

Ondes sonores dans les fluides

Sommaire

2.1	Modélisation de la propagation des ondes sonores	3
2.1.1	Présentation	3
2.1.2	Approximation acoustique	3
2.1.3	Équations linéarisées	3
2.1.4	Équation de propagation	4
2.1.5	Célérité des ondes acoustiques	5
2.2	Étude énergétique	5
2.2.1	Bilan énergétique	5
2.2.2	Intensité acoustique et niveau sonore	6
2.3	Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)	7
2.3.1	Définition	7
2.3.2	Relation de dispersion	8
2.3.3	Caractère longitudinal de l'OPPH sonore	8
2.3.4	Impédance acoustique	8
2.3.5	Aspects énergétiques d'une OPPH	9
2.3.6	Justification de l'approximation acoustique	9
2.4	Réflexion et transmission des ondes sonores sur une interface plane	10
2.4.1	Modélisation et conditions aux limites	10
2.4.2	Conséquence sur les amplitudes	11
2.4.3	Conséquences énergétiques	11
2.5	Ondes sphériques	12
2.5.1	Ondes sphériques progressives	12
2.5.2	Cas d'un onde sphérique progressive harmonique	12
2.5.3	Onde plane / sphérique et diffraction	13

Questions de cours :

- Présenter l'approximation acoustique et établir dans ce modèle les équations linéarisées.
- À partir des équations linéarisées, établir les équations de d'Alembert unidimensionnelles pour la vitesse et la pression. Établir l'expression de la célérité des ondes acoustiques dans l'air en fonction de la température.
- Après avoir défini le vecteur de Poynting acoustique, démontrer l'équation de conservation de l'énergie.
- Présenter l'onde plane progressive harmonique. Justifier le caractère longitudinal de l'OPPH, et démontrer l'expression de l'impédance acoustique.
- Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude pour la vitesse et la pression dans le cas d'une interface entre deux milieux non miscibles d'impédances Z_1 et Z_2 .
- Onde sphérique : présentation, expression générale et cas de l'onde sphérique progressive harmonique. Lien avec les ondes planes progressives harmoniques.

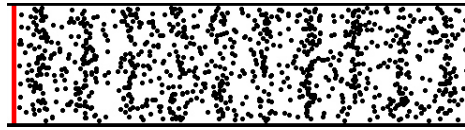
Capacités exigibles du BO :

- Classer les ondes sonores par domaines fréquentiels.
- Justifier les hypothèses de l'approximation acoustique par des ordres de grandeur. Montrer que l'accélération de la particule de fluide s'écrit $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ lorsque $v \ll c$.
- Écrire les trois équations locales linéarisées.
- Déterminer l'équation de propagation de la surpression dans une situation unidirectionnelle en coordonnées cartésiennes.
- Utiliser sa généralisation admise à trois dimensions avec l'opérateur laplacien.
- Exprimer la célérité en fonction de la température pour un gaz parfait.
- Citer les ordres de grandeur de la célérité pour l'air et pour l'eau.
- Utiliser les expressions admises du vecteur densité de courant énergétique et de la densité volumique d'énergie associés à la propagation de l'onde.
- Définir l'intensité acoustique en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ et le niveau sonore en décibels. Citer quelques ordres de grandeur (minimum d'audition, seuil de douleur, conversation).
- En relation avec la diffraction, discuter la validité du modèle de l'onde plane en comparant la dimension latérale à la longueur d'onde.
- Décrire le caractère longitudinal de l'onde sonore.
- Établir et utiliser l'impédance acoustique.
- Utiliser le principe de superposition des ondes planes progressives harmoniques.
- Commenter l'expression de la surpression $p(r, t) \propto \frac{1}{r} \cos\left(\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)$ générée par une sphère pulsante.
- Expliciter des conditions aux limites à une interface.
- Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude de surpression, en amplitude de vitesse ou en puissance.
- Relier l'adaptation des impédances au transfert maximum de puissance.

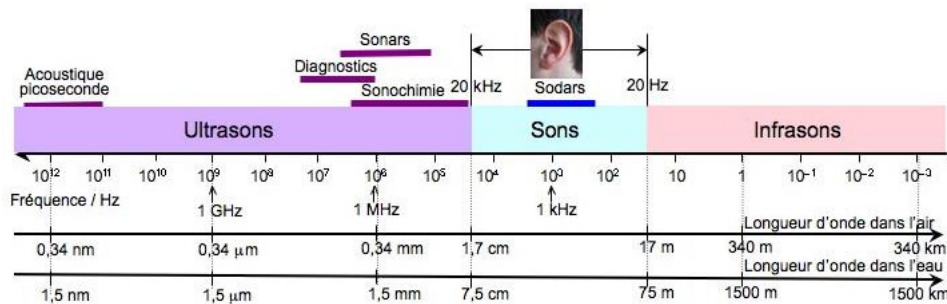
I. Modélisation de la propagation des ondes sonores

I.1 Présentation

Le son est une onde mécanique qui se propage à travers un milieu matériel. Cette onde est transmise par changement de pression du milieu : lorsqu'un son est émis, le milieu proche est comprimé, puis comprime à son tour le fluide un peu plus loin, et ainsi de suite, dans la direction de propagation de l'onde : il s'agit d'ondes **longitudinales**.



Le domaine de fréquence reste assez vaste, allant des infrasons (inaudibles pour l'Homme, $f < 20$ Hz) aux ultrasons ($f > 20$ kHz) jusqu'aux ondes émises par certains cristaux piézoélectriques ($f \sim 10$ MHz pour les sondes échographiques).



I.2 Approximation acoustique

On souhaite modéliser la propagation des ondes sonores dans les milieux. On fait l'hypothèse que l'écoulement est instationnaire mais périodique de période T , faiblement compressible et parfait.

* En effet, les processus dissipatifs sont négligés (diffusion de la quantité de mouvement ou de la chaleur) : l'écoulement est donc adiabatique. Les effets de la pesanteur seront négligés. D'un point de vue thermodynamique, on considère donc des transformations isentropiques.

Les champs physiques associés aux ondes sonores sont la **pression** $P(M, t)$, la **vitesse** (eulérienne) des particules du milieu $\vec{v}(M, t)$ et leur **masse volumique** $\mu(M, t)$. Il nous faut donc 5 équations pour pouvoir connaître l'ensemble de ces champs. Les équations de la mécanique des fluides vont coupler de manière non linéaire ces différents champs : on va donc **linéariser** à l'ordre le plus bas. Les éléments qui suivent constituent alors **l'approximation acoustique** :

- au repos, en l'absence d'ondes sonores, le fluide est décrit par :

$$P(M, t) = P_0 \quad , \quad \mu(M, t) = \mu_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(M, t) = \vec{0} \quad (2.1)$$

- lors du passage d'une onde, on décrit l'onde sonore par des termes infiniment petits d'ordre 1 (ce qui devra être vérifié *a posteriori*), indicés par 1 :

$$* \quad P(M, t) = P_0 + P_1(M, t) \quad , \quad \mu(M, t) = \mu_0 + \mu_1(M, t) \quad \text{et} \quad \vec{v}(M, t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M, t) \quad (2.2)$$

où $|P_1| \ll P_0$ et $|\mu_1| \ll \mu_0$. Quant à \vec{v}_1 , on peut la comparer à la vitesse caractéristique, c'est-à-dire la célérité c des ondes sonores : $\|\vec{v}_1\| \ll c$.

De plus, en notant a l'amplitude caractéristique de la vibration des particules de fluide, de l'ordre de $v_1 T$ est alors très inférieure à cT , c'est-à-dire la longueur d'onde : on a donc $a \ll \lambda$.

On appelle $P_1(M, t) = P(M, t) - P_0$ la **surpression**. Elle est parfois notée en minuscule $p(M, t)$.

I.3 Équations linéarisées

a) Équation du mouvement d'une particule de fluide

Appliquons la loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide P de volume $d\tau$ située en M à l'instant t , dans un référentiel galiléen. Elle n'est soumise qu'aux forces de pression (on néglige la pesanteur et les forces de viscosité) :

$$\mu d\tau \vec{a}_P(t) = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau \quad (2.3)$$

L'accélération d'une particule de fluide doit se calculer avec précaution, car si à t la particule de fluide se trouve en M , à $t + dt$ elle se trouve en M' :

$$\vec{a}_P(t) = \frac{\vec{v}(M', t + dt) - \vec{v}(M, t)}{dt} \quad (2.4)$$

$$= \frac{\vec{v}(M, t + dt) - \vec{v}(M, t)}{dt} + \frac{\vec{v}(M', t + dt) - \vec{v}(M, t + dt)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{a}_{\text{conv}} \quad (2.5)$$

* où le premier terme correspond à l'accélération dite locale, et le deuxième à l'**accélération convective**. On peut montrer que $\vec{a}_{\text{conv}} = (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$. En particulier, pour un déplacement unidimensionnel :

$$\vec{v}(M', t + dt) - \vec{v}(M, t + dt) = (v(x + dx, t + dt) - v(x, t)) \vec{e}_x \simeq \frac{\partial v}{\partial x} dx = \frac{\partial v}{\partial x} v(x, t) dt \quad (2.6)$$

donc $\vec{a}_{\text{conv}} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \vec{e}_x$.

