Effet gyroscopique

Louis Heitz et Vincent Brémaud

Sommaire

Introduction

Définition de l'effet gyroscopique d'après Wikipédia :
L'essentiel du dispositif est une lourde roue dont la masse est reportée à la périphérie dénommée tore (ou tout objet ayant une symétrie cylindrique) tournant à grande vitesse sur son axe. Celle-ci, une fois lancée, tend à résister aux changements de son orientation. Quand on l'y contraint, le gyroscope réagit de façon paradoxale : en se déplaçant non pas dans la direction de la force qu'il subit comme on s'y attend mais dans une direction perpendiculaire.

I Rappels de cinématique du solide

Les champs de vitesse et de moments d'un solide sont équiprojectifs, ils vérifient la relation de Varignon (BABAR), dans un référentiel R :

$$\vec{v_B} = \vec{v_A} + \vec{BA} \times \vec{\Omega}$$

On appelle **moment d'inertie par rapport à l'axe** Δ la grandeur définie par :

$$I_\Delta = \sum_{\alpha=1}^{N} m_\alpha d_\alpha^2$$

Moment cinétique et tenseur d'inertie :
Le moment cinétique d'un solide par rapport à l'un de ses points C peut s'exprimer comme la somme de deux termes :

$$\vec{L}_C^{\text{transl}} = M_{tot}\, \vec{CG} \times \vec{v_C}$$

Ce moment est nul pour $C = G$, et un moment cinétique de rotation :

$$\vec{L}_C^{\text{rot}} = I_C\, \vec{\omega}$$

Avec I_C la matrice d'inertie.
On peut écrire cette relation sous la forme $\vec{L}_C^{\text{rot}} = \lambda\, \vec{\omega}$ si ω est un vecteur propre du tenseur d'inertie, on appelle l'axe défini par ce vecteur propre et passant par C **un axe principal d'inertie du solide au point C.**

Théorème de Huygens pour un axe Δ de direction $\vec{u}$, $I_\Delta = \sum I_{C,ij} u_i u_j$:

$$I_\Delta = I_{\Delta_G} + Md^2$$

Avec Δ_G un axe parallèle à Δ passant par G et d la distance entre les axes.

II Étude du gyroscope

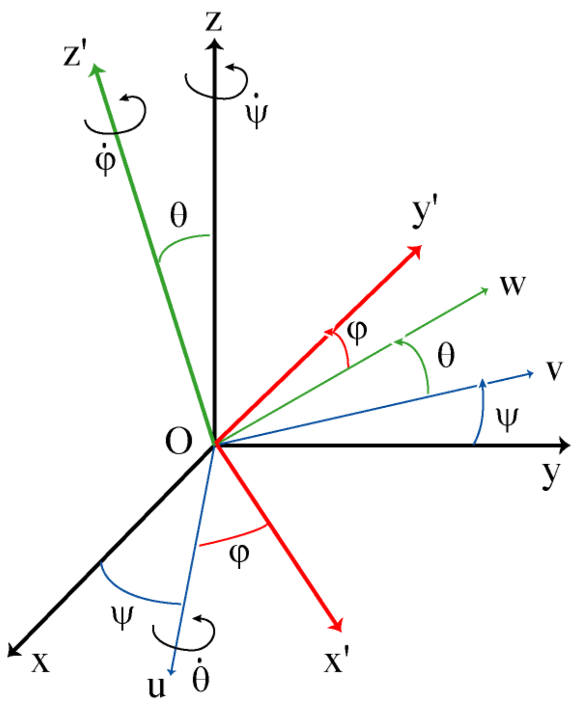

Figure 1 – Angles d'Euler

On considère une toupie symétrique de révolution autour de Oz', les angles d'Euler permettent de passer du référentiel terrestre Galiléen $R = (O;x;y;z)$ à $R = (O;x';y';z')$. La vitesse de rotation de R' par rapport à R est alors :

$$\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\phi}\ \vec{e_{z'}} + \dot{\theta}\ \vec{e_u} + \dot{\psi}\ \vec{e_z}$$

