28 janvier 2019

1

Composition des moments cinétiques.

I. Position du problème

$\hat{J}^2$ $\hat{J}_z$ $\hat{J}_+ \hat{J}_-$

1°) Rappels sur le moment angulaire

2°) Systèmes à plusieurs moments angulaires

3°) Définition de l'opérateur moment angulaire total

$$\vec{\hat{J}} = \vec{\hat{J}}_1 + \vec{\hat{J}}_2$$

II. Addition de 2 spins $\frac{1}{2}$

1°) Recherche des valeurs propres

2°) Exemples.

état triplet $J=1$: $|\uparrow\uparrow\rangle$ $|\downarrow\downarrow\rangle$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle\right)$

état singulet $J=0$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\dots - \dots\right)$

III. Cas général

1°) Valeurs extrêmes de j

$j_{max} = j_1 + j_2$

$j_{min} = j_1 - j_2$

2°) Coefficients de Clebsch-Gordan

3°) Émission d'un rayonnement électromagnétique.

I. Position du problème

1°) Rappels sur le moment $\underbrace{\text{angulaire orbital}}_{\text{cinétique}}$

$$\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \wedge \hat{\vec{p}}$$

$\hookrightarrow \hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$

s'expriment en représentation

$$\{\vec{r}\}$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

+ permutations circulaires

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$$

$$(\hat{L}^2, \hat{L}_z) = \text{E.C.O.C.}$$

$$\hat{L}^2, \hat{L}_z \longrightarrow \{|j,m\rangle\}$$

valeur propre de $\hat{L}^2$

valeur propre de $\hat{L}_z$

$$\begin{cases} \hat{J}^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \\ \hat{J}_z|j,m\rangle = \hbar m|j,m\rangle \end{cases}$$

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y$$

$$\boxed{\begin{cases} \hat{J}_+|j,m\rangle \propto |j,m+1\rangle \\ \hat{J}_-|j,m\rangle \propto |j,m-1\rangle \end{cases}}$$

relations importantes

$$(\hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2)|j,m\rangle =$$

$$= (\hat{J}^2 - \hat{J}_z^2)|j,m\rangle$$

$$= \hbar^2\left[j(j+1) - m^2\right]|j,m\rangle$$

$$\underbrace{-\sqrt{j(j+1)} \leq}_{m_{min}} \; m \; \underbrace{\leq +\sqrt{j(j+1)}}_{m_{max}}$$

$$m \in [m_{min}, m_{max}]$$

$$\begin{cases} \hat{J}_+\hat{J}_-|j, m_{min}\rangle = 0 \rightarrow m_{min} = -j \\ \hat{J}_-\hat{J}_+|j, m_{max}\rangle = 0 \rightarrow m_{max} = +j \end{cases}$$

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = J^2 - J_z^2 + \hbar\hat{J}_z$$

$|j,-j\rangle$ état de départ.

$$0 \xleftarrow{\hat{J}_-} |j,-j\rangle \underset{\hat{J}_-}{\overset{\hat{J}_+}{\rightleftarrows}} |j,-j+1\rangle \cdots\cdots \underset{\hat{J}_-}{\overset{\hat{J}_+}{\rightleftarrows}} |j,+j\rangle \xrightarrow{\hat{J}_+} 0$$

condition pour boucler la chaîne:

$$\boxed{2j = \text{entier}}$$

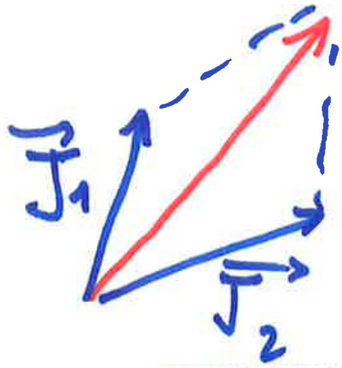
$\rightarrow$ j entier: $0, 1, 2 \ldots$

$\rightarrow$ j $\frac{1}{2}$entier: $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

$\vec{J}_{tot} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$

Φ classique

$\downarrow$ Φ quantique



$$\boxed{\hat{\vec{J}} \stackrel{?}{=} \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2}$$

Q1 → dans quel espace de Hilbert ?

