Acoustique

Jean-Baptiste Manneville

Prépa Agreg ENS Paris-Saclay 2020-2021

Contents

Chapter 1

Equations fondamentales de l'acoustique

1.1 Milieux continus

1.1.1 Approximation des milieux continus, points de vue de Lagrange et d'Euler, dérivée particulaire

- Notion de **particule fluide** : échelles micro/méso/macro-scopiques. Approximation des milieux continus = on se place à l'échelle mésoscopique et on considère un volume dV (le volume total du sysytème fluide est alors $V = \iiint_{Syst} \mathrm{d}V$). Les systèmes sont ouverts ($n(t) \neq cte$), non stationnaires ($\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$) et hors équilibre (flux $\overrightarrow{j}(t) \neq \overrightarrow{0}$).

- Points de vue d'Euler et de Lagrange

Lagrange: on suit une particule fluide au cours du temps

$\overrightarrow{r_p}(t) \Rightarrow$ vitesse $\overrightarrow{v_p}(t)$, pression $P_P(t)$, masse volumique $\rho_P(t)$

Euler: à un instant t donné, on considère la vitesse moyennée sur le volume dV de la particule fluide située au point $M(x,y,z)$ (notée $\langle\overrightarrow{v}\rangle_{\mathrm{d}V\ x,y,z}$) et les champs de vitesse $\overrightarrow{v}(x,y,z,t) = \overrightarrow{v}(\overrightarrow{r},t) = \langle\overrightarrow{v}\rangle_{\mathrm{d}V\ x,y,z}$, de pression $P(\overrightarrow{r},t)$ et de masse volumique $\rho(\overrightarrow{r},t)$.

- Dérivée particulaire et théorème de transport :

- Dérivée particulaire (ou convective) : pour toute grandeur d'Euler (scalaire ou vectorielle) $f(\overrightarrow{r},t)$, la dérivée particulaire de f est sa dérivée totale par rapport au temps

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right) f$. Pour une grandeur vectorielle $\overrightarrow{F}(\vec{r},t)$, en notation tensorielle, on a : $\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} + \left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{F}\right)\overrightarrow{v}$ où $\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{F}\right)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \partial_j F_i$ est le **tenseur gradient** de $\overrightarrow{F}$ $\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{F}\right) = \begin{bmatrix} \partial_x F_x & \partial_y F_x & \partial_z F_x \\ \partial_x F_y & \partial_y F_y & \partial_z F_y \\ \partial_x F_z & \partial_y F_z & \partial_z F_z \end{bmatrix}$ ou bien $\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{F}\right)_{ij} = \partial_j F_i$.

- Théorème de transport de Reynolds :

La dérivée particulaire de l'intégrale de volume d'une quantité **scalaire** F est :

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{Vol(t)} F\mathrm{d}V = \int_{Vol(t)} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} + (\mathrm{div}\vec{v})\, F\right] \mathrm{d}V$

La dérivée particulaire de l'intégrale de volume d'une quantité **vectorielle** $\overrightarrow{F}$ est :
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{Vol(t)}\overrightarrow{F}\mathrm{d}V = \int_{Vol(t)}\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}t} + (\mathrm{div}\vec{v})\,\overrightarrow{F}\right]\mathrm{d}V$

Remarque : expression en notation tensorielle : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{Vol(t)}\overrightarrow{F}\mathrm{d}V = \int_{Vol(t)}\left[\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial t} + \mathrm{div}(\overrightarrow{F}\otimes\vec{v})\right]\mathrm{d}V$ (où $(\overrightarrow{u}\otimes\vec{v})$ dénote le produit tensoriel de deux vecteurs $(\overrightarrow{u}\otimes\vec{v})_{ij} = u_i v_j$ et la divergence d'un tenseur d'ordre deux $\overline{\overline{T}} = (T_{ij})$ est un vecteur tel que $\left.\mathrm{div}\overline{\overline{T}}\right)_i = \sum\limits_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} = \sum\limits_j \partial_j T_{ij}$).

Applications:

$F = 1$: interprétation de la divergence de la vitesse, $\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{1}{\delta V}\frac{\mathrm{d}\delta V}{dt}$(où δV est le volume de la particule fluide)

$F = \rho$: conservation de la masse (voir ci-dessous 1.1.2)

$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{p}$: conservation de la quantité de mouvement, équation de Navier Stokes (voir ci-dessous 1.1.4 et 1.1.5)

Autres exemples : voir cours sur les phénomènes de transport

1.1.2 Conservation de la masse

Equation de conservation de la masse : $\frac{\mathrm{d}\rho}{dt} + \rho(\mathrm{div}\overrightarrow{v}) = 0$ ou $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\overrightarrow{v}) = 0$

Conséquences :

- **Incompressibilité** : $\rho =$ cte, indépendante du temps $\Rightarrow \mathrm{div}(\overrightarrow{v}) = 0$ et le volume de la particule fluide reste constant.

- Autre version du théorème de transport dans le cas où la masse est conservée : $\frac{d}{dt}\int_{Vol(t)}\rho\overrightarrow{Q}\mathrm{d}V = \int_{Vol(t)}\rho\frac{d\overrightarrow{Q}}{dt}\mathrm{d}V$

1.1.3 Cinématique : tenseur des taux de déformations

- Tenseur gradient des vitesses

Le **taux de déformation** est défini par : $\overrightarrow{\delta v} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\delta M})$ où $\overrightarrow{\delta M}$ est le **champ de déplacement** du milieu continu (petit vecteur transporté par la trajectoire, $\overrightarrow{\delta M} = \overrightarrow{OM}(t) - \overrightarrow{OM_0}(t) = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0})(t)$).