Remplaçons donc dans la LQM et ne gardons que les termes d'ordre 1 :

* $(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1 \right) = -\text{grad} (P_0 + P_1) \Rightarrow \boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\text{grad} (P_1)} \quad (2.7)$

car les termes $\mu \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$ sont d'ordre 2 en infiniment petits, tout comme $(\vec{v}_1 \cdot \text{grad}) \vec{v}_1$.

b) Équation de conservation de la masse

Exprimons et linéarisons l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \iff \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \text{div}(\mu_0 \vec{v}_1 + \mu_1 \vec{v}_1) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}) = 0} \quad (2.8)$$

c) Équation thermodynamique

Nous avons pour l'instant 4 équations pour 5 inconnues, il nous faut donc une équation supplémentaire, liée à l'évolution thermodynamique de l'écoulement. En effet, on a fait l'hypothèse d'un écoulement adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique. On va alors se servir d'un **coefficient thermoélastique**, à savoir le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, noté χ_s et défini par :

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s \quad (2.9)$$

liant l'évolution de la masse volumique à celle de la pression. Ce coefficient, quasiment constant, est positif, homogène à une pression, et petit. Typiquement $\chi_s(\text{eau}) \simeq 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et $\chi_s(\text{air}) \simeq 7 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$. On peut donc à nouveau linéariser, en approximant la dérivée à un quotient :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu - \mu_0}{P - P_0} = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu_1}{P_1} \simeq \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \iff \boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1} \quad (2.10)$$

1.4 Équation de propagation

On va établir l'équation de propagation associée à la surpression et la vitesse dans le cas général (à 3D), mais la démarche est identique à 1D (seule démonstration exigible au programme). Partant de la LQM, appliquons la divergence :

* $\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div}(\vec{v})) = -\text{div}(\text{grad} P_1) = -\Delta P_1 \iff -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) = -\Delta P_1 \quad (2.11)$

en injectant l'équation de conservation de la masse. En utilisant enfin l'équation d'évolution isentropique :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \Delta P_1} \quad (2.12)$$

La surpression vérifie donc une équation de d'Alembert à 3D (généralisation de celle vue au chapitre précédent), en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité.

Le même travail peut être effectué pour la vitesse, mais à 1D :

Exercice

Montrer que $\vec{v}_1 = v_1(x, t)\vec{e}_x$ vérifie une équation de d'Alembert 1D pour une modélisation unidimensionnelle.

Partons des équations linéarisées, et en particulier la LQM projetée selon l'axe (Ox) :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1 \quad (2.13)$$

On dérive la première par rapport au temps, et on injecte la troisième équation dans la deuxième :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} t \quad \text{et} \quad \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

On injecte enfin cette dernière équation, en utilisant le théorème de Schwartz :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \iff \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Pour le démontrer à 3D, il faut d'abord démontrer que $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$, démonstration hors de portée avec les outils à notre programme. On peut donc ajouter comme hypothèse que l'écoulement du fluide est irrotationnel. En appliquant alors le gradient à l'équation de conservation de la masse (en utilisant $\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$) :

$$\chi_s \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{grad}}(P_1)) + \vec{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v}_1)) = 0 \quad (2.16)$$

puis l'identité $\vec{\text{grad}}(\text{div}) = \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}) + \Delta$, il vient, ayant $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = 0$:

$$\chi_s \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{grad}}(P_1)) + \Delta \vec{v}_1 = 0 \implies \chi_s \frac{\partial}{\partial t} \left(-\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \right) + \Delta \vec{v}_1 = 0 \iff \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{v}_1 \quad (2.17)$$

où l'opérateur laplacien est ici vectoriel !

1.5 Célérité des ondes acoustiques

La détermination de la célérité des ondes sonores (à ne pas confondre avec la vitesse mésoscopique des particules de fluide v_1) nécessite de connaître la masse volumique μ_0 et le coefficient de compressibilité isentropique χ_s . Dans le cas d'un gaz parfait, on peut se servir de :

- l'équation des gaz parfait $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$ conduisant à $\mu = \frac{MP}{RT}$ et donc $\mu_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$;
- la loi de Laplace, du fait de la transformation isentropique : $PV^\gamma = \text{cste} = P\mu^{-\gamma}$. On différencie logarithmiquement :

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0 \implies \chi_s = \frac{1}{\gamma P} \quad (2.18)$$

D'où une célérité :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{RT}{MP_0}} \times \gamma P = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \quad (2.19)$$

soit avec $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$, $\gamma = \frac{7}{5}$ (GP diatomique) à $T = 298 \text{ K}$, il vient $c = 345 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Pour des gaz réels, ou pour d'autres fluides, on peut par contre se servir des valeurs tabulées de μ_0 et χ_s . En particulier, retenons $c(\text{eau}) = 1410 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

II. Étude énergétique

II.1 Bilan énergétique

a) Vecteur densité de courant énergétique

Soit un élément de surface $d\vec{S}$. Sous l'effet de l'onde, celui-ci se déplace à la vitesse \vec{v}_1 , l'onde acoustique exerçant la force $d\vec{F} = P_1 d\vec{S}$. L'énergie, sonore, qui traverse cette surface pendant la durée dt vaut donc :

$$d^2\mathcal{E} = (d\vec{F} \cdot \vec{v}_1)dt = \vec{\Pi} d\vec{S} dt \quad (2.20)$$

avec $\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1$ le **vecteur de Poynting acoustique**, vecteur densité de courant énergétique acoustique, homogène à une puissance surfacique (exprimée en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$). Notons que l'on ne tient compte que de la surpression qui caractérise l'onde sonore, et non de la pression au repos.

b) Équation de conservation de l'énergie

Afin d'écrire un bilan énergétique, faisons un parallèle avec le bilan d'énergie lors de la diffusion thermique, qui s'écrit :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}_Q) = 0 \quad (2.21)$$

où $e = \rho u$ est homogène à une énergie volumique. Calculons donc la divergence du vecteur de Poynting acoustique :

$$\text{div}(\vec{\Pi}) = \vec{\nabla} \cdot (P_1 \vec{v}_1) = (\vec{\nabla} P_1) \cdot \vec{v}_1 + P_1 (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1) = \overrightarrow{\text{grad}} P_1 \cdot \vec{v}_1 + P_1 \text{div}(\vec{v}_1) \quad (2.22)$$

puis en utilisant la LQM et l'équation de conservation de la masse :

$$\text{div} \vec{\Pi} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \cdot \vec{v}_1 + P_1 \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) \quad (2.23)$$

puis à l'aide de $\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$ et en reconnaissant le développement de la dérivée de carrés $\vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_1^2 \right)$:

$$\text{div} \vec{\Pi} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_1^2 \right) - \chi_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} P_1^2 \right) \quad (2.24)$$

d'où l'équation de conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial e_a}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = 0 \quad \text{où} \quad e_a = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s P_1^2 \quad (2.25)$$

L'énergie volumique acoustique e_a se décompose en un terme d'énergie cinétique volumique, et un autre terme ressemblant à une sorte d'énergie potentielle élastique volumique, en réalité il correspond à un surcroît d'énergie interne dû à la compression du fluide.

II.2 Intensité acoustique et niveau sonore

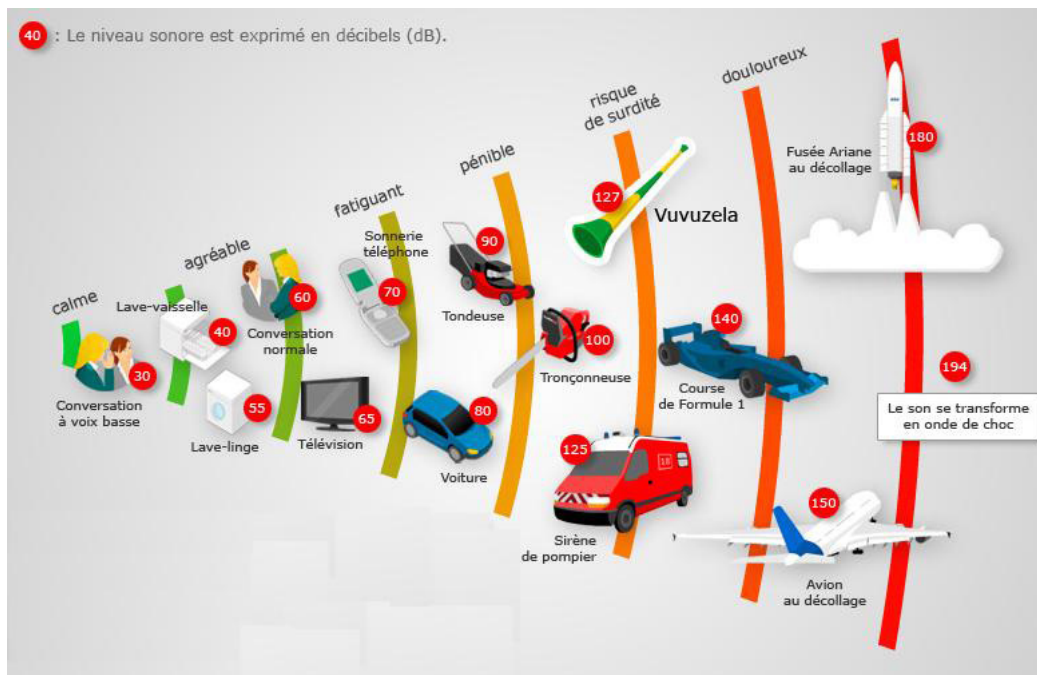
On définit l'intensité acoustique (ou sonore) comme la moyenne temporelle du vecteur de Poynting acoustique :

$$I = \langle \|\vec{\Pi}\| \rangle \quad (2.26)$$

Elle s'exprime également en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$. Toutefois, les capteurs humains (oreilles et yeux) sont des détecteurs **logarithmiques**, c'est-à-dire que quand l'intensité est multipliée par 10, la sensation ressentie est multipliée par deux. On utilise alors plutôt le **niveau sonore**, intensité exprimée en décibel :

$$I_{\text{dB}} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (2.27)$$

avec $I_0 = 10^{-12} \text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, intensité sonore de référence, correspondant au seuil moyen de perception sonore. Quelques ordres :



III. Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

III.1 Définition

Nous avons vu au chapitre précédent qu'une famille de solutions de l'équation de d'Alembert 1D était constituée d'ondes progressives harmoniques. Nous élargissons maintenant le spectre, étant donné le caractère 3D. Considérons dans un premier temps un cas « simple » (et surtout courant) où la propagation est unidirectionnelle selon le vecteur \vec{u} . Construisons une base orthonormée directe telle que $\vec{e}_x = \vec{u}$.