Q2 $[\hat{J}_x, \hat{J}_y] \stackrel{?}{=} i\hbar J_z$ ....

$\hat{\vec{J}}_1$ espace des états $\mathcal{E}^{(1)}$

$\{ \cancel{\mathcal{E}^{(1)}}\ \hat{J}_1^2 ; \hat{J}_{1,z} \}$.

$| j_1, m_1 \rangle$

$\hat{\vec{J}}_2$ $\mathcal{E}^{(2)}$ $\{ \hat{J}_2^2 ; J_{2,z} \}$ $|j_2, m_2\rangle$

$$\boxed{\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(1)} \times \mathcal{E}^{(2)}}$$

$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$

$|j_1, m_1 ; j_2 m_2\rangle$

$\hat{\vec{J}}_1$ dans $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(1)} \otimes \mathcal{E}^{(2)}$

$$\hat{\vec{J}}_1 = \underbrace{\hat{\vec{J}}_1^{(1)}}_{\text{agit dans } \mathcal{E}^{(1)}} \otimes \underbrace{\hat{\mathbb{1}}^{(2)}}_{\text{identité dans } \mathcal{E}^{(2)}}$$

$$\hat{\vec{J}}_2 = \hat{\mathbb{1}}^{(1)} \otimes \hat{\vec{J}}_2^{(2)}$$

$[\hat{J}_i, \hat{J}_j]$ avec $\boxed{\hat{\vec{J}} = \hat{\vec{J}}_1 + \hat{\vec{J}}_2}$

$i = x, y, z \qquad j = x, y, z$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \underbrace{[\hat{J}_i^{(1)}, \hat{J}_j^{(1)}]}_{i\hbar\, \epsilon_{i,j,k}\, \hat{J}_k^{(1)}} + \underbrace{[\hat{J}_i^{(2)}, \hat{J}_j^{(2)}]}_{i\hbar\, \epsilon_{i,j,k}\, \hat{J}_k^{(2)}}$$

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\hbar\, \epsilon_{ijk}\, \hat{J}_k$$

II. Addition de deux spins $\frac{1}{2}$

1°) Moment angulaire total

$\mathcal{E}^{(1)}$: $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$\mathcal{E}^{(2)}$: $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$

$\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$ est un moment angulaire

$\rightarrow$ il est donc soit entier soit $\frac{1}{2}$-entier

base produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(1)} \otimes \mathcal{E}^{(2)}$

$\longrightarrow$ espace de dimension $2 \times 2 = 4$

base des états produits. (base I)

$\{|\uparrow,\uparrow\rangle ; |\uparrow,\downarrow\rangle ; |\downarrow,\uparrow\rangle ; |\downarrow,\downarrow\rangle\}$

$\hat{S}_z = \hat{S}_{z,1} + \hat{S}_{z,2}$ commute avec $\hat{S}_{z,1}$ et $\hat{S}_{z,2}$

Nous devons donc nous attendre qu'un vecteur quelconque de la base I sous la forme $|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$ avec $\epsilon_1 = \uparrow$ ou $\downarrow$

$\epsilon_2 = \uparrow$ ou $\downarrow$

soit un vecteur propre de l'opérateur $\hat{S}_z$

En effet :

$$\hat{S}_z |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = (\hat{S}_{1z} + S_{2z}) |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$$
$$= \frac{\hbar}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) |\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$$

donc $|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$ est vecteur propre de $\hat{S}_z$ avec comme valeur propre

$$M = \frac{\hbar}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2) \quad \begin{cases} M = +1 & |\Uparrow,\Uparrow\rangle \\ M = 0 & |\Uparrow\Downarrow\rangle \; |\Downarrow\Uparrow\rangle \\ M = -1 & |\Downarrow\Downarrow\rangle \end{cases}$$

d'où la matrice de $\hat{S}_z$:

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cherchons la matrice de $\hat{S}^2$ dans cette base

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}$$

$$\hat{S}^2|\Uparrow,\Uparrow\rangle = \frac{3\hbar^2}{4}|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{3\hbar^2}{4}|\Uparrow\Uparrow\rangle$$
$$+ \frac{1}{2}\hbar^2|\uparrow\Uparrow\rangle + 0 + 0 = 2\hbar^2|\Uparrow\Uparrow\rangle$$

on calcule de même les autres composantes (EXO !)

