0 t'}\, dt'$$

ordre deux :
$$\frac{dc_a^{(2)}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} W_{ab}(t)\, c_b^{(1)}(t)\, e^{-i\omega_0 t}$$

soit en se limitant à cet ordre deux :

$$c_a(t) = \underbrace{1}_{c_a^{(0)}(t)} - \frac{1}{\hbar^2} \left[\int_0^t W_{ab}(t')\, e^{-i\omega_0 t'} \int_0^{t'} W_{ba}(t'')\, e^{i\omega_0 t''}\, dt'' \right]$$

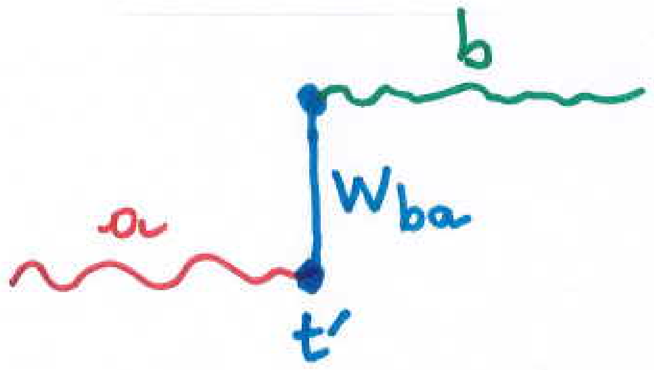
Nous pouvons écrire cela de façon systématique en présentant ces résultats de la façon suivante :

$$|\psi\rangle = \underbrace{\alpha_a(t)}_{= c_a(t)\, e^{-iE_a t/\hbar}} |a\rangle + \underbrace{\alpha_b(t)}_{= c_b(t)\, e^{-iE_b t/\hbar}} |b\rangle .$$

À l'ordre 1 :

$$\alpha_b(t) = c_b^{(1)}(t)\, e^{-iE_b t/\hbar} .$$

$$\alpha_b(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t e^{-iE_b(t-t')/\hbar}\, W_{ba}(t')\, e^{-iE_a t'/\hbar}\, dt'$$



Remarque : ce diagramme ne doit pas être interprété comme l'existence d'un "saut quantique" se produisant à l'instant t' pour faire passer le système de l'état $|a\rangle$ à l'état $|b\rangle$. Il faut intégrer sur tous les instants t' où la transition de (a) vers (b) peut se produire, et l'amplitude de probabilité d'être à l'instant t dans (b) résulte de l'addition de toutes ces probabilités.

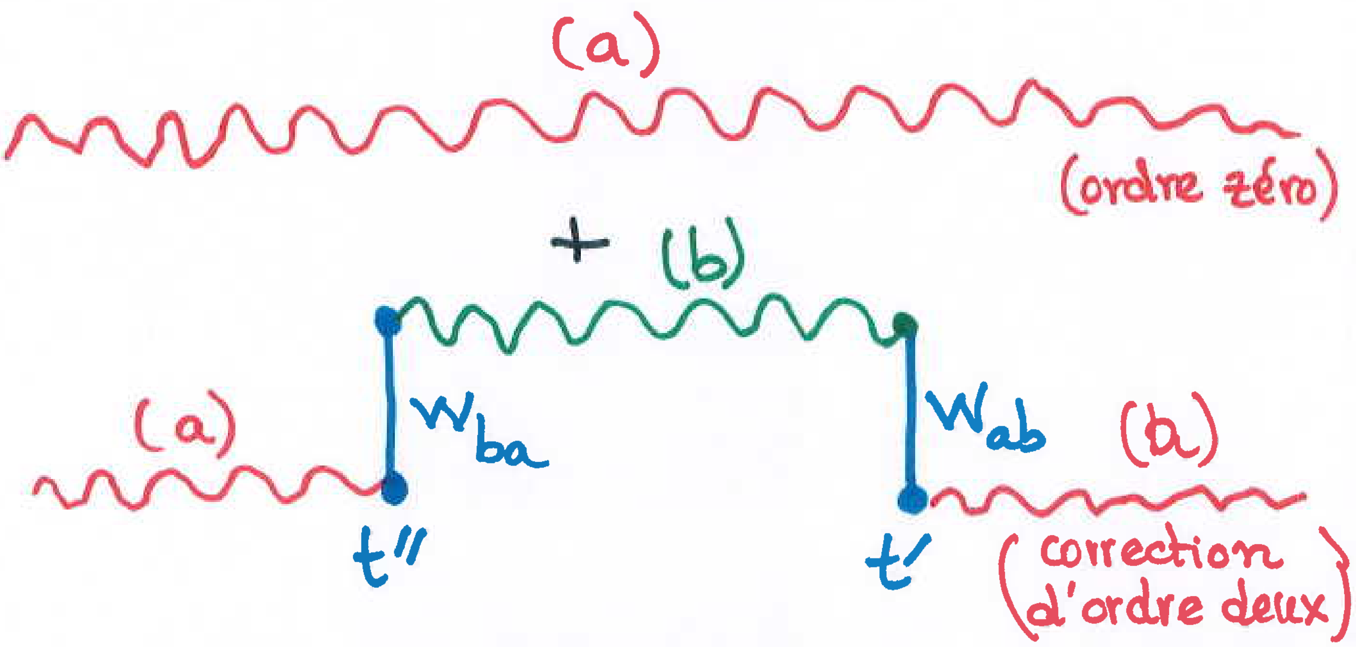
À ce stade, cette représentation n'apporte pas d'information nouvelle. Elle est cependant efficace pour exprimer les ordres successifs du traitement perturbatif, ou pour traiter le cas d'un système à plusieurs niveaux.