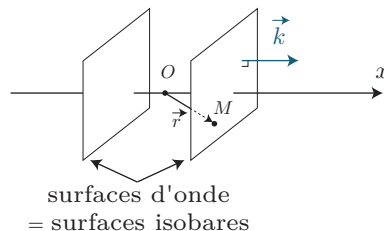
L'onde progressive harmonique est alors décrite par :

$$P_1(M, t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) = P_{10} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi) \quad (2.28)$$

où $\vec{k} = k\vec{e}_x = k\vec{u}$ est le vecteur d'onde, dirigé dans le sens de propagation de l'onde et \vec{r} est le vecteur position. En notations complexes :

$$\underline{P}_1(M, t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.29)$$

*



On dit de ce type d'onde qu'il s'agit d'une **onde plane progressive harmonique** (OPPH) dans la mesure où les **surfaces d'ondes** (ou plans d'ondes), c'est-à-dire les surfaces où la valeur de la surpression est la même à une date t fixée, sont des plans (ici des plans d'équation $x = \text{cste}$), orthogonaux à la direction \vec{u} de propagation de l'onde.

D'après la théorie de Fourier, toute onde plane progressive (OPP) est somme (éventuellement conti-

nue) d'ondes planes progressives harmoniques, et sera également solution de l'équation de d'Alembert :

$$P_1^+(M, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{1n} \cos(n\omega t - n\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_n) \quad (2.30)$$

$$\text{ou } P_1^+(M, t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi(\omega)) d\omega \quad (2.31)$$

III.2 Relation de dispersion

Une OPPH de la forme $\underline{P}_1(M, t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ est solution de l'équation de d'Alembert si :

$$(j\omega)^2 \underline{P}_1 = c^2 (-j\vec{k})^2 \underline{P}_1 \iff \omega^2 = c^2 k^2 \iff k = \pm \frac{\omega}{c} \quad (2.32)$$

On retrouve la relation de dispersion classique, et les deux solutions possibles pour la norme du vecteur d'onde, caractérisant les deux sens possibles de la propagation d'une OPPH. On en déduit que la vitesse de phase vaut toujours $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c$.

III.3 Caractère longitudinal de l'OPPH sonore

* Pour justifier le caractère longitudinal d'une OPPH sonore, partons de la forme précédente pour la pression, que l'on injecte dans la LQM :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_1 \implies \mu_0 j\omega \vec{v}_1 = -(-j\vec{k}) \underline{P}_1 \iff \vec{v}_1 = \frac{\underline{P}_1}{\mu_0 \omega} \vec{k} = \frac{\underline{P}_{10}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u} \quad (2.33)$$

Le champ eulérien des vitesses est donc colinéaire au vecteur \vec{k} (ou \vec{u}), ce qui traduit bien le caractère longitudinal : le mouvement des particules de fluide est dans la même direction que la propagation de l'onde.

III.4 Impédance acoustique

On élargit la définition d'impédance étudiée au chapitre précédent en écrivant le rapport entre la cause de l'onde (grandeur d'excitation, source) sur la grandeur de réponse, ici respectivement la surpression et le champ de vitesse eulérien. Ainsi, on définit l'**impédance acoustique** par :

$$Z = \frac{P_1(M, t)}{v_1(M, t)} \quad \text{ou parfois} \quad Z = \frac{P_1(M, t)}{D_v(M, t)} \quad (2.34)$$

où $D_v = Sv_1(M, t)$ est le débit volumique à travers une surface S . Dans toute la suite nous utiliserons la première définition.

Pour une OPPH se propageant dans le sens $+\vec{u}$, on a écrit précédemment le lien entre la vitesse et la pression :

$$\vec{v}_1 = \frac{\underline{P}_{10}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u} \implies Z = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}} = Z_c \quad (2.35)$$

* Pour une OPPH se propageant dans le sens $-\vec{u}$ du type $\underline{P}_1 = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})}$, un signe apparaît du fait de la dérivée spatiale :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_1 \implies \mu_0 j\omega \vec{v}_1 = -(j\vec{k}) \underline{P}_1 \iff \vec{v}_1 = -\frac{\underline{P}_{10}}{\mu_0 c} e^{j(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{u} \implies Z = -\mu_0 c \quad (2.36)$$

Relation entre surpression et vitesse pour une OPP

L'impédance étant indépendante de ω , on généralise la notion d'impédance acoustique à toute OPP :

- pour une OPP se propageant dans le sens $+\vec{u}$, $P_1^+(M, t) = Z_c v_1^+(M, t)$;
- pour une OPP se propageant dans le sens $-\vec{u}$, $P_1^+(M, t) = -Z_c v_1^+(M, t)$;

en posant $Z_c = \mu_0 c$. Citons deux ordres de grandeurs importants : $Z(\text{air}) = 410 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ et $Z(\text{eau}) = 1,4\cdot 10^6 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$.

Retenons que de manière globale :

$$Z(\text{solide}) \gg Z(\text{liquide}) \gg Z(\text{gaz}) \quad (2.37)$$

traduisant qu'à surpression égale, la vitesse des particules de fluide est plus grande dans les gaz que dans les phases condensées liquide et solide. Par analogie avec l'électrocinétique, l'impédance acoustique caractérise la résistance du milieu au passage de l'onde. Nous allons nous en servir dans la partie suivante.

III.5 Aspects énergétiques d'une OPPH

Partons d'une OPPH se déplaçant dans le sens $+\vec{e}_x$ dans l'air :

$$P_1(x, t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad v_1(x, t) = v_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.38)$$

avec $P_1(x, t) = Z_c v_1(x, t) \Rightarrow P_{10} = Z_c v_{10}$ où $Z_c = \mu_0 c$.

Exercice

Déterminer l'expression des deux énergies volumiques, les comparer. Exprimer enfin le vecteur de Poynting en fonction de e_a .

Écrivons les deux énergies volumiques ainsi définies :

$$\frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.39)$$

tandis que l'équivalent d'énergie potentielle s'écrit :

$$\frac{1}{2} \chi_s P_1^2 = \frac{\chi_s}{2} P_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\chi_s \mu_0 c}{2} v_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.40)$$

On observe donc que les deux énergies sont égales à tout instant : l'énergie totale acoustique est donc constamment répartie entre ces deux formes cinétique et de pression, on parle d'**équipartition de l'énergie**. Ce résultat est général pour une OPP.

De plus, $e_a = \mu_0 v_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \mu_0 v_1^2$. Enfin le vecteur de Poynting acoustique s'écrit :

$$\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1 = \mu_0 c v_1^2 \vec{e}_x = \boxed{e_a c \vec{e}_x} \quad (2.41)$$

résultat que nous retrouverons également au prochain chapitre sur les ondes électromagnétiques.

III.6 Justification de l'approximation acoustique

Grâce aux OPPH, nous allons pouvoir vérifier *a posteriori* que les approximations sur lesquelles s'appuie la théorie de propagation d'une onde acoustique sont bien vérifiées quantitativement.

a) Évolution isentropique

Utilisons les ordres de grandeurs pour étudier l'influence des échanges thermiques. Les phénomènes sont périodiques de fréquence f , les champs thermodynamiques varient sur une distance caractéristique λ , la longueur d'onde. Supposons qu'il n'y a que de la conduction caractérisée par une conductivité κ . Alors le transfert thermique infinitésimal reçu par une particule de fluide de volume $d\tau$ pendant dt vaut :

$$\delta^2 Q = \kappa \Delta T d\tau dt \sim \kappa \frac{T}{\lambda^2} d\tau dt \quad (2.42)$$

tandis que l'énergie interne varie de :

$$d^2 U = \mu c \frac{\partial T}{\partial t} d\tau dt \sim \mu c f T d\tau dt \quad (2.43)$$

En faisant le quotient :

$$\frac{\delta^2 Q}{d^2 U} = \frac{\kappa}{\mu c f \lambda^2} \sim \frac{D_{th} f}{c^2} \quad (2.44)$$

en introduisant le coefficient de diffusivité thermique $D_{th} = \frac{\kappa}{\mu c}$. En prenant les ordg classiques pour l'eau ($D_{th} = 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $c = 1,5 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) et l'air ($D_{th} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), à la limite de l'audible $f < 20 \text{ kHz}$:

$$\left(\frac{\delta^2 Q}{d^2 U} \right)_{\text{air}} < 3,5 \cdot 10^{-6} \ll 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\delta^2 Q}{d^2 U} \right)_{\text{eau}} < 9 \cdot 10^{-10} \ll 1 \quad (2.45)$$

On aurait aussi pu tout simplement comparer le temps caractéristique de diffusion thermique à la période :

$$\tau_{th} = \frac{L_c^2}{D_{th}} = \frac{\lambda^2}{D_{th}} = \frac{c^2}{f^2 D_{th}} \gg T = \frac{1}{f} \iff f \ll \frac{c^2}{D_{th}} \sim 10^9 \text{ Hz} \quad (2.46)$$

dans l'air. Donc à faible fréquence, l'hypothèse d'adiabaticité est bien vérifiée.

b) Expression simplifiée de l'accélération

À l'aide d'ordres de grandeurs liés au caractère ondulatoire, on peut justifier facilement l'expression de l'accélération d'une particule de fluide.



Exercice

Comparer les termes $\frac{\partial v}{\partial t}$ et $(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}$ avec des ordres de grandeurs. En déduire une condition sur $\|\vec{v}\|$.

On souhaite que $\|(\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v}\| \ll \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|$, cela se traduit en ordres de grandeurs par $\frac{v^2}{\lambda} \ll \frac{v}{T}$, soit $v \ll \frac{\lambda}{T} = c$. Il faut donc que la vitesse mésoscopique des particules de fluide soit très petite devant la célérité.

