

Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion

Sommaire

4.1 Propagation d'une OEMPPH dans un plasma dilué	2
4.1.1 Modélisation d'un plasma	2
4.1.2 Mise en équation	2
4.2 Dispersion et absorption	3
4.2.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe	3
4.2.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant	4
4.2.3 Retour sur la propagation dans un plasma	8
4.2.4 Cas de l'onde évanescente : absence de propagation	9
4.2.5 Application aux télécommunications	9
4.3 Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs	9
4.3.1 Présentation du modèle	9
4.3.2 Équation de propagation d'une OEMPPH à basse fréquence	10
4.3.3 Effets d'un conducteur sur la propagation d'une OEMPPH	11
4.3.4 Aspects énergétiques	12
4.3.5 Cas du métal parfait	12

Questions de cours :

- Modèle du plasma dilué : hypothèses, équation de propagation et relation de dispersion. Commenter physiquement.
- Présenter la pseudo-onde électromagnétique plane progressive harmonique, où \underline{k} est complexe. Donner le sens physique associé à la partie réelle et à la partie imaginaire.
- Présenter la notion de paquet d'onde, donner un exemple. Préciser le lien entre largeur spectrale et largeur temporelle. Présenter l'effet de la dispersion, en discutant de la notion de vitesse de phase et vitesse de groupe.
- À partir de la relation de dispersion du plasma dilué $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$, discuter selon la valeur de ω de l'effet d'un plasma dilué sur la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Application.
- Établir l'équation de propagation du champ électrique dans un milieu conducteur. En déduire la relation de dispersion et l'expression du champ électrique à l'intérieur du conducteur. Interpréter.

Capacités exigibles du BO :

- Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles de propagation.
- Établir la relation de dispersion.
- Lier la partie réelle de k à la vitesse de phase, la partie imaginaire de k à une dépendance spatiale de l'amplitude.
- Définir la notion de milieu dispersif.
- Calculer la vitesse de groupe à partir de la relation de dispersion. Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.
- Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.
- Effet de peau dans un conducteur ohmique : repérer une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion. Établir la relation de dispersion. Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie. Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz.
- Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans le conducteur.
- Décrire le modèle de la conduction électrique dans un plasma. Construire une conductivité complexe en justifiant les approximations.
- Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance échangée entre le champ et les porteurs.
- Établir la relation de dispersion dans le plasma.
- Identifier une onde évanescente (onde stationnaire spatialement amortie).
- Expliquer la notion de fréquence de coupure et donner son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.

Dans les chapitres précédents, on s'est attaché à décrire des milieux dans lesquels se propageaient des ondes, progressives ou stationnaires, sans déformation. Ce sont des modélisations physiques imparfaites que l'on va corriger dans ce chapitre. Ce sera également l'occasion d'étudier la propagation de vrais signaux physiques, les paquets d'onde, dont les caractéristiques évoluent lors de leur propagation dans des milieux réels. On va commencer par s'appuyer sur un exemple concret : le plasma dilué.

I. Propagation d'une OEMPPH dans un plasma dilué

I.1 Modélisation d'un plasma

Pour obtenir un plasma, on peut le soumettre à un champ électrique intense, une température élevée ou encore un bombardement intense de particules.

Un plasma est un gaz ionisé **neutre**, c'est-à-dire constitué d'ions positifs qui résultent de la perte d'un ou plusieurs électrons par une molécule de gaz, et d'électrons qui leur ont été arrachés. Par exemple dans l'ionosphère, portion d'atmosphère terrestre entre 50 et 1000 km, la pression atmosphérique est inférieure à 2 Pa : le gaz est peu dense et est ionisé par le rayonnement du Soleil. La densité électronique résultante est autour de $n \sim 10^{10} - 10^{12} \text{ m}^{-3}$: on parle de **plasma peu dense**.

* On envisage la propagation d'une OEMPPH transverse, de direction $+\vec{e}_x$, du type $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - kx)}$ où $\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$. Dans ce cas, $\text{div } \vec{E} = -j\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$: la propagation d'une OEMPPH transverse dans un plasma peu dense **laisse celui-ci localement neutre**.

Une charge quelconque du plasma (électron ou cation) subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \simeq q\vec{E} \quad (4.1)$$

* On ne **garde que la force électrique**, dans l'hypothèse où les électrons ne sont pas relativistes, car $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{vB}{E} \sim \frac{v}{c} \ll 1$. De plus, la masse des cations étant beaucoup plus élevée que celle des électrons ($m_e/m_{\text{proton}} \sim 1840$!), on les suppose fixes dans notre étude.

Enfin, et c'est la grande différence avec la conduction dans les métaux, on **néglige ici toute interaction entre particules chargées**, le plasma étant peu dense, les collisions sont peu probables et ne permettent pas d'introduire par exemple une force de freinage.

I.2 Mise en équation

a) Conductivité du milieu

Pour calculer la conductivité, exprimons le vecteur vitesse en régime forcé grâce à la loi de la quantité de mouvement appliquée à un électron du plasma :

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \iff j\omega m_e \vec{v} = -e\vec{E} \iff \vec{j} = n(-e)\vec{v} = \frac{ne^2}{j\omega m_e} \vec{E} \quad (4.2)$$

d'où une conductivité imaginaire pure $\underline{\gamma} = -j \frac{ne^2}{\omega m_e}$.

Le fait que la conductivité soit imaginaire permet d'en conclure que le champ électromagnétique ne cède pas d'énergie aux particules du plasma. En effet, la puissance volumique cédée s'exprimant $\mathcal{P}_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}$, en passant aux notations réelles il vient :

$$\mathcal{P}_{\text{vol}} = \frac{ne^2}{\omega m_e} E_0^2 \cos(\omega t - kx) \sin(\omega t - kx) \quad (4.3)$$

dont la valeur moyenne est nulle $\langle \mathcal{P}_{\text{vol}} \rangle = 0$.

b) Équation de propagation

Connaissant le vecteur densité de courant \vec{j} en fonction de la conductivité complexe, on peut exprimer les équations de Maxwell et les combiner pour obtenir l'équation sur le champ électrique :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \underline{\gamma} \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.4)$$

et l'on a toujours $\text{div } \vec{E} = 0$ et $\text{div } \vec{B} = 0$. D'où en prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{B}) \iff \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \quad (4.5)$$

conduisant avec $\text{div } \vec{E} = 0$ à :

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.6)$$

c) Relation de dispersion

Exercice

Déterminer la relation de dispersion, relation entre ω et k , dans le cas d'un plasma peu dense.

On injecte la forme d'OEMPPH dans l'équation différentielle :

$$(-j\vec{k})^2 \vec{E} = \frac{(j\omega)^2}{c^2} \vec{E} - j\mu_0 \frac{ne^2}{\omega m_e} (j\omega) \vec{E} \iff k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m_e} \quad (4.7)$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (4.8)$$

appelée **pulsation plasma** et dont on va voir prochainement sa signification. Notons un ordre de grandeur, avec $n \sim 10^{12} \text{ m}^{-3}$, on trouve $\omega_p \simeq 6 \cdot 10^7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, soit $f_p \sim 10 \text{ MHz}$ (le jour, car la nuit $f_p \sim 1 \text{ MHz}$).

La relation de dispersion obtenue n'est plus celle liée à une équation de d'Alembert, et fait plus intéressant encore, montre qu'il est indispensable de considérer k complexe. En effet, pour $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$, signe que k est dans ce cas imaginaire pur ! Voyons quel sens physique donner à une pulsation spatiale k complexe.

II. Dispersion et absorption

II.1 Sens physique des OPPH à vecteur d'onde complexe

a) Pseudo-OEMPPH

Considérons une OEMPPH se propageant dans la direction $+\vec{e}_x$, mais avec un vecteur d'onde complexe :

$$\underline{k} = k_r(\omega) + jk_i(\omega) \quad (4.9)$$

Le champ électrique prend alors la forme simplifiée suivante :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_r x - jk_i x)} = \vec{E}_0 e^{k_i x} e^{j(\omega t - k_r x)} \quad (4.10)$$

* soit encore en notations réelles sous forme simplifiée :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{k_i(\omega)x} \cos(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi_0) \quad (4.11)$$

on parle ici de pseudo-OEMPPH, d'une part car l'amplitude dépend de la position, et d'autre part car le vecteur d'onde dépend *a priori* de la pulsation ω .

b) Partie réelle et vitesse de phase

Sur l'expression du champ électrique précédent, le terme en cosinus traduit le caractère progressif de l'onde, identique à celui d'une véritable OPPH se propageant selon $+\vec{e}_x$ si $k_r > 0$, et selon $-\vec{e}_x$ si $k_r < 0$, à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} \quad (4.12)$$

Cette vitesse est celle de propagation d'un plan équiphase d'équation $\omega t - k_r x + \varphi_0 = \text{cste}$. Par rapport au cas d'une onde vérifiant une équation de d'Alembert, cette vitesse dépend *a priori* de ω , on dit dans ce cas que le milieu est **dispersif** : en effet, chaque pseudo-OEMPPH se déplace donc à une vitesse différente, ce qui aura une incidence pour la propagation de signaux physiques réels (cf. plus loin).