Ainsi, pour le système à deux niveaux considéré à l'ordre 2 des perturbations

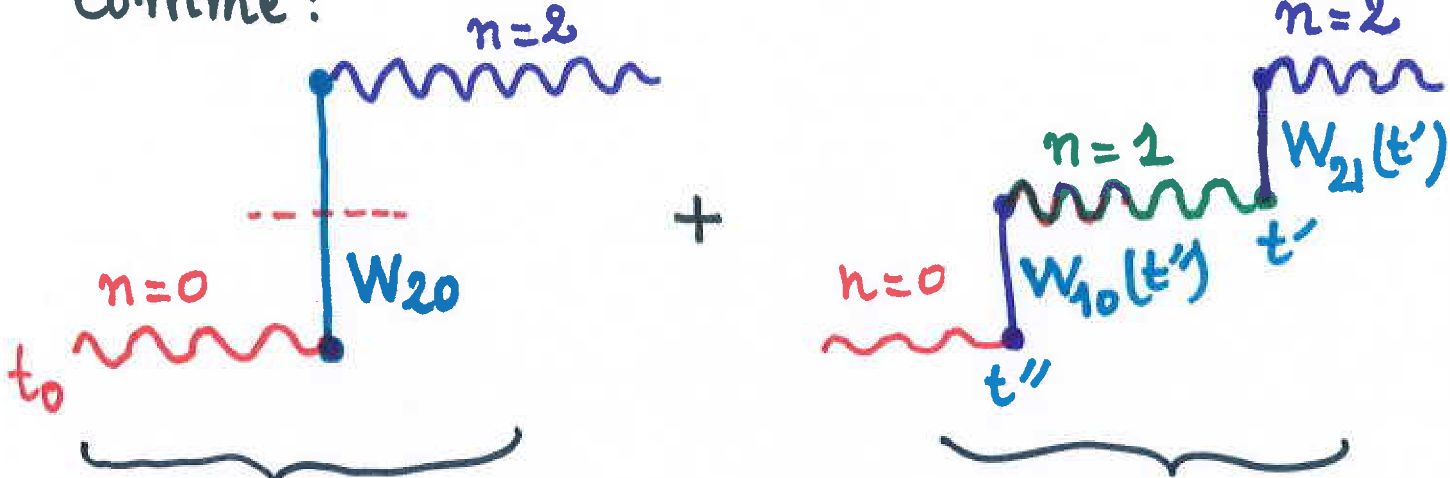
$$\alpha_a(t) = \left[c_a^{(0)}(t) + c_a^{(2)}(t)\right] e^{-iE_a t/\hbar}$$

$$= e^{-iE_a t/\hbar} + \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t'}^{t} \int_{0}^{t'} e^{-iE_a(t-t')/\hbar} \times W_{ab}(t')\, e^{-iE_b(t'-t'')}\, W_{ba}(t'')\, e^{-iE_a t''/\hbar}\, dt'' \times dt'$$

que l'on peut représenter comme :



À titre d'exemple, reprenons le cas précédent d'une impulsion appliquée à l'oscillateur harmonique autour de l'instant $t=0$. Nous pouvons représenter la transition de l'état $|n=0\rangle$ vers l'état $|n=2\rangle$ comme :



correction d'ordre 1 — Correction d'ordre 2

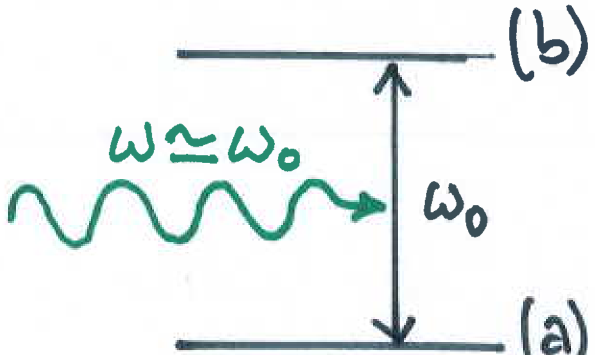
D'où :

$$c_2^{(2)}(t) = \frac{1}{(i\hbar)^2} \int_{t'}^{t} e^{-iE_2(t-t')} \, W_{21}(t') \times$$

$$\int_{t_0}^{t'} e^{-iE_1(t'-t'')} \, W_{10}(t'') \, e^{-iE_0(t''-t_0)} \, dt' dt''$$

2°) Cas d'une perturbation sinusoïdale

Considérons le cas particulier d'une perturbation sinusoïdale appliquée entre les deux états (a) et (b)