8-c

d'où $\hat{S}^2 = \hbar^2 \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

matrice-bloc composées de 3 sous-matrices.

→ deux sous-matrices sont de dim = 1
les vecteurs $|\uparrow\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\downarrow\rangle$ sont donc vecteurs propres de $\hat{S}^2$ avec pour valeur propre associée $2\hbar^2$ ce qui correspond à un spin $\underline{\underline{S=1}}$.

→ une sous-matrice est de dim = 2.

$$[S^2]_{\text{réduit}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

valeur propre $(1-\lambda)^2 - 1 = 0$ ↗ $\lambda = 0$ ↘ $\lambda = 2$

d'où les 2 autres valeurs propres de $\hat{S}^2$: $0, 2\hbar^2$
avec les vecteurs propres associés :

- Pour 0 : $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$
- Pour $2\hbar^2$: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$

à un facteur de phase global (convention de les choisir réels).

Conclusion :

Cette méthode "brute force" nous apprend que $S = S_1 + S_2$ peut prendre 2 valeurs

$$\boxed{S = 1 \quad \text{ou} \quad S = 0}$$

$S = 0$ $\longrightarrow$ 1 état propre

$$|S=0, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$S = 1$ $\longrightarrow$ 3 états propres

$$|S=1, M=+1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|S=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$|S=1, M=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

Les quatre vecteurs

$$\{ |0,0\rangle ; |1,1\rangle ; |1,0\rangle ; |1,-1\rangle \}$$

forment une base orthonormée de $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(1)} \otimes \mathcal{E}^{(2)}$

1°) Recherche des valeurs propres et états propres

$$\underbrace{\hat{S}_z , \hat{S}^2}_{\text{moment angulaire}} \longrightarrow |j_1, j_2 ; \underbrace{j, m}_{?}\rangle$$

Quelle est la plus grande valeur de m ?

$$\hat{S}_z = \hat{S}_z^{(1)} + S_z^{(2)}$$

$m_1 = j_1 = +\frac{1}{2}$ $\quad$ $m_2 = j_2 = +\frac{1}{2}$.

$$+\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = +1$$

état propre $|\uparrow, \uparrow\rangle$

La plus petite valeur de m est

$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$ avec le vecteur propre $|\downarrow, \downarrow\rangle$

dim $\mathcal{E} = 4$ $\quad$ 2 vecteurs de base

$|\uparrow\uparrow\rangle , |\downarrow\downarrow\rangle$

10

$$\hat{S}^2 |\uparrow\uparrow\rangle = \left(\hat{S}_1^2 + \hat{S}_2^2 + 2\hat{\vec{S}}_1\cdot\hat{\vec{S}}_2\right)|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\longrightarrow \quad \hat{S}^2 |\uparrow\uparrow\rangle = 2\hbar^2 |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\hbar^2 \, j(j+1) |\uparrow\uparrow\rangle$$

identification

$j = 1$

J peut prendre la première valeur $j = 1$

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; J=1 \; M=+1\right\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$\left|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; J=1 \; M=-1\right\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

spin 1 = dim égale à 3

3e vecteur $|J=1, M=0\rangle$

$$|M=1\rangle \underset{J_-}{\overset{J_+}{\rightleftarrows}} |J=1, M=0\rangle \underset{J_-}{\overset{J_+}{\rightleftarrows}} |M=+1\rangle$$

$$\hat{S}_- \,|J=1, M=1\rangle \propto |J=1, M=0\rangle$$

$$= \left(\hat{S}_-^{(1)} + S_-^{(2)}\right) |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$= \underbrace{S_-^{(1)} |\uparrow\uparrow\rangle}_{|\downarrow\uparrow\rangle} + \underbrace{S_-^{(2)} |\uparrow\uparrow\rangle}_{|\uparrow\downarrow\rangle}$$

après normalisation $\quad |\uparrow\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\downarrow\rangle$

$$|J=1, M=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\hat{S}^2 \,|J=1, M=0\rangle = 2\hbar^2 \,|J=1, M=0\rangle$$

