

## Chapitre C.2

# Superposition d'ondes lumineuses et interférences

Ce chapitre constitue la seconde étape d'entrée dans le monde de l'optique ondulatoire en se concentrant sur l'origine des interférences, phénomène déjà rencontré de façon peu formalisée dans les classes antérieures<sup>1</sup>. Il s'appuie sur le modèle de l'onde lumineuse développé dans le chapitre précédent et apporte les premières bases utiles pour étudier les interférences. Les chapitres suivants apporteront des compléments indispensables sur les systèmes interférentiels et les aspects pratiques.

Attention, encore une fois, on ne perdra pas de vue que le cours, présenté dans le cadre de l'optique dans le domaine visible, est extensible, sous certaines conditions, à la plus générale physique ondulatoire (ondes électromagnétiques en dehors du visible, ondes sonores, ondes thermiques...).

1. Les interférences ont aussi été utilisées par le passé pour discuter de la dualité onde-corpuscule. Cet aspect n'est volontairement pas développé en optique ondulatoire qui est antérieure à la physique quantique, domaine dont on reparlera de toute façon bien plus tard dans l'année (super!).

### Table des matières

<b>I - Observation d'interférences et problématique associée</b>	<b>2</b>
1/ Exemples de phénomènes interférentiels observables	2
2/ Simulation et interprétation par les ondes	2
3/ Applications	2
<b>II - Superposition de deux ondes lumineuses et cohérence</b>	<b>3</b>
1/ Terme d'interférences (ou de corrélation)	3
2/ Condition de cohérence par quasi-synchronicité d'ondes monochromatiques	3
3/ Condition de cohérence d'ondes réelles quasi-monochromatiques	4
4/ Critère de cohérence temporelle	4
a. Énoncé du critère de cohérence temporelle « en temps »	5
b. Différence de marche	5
c. Énoncé du critère de cohérence temporelle « en distance »	5
5/ Conséquences pratiques pour les interféromètres	6
<b>III - Aspects descriptifs des interférences à deux ondes</b>	<b>7</b>
1/ Formule de Fresnel des interférences à deux ondes	7
2/ Ordre d'interférences ; franges brillantes et sombres	7
3/ Contraste (ou visibilité)	8
4/ Interfrange	9
<b>IV - Éléments sur des configurations géométriques interférentielles typiques</b>	<b>10</b>
1/ Configuration typique à deux ondes planes	10
a. Mise en situation	10
b. Déphasage en un point	10
c. Caractérisation des interférences	10
2/ Configuration typique à deux sources secondaires	11
a. Franges dans l'espace	11
b. Écran parallèle à l'axe des sources secondaires	12
c. Écran orthogonal à l'axe des sources secondaires	13
3/ Configuration à N ondes à progression arithmétique de phase	15
a. Situation du problème	15
b. Amplitude vibratoire complexe	15
c. Diagramme de Fresnel et conséquences	15
d. Calcul exact de l'intensité ; fonction réseau (HP)	16
<b>Ann. 1 Interférences et polarisation de la lumière</b>	<b>17</b>
<b>Ann. 2 Cap ou pas cap ?</b>	<b>18</b>

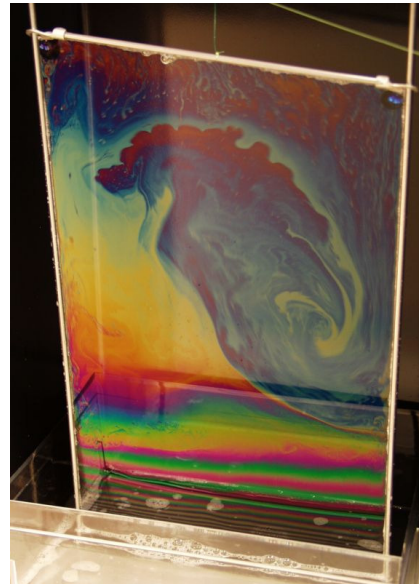
## I - Observation d'interférences et problématique associée

### 1/ Exemples de phénomènes interférentiels observables

Les irisations observées au niveau de lames d'eau savonneuse, de flaques d'eau huilée, sur les ailes de papillons ou certaines plumes d'oiseaux s'expliquent par un phénomène d'**interférences** en lumière blanche.



*Interférences sur flaque d'eau huilée*



*Interférences sur lame d'eau savonneuse*

Ces manifestations « naturelles » des interférences ne sont pas fréquentes<sup>2</sup> : il existe des contraintes assez fortes à respecter pour observer aisément (et pouvoir exploiter) des interférences et on cherchera à les mettre en évidence.

### 2/ Simulation et interprétation par les ondes

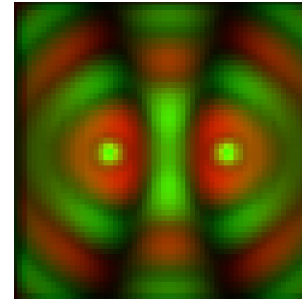
La première interprétation simple des interférences, en 1801 par Young (par appui sur un modèle d'Huygens de 1690), repose sur une vision ondulatoire de la lumière. Elle fut d'ailleurs longtemps prise pour « preuve » du modèle ondulatoire de la lumière<sup>3</sup>...

On peut observer diverses superpositions d'ondes par la simulation suivante :

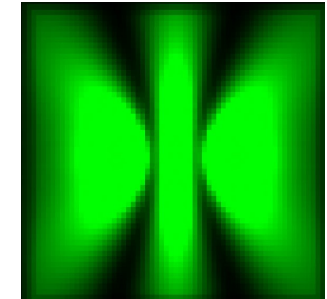
<http://www.falstad.com/wavebox>

2. Attention, le phénomène d'arc-en-ciel n'est pas dû à des interférences (ou à de la diffraction) mais à un effet dispersif au niveau des gouttes d'eau en suspension dans l'air humide (exercice classique).

3. Depuis, la discussion de la dualité onde-corpuscule est passée par là (voir physique quantique...).



*Somme des amplitudes de deux ondes*



*Vision d'un détecteur « lent »*

Des simulations ressortent en autres aspects les points suivants :

- les interférences naissent de la *superposition des ondes de trajets différents* ;
- l'observation *par un détecteur avec un temps de réponse grand devant la période temporelle des ondes* (détecteur « lent ») fait ressortir des zones claires et sombres ;
- Les zones claires et sombres ne s'expliquent pas avec l'optique géométrique<sup>4</sup> ; il faut passer par **l'analyse de la phase des ondes**.

### 3/ Applications

Les phénomènes interférentiels sont d'un grand intérêt pour nombre d'applications (sources de nombreux exercices ou problèmes de concours) dans divers domaines (pas toujours indépendants) :

- Spectroscopie : mesure de longueur d'onde (spectrométrie interférentielle), de spectres (spectroscopie à réseau)...
- Mesure de distances, d'épaisseurs, de vitesses (vélocimétrie laser), d'angles, de l'accélération de la pesanteur (gravimétrie absolue), de temps, d'indice optique...
- Contrôle ou recherche de défauts (par exemple pour la recherche du défaut de sphéricité d'un miroir sphérique...).
- Stockage d'informations (holographie en volume notamment).
- Techniques de microscopie avancées (contraste de phase, strioscopie...).

Il y a bien d'autres choses (synthèse d'ouverture, tentative de détection des ondes gravitationnelles avec VIRGO...). Il est donc *a priori* très tentant d'étudier les fondements de l'optique ondulatoire... d'autant plus que c'est conceptuellement très intéressant !

4. Néanmoins, l'optique géométrique est cruciale pour mener à bien nombre de calculs en optique ondulatoire alors il vaut mieux la connaître !

## II - Superposition de deux ondes lumineuses et cohérence

### 1/ Terme d'interférences (ou de corrélation)

#### Théorème 1

Soient deux ondes d'amplitudes vibratoires respectives  $a_1(M, t)$  et  $a_2(M, t)$ . On note  $I_1$  et  $I_2$  les intensités correspondantes à chacune de ces ondes prises seules.

L'intensité  $I(M, t)$  perçue à l'instant  $t$  en un point  $M$  du domaine de superposition des ondes est

$$I(M, t) = I_1(M, t) + I_2(M, t) + I_{12}(M, t)$$

où

$$I_{12}(M, t) = 4 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle_{\tau_R}$$

est le terme d'interférences (ou de corrélation) scalaire.

#### Démonstration

En superposant (par linéarité) les amplitudes vibratoires de chaque onde,

$$I(M, t) = 2 \langle [a_1(M, t) + a_2(M, t)]^2 \rangle_{\tau_R}$$

$$\text{soit} \quad I(M, t) = 2 \langle a_1(M, t)^2 \rangle_{\tau_R} + 2 \langle a_2(M, t)^2 \rangle_{\tau_R} + 4 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle_{\tau_R}$$

ce qui prouve le résultat.

On comprend bien avec ce théorème pourquoi en présence d'interférences, on peut avoir en certains points l'opération magique (vue avec la simulation précédente par exemple)

$$\text{lumière} + \text{lumière} = \text{obscurité}!$$

L'existence (ou non) d'interférences est intimement liée à l'impossibilité (ou non) de sommer directement les intensités des ondes.

#### Définitions

Lorsque  $I_{12} = 0$  en tout point, les ondes (1) et (2) sont dites **incohérentes entre elles**.

Dans le cas contraire, l'ensemble du domaine de superposition des ondes (où existent des points où  $I_{12} \neq 0$ ) est appelé **champ d'interférences** et on parle d'**ondes cohérentes entre elles**.

#### Théorème 2

Les intensités d'ondes sont superposables si elles sont **incohérentes** entre elles.

#### Démonstration (visible)

Le résultat est direct vu le théorème précédent et la définition des ondes incohérentes !

Dans le cas d'ondes cohérentes entre elles, on ne peut qu'utiliser la superposition des amplitudes (tant qu'il n'y a pas d'effet non-linéaire comme d'habitude...).

Une grande question se pose à présent : quelles sont les conditions, dites « de cohérence », pour lesquelles des interférences sont observables ?