$\hat{W}(t) = \hat{W}_0 \cos\omega t$

uniquement des termes non diagonaux dans la base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

$W_{ba} = V_{ba} \cos\omega t$

- On suppose qu'à $t=0$, le système est dans $|a\rangle$

$$c_a^{(0)}(t=0) = 1 \longrightarrow c_a^{(0)}(t) = 1 \text{ et } c_b^{(0)}(t) = 0$$

- À l'ordre un :

$$c_b^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} V_{ba} \int_0^t \cos\omega t' \, e^{i\omega_0 t'} \, dt'$$

$$= \frac{1}{i\hbar} V_{ba} \int_0^t \frac{e^{i\omega t'} + e^{-i\omega t'}}{2} e^{i\omega_0 t'} \, dt'$$

qui s'intègre comme :

$$c_b^{(1)}(t) = -\frac{V_{ba}}{2\hbar}\left[\underbrace{\frac{e^{i(\omega_0+\omega)t}-1}{\omega_0+\omega}}_{\text{négligeable pour } \omega_0 \simeq \omega} + \underbrace{\frac{e^{i(\omega_0-\omega)t}-1}{\omega_0-\omega}}_{\text{terme résonnant pour } \omega=\omega_0}\right]$$

On choisit de conserver uniquement le terme résonnant soit :

$$c_b^{(1)}(t) \simeq -i\frac{V_{ba}}{\hbar}\,\frac{\sin(\omega_0-\omega)t/2}{\omega_0-\omega}\,e^{i(\omega_0-\omega)t/2}$$

et donc :

$$P^{(1)}_{a\to b}(t) = \left|c_b^{(1)}(t)\right|^2$$

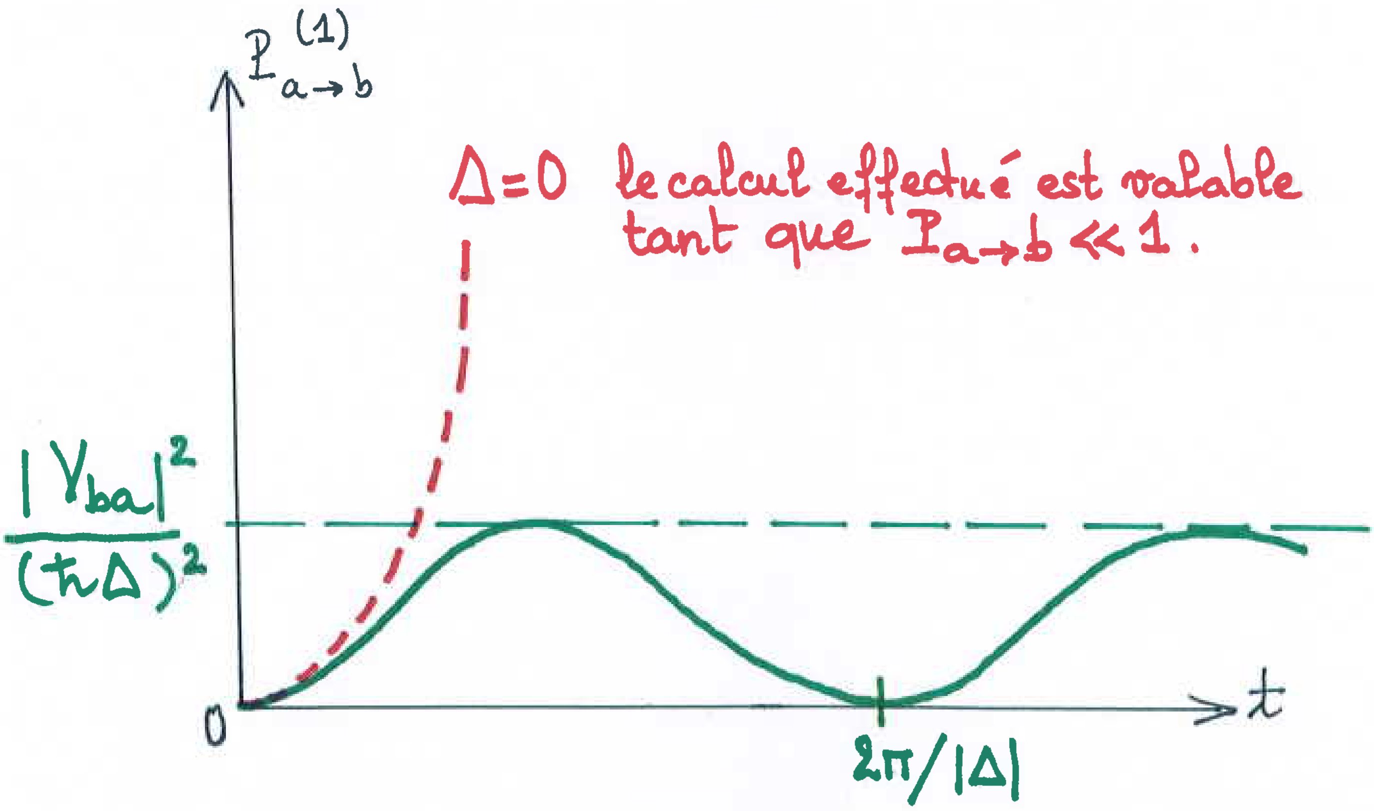
$$\boxed{P^{(1)}_{a\to b}(t) = \frac{|V_{ba}|^2}{\hbar^2}\,\frac{\sin^2(\omega_0-\omega)t/2}{(\omega_0-\omega)^2}}$$

À nouveau, pour que notre traitement perturbatif soit valable, il faut que $P_{a\to b}(t) \ll 1$.