Cette condition sur la vitesse est également liée à l'incompressibilité du fluide. On dit souvent qu'un écoulement est incompressible à condition que la vitesse du fluide soit très inférieure à celle de propagation des ondes acoustiques. On introduit d'ailleurs le **nombre de Mach** $\text{Ma} = \frac{v}{c}$, qui doit ainsi vérifier $\text{Ma} \ll 1$.

Si on suppose l'écoulement parfait, on peut utiliser le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant horizontale entre un point de vitesse nulle et pression P_0 et un point où la vitesse est v et la pression $P_0 + P_1$. Ainsi $P_0 + P_1 + \frac{1}{2} \mu_0 v^2 = P_0$ donc $P_1 \sim -\frac{1}{2} \mu_0 v^2$. Ainsi la condition $v \ll c$ se traduit par :

$$v \ll \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \chi_s}} \iff \chi_s \mu_0 v^2 \ll 1 \iff -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \mu_0 v^2 \ll 1 \iff \frac{dV}{V} \ll 1 \quad (2.47)$$

en remplaçant dP par P_1 . Cela traduit bien l'incompressibilité.

c) Ordres de grandeurs

Vérifions quantitativement que l'amplitude de la vitesse, la surpression et le déplacement a vérifient bien $v_{10} \ll c$, $P_{10} \ll P_0$ et $a \ll \lambda$. Plaçons-nous à une fréquence de 1 kHz, et une intensité sonore de $I_{dB} = 120 \text{ dB}$, c'est-à-dire une intensité sonore $I = I_0 10^{I_{dB}/10} = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ correspondant au seuil de douleur. Partons d'une OPPH se déplaçant dans le sens $+\vec{e}_x$ dans l'air, s'écrivant donc :

$$P_1(x, t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad v_1(x, t) = v_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (2.48)$$

avec $P_1(x, t) = Z_c v_1(x, t) \implies P_{10} = Z_c v_{10}$ où $Z_c = \mu_0 c$. On peut alors calculer l'intensité sonore :

$$* \quad I = \left\langle \|\vec{\Pi}\| \right\rangle = \langle P_1 v_1 \rangle = Z \langle v_1^2 \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c v_{10}^2 = \frac{P_{10}^2}{2 \mu_0 c} \quad (2.49)$$

On en déduit $v_{10} = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}} = 7 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \ll c$ et $P_{10} = \sqrt{2I \mu_0 c} = 28 \text{ Pa} \ll P_0 = 1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. L'amplitude du mouvement vaut alors :

$$a \simeq \frac{v_{10}}{\omega} = \frac{v_{10}}{2\pi f} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ m} \ll \lambda = \frac{c}{f} = 0,34 \text{ m} \quad (2.50)$$

L'approximation acoustique est donc vérifiée quantitativement.

IV. Réflexion et transmission des ondes sonores sur une interface plane

IV.1 Modélisation et conditions aux limites

La propagation d'ondes acoustiques avec un changement de milieu est un phénomène courant en physique. Citons notamment des ondes ultrasonores qui passent de l'air aux tissus de la peau, aux os, etc. lors d'une échographie. On étudie pour cela la propagation d'une OPPH de pulsation ω dirigée selon $+\vec{e}_x$, rencontrant une interface plane située en $x = 0$ entre deux milieux non miscibles caractérisés par leur impédance Z_1 et Z_2 et leur célérité c_1 et c_2 . Étant donné le changement d'impédance, il est nécessaire d'avoir une onde réfléchie (indiquée r) et une onde transmise (indiquée t) pour pouvoir vérifier les conditions aux limites en $x = 0$:

$$\begin{cases} P_i(x, t) = P_{i0}e^{j(\omega t - kx)} & \text{et} \quad \vec{v}_i = v_{i0}e^{j(\omega t - kx)}\vec{e}_x \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\begin{cases} P_r(x, t) = P_{r0}e^{j(\omega_r t + k_r x)} & \text{et} \quad \vec{v}_r = v_{r0}e^{j(\omega_r t + k_r x)}\vec{e}_x \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} P_t(x, t) = P_{t0}e^{j(\omega_t t - k_t x)} & \text{et} \quad \vec{v}_t = v_{t0}e^{j(\omega_t t - k_t x)}\vec{e}_x \end{cases} \quad (2.53)$$

Notons que l'onde réfléchie ou l'onde transmise ont *a priori* une pulsation (et donc un vecteur d'onde) différente de celle de l'onde incidente.

Il y a deux conditions aux limites à respecter à l'interface en $x = 0$ que l'on considère fixe car l'amplitude des déplacements est très petite devant λ :

- la **continuité du champ de vitesse**, sinon il y aurait mélange des fluides ou formation de vide, ce qui est exclu par hypothèse :

$$v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \quad (2.54)$$

- la **continuité de la surpression**, qui s'obtient en appliquant la LQM projetée selon l'axe Ox à une tranche d'épaisseur 2ε autour de $x = 0$:

$$\delta m(\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} = 0 = S(P_0 + P_i(-\varepsilon, t) + P_r(-\varepsilon, t)) - S(P_0 + P_t(+\varepsilon, t)) \quad (2.55)$$

car on somme les surpressions du côté $x < 0$ et $x > 0$ à la pression ambiante P_0 . Il vient à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ $\delta m(\varepsilon) \rightarrow 0$ conduisant à :

$$P_i(0, t) + P_r(0, t) = P_t(0, t) \quad (2.56)$$

La première équation se réécrit :

$$v_{i0}e^{j\omega t} + v_{r0}e^{j\omega_r t} = v_{t0}e^{j\omega_t t} \quad \forall t \quad (2.57)$$

ce qui impose l'égalité des trois pulsations $\omega_r = \omega_t = \omega$, tandis que les vecteurs d'onde admettent pour norme $k_r = k = \frac{\omega}{c_1}$, et $k_t = \frac{\omega}{c_2}$.

IV.2 Conséquence sur les amplitudes

On peut ensuite chercher à déterminer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la vitesse et la pression :

$$r_v = \frac{v_{r0}}{v_{i0}} \quad , \quad t_v = \frac{v_{t0}}{v_{i0}} \quad , \quad r_p = \frac{P_{r0}}{P_{i0}} \quad \text{et} \quad t_p = \frac{P_{t0}}{P_{i0}} \quad (2.58)$$

Exercice

À partir des équations précédentes, déterminer ces coefficients de réflexion et de transmission en amplitude en fonction des impédances.

Réécrivons les conditions aux limites en termes d'impédances et de vitesse :

$$v_i + v_r = v_t \quad \text{et} \quad Z_1 v_i - Z_1 v_r = Z_2 v_t \quad (2.59)$$

puis on utilise les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour les vitesses :

$$v_{i0}(1 + r_v) = v_{t0} \quad \text{et} \quad Z_1(1 - r_v)v_{i0} = Z_2 t_v v_{i0} \iff 1 + r_v = t_v \quad \text{et} \quad Z_1(1 - r_v) = Z_2 t_v \quad (2.60)$$

Attention, la continuité de la surpression n'est pas toujours vérifiée, cela dépend des systèmes étudiés, du type de frontière entre les milieux d'impédances différentes.

conduisant après résolution à $r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ et $t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$. D'autre part, $r_p = \frac{-Z_1 v_{r0}}{Z_1 v_{i0}} = -r_v$ et $t_p = \frac{Z_2}{Z_1} t_v = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$.

Au lieu de l'intensité acoustique, on peut aussi utiliser la puissance, en multipliant l'intensité acoustique par la surface (ou en intégrant si le vecteur de Poynting n'est pas constant sur la surface).

On constate à nouveau qu'il n'y a pas d'onde réfléchie dans le cas d'adaptation d'impédance $Z_1 = Z_2$. Il existe cependant des situations où il est impossible de modifier Z_1 ou Z_2 : on peut alors ajouter un milieu supplémentaire pour limiter les réflexions. C'est ce qui explique l'ajout d'une couche de gel entre l'appareil à échographie et la peau (cf. TD).

IV.3 Conséquences énergétiques

On définit également des coefficients de réflexion et transmission en puissance à partir de l'intensité acoustique :

$$R = \frac{I_r(0)}{I_i(0)} \quad \text{et} \quad T = \frac{I_t(0)}{I_i(0)} \quad (2.61)$$

Comme $I_i = \langle \|\vec{P}_i \vec{v}_i\| \rangle = Z_1 \langle v_i^2 \rangle$ et $I_r = Z_1 \langle v_r^2 \rangle$, il vient

$$R = \frac{v_{r0}^2/2}{v_{i0}^2/2} = r_v^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (2.62)$$

tandis que le coefficient de transmission en puissance vaut :

$$T = \frac{Z_2 \langle v_t^2 \rangle}{Z_1 \langle v_i^2 \rangle} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (2.63)$$

On vérifie alors que $R + T = 1$, traduisant la conservation de l'énergie à l'interface.

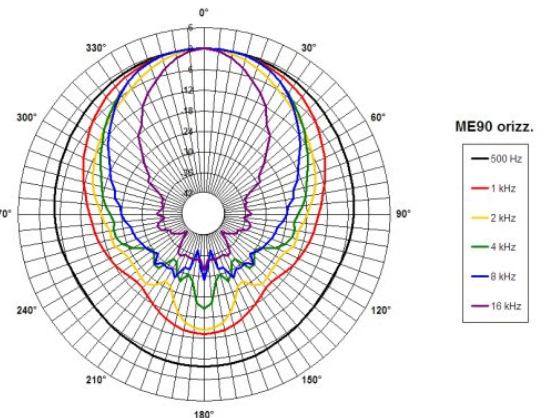
Cela explique en particulier pourquoi les sons émis dans l'air sont très peu entendus dans l'eau, car l'impédance de l'eau étant élevée, $R \simeq 1$, il n'y a presque pas d'onde transmise.