### 2/ Condition de cohérence par quasi-synchronicité d'ondes monochromatiques

#### Définitions

Deux ondes monochromatiques de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont dites :

- **quasi-synchrones** lorsque  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ont un écart faible devant  $1/\tau_R$  ;
- **synchrones (ou isochrones)** lorsque  $\omega_1 = \omega_2$ .

#### Théorème 3

Pour que deux ondes scalaires quasi-planes monochromatiques (pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$ ) puissent être cohérentes entre elles, il est **nécessaire** qu'elles vérifient une **condition de cohérence temporelle**<sup>5</sup> : les ondes doivent être **quasi-synchrones**.

#### Démonstration

Soient les expressions des ondes scalaires quasi-planes considérées de la forme

$$a_i = A_{0i}(M) \cos(\omega_i t - \varphi_i(M))$$

Alors, on calcule le terme de corrélation en développant le produit des cosinus :

$$I_{12} = 2 A_{01}(M) A_{02}(M) \{ \langle \cos[(\omega_2 - \omega_1)t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M))] \rangle_{\tau_R} + \langle \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))] \rangle_{\tau_R} \}$$

La seconde moyenne est forcément nulle puisque le terme du cosinus fluctue sur l'échelle  $\tau_R$  à une pulsation élevée  $\omega_1 + \omega_2$ . Pour la première moyenne, dès que  $|\omega_2 - \omega_1| \gg 1/\tau_R$ , elle est aussi forcément nulle.

5. Cette condition de cohérence temporelle est complétée par une autre condition vue plus loin. Toute condition de cohérence temporelle est relative au spectre des ondes considérées et au processus d'émission associé.

Finalement, lorsqu'on a la condition de cohérence temporelle  $\omega_1 \simeq \omega_2$  (écart faible devant  $1/\tau_R$ ), il reste

$$I_{12} = 2 A_{01}(M) A_{02}(M) \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)]$$

### Remarque

Dans la démonstration précédente, on a raisonné avec des retards de phase indépendants du temps. Si ce n'est pas le cas, il est clair que la cohérence des ondes reste certainement valide si leur différence est constante ou évolue sur des échelles de temps supérieures à  $\tau_R$ .

Ceci est en relation avec la capacité exigible suivante du programme officiel : « Citer les principales conditions pour que le phénomène d'interférences apparaisse (ondes quasi-synchrones, déphasage constant dans le temps ou très lentement variable). ».

### 3/ Condition de cohérence d'ondes réelles quasi-monochromatiques

Le cas précédent n'est en fait pas très réaliste puisqu'on a vu que les ondes parfaitement monochromatiques n'existent pas. On doit donc analyser des superpositions d'ondes modélisant mieux la réalité...

### Théorème 4

Soient deux ondes dont les amplitudes vibratoires sont de la forme (avec  $i \in \{1; 2\}$ )

$$a_i(M, t) = A_{0i} \cos \psi_i(M, t)$$

où les  $A_{0i}$  sont des constantes. Pour que ces ondes puissent être cohérentes entre elles, il est **nécessaire** que leurs phases  $\psi_i$  soient **corrélées** (fluctuations temporelles non indépendantes sur l'échelle de temps  $\tau_R$ ).

### Démonstration

Le terme de corrélation s'écrit

$$I_{12}(M, t) = 4 \langle a_1 a_2 \rangle_{\tau_R} = 4 A_{01} A_{02} \langle \cos \psi_1 \cos \psi_2 \rangle_{\tau_R}$$

soit 
$$I_{12}(M, t) = 2 A_{01} A_{02} [\langle \cos(\psi_1 + \psi_2) \rangle_{\tau_R} + \langle \cos(\psi_1 - \psi_2) \rangle_{\tau_R}]$$

Si les phases ne sont pas corrélées, alors chacune des valeurs moyennes est forcément nulle (les cosinus fluctuant de façon équiprobable sur l'intervalle  $[-1; 1]$  sur la durée  $\tau_R$ ) et  $\langle a_1 a_2 \rangle_{\tau_R} = 0$ , ce qui conduit effectivement à l'incohérence de ces ondes puisque  $I_{12} = 0$ . On voit bien qu'il est nécessaire d'avoir la corrélation des phases pour espérer une cohérence des ondes entre elles!

### Exercice 1

1. Expliquer pourquoi il est généralement vain de chercher à obtenir des interférences à partir de deux ondes issues de deux sources différentes, même si elles sont quasi-synchrones.
2. On considère les ondes obtenues à partir d'une source ponctuelle S donnée. Expliquer pourquoi il n'y a pas obligatoirement observation d'interférences dans tout le champ d'interférences.

### Réponse

1. Quand on prend deux sources lumineuses quelconques distinctes, on ne peut obtenir des interférences dans la mesure où les phases ne sont jamais corrélées (ou alors, ce ne sont pas des sources indépendantes comme le cas de lasers accordés...)! Cela explique pourquoi on ne voit pas très fréquemment des interférences dans le monde qui nous entoure...

**Deux sources distinctes sont généralement incohérentes entre elles!**

2. Utilisons le modèle des trains d'ondes vu au chapitre précédent pour l'émission lumineuse. Comme les divers trains ont des phases décorréées entre elles, la seule chance d'observer des interférences est de faire interférer entre eux deux trains créés à partir d'un même train d'origine pour que leurs phases soient corrélées. Ce n'est pas si immédiat que cela en raison de la valeur généralement faible de la durée de cohérence!

**Même à partir d'une seule source, la cohérence n'est pas obligatoirement assurée!**

Pour culture, il est bon de savoir, même si c'est hors-programme, qu'il existe une autre condition de cohérence, dite de polarisation, en relation avec l'aspect vectoriel, et non scalaire, des ondes lumineuses modélisées plus finement. Fort heureusement, celle-ci n'est pas contraignante dans des conditions usuelles (voir annexe page 17).

Malgré tout, ce qui précède montre que l'observation d'interférences entre deux ondes réelles est manifestement très contraignante pour celles-ci!

### 4/ Critère de cohérence temporelle

On souhaite préciser comment on peut quand même observer des interférences avec des ondes obtenues par une **unique source ponctuelle**<sup>6</sup>...

6. La ponctualité de la source est une hypothèse de modélisation discutable en pratique puisque plus une source est de faible étendue, moins la lumière émise est intense. La rendre quasi-ponctuelle n'est alors pas forcément judicieux et l'étendre conduit éventuellement à un problème de cohérence spatiale discuté dans un chapitre ultérieur (patience!).



## a. Énoncé du critère de cohérence temporelle « en temps »

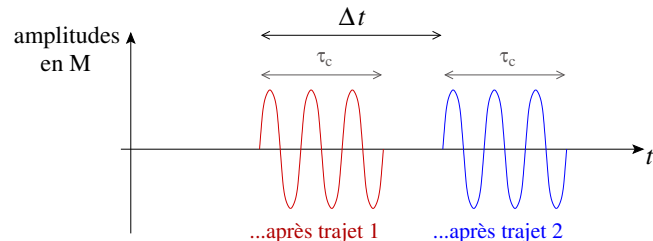
**Théorème 5**

Soient deux ondes lumineuses émises par une même source ponctuelle (durée de cohérence  $\tau_c$ ) mais ayant suivi des trajets optiques différents et se superposant en un point M. Si on appelle  $\Delta t$  le décalage temporel à l'arrivée au point M entre les ondes, alors il y a interférence possible seulement si

$$|\Delta t| < \tau_c$$

**Démonstration**

Comme déjà vu, pour pouvoir avoir des interférences, il est nécessaire d'avoir au point M à chaque instant superposition de deux trains d'ondes **issus d'un même train d'ondes émis par la source** (le déphasage n'est alors pas aléatoire et ne dépend que de la différence des trajets optiques). On voit avec la figure suivante que deux trains d'ondes issus d'un unique train et ayant parcouru des trajets différents ne se recouvrent pas lorsque  $\Delta t > \tau_c$  (en travaillant avec la durée de cohérence et avec  $\Delta t > 0$  non restrictif). Pour que le recouvrement soit possible, il faut avoir effectivement  $\Delta t < \tau_c$ .



## b. Différence de marche

L'écriture précédente du critère de cohérence a été faite en temps pour des raisons de commodité : raisonner avec le déphasage des ondes aurait été possible mais plus abstrait.

On a vu au chapitre précédent qu'il était encore plus commode de s'appuyer sur la notion de chemin optique pour visualiser en unité de longueur les retards de phase. En l'occurrence, c'est une différence de chemins optiques qu'il faut faire intervenir et, comme c'est très fréquemment rencontré en optique ondulatoire, on lui donne un nom !

**Définition**

Une **différence de marche**  $\delta$  est la soustraction de deux chemins optiques de deux rayons différents visant à quantifier en unité de longueur un déphasage.

Par exemple, pour deux rayons issus d'un point source S et ayant suivi deux parcours optiques différents (numérotés 1 et 2), la différence de marche en un point M de rencontre est

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1$$

Compte-tenu de la relation entre chemin optique et retard de phase du chapitre précédent, il vient immédiatement le théorème suivant :

**Théorème 6**

Pour deux ondes déphasées de  $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$  en un point M, la différence de marche  $\delta(M)$  correspondante pour une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  est telle que

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

## c. Énoncé du critère de cohérence temporelle « en distance »

**Théorème 7**

Soient deux ondes lumineuses émises par une même source ponctuelle (longueur de cohérence  $\ell_c$ ) mais ayant suivi des trajets optiques différents et se superposant en un point M. Si on appelle  $\delta(M)$  la différence de marche au point M entre les ondes, alors il y a interférence possible seulement si

$$|\delta(M)| < \ell_c$$

**Démonstration (visible)**

Il suffit de multiplier par  $c$  l'énoncé précédent du critère de cohérence temporelle pour pouvoir conclure...