Notons que parfois, la dispersion des ondes n'est pas liée à la relation de dispersion, pouvant être celle de l'équation de d'Alembert, mais du fait des conditions aux limites. Nous verrons un exemple en TD.

c) Partie imaginaire

Le terme en $e^{k_i x}$ traduit suivant le signe de k_i soit un amortissement, soit plus rarement une amplification de l'amplitude de l'onde dans l'espace. La situation la plus courante est celle d'un amortissement où $k_i < 0$, on parle de milieu **absorbant**. On introduit couramment une distance caractéristique d'absorption (ou d'amplification) :

$$\delta = \frac{1}{|k_i|} \quad (4.13)$$

* | Au final, on obtient une forme d'onde dans le cas d'une absorption :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos(\omega t - k_r x + \varphi_0) = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right) + \varphi_0\right) \quad (4.14)$$

Notons que bien souvent, dans les milieux amplifiés, l'amplitude ne diverge pas car rapidement la modélisation linéaire n'est plus correcte pour de fortes amplitudes. Cela rend inopérant la recherche de solutions en pseudo-OPPH, car rappelons-le, cette technique est réservée aux EDP linéaires.

d) Indice optique

On introduit l'indice du milieu par $\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$. En décomposant $\underline{n} = n' + jn''$, il vient que

$$n' = \frac{k_r c}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi} \quad (4.15)$$

caractérise la vitesse de propagation. Si $n' = f(\omega)$, il y a dispersion, d'où l'appellation d'**indice de dispersion** pour n' . n'' traduit alors l'absorption d'une onde au passage dans le milieu.

II.2 Propagation d'un paquet d'onde dans un milieu dispersif non absorbant

a) Première approche : superposition de deux ondes planes de fréquences voisines

Afin de dégager le sens physique de la dispersion, on envisage un court instant la propagation d'une pseudo-OEMPPH dans un milieu non absorbant mais dispersif, conduisant à $\underline{k} = k_r(\omega)$. Le cas d'une seule onde progressive harmonique est, comme on l'a déjà dit, pas un modèle physique réel car toute onde réellement émise est d'extension limitée en temps et en espace. Une première approche consiste à regarder la superposition de deux ondes planes de fréquences voisines et de même amplitude, et d'observer l'effet de la dispersion :

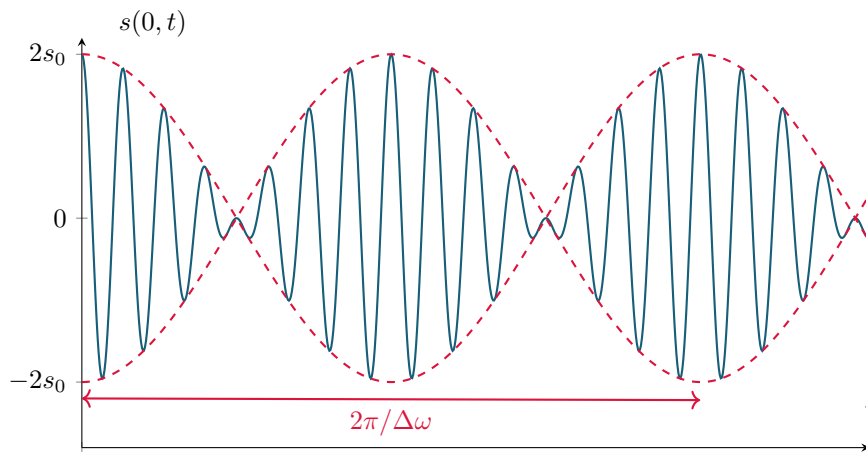
$$s_1(x, t) = s_0 \cos(\omega_1 t - k_r(\omega_1)x) \quad \text{et} \quad s_2(x, t) = s_0 \cos(\omega_2 t - k_r(\omega_2)x) \quad (4.16)$$

On introduit $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$, $\Delta k_r = |k_r(\omega_2) - k_r(\omega_1)|$, et les pulsations centrales $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $k_{r,0} = \frac{k_r(\omega_1) + k_r(\omega_2)}{2}$. On s'intéresse particulièrement au cas où $\omega_1, \omega_2 \gg \Delta\omega$ et $k_r(\omega_1), k_r(\omega_2) \gg \Delta k_r$.

La superposition de ces deux ondes conduit à :

$$s(x, t) = s_1(x, t) + s_2(x, t) = 2s_0 \cos(\omega_0 t - k_{r,0}x) \times \cos(\Delta\omega t - \Delta k_r x) \quad (4.17)$$

dont l'allure temporelle est la suivante :



On observe ici un phénomène de **battements** à la fois temporellement et spatialement formés :

- d'une onde moyenne, appelée **porteuse**, associée à la pulsation ω_0 et de module du vecteur d'onde $k_{r,0}$;
- « enveloppée » (ou modulée) par une **enveloppe** de pulsation $\Delta\omega$, de vecteur d'onde Δk_r et de période spatiale $\Delta\lambda \gg \lambda_{r,0} = \frac{2\pi}{k_{r,0}}$

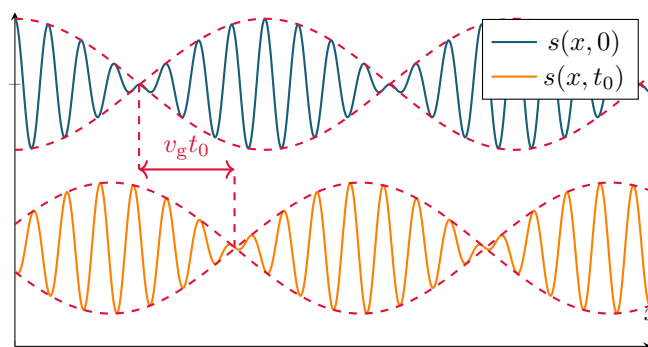


Manipulation

Simulation : <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/vitgroupe.html>

Si on regarde l'évolution spatiale à deux instants, on observe bien une propagation de l'onde, mais à des vitesses différentes :

- *
- la porteuse se propage à la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{\omega_0}{k_{r,0}}$;
 - l'enveloppe se propage à une vitesse différente appelée **vitesse de groupe** $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_r}$.



Si la relation de dispersion n'est pas linéaire, en général $v_g \neq v_\varphi$, et la simulation montre bien un déplacement

Notons enfin que la superposition de deux ondes est partiellement localisée au niveau des ventres, avec une distance caractéristique $\Delta\lambda$, et est localisée dans le temps avec un temps caractéristique $\Delta t = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$, soit encore $\Delta t \Delta f \sim 1$, relation qui va nous être utile par la suite.

b) Notion de paquet d'onde

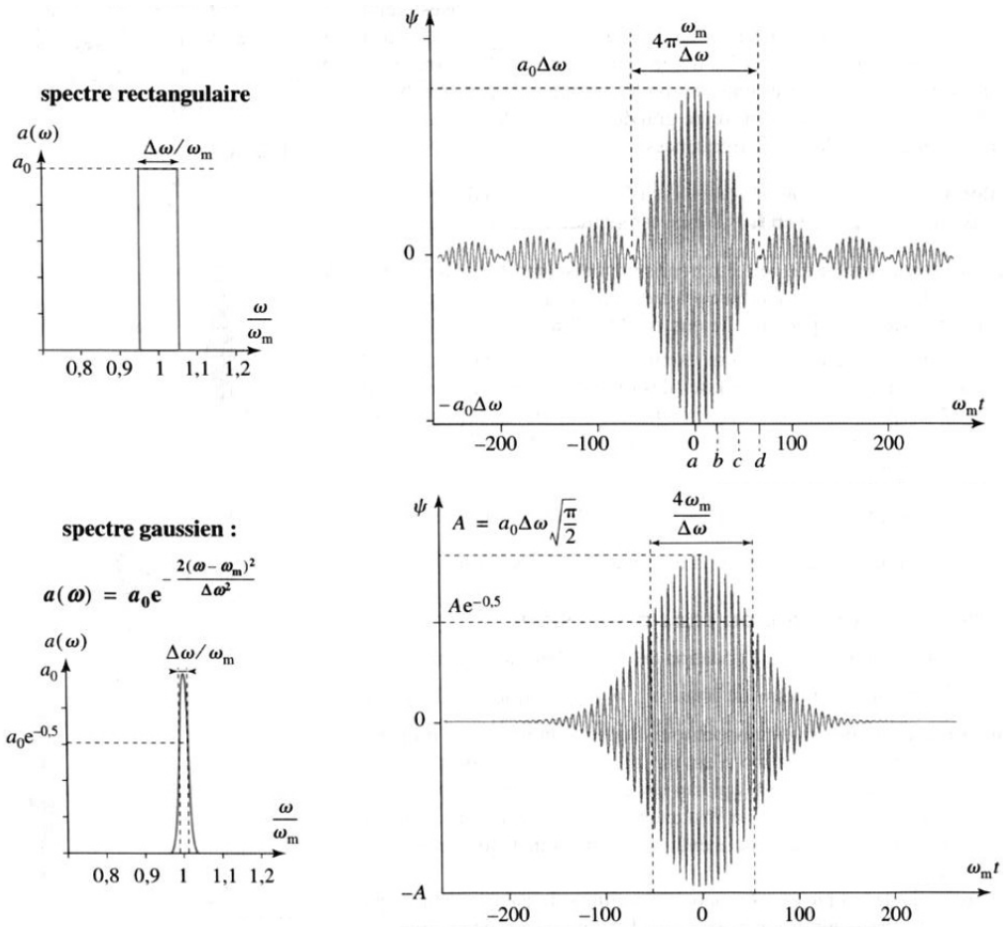
L'illustration précédente permet de définir les deux vitesses fondamentales à l'étude des ondes, mais la superposition de deux OPPH n'a toujours pas une vraie réalité physique.