Si $\left|\delta\vec{M}\right|$est petit (hypothèse des petites déformations), le taux de déformation et le champ de déplacement sont liés par une relation linéaire : $\overrightarrow{\delta v} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{\delta M}) = \overline{\overline{\delta v}}\overrightarrow{\delta M}$, où le tenseur $\overline{\overline{\delta v}}$est le **tenseur gradient des vitesses** : $\overline{\overline{\delta v}} = \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{v}$ et $\overline{\overline{\delta v}})_{ij} = (\overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{v})_{ij} = \partial_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

- Tenseur des taux de déformations

Le tenseur gradient des vitesses $\overline{\overline{\delta v}}$ se décompose en une partie **antisymétrique** (rotationnelle) $\overline{\overline{\Omega}}$ et une partie **symétrique** (irrotationelle) $\overline{\overline{S}}$ appelée **tenseur des taux de déformation**, avec $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ et $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.

Le tenseur des taux de déformations $\overline{\overline{S}}$ se décompose en une partie de trace nulle $\overline{\overline{D}}$ (**déviateur** de divergence nulle, correspondant aux déformations sans changement de volume) et une partie de trace non nulle $\overline{\overline{V}}$ (divergence non nulle, correspondant aux déformations avec changement de volume) : $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{D}}+\overline{\overline{V}}$ avec $D_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\overline{\overline{S}}\delta_{ij}$ ($\mathrm{Tr}\overline{\overline{D}} = 0$) et $V_{ij} = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\overline{\overline{S}}\delta_{ij}$ ($\mathrm{Tr}\overline{\overline{V}} = \mathrm{Tr}\overline{\overline{S}} = \mathrm{div}\,\vec{v}$)).

Récapitulatif : $\overline{\overline{\delta v}} = \overline{\overline{\mathrm{grad}}}\,\vec{v} = \overline{\overline{\Omega}} + \overline{\overline{S}} = \overline{\overline{\Omega}} + \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{V}}$ correspond à $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v_2} + \vec{v_3}$ où

$\overline{\overline{\Omega}}$ correspond aux déformations liées à $\vec{v}_1$telle que $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et $\mathrm{div}\,\vec{v}_1 = 0$ (déformations rotationelles et incompressibles).

$\overline{\overline{D}}$ correspond aux déformations liées à $\vec{v}_2$telle que $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}_2 = \vec{0}$ et $\mathrm{div}\,\vec{v}_2 = 0$ (déformations irrotationnelles et incompressibles = potentielles : $\vec{v}_2 = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi$).

$\overline{\overline{V}}$ correspond aux déformations liées à $\vec{v}_3$telle que $\overrightarrow{rot}\,\vec{v}_3 = \vec{0}$ et $\mathrm{div}\,\vec{v}_3 \neq 0$ (irrotationnelles et compressibles = **acoustique**).

1.1.4 Dynamique : tenseur des contraintes

- Définition

- Il existe une relation linéaire entre la force $\overrightarrow{dF}$ exercée sur un élément de surface $\overrightarrow{dS}$ (force de surface) et l'élement de surface $\overrightarrow{dS}$: $\overrightarrow{dF} = \overline{\overline{T}}\overrightarrow{dS}$ où $\overline{\overline{T}}$est le **tenseur des contraintes**.

- Le tenseur des contraintes $\overline{\overline{T}}$ se décompose en une **partie isotrope** $-p\overline{\overline{I}}$ où p est la **pression**, et une partie **non istrope** $\overline{\overline{T'}}$appelée **tenseur des efforts visqueux** : $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{T'}}$.

- Conservation de la quantité de mouvement

- Théorème de transport pour la quantité de mouvement : conservation de la masse d'une particule de fluide de volume $Vol(t) = \delta V$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{\delta V}\rho\vec{v}\mathrm{d}V = \int_{\delta V}\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}}\mathrm{d}V$

- Bilan des forces : force **volumique** extérieure (densité volumique f) et **surfacique** $\overrightarrow{dF} = \overline{\overline{T}}\overrightarrow{dS}$

$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \vec{f} + \mathrm{div}\overline{\overline{T}}$ avec $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{T'}}$

$\Rightarrow \rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \vec{f} - \overrightarrow{grad}\,p + \mathrm{div}\overline{\overline{T'}}$

(dérivée particulaire : $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}$)

1.1.5 Equation de Navier-Stokes

- Fluide newtonien

Le fluide est **newtonien** si il existe une **relation linéaire** entre le tenseur des efforts visqueux et le tenseur des taux de déformation : $\overline{\overline{T'}} = 2\eta\overline{\overline{S}} + \epsilon'(\mathrm{Tr}\overline{\overline{S}})\overline{\overline{I}} = 2\eta\overline{\overline{D}} + \xi(\mathrm{Tr}\overline{\overline{S}})\overline{\overline{I}}$où η est la **viscosité dynamique** (viscosité de cisaillement) et ξ est la **seconde viscosité** (viscosité de volume). On rappelle que le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{S}}$ (partie symétrique du tenseur gradient des vitesses) se décompose en une partie de trace nulle $\overline{\overline{D}}$ (**déviateur** de divergence nulle) et une partie de trace non nulle $\overline{\overline{V}}$ (divergence non nulle) : $\overline{\overline{S}}=\overline{\overline{D}}+\overline{\overline{V}}$ (voir §1.1.3).