Concernant le cas des instruments de musique, il faut d'une part traduire la discontinuité de section à l'embouchure d'un instrument, et éventuellement prendre en compte le fait que l'onde transmise n'est pas plane, en particulier dans le cas où le diamètre de l'embouchure se rapproche de λ . En effet, un phénomène de diffraction se produit, et la modélisation en ondes planes n'est plus valide.

V. Ondes sphériques

V.1 Ondes sphériques progressives

Une source sonore réelle n'émet jamais dans une seule direction, mais souvent de manière anisotrope dans plusieurs directions. On peut d'ailleurs mesurer, à distance fixée, un diagramme de directivité d'un haut-parleur en traçant l'intensité sonore en fonction de l'angle.



Étudions alors l'émission d'une onde sphérique, dans le cas simple d'une invariance par rotation autour du centre du repère. La surpression comme la norme du champ des vitesses ne dépendent alors que de r et de t . L'équation de d'Alembert à trois dimensions s'écrit alors en coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r P_1) \iff \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r P_1) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r P_1) \quad (2.64)$$

en multipliant par r . La fonction $r P_1$ obéit alors à une équation de d'Alembert classique à une dimension, dont les solutions sont :

$$r P_1(r, t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) + g\left(t + \frac{r}{c}\right) \iff P_1(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (2.65)$$

Ces deux fonctions représentent deux ondes progressives se propageant dans le sens des r croissants ($+\vec{e}_r$), c'est une onde divergente ; et dans le sens des r décroissants ($-\vec{e}_r$), c'est une onde convergente.

En médecine particulièrement, il est intéressant de savoir créer des ondes sphériques convergentes, de sorte à concentrer l'énergie pour traiter des cellules cancéreuses, ou lors d'échographie pour déterminer précisément la nature d'un tissu à une certaine profondeur.



L'amplitude des ondes semble décroître en $1/r$, mais ce n'est PAS dû à de la dissipation d'énergie, bien au contraire. En effet, aucun phénomène dissipatif n'est pris en compte dans les équations du mouvement. Si l'amplitude diminue, c'est que la puissance de l'onde, qui reste constante, est répartie sur une surface de plus en plus grande, de valeur $4\pi r^2$. Cela signifie que le vecteur de Poynting acoustique est justement proportionnel à $\frac{1}{r^2}$, ce qui est cohérent avec l'expression de P_1 .

V.2 Cas d'un onde sphérique progressive harmonique

Considérons le cas d'une sphère pulsante située en $r = 0$ imposant localement une perturbation sinusoïdale de sa surface, à l'origine d'une onde acoustique. On peut alors écrire la surpression avec une dépendance harmonique du type :

$$P_1^+(r, t) = A_0 \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r} \quad (2.66)$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ d'après la relation de dispersion. On peut également chercher le champ de vitesse associé.



Il n'est pas licite d'utiliser la relation $v_1 = \frac{P_1}{\mu_0 c}$, on n'a pas une onde plane !

On utilise donc la LQM :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} P_1 = A_0 \left(\frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r^2} - \frac{k \sin(\omega t - kr + \varphi)}{r} \right) \vec{e}_r \quad (2.67)$$

puis par intégration (pas de constante d'intégration), le champ de vitesse s'exprime selon :

$$\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 r \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - kr + \varphi)}{r} + k \cos(\omega t - kr + \varphi) \right) \vec{e}_r \quad (2.68)$$

On peut distinguer deux situations :

- champ dit « proche » où $r \ll \lambda$, c'est-à-dire $\frac{1}{r} \gg k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc :

$$\vec{v}_1 \simeq \frac{A}{\mu_0 r^2 \omega} \sin(\omega t - kr + \varphi) \vec{e}_r \quad (2.69)$$

et l'impédance est complexe et vaut $\underline{Z} = \frac{P_1}{v_1} = j\mu_0 r \omega$;

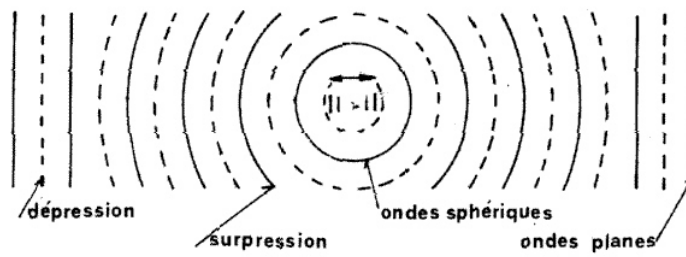
- champ dit « lointain » où $r \gg \lambda$: c'est le contraire, $\frac{1}{r} \ll k$, d'où :

$$\vec{v}_1 \simeq \frac{Ak}{\mu_0 r \omega} \cos(\omega t - kr + \varphi) \vec{e}_r \quad (2.70)$$

et l'impédance est simplement $Z = \frac{\mu_0 \omega}{k} = \mu_0 c$: on retrouve le cas d'une onde plane.

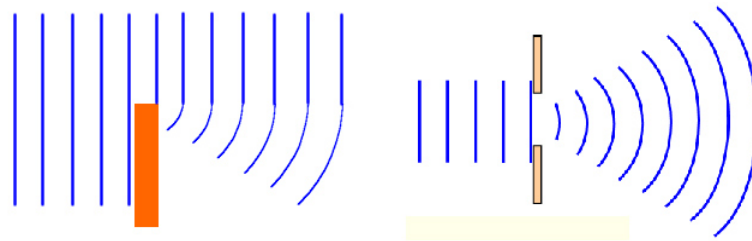
V.3 Onde plane / sphérique et diffraction

La distinction entre champ proche et lointain permet d'illustrer l'importance du concept de l'onde plane progressive. En effet, à grande distance de l'émetteur isotrope de l'onde, les plans d'ondes qui sont des sphères de rayon r deviennent localement assimilables à des ondes planes. Il suffit alors de se placer dans une zone d'extension spatiale de petite dimension devant le rayon de courbure de la surface d'onde sphérique.



Ainsi, retenons que toute onde peut être décomposée soit en superposition d'ondes planes ou d'ondes sphériques, on choisit donc la base adaptée au problème étudié.

Notons enfin l'importance de la diffraction. En effet, si on place sur le parcours d'une onde plane (ou assimilée) un obstacle de dimension caractéristique $L \lesssim \lambda$, l'onde cesse d'être plane en aval de l'obstacle, et les fronts d'onde se déforment.



Exercices

2.1 Isolation phonique

Le mur est modélisé par une membrane de masse volumique ρ et d'épaisseur e en translation au voisinage de $x = 0$ dans un tuyau sonore de section S rempli d'air à la température de 20°C de masse volumique $\rho_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$

On cherche à déterminer les ondes transmises et réfléchies en $x = 0$ pour une onde de vitesse incidente $\underline{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - kx)}$ pour $x < 0$.

1. On considère que la membrane se trouve constamment en $x = 0$. À quelle condition cette approximation est-elle valable ?
2. Écrire les conditions aux limites en $x = 0$.
3. Donner la forme des ondes de pression et de vitesse du côté (1) : $x < 0$ et du côté (2) : $x > 0$.
4. En déduire le coefficient complexe de transmission en vitesse $\tau(j\omega)$, puis celui en puissance $T(\omega)$. Commenter le type de filtre obtenu au vu de la fonction de transfert $\tau(j\omega)$. Donner l'expression de sa fréquence de coupure.
5. Pour $\rho = 1800 \text{ kg.m}^{-3}$, quelle est l'épaisseur du mur permettant une atténuation de 40 dB à 400 Hz ?
Quels instruments d'un groupe de rock entend-on le mieux à travers un mur ?

-
1. Cette approximation n'est valable que si la membrane se déplace très peu à l'échelle de la longueur d'onde λ . C'est à la base de l'approximation acoustique.
 2. Écrivons les conditions aux limites, en considérant qu'il y a une onde réfléchie et une onde transmise. D'une part on a continuité du champ de vitesse à l'interface :

$$v_i(0, t) + v_r(0, t) = v_t(0, t) \quad (2.71)$$

et d'autre part, on n'a pas continuité de la surpression, car il faut appliquer la loi de la quantité de mouvement à la membrane, qui se déplace en bloc à la vitesse $v_t(0, t)$:

$$\rho S e \frac{\partial v_t(0, t)}{\partial t} = (p_i(0, t) + p_r(0, t) - p_t(0, t)) S \quad (2.72)$$

3. On écrit les formes d'onde de la manière suivante :

$$\underline{v}_r(x, t) = v_{r0} e^{j(\omega t + kx)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_t(x, t) = v_{t0} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.73)$$

et pour la pression :

$$\underline{p}_i(x, t) = Z \underline{v}_i \quad , \quad \underline{p}_r(x, t) = -Z \underline{v}_r \quad \text{et} \quad \underline{p}_t(x, t) = v_{t0} e^{j(\omega t - kx)} \quad (2.74)$$

en posant $Z = \rho_0 c$.

4. En injectant les formes précédentes dans les conditions aux limites, en introduisant le coefficient de transmission en vitesse $\tau(j\omega) = \frac{v_t(0, t)}{v_i(0, t)}$ (et par analogie celui en réflexion $r(j\omega)$) :

$$1 + r = \tau \quad \text{et} \quad \rho e j \omega \tau = Z(1 - r - \tau) \quad (2.75)$$

soit en réinjectant r dans la seconde équation, il vient après réarrangement :

$$\tau(j\omega) = \frac{2Z}{2Z + \rho e j \omega} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad (2.76)$$

avec $\omega_c = \frac{2Z}{\rho e} = \frac{2\rho_0 c}{\rho e}$. Concernant le coefficient en puissance :

$$T(\omega) = \left| \frac{P_t(0, t) v_t(0, t)}{P_i(0, t) v_i(0, t)} \right| = \left| \frac{Z v_t(0, t)^2}{Z v_i(0, t)^2} \right| = |\tau|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \quad (2.77)$$

On a donc un filtre passe-bas, ce qui était relativement attendu, car les basses fréquences sont souvent plus difficiles à filtrer que les hautes fréquences. La fréquence de coupure est $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$.