On va alors introduire le **paquet d'onde**, onde plane de **durée finie** constituée d'une superposition continue d'OPPH de pulsations voisines comprises dans l'intervalle $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}; \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right]$ avec $\Delta\omega \ll \omega_0$. Il prend la forme mathématique suivante :

$$* \quad \underline{s}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega \quad (4.18)$$

avec $\underline{a}(\omega)$ l'amplitude spectrale de l'OPPH de pulsation ω . Le graphique de $|\underline{a}(\omega)|$ en fonction de ω est alors le spectre du signal. Ce paquet d'onde se présente comme une OPPH de pulsation ω_0 (et vecteur d'onde k_0) modulée par une enveloppe de **durée et d'extension spatiale finies**.

Sont présentés ci-dessous deux exemples de paquets d'ondes : l'un de spectre gaussien, avec la particularité que l'allure de l'enveloppe spatiale et temporelle sont des gaussiennes ; l'autre de spectre rectangulaire :



Propriété

La théorie de Fourier permet d'établir, pour un paquet d'onde, le lien entre la largeur spectrale $\Delta\omega$ et la largeur temporelle Δt est donné par la relation :

$$* \quad \Delta\omega \Delta t \sim 1 \quad (4.19)$$

Il en résulte que la largeur spectrale est d'autant plus grande que le signal est bref, et inversement. De même que le paquet d'onde possède une extension temporelle finie, il possède également une extension spatiale finie de l'ordre de $\Delta x \sim c\Delta t$ avec c la célérité typique des ondes.

Cela peut se comprendre qualitativement : à $t = 0$ toutes les composantes sont en phase, le signal est maximal. Progressivement, les phases des composantes de pulsation différente se décalent à l'instant t de $\varphi_{\min} = \omega_{\min}t$ et $\varphi_{\max} = \omega_{\max}t$, d'où un décalage de phase $\Delta\varphi = \Delta\omega t$. Quand $\Delta\omega t = 2\pi$, les composantes se compensent deux à deux et le signal est alors quasiment nul.

Par exemple, un signal sinusoïdal possède une étude spectrale nulle, d'où $\Delta t \Rightarrow +\infty$, ce qui est cohérent.

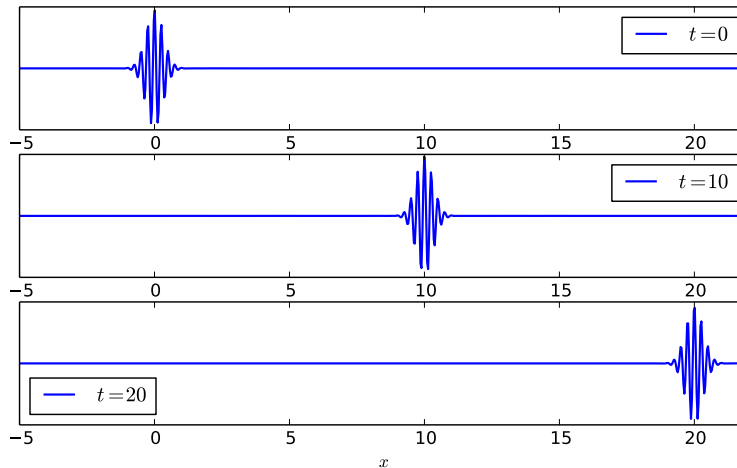
c) Effet de la dispersion



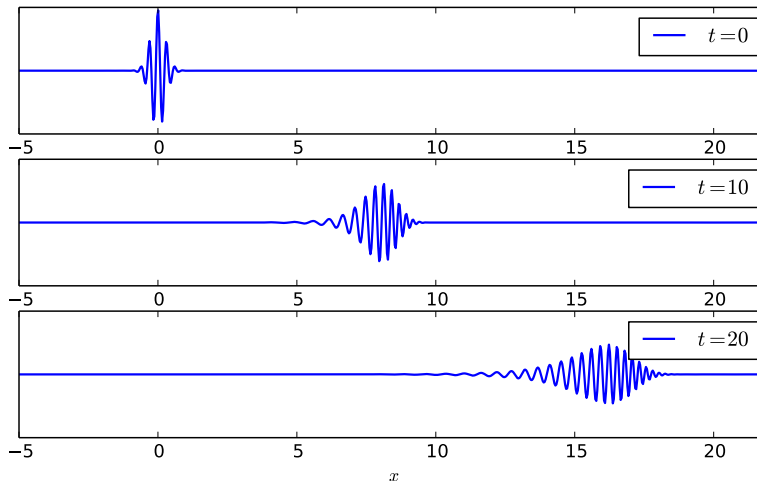
Manipulation

Simulation : <http://www.falstad.com/dispersion/> et <http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/divers/paquet.html>

Dans un milieu non dispersif, on observe une propagation en bloc du paquet d'onde, sans aucune déformation. En effet, comme la vitesse de phase est indépendante de la fréquence, toutes les composantes d'OPPH qui composent le paquet d'onde se propagent à la même vitesse et se déplacent à la vitesse de groupe qui vaut la vitesse de phase.



* Dans un milieu dispersif, comme chaque composante ne se déplace pas à la même vitesse, on observe une déformation du paquet d'onde au cours de sa propagation : en général on observe un étalement, et le paquet possède une vitesse de groupe a priori différente de celle de ces différentes composantes :



Démontrons ce résultat à partir d'un développement mathématique au premier ordre autour de la pulsation centrale ω_0 :

$$\omega = \omega_0 + (\omega - \omega_0) \quad \text{et} \quad k_r(\omega) \simeq k_r(\omega_0) + \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) = k_0 + \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (4.20)$$

On peut alors réécrire le paquet d'onde sous la forme suivante :

$$\underline{s}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \times e^{j((\omega - \omega_0)t + \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)x)} d\omega \quad (4.21)$$

$$= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{a}(\omega) e^{j(\omega - \omega_0) \left(t - \left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0} x \right)} d\omega = e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \text{Env} \left(t - \frac{x}{\left(\frac{dk_r}{d\omega} \right)_{\omega_0}} \right) \quad (4.22)$$

correspondant au produit d'une onde « moyenne » de pulsation ω_0 et d'un terme d'enveloppe se déplaçant à la vitesse de groupe :

*

$$v_g \hat{=} \left(\frac{d\omega}{dk_r} \right)_{\omega_0} \quad (4.23)$$

Notons que pour expliquer la déformation du paquet d'onde, il est nécessaire de pousser à l'ordre 2 le développement de Taylor de $k(\omega)$.

II.3 Retour sur la propagation dans un plasma

Dans un plasma, on avait obtenu la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (4.24)$$

Selon la valeur de ω , k est soit réel, soit imaginaire pur.

a) Dispersion à haute fréquence

Étudions dans un premier temps le cas où $\omega > \omega_p$. Il n'y a alors pas d'absorption, comme k est réel. Par exemple il y a de la dispersion, car la vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}} > c \quad (4.25)$$

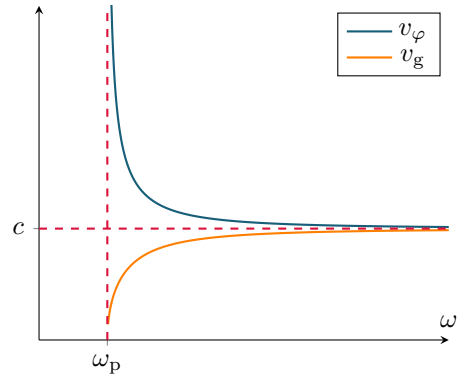
La vitesse de phase dépend donc de ω , d'où la dispersion. D'autre part, on observe qu'elle est toujours supérieure à la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide c . Cela ne pose aucun problème physique, étant donné qu'une OPPH est partout, à tout instant, et ne transmet pas d'information. Par contre la vitesse de groupe doit être inférieure à c , on l'obtient en différenciant la relation de dispersion :

*

$$2kdk = 2\omega \frac{d\omega}{c^2} \iff v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega} c^2 = \frac{c^2}{v_\varphi} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2} < c \quad (4.26)$$

On observe bien que la vitesse de groupe, qui est rappelons-le la vitesse de propagation de l'énergie, est bien toujours inférieure à c .