Résolution :
-On exprime cette vitesse de rotation uniquement avec les vecteurs de R'.
-Dans la base de R', $[I]_G = diag(I, I, I'_z)$ par symétrie de révolution. Cette expression est encore valable dans $R_i = (O;u;v;z')$ pour les mêmes raisons.
-On calcule $\vec{\Omega}_{R_i/R}$ dans la base de R_i. Puis on réexprime $\vec{\Omega}_{R'/R}$ dans la base de R_i.
-Ensuite il faut appliquer le théorème du moment cinétique au point fixe dans R, le point de contact du gyroscope ou de la toupie O.
Montrons que $\vec{L}_O = \vec{L}^*$ de deux manières différentes :
En utilisant le premier théorème de Koenig :

$$\vec{L}_O = \vec{OG} \times m\vec{v_{G/R}} + \vec{L}^* = \vec{L}^*$$

à revoir

$$\vec{L}^* = I_G\,\vec{\Omega}_{R'/R}$$

Puis on écrit un changement de repère de dérivation pour $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$ de R à R_i, le moment du poids vaut $lmg\sin(\theta)$ selon $\vec{e_u}$.
On aboutit au système d'équation suivant en exprimant l'ensemble dans la base de R_i :

$$\begin{cases} 0 &= I\ddot{\theta} + (I_{z'} - I)\dot{\psi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + I_{z'}\dot{\phi}\dot{\psi}\sin(\theta) - lmg\sin(\theta) \\ 0 &= I\ddot{\psi} + (2I - I_{z'})\dot{\theta}\dot{\psi}\cos(\theta) - I_{z'}\dot{\theta}\dot{\phi} \\ 0 &= \ddot{\psi}\cos(\theta) - \dot{\theta}\dot{\psi}\sin(\theta) + \ddot{\phi} \end{cases}$$

On effectue l'approximation gyroscopique, $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}, I_{z'}\dot{\phi} \gg I\dot{\theta}, I_{z'}\dot{\phi} \gg I\dot{\psi}$, les équations deviennent :

$$\begin{cases} 0 &= I_{z'}\dot{\phi}\dot{\psi}\sin(\theta) - lmg\sin(\theta) \\ 0 &= -I_{z'}\dot{\theta}\dot{\phi} \\ 0 &= \ddot{\phi} \end{cases}$$

D'où :

$$\dot{\phi} = C \ \text{ et } \ \dot{\theta} = 0$$

$$\boxed{\dot{\psi} = \frac{mgl}{I_{z'}\dot{\phi}}}$$

On obtient un mouvement de précession $\dot{\psi}$ de la toupie qui tourne sur elle même à $\dot{\phi}$. L'angle de nutation θ est constant.

On peut se démontrer ce résultat plus rapidement en supposant que $\vec{\Omega}_{R'/R} = \dot{\phi}\vec{e_{z'}}$:
Le moment cinétique en O s'écrit simplement : $\vec{\sigma_O} = I_{z'}\dot{\phi}\vec{e_{z'}}$
On écrit un changement de repère de dérivation de R à R_i, il vient :

$$\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt}|_R = \frac{d\vec{\sigma_O}}{dt}|_{Ri} + \vec{\Omega}_{R_i/R} \times \vec{\sigma_O} = I_{z'}\ddot{\phi}\vec{e_{z'}} + (\dot{\theta}\vec{e_u} + \dot{\psi}\vec{e_z}) \times \vec{\sigma_O} = \vec{M}_{\text{ext}}$$

Le premier terme indique que l'on peut modifier la vitesse de rotation de la toupie avec un moment selon $\vec{e_{z'}}$. Si on considère que ce terme est nul pour simplifier, ainsi que $\dot{\theta} = 0$, on a :

$$\frac{d\vec{\sigma_O}}{dt}|_R = \dot{\psi}\vec{e_z} \times \vec{\sigma_O} =$$

Il s'agit d'un mouvement de précession, en effet selon l'axe $\vec{e_z}$ On reconnaît l'équation d'un mouvement de précession, ici on a utilisé le fait que le moment du poids est selon $\vec{e_u}$ et qu'on a alors $\dot{\phi} = C$ et $\dot{\theta} = 0$

avec la projection sur les deux autres vecteurs.
On peut montrer la conservation du moment cinétique en O, et enfin en appliquant le TMC sur le dernier vecteur on déduit la vitesse de précession $\dot{\psi}$.

III Applications