Une simulation, très intéressante et relative à cette condition de cohérence, est accessible sur :

[http://web.cortial.net/bibliohtml/tr\\_ond\\_j.html](http://web.cortial.net/bibliohtml/tr_ond_j.html)

Le critère de cohérence temporelle permet de voir qu'il est d'autant plus facile d'obtenir des interférences que  $\ell_c$  (ou  $\tau_c$ ) est grand ! Le tableau suivant rappelle les valeurs de  $\ell_c$  (entre autres) pour quelques sources et met en exergue des points clés :

- Le laser est une source de grande cohérence, très intéressante pour l'obtention d'interférences avec, en plus, un faisceau généré intense ! Il a révolutionné pour cela l'optique à sa création en 1960.

- Les sources usuelles présentent des longueurs de cohérence assez faibles, ce qui explique qu'il ne soit pas toujours simple d'obtenir des interférences. Notamment, pour les interférences observées sur les flaques d'eau huilees, la source est le Soleil de longueur de cohérence de l'ordre du micromètre : la différence de marche des ondes qui interfèrent est extrêmement faible !

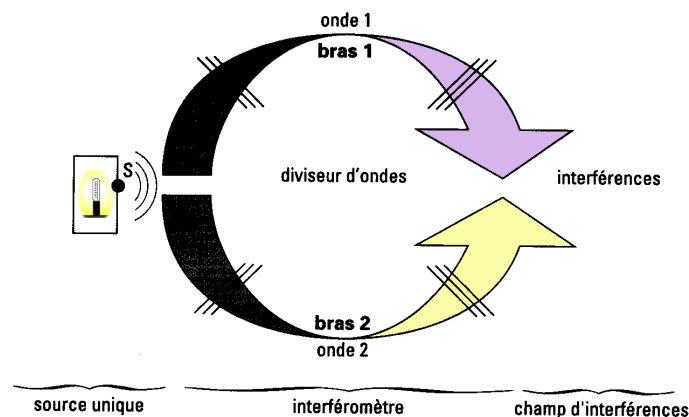
Source	$\lambda_0$ pris (nm) (couleur)	$\nu_0$ ( $\times 10^{14}$ Hz)	$\Delta\nu_0$ (Hz)	$\tau_c$ (s)	$\ell_c$ (vide)
Lumière blanche	380 – 780 nm (visible)	4 à 8	$4 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^{-15}$	$0,7 \mu\text{m}$ $\simeq \lambda_0$
Lampe Hg haute pression	546,1 nm (verte)	5,49	$10^{12}$	$10^{-12}$	$0,3 \text{ mm}$ $\simeq 5 \cdot 10^2 \lambda_0$
Lampe Hg basse pression	546,1 nm (verte)	5,49	$10^9$	$10^{-9}$	$0,3 \text{ m}$ $\simeq 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Laser He-Ne ordinaire (TP)	632,8 nm (rouge)	4,74	$10^9$	$10^{-9}$	$0,3 \text{ m}$ $\simeq 5 \cdot 10^5 \lambda_0$
Laser He-Ne stabilisé	632,8 nm (rouge)	4,74	$10^4$	$10^{-4}$	$30 \text{ km}$ $\simeq 5 \cdot 10^{10} \lambda_0$

## 5/ Conséquences pratiques pour les interféromètres

### Définition

Pour obtenir des interférences en un point M de l'espace, on utilise un système optique appelé **interféromètre** qui **divise** l'onde issue d'une source unique en plusieurs ondes ; ces ondes suivent des chemins différents dans les **bras** (ou **voies**) de l'interféromètre puis se superposent pour former un **champ d'interférences**.

La figure suivante précise le principe général d'un interféromètre à deux ondes :

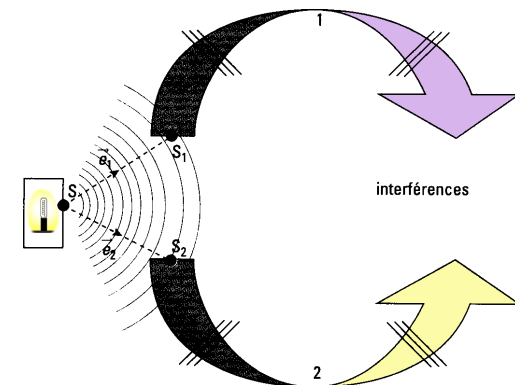


Les ondes ont bien, avec un tel dispositif, **une différence de phase constante** (à l'échelle  $\tau_R$ ) en M qui ne dépend que du parcours des bras et non de la phase à l'émission. En plus, l'interféromètre doit être tel que le critère de cohérence temporelle  $|\delta(M)| \leq \ell_c$  puisse être réalisé : les chemins optiques dans chaque bras ne doivent pas « trop » différer.

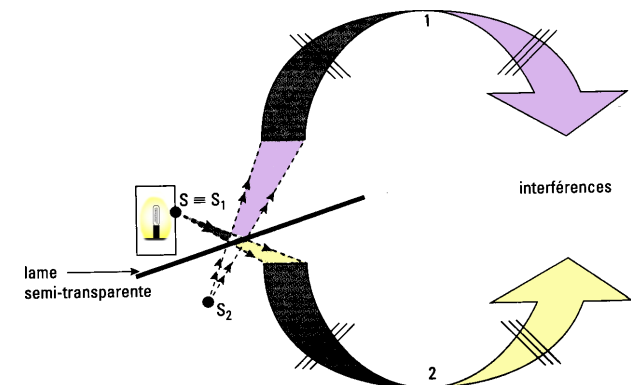
Dans la pratique, deux types de diviseurs d'ondes sont utilisés : les diviseurs du front d'onde et les diviseurs d'amplitude...

### Définitions

Il y a **division du front d'onde** lorsqu'on prélève sur un faisceau incident plusieurs faisceaux provenant d'endroits différents du front d'onde.



Il y a **division d'amplitude** lorsqu'une « surface » partiellement réfléchissante opère une division de chaque rayon incident de la source primaire et que les rayons émergents associés sont cohérents et peuvent interférer après avoir parcouru des chemins différents.



- On peut travailler en division du front d'onde notamment grâce à la diffraction (interféromètre de Young, réseau...) ou grâce à des dispositifs optiques créant des sources secondaires par images de la source primaire (miroir de Lloyd, miroirs de Fresnel, biprisme de Fresnel, bilentilles, interféromètre de Michelson...).
- On peut travailler en division d'amplitude avec les interféromètres de Michelson, de Fabry-Pérot, de Mach et Zender, de Fizeau, de Sagnac, de Jamin...

L'étude concrète de ces interféromètres sera effectuée pour partie dans le cours, les exercices, les devoirs... et aux concours...

### III - Aspects descriptifs des interférences à deux ondes

#### Remarques importantes

- On poursuit à présent l'analyse théorique des interférences en supposant les conditions de cohérence parfaitement réalisées.
- Pour alléger les écritures, on ne précise plus lors des moyennes temporelles que l'échelle de lissage est  $\tau_R$  et on ne précise pas les dépendances temporelles lentes (temps caractéristiques supérieurs à  $\tau_R$ )<sup>7</sup>.

#### 1/ Formule de Fresnel des interférences à deux ondes

##### Théorème 8

Soient deux ondes scalaires **quasi-synchrones cohérentes entre elles**. On note  $I_1$  et  $I_2$  les intensités associées à chacune de ces ondes. Alors, dans le champ d'interférences, on a la **formule de Fresnel des interférences à deux ondes**

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)]$$

pour un déphasage  $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$  entre les ondes en M explicitable avec la différence de marche  $\delta(M)$  par

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)$$

#### Démonstration

Reprenons les amplitudes scalaires  $a_i(M, t) = A_{0i}(M) \cos(\omega t - \varphi_i(M))$  des ondes considérées. Comme déjà vu précédemment (mais pour rappel car c'est important),

$$I(M) = 2 \langle [a_1(M, t) + a_2(M, t)]^2 \rangle$$

$$\text{soit} \quad I(M) = \underbrace{2 \langle a_1^2(M, t) \rangle}_{I_1(M)} + \underbrace{2 \langle a_2^2(M, t) \rangle}_{I_2(M)} + \underbrace{4 \langle a_1(M, t) a_2(M, t) \rangle}_{\text{terme d'interférences } I_{12}(M)}$$

Ensuite, on explicite le terme d'interférences (développer un produit de cosinus) :

$$I_{12}(M) = 2 A_{01} A_{02} \langle \cos[2\omega t - \varphi_1(M) - \varphi_2(M)] + \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)] \rangle$$

Le premier cosinus a une moyenne nulle et le second ne varie pas sur la durée  $\tau_R$ , d'où

$$I_{12}(M) = 2 A_{01} A_{02} \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)]$$

7. Par exemple,  $I(M)$  représentera l'intensité mesurée au point M mais elle peut néanmoins varier dans le temps de façon lente et mesurable par le photodétecteur utilisé.

Enfin, on peut conclure en remarquant que  $I_i(M) = A_{0i}(M)^2$  puisque la moyenne temporelle de  $\cos^2(\omega t - \varphi_i)$  est  $1/2$ .

Quelques points importants sont à noter :

- Le changement de signe du déphasage (resp. de la différence de marche) ne modifie pas l'intensité vibratoire.
- La dépendance spatiale de l'intensité dans le champ d'interférences est en pratique surtout due au déphasage  $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$  car on travaille souvent avec des intensités  $I_i$  quasi-uniformes sur ce champ.

#### Attention !

Il ne faut surtout pas utiliser cette formule de Fresnel pour des interférences à plus de deux ondes ! On verra comment procéder pour N ondes, avec N entier quelconque, plus loin...

#### 2/ Ordre d'interférences ; franges brillantes et sombres

##### Définition

On appelle **ordre d'interférences**  $p(M)$  au point M la quantité sans dimension

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{\varphi_2(M) - \varphi_1(M)}{2\pi}$$

Un intérêt de l'ordre d'interférences est de pouvoir définir et référencer les franges d'interférences :

##### Définition

Les **franges d'interférences** sont les intersections des surfaces iso-ordre avec la surface d'observation (caractérisée par un écran, un capteur CCD, le plan d'observation d'un viseur...).