Dans le cas où $\omega \gg \omega_p$, le plasma se comporte comme le vide, et est non dispersif $v_\varphi = v_g \simeq c$ (le plasma « ne suit plus » les perturbations de l'onde : il n'interagit plus avec l'onde qui se propage comme si le milieu était le vide.). Cependant l'hypothèse que $\rho = 0$ n'est plus forcément vérifiée à haute fréquence.



b) Structure de l'onde

Dans le cas où $\omega > \omega_p$, les champs électriques et magnétiques s'écrivent :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi) \quad (4.27)$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{v_\varphi} \neq \frac{\vec{e}_x \wedge \vec{E}}{c} \quad (4.28)$$

*

Une OEMPPH dans un plasma possède une relation de structure similaire à celle d'une OEMPPH dans le vide, mais du fait de la dispersion, cette relation n'est valable QUE pour une OPPH de pulsation donnée.

On peut alors calculer le vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\omega \mu_0} \vec{E}_0 \wedge (\vec{e}_x \wedge \vec{E}_0) \cos^2(\omega t - k_r(\omega)x + \varphi) \implies \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} E_0^2 \vec{e}_x \neq \vec{0} \quad (4.29)$$

L'onde électromagnétique transporte bien de l'énergie dans le domaine spectral de transparence du plasma.

On peut montrer qu'à partir de la densité volumique d'énergie totale :

$$w_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}nm_e v^2 \quad (4.30)$$

en prenant en compte l'énergie cinétique des électrons mis en mouvement par l'onde, la vitesse de propagation de l'énergie vaut

$$v_e = \frac{\langle \vec{\Pi} \cdot \vec{e}_x \rangle dt dS}{\langle w_{em} S dt \rangle} = \frac{c^2}{v_\phi} = v_g \quad (4.31)$$

II.4 Cas de l'onde évanescente : absence de propagation

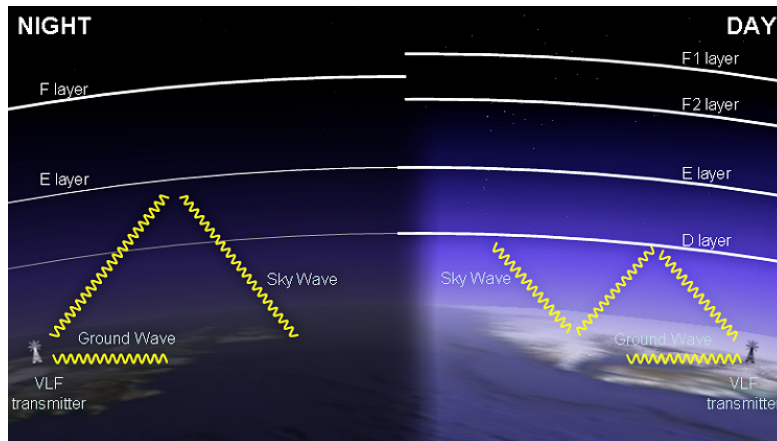
Étudions enfin le cas où $\omega < \omega_p$. Alors $k^2 < 0$ d'où $k_i = \pm \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}$, et $k_r = 0$. L'onde résultante s'écrit alors, en ne conservant que la solution physiquement acceptable (non divergente) où $k_i = -\frac{1}{\delta}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t) e^{-\frac{x}{\delta}} \quad (4.32)$$

* L'onde **ne se propage pas**, il s'agit d'une sorte d'onde stationnaire spatialement amortie. On parle d'**onde évanescente**, qui s'atténue sur une distance caractéristique δ . En calculant le vecteur de Poynting dans le plasma, on peut montrer que $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$! Cette onde évanescente ne transporte, ni ne dissipe, aucune énergie (en moyenne). L'interaction d'une OPPH arrivant sur ce type de milieu met donc en mouvement les particules du plasma qui vont donc générer une onde réfléchie, mais sans aucune perte ni transmission.

II.5 Application aux télécommunications

L'ionosphère se comporte alors comme un filtre passe-haut de fréquence de coupure $f_p \sim 1$ MHz pour les ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques. Il faut évidemment en prendre compte lors des procédés de télécommunications avec les satellites ou engins spatiaux (à haute fréquence), mais cela permet également à basse fréquence d'émettre à grande distance en utilisant la réflexion parfaite des OEMPPH sur l'ionosphère.



Ce processus a été mis en évidence par G. Marconi en 1901, qui a réalisé les premières transmissions hertziennes transatlantiques. Notons que selon l'angle d'émission ou la période d'émission (jour / nuit), l'onde peut être transmise ou réfléchie, pour une même fréquence.

III. Ondes électromagnétiques planes dans des milieux conducteurs

III.1 Présentation du modèle

On cherche à décrire la propagation d'une onde électromagnétique dans des milieux conducteurs. On a vu que le modèle de Drude nous permettait de relier le vecteur densité de courant à \vec{E} selon

$\vec{j} = \gamma \vec{E}$, où $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$, où n est la densité d'électrons libres, e la charge élémentaire, τ le temps de relaxation, interprété comme la durée moyenne entre deux collisions successives d'un électron sur les cations du réseau, et m la masse d'un électron.

On peut étendre cette notion en régime sinusoïdal forcé et l'on montre facilement à l'aide de la LQM que :

$$\underline{j} = \frac{\gamma_0}{1 + j\omega\tau} \underline{E} \quad (4.33)$$

mais comme $\frac{1}{\tau} \sim 10^{14}$ Hz, tant que l'on ne considère pas des ondes dans le domaine optique, on peut approximer $\gamma = \gamma_0$.

Comme pour le plasma, on réalise quelques hypothèses :

- on néglige la force magnétique qui s'exerce sur un électron, tant que ce dernier n'atteint pas des vitesses relativistes ;
- pour pouvoir utiliser $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$, il faut que le champ électrique soit uniforme et quasi-permanent, ce qui n'est *a priori* pas le cas. Si le champ électrique ne varie pas trop dans le temps ni l'espace entre deux collisions, la loi d'Ohm locale sera toujours valable. Il faut donc $T \gg \tau \iff f \ll \frac{1}{\tau}$ et $\lambda \gg \ell$, où ℓ est le libre parcours moyen, distance moyenne parcourue par un électron entre deux collisions.

III.2 Équation de propagation d'une OEMPPH à basse fréquence

a) Simplification des équations de Maxwell

L'équation de conservation de la charge doit être vérifiée dans le métal, ce qui impose la relation :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma_0 \text{div } \vec{E} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0} \rho \quad (4.34)$$

*

L'intégration permet d'écrire $\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau'}}$ avec $\tau' = \frac{\varepsilon_0}{\gamma_0} \simeq 10^{-18}$ s. Aux fréquences auxquelles on travaille, on a donc toujours $T \gg \tau \gg \tau'$, ce qui signifie que la relaxation de la densité volumique de charge est toujours plus rapide que ce qui lui pourrait être imposée par le champ électrique.

Propriété

En présence d'une onde électromagnétique de fréquence $f \ll \frac{1}{\tau} \sim 10^{14}$ Hz, la densité volumique de charge est uniformément et constamment nulle :

$$\rho(M, t) = 0 \quad (4.35)$$

conduisant à la simplification de l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = 0$.

D'autre part, dans l'équation de Maxwell-Ampère, on peut négliger les courants de déplacement :

$$\frac{\|\vec{j}\|}{\left\| \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{\gamma_0}{\varepsilon_0 \omega} = \frac{1}{\omega \tau'} \gg 1 \quad (4.36)$$

Donc l'équation de Maxwell-Ampère devient $\vec{\text{rot}} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}$.

b) Établissement de l'équation de propagation du champ électrique



Exercice

À partir des approximations précédentes, déterminer l'EDP vérifiée par \vec{E} dans un conducteur ohmique. On part de l'équation de Maxwell-Faraday, où on lui applique comme d'habitude l'opérateur rotationnel :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) \iff 0 - \Delta \vec{E} = -\mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \iff \Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.37)$$

On reconnaît là une équation de diffusion !

c) Relation de dispersion

Cherchons une solution sous la forme d'une pseudo-OEMPPH, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$:

$$(-j\underline{k})^2 \vec{E} = \mu_0 \gamma_0 (j\omega) \vec{E} \iff \underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega \quad (4.38)$$

On peut alors déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\underline{k} = k_r + jk_i$ de deux manières :

- soit en écrivant astucieusement le nombre complexe :