Posons $\Delta = \omega - \omega_0$, et considérons d'abord le comportement pour $t \simeq 0$. On peut alors faire un développement limité :

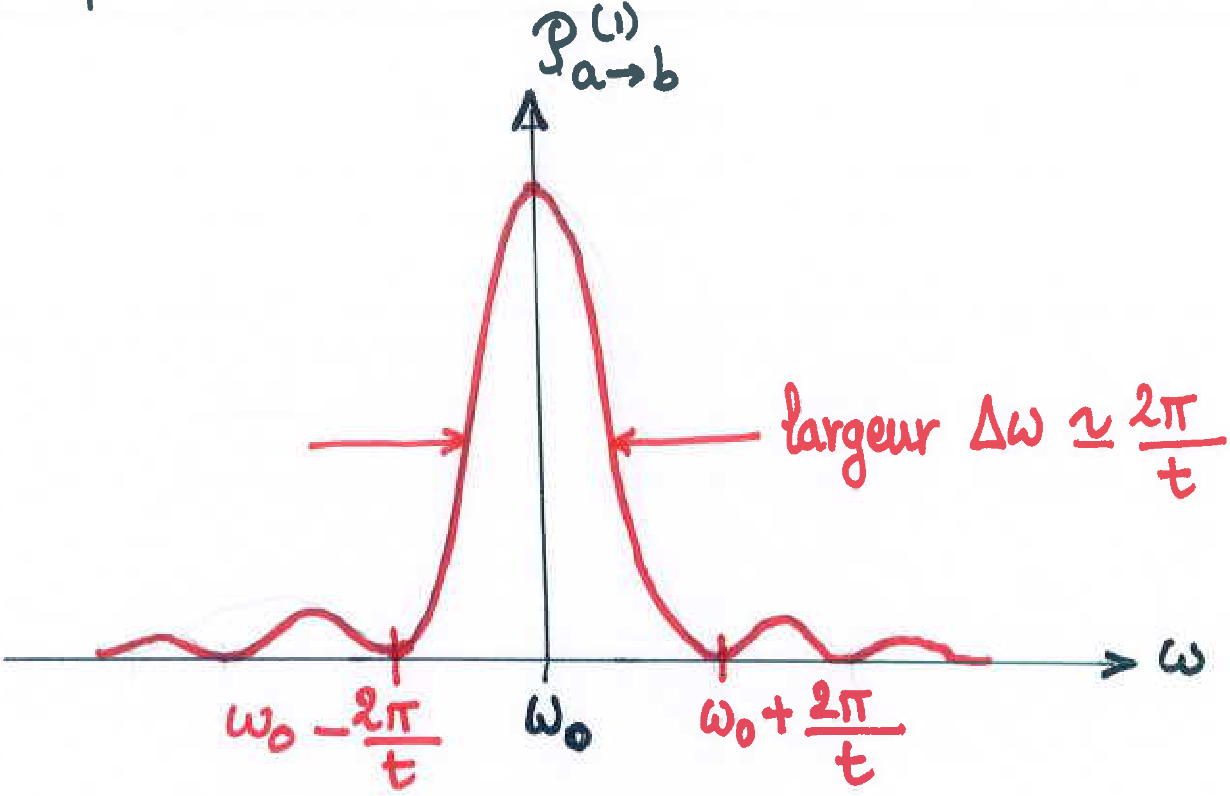
$$P^{(1)}_{a\to b}(t) \simeq \frac{|V_{ba}|^2}{\hbar^2} \times \frac{(\Delta \cdot t/2)^2}{\Delta^2} = \frac{|V_{ba}|^2 t^2}{4\hbar^2}$$

Ce comportement est indépendant de Δ et on peut ainsi représenter l'évolution de cette probabilité de transition pour $\Delta = 0$ et pour $\Delta \neq 0$.



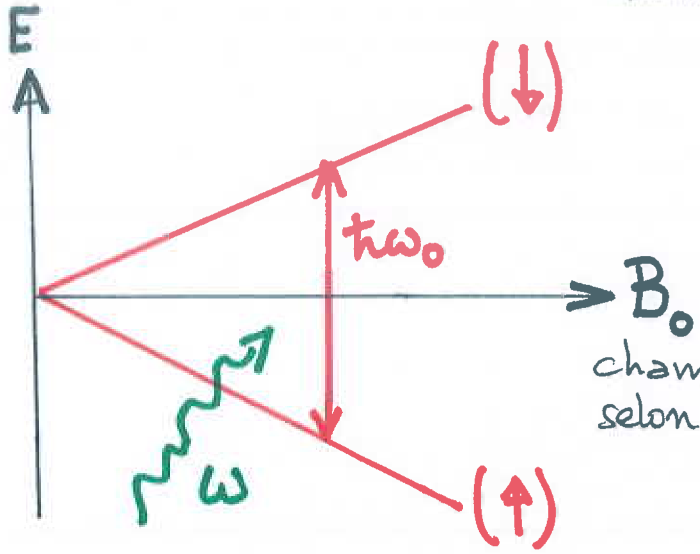
Il y a résonance si la pulsation ω de la perturbation est égale à la pulsation de Bohr ω_0 de la transition.