5. Si on veut une atténuation de 40 dB à 400 Hz, il faut que :

$$T = \frac{1}{100} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \iff \omega_c = \frac{\omega}{\sqrt{99}} = \frac{2\rho_0 c}{\rho e} \iff e = \frac{2\rho_0 c \sqrt{99}}{\omega \rho} = 9,4 \text{ cm} \quad (2.78)$$

sachant que $c = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho_0}} = 258 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour un groupe de rock, on entendra très certainement la basse et la batterie, dommage pour les voisins !!

2. 2 Réflexion et transmission dues à un changement de section

On considère la propagation d'ondes sonores planes dans un tube cylindrique d'axe Ox rempli d'un gaz. On se place dans l'approximation acoustique. On pose pour les champs de pression, masse volumique, température et vitesse : $p(x, t) = p_0 + p_1(x, t)$; $\vec{v}(x, t) = v_1(x, t) \vec{e}_x$ où les grandeurs indicées par 1 sont des infiniment petits du même ordre (perturbations acoustiques) et les grandeurs indicées par 0 sont les grandeurs dans le fluide au repos, supposées uniformes. On note c la célérité des ondes sonores dans le fluide ; ρ_0 la masse volumique du fluide au repos.

En $x = 0$, la section du cylindre passe de S_1 à S_2 . On s'intéresse au cas où une onde plane progressive harmonique se propage pour $x < 0$ dans le sens des x croissants, la vitesse s'écrit alors pour $x < 0$: $\vec{v}(x, t) = v_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x$

1. À quelle condition un changement de section continu peut-il être modélisé comme dans cet exercice par un changement brutal en $x = 0$? Quelles sont alors les conditions aux limites que vérifient les champs en $x = 0$?
2. En déduire les coefficients de réflexion r et de transmission τ en vitesse des ondes en fonction de $\alpha = S_2/S_1$, puis ceux R et T en puissance. Faire un bilan énergétique et commenter. Tracer $R(\alpha)$ et $T(\alpha)$. Commenter le cas $S_2 \gg S_1$.
3. Rappeler l'expression des coefficients précédents quand la section ne varie pas mais quand les fluides sont différents de part et d'autre de la section $x = 0$, caractérisés par des impédances $Z_1 = \rho_1 c_1$ pour $x < 0$, et $Z_2 = \rho_2 c_2$ pour $x > 0$. Comment définir une nouvelle impédance Z' qui permettrait de traiter simplement le cas où le fluide et la section changent en $x = 0$.

-
1. C'est possible à condition que la distance caractéristique de changement de section soit très inférieure à la longueur d'onde de l'onde progressive qui se propage. On écrit la continuité de la surpression à ce changement de section, ainsi que la conservation du débit volumique (on ne peut plus écrire la continuité de la vitesse, et le fluide peut être considéré comme quasi-incompressible), en introduisant des ondes réfléchies et transmises, de même pulsation :

$$S_1(v_i(0, t) + v_r(0, t)) = S_2 v_t(0, t) \quad \text{et} \quad p_i(0, t) + p_r(0, t) = p_t(0, t) \quad (2.79)$$

soit en se servant des impédances et des coefficients de réflexion en amplitude :

$$S_1(1 + r) = S_2 \tau \quad \text{et} \quad Z_1(1 - r) = Z_2 \tau \quad (2.80)$$

En l'occurrence ici, $Z_1 = Z_2$ car il s'agit d'air de même masse volumique de part et d'autre. D'où après simplification, et en posant $\alpha = S_2/S_1$:

$$r = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{2}{\alpha + 1} \quad (2.81)$$

En puissance, cela donne :

$$R = \frac{\langle \Pi_r \rangle S_1}{\langle \Pi_i \rangle S_1} = \frac{\langle v_r^2 \rangle}{\langle v_i^2 \rangle} = r^2 = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^2 \quad (2.82)$$

et pour le coefficient de transmission en puissance :

$$T = \frac{\langle \Pi_t \rangle S_2}{\langle \Pi_i \rangle S_1} = \alpha \frac{\langle v_t^2 \rangle}{\langle v_i^2 \rangle} = \alpha \tau^2 = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2} \quad (2.83)$$

On obtient trivialement $R + T = 1$, traduisant la conservation de l'énergie. Dans le cas où $S_2 \gg S_1$, on a donc $\alpha \gg 1$, et ainsi $R \rightarrow 1$ et $T \rightarrow 0$, on a réflexion totale en puissance.

2. Cf cours. Si on utilise l'impédance à partir de la pression et du débit volumique $Z' = \frac{P_1}{S v_1} = \frac{\rho_0 c}{S} = \frac{Z}{S}$, on peut traiter à la fois du changement de fluide et de section.

2. 3 Ondes sonores sphériques. Impédance de rayonnement

Une sphère pulsante de centre O fixe dont le rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ varie sinusoïdalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique μ_0 où

la célérité des ondes sonores vaut c . Compte tenu de la symétrie du problème, on cherche en coordonnées sphériques de centre O des champs de la forme $p_1(M, t) = p_1(r, t)$ et $\vec{v}_1(M, t) = v_1(M, t) \vec{u}_r$.

On rappelle que pour un champ scalaire ne dépendant que de r en coordonnées sphériques le laplacien peut s'écrire : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r, t))$.

1. Déterminer la forme générale des solutions $p_1(r, t)$ et interpréter. Justifier que l'on doit choisir $p_1(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c)$.
2. Dans la suite, on pose $k = \omega/c$ et on cherche une solution de la forme $p_1 = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \alpha)$. Déterminer le champ des vitesses correspondant. Simplifier l'expression du champ des vitesses pour $r \ll \lambda$ et déterminer A et α en exploitant la condition aux limites sur la sphère. Commenter la structure de l'onde pour $r \gg \lambda$.
3. Exprimer la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$. Expliquer pourquoi des enceintes acoustiques sphériques sont-elles d'autant plus grande que le son émis est grave ?
4. Exprimer l'impédance complexe $Z_R = p_1/v_1$ au niveau de la membrane et la comparer à l'impédance des ondes planes progressives. En déduire pourquoi on peut considérer qu'on a un nœud de pression à l'extrémité d'un tuyau ouvert sur une sphère, dont la section a a pour dimension typique $a_0 \ll \lambda$.

1. Partons de l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ de surpression :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \iff \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r p_1(r, t))}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (2.84)$$

soit en posant $b(r, t) = r p_1(r, t)$, on a une équation de d'Alembert 1D vérifiée par $b(r, t)$, d'où :

$$p_1(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (2.85)$$

On choisit ici une onde progressive se dirigeant selon $+\vec{e}_r$, car il n'y a aucune condition aux limites pour de grandes valeurs de r qui expliquent qu'en plus de l'onde progressive émise par la sphère pulsante, il y ait une onde réfléchie.

2. Pour déterminer le champ de vitesse, on ne peut pas utiliser l'impédance, car on n'a pas une OPPH. Partons de la LQM que l'on intègre par rapport au temps :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1 = A_0 \left(\frac{\cos(\omega t - kr - \alpha)}{r^2} - \frac{k \sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} \right) \vec{e}_r \quad (2.86)$$

puis par intégration (pas de constante d'intégration) :

$$\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 r \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} + k \cos(\omega t - kr - \alpha) \right) \vec{e}_r \quad (2.87)$$

On utilise ensuite la condition aux limites de continuité de la vitesse en $x \simeq a_0$ (comme $a_1 \ll a_0$) :

$$v_1(r = a_0, t) = -a_1 \omega \sin(\omega t) = \frac{A}{\mu_0 a_0 \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - ka_0 - \alpha)}{a_0} + k \cos(\omega t - ka_0 - \alpha) \right) \quad (2.88)$$

On simplifie car $a_0 \ll \lambda$:

$$v_1(r = a_0, t) = -a_1 \omega \sin(\omega t) \simeq \frac{A}{\mu_0 a_0^2 \omega} \sin(\omega t - ka_0 - \alpha) \quad (2.89)$$

conduisant à $A = \mu_0 a_1 a_0^2 \omega^2$ et $ka_0 + \alpha = \pi$, soit $\alpha = \pi - ka_0 \simeq \pi$, car $ka_0 = \frac{2\pi a_0}{\lambda} \ll 1$.

Pour $r \gg \lambda$, on a alors

$$v_1(r, t) \simeq \frac{A}{\mu_0 r c} \cos(\omega t - kr - \alpha) = \frac{p_1(r, t)}{\mu_0 c} \quad (2.90)$$

et l'on retrouve donc le lien entre surpression et vitesse pour une onde plane progressive harmonique !

3. En champ lointain, la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r vaut :

$$\mathcal{P} = \langle (p_1 4\pi r^2) v_1(r, t) \rangle = 4\pi \frac{A^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - kr - \alpha) \rangle = \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c} = \frac{2\pi \mu_0 \omega^4 a_0^4 a_1^2}{c} \quad (2.91)$$

Comme la puissance est proportionnelle à $(a_0 \omega)^4$, pour obtenir une même puissance, il faut augmenter a_0 pour permettre d'avoir ω plus faible.