Les franges ont une infinité de formes possibles suivant le système interférentiel.

Attention, l'intensité peut varier spatialement le long d'une frange donnée ! Avec la formule de Fresnel

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2 \sqrt{I_1(M) I_2(M)} \cos[2\pi p(M)]$$

on voit qu'à ordre fixé,  $I(M)$  varie encore spatialement en raison de la non uniformité des termes  $I_i(M)$ . Néanmoins, la notion de franges reste pertinente ! En effet, ce sont les variations de l'ordre qui entraînent l'aspect visuel des franges (les variations d'intensité intéressantes en interférences sont celles dues au déphasage des ondes comme déjà vu).

**Théorème 9**

- Une frange **brillante** correspond à un ordre  $p$  **entier** (relatif :  $p \in \mathbb{Z}$ ).
- Une frange **sombre**<sup>8</sup> correspond à un ordre  $p$  dit « **demi-entier** » (c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme  $q + 1/2$  avec  $q \in \mathbb{Z}$ ).

**Démonstration**

Pour une frange brillante, le terme  $\cos[2\pi p(M)]$  est maximal (valeur 1), soit un ordre  $p(M) \in \mathbb{Z}$  et, pour une frange sombre, il est minimal (valeur  $-1$ ), soit un ordre  $p(M) = q + 1/2$  avec  $q \in \mathbb{Z}$ .

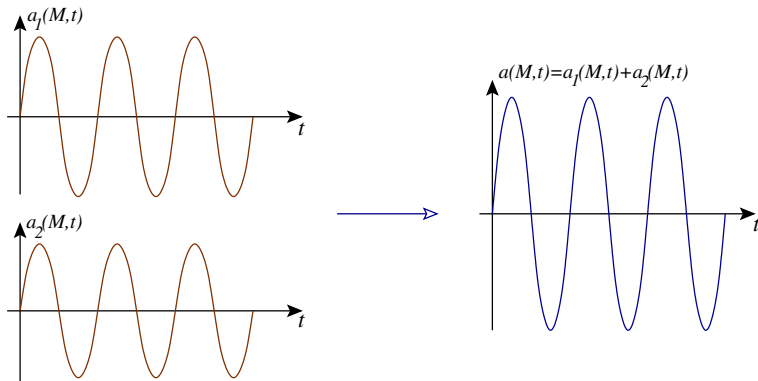
On peut aussi interpréter à partir des amplitudes scalaires les valeurs de l'ordre pour les franges brillantes et sombres. Considérons les amplitudes vibratoires  $a_1(M, t)$  et  $a_2(M, t)$  au point M en fonction du temps.

• **Cas des franges brillantes :**

La superposition conduisant à  $a(M, t)$  de la plus forte amplitude est réalisée lorsque les ondes sont en phase (modulo  $2\pi$ ), ce qui donne ensuite effectivement une intensité plus élevée que pour d'autres déphasages.

**Définition**

Des ondes en phase (modulo  $2\pi$ ) au point M y produisent des **interférences constructives**.



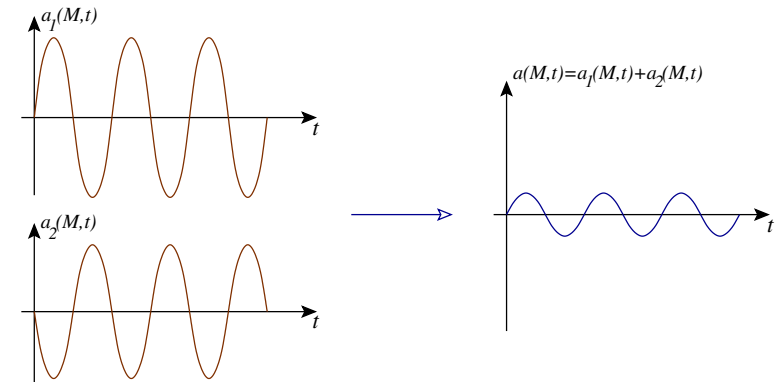
Amplitudes pour une situation constructive

• **Cas des franges sombres :**

La superposition conduisant à  $a(M, t)$  de la plus faible amplitude est réalisée lorsque les ondes sont en opposition de phase (modulo  $2\pi$ ), ce qui donne ensuite effectivement une intensité plus faible que pour d'autres déphasages.

**Définition**

Des ondes en opposition de phase (modulo  $2\pi$ ) au point M y produisent des **interférences destructives**.



Amplitudes pour une situation destructive

**3/ Contraste (ou visibilité)****Définition**

Soit une zone prédéfinie d'observation des interférences. Le contraste (ou la visibilité) des interférences sur cette zone est

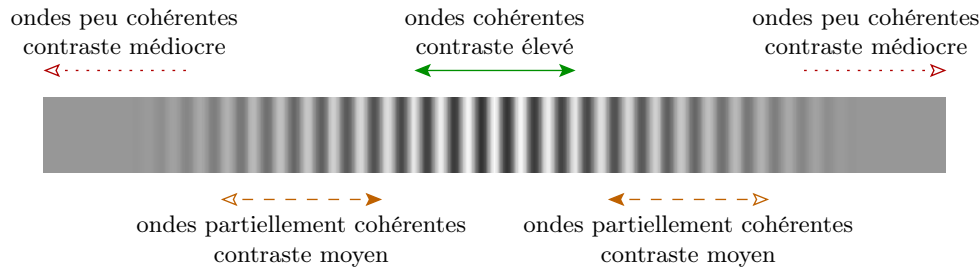
$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \in [0; 1]$$

où  $I_{\max}$  (resp.  $I_{\min}$ ) désigne l'intensité maximale (resp. minimale) mesurée sur la zone considérée.

Suivant l'importance de la zone considérée, le contraste défini aura plus ou moins un sens global : pour une zone comprenant juste quelques franges, on aura un contraste local (qui varie généralement suivant la position M de la zone, soit  $\mathcal{C}(M)$ ) et pour une zone correspondant à tout le champ d'interférences, ils s'agit d'un contraste global (indépendant de M). **Par défaut, on se réfère au contraste local** en interférences.

8. Bien entendu, si l'intensité est nulle sur une frange sombre, elle est dite **noire**.





Le cas où  $\mathcal{C} = 0$  correspond à la situation sans interférences et le cas  $\mathcal{C} = 1$  correspond à la situation des interférences les plus contrastées avec des franges sombres noires (puisqu'alors  $I_{\min} = 0$ ). Pour information, l'œil humain n'est sensible qu'à des contrastes supérieurs à environ 5%.

### Théorème 10

Dans le cas d'interférences à deux ondes cohérentes avec  $I_1$  et  $I_2$  uniformes,

$$I(M) = [I_1 + I_2] [1 + \mathcal{C} \cos \Delta\varphi(M)]$$

avec  $\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$  et  $\mathcal{C} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$

### Démonstration

La formule de Fresnel  $I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi(M)$

donne  $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$  et  $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$

et on en déduit aisément l'expression du contraste, puis la nouvelle forme de la formule de Fresnel.

Compte tenu du théorème précédent, on peut représenter l'évolution de l'intensité pour divers contrastes et les figures d'interférences (voir figures suivantes), ce qui montre bien que les franges seront d'autant plus faciles à voir que le contraste est bon.

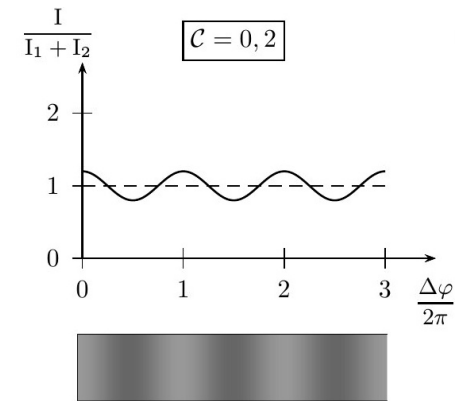
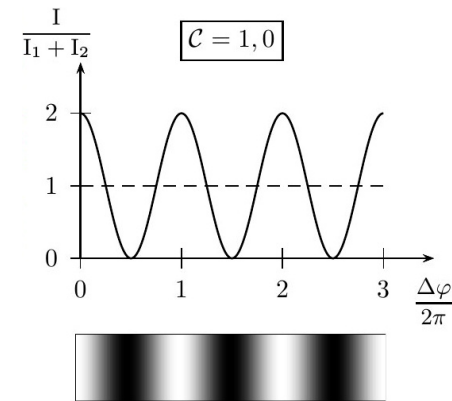
Ces tracés permettent de se douter d'une **propriété importante** vérifiable mathématiquement facilement :

### Théorème 11

Soit des interférences à deux ondes quasi-synchrones cohérentes entre elles et d'intensités propres respectives  $I_1$  et  $I_2$ . Le contraste est optimal lorsque

$$I_1 = I_2$$

et on ne peut observer des interférences contrastées pour  $I_1$  et  $I_2$  trop différentes.



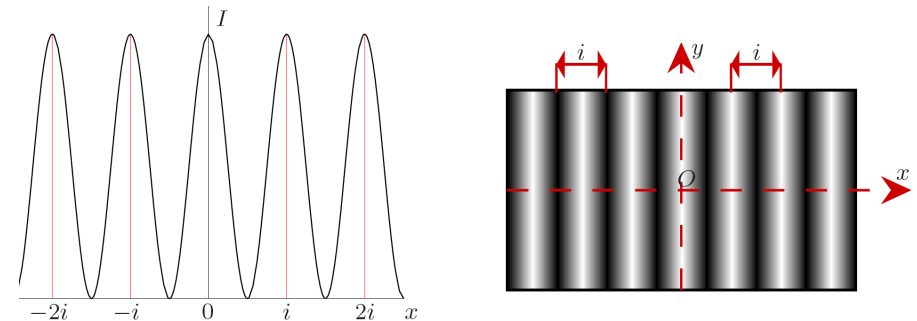
### 4/ Interfrange

Un dernier outil descriptif s'avère particulièrement utile pour les figures d'interférences.