· La courbe de résonance donnant la variation de $P_{a\to b}$ en fonction de ω a une largeur totale à mi-hauteur $\Delta\omega \simeq 2\pi/t$ en fonction de la durée t de l'interaction. Cette courbe est d'autant plus étroite que le temps d'interaction t est plus long.



__Remarque : solution perturbative et solution exacte__

Nous avons déjà rencontré le cas du système à 2 niveaux quand nous avons étudié au début de ce semestre la résonance magnétique d'un spin $\frac{1}{2}$ placé dans un champ magnétique oscillant. Nous avons trouvé avec l'approximation des ondes tournantes (RWA) la solution __exacte__ des équations d'évolution.



Nous avons que le couplage entre les deux états $(\uparrow)$ et $(\downarrow)$ s'écrit :

$$\langle \downarrow | \hat{H}_1 | \uparrow \rangle = \frac{\hbar\omega_1}{2} e^{-i\omega t} \quad \text{avec} \quad \omega_1 = -\gamma B_1$$

La formule exacte obtenue dans le cours sur la résonance magnétique est :

$$P_{\uparrow\to\downarrow}(T) = \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \frac{\Omega T}{2} \qquad \Omega = \sqrt{(\omega-\omega_0)^2 + \omega_1^2}$$

fréquence de Rabi

tandis que la formule approchée obtenue avec le traitement perturbatif donne :

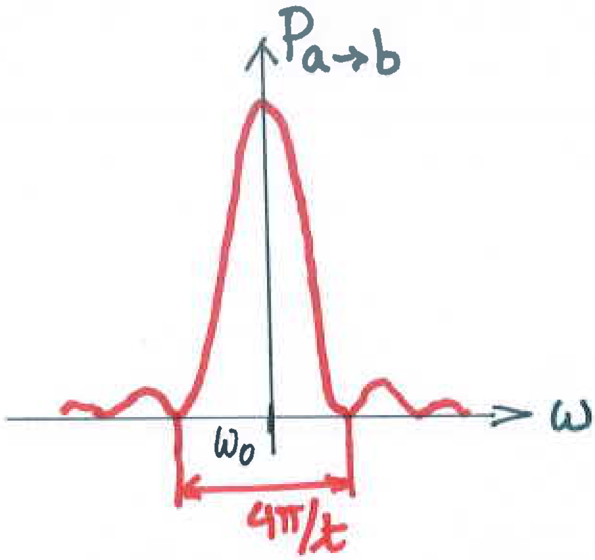
$$P^{(1)}_{\uparrow\to\downarrow}(T) \simeq \frac{\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2} \sin^2 \frac{(\omega-\omega_0)T}{2}$$

Ces deux formules coïncident pratiquement dans deux cas

(a) La fréquence d'excitation ω est loin de la résonance, soit $|\omega-\omega_0| \gg \omega_1$. Dans ce cas, les deux formules coïncident quelque soit le temps.

(b) Si l'excitation est proche de résonance $|\omega-\omega_0| \ll \omega_1$, les 2 formules coïncident pour T suffisamment court.

Expression alternative de la probabilité de transition



Le pic de résonance centré sur la fréquence de Bohr ressemble à une fonction de Dirac à la limite où la largeur en fréquence $\Delta\omega = \frac{4\pi}{t} \to 0$, c'est-à-dire $t \to +\infty$

Du point de vue mathématique, la fonction sinus cardinal en sinc devient un pic de Dirac à cette limite

$$\frac{\sin^2 \frac{(\omega-\omega_0)t}{2}}{\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right)^2} \simeq 2\pi \times t \; \delta(\omega-\omega_0) \quad \text{pour } t\to\infty$$

La probabilité de transition s'écrit alors :

$$P_{a\to b}(t\to\infty) = \frac{2\pi}{\hbar^2} |V_{ba}|^2 \; \delta(\omega-\omega_0)$$

La probabilité augmente donc linéairement avec le temps. C'est raisonnable puisqu'on peut s'attendre à ce qu'une perturbation agissant plus longtemps ait un effet plus fort sur le système perturbé.

Nous pouvons définir un taux de transition qui est une probabilité par unité de temps.

$$R_{a\to b} = \frac{d}{dt} P_{a\to b}(t)$$

soit :

$$\boxed{R_{a\to b} = \frac{2\pi}{\hbar^2} \times |V_{ba}|^2 \times \delta(\omega-\omega_0)}$$

La fonction $\delta(\omega-\omega_0)$ qui intervient dans cette expression correspond à la conservation de l'énergie

Elle demande que le quantum d'énergie qui cause la transition (par ex. un photon d'un faisceau laser incident) coïncide avec la différence d'énergie $\hbar\omega_0$ entre les deux états.

