

Mécanique quantique
11 février 2019

cours n°4

**Particules
identiques
en mécanique
quantique**

Mécanique quantique

11 février 2019

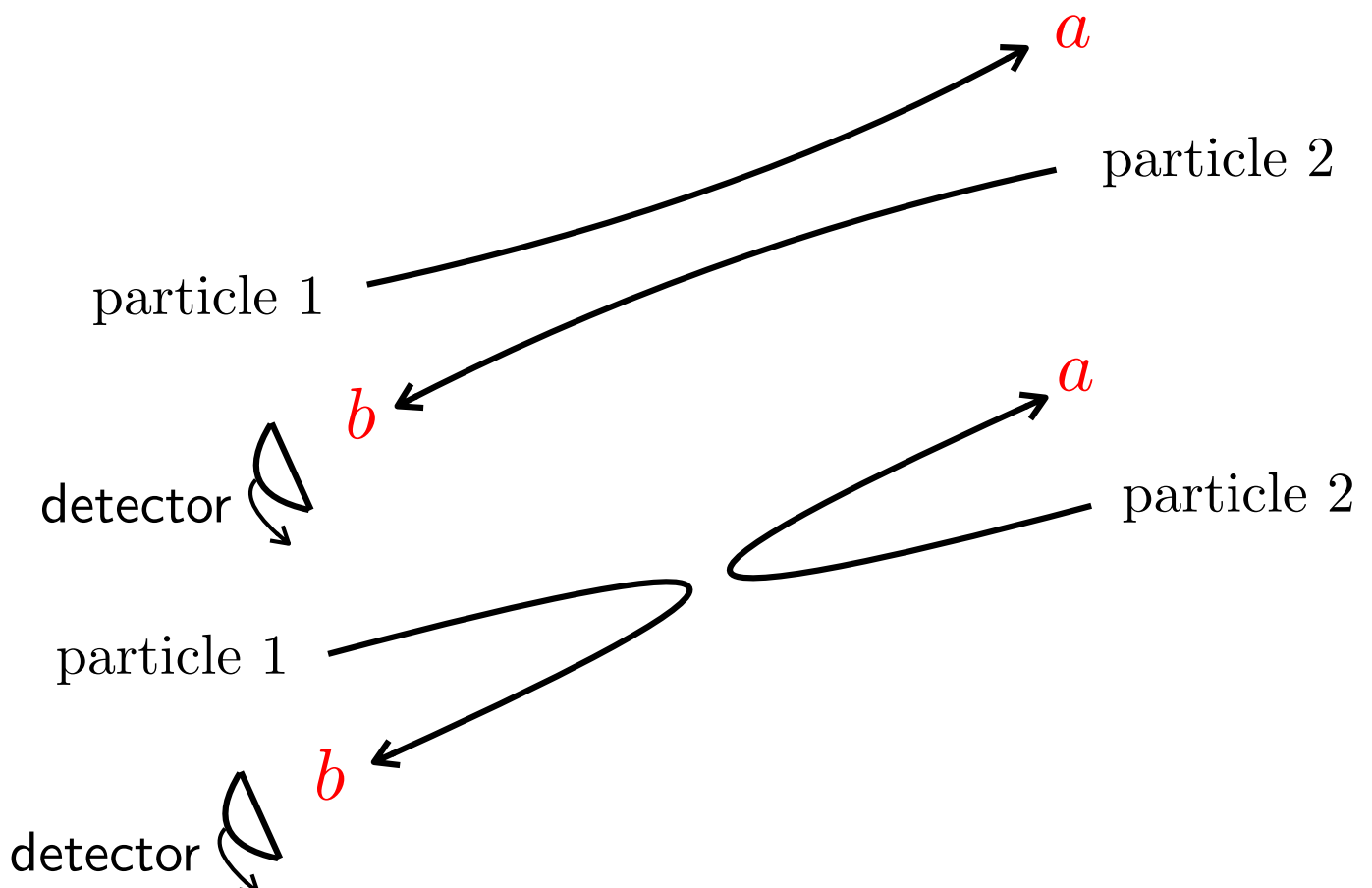
I. Problèmes liés à l'indiscernabilité en mécanique quantique

Particules identiques ou particules indiscernables ?

Particules identiques : toutes leurs propriétés physiques sont les mêmes

2 électrons, 2 protons, ...