### Définition

L'**interfrange**  $i(M)$  est la plus petite distance entre deux points du plan d'observation correspondant à une variation d'ordre  $p$  d'une unité (au voisinage de  $M$ ).

Généralement, on détermine l'interfrange en considérant les franges brillantes ou les franges sombres. Attention, l'interfrange n'est pas forcément uniforme sur un écran même s'il existe des cas où c'est vérifié : dans ces cas uniquement, l'interfrange représentera une période spatiale des franges :



Bien entendu, des interférences ne sont exploitables que si l'interfrange est suffisamment grand compte tenu de la résolution du photodétecteur utilisé. Par exemple, pour l'œil humain, on considère que des franges plus resserrées que les empreintes digitales sur les doigts ( $i \leq 0,1$  mm) sont trop difficiles à distinguer et nécessitent d'être agrandies par un dispositif optique adapté (viseur micrométrique par exemple...).

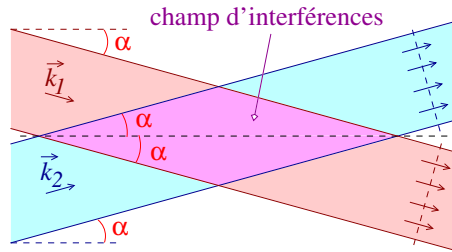
## IV - Éléments sur des configurations géométriques interférentielles typiques

On termine ce chapitre par la présentation de **configurations géométriques interférentielles typiques à maîtriser** sans rentrer forcément dans les détails de réalisation et d'exploitation qui seront vus dans les chapitres suivants, exercices, devoirs...

### 1/ Configuration typique à deux ondes planes

#### a. Mise en situation

On s'intéresse au cas de deux ondes planes synchrones cohérentes qui se recouvrent pour former un champ d'interférences. On note  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  leurs vecteurs d'onde respectifs et  $2\alpha$  l'angle absolu qu'ils forment entre eux. Le milieu de propagation est homogène d'indice  $n$  et la longueur d'onde dans le vide est notée  $\lambda_0$ .



#### b. Déphasage en un point

##### Théorème 12

Deux ondes planes synchrones cohérentes de vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ , en milieu homogène, présentent en un point M du champ d'interférences un déphasage

$$\Delta\varphi(M) = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}$$

en choisissant comme point de référence O un point où les deux ondes sont en phase (éventuellement virtuellement).

##### Démonstration

Il y a deux façons de procéder :

##### • Méthode la plus rapide (à privilégier) :

On pose les amplitudes vibratoires des deux ondes planes

$$a_i(M, t) = A_{0i} \cos(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{OM} - \psi_i)$$

Puisque les faisceaux sont en phase en O,  $\psi_1 = \psi_2$ . Alors, le déphasage entre les deux ondes au point M est

$$\Delta\varphi(M) = \vec{k}_2 \cdot \vec{OM} + \psi_2 - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM} - \psi_1 = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}$$

ce qui est le résultat attendu.

##### • Méthode un peu plus lente (mais plus visuelle) :

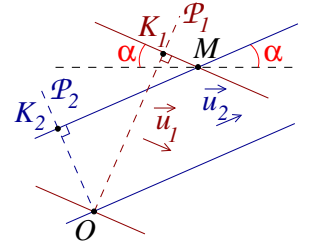
Les deux faisceaux sont en phase au point de référence O. On représente les plans équiphasés  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  passant par O pour chaque faisceau et on précise les deux rayons interférant en M (de vecteurs directeurs unitaires  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ ).

On sait alors que  $K_1$  et  $K_2$  sont en phase donc la différence de marche au point M est (en notant  $n$  l'indice du milieu)

$$\delta(M) = (SM)_2 - (SM)_1 = n(K_2M - K_1M) = n(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OM}$$

$$\text{Alors,} \quad \Delta\varphi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \cdot \vec{OM} = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}$$

ce qui correspond bien à la formule attendue.



#### c. Caractérisation des interférences

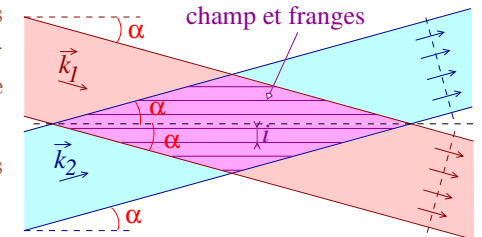
##### Théorème 13

Soient deux ondes planes synchrones cohérentes de vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  formant un angle absolu  $2\alpha$ . On choisit un point O de référence où elles sont en phase (éventuellement virtuellement). L'indice du milieu homogène de propagation est  $n$  et la longueur d'onde par rapport au vide est  $\lambda_0$ .

Alors, dans le champ d'interférences est observé un phénomène interférentiel :

- Les franges dans l'espace sont des plans parallèles à la première bissectrice de  $(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$  (voir figure précisant les franges brillantes).
- Deux plans brillants consécutifs sont distants de

$$i = \frac{\lambda_0}{2n \sin \alpha}$$



##### Démonstration

La formule de Fresnel des interférences à deux ondes s'écrit

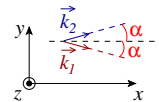
$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\varphi(M)$$

avec

$$\Delta\varphi_M = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{OM}$$

Le contraste est donc uniforme dans tout le champ d'interférences. De plus, les franges correspondent à  $\Delta\varphi(M) = C^{te}$ , ce qui est une ligne de niveau de plans orthogonaux à  $\vec{k}_2 - \vec{k}_1$  !

On peut le préciser en explicitant les vecteurs d'ondes et le déphasage :

$$\vec{k}_1 = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k}_2 = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$


soit 
$$\Delta\varphi(M) = \frac{4\pi n}{\lambda_0} y \sin \alpha$$

ce qui donne la position annoncée de plans. Deux plans brillants consécutifs correspondent à une rotation du décalage des phases de  $2\pi$  (en absolu), soit

$$2\pi = \frac{4\pi n}{\lambda_0} i \sin \alpha$$

d'où le résultat pour la distance interfranges.

### Attention !

La distance entre deux plans brillants consécutifs ne correspond à l'interfrange sur l'écran que si ce dernier est placé orthogonalement à ces plans !

### Exercice 2

Un expérimentateur réalise dans l'air des interférences entre deux faisceaux parallèles quasi-synchrones cohérents de largeurs identiques  $L = 1,1$  cm. L'angle entre les deux faisceaux est noté  $2\alpha$  et leur déphasage est nul au centre O de leur recouvrement.

- Où doit-il placer l'écran pour avoir le plus de franges possibles ?
- Sachant que la longueur d'onde par rapport à l'air est  $\lambda = 0,50$   $\mu\text{m}$ , quelle contrainte a l'expérimentateur sur  $\alpha$  pour exploiter de façon assez confortable les franges à l'œil nu (interfrange supérieur à la valeur  $i_{\text{lim}} = 1,0$  mm) ?
- Pour l'angle limite  $\alpha_{\text{lim}}$ , combien y a-t-il de franges brillantes visibles ?

### Réponse

- Il faut placer l'écran orthogonalement aux franges dans la zone la plus large du champ d'interférences.
- On sait que l'interfrange est dans cette situation  $i = \lambda / (2 \sin \alpha)$  donc  $i > i_{\text{lim}}$  revient à imposer

$$\sin \alpha < \sin \alpha_{\text{lim}} = \frac{\lambda}{2 i_{\text{lim}}} \ll 1$$

soit

$$\alpha < \alpha_{\text{lim}} \simeq \frac{\lambda}{2 i_{\text{lim}}} = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 52''$$

C'est un angle extrêmement faible !

- Pour l'angle limite, l'interfrange est  $i_{\text{lim}} = 1,0$  mm. Le nombre de franges brillantes peut être obtenu en dénombrant le nombre de valeurs entières de l'ordre d'interférences sur la largeur  $L / \cos \alpha$  du champ d'interférences sur l'écran. On peut aussi dire que c'est

$$N = 2 E \left[ \frac{L}{2 i_{\text{lim}} \cos \alpha} \right] + 1$$

en comptant deux fois les franges au dessus de la frange centrale et en n'oubliant pas d'ajouter cette dernière ! On trouve

$$N = 11 \text{ franges brillantes}$$

### Moralité

La condition  $\alpha \ll 1$  est généralement requise de sorte à espérer voir les franges. Cela fait que la formule du théorème précédent pour  $i$  est souvent écrite sous la forme **approchée**

$$i \simeq \frac{\lambda_0}{2 n \alpha}$$

## 2/ Configuration typique à deux sources secondaires

### a. Franges dans l'espace

#### Théorème 14

Soient deux sources secondaires **synchrones**  $S_1$  et  $S_2$  émettant **en phase** des ondes dans tout l'espace homogène. Ces sources sont toutes deux de **même nature** (réelle ou virtuelle). Alors, les « franges » dans l'espace sont des **hyperboloïdes**<sup>9</sup> de **révolution à deux nappes de foyers  $S_1$  et  $S_2$** .

9. Si la nature des sources est différente, ce qui est moins fréquent, on obtient des ellipsoïdes de révolution de foyers  $S_1$  et  $S_2$ ...

**Démonstration**

La différence de marche en un point M quelconque de l'espace est (puisque  $S_1$  et  $S_2$  sont en phase)

$$\delta(M) = n [S_2M - S_1M]$$

Or, une « frange » dans l'espace correspond à la surface de différence de marche uniforme  $\delta_{frange}$ , d'où

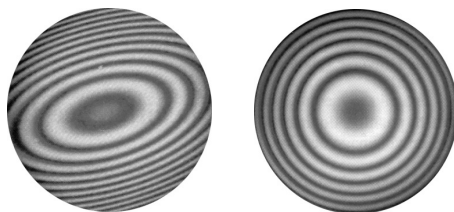
$$S_2M - S_1M = \frac{\delta_{frange}}{n}$$

ce qui est la définition bifocale d'un hyperboloïde de révolution à deux nappes de foyers  $S_1$  et  $S_2$ . Lorsqu'on change de valeur de  $\delta_{frange}$ , on change d'hyperboloïde.