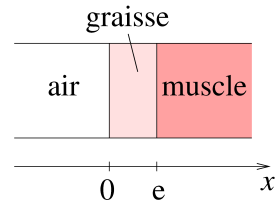
4. Au niveau de la membrane, $p_1 = \frac{A}{a_0} \cos(\omega t - ka_0 - \alpha) = -\frac{A}{a_0} \cos(\omega t)$, tandis que $v_1 = -a_1 \omega \sin(\omega t) = +\Re(a_1 \omega j e^{j\omega t})$ l'impédance complexe vaut donc :

$$\underline{Z}_R = \frac{A}{-ja_0 \omega a_1} = j\mu_0 \omega a_0 \quad (2.92)$$

Or, on constate que $|\underline{Z}_R| = \mu_0(a_0 \omega) \ll \mu_0 \lambda \omega$ conduisant à $|\underline{Z}_R| \ll \mu_0 c = Z_{OPP}$. Ainsi, sachant que $a_0 \ll \lambda$, l'onde émise en sortie du tuyau est diffractée et peut être assimilée à une onde sphérique. En extrapolant l'étude qui a été conduite pour la réflexion et transmission d'une onde acoustique à l'interface entre deux milieux d'impédance différentes, on se retrouve donc dans une situation où la différence d'impédance est grande, et donc un coefficient de réflexion en puissance qui se rapproche de 1. Par contre le coefficient de transmission en pression tend vers 0, donc cela impose une surpression nulle à la sortie. C'est logique, en sortie de l'écoulement d'air d'un instrument, la pression suit la loi de l'hydrostatique lorsqu'on se déplace à la verticale, donc en négligeant l'effet de la pesanteur, on impose $P = P_0$.

2. 4 Couche anti-reflet

1. Les impédances caractéristiques de l'air et des tissus musculaires pour les ultrasons valent $Z_a = 400 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$ et $Z_m = 1,7.10^6 \text{ kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$. Calculer le coefficient de transmission des puissances sonores à l'interface air-muscle et commenter.



2. Pour supprimer l'onde réfléchie, on réalise une couche anti-reflet d'épaisseur e en graisse, d'impédance Z_g . On note c_a , c_g et c_m les célérités du son dans chacun des trois milieux et on pose $k_a = \omega/c_a$, $k_g = \omega/c_g$ et $k_m = \omega/c_m$. On cherche alors en notation complexe des champs de vitesse dans les trois milieux de la forme : $\underline{v}(x < 0, t) = A_a e^{j(\omega t - k_a x)}$, $\underline{v}(0 < x < e, t) = A_g e^{j(\omega t - k_g x)} + B_g e^{j(\omega t + k_g x)}$ et $\underline{v}(x > e, t) = A_m e^{j(\omega t - k_m x)}$
- Justifier la forme de ces expressions.
 - Quelle est la forme du champ de surpression dans les trois milieux ?
 - Écrire les conditions aux limites et en déduire les valeurs qu'il faut choisir pour e et Z_g .
 - Commenter la puissance acoustique reçue dans le muscle, dans cette configuration.

1. On a vu dans le cours que le coefficient de transmission des puissances valait :

$$T = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = 9,1.10^{-4} \quad (2.93)$$

en remplaçant Z_1 par Z_a et Z_2 par Z_m .

2. Cette méthode de calcul est plus rapide que de considérer le cas général d'une onde réfléchie dans l'air et calculer le coefficient de réflexion et l'annuler. On doit ici aboutir à des équations qui doivent nous conduire à des conditions d'obtention d'une telle situation physique.

- Dans l'air, on a des ondes progressives dirigées selon $+\vec{e}_x$ car on cherche en particulier à avoir en $x = 0$ aucune réflexion ; tandis que dans la graisse, il apparaît impossible d'avoir à la fois une transmission totale air - graisse et une transmission totale graisse-muscle, vu la différence d'impédance. On a donc une onde réfléchie en $x = e$, d'où la forme.
- Pour le champ de surpression, servons-nous des impédances :

$$\underline{p}(x < 0, t) = Z_a A_a e^{j(\omega t - k_a x)} \quad , \quad \underline{p}(0 < x < e, t) = Z_g (A_g e^{j(\omega t - k_g x)} - B_g e^{j(\omega t + k_g x)}) \quad (2.94)$$

$$\text{et } \underline{p}(x > e, t) = Z_m A_m e^{j(\omega t - k_m x)} \quad (2.95)$$

- En écrivant la continuité du champ de vitesse et de surpression en $x = 0$ et $x = e$, il vient :

$$\begin{cases} A_a = A_g + B_g & \text{et } Z_a A_a = Z_g (A_g - B_g) \end{cases} \quad (2.96)$$

$$\begin{cases} A_g e^{-jk_g e} + B_g e^{+jk_g e} = A_m e^{-jk_m e} & \text{et } Z_g (A_g e^{-jk_g e} - B_g e^{+jk_g e}) = Z_m A_m e^{-jk_m e} \end{cases} \quad (2.97)$$

La résolution conduit d'une part à :

$$A_g (Z_g - Z_a) = B_g (Z_g + Z_a) \quad (2.98)$$

et d'autre part à :

$$A_g e^{-jk_g e} (Z_g - Z_m) = B_g e^{+jk_g e} (Z_g + Z_m) \quad (2.99)$$

soit en les combinant :

$$e^{2jk_g e} = \frac{(Z_g - Z_m)(Z_a + Z_g)}{(Z_m + Z_g)(Z_g - Z_a)} \quad (2.100)$$

On a donc nécessairement $\sin(2k_g e) = 0$ et $\cos(2k_g e) = \pm 1$. Seule la solution -1 permet d'aboutir à une égalité pertinente (sinon on trouve $Z_m = Z_a$, ce qui est impossible). On trouve alors $Z_g^2 = Z_m Z_a$, et d'autre part $\cos(2k_g e) = -1$ conduit à :

$$2k_g e = \pi + 2n\pi \iff e = \frac{\lambda_g}{4} + n \frac{\lambda_g}{2} = \frac{(2n+1)\lambda_g}{4} \quad (2.101)$$

en posant $\lambda_g = \frac{2\pi}{k_g}$.

- (d) Notons que l'onde stationnaire qui se crée dans la graisse ne transporte pas d'énergie. On peut en effet montrer à partir des équations précédentes que :

$$A_m = A_g + B_g e^{2jk_g e} = A_g - B_g = \frac{Z_a}{Z_g} A_a = \sqrt{\frac{Z_a}{Z_m}} A_a \quad (2.102)$$

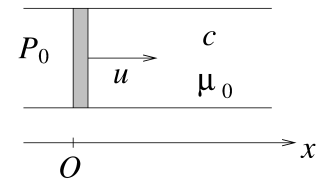
Puis :

$$\langle \Pi_i \rangle = Z_a \langle v(x=0, t)^2 \rangle = \frac{Z_a A_a^2}{2} \quad \text{et} \quad \langle \Pi_t \rangle = Z_m A_m^2 / 2 = \frac{Z_a A_a^2}{2} = \langle \Pi_i \rangle \quad (2.103)$$

Ainsi le coefficient de transmission en puissance entre l'air et le muscle vaut 1 !

2.5 Onde progressive non harmonique. Amortissement par rayonnement

On considère un tuyau sonore de section constante S et d'axe Ox s'étendant entre les abscisses $x = 0$ et $x = \infty$. Ce tuyau est rempli d'air de masse volumique μ_0 où la célérité du son vaut c . Il est fermé par un piston de masse m mobile sans frottement : à l'instant $t = 0$, on lance le piston avec une vitesse u_0 et on constate qu'il s'arrête après avoir parcouru une distance finie qu'on supposera faible devant toute distance caractéristique du problème, de telle sorte que l'abscisse du piston reste approximativement nulle.



À un instant quelconque, on note $u(t)$ la vitesse du piston. À droite, le mouvement du piston engendre une onde sonore décrite par la surpression $p_1(x, t)$ et le champ de vitesse $v_1(x, t)$. Pour simplifier, on néglige l'onde émise vers la gauche, c'est-à-dire qu'on suppose que la pression y reste uniforme, égale à P_0 .

1. Écrire les conditions aux limites sur le piston, et en exploitant la notion d'impédance d'une onde plane progressive, en déduire $u(t)$. Définir un temps caractéristique τ et commenter ses variations avec m et S .
2. En déduire l'expression de $v_1(x, t)$ et la représenter graphiquement à un instant $t > 0$ donné.
3. Établir l'expression de l'énergie de l'onde sonore à l'instant t et interpréter le résultat.

-
1. À droite du piston, on a affaire à une OPPh, donc la surpression vérifie $p_1(x, t) = Z_c v_1(x, t)$ (car onde plane progressive, même si non harmonique !). En particulier au niveau du piston $v_1(x=0, t) = u(t)$ et donc $p_1(x=0, t) = \mu_0 c u(t)$. On écrit ensuite la loi de la quantité de mouvement sur le piston dans un référentiel galiléen, projetée selon l'axe horizontal :

$$m \frac{du}{dt} = (P_0 - (P_0 + p_1(x=0, t))) S = -S \mu_0 c u(t) \iff \frac{m}{\mu_0 S c} \frac{du}{dt} + u(t) = 0 \quad (2.104)$$

soit en posant $\tau = \frac{m}{\mu_0 S c}$, $u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. En particulier, on constate que le piston retrouve un état d'équilibre au bout de quelques τ , d'autant plus grand que la masse est importante (inertie) ou que la surface est faible (plus la surface est importante, pour le piston dissipe d'énergie à l'air qu'il met en mouvement).

2. Connaissant la condition aux limites, $u(t) = v_1(x=0, t)$, on peut ensuite déterminer la vitesse pour toute position sachant qu'on recherche une onde progressive, donc $v_1(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$. Ainsi :

$$v_1(x, t) = v_1(x=0, t - \frac{x}{c}) = u_0 e^{-\frac{t - x/c}{\tau}} \quad (2.105)$$

à condition que $t - x/c > 0$, soit encore $x < ct$ (logique, le front d'onde se trouve en $x = ct$).