Ce concept est valable aussi bien du point de vue classique que quantique. En mécanique classique, deux particules (même identiques) sont toujours discernables : on peut suivre la particule tout le long de sa trajectoire.



Effet HOM des photons uniques “Hong–Ou–Mandel”



VOLUME 59, NUMBER 18

PHYSICAL REVIEW LETTERS

2 NOVEMBER 1987

Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference

C. K. Hong, Z. Y. Ou, and L. Mandel

Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York 14627

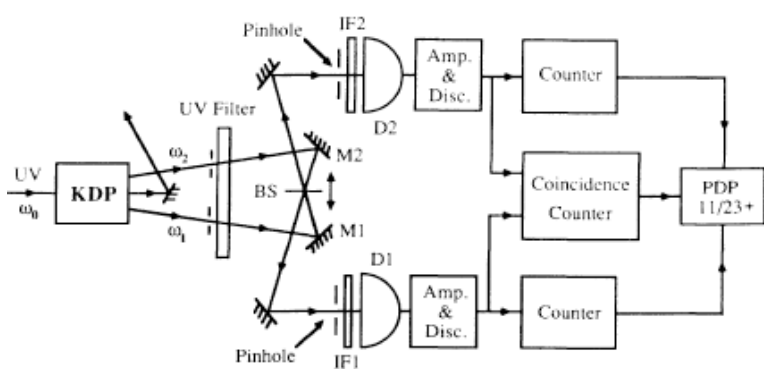
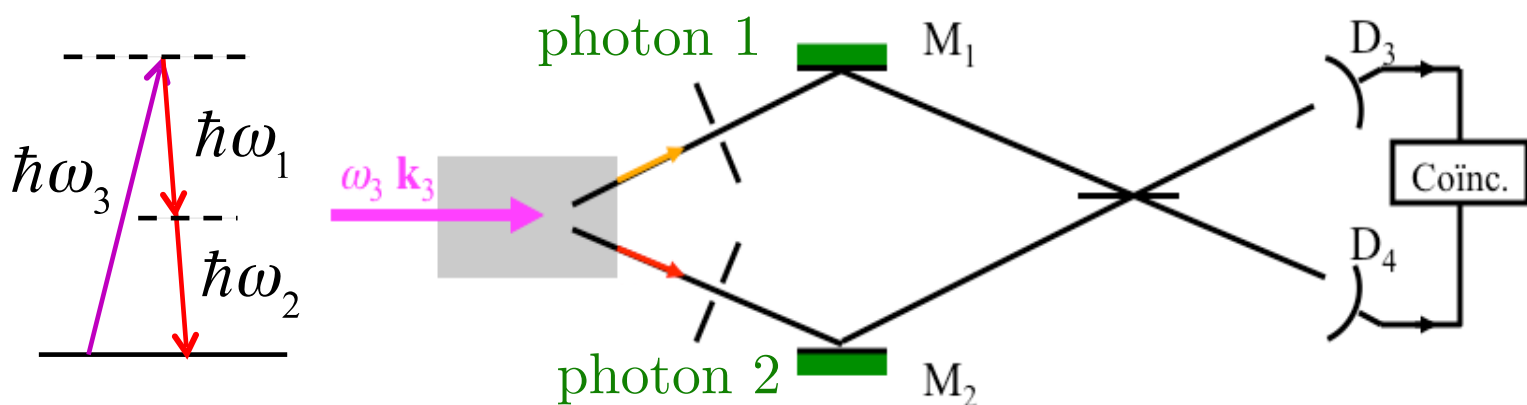
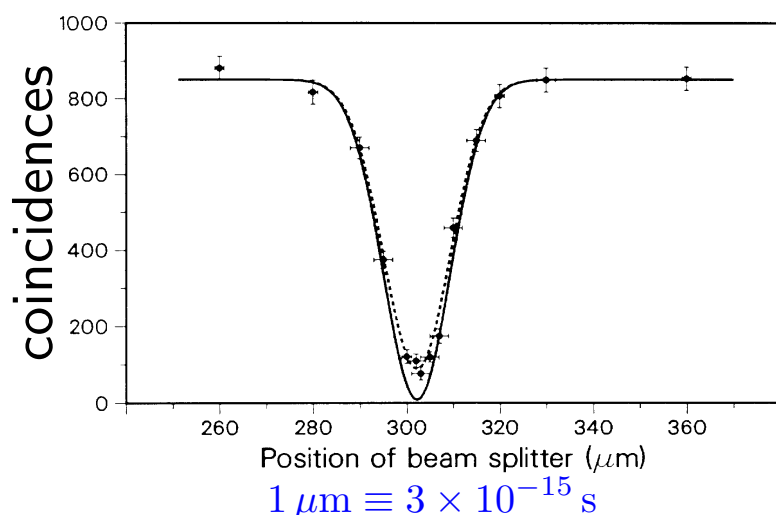
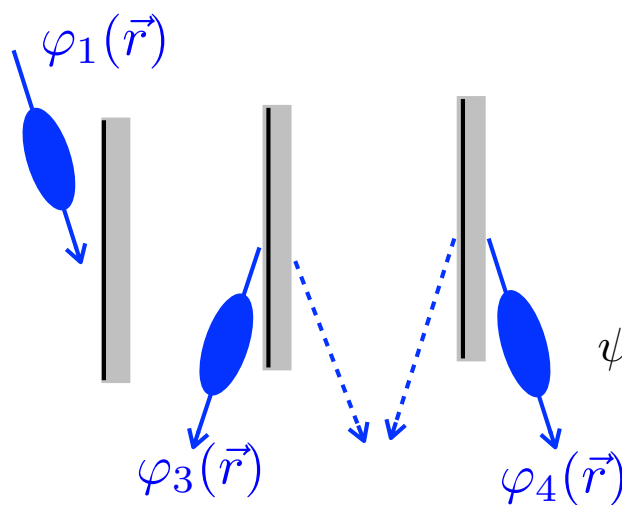
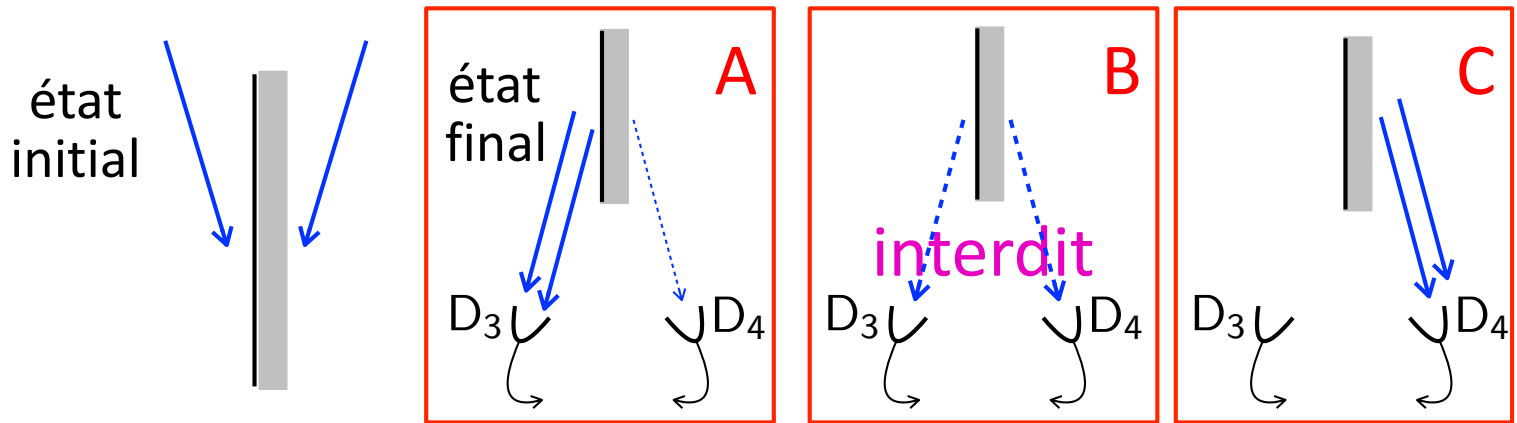