Notons que déphaser une source secondaire par rapport à l'autre d'une valeur constante ne change pas la forme des franges et ne fait que décaler leur luminosité.

La représentation des hyperboloïdes est donnée ci-contre (les ordres sont entiers; ce sont les franges brillantes). Cela ne vous rappelle-t-il pas une simulation montrée en tout début de chapitre ?

Suivant la position d'un écran plan de visualisation, l'allure de la figure d'interférences change complètement. En voici des exemples (parmi d'autres) :

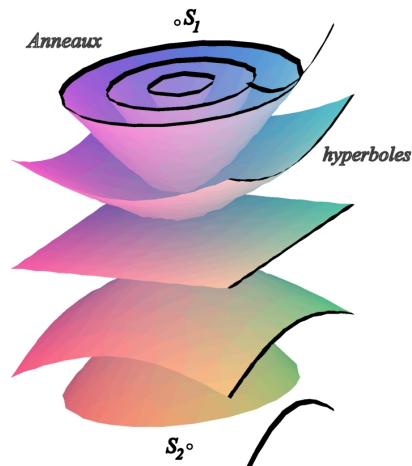


Ellipses

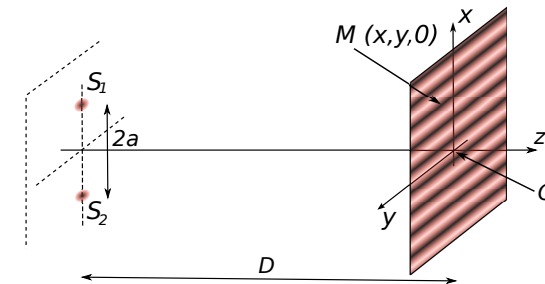
Anneaux

On va étudier dans la suite deux cas typiques qui sont fréquemment rencontrés et exploités dans les interféromètres à deux ondes :

- cas de **franges hyperboliques** lorsque l'écran est parallèle à  $(S_1S_2)$  (et elles sont même **quasi-rectilignes** si l'écran est « assez loin ») ;
- cas de **franges circulaires (ou anneaux)** lorsque l'écran est orthogonal à  $(S_1S_2)$  (et les anneaux ne sont pas équidistants).

**b. Écran parallèle à l'axe des sources secondaires****Théorème 15**

On considère le dispositif suivant où les sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  sont ponctuelles, synchrones (longueur d'onde  $\lambda_0$ ) **en phase** et dans un milieu homogène d'indice  $n$ . L'écran est placé parallèlement à  $(S_1S_2)$  et à une distance  $D$  **grande devant l'espacement des sources et devant la taille de la zone observée** autour de la médiatrice de  $[S_1S_2]$ .



Alors, compte tenu de  $D \gg a$ ,  $D \gg |x|$  et  $D \gg |y|$ ,

- La différence de marche au point M est

$$\delta(M) \simeq \frac{2ax}{D} n$$

- Les franges sont quasi-rectilignes, **orthogonales à  $(S_1S_2)$** .
- L'interfrange est uniforme et de valeur

$$i = \frac{\lambda_0 D}{2an}$$

**Démonstration**

À connaître parfaitement (comme le théorème) !

Commençons par le calcul de la différence de marche...

**Méthode 1 :**

Comme les sources secondaires sont en phase, la différence de marche est

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = n [S_2M - S_1M]$$

Avec le système de coordonnées de la figure,  $S_1 (a, 0, -D)$ ,  $S_2 (-a, 0, -D)$  et  $M (x, y, 0)$ . Alors, sans approximation,

$$S_1M = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + D^2} = D \sqrt{1 + \frac{(x-a)^2 + y^2}{D^2}}$$

et, comme  $D \gg (|x|, |y|, a)$ , on développe à l'ordre 3 inclus (nul mais important à préciser car cela veut dire que le développement est correct tant que l'ordre 4 n'induit pas une modification de  $\delta(M)$  de  $\lambda_0$  !) :

$$S_1 M \simeq D \left[ 1 + \frac{(x-a)^2 + y^2}{2D^2} \right]$$

De même,

$$S_2 M \simeq D \left[ 1 + \frac{(x+a)^2 + y^2}{2D^2} \right]$$

Après soustraction aisée, on obtient bien le résultat.

### • Méthode 2 :

C'est plus « sioux » mais ça marche...

$$\delta(M) = n [S_2 M - S_1 M] = n \frac{S_2 M^2 - S_1 M^2}{S_2 M + S_1 M} \simeq \frac{n}{2D} [(x+a)^2 - (x-a)^2]$$

et on en tire le résultat aisément.

Considérons à présent la forme et la direction des franges. Dans la mesure où  $D \gg (|x|, |y|, a)$ , on constate que la différence de marche ne dépend que de  $x$  : on observe dans le champ d'interférences des **franges rectilignes parallèles à (Oy)** (il ne faut surtout pas se tromper de sens ; direction indiquée sur la figure initiale).

Si les faisceaux issus de chaque trou  $S_1$  et  $S_2$  ne sont pas de luminosité uniforme on peut observer une figure du type ci-contre.



Il reste à déterminer l'interfrange. L'ordre d'interférences au point M est

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{2axn}{\lambda_0 D}$$

donc

$$x = \frac{\lambda_0 D}{2an} p(M)$$

On obtient une variation d'ordre  $\Delta p(M) = 1$  lorsque  $x$  varie de  $\Delta x = i$  (interfrange), d'où le résultat (indépendant de la position de M, donc uniforme).

### Exercice 3

Calculer l'interfrange pour les valeurs  $2a = 1,0$  mm,  $D = 40$  cm,  $n = 1,0$  et  $\lambda_0 = 0,60$   $\mu$ m. Commenter.

### Réponse

On trouve

$$i = 0,24 \text{ mm}$$

Malgré le faible écartement des sources secondaires et la grande distance  $D$ , les franges rectilignes sont très resserrées ! Il est recommandé d'utiliser un **viseur micrométrique** pour mesurer l'interfrange (en se basant sur plusieurs franges, du fait de la périodicité, pour réduire l'incertitude de mesure).

Si l'on se débrouille expérimentalement pour que les sources secondaires respectent la condition de contraste maximal  $I_1 = I_2 = I_0/2$ , la formule de Fresnel des interférences à deux ondes donne

$$I(M) = I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{\delta(M)}{\lambda_0} \right) \right] = I_0 \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{x}{i} \right) \right]$$

avec les expressions déjà vues pour  $\delta(M)$  et  $i$ .

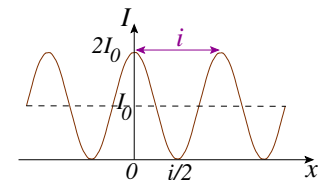
### Exercice 4

Tracer l'intensité sur l'écran en fonction de  $x$  dans le champ d'interférences.

### Réponse

Le tracé est une sinusoïde de période  $i$  et on prend bien garde au fait que l'intensité est forcément positive ! La valeur moyenne est  $I_0$ , la valeur maximale est  $2I_0$  et les minima sont nuls (contraste maximal !).

Si  $I_1 \neq I_2$ , le contraste diminue et les franges sombres ne sont plus noires.



### Attention !

Les résultats précédents sont vraiment très classiques, à connaître et à savoir démontrer. On veillera soigneusement aux conditions d'application et aux notations. Par exemple, la distance entre  $S_1$  et  $S_2$  est parfois notée  $a$  au lieu de  $2a$  et il ne faut pas se faire piéger par ça...

### c. Écran orthogonal à l'axe des sources secondaires

Voici un autre cas, un peu plus technique que le précédent mais de principe d'étude important (même si les résultats ne sont cette fois-ci pas à retenir obligatoirement).



**Exercice 5**

On considère un dispositif où les sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  sont ponctuelles, synchrones (longueur d'onde  $\lambda_0$ ) **en phase** et dans un milieu homogène d'indice  $n$ . L'écran est placé orthogonalement à  $(S_1S_2)$ .

C'est la source  $S_2$  qui est la plus proche de l'écran. Avec  $C$  le point d'intersection de celui-ci avec l'axe  $(S_1S_2)$ , on pose  $D = S_2C$ . On pose aussi  $2e = S_1S_2$  et  $\rho = CM$  où  $M$  est un point quelconque sur l'écran.

1. Préciser, par une justification la plus simple possible, la forme des franges observées sur l'écran.
2. Montrer que, lorsque  $D \gg \rho$ , la différence de marche au point  $M$  de l'écran vaut

$$\delta(M) \simeq 2ne \left[ 1 - \frac{\rho^2}{2D(D+2e)} \right]$$

Comment se simplifie à l'ordre le plus bas pertinent ce résultat pour  $D \gg e$  ?

3. On suppose dans toute la suite que  $D \gg \rho$  et  $D \gg e$ . Comment évolue l'ordre d'interférences quand on s'éloigne du centre  $C$  de l'écran ?
4. Montrer que si le centre  $C$  est un point brillant<sup>10</sup> (intensité maximale), le rayon du  $q^e$  anneau brillant sur l'écran est, dans les conditions d'étude,

$$\rho_q = D \sqrt{\frac{2q}{p_0}} \quad \text{où} \quad p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0}$$

**Réponse**

1. Il y a **symétrie de révolution des chemins optiques** autour de l'axe  $(S_1S_2)$  donc la figure d'interférences est constituée **d'anneaux** de centre  $C$  (avec le cas particulier d'uniformité totale si  $S_1$  et  $S_2$  sont confondues).
2. La différence de marche est, en utilisant le théorème de Pythagore pour le calcul,

$$\delta(M) = n[S_1M - S_2M] = n \left[ \sqrt{(D+2e)^2 + \rho^2} - \sqrt{D^2 + \rho^2} \right]$$

La différence de marche ne dépend que de  $\rho$ , ce qui est cohérent avec la figure d'interférences prévue à la question précédente.