3. L'énergie acoustique s'écrit :

$$e_a = \frac{1}{2} \mu_0 v_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s P_1^2 = \mu_0 v_1^2 \quad (2.106)$$

soit en intégrant entre $x = 0$ et $x = ct$:

$$E(t) = \int_0^{ct} \mu_0 u_0^2 e^{-2(t-x/c)/\tau} S dx = \mu_0 S u_0^2 \left[\frac{e^{-2(t-x/c)/\tau}}{\frac{2}{c\tau}} \right]_0^{ct} = \mu_0 S c u_0^2 \tau (1 - e^{-2t/\tau}) \quad (2.107)$$

d'où finalement en remplaçant τ :

$$E(t) = \frac{1}{2}mu_0^2 - \frac{1}{2}mu_0^2e^{-2t/\tau} = \frac{m}{2}(u_0^2 - u(t)^2) \quad (2.108)$$

L'expression obtenue est cohérente, et traduit la conservation de l'énergie entre l'instant $t = 0$ et un instant t quelconque : $\frac{1}{2}mu_0^2 = E(t) + \frac{1}{2}mu(t)^2$, où l'énergie associée au piston est purement cinétique.

2. 6 Tuyau d'orgue

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau de longueur $\ell = 1$ m fermé à l'une de ses extrémités et ouvert à l'autre. Les pressions, température et masse volumique moyenne de l'air contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa ; $T_0 = 290$ K ; $\mu_0 = 1,22$ kg.m⁻³. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1,4$.

1. Déterminer les fréquences ν_0 et ν_1 du fondamental et du premier harmonique.
2. À la fréquence ν_1 , on a mesuré une amplitude maximale des elongations de l'air à $a_0 = 1$ mm. En déduire l'amplitude correspondante p_0 pour la surpression et τ_0 pour la température.

-
1. Dans un tel tuyau, d'après les exercices qui précèdent, on a vu qu'une ouverture vers l'extérieur imposait un noeud de surpression. Tandis qu'une membrane fermée fixe impose un noeud de vitesse. D'autre part, on s'attend ici à avoir une onde stationnaire, d'après de telles conditions aux limites. On cherche donc la surpression sous la forme :

$$P_1(x, t) = P_0 \cos(\omega t) \cos(kx + \psi) \quad (2.109)$$

À partir de la loi de la quantité de mouvement linéarisée, on en déduit le champ de vitesse correspondant :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} = +P_0 k \cos(\omega t) \sin(kx + \psi) \iff v_1(x, t) = \frac{P_0}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx + \psi) + f(t) \quad (2.110)$$

où l'on prend $f(t) = 0$ car une fonction du temps uniquement ne peut pas représenter une onde.

Notons qu'un noeud de pression s'accompagne d'un ventre de vitesse, et inversement, dans le cas d'ondes stationnaires !

En utilisant les deux conditions aux limites, il vient :

$$\begin{cases} v_1(x = 0, t) = 0 \forall t \implies \sin \psi = 0 \implies \psi = p\pi \\ p_1(x = \ell, t) = 0 \forall t \implies \cos(k\ell + \psi) = 0 \implies \cos(k\ell) = 0 \implies k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (2.111)$$

$$p_1(x = \ell, t) = 0 \forall t \implies \cos(k\ell + \psi) = 0 \implies \cos(k\ell) = 0 \implies k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}^* \quad (2.112)$$

soit avec $k = \frac{2\pi\nu}{c}$, $\nu_n = \frac{c}{4\ell} + n\frac{c}{2\ell}$. On trouve numériquement $\nu_0 = 85$ Hz et $\nu_1 = 255$ Hz.

2. Comme $\frac{P_0}{\mu_0 c}$ est l'amplitude maximale de la vitesse, mais qu'elle vaut aussi $a_0\omega$ à partir de l'amplitude maximale de l'elongation, il vient

$$P_0 = a_0\omega\mu_0 c = 2\pi\mu_0 c a_0 \nu_1 = 670 \text{ Pa} \quad (2.113)$$

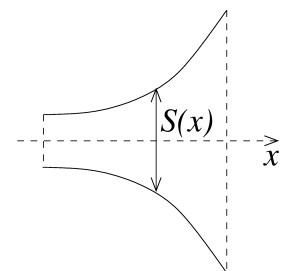
Concernant la température, on utilise le fait que la transformation est adiabatique réversible pour un gaz parfait, soit en différenciant :

$$P^{1-\gamma}T^\gamma = \text{cste} \iff (1-\gamma)\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dT}{T} = 0 \implies \frac{p_0}{P_0}(1-\gamma) + \frac{\tau_0}{T_0} = 0 \implies T_1 = \frac{(\gamma-1)T_0 p_0}{\gamma P_0} = 0,55 \text{ K} \quad (2.114)$$

On constate que la température évolue sensiblement peu lorsque l'instrument est sollicité !

2. 7 Ondes sonores dans un pavillon de section croissante

On étudie la propagation d'ondes acoustiques planes dans un tuyau d'axe (Ox) et de section variable $S(x)$. Ce pavillon contient de l'air de masse volumique ρ_0 et de compressibilité adiabatique χ_0 .



1. En considérant une tranche de fluide contenue dans le pavillon et comprise entre les plans d'abscisse x et $x + dx$, effectuer un bilan de masse afin d'obtenir l'équation de conservation de la masse dans un tuyau de section variable.

- En déduire l'équation de propagation dans le pavillon relative à la pression acoustique $P_1(x, t)$.
- On considère la cas particulier d'un pavillon exponentiel pour lequel $S(x) = S_0 e^{mx}$ (où S_0 et m sont deux constantes positives). Comment s'écrit l'équation de propagation dans ce cas particulier ?
- On considère une OPPH se propageant dans le sens des x croissants. La pression acoustique peut se mettre sous la forme $\underline{P}_1(x, t) = p_0 \exp(j(\omega t - \underline{k}x))$, où \underline{k} est *a priori* complexe.
 - Déterminer la relation de dispersion reliant \underline{k} et ω .
 - En décomposant $\underline{k} = k_r + jk_i$, interpréter l'effet de k_r et k_i sur l'OPPH. En déduire qu'il existe une pulsation de coupure ω_c en dessous de laquelle aucune propagation n'est possible. Donner son expression.
 - Dans le cas où il y a propagation, donner la vitesse de phase de l'onde $v_\varphi = \frac{\omega}{\Re(\underline{k})}$.
- Calculer la section maximale que doit avoir un pavillon de géométrie exponentielle pour transmettre les sons de fréquence supérieure à 500 Hz sachant que la section minimale du pavillon est $S_0 = 3 \text{ cm}^2$, la longueur du pavillon $x_0 = 10 \text{ cm}$ et la célérité du son dans l'air $c = 340 \text{ m.s}^{-1}$.

- On effectue un bilan de masse sur une tranche d'épaisseur dx :

$$S(x)\rho(x, t+dt)dx = S(x)\rho(x, t)dx + \mu(x)S(x)v(x, t) - \mu(x+dx)S(x+dx)v(x+dx, t) \implies S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho S v}{\partial x} = 0 \quad (2.115)$$

- Écrivons à l'ordre 1 cette équation :

$$S \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial S v}{\partial x} = 0 \quad (2.116)$$

et on doit toujours vérifier la loi de la quantité de mouvement, dans les hypothèses usuelles de l'approximation acoustique :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (2.117)$$

Enfin, avec la relation $\rho_1 = \rho_0 \chi_s P_1$, il reste à les combiner :

$$S \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + v_1 \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2.118)$$

grâce à l'équation thermodynamique et au bilan de masse. En dérivant temporellement et en injectant la relation issue de la loi de la quantité de mouvement :

$$S \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{dS}{dx} \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{S}{\rho_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0 \quad (2.119)$$

conduisant à l'équation :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} \quad (2.120)$$

en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$.

- On injecte l'expression de $S(x)$, sachant que $\frac{dS}{dx} = S_0 m e^{mx} = mS(x)$

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} + m \frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} \quad (2.121)$$

On a donc un terme spatial d'ordre 1 que l'on n'a pas dans l'équation de d'Alembert usuelle.

- (a) Si on injecte la forme de solution dans l'équation précédente, il vient :

$$(-j\underline{k})^2 + m(-j\underline{k}) = \frac{1}{c^2} (j\omega)^2 \iff \underline{k}^2 + jm\underline{k} - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (2.122)$$

- En décomposant \underline{k} , il vient $\underline{P}_1(x, t) = p_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)}$. La partie réelle correspond à la propagation, tandis que la partie imaginaire tend à modifier l'amplitude de l'onde (à la hausse ou à la baisse). Si on cherche les solutions possibles de la relation de dispersion, en calculant le discriminant :

$$\Delta = -m^2 + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.123)$$

on constate donc qu'il existe des solutions purement réelles lorsque $\Delta > 0$, c'est-à-dire pour $\omega > \omega_c = \frac{mc}{2}$. En-dessous de cette valeur, la solution sera purement imaginaire :

$$\underline{k} = \frac{-jm \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \quad (2.124)$$

ce qui implique qu'il n'y aura aucune propagation (on parle d'onde évanescence).

(c) Dans le cas où il y a propagation, les solutions s'écrivent :

$$\underline{k} = \frac{-jm \pm \sqrt{\Delta}}{2} \quad (2.125)$$

donc $\Re(\underline{k}) = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega^2/c^2 - m^2} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$, d'où :

$$v_\varphi = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} = \boxed{\frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}} \quad (2.126)$$

5. Il faut en réalité commencer par déterminer la valeur de m qui est limite :

$$\omega > \frac{mc}{2} \iff m < \frac{2\omega}{c} = \frac{4\pi f}{c} \quad (2.127)$$

D'où une section maximale de sortie de :

$$S_{\max} = S_0 e^{m_{\max} x_0} = 19 \text{ cm}^2 \quad (2.128)$$