(à vérifier)

on a progressé puisqu'on a maintenant 3 vecteurs de base sur les 4 de l'espace $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{spin 1} \otimes \mathcal{E}_{spin 2}$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$\mathcal{E}$ = base

$$\begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle \quad |\downarrow\downarrow\rangle & J=1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right) & J=1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \end{cases}$$

$$\hat{S}^2 \Big[\underbrace{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}_{} \Big] = 0$$

vecteur propre de $\hat{S}^2$
pour la valeur propre $J=0$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}''$$

Spin 1
dimension 3
états triplet
symétrique dans l'échange $1 \rightleftharpoons 2$ des 2 spins.

Spin 0
dimension 1
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right]$
état singulet
antisymétrique dans $1 \rightleftharpoons 2$

2°) Addition de 2 spins $\frac{1}{2}$: exemples

couplage $J\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \vec{S}_2$

difficile dans $|j_1, m_1 ; j_2, m_2\rangle$

facile dans $|j_1, j_2 ; j, m\rangle$

car $\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\vec{S}}_1^{\,2} + \hat{\vec{S}}_2^{\,2}\right)$

faire l'exercice pour 1 exemple d'une telle interaction entre les 2 spins

<u>Rq</u>: Ce couplage peut être par exemple induit par l'interaction dipolaire magnétique entre les deux moments magnétiques associés aux spins.

III. CAS GÉNÉRAL

$|j_1, j_2; j, m\rangle \qquad d = (2j_1+1)\times(2j_2+1)$

$\hookrightarrow j \in [j_{min}, j_{max}]$

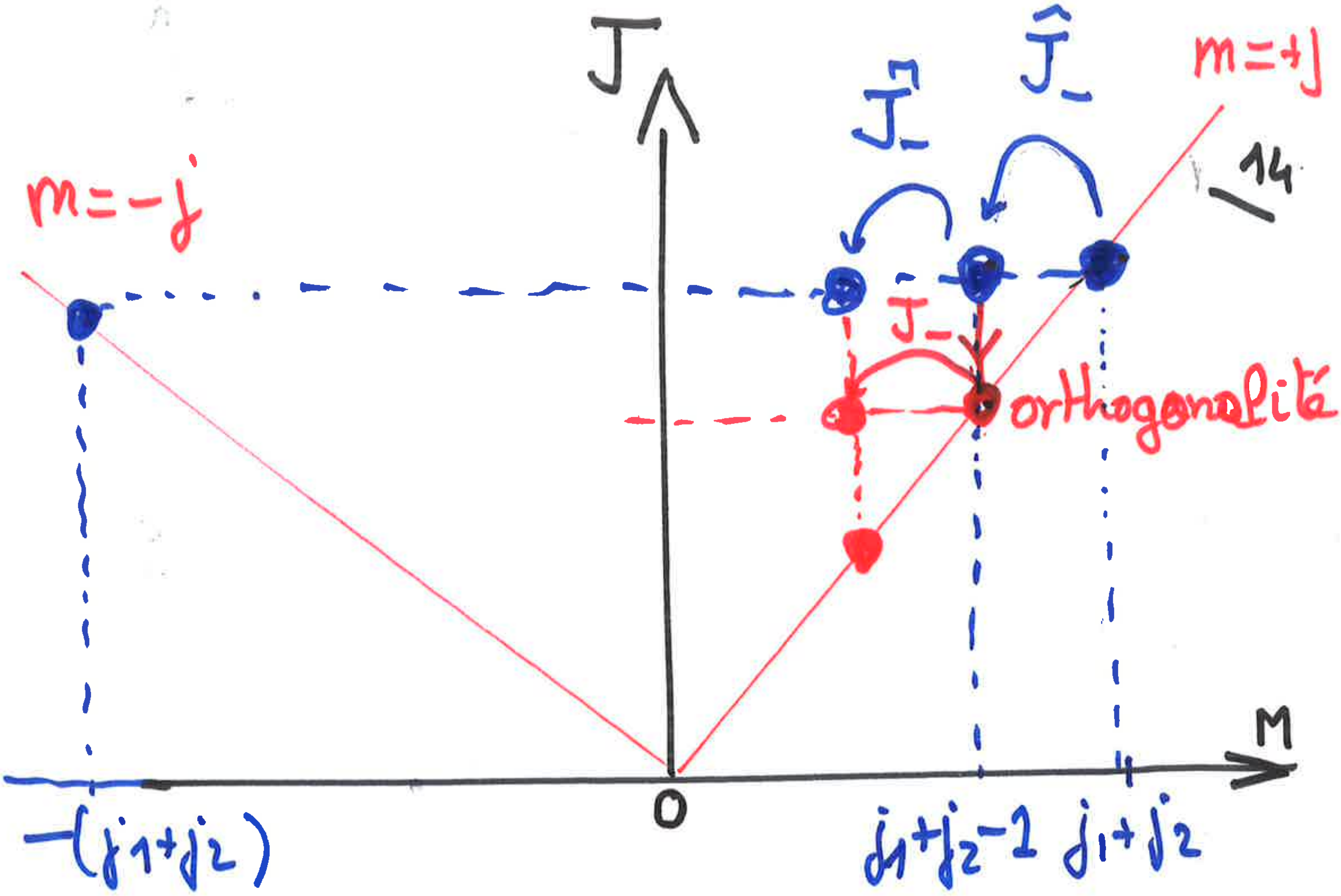
(1) $\hat{J}_z = \hat{J}_{z,1} + \hat{J}_{z,2}$