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0 \gamma_0 \omega = e^{-j\frac{\pi}{2}} \mu_0 \gamma_0 \omega \implies \underline{k} = \pm e^{-j\frac{\pi}{4}} \sqrt{\mu_0 \gamma_0 \omega} = \pm \frac{1-j}{\delta} \quad (4.39)$$

en posant $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma_0 \omega}}$ homogène à une longueur, d'où on en déduit

$$k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} \quad (4.40)$$

- soit en écrivant l'égalité entre les parties réelles et imaginaire de l'équation complexe, sachant que $\underline{k}^2 = k_r^2 - k_i^2 + 2jk_r k_i$:

$$k_r^2 - k_i^2 = 0 \quad \text{et} \quad 2k_r k_i = -\mu_0 \gamma_0 \omega \quad (4.41)$$

soit $|k_r| = |k_i| = \frac{1}{\delta}$ et comme $k_r k_i < 0$, la partie réelle et imaginaire sont de signes opposés, d'où :

$$k_r = -k_i = \pm \frac{1}{\delta} \quad (4.42)$$

III.3 Effets d'un conducteur sur la propagation d'une OEMPPH

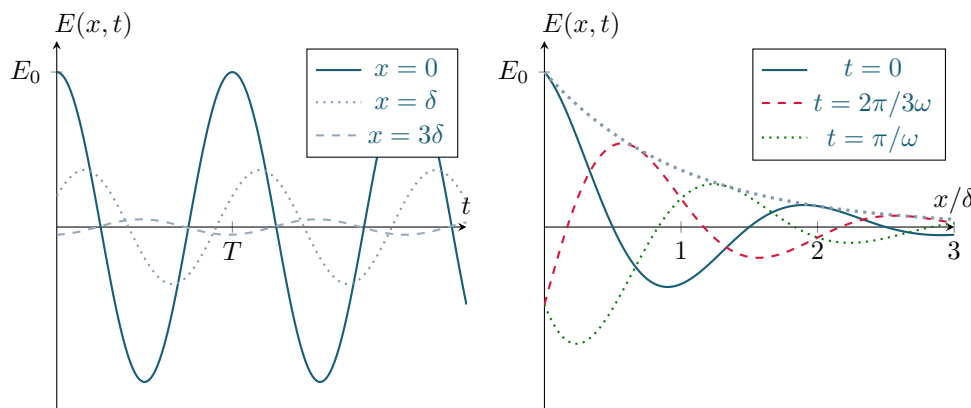
À partir de la relation de dispersion et des solutions obtenues, on peut réécrire le champ électrique résultant :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\mp \frac{x}{\delta}} e^{j\left(\omega t \mp \frac{x}{\delta}\right)} \quad (4.43)$$

La solution en exponentielle croissante diverge, on l'écarte des solutions physiques recherchées pour la propagation, le milieu n'étant pas amplificateur (pas d'apport d'énergie). Il vient donc, en repassant en réel :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi\right) \quad (4.44)$$

correspondant à de la propagation avec un terme d'atténuation (lié à l'effet Joule!).



Notons que la vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \gamma_0}} \quad (4.45)$$

Elle dépend donc de ω : un **conducteur ohmique est donc un milieu dispersif et absorbant pour des OEMPPH**.

- * La distance δ est appelée « **épaisseur de peau** », et le phénomène physique **effet de peau** : une onde électromagnétique pénètre donc dans le conducteur sur une épaisseur de l'ordre de quelques δ , en étant atténuée.

L'effet est d'autant plus visible à haute fréquence, car l'épaisseur de peau décroît avec ω . Cela a quelques conséquences :

- pour le transport électrique à $f = 50 \text{ Hz}$, des câbles en cuivre ont une épaisseur de peau de $\delta = 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$: même s'il existe des champs électriques et magnétiques dans tout le volume, ils vont se concentrer sur la périphérie, d'où l'usage de câbles creux ;
- pour l'émission d'ondes radio pour des fréquences allant jusqu'au GHz, une antenne creuse fera parfaitement l'affaire ;
- lorsqu'on utilise les phénomènes inductifs pour chauffer le fond d'une casserole, la fréquence utilisée est de l'ordre du kHz : en effet, bien que la puissance dissipée par les courants de Foucault soit proportionnelle à ω^2 , l'épaisseur de peau limite la localisation des champs et un calcul complet montre alors qu'il n'est pas pertinent d'augmenter trop la fréquence.

III.4 Aspects énergétiques

Calculons le champ magnétique à partir de l'expression du champ électrique, considéré suivant \vec{e}_y :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{1-j}{\delta\omega} \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y E_0 e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta + \varphi)} \quad (4.46)$$

soit en notant que $1-j = \sqrt{2}e^{-j\pi/4}$, il vient en repassant aux notations réelles :

$$\vec{B} = \frac{\sqrt{2}E_0}{\delta\omega} e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} + \varphi_0 - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z \quad (4.47)$$

Calculons alors la valeur moyenne du vecteur de Poynting :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\sqrt{2}E_0^2}{\delta\omega\mu_0} e^{-2x/\delta} \langle \cos(\omega t - x/\delta + \varphi) \cos(\omega t - x/\delta + \varphi - \pi/4) \rangle \vec{e}_x \quad (4.48)$$

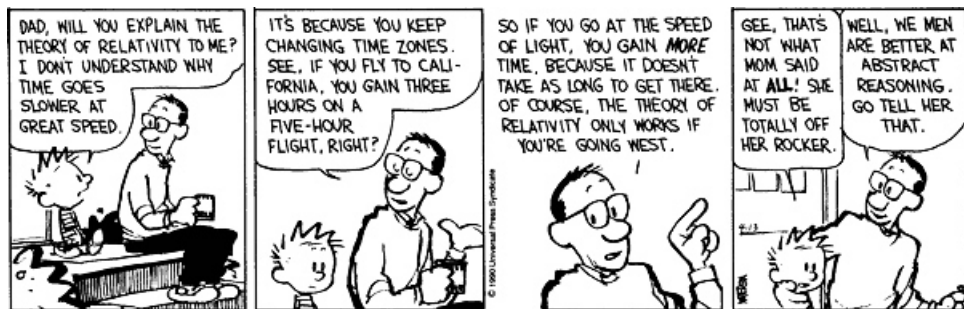
soit en développant le produit de cosinus, on montre que la valeur moyenne vaut $\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, d'où :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\delta\omega\mu_0} e^{-2x/\delta} \vec{e}_x \quad (4.49)$$

L'onde transporte donc de moins en moins d'énergie au fur et à mesure que l'on progresse dans le métal, ceci étant dû au fait que l'onde cède de l'énergie à la matière, dissipée ensuite par effet Joule.

III.5 Cas du métal parfait

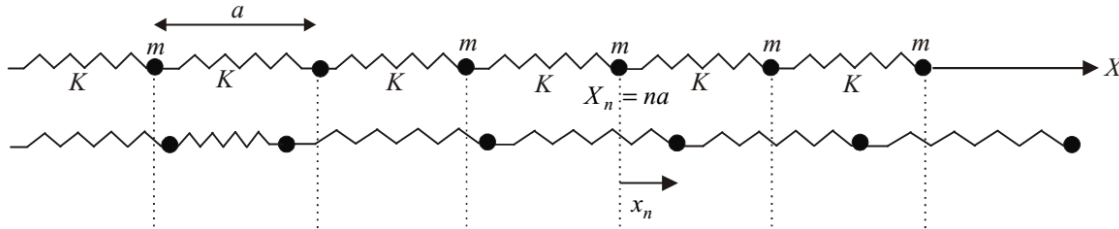
Dans le cas où le métal est parfait, on a par définition $\gamma_0 \rightarrow +\infty$. Par conséquent, dans un tel milieu l'épaisseur de peau tend vers zéro, et aucun champ électromagnétique ne peut y exister : tous les champs (\vec{E} , \vec{B} , \vec{j}) sont expulsés en surface.



Exercices

4.1 Dispersion dans une chaîne infinie d'atomes

On considère une chaîne infinie linéaire d'atomes ponctuels de masse m liés par des ressorts de raideur K . La chaîne est portée par l'axe OX ; à l'équilibre, les atomes occupent les positions $X = na$ avec $n \in \mathbb{Z}$ où a est la longueur à vide des ressorts.



1. Établir les équations différentielles régissant la position x_n de l'atome n par rapport à sa position d'équilibre.
2. On cherche des solutions sous la forme $\underline{x}_n = Ae^{i(\omega t - kX_n)}$, avec A une constante réelle. Déterminer la relation de dispersion.
Montrer que la chaîne se comporte comme un filtre passe-bas dont on calculera la pulsation de coupure ω_c . Tracer le graphe $\omega(k)$.
3. Calculer \underline{x}_n lorsque $\omega = \omega_c$. Commenter.
4. Calculer \underline{x}_n lorsque $\omega \ll \omega_c$. Commenter. Déterminer alors la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde. Montrer que l'on peut déterminer dans ce cas une équation d'onde et retrouver les résultats précédents.

-
1. Par la LQM appliquée à l'élément indicé n , on aboutit à :

$$\frac{d^2 x_n}{dt^2} = \omega_0^2 (x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (4.50)$$

en notant $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.