FIG. 1. Outline of the experimental setup.



Lorsque les paquets d'onde des deux photons se recouvrent, les deux photons sortent du même côté de la lame séparatrice en se dirigeant aléatoirement soit vers D_3 soit vers D_4 :
« coalescence » des photons !

HOM : un effet surprenant

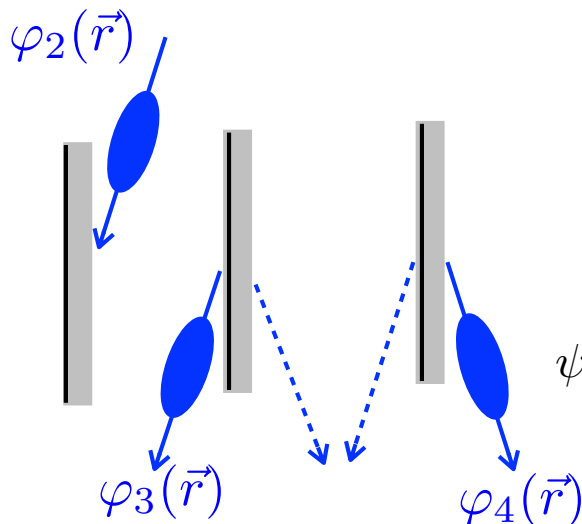


état de la particule à t_i :

$$\psi(\vec{r}, t_i) = \varphi_1(\vec{r})$$

état de la particule à t_f :

$$\psi(\vec{r}, t_f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3(\vec{r}) + \varphi_4(\vec{r}))$$



état de la particule à t_i :

$$\psi(\vec{r}, t_i) = \varphi_2(\vec{r})$$

état de la particule à t_f :

$$\psi(\vec{r}, t_f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_3(\vec{r}) - \varphi_4(\vec{r}))$$

On prépare à l'instant t_i les deux photons,
l'un dans l'état $\varphi_1(\vec{r})$, l'autre dans $\varphi_2(\vec{r})$

Comment écrire l'état initial des deux photons ?

Quel est l'état final du système ?

Mécanique quantique

11 février 2019

II. Principe de Pauli



The Nobel Prize in Physics 1945 was awarded to Wolfgang Pauli "for the discovery of the Exclusion Principle, also called the Pauli Principle."

Principe de Pauli

Toutes les particules de la nature appartiennent à l'une ou l'autre des deux classes suivantes :

- Les **bosons** pour lesquels le vecteur d'état de 2 particules identiques est symétrique par échange de deux de ces particules

→ état produit de la forme $|1; \Phi\rangle \otimes |2; \Phi\rangle$

→ si on considère des états orthogonaux à une particule $|\alpha\rangle$ et $|\beta\rangle$

seule la combinaison **symétrique** de ces états est possible :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha; \beta\rangle + |\beta; \alpha\rangle)$$

- Les **fermions** pour lesquels le vecteur d'état de 2 particules identiques est anti-symétrique par échange de deux de ces particules. Les seuls états possibles sont alors des combinaisons anti-symétriques du type :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\alpha; \beta\rangle - |\beta; \alpha\rangle)$$

Deux fermions identiques (sans interactions) ne peuvent donc pas être dans le même état quantique. C'est pourquoi on parle de principe « d'exclusion » pour ce comportement.

Boson/Fermions et spin

Toutes les particules de **spin entier**
sont des **bosons**

ex : **mésons π , photons**

Toutes les particules de **spin demi-entier**
sont des **fermions**

ex : **électrons, neutrinos, protons, neutrons**

Justification fournie par Pauli (1940) à partir
d'arguments qui mélangent la théorie quantique
des champs et la relativité.

Feynman : “It appears to be one of the few places
in physics where there is a rule which can be
stated very simply, but for which no one has
found a simple and easy explanation.

The explanation is deep down in relativistic
quantum mechanics that we do not have a
complete understanding of the fundamental
principles involved.”

Particules élémentaires et particules composées

Pour des particules composées, le théorème reste valable si l'énergie en jeu est suffisamment basse pour ne pas “casser” ces particules

proton, neutron (3 quarks) : fermions

atome d'hydrogène : boson

atome ^4He (2 protons, 2 neutrons) : boson

atome ^3He (2 protons, 1 neutron) : fermion

Quizz : que peut-on dire de l'atome ^7Li ($Z=3$) ?

Exercice : formuler la règle “boson ou fermion”
en fonction du nombre de neutrons $N=A-Z$

Evolution hamiltonienne

\hat{H} : hamiltonian à N particules identiques

Par exemple :
$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x_i^2$$

Toutes les particules jouent le même rôle dans \hat{H}
sinon elles ne seraient plus identiques !