Conséquence : $\mathrm{div}\overline{\overline{T'}} = \eta\triangle\vec{v} + (\xi + \frac{\eta}{3})\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{v})$

Equation de Navier-Stokes : $\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \overrightarrow{grad}\,p + \eta\triangle\vec{v} + (\xi + \frac{\eta}{3})\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{v})$

ou bien $\rho\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}\right] = \vec{f} - \overrightarrow{grad}\,p + (\frac{4}{3}\eta + \xi)\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{v}) - \eta\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v})$

η est la viscosité dynamique, $\nu = \eta/\rho$est la viscosité cinématique

- Cas particuliers

Fluide **incompressible** : $\rho = \text{cte}$, $\text{div}\overrightarrow{v} = 0$ et $\rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{grad}\,p + \eta\triangle\overrightarrow{v}$

Sans force extérieure : $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$ (cas de l'**acoustique**, cf ci-dessous)

Fluide **parfait** : pas d'effort visqueux $\Rightarrow \rho\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{f} - \overrightarrow{grad}\,p$

Fluide parfait sans force extérieure : **équation d'Euler** $\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \left(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{\text{grad}}\right)\overrightarrow{v} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}}\,p}{\rho}$

1.2 Equations de l'acoustique linéaire

1.2.1 Equations entre grandeurs acoustiques : pression, vitesse, densité

- Grandeurs acoustiques

Trois champs (point de vue d'Euler) : pression $p(\overrightarrow{x},t)$, vitesse du fluide $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)$, densité du fluide $\rho(\overrightarrow{x},t)$.

- Hypothèses de l'acoustique

- Fluide **sans viscosité** (grand nombre de Reynolds $\text{Re} = \frac{vL}{\upsilon} = \frac{\rho vL}{\eta} \to \infty$)

- Pas de force extérieure (forces de gravité négligeables devant forces de pression)

- Pas de vitesse d'ensemble du fluide

- Transformations **adabatiques** (temps courts devant le temps de propagation de la chaleur)

- **Equation d'Euler** : $\rho\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + \rho(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{grad}p$

Cas **irrotationnel** : $(\overrightarrow{v}.\overrightarrow{grad})\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\,v^2 - \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{grad}\,v^2$ si l'écoulement est irrotationnel ($\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ il existe un **potentiel des vitesses** Φ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$).

- **Conservation de la masse** : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\overrightarrow{v}) = 0$
- **Equation d'état** : fluide barotrope : $p = f(\rho)$

- Cas **isotherme** : $T = \text{cte}$, $\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M} = \text{cte}$

- Cas **adiabatique** (isentropique, **fluide parfait** = adiabatique + sans viscosité) : $S = \text{cte}$, $\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cte}$ où $\gamma = \frac{\chi_T}{\chi_S} = \frac{-1/V\ \partial V/\partial p)_T}{-1/V\ \partial V/\partial p)_S} = \frac{C_P}{C_V}$ est le coefficient de Laplace. Pour un gaz parfait monoatomique, $\gamma = 5/3$. Pour un gaz parfait diatomique (air), $\gamma = 7/5 = 1.4$.

$\Rightarrow$ L'équation d'Euler, l'équation de conservation de la masse et l'équation d'état forment un **système de trois équations non linéaires couplées** vérifiées par les trois grandeurs $p(\overrightarrow{x},t)$, $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t)$, et $\rho(\overrightarrow{x},t)$.

1.2.2 Equations linéarisées

- Linéarisation

On suppose des **petites variations** des grandeurs acoustiques autour de leurs valeurs moyennes.

- Pression : $p(\overrightarrow{x},t) = p_0 + p'(\overrightarrow{x},t)$ où p_0 est la pression ambiante et $p'(\overrightarrow{x},t)$ est la **surpression acoustique**.

- Vitesse : $\overrightarrow{v}(\overrightarrow{x},t) = \overrightarrow{v}_0 + \overrightarrow{v}'(\overrightarrow{x},t) = \overrightarrow{v}'(\overrightarrow{x},t)$ car le fluide est **au repos** au premier ordre (la vitesse de l'écoulement $\overrightarrow{v}_0 = \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$)

- Densité : $\rho(\overrightarrow{x},t) = \rho_0 + \rho'(\overrightarrow{x},t)$

- Equations linéarisées

- Equation d'Euler linéarisée : $\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}'}{\partial t} = -\overrightarrow{grad} p'$

- Conservation de la masse linéarisée : $\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \mathrm{div} \overrightarrow{v}' = 0$

- Equation d'état linéarisée : $p' = p - p_0 = c^2 \rho'$ où $c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$

La vitesse c sera identifée à la **vitesse de propagation** des ondes (cf. 1.3). En introduisant la compressibilité $\chi = \frac{1}{\rho_0} \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0}$, on a $c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi}$.

Conséquences : l'équation d'Euler linéarisée peut se réécrire $\rho_0 \frac{\partial \overrightarrow{v}'}{\partial t} = -c^2 \overrightarrow{grad} \rho'$ et l'équation de conservation de la masse peut se réécrire $c^2 \frac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 \mathrm{div} \overrightarrow{v}' = 0$

- Degré de non linéarité d'un fluide

- Au deuxième ordre, l'équation d'état s'écrit : $p' = p - p_0 = A \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{B}{2} \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2$ et le rapport B/A est appelé **degré de non linéarité** du fluide.

- Cas des **gaz parfaits** :

isotherme (iso-T) $\Rightarrow p(\rho) = \frac{RT}{M}\rho$, $\chi_T = 1/P$ et $c = \sqrt{\frac{RT}{M}}$ (et au deuxième ordre $B = 0$).

adiabatique (iso-S) $\Rightarrow p(\rho) = \mathrm{cte}\, \rho^\gamma$, $\chi_S = 1/\gamma P$ et $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, et au deuxième ordre : $p' = p - p_0 = c^2 \rho' + \frac{(\gamma-1)c^2}{2\rho_0} \rho'^2$ donc le degré de non linéarité d'un gaz parfait adiabatique est $B/A = \gamma - 1$.

1.2.3 Ordres de grandeur et validité des hypothèses

- Vitesse de propagation du son **dans l'air**

Hypothèses : l'intensité du son est faible ($p' \ll p_0$); l'écoulement est adiabatique (temps courts devant le temps de diffusion de la chaleur, donc $\delta Q = 0$); l'air est considéré comme un gaz parfait diatomique $\gamma = 7/5 = 1.4 \Rightarrow c_{air} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \simeq 331.6 + 0.6 \times \theta(°\mathrm{C})$ m/s (340 m/s à 20°C).

- Faibles vitesse d'écoulement u d'ensemble du fluide i.e. $u \ll c$ et $\mathcal{M} = u/c \ll 1$ (où $\mathcal{M}$ est le **nombre de Mach**), condition équivalente à la condition de faible compressibilité vérifiée en acoustique linéaire car $\rho \simeq \rho_0 = \mathrm{cte}$ ($\left(\frac{u}{c}\right)^2 \simeq \frac{\Delta\rho}{\rho} \ll 1$).

- Force de gravité négligeable : $\rho \overrightarrow{g} \ll \overrightarrow{grad}\, p \Rightarrow \frac{p}{c^2} g \ll \frac{p}{\lambda} \Rightarrow$ distance typique $\lambda \ll \frac{c^2}{g} \simeq 10^4$ m.
- Propagation du son **dans l'eau** : $c_{eau} = 1/\sqrt{\rho\chi} \simeq 1400$ m/s à 0°C (ondes de compression, pas de cisaillement).
- Propagation du son **dans un solide** : ondes longitudinales (ondes P) $c_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$ et ondes transverses (ondes S) $c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}}$ où E est le **module d'Young** et ν est le **coefficient de Poisson** du solide.
- Grands nombres de Reynolds $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$: pour $L = 1$ m, $Re \simeq 10^7$ dans l'air et $Re \simeq 10^9$ dans l'eau.

1.3 Equation des ondes acoustiques

Pour simplifier les notations, on utilise dans la suite $p, \overrightarrow{v}$, et ρ à la place de $p', \overrightarrow{v}$', et ρ'.

1.3.1 Equation de d'Alembert, vitesse de propagation des ondes

- Equation d'onde

En prenant la divergence de l'équation d'Euler linéarisée, en dérivant l'équation de conservation de la masse linéarisée par rapport au temps et en utilisant l'équation d'état linéarisée, on obtient **l'équation des ondes acoustiques (équation de d'Alembert)** vérifiée par les trois grandeurs acoustiques $X = p, \overrightarrow{v}$, ou ρ :

$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - c^2 \mathrm{div}(\overrightarrow{grad}\, X) = 0$,

ou bien $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - c^2 \triangle X = 0$ où $\triangle . = \mathrm{div}(\overrightarrow{grad} .)$ est l'opérateur Laplacien,

ou encore $\square X = 0$ où $\square . = (\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}).$ est l'opérateur d'Alembertien.

L'équation d'onde est **invariante par renversement du temps** ($t \mapsto -t$).

- **Vitesse de propagation** : c telle que $c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\rho_0} = \frac{p}{\rho}$
- **Potentiel des vitesses** : d'après l'équation d'Euler linéarisée, l'écoulement est **irrotationnel** ($\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$) alors il existe Φ tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\Phi$. Φ est le **potentiel des vitesses** et vérifie aussi l'équation d'onde $\square\Phi = 0$. L'équation d'Euler s'ecrit: $p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$.

1.3.2 Impédance, énergie et intensité acoustiques

- Impédance acoustique

- Définition : $Z(\overrightarrow{x}, t) = \frac{p(\overrightarrow{x}, t)}{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}}$ (unité : le rayleigh 1 rayl = 1 kg.m^{-2}.s^{-1}).

- Hypothèse de **réaction localisée** (ou réaction locale) à une interface : l'impédance $Z(\overrightarrow{x}, t)$ est indépendante du point considéré, ne dépend pas de $\overrightarrow{x}$ (dans le cas d'une onde plane monochromatique, l'impédance ne dépend que de la fréquence $Z(\omega)$ voir §2.1.3) et il n'y a pas d'onde de surface à l'interface. A l'inverse, on parle de **réaction étendue** si $Z(\overrightarrow{x}, t)$ dépend de $\overrightarrow{x}$ et il y a alors apparition d'ondes de surface à l'interface. Par exemple, à l'interface avec un mur infini et rigide ou bien à l'extrémité d'un tuyau bouché, $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = v_n = 0$ et $Z = \infty$.

- Energie acoustique

- Densité volumique d'énergie : $w = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2}$ = énergie cinétique volumique E_c+ énergie potentielle volumique E_p (travail des forces de pression).

- Bilan énergétique : $\frac{d}{dt}\int_{Vol} w \mathrm{d}V = -\int_S p\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S = \mathcal{P}_{ext\to\mathcal{S}} = -\mathcal{P}_{\mathcal{S}\to ext}$, où $\mathcal{P}_{ext\to S}$ est la puissance des forces de pression exercées par l'extérieur sur la surface S et $\mathcal{P}_{S\to ext} = \int_S p\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S = \mathcal{P}_\mathrm{f}$ est la **puissance rayonnée**, c'est-à-dire la puissance des forces de pression exercées par S sur l'extérieur (le flux de

- Remarque : en écriture tensorielle, la conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire le cas général : $\frac{\partial}{\partial t}\rho\overrightarrow{v} = \overrightarrow{f} - \mathrm{div}\overline{\overline{\Pi}}$, avec $\overline{\overline{\Pi}} = \rho\overrightarrow{v}\otimes\overrightarrow{v} - \overline{\overline{T}}$ où $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{T'}}$ est le tenseur des contraintes et $\overline{\overline{T'}}$ est le tenseur des efforts visqueux (voir § 1.1.4). Dans le cas particulier de l'acoustique où $\overline{\overline{T'}} = 0$ et $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{0}$, et sans source acoustique, on a $\frac{\partial}{\partial t}\rho\overrightarrow{v} + \mathrm{div}\overline{\overline{\Pi}} = \overrightarrow{0}$ avec $\overline{\overline{\Pi}} = \rho\overrightarrow{v}\otimes\overrightarrow{v} + p\overline{\overline{I}}$. Le tenseur $-\overline{\overline{\Pi}}$ est appelé tenseur des contraintes effectives ou tenseur de radiation et il est lié à la notion de **pression de radiation** ou tension de radiation (effets mécaniques du second ordre induits par transfert de quantité de mouvement dans la direction de propagation de l'onde). Sa valeur moyenne $\left\langle\overline{\overline{\Pi}}\right\rangle$ est nulle à l'ordre 1, mais non nulle à l'ordre 2 (donc non linéaire) et est appelée pression de radiation.

- Intensité acoustique, puissance des forces de pression, conservation de l'énergie

- L'**intensité acoustique** est définie comme la puissance des forces de pression par unité de surface : $\overrightarrow{I} = p\overrightarrow{v}$ (en W.m^{-2}). Le vecteur $\overrightarrow{I}$ est aussi appelé vecteur de Poynting acoustique.

- La **puissance des forces de pression** est : $\mathcal{P}_\mathrm{f} = \int_S p\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S = \int_S \overrightarrow{I}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S$ = flux de $\overrightarrow{I}$ à travers S (puissance rayonnée à travers S)

- Conservation de l'énergie (sans source acoustique) :

Loi globale de conservation de l'énergie dans un volume V : $\mathcal{P}_\mathrm{f} + \frac{d}{dt}\int_V w\mathrm{d}V = 0$

Loi locale de conservation de l'énergie : $\frac{\partial w}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overrightarrow{I} = 0$ où $w = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2} = E_c + E_p$, soit $\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathcal{P}_\mathrm{f}$ ($\overrightarrow{I}$ représente la puissance acoustique transportée par l'onde dans sa direction de propagation par unité de surface).

- Conservation de l'énergie (avec sources acoustiques) :

S'il existe des sources q dans le volume V, alors l'équation de conservation de la masse s'écrit : $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho_0\mathrm{div}\overrightarrow{v} = \rho_0 q$ et la conservation locale de l'énergie devient $\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{sources}$, où la puissance due aux sources est $\mathcal{P}_\mathrm{sources} = \int_V pq\mathrm{d}V$. Si il y a en plus de la dissipation la conservation locale de l'énergie s'écrit : $\frac{\partial w}{\partial t} = -\mathcal{P}_\mathrm{f} + \mathcal{P}_\mathrm{sources} - \mathcal{P}_\text{dissipée}$.

1.3.3 Mesures acoustiques et niveaux sonores

- Pression efficace : $P_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T} p^2(t')\mathrm{d}t'}$ (en Pa) (où $p = p_0 + p'$ est ici la pression réelle)

Niveau sonore en terme de **pression efficace** (SPL = sound pressure level) : $L_P = 20\log_{10}\left(\frac{P_{eff}}{P_{ref}}\right)$ (en dB SPL) où $P_{ref} = 2.10^{-5}$ Pa dans l'air (seuil limite d'audition à 1000 Hz) et $P_{ref} = 0.1$ Pa dans l'eau.

- Intensité moyenne : $\bar{I} = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(t')v(t')\mathrm{d}t'$ (où p et $\overrightarrow{v}$ sont la puissance et la vitesse réelles)

Niveau sonore en terme d'**intensité acoustique** (SIL = sound intensity level) : $L_I = 10\log_{10}\left(\frac{\bar{I}}{I_{ref}}\right)$ (en dB SIL) où $I_{ref} = P_{ref}v_{ref} = \frac{P_{ref}^2}{\rho_0 c} = 10^{-12}\mathrm{W.m}^{-2}$ dans l'air (voir 2.1 ci-dessous) et $I_{ref} = 0.71 \times 10^{-8}\mathrm{W.m}^{-2}$

- Puissance : $W = \mathcal{P}_\mathrm{f} = \int_S \overrightarrow{I}.\overrightarrow{n}\mathrm{d}S$

Niveau sonore en terme de **puissance** (SWL = sound power level) : $L_W = 10\log_{10}\left(\frac{W}{W_{ref}}\right)$ (en dB SWL) où $W_{ref} = 10^{-12}$ W = 1 pW dans l'air

1.3.4 Ordres de grandeur

- Seuil d'**audibilité** dans l'air : $P_{ref} = 2.10^{-5}$ Pa, $L_P = 0$ dB SPL, correspond un déplacement du tympan de l'ordre de 0.3×10^{-10} m

- Seuil de **douleur** : $L_P = 120 - 130$ dB SPL

- Exemples d'intensités du son

- Maximum de **sensibilité** de l'oreille humaine = 1-5 kHz, réponse en fréquence de l'oreille, courbes isosoniques.

- 1 dB correspond à l'**écart perceptible** entre deux sons

- Si l'intensité double, le niveau sonore en terme d'intensité acoustique gagne **+3 dB**

- Si $L_P > 70 - 100$ dB SPL, **réflexe stapédien** = atténuation des sons par changement d'impédance dû une augmentation de rigidité des osselets (- 15 dB) (voir 2.1.4)

Chapter 2

Ondes acoustiques

2.1 Ondes planes

2.1.1 Définition

- Cas 1D

L'équation d'onde à 1D s'écrit $\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$ soit $\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)p = 0$. En effectuant le changement de variables $u_1 = t - x/c$ et $u_2 = t + x/c$, on a $\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}p\right) = 0$.

On cherche donc des solutions de l'équation d'onde sous forme d'**ondes planes** (profil qui se déplace à la célérité c sans se déformer) :

$p(x,t) = F_+(t - \frac{x}{c}) + F_-(t + \frac{x}{c})$ et $v(x,t) = v_+(t - \frac{x}{c}) + v_-(t + \frac{x}{c})$ où, en utilisant l'équation d'Euler $\rho_0\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$, $v_+ = \frac{1}{\rho_0 c}F_+(t - \frac{x}{c})$ et $v_- = -\frac{1}{\rho_0 c}F_-(t - \frac{x}{c})$.

On a donc $v_\pm = \pm\frac{1}{\rho_0 c}p_\pm$ si on note $p_\pm = F_\pm$.

- Cas général

Onde plane se propageant à la **célérité** c dans la **direction** $\overrightarrow{n}$:

$p(\overrightarrow{x},t) = f(t - \frac{\overrightarrow{n}.\overrightarrow{x}}{c})$ et $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{n}}{\rho_0 c}p$

2.1.2 Impédance, énergie et intensité acoustiques d'une onde plane

Impédance (spécifique) d'une onde plane : $Z(\overrightarrow{x},t) = \frac{p(\overrightarrow{x},t)}{\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}} \Rightarrow Z = \rho_0 c$ si l'onde se déplace dans la direction $+\overrightarrow{x}$ et $Z = -\rho_0 c$ si l'onde se déplace dans la direction $-\overrightarrow{x}$; ordres de grandeur pour l'air ($Z_{air} \simeq 415\,\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$) et l'eau ($Z_{eau} \simeq 1.5 10^6\,\mathrm{kg.m^{-2}.s^{-1}}$).

Densité d'énergie : $w = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{\rho_0 c^2} \Rightarrow w = \rho_0 v^2 = \frac{p^2}{\rho_0 c^2}$

Intensité acoustique : $\overrightarrow{I} = p\overrightarrow{v} \Rightarrow \overrightarrow{I} = \frac{p^2}{\rho_0 c}\overrightarrow{n} = \rho_0 c v^2\overrightarrow{n} = cw\overrightarrow{n}$

Pour une onde plane, l'intensité acoustique et la densité d'énergie acoustique sont proportionnelles : $w = \frac{I}{c}$. L'énergie acoustique est transportée à la vitesse du son.

2.1.3 Onde plane harmonique

- Onde plane progressive monochromatique (OPPM)

Solution de l'équation d'onde de la forme $p(\overrightarrow{r},t) = \text{Re}\left(pe^{j(\omega_0 t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}\right)$où ω_0 est la **pulsation** et $\overrightarrow{k}$ est le **vecteur d'onde**.

Equation d'onde de d'Alembert : $\triangle p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}p = 0 \Rightarrow \overrightarrow{k} = \frac{\omega_0}{c}\overrightarrow{n}$ (vecteur d'onde) et $k = \frac{\omega_0}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ (nombre d'onde) où λ est la **longueur d'onde**.

- Paquet d'ondes

Superposition d'OPPMs : $p(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\overrightarrow{k}}\int_\omega p(\overrightarrow{k},\omega)e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\overrightarrow{k}$

Vitesse de **phase** $v_\varphi = c = \omega/k$; vitesse de **groupe** $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$; **relation de dispersion** $\omega(k)$; **dispersif** = v_φ dépend de ω; **non dispersif** = v_φ ne dépend pas de ω.

- **Potentiel des vitesses** d'une OPPM (car écoulement irrotationnel)

Il existe Φ potentiel des vitesses tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$. L'équation d'Euler impose alors $p = -\rho_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

Φ vérifie l'équation d'onde $\square\Phi = 0$ donc Φ peut s'écrire $\Phi(\overrightarrow{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\overrightarrow{k}}\int_\omega \Phi(\overrightarrow{k},\omega)e^{j(\omega t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\overrightarrow{k}$.

Pour une OPPM, $\Phi(\overrightarrow{k},\omega) = \Phi_0$ et $\omega = \omega_0$ donc $\Phi(\overrightarrow{r},t) = \text{Re}\left(\Phi_0 e^{j(\omega_0 t - \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r})}\right)$.

Pour une OPPM : $\overrightarrow{v} = -j\overrightarrow{k}\Phi_0$ et $p = -\rho_0(j\omega_0)\Phi_0$, soit $\overrightarrow{v} = \frac{p}{\rho_0\omega_0}\overrightarrow{k} = \frac{p}{\rho_0 c}\overrightarrow{n}$ (la vitesse des particules est parallèle à la direction de propagation de l'onde : on parle d'onde longitudinale).

- Impédance, pression efficace et intensité acoustique moyenne d'une OPPM

Impédance : De manière générales, l'impédance **complexe** de l'onde Z est définie par $Z = p/v$. La partie réelle $\text{Re}(Z)$ s'appelle la **résistance acoustique**. La partie imaginaire $\text{Im}(Z)$ s'appelle la **réactance acoustique**. Dans le cas d'une OPPM, $Z = \pm\rho_0 c$ est réelle (analogue en électromagnétisme de l'impédance d'un milieu diélectrique $Z = E/H = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ où μ est la perméabilité magnétique et ε est la permittivité diélectrique du matériau).

Pression efficace : $P_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T\left[\text{Re}(pe^{jwt'})\right]^2\mathrm{d}t'$ sur une durée $T \gg 1/\omega \Rightarrow P_{eff} = P_{max}/\sqrt{2}$

Intensité acoustique moyenne : $\bar{I} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t')v(t')\mathrm{d}t' \Rightarrow \bar{I} = \frac{1}{2}\text{Re}(Z)v_{max}^2 = \frac{1}{2}\text{Re}(1/Z^*)p_{max}^2 = \frac{1}{2}\text{Re}(pv^*)$

2.1.4 Propagation d'une onde plane à travers un dioptre acoustique

Hypothèses : on considère une onde plane $(p_i, \overrightarrow{v}_i)$ se propageant dans un milieu 1 d'impédance $Z_1 = \rho_1 c_1$ et incidente sur l'interface avec un milieu 2 d'impédance $Z_2 = \rho_2 c_2$. On note $(p_r, \overrightarrow{v}_r)$ l'onde réfléchie dans le milieu 1 et $(p_t, \overrightarrow{v}_t)$ l'onde transmise dans le milieu 2. On néglige les ondes de surface crées par les vibrations de l'interface.

- Réflexion et transmission en incidence normale

Continuité de p et de $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n}$ à l'interface entre les &²i_deux milieux d'impédances $Z_1 = \rho_1 c_1$et $Z_2 = \rho_2 c_2 \Rightarrow$ ondes **incidentes**, **réfléchies** et **transmises** telles que :

$T = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2}$= coefficient de **transmission en pression**, et $R = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2}$= coefficient de **réflexion en pression**.

$T_I = \frac{\overline{I_t}}{\overline{I_i}} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1+Z_2)^2}$= coefficient de **transmission en intensité**, et $R_I = \frac{\overline{I_r}}{\overline{I_i}} = \frac{(Z_1-Z_2)^2}{(Z_1+Z_2)^2} = 1 - T_I = R^2$= coefficient de **réflexion en intensité** .

Si $Z_1 \gg Z_2$ (eau → air), réflexion avec changement de signe $T \simeq 0$, $R \simeq -1$, $T_I \simeq 0$, $R_I \simeq 1$

Si $Z_1 \ll Z_2$ (air → eau), réflexion sans changement de signe $T \simeq 2$, $R \simeq 1$, $T_I \simeq 0$, $R_I \simeq 1$

Application : **adaptation d'impédance** par l'oreille moyenne : rôle mécanique de la chaîne d'osselets (marteau/enclume/étrier) = coefficient (ou facteur) de transmission en intensité multiplié par 35 (amélioration de la transmission du son de +15 dB). Inversement, lorsqu'un son est trop fort, la chaîne d'osselets se rigidifie et l'oreille moyenne 'désadapte' l'impédance pour perdre 15 dB (c'est le **réflexe stapédien**).

- Réflexion et transmission en incidence oblique d'une OPPM

- Lois de Descartes : $\frac{\sin\theta_i}{c_1} = \frac{\sin\theta_t}{c_2}$ et $\theta_i = \theta_r$

- Transmission et réflexion en pression et en intensité

$T = \frac{p_t}{p_i} = \frac{2Z_2\cos\theta_i}{Z_1\cos\theta_t+Z_2\cos\theta_i}$= coefficient de **transmission en pression**, et $R = \frac{p_r}{p_i} = \frac{Z_2\cos\theta_i-Z_1\cos\theta_t}{Z_1\cos\theta_t+Z_2\cos\theta_i}$= coefficient de **réflexion en pression**.

$T_I = \frac{\overline{I_t}}{\overline{I_i}} = \frac{4Z_1Z_2\cos\theta_t\cos\theta_i}{(Z_1\cos\theta_t+Z_2\cos\theta_i)^2}$= coefficient de **transmission en intensité**, et $R_I = \frac{\overline{I_r}}{\overline{I_i}} = \frac{(Z_1\cos\theta_t-Z_2\cos\theta_i)^2}{(Z_1\cos\theta_t+Z_2\cos\theta_i)^2} = 1 - T_I = R^2$= coefficient de **réflexion en intensité**.

- Notion d'**impédance de surface** : $Z(\theta_i) = \frac{p_i+p_r}{v_i-v_r} = \frac{Z_1}{\cos\theta_i}\frac{1+R(\theta_i)}{1-R(\theta_i)} \Rightarrow$ condition de **réaction localisée** (ou réaction locale, voir §1.3.2) : Z ne dépend pas du point considéré, $Z(\theta_i) = $ cte $= Z(\theta_i = 0)$ et $p = Zv$ sur toute la surface

- Notion de **coefficient d'absorption** : $\alpha = T_I = 1 - R_I = 1 - |R|^2$, $0\,(\text{non absorbant}) < \alpha < 1\,(\text{très absorbant})$, ordres de grandeur et matériaux anechoïques

2.1.5 Applications

- Propagation à travers une **paroi mince**

On considère une paroi mince d'épaisseur e, de masse surfacique μ, de densité ρ ($\mu = \rho e$), qui sépare deux milieux d'impédances $Z_1 = \rho_1 c_1$ et $Z_2 = \rho_2 c_2$ et repérée par la position $x(t)$. Une OPPM de pulsation ω se propage dans le sens $x > 0$ depuis le milieu 1 vers le milieu 2 : intensité $\bar{I} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(pv^*)$ et $p = Zv$. En utilisant :

- le PFD sur la paroi : $\mu\ddot{x} = p_i + p_r - p_t$

- la continuité des vitesses normales : $v_i + v_r = v_t = \dot{x}$

- les relations entre pression et vitesse pour une onde plane : $v_i = p_i/Z_1$, $v_r = -p_r/Z_1$, $v_t = p_t/Z_2$,

on trouve le **coefficient de transmission en intensité** :

$T_I = \frac{\overline{I_t}}{\overline{I_i}} = \frac{|p_t|^2/Z_2}{|p_i|^2/Z_1} = \frac{4Z_1/Z_2}{(1+Z_1/Z)^2+(\omega\mu/Z_2)^2}$.

➢ Cas où $Z_1 = Z_2 = Z$: $T_I = \frac{1}{1+\frac{\omega^2\mu^2}{4Z^2}}$; limite BF $\omega \to 0$, $T_I \to 1$; limite HF $\omega \gg \frac{2Z}{\mu}$, $T_I \sim \frac{4Z^2}{\omega^2\mu^2}$; ordres de grandeur : atténuation ('transmission loss') en intensité pour 10 cm de béton $TL_I = -10\log_{10} T_I = -10\log_{10}\frac{I_t}{I_i}$ =46 dB à 100 Hz, 65 dB à 1000Hz. L'atténuation augmente de 6 dB si la fréquence double ou si l'épassiseur de la paroi double.

- Propagation à travers un **bidioptre**, adaptation d'impédance

On considère 2 milieux d'impédances Z_1 et Z_3 séparés par un milieu d'impédance $Z_2 = \rho_2 c_2$ d'épaisseur L. L'interface entre les milieux 1 et 2 est située en $x = 0$. L'interface entre les milieux 2 et 3 est située en $x = L$ (déphasage $\pm k_2 L$ en $x = L$ où $k_2 = \omega/c_2$ vecteur d'onde dans le milieu 2). La continuité de la pression et de la vitesse en $x = 0$ et en $x = L$ fournissent 4 équations vérifiées par les 5 inconnues p_i, p_r, p_a, p_b, p_t où les deux premières pressions sont les pressions incidente et réfléchie dans le milieu 1, les deux suivantes sont les pressions incidente et réfléchie dans le milieu 2 et la dernière est la pression transmise dans le milieu 3.

Après calcul, on trouve le **coefficient de transmission en intensité** :

$T_I = \frac{\overline{I_t}}{I_i} = \frac{4Z_1Z_3}{(Z_1+Z_3)^2\cos^2 k_2L+(Z_2+\frac{Z_1Z_3}{Z_2})^2\sin^2 k_2L}$ avec $k_2 = \omega/c_2$

Cas particuliers :

➢ $L \to 0$: on retrouve le dioptre simple

➢ $Z = Z_3 = Z$ et $Z_2 \gg Z$: on retrouve le cas du mur 'mince' de masse surfacique $\mu = \rho_2 L$ si $k_2L \ll 1$: $T_I \sim \frac{4Z_1^2}{Z_2^2\sin^2 k_2L} \sim \frac{4Z^2}{\omega^2\mu^2}$.

➢ $Z = Z_3 = Z$ et $\omega \to 0$, $T_I \to 1$

➢ $L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sin k_2L = 0$: dioptre simple, milieu 2 transparent

➢ $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \cos k_2L = 0$: **adaptation d'impédance** parfaite si $Z_2 = \sqrt{Z_1Z_3}$: $T_I = 1$ (échographie ultrasonore).

- Propagation à travers un **double vitrage**

On considère 2 milieux d'impédance Z_1 séparés par un milieu d'impédance $Z_2 = \rho_2c_2$ d'épaisseur L inclus entre deux parois minces de masse surfacique μ. Les deux parois sont repérées par leurs positions $x(t) = Xe^{j\omega t}$ et $y(t) = Ye^{j\omega t}$. On note $k_2 = \omega/c_2$ le vecteur d'onde dans le milieu 2. Le PFD appliqué sur