2. On injecte la forme de solution dans l'équation précédente :

$$-\omega^2 \underline{x}_n = \omega_0^2 (e^{-ika} - 2 + e^{+ika}) \underline{x}_n \iff \omega^2 = \omega_0^2 (2 - 2\cos(ka)) = 2\omega_0^2 (1 - \cos(ka)) \quad (4.51)$$

soit en l'écrivant sous la forme d'un carré :

$$\omega^2 = 2\omega_0^2 \times 2 \sin^2 \left(\frac{ka}{2} \right) \implies \boxed{\omega = 2\omega_0 \left| \sin \left(\frac{ka}{2} \right) \right|} \quad (4.52)$$

On note qu'il s'agit d'une relation de dispersion non linéaire, on a donc nécessairement de la dispersion. On constate également que l'on peut se limiter à $k \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a} \right]$ pour couvrir toutes les valeurs de ω (en cristallographie, on parle de « première zone de Brillouin »). Le tracé graphique (arche de sinus), conduit à une valeur maximale de fréquence de $\omega_c = 2\omega_0 = 2\sqrt{\frac{K}{m}}$. On a donc bien affaire à un filtrage passe-bas !

3. Lorsque $\omega = \omega_c$, $k = \pm \frac{\pi}{a}$, donc $\underline{x}_n = Ae^{i(\omega t \pm n\pi)}$, c'est-à-dire encore, en réel : $x_n(t) = A \cos(\omega t \pm n\pi) = \pm A \cos(\omega t)$, c'est-à-dire qu'on a un oscillateur harmonique.
4. Lorsque $\omega \ll \omega_c$, la relation de dispersion peut être approximée par $\omega \simeq \omega_c \frac{ka}{2} = \omega_0 ka$, c'est-à-dire la relation de dispersion associée à une équation de d'Alembert de célérité $\omega_0 a$. Les vitesses de phase et de groupe sont égales à $v_\varphi = v_g = \omega_0 a$. Si on reprend l'équation différentielle initiale, on peut conduire un DL en posant $x(u = na, t) = x_n$ et aboutir à :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \omega_0^2 a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \quad (4.53)$$

c'est-à-dire une équation de d'Alembert de célérité $c = \omega_0 a$.

4. 2 Corde vibrante verticale

Une corde vibrante verticale de masse linéique μ et de longueur $\ell \simeq 10$ m est suspendue par une de ses extrémités A , l'autre extrémité B étant libre. Au repos, A est fixe et la corde est verticale. Lorsqu'on impose à l'extrémité A un déplacement $x_A = a_M \cos(\omega t)$, on constate que la corde se déforme avec un déplacement $x(z, t)$ de pulsation ω dont l'amplitude augmente quand on s'éloigne de A . Le champ de pesanteur \vec{g} est supposé uniforme.

1. Établir l'expression de la tension $T(z)$ en tout point de la corde et montrer que :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (4.54)$$

2. On se place "au début" de la corde, ce qui permet de remplacer $\ell - z$ par ℓ dans le coefficient variable de l'équation précédente. Établir la relation de dispersion et interpréter l'observation.

1. On effectue la même démarche que lors de l'établissement de l'équation de propagation d'une onde transversale sur une corde, mais on prend en compte le poids, cette fois. La LQM appliquée à un élément de corde $d\ell \simeq dz$, avec $\alpha \simeq \tan \alpha = \frac{\partial x}{\partial z}$:

$$\mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x = \mu dz g \vec{e}_z + \vec{T}(z + dz) - \vec{T}(z) \quad (4.55)$$

soit en projection suivant \vec{e}_z :

$$0 = \mu g dz + T(z + dz, t) \cos \alpha(z + dz, t) - T(z, t) \cos \alpha(z, t) \simeq \mu g + \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (4.56)$$

dont l'intégration conduit à $T(z, t) = -\mu g z + f(t)$, sachant que les conditions aux limites (soit en $z = \ell$ où la tension s'annule, soit en $z = 0$ où la tension s'obtient par l'application de la loi des actions réciproques) conduit à $f(t) = \mu g \ell$ et $T(z) = \mu g(\ell - z)$. On projette ensuite selon \vec{e}_x :

$$\mu dz \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = T(z + dz) \sin \alpha(z + dz) - T(z) \sin \alpha(z) \simeq \frac{\partial}{\partial z} (T(z) \alpha(z)) dz \iff \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} (\mu g(\ell - z) \frac{\partial x}{\partial z}) \quad (4.57)$$

soit en développant la dérivée :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -g \frac{\partial x}{\partial z} + g(\ell - z) \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \quad (4.58)$$

2. Si on se place au début de la corde, en considérant $z \ll \ell$, on peut injecter une forme d'onde pour obtenir l'équation de dispersion, l'EDP étant alors linéaire :

$$-\omega^2 = -g(-jk) + g\ell(-k^2) \iff k^2 + j\frac{1}{\ell}k - \frac{\omega^2}{g\ell} = 0 \quad (4.59)$$

c'est une équation complexe, on peut calculer le discriminant $\Delta = -\frac{1}{\ell^2} + 4\frac{\omega^2}{g\ell}$. Ainsi si $\Delta > 0$, $\omega > \sqrt{\frac{g}{4\ell}}$, on a une solution complexe, sinon imaginaire pure (et donc pas de propagation). On se place donc dans ce cadre :

$$k = \frac{1}{2} \left(-j\frac{1}{\ell} \pm \sqrt{\Delta} \right) \quad (4.60)$$

soit une propagation avec amplification sur une distance caractéristique $\delta = 2\ell$, ce qui permet d'expliquer l'observation.

4. 3 Propagation d'ondes longitudinales dans un plasma

On utilise le modèle du plasma peu dense et non relativiste mais on retire l'hypothèse localement neutre. On s'intéresse à la propagation d'ondes planes progressives harmoniques, de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $\vec{k} = k \vec{e}_x$.

1. Montrer que la non neutralité du plasma permet l'existence d'ondes longitudinales. Par la suite, on étudiera exclusivement ces ondes, on posera donc $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$.
2. Déterminer le champ magnétique d'une telle onde.
3. Déterminer deux relations entre \vec{E} et \vec{j} et en déduire l'équation vérifiée par \vec{E} .
4. Déterminer la relation de dispersion et commenter.
5. Calculer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie électromagnétique. Commenter.

1. Si on reprend l'équation de Maxwell-Gauss en complexe, on a bien $\rho = -\varepsilon_0 j \vec{k} \cdot \vec{E}$. Donc un plasma localement non neutre permet l'existence d'ondes longitudinales, c'est-à-dire de direction \vec{k} .

2. On peut utiliser la relation de structure, car cette dernière est valable lorsqu'on prend une forme d'onde plane progressive harmonique, quelle que soit la direction du champ électrique. On aboutit alors à $\vec{B} = 0 = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$.

3. À partir de l'équation de Maxwell-Ampère, on a donc $\text{rot} \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$. D'autre part, la LQM appliquée à un électron conduit à :

$$m_e \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -e \vec{E} \Rightarrow \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = n_e (-e) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E} \quad (4.61)$$

On injecte alors la première équation dans la deuxième :

$$-\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{E} = \vec{0} \quad (4.62)$$

en introduisant la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}$.

4. La relation de dispersion s'écrit alors $\omega^2 = \omega_p^2$ en remplaçant le champ dans l'équation. On a donc propagation d'ondes longitudinales dans le plasma quelle que soit la longueur d'onde, pourvu que l'on ait la bonne fréquence !
5. Comme le champ magnétique est nul, le vecteur de Poynting l'est aussi. Calculons la densité volumique d'énergie électromagnétique, en tenant compte de l'énergie cinétique des électrons ($\vec{v} = +j \frac{e}{m_e \omega} \vec{E}$ avec $\omega = \omega_p$) :

$$w = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{1}{2} n_e m_e v^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega_p t - kx) + \frac{1}{2} n_e m_e \left(\frac{e}{m_e \omega_p} E_0 \sin(\omega_p t - kx) \right)^2 \quad (4.63)$$

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \left(\cos^2(\omega_p t - kx) + \sin^2(\omega_p t - kx) \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 \quad (4.64)$$

L'énergie volumique est donc constante, avec un échange complémentaire entre l'énergie volumique du champ électrique et l'énergie volumique cinétique des électrons. C'est cohérent avec un vecteur de Poynting nul, il n'y a pas de transport d'énergie.

4. 4 Guide d'onde rectangulaire

On considère un guide d'onde métallique creux d'axe Oz , dont la section droite est le rectangle $0 < x < a$ et $0 < y < b$.

L'intérieur du guide est rempli d'air assimilé au vide. On adopte pour les parois le modèle du conducteur parfait.

On se propose d'étudier la propagation suivant Oz dans ce guide d'une onde électromagnétique progressive monochromatique de pulsation ω dont le champ électrique s'écrit :

$\vec{E} = f(x, y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x$ où $f(x, y)$ est une fonction réelle de x et y et k_g une constante positive.