On montrera qu'un vecteur d'état $|\Psi\rangle$
conserve cette propriété au cours de l'évolution
conserve cette propriété au cours de l'évolution avec \hat{H}

$$i\hbar \frac{d|\Psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\Psi\rangle$$

Cas des bosons : N particules

base des états à une particule : $\{|\psi_a\rangle, |\psi_b\rangle, |\psi_c\rangle, \dots\}$

on numérote les particules : $1, 2, \dots, N$

Situation particulière : les N particules dans le même état ψ_a

$$|\Psi\rangle = |1 : \psi_a\rangle \otimes |2 : \psi_a\rangle \otimes \dots \otimes |N : \psi_a\rangle$$

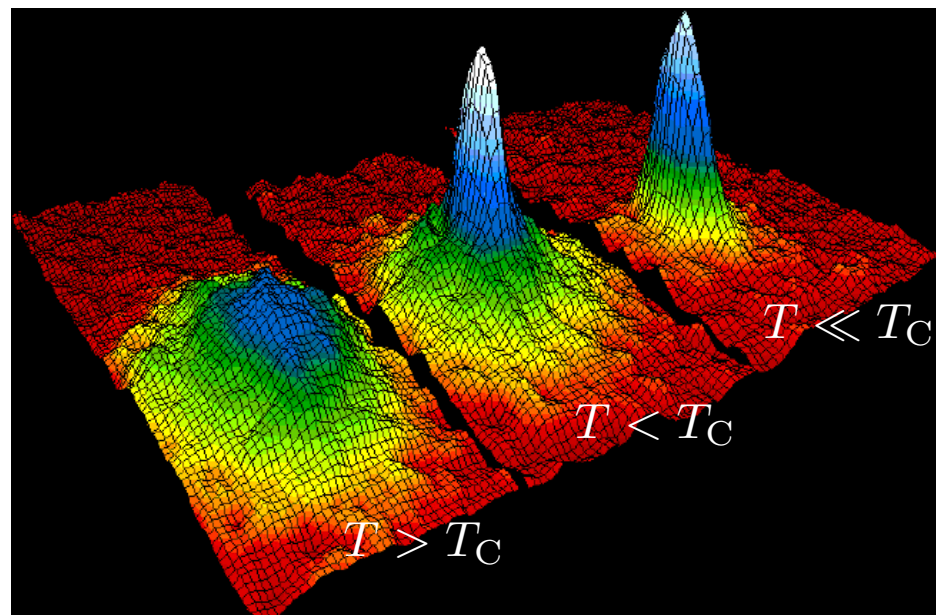
$$\rightarrow \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \psi_a(\vec{r}_1) \times \psi_a(\vec{r}_2) \times \dots \times \psi_a(\vec{r}_N)$$

nombre N macroscopique d'atomes décrits **tous** par la **même** fonction d'onde à 3 dimensions d'extension spatiale macroscopique

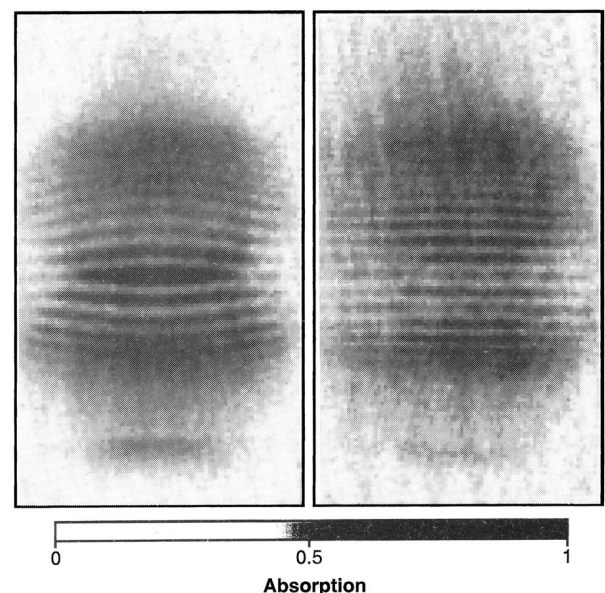
→ propriétés quantiques à l'échelle macroscopique

Condensats de Bose-Einstein

à suffisamment basse température, environ 10^6 atomes accumulés dans l'état fondamental d'un piège harmonique



Un condensat est séparé en deux parties qui se recombinent sous l'effet de la gravité. Les interférences montrent la cohérence des fonctions d'ondes macroscopiques créées par le condensat de départ.