$m_{max} = m_{max,1} + m_{max,2}$

$= j_1 + j_2.$

$j_{max} = j_1 + j_2$ 1er état propre qui est $|\underbrace{j_1+j_2}_{J}, \underbrace{j_1+j_2}_{M}\rangle$

m	(m_1, m_2)	dimension
j_1+j_2	$(m_1=j_1, m_2=j_2)$	1
j_1+j_2-1	$(j_1-1, j_2)\ (j_1, j_2-1)$	2
j_1+j_2-2	$(j_1-2, j_2)\ (j_1-1, j_2-1)\ (j_1, j_2-2)$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

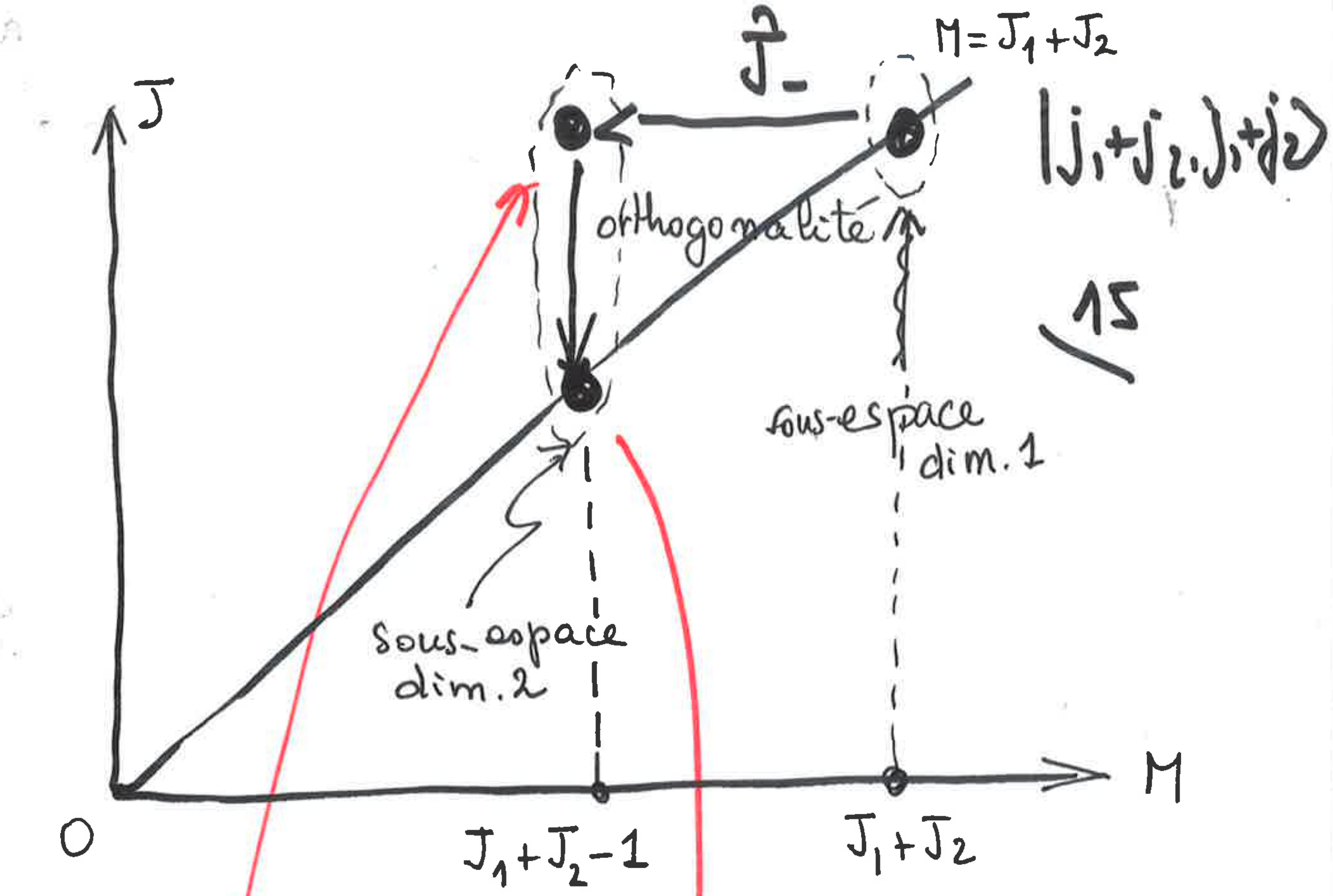


$$|j_1, j_2; j=j_1+j_2, m=j_1+j_2-1\rangle$$

$$= (\hat{J}_{-,1} + \hat{J}_{-,2}) \frac{|j_1\ m_1=j_1\rangle \otimes |j_2, m_2=j_2\rangle}{\sqrt{2j}\ \hbar}$$

$$= \sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\, |j_1, m_1=j_1-1\rangle \otimes |j_2, m_2=j_2\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\, |j_1, m_1=j_1\rangle \otimes |j_2; m_2=j_2-1\rangle$$