On posera $k_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ (λ_g est la longueur d'onde guidée) et on notera $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{\omega}{c}$

A) Structure de l'onde

- Montrer que $f(x, y)$ ne dépend pas de x .
- Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $f(y)$.
- Expliciter la fonction $f(y)$. Montrer qu'il intervient un nombre entier n non nul (supposé positif).
À chaque valeur de n correspond un mode de propagation. Décrire le type d'onde auquel on aboutit. Que laissent prévoir les conditions aux limites du champ électrique en $x = 0$ et $x = a$?
- Écrire les composantes du champ magnétique. Commenter la structure des champs. Vérifier que le champ magnétique satisfait les conditions aux limites en $y = 0$ et $y = b$? Que se passe-t-il en $x = 0$ et $x = a$?
- Exprimer k_g en fonction de ω , c , n et b . En déduire λ_g en fonction de λ_0 , b et n . Montrer qu'il existe une fréquence de coupure f_c en dessous de laquelle il n'y a plus de propagation. A.N : $f_c = 2,5$ GHz pour $n = 1$, calculer b .
- Exprimer les vitesses de phase v_φ et de groupe v_g de l'onde en fonction de c , n et du rapport f/f_c . A.N : calculer v_g et v_φ pour $f = 2f_c$ et $n = 1$.

B) Transmission de l'énergie

- Donner l'expression du vecteur de Poynting et sa valeur moyenne. Calculer la puissance moyenne transmise par une section droite.
- Calculer la valeur moyenne de la densité volumique d'énergie.

3. À l'aide des résultats précédents, en déduire la vitesse de propagation v_e de l'énergie. Comparer à v_g .

4. Que se passe-t-il si les parois du guide ont une conductivité finie ?

A) Structure de l'onde

1. À l'intérieur du guide, on a du vide, donc $\rho = 0 = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x}$, conduisant à $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, d'où $f(y)$ uniquement.

2. Dans le vide, le champ électrique vérifie l'équation de d'Alembert à 3D que l'on projette selon l'axe (Ox) :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{E} \implies -\omega^2 f(y) \cos(\omega t - k_g z) = c^2 f''(y) \cos(\omega t - k_g z) \quad (4.65)$$

soit après simplification :

$$f''(y) + \frac{\omega^2}{c^2} f(y) = 0 \iff f''(y) + k_0^2 f(y) = 0 \quad (4.66)$$

de solution $f(y) = A \cos(k_0 y) + B \sin(k_0 y)$. Comme le champ électrique voit sa composante tangentielle continue à l'interface, et que le champ électrique est nul dans le conducteur parfait, on a donc $f(0) = 0$ et $f(b) = 0$. On a donc d'une part $A = 0$ et d'autre part $\sin(k_0 b) = 0$. On peut alors introduire un entier non nul n tel que :

$$k_0 b = n\pi \iff k_n = \frac{n\pi}{b} \implies f(y) = B \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.67)$$

donc le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = E_0 \sin(k_n y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_x \quad (4.68)$$

On aboutit donc, dans des plans $z = \text{cste}$ à des ondes stationnaires, comme pour une cavité. Concernant ce qu'il se passe en $x = 0$ et $x = a$, comme le champ électrique ne s'annule pas à l'intérieur, cela permet d'envisager *via* la relation de passage qu'il y a une densité surfacique de charge non nulle.

3. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \vec{e}_z - \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{e}_y = E_0 k_n \cos(k_n y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_z - E_0 k_g \sin(k_n y) \sin(\omega t - k_g z) \vec{e}_y \quad (4.69)$$

soit après intégration temporelle (sachant que la constante d'intégration est nulle, car ne traduisant pas une onde) :

$$\vec{B} = E_0 \frac{k_g}{\omega} \sin(k_n y) \cos(\omega t - k_g z) \vec{e}_y + E_0 \frac{k_n}{\omega} \cos(k_n y) \sin(\omega t - k_g z) \vec{e}_z \quad (4.70)$$

Notons que les champs ne vérifient pas la relation de structure et ne sont pas transverses magnétiques (une composante étant selon z). La composante normale du champ magnétique est continue, et doit s'annuler sur les parois, ce que l'on observe en $y = 0$ et $y = b$, où la composante selon \vec{e}_y s'annule bien. En $x = 0$ et $x = a$, c'est pareil. Par contre on note que la composante tangentielle du champ magnétique est non nulle, signe qu'il y a un courant surfacique.

4. Les champs électriques et magnétiques doivent vérifier l'équation de d'Alembert. Si on injecte le champ électrique trouvé dans l'équation projetée selon \vec{e}_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = c^2 \Delta E_x = c^2 \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right) \implies -\omega^2 = c^2 (-k_n^2 - k_g^2) \iff k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (4.71)$$

conduisant à $k_{g,n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega} \right)^2}$. On en déduit la longueur d'onde associée :

$$\lambda_{g,n} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2b} \right)^2}} \quad (4.72)$$

Il n'y a plus de propagation à partir du moment où la racine n'est plus définie, c'est-à-dire pour $f < \frac{nc}{2b}$. Numériquement, on trouve donc $b = 6 \text{ cm}$.

5. La vitesse de phase s'exprime facilement par $v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega} \right)^2}}$. D'autre part on a la relation $v_g = \frac{c^2}{v_\varphi}$.

B) Transmission de l'énergie

1. Calcul de produit vectoriel... En moyenne, la composante selon \vec{e}_y est nulle (produit d'un cos par un sin), et seule reste la composante selon \vec{e}_z :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2 k_g}{2\mu_0 \omega} \sin^2(k_n y) \vec{e}_z \quad (4.73)$$

La puissance moyenne transmise par une section droite vaut alors :

$$\mathcal{P} = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{x} dy \vec{e}_z = \frac{E_0^2 k_g}{2\mu_0 \omega} a \int_0^b \sin^2(k_n y) dy = \frac{E_0^2 k_g a b}{4\mu_0 \omega} \quad (4.74)$$

2. La densité volumique d'énergie vaut :

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (4.75)$$

On écrit directement le développement en moyennant les \cos^2 et \sin^2 temporels :

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(k_n y) + \frac{1}{4\mu_0} \left(\frac{E_0^2 k_g^2}{\omega^2} \sin^2(k_n y) + \frac{E_0^2 k_n^2}{\omega^2} \cos^2(k_n y) \right) \quad (4.76)$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(\sin^2(k_n y) + \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \sin^2(k_n y) + \frac{c^2 k_n^2}{\omega^2} \cos^2(k_n y) \right) \quad (4.77)$$

puis en utilisant $\frac{\omega^2}{c^2} = k_g^2 + k_n^2$ obtenue précédemment :

$$\langle w \rangle = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(\sin^2(k_n y) \left(1 + \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \right) + \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \right) \cos^2(k_n y) \right) \quad (4.78)$$

$$= \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} (\sin^2(k_n y) - \cos^2(k_n y)) \right) = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 \left(1 - \frac{c^2 k_g^2}{\omega^2} \cos(2k_n y) \right) \quad (4.79)$$

3. Calculons la densité linéique d'énergie électromagnétique :

$$\iint \langle w \rangle dx dy = \frac{1}{4}\varepsilon_0 E_0^2 ab \quad (4.80)$$

que l'on compare à la puissance moyenne transmise par une section droite :

$$\mathcal{P} = \frac{k_g}{\mu_0 \omega \varepsilon_0} \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 ab = \frac{c^2}{v_\varphi} \iint \langle w \rangle dx dy \quad (4.81)$$

conduisant à $v_e = \frac{c^2}{v_\varphi} = v_g$.

4. Si les parois du guide ont une conductivité finie, les conditions aux limites édictées ne sont plus complètement vraies car on a une onde atténuée spatialement au sein du conducteur. On peut également imaginer que, du fait de la dissipation, l'onde perd en énergie lors de sa propagation selon \vec{e}_z .
Cependant l'épaisseur de peau pourra être suffisamment faible pour considérer que l'approximation de conducteur parfait est toujours valable.

Notons que cet exemple illustre un phénomène de dispersion, alors même que les champs vérifient une équation de d'Alembert !!

4. 5 Ondes hertziennes dans l'eau de mer

On étudie la propagation des ondes hertziennes dans l'eau de mer. On admet que l'eau est localement neutre ($\rho = 0$). Sa permittivité diélectrique relative $\varepsilon_r = 80$ et sa conductivité $\sigma = 6,23 \text{ S.m}^{-1}$ sont supposées réelles.

1. Quel est le domaine de fréquence des ondes hertziennes ? Comparer la conductivité du cuivre à celle de l'eau de mer.
2. On admet que dans ce milieu, il suffit de remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0 \varepsilon_r$ dans les équations de Maxwell. Déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique.
3. Établir la relation de dispersion.
4. Déterminer l'ordre de grandeur de la pulsation à laquelle l'absorption commence à être négligeable devant la propagation. Quelle est alors la vitesse de phase en absence d'absorption ?
5. On considère une onde de fréquence $f = 100 \text{ MHz}$. Déterminer la valeur de la pulsation spatiale k . Déterminer la distance caractéristique d'absorption de l'onde et sa vitesse de phase. Y a-t-il dispersion ? Pourquoi n'utilise-t-on pas d'ondes hertziennes pour les communications sous-marines ?