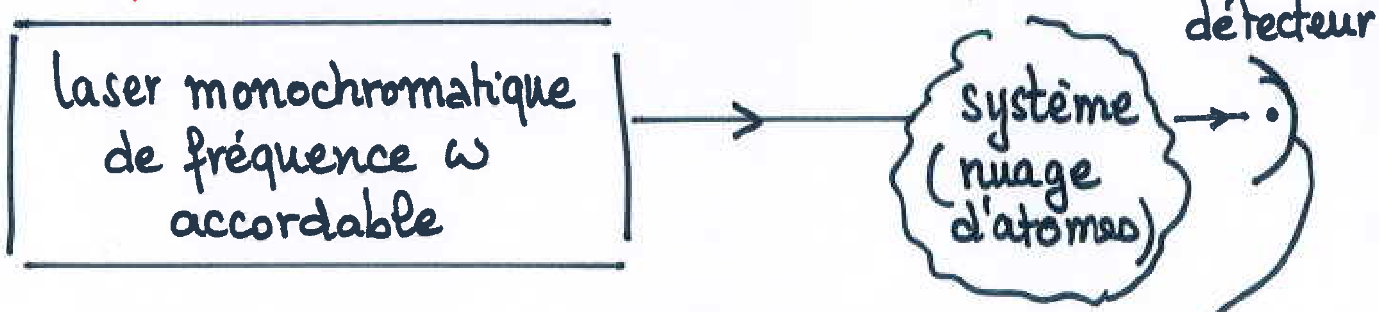
Cette expression est cependant peu pratique à utiliser compte tenu du caractère non-physique de la fonction delta. Dans de nombreuses applications, il y a en fait un étalement des états finaux pour former un continuum plutôt qu'une succession d'états discrets.

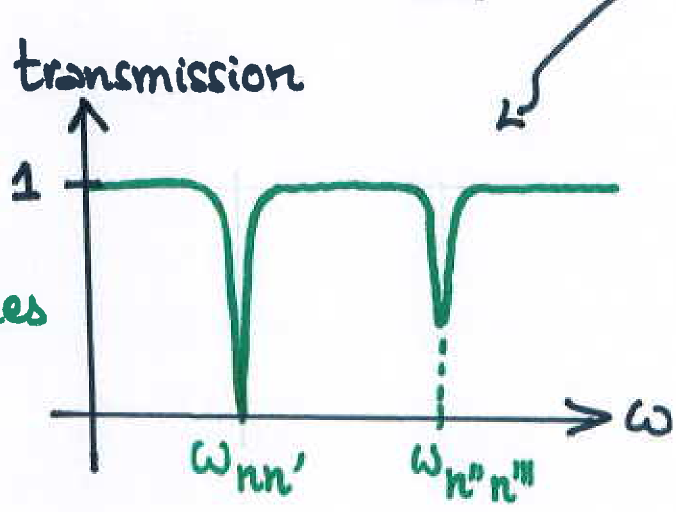
3°) Retour sur l'inégalité de Heisenberg temporelle

L'évolution de la probabilité $P^{(1)}_{a\to b}(t)$ en fonction du temps t d'interaction entre le système à 2 niveaux et la perturbation sinusoïdale nous permet sur un dispositif fréquemment utilisé pour mesurer l'énergie du système quantique

→ mesure par transfert d'énergie dans des collisions
- expérience historique de Franck et Hertz
- accélérateurs de particules

→ pour des systèmes atomiques ou moléculaires, expériences de spectroscopie optique.





résonances avec les fréquences de Bohr du système.

Même si on suppose toutes les largeurs de raie du laser et du système étudié négligeables (c'est-à-dire raies infiniment étroites dans le domaine spectral), chaque résonance mesurée expérimentalement aura une largeur $\Delta\omega$ limitée par la durée T d'"interrogation" du système. Ainsi, l'énergie des niveaux sera connue avec une incertitude ΔE telle que

$$\Delta E = \hbar \Delta\omega = h/T$$

Cette précision peut donc être vue comme la conséquence directe de la relation de dispersion temps-énergie

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

En allongeant le temps de mesure, les métrologues "temps-fréquence" arrivent à obtenir des précisions fabuleuses. Ainsi, la transition entre les niveaux 1s et 2s de l'atome d'hydrogène est connue avec une incertitude relative de 4.5×10^{-15} :

$$\nu_{1s-2s} = \underbrace{2\ 466\ 061\ 413\ 187\ 018}_{\text{15 chiffres significatifs connus !}} \ (\pm 11)\ \text{Hz}$$

Controverse Einstein-Bohr

Lors du 6e congrès Solvay tenu en 1930, Albert Einstein proposa une expérience de pensée connue sous le nom de "boîte à photons".

Une boîte aux parois parfaitement réfléchissantes contient une quantité de rayonnement, laquelle contribue à la masse de la boîte suivant l'éq. célèbre $E = mc^2$ liée au principe d'équivalence.