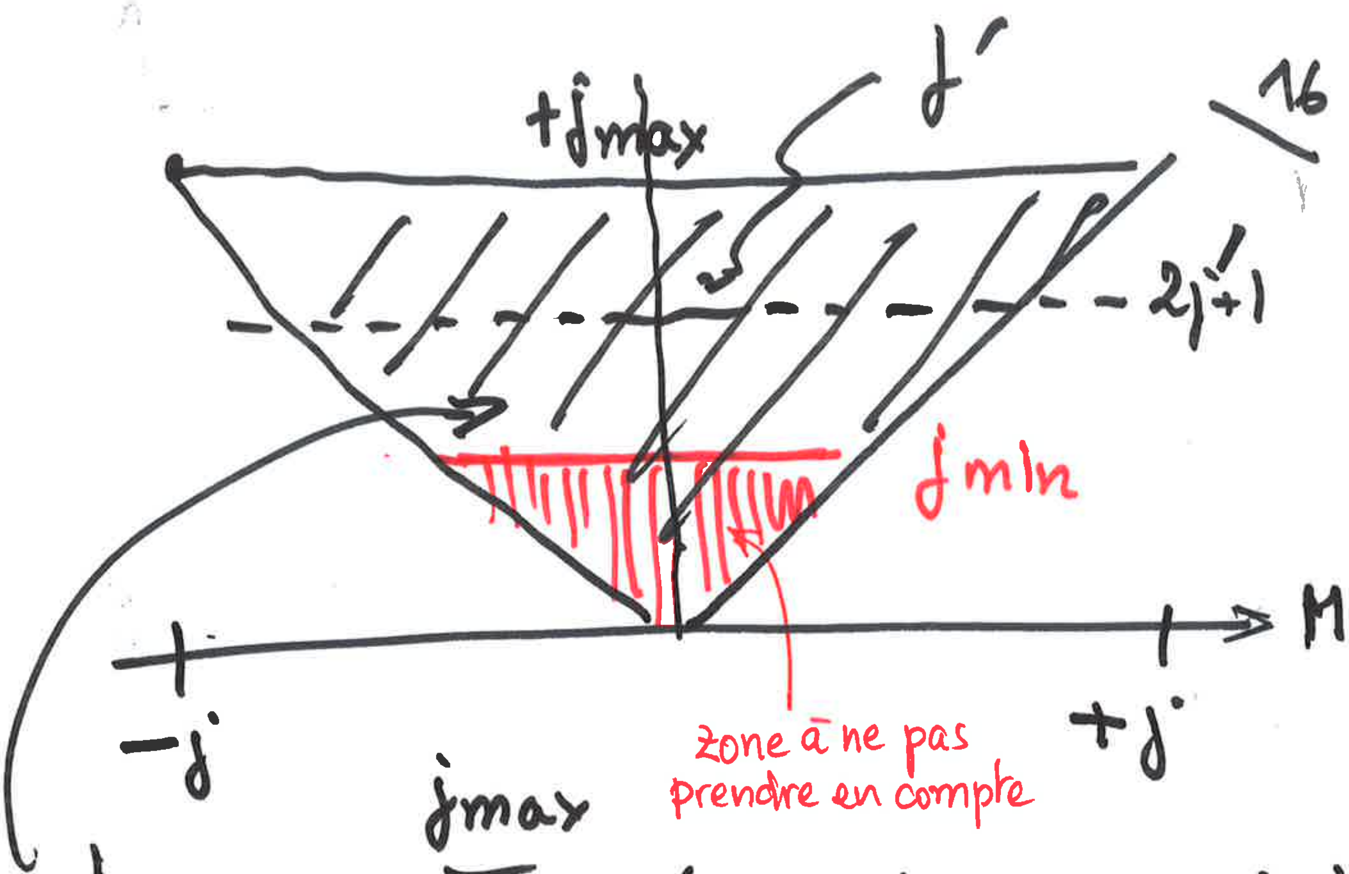


état écrit + haut

$$\sqrt{\frac{j_2}{j_1+j_2}}\,|j_1, m_1=j_1-1\rangle \otimes |j_2, m_2=j_2\rangle$$

$$-\sqrt{\frac{j_1}{j_1+j_2}}\,|j_1, m_1=j_1\rangle \otimes |j_2, m_2=j_2-1\rangle$$

état orthogonal à l'état écrit plus haut



$$d_{sup} = \sum_{j=0}^{j_{max}} (2j+1) \qquad j_{max} = j_1 + j_2$$

On suppose que j est entier (Pour se simplifier la vie...)

$$d_{sup} = (j_1 + j_2 + 1)^2$$

$$\geqslant (2j_1+1)(2j_2+1) = d$$

on doit exclure la partie rouge.