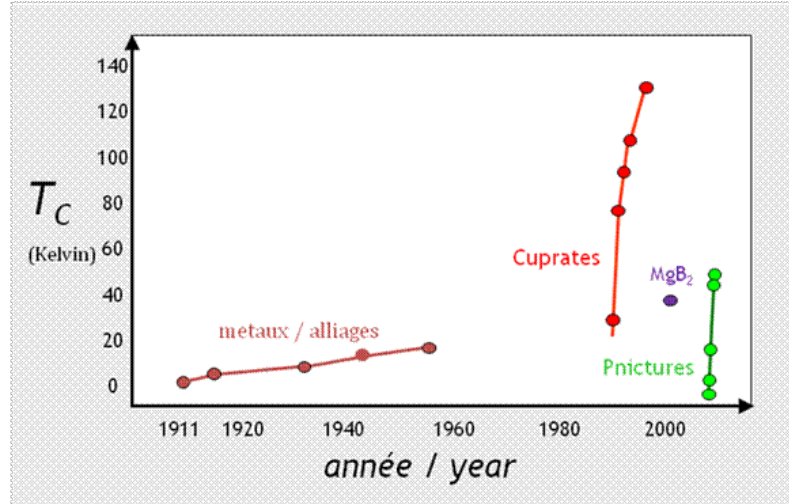
Manifestations macroscopiques en matière condensée

<http://www.supraconductivite.fr/fr/index.php>

Supraconductivité

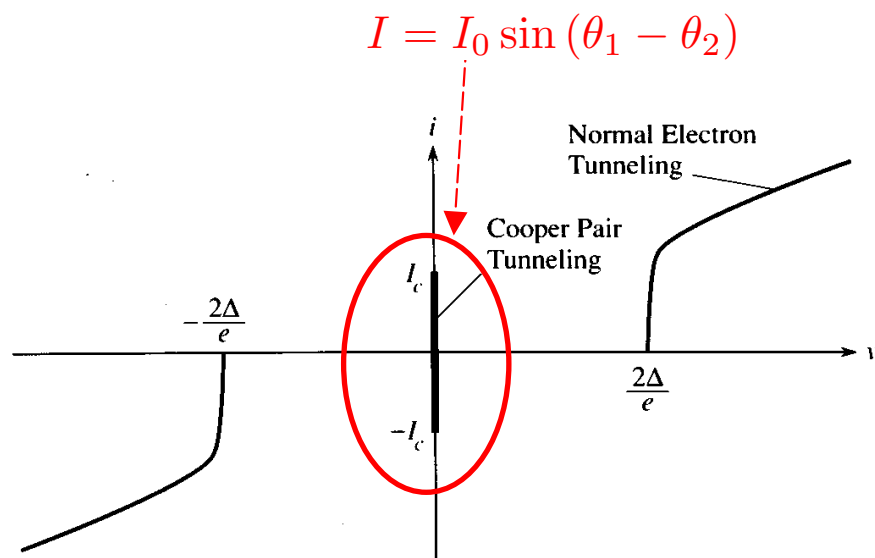
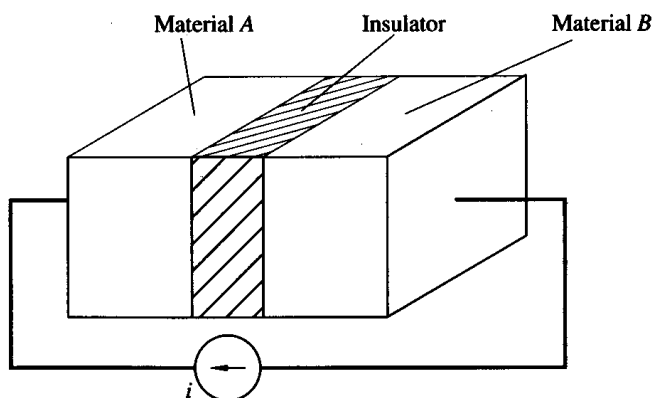
certaines métaux ont une résistivité nulle à suffisamment basse température

LaH_{10} : $T_C \simeq 260 \text{ K}$ à 188 GPa



Théorie BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) : formation de paires d'électrons qui constituent ensuite une fonction d'onde macroscopique

Effet Josephson



Superfluidité de ^4He

Lasers: émission stimulée

= amplification "bosonique"