Cette boîte est alors percée d'un trou pouvant être ouvert ou fermé au moyen d'un obturateur qui est synchronisé par une horloge située à l'intérieur de la boîte. À un instant donné t_1, l'obturateur s'ouvre pendant une durée très courte pour se refermer à l'instant $t_2 = t_1 + T$. La durée T d'ouverture est fixée pour qu'un seul photon s'échappe de la boîte. Il est alors possible de déterminer avec une très grande précision l'instant d'émission du photon, correspondant à la fenêtre temporelle de durée T.

Einstein propose de relier la boîte à un dynamomètre. On peut ainsi mesurer l'énergie correspondante E

en pesant la boîte avant et après l'émission du photon. Peut-on ainsi mettre en échec la relation $\Delta E \times \Delta T \geq \frac{\hbar}{2}$ puisque dans cette expérience de pensée, les paramètres T et E peuvent être connus de façon indépendante, chacun avec une précision arbitrairement grande?

Bohr finit par réfuter cet argument en utilisant des arguments mettant en jeu la relativité générale.
On peut d'ailleurs s'en étonner puisque l'on ne sait toujours pas expliquer la gravitation par la théorie quantique.

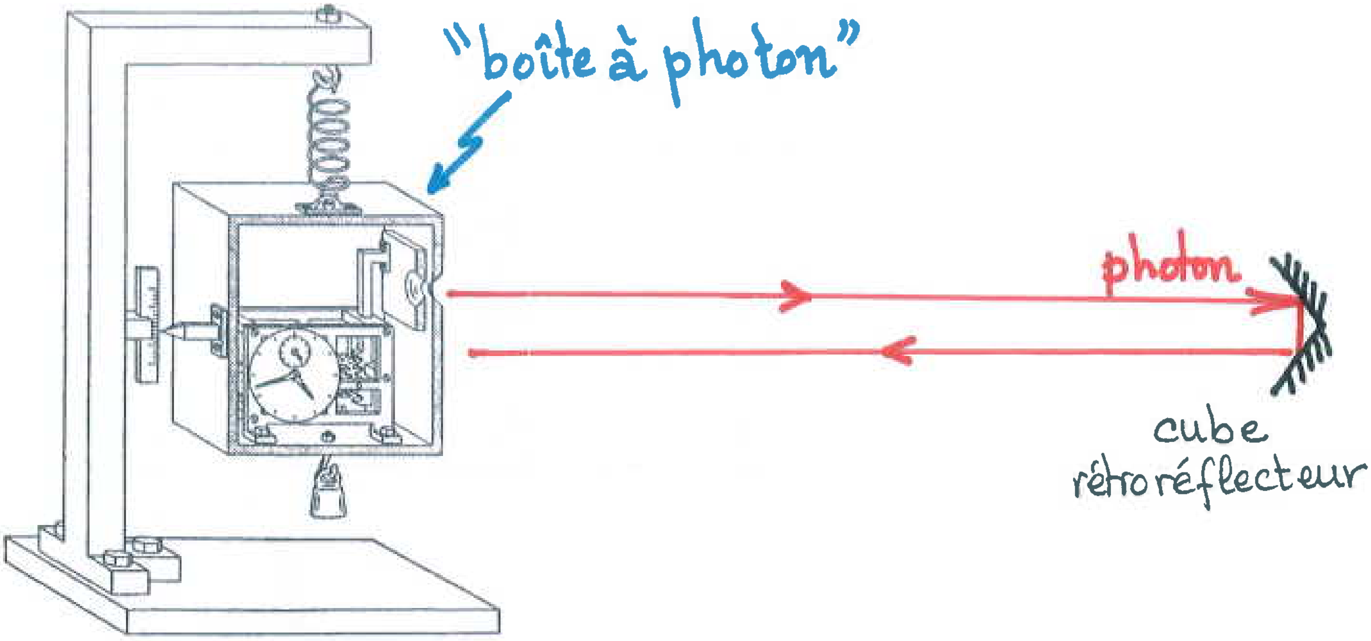
Einstein continua cependant à approfondir cette expérience de pensée sous la forme suivante:

Après la pesée préliminaire de la boîte contenant l'horloge et l'échappée du photon qui suit cette première mesure, l'expérimentateur a le choix entre deux mesures possibles:

→ Il peut faire une nouvelle pesée afin de déterminer l'énergie du photon

→ Ou bien il peut ouvrir la boîte pour lire l'indication de l'horloge.

Ainsi, le choix d'obtenir de l'information sur l'énergie du photon ou sur son instant d'émission peut être retardé à souhait, alors que le photon est déjà sorti !



On peut alors choisir de placer très loin de la boîte un cube rétroréflecteur qui renvoie le photon vers la boîte.