$$d_{sup} - d = (j_1 - j_2)^2$$

Le nombre d'états dans
$j = j_{min}, \dots, j_{max}$ vaut

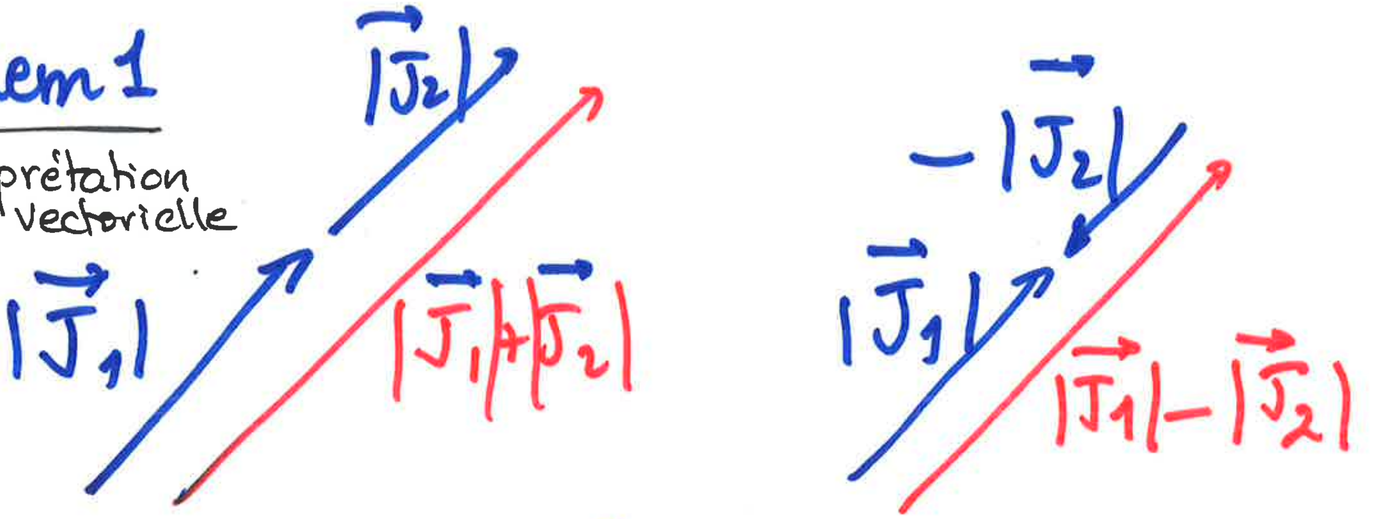
$$d = (j_{max}+1)^2 - j_{min}^2$$
$$= (j_1+j_2+1)^2 - j_{min}^2$$

$$d = (j_1+j_2+1)^2 - (j_1-j_2)^2$$

par identification $\boxed{j_{min} = j_1 - j_2 \text{ si } j_1 > j_2}$

Rem 1

interprétation vectorielle



Rem 2 ça marche aussi pour spin $= \frac{1}{2}$ entier

2°) Coefficients de Clebsch-Gordan

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \mathcal{E}'' \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^{(n)}$$

$\mathcal{E}' \to j = j_1 - j_2$ $\quad$ $\mathcal{E}'' \to j = j_1 - j_2 + 1$ $\quad$ $\mathcal{E}^{(n)} \to j = j_1 + j_2$

Base (I) $\longleftrightarrow$ Base (II)

$|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle \longleftrightarrow |j_1, j_2 ; j, m\rangle$

$$|j_1, j_2 ; j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} C^{j,m}_{j_1 m_1 ; j_2, m_2} |j_1 m_1 ; j_2 m_2\rangle$$

coefficient de Clebsch-Gordan

$C^{j,m}_{j_1 m_1 ; j_2 m_2}$ $\to$ réels par convention

$\to m = m_1 + m_2$.

$\to$ si $j \notin [j_1 - j_2 , j_1 + j_2]$

$C = 0$

3°) Émission de rayonnement électromagnétique

$$X \longrightarrow X' + \gamma$$

X	X'	γ
atome niveau excité (émission spontanée)	atome niveau fondamental	photon optique
noyau (radioactivité γ)	noyau	photon γ

conservation du moment angulaire.

$$\underset{\text{initial}}{J} \longrightarrow \underset{\text{final}}{J'} \qquad J_\gamma = 1 \quad (\hbar)$$

$$|j' - j| \leq 1$$

inégalité triangulaire de la composition des moments angulaires.

$j = 0 \longrightarrow j' = 0$

$j \geq 1 \qquad j' = j - 1 .$ .....

l'émission d'un photon ne peut changer le moment angulaire que d'une unité au plus

$\Longrightarrow$ contraintes sur la répartition directionnelle du photon émis.