Compte tenu de  $D \gg \rho$ , on peut écrire plus simplement

$$S_1M \simeq (D+2e) \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{(D+2e)^2} \right]$$

et

$$S_2M \simeq D \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{D^2} \right]$$

10. On verra ultérieurement comment procéder si le centre n'est pas un point brillant (en faisant intervenir les excédents fractionnaires) mais autant commencer par voir ce cas simple...

donc, la soustraction de ces expressions donne, après simplifications élémentaires, le résultat de différence de marche annoncé :

$$\delta(M) \simeq 2ne \left[ 1 - \frac{\rho^2}{2D(D+2e)} \right]$$

Lorsqu'on dispose en plus de la condition  $D \gg e$ , il vient

$$\delta(M) \simeq 2ne \left[ 1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right]$$

Ce résultat peut être aussi mis sous la forme  $\delta(M) \simeq 2ne \cos \theta$  avec  $\theta = \widehat{CS_2M} \dots$

3. L'ordre d'interférences au point  $M$  est

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{2ne}{\lambda_0} \left[ 1 - \frac{\rho^2}{2D^2} \right]$$

Par conséquent, l'ordre d'interférences au centre vaut  $p_0 = 2ne/\lambda_0$  et **il décroît quand on s'éloigne du centre  $C$  des anneaux**.

4. Le centre  $C$  étant brillant, l'ordre d'interférences au centre  $p_0 = 2ne/\lambda_0$  est un entier ! De plus, l'ordre étant décroissant avec la distance  $\rho$ , les anneaux brillants correspondent aux valeurs entières inférieures de l'ordre  $p_0$  : pour le  $q^e$  anneau, l'ordre entier est  $p_0 - q$ . Ainsi,

$$p_0 - q = \underbrace{\frac{2ne}{\lambda_0}}_{p_0} \left[ 1 - \frac{\rho_q^2}{2D^2} \right] \quad \text{soit} \quad \rho_q = D \sqrt{\frac{2q}{p_0}}$$

Finalement, **les anneaux sont de plus en plus resserrés quand on s'éloigne du centre** (en racine d'entiers successifs dans ce cas à centre brillant).

**Attention !**

Luttez contre les croyances fausses d'élèves d'ordre au centre des anneaux nul et d'ordre croissant en s'éloignant du centre des anneaux : c'est faux en général !

Bien entendu, l'intensité est donnée par la formule de Fresnel des interférences à deux ondes et, dans le cas de contraste optimal  $I_1 = I_2 = I_0/2$ ,

$$I(M) = I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi \delta(M)}{\lambda_0} \right) \right]$$

### 3/ Configuration à N ondes à progression arithmétique de phase

#### a. Situation du problème

Ce sont principalement les interférences à deux ondes qui ont été considérées jusqu'à présent mais on peut tout à fait considérer N ondes avec N quelconque. Il existe de nombreuses configurations à N ondes mais l'une d'elles est particulièrement intéressante : il s'agit de celle où les ondes sont équivalentes mais ont des retards de phase progressifs en progression arithmétique. Vous avez déjà rencontré ça en MPSI lors de l'étude du réseau...

On se propose dans cette dernière partie du cours de mener l'étude théorique générale de ce type de configuration. Les compléments pratiques sur le réseau ne seront traités que dans les prochains chapitres, exercices, devoirs, TP...

#### b. Amplitude vibratoire complexe

La notion de diagramme de Fresnel a été présentée en MPSI afin de visualiser géométriquement un ou plusieurs nombres complexes dans le plan de Cauchy, ceux-ci formalisant en notation complexe des signaux sinusoïdaux. Cela va nous être encore une fois utile...

##### Definition

L'amplitude vibratoire d'une onde scalaire monochromatique

$$a(M, t) = A_0(M) \cos(\omega t - \varphi(M))$$

peut être décrite dans le plan de Cauchy grâce à l'amplitude vibratoire complexe

$$\underline{a}(M, t) = \underline{A}(M) e^{j\omega t} = A_0(M) e^{j(\omega t - \varphi(M))}$$

dont la partie réelle est  $a(M, t)$ .

Notez que  $\underline{A}(M)$  s'appelle aussi amplitude complexe de l'onde (que d'amplitudes!!)...

##### Théorème 16

L'intensité vibratoire est le carré du module de l'amplitude complexe d'une onde scalaire monochromatique :

$$I(M) = |\underline{a}(M, t)|^2 = |\underline{A}(M)|^2$$

##### Démonstration

On écrit simplement l'intensité vibratoire

$$I(M) = 2 \langle a^2(M, t) \rangle = A_0^2(M) = |\underline{A}(M)|^2 = |\underline{a}(M, t)|^2$$

#### c. Diagramme de Fresnel et conséquences

Pour le travail avec des ondes synchrones cohérentes simples, les diagrammes de Fresnel permettent d'accéder sans technicité à des résultats utiles...

##### Théorème 17

Soit la superposition de N ondes quasi-planes synchrones équivalentes en un point M où leurs retards de phase suivent une progression arithmétique de raison  $\varphi(M)$ . Alors, la courbe d'intensité des interférences en fonction de  $\varphi(M)$  :

- présente des pics principaux (maxima globaux) pour  $\varphi(M) = 0 [2\pi]$  de demi-largeur  $2\pi/N$  ;
- présente ses annulations lorsque  $\varphi(M) = \frac{2\pi}{N} \left[ \frac{2\pi}{N} \right]$  et  $\varphi(M) \neq 0 [2\pi]$ .

##### Démonstration

L'amplitude vibratoire complexe au point M considéré pour l'onde q (avec  $q \in \mathbb{N}_{N-1}$ ) est, compte-tenu des conditions imposées,

$$\underline{a}_q(M, t) = A_0 e^{j[\omega t - q \varphi(M)]} = A_0(t) e^{-j q \varphi(M)}$$

quitte à décaler l'origine des temps ou de l'espace. On peut alors dessiner le diagramme de Fresnel de somme des amplitudes des ondes cohérentes en prenant pour référence l'onde d'indice  $q = 0$ . Cette représentation doit permettre de déterminer les cas d'interférences constructives et destructives recherchés :

- **Interférences constructives** : l'intensité est maximale globalement lorsque toutes les flèches représentatives des  $\underline{a}_q$  sont alignées, ce qui est équivalent à avoir un ordre entier (relatif à la raison  $\varphi$ ), soit

$$\varphi(M) = 0 [2\pi]$$

- **Interférences destructives** : l'intensité est nulle lorsque toutes les flèches représentatives des  $\underline{a}_q$  forment un polygone (éventuellement croisé ou aplati) avec fermeture à l'origine, ce qui N'EST PAS équivalent à avoir un ordre demi-entier (relatif à la raison  $\varphi$ ), soit

$$N \varphi(M) = 0 [2\pi] \quad \text{et} \quad \varphi(M) \neq 0 [2\pi]$$

Les schémas suivants présentent trois situations typiques pour  $N = 5$  avec constructivité (figure de gauche) et destructivité (autres figures).



La demi-largeur des pics principaux de la courbe  $I(\varphi)$  s'obtient directement en considérant qu'il s'agit de l'écart entre la phase de position d'un maximum et celle de position de la première annulation d'un côté ou de l'autre...

Une simulation, très intéressante, relative à la construction de Fresnel à N ondes et montrant le profil d'intensité en correspondance, est accessible sur :

[http://web.cortial.net/bibliohtml/res\\_fr\\_j.html](http://web.cortial.net/bibliohtml/res_fr_j.html)

#### d. Calcul exact de l'intensité; fonction réseau (HP)

La démarche précédente par diagramme de Fresnel est élégante car elle repose sur la représentation dans le plan de Cauchy de nombres complexes et permet d'esquiver des aspects techniques trigonométriques. Toutefois, elle nous laisse sur notre faim si l'on souhaite expliciter précisément la loi  $I(\varphi)$  et la représenter.

Il existe quand même une méthode **importante** permettant d'exploiter encore une fois les complexes pour déterminer la loi  $I(\varphi)$ , au prix de quelques calculs largement surmontables ici...

##### **Théorème 18 (HP)**

L'intensité produite par les interférences à N ondes quasi-planes synchrones équi-intenses en un point M où leurs retards de phase suivent une progression arithmétique de raison  $\varphi(M)$  est donnée, en fonction de  $\varphi$ , par la **fonction réseau**

$$I(\varphi) = N^2 I_0 \left( \frac{\sin \left[ \frac{N\varphi}{2} \right]}{N \sin \left[ \frac{\varphi}{2} \right]} \right)^2$$

##### **Démonstration**

La somme des amplitudes vibratoires complexes des N ondes cohérentes est

$$a(\varphi, t) = [\underline{A}_0 + \underline{A}_0 e^{-j\varphi} + \dots + \underline{A}_0 e^{-j(N-1)\varphi}] e^{j\omega t}$$

et on tombe sur un calcul de somme de série géométrique

$$a(\varphi, t) = \underline{A}_0 e^{j\omega t} \sum_{0}^{N-1} e^{-jq\varphi} = \underline{A}_0 e^{j\omega t} \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}}$$

Il ne reste qu'à factoriser le numérateur et le dénominateur par les exponentielles d'argument moitié pour en tirer

$$a(\varphi, t) = N \underline{A}_0 e^{j\omega t} \frac{\sin \left[ \frac{N\varphi}{2} \right]}{N \sin \left[ \frac{\varphi}{2} \right]}$$

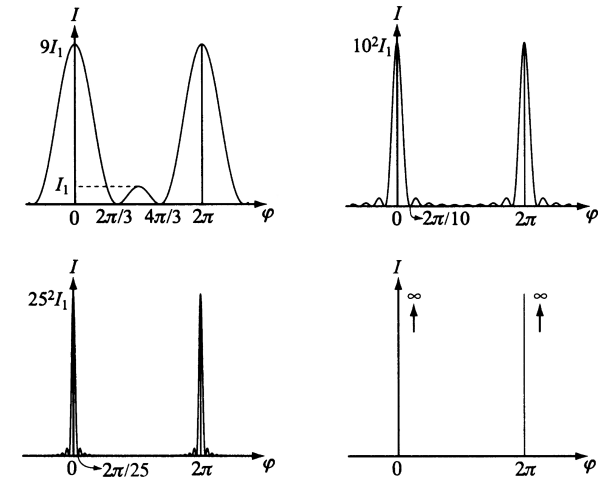
On en déduit l'intensité proposée en prenant le module au carré de cette amplitude complexe.