-
1. Autour de 100 kHz à 100 MHz (grandes ondes, FM). La conductivité de l'eau de mer est bien plus basse que celle du cuivre ($\sigma(\text{Cu}) \sim 6 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$).
 2. On a alors, en conservant le courant de déplacement car la conductivité est beaucoup plus faible que celle du cuivre, et ε_r important (on n'a donc plus $\|\vec{j}\| \gg \|\varepsilon_0\| \varepsilon_r \frac{\partial E}{\partial t}$) :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4.82)$$

3. La relation de dispersion est alors :

$$-k^2 = \frac{\varepsilon}{c^2}(-\omega^2) + j\omega\mu_0\sigma \iff k^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} - j\omega\mu_0\sigma \quad (4.83)$$

4. La relation de dispersion fait intervenir une partie réelle qui prédomine à haute fréquence (pas d'atténuation) et une partie imaginaire à plus basse fréquence ($\propto \omega$) traduisant l'atténuation. Lorsque les deux termes sont du même ordre de grandeur :

$$\varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \sim \mu_0\sigma\omega \iff \omega_c \sim \frac{\mu_0 c^2 \sigma}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (4.84)$$

On trouve numériquement $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 1,4 \text{ GHz}$. Pour $f \gg f_c$, on a alors $k^2 = \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2}$ conduisant à $v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 3,4 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

5. On peut bien évidemment conduire à une résolution numérique. Précisons néanmoins qu'il est possible d'effectuer un calcul complet ! On identifie partie réelle et partie imaginaire dans l'équation précédente :

$$\begin{cases} k_r^2 - k_i^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \\ 2k_r k_i = -\omega\mu_0\sigma \end{cases} \quad (4.85)$$

$$(4.86)$$

permettant d'en conclure que la partie réelle et la partie imaginaire sont de signe opposé. Calculons donc k_i en injectant l'expression de k_r :

$$\left(\frac{\omega\mu_0\sigma}{2k_i}\right)^2 - k_i^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.87)$$

On pose $X = k_i^2$, on aboutit à l'équation polynomiale suivante :

$$X^2 + \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} X - \frac{\omega^2 \mu_0^2 \sigma^2}{4} = 0 \quad (4.88)$$

avec $\Delta = \varepsilon_r^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 + \omega^2 \mu_0^2 \sigma^2 > 0$, d'où :

$$X = k_i^2 = -\frac{\varepsilon_r \omega^2}{2c^2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} \quad (4.89)$$

sachant que $X \geq 0$, seule la solution avec + est valide, d'où :

$$k_i = \pm \sqrt{\sqrt{\Delta}/2 - \frac{\varepsilon_r \omega^2}{2c^2}} \quad (4.90)$$

On choisit $k_i < 0$ pour avoir $k_r > 0$ (propagation dans le sens positif). Cela conduit bien à une atténuation de distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k_i|} = 21 \text{ mm}$. On connaît alors $k_r = k = \frac{\omega\mu_0\sigma}{2|k_i|} = 51,3 \text{ m}^{-1}$. Il y a dispersion car l'expression de k_i

fait intervenir ω , donc la vitesse de phase dépend de ω . $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{2k_i}{\mu_0\sigma} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Il apparaît ainsi évident qu'on n'utilise pas ce type d'ondes pour les communications sous-marines, vu leur atténuation immédiate et la dispersion.

4. 6 Propagation dans un milieu diélectrique

Une onde plane monochromatique de pulsation ω se propage suivant Ox dans un milieu neutre. Dans chaque atome du milieu, les électrons (masse m , charge $-e$, densité volumique n), sont liés au noyau supposé immobile. La force rappelant les électrons vers leur position moyenne est modélisée par une force élastique $\vec{f}_r = -K \vec{r}$. Les électrons subissent également une force de type frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$, modélisant les collisions et l'énergie perdue par rayonnement. On posera $\omega_0^2 = K/m$, $\omega_p^2 = ne^2/m\varepsilon_0$.

1. Déterminer l'équation du mouvement d'un électron et en déduire le vecteur densité de courant \vec{j}_p en fonction du champ \vec{E} de l'onde.
2. Déterminer la relation de dispersion. La simplifier dans le cas où l'absorption est négligeable, ce qu'on suppose par la suite.
3. Montrer alors qu'il n'y a pas de propagation dans une bande de pulsation à déterminer.
4. Dans le cas où la propagation est possible,

(a) Déterminer la vitesse de phase v_φ .

(b) Montrer que les vitesses de phase et de groupe sont reliées par $v_\varphi v_g = \frac{c^2}{1 + \frac{\omega_0^2 \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$

- (c) Déterminer la valeur moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle$ du vecteur de Poynting en fonction de E_0 , ε_0 , v_φ , c et \vec{e}_x .
- (d) Déterminer la valeur moyenne $\langle u_{em} \rangle$ de l'énergie électromagnétique volumique en fonction de E_0 , ε_0 , c et v_φ .
- (e) Déterminer les valeurs moyennes $\langle e_c \rangle$ et $\langle e_p \rangle$ de l'énergie cinétique volumique et de l'énergie potentielle volumique en fonction de E_0 , ε_0 , ω_p , ω_0 et ω .
- (f) Calculer l'énergie volumique moyenne $\langle u \rangle$ et en déduire la vitesse de propagation de l'énergie.

1. LQM à un électron dans le référentiel du noyau, supposé galiléen :

$$m \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} = -e\vec{E} - K\vec{r} - \alpha \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (4.91)$$

soit en passant en notations complexes pour exprimer la vitesse :

$$\underline{\vec{v}} \left(j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \right) = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}} \quad (4.92)$$

d'où le vecteur densité de courant d'électrons :

$$\underline{\vec{j}}_p = n(-e)\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2}{m(j\omega + \frac{\alpha}{m} + \frac{\omega_0^2}{j\omega})} \underline{\vec{E}} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \underline{\vec{E}} \quad (4.93)$$

en introduisant la pulsation plasma et $\tau = \frac{\alpha}{m}$ une constante de temps d'amortissement.

2. On utilise les équations de Maxwell pour aboutir à :

$$\Delta \underline{\vec{E}} = \mu_0 \frac{\partial \underline{\vec{j}}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} \Rightarrow -\underline{k}^2 = \mu_0 j\omega \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2 j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.94)$$

d'où la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}} \right) \quad (4.95)$$

Pour qu'il n'y ait pas d'absorption, il faut que $\underline{k} \in \mathbb{R}$. Il faut donc que $\frac{\omega}{\tau} \ll \omega_0^2 - \omega^2$, d'où en simplifiant :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \quad (4.96)$$

3. $k^2 > 0$ à la seule condition que $\omega_p^2 > \omega_0^2 - \omega^2 > 0$ conduisant à $\omega < \omega_0$ ou $\omega > \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ et absence de propagation dans la bande $[\omega_0; \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}]$.

4. (a) On a alors $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}}$.

(b) On différencie la relation de dispersion pour connaître la relation entre les deux vitesses :

$$2kdk = \frac{2\omega d\omega}{c^2} \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) + \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \times (2\omega d\omega) \quad (4.97)$$

conduisant après simplification à la relation demandée, avec $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

(c) On peut toujours utiliser, pour une onde plane, la relation $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$. Ainsi le vecteur de Poynting se réécrit, en développant le double produit vectoriel :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{k}{\mu_0 \omega} \vec{E}^2 \vec{u} \quad (4.98)$$

avec \vec{u} le vecteur directeur de la propagation. En moyenne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{c^2}{v_\varphi} E_0^2 \vec{u} \quad (4.99)$$

(d) De même :

$$\langle u_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_0 c^2 \frac{k^2}{\omega^2} E_0^2 = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_\varphi^2} \right) \quad (4.100)$$

(e) $e_c = n \frac{1}{2} m v^2$, soit avec $\vec{v} = -j \frac{e \omega \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$:

$$v^2 = \frac{e^2 \omega^2 E^2}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)} \Rightarrow \langle e_c \rangle = \frac{n e^2 \omega^2 E_0^2}{4 m (\omega_0^2 - \omega^2)} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{\omega^2 \omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (4.101)$$

tandis que l'énergie potentielle volumique :

$$e_p = n \times \frac{1}{2} K r^2 = n \frac{1}{2} K \left(\frac{\vec{v}}{j\omega} \right)^2 = \dots \Rightarrow \langle e_p \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \frac{\omega_p^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (4.102)$$

(f) Au total, l'énergie volumique moyenne vaut :

$$\langle u \rangle = \langle u_{\text{em}} + e_c + e_p \rangle = \frac{1}{4} \varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \frac{c^2}{v_\varphi^2} + \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 + \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \right) = \dots = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \frac{c^2}{v_g v_\varphi} \quad (4.103)$$

Puis la vitesse de propagation s'obtient en faisant le quotient :

$$\frac{\langle \|\vec{\pi}\| \rangle}{\langle u \rangle} = v_g \quad (4.104)$$

CQFD.