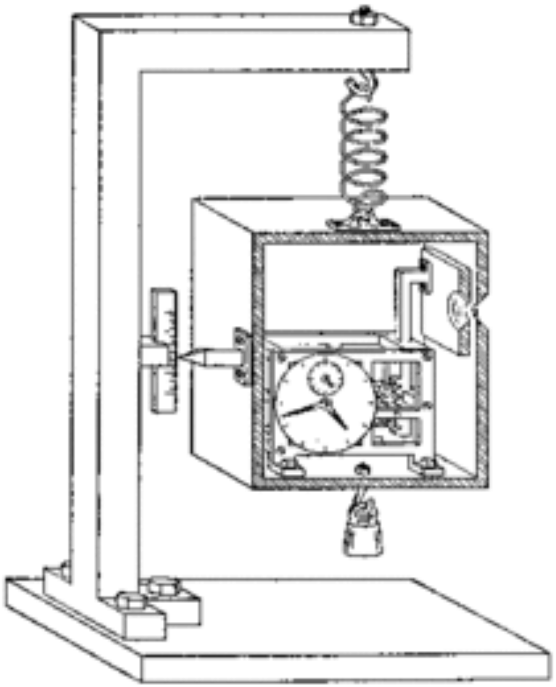
Le choix de réaliser une pesée de la boîte ou bien d'ouvrir la boîte pour consulter l'horloge détermine l'information sur ce photon lorsqu'il revient au niveau de la boîte, sans qu'il y ait eu besoin d'une interaction avec celui-ci.

→ si l'expérimentateur a choisi d'ouvrir la boîte et de consulter l'horloge, il connaîtra l'instant précis au bout duquel le photon revient.

→ Si par contre il décide d'effectuer une pesée, il connaîtra l'énergie du photon ~~mais~~ (donc sa fréquence) mais il ne peut connaître avec précision son instant de retour.

Tout cela alors que le photon a quitté la boîte et n'interagit plus avec elle. Nous retrouvons la complémentarité de BOHR : il est nécessaire de considérer l'objet quantique étudié et l'appareil de mesure comme une seule et même entité.

La boîte à photons d'Einstein



- Horloge placée dans une boîte reliée à un dynamomètre.
- Diaphragme ouvert à l'instant t_1 puis refermé à $t_2 = t_1 + T$, de telle manière qu'un seul photon s'échappe de la boîte.
- T peut être mesuré très précisément, de même que l'énergie $E = \delta m\, c^2$, en pesant la boîte avant et après l'émission du photon

Peut-on ainsi mettre en échec
la relation de Heisenberg temporelle ?

$$\Delta E \times T \geq \frac{\hbar}{2}$$

Congrès Solvay de 1930

INSTITUT INTERNATIONAL DE PHYSIQUE SOLVAY

SIXIÈME CONSEIL DE PHYSIQUE — BRUXELLES, 20-26 OCTOBRE 1930

Photo Benjamin Couprie.

A. PICCARD W. GERLACH C. DARWIN P.A. DIRAC

E. HENRIOT MANNEBACK H.A. KRAMERS J.H. VAN VLECK W. HEISENBERG

E. HERZEN J. VERSCHAFFELT A. COTTON J. ERRERA O. STERN H. BAUER P. KAPITZA L. BRILLOUIN P. DEBYE W. PAULI J. DORFMAN E. FERMI

Th. DE DONDER P. ZEEMAN P. WEISS A. SOMMERFELD Mme CURIE P. LANGEVIN A. EINSTEIN O. RICHARDSON B. CABRERA N. BOHR W.J. DE HAAS

Absents : Ch.E. GUYE et M. KNUDSEN

Réponse de Bohr à Einstein

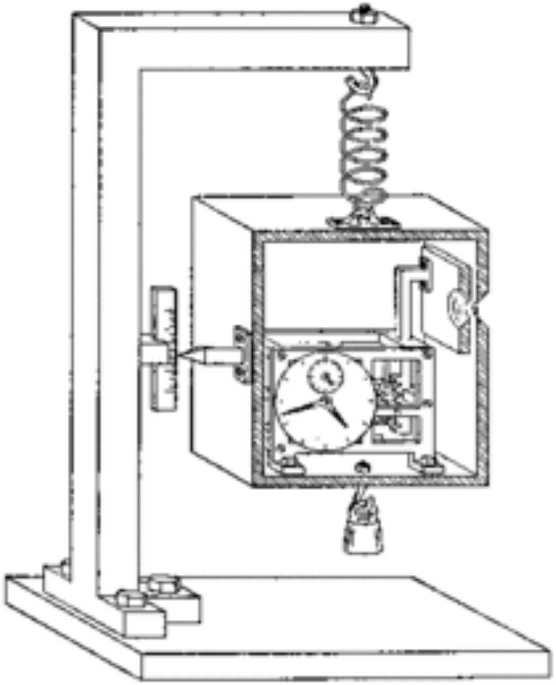
- Position de la boîte définie à Δz près

- Horloge dans le champ de pesanteur g

$\rightarrow$ sa marche dépend de l'altitude z

$\rightarrow$ incertitude sur le durée d'ouverture T

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{g\,\Delta z}{c^2}$$



- Mesure du poids $\delta m \times g$ de la boîte

  $\equiv$ mesure de $(p_z = \delta m\, g\, T)$ à Δp_z près

$\rightarrow$ précision ΔE sur la mesure de E

$$\Delta E = \frac{c^2}{gT}\Delta p_z \rightarrow \Delta E\, \Delta T = \Delta p_z\, \Delta z \geq \frac{\hbar}{2}$$