Grâce à l'expression de la fonction réseau, il n'est pas compliqué de retrouver les résultats antérieurs obtenus par diagramme de Fresnel mais on peut effectuer des représentations graphiques mettant bien en évidence le rôle du nombre N des ondes considérées : **plus N est élevé, plus les pics principaux sont fins et intenses (mais leurs positions ne changent pas !)**. On verra que ceci est important dans la conception des réseaux optiques...

Les figures ci-contre donnent l'allure de la courbe d'intensité en fonction de  $\varphi$  pour N = 3, N = 10, N = 25 et N → ∞ (le cas N = 2 est une sinusoïde conforme à la formule de Fresnel des interférences à deux ondes équi-intenses).

Le dernier tracé n'est pas une fonction mais une distribution appelée « peigne de Dirac » (périodicité de pics de Dirac).

Enfin, quelques figures d'interférences qui peuvent être obtenues par un système de type réseau à N traits sont données dans le tableau suivant...



nombre de traits	allure de la figure d'interférence en fonction de $\varphi$
N = 2	
N = 3	
N = 5	
N = 20	
N = 40	
N = 100	

$\varphi = p2\pi$

$\varphi = (p+1)2\pi$

Dans le même esprit que la démonstration précédente (somme d'amplitudes complexes), on peut aussi retrouver la formule de Fresnel des interférences à deux ondes...

**Exercice 6**

Démontrer, en passant par les amplitudes complexes, la formule de Fresnel des interférences à deux ondes.

**Réponse**

Soient les amplitudes complexes des deux ondes scalaires cohérentes

$$\underline{a}_i(M, t) = A_{0i}(M) e^{j(\omega t - \varphi_i(M))}$$

L'amplitude totale au point M du champ d'interférences est alors

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_1(M, t) + \underline{a}_2(M, t) = A_{01}(M) e^{j(\omega t - \varphi_1(M))} + A_{02}(M) e^{j(\omega t - \varphi_2(M))}$$

soit 
$$\underline{a}(M, t) = (A_{01}(M) + A_{02}(M) e^{j(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}) e^{j(\omega t - \varphi_1(M))}$$

Or  $I(M)$  est le module au carré de cette amplitude, soit

$$I(M) = [A_{01}(M) + A_{02}(M) e^{j(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))}] [A_{01}(M) + A_{02}(M) e^{j(\varphi_1(M) - \varphi_2(M))}]$$

Le développement fournit alors

$$I(M) = \underbrace{A_{01}^2(M)}_{I_1(M)} + \underbrace{A_{02}^2(M)}_{I_2(M)} + 2 \underbrace{A_{01}(M) A_{02}(M)}_{\sqrt{I_1(M) I_2(M)}} \cos[\varphi_2(M) - \varphi_1(M)]$$

et on retrouve bien la formule de Fresnel.

**Attention !**

Le passage par les complexes n'a pas de sens pour des systèmes non linéaires et est très dangereux pour obtenir l'intensité associée à une superposition d'ondes incohérentes entre elles (dans ce cas, l'intensité ne s'obtient plus par le carré du module de l'amplitude vibratoire complexe totale et il faut revenir aux notations réelles avant tout calcul de moyenne de carré...).

## Annexe I : Interférences et polarisation de la lumière

Le modèle ondulatoire scalaire de la lumière a ses limites et on doit parfois faire appel à un modèle **vectoriel** s'appuyant sur les ondes électromagnétiques (abordées plus tard dans l'année). Avec celles-ci, c'est le champ électrique  $\vec{E}(M, t)$  qui se substitue à l'amplitude scalaire  $a(M, t)$  et permet d'étudier le rôle de l'aspect vectoriel de la lumière dans les interférences ; on parle aussi de *rôle de la polarisation de la lumière*, la direction de polarisation étant la direction du vecteur champ électrique  $\vec{E}(M, t)$ .

Dans ce cadre vectoriel, il existe quelques résultats inédits par rapport à l'approximation scalaire...

**Théorème 19**

Soient deux ondes électromagnétiques (de champs respectifs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ ). On note  $I_1$  et  $I_2$  les intensités correspondantes à chacune de ces ondes prises seules.

L'intensité  $I(M, t)$  perçue à l'instant  $t$  en un point M du domaine de superposition des ondes est

$$I(M, t) = I_1(M, t) + I_2(M, t) + I_{12}(M, t)$$

où

$$I_{12}(M, t) = 4 \langle \vec{E}_1(M, t) \cdot \vec{E}_2(M, t) \rangle_{\tau_R}$$

est le terme de corrélation (ou d'interférences).

Il y a **cohérence de polarisation** en M si les champs électriques  $\vec{E}_1(M, t)$  et  $\vec{E}_2(M, t)$  ont des directions de polarisation formant un angle suffisamment faible<sup>11</sup>.

**Démonstration (visible)**

En superposant (par linéarité) les champs électriques de chaque onde,

$$I(M, t) = 2 \langle [\vec{E}_1(M, t) + \vec{E}_2(M, t)]^2 \rangle_{\tau_R}$$

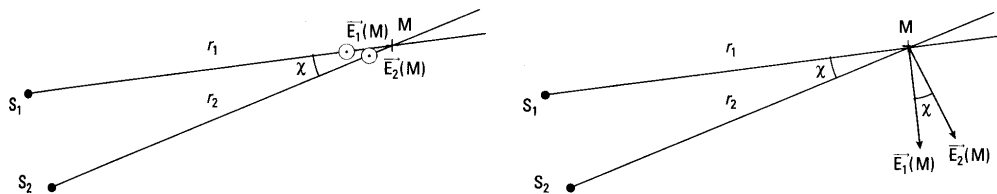
soit 
$$I(M, t) = 2 \langle \vec{E}_1^2(M, t) \rangle_{\tau_R} + 2 \langle \vec{E}_2^2(M, t) \rangle_{\tau_R} + 4 \langle \vec{E}_1(M, t) \cdot \vec{E}_2(M, t) \rangle_{\tau_R}$$

ce qui permet de trouver effectivement le terme de corrélation adéquat.

11. La condition est plus ou moins restrictive suivant le niveau de contraste des interférences souhaité.

De plus, si les champs électriques sont orthogonaux, il est clair que le terme de corrélation est nul ; si on veut avoir des interférences de contraste suffisant, il est bien nécessaire de réduire au mieux l'angle entre les directions de polarisation. . .

Considérons le cas particulier de deux ondes émises polarisées rectilignement par deux points sources  $S_1$  et  $S_2$  dans un milieu homogène (direction constante du champ électrique). On regarde les interférences en un point M. On peut envisager les deux cas extrêmes de polarisations représentés :



- Dans le cas de gauche (polarisations orthogonales au plan  $S_1S_2M$ ), la cohérence de polarisation est parfaite pour tout point M, les champs électriques étant parallèles entre eux (situation optimale pour le terme d'interférences  $I_{12}(M)$ ).
- Dans le cas de droite (polarisations dans le plan  $S_1S_2M$ ), la cohérence de polarisation n'est pas parfaite pour tout point M (angle  $\chi$  entre les champs) mais l'est quasiment dans l'approximation des grandes distances  $r_i \gg S_1S_2$ .

Du coup, pour deux ondes non polarisées, mais décomposables sur les deux types précédents d'ondes par superposition, on voit qu'il y aura **cohérence de polarisation quasi-parfaite dès que les points M d'observation vérifient l'approximation des grandes distances, ce qui sera le cas en pratique. . .**

#### Moralité...

Sauf si on manipule avec de la lumière polarisée, le modèle scalaire des ondes suffit amplement pour formaliser des interférences lumineuses.

## Annexe 2 : Cap ou pas cap ?

Voici une liste non exhaustive de « **capacités** » relatives à ce chapitre dont le but est de vous permettre de mieux cerner ce que l'on peut attendre de vous, en plus de la simple connaissance des définitions, théorèmes et bases du cours bien sûr ! Que pensez-vous savoir faire et ne pas savoir faire ?

Identifier des ondes cohérentes entre elles (ou incohérentes).

Justifier l'additivité (ou non) d'intensités.

Citer les principales conditions pour qu'un phénomène interférentiel apparaisse (ondes quasi-synchrones, déphasage constant dans le temps ou très lentement variable. . .).

Identifier un champ d'interférences.

Expliquer le critère de cohérence temporelle.

Reconnaître un fonctionnement d'interféromètre en division du front d'ondes ou en division d'amplitude.

Démontrer (sans ou avec les complexes) la formule de Fresnel des interférences à deux ondes et l'utiliser.

Définir, exprimer et utiliser la différence de marche, l'ordre d'interférences, l'interfrange. . .

Identifier les formes des franges.

Expliquer et s'appuyer sur les notions d'interférences constructives ou destructives.

Calculer un contraste.

Associer un bon contraste à des intensités  $I_1$  et  $I_2$  voisines.

Représenter un graphe de profil d'intensité (sans intensité négative !) et une figure d'interférences.

Reconnaître des situations typiques (interférences entre ondes planes ou entre ondes issues de sources secondaires ponctuelles).

Identifier et dénombrer des franges brillantes ou sombres.

Obtenir les rayons d'anneaux d'interférences.

Manipuler les diagrammes de Fresnel.

Établir la demi-largeur  $2\pi/N$  des pics principaux de la courbe d'intensité à N ondes en fonction du déphasage.

Déterminer une intensité d'interférences entre un nombre quelconque d'ondes cohérentes.

Exploiter, avec des ondes cohérentes, la notation complexe.

Prévoir la distinction possible par l'œil (ou non) de franges (interfrange assez grande, contraste suffisant. . .).

Discuter le rôle de l'aspect vectoriel des ondes (polarisation) dans l'obtention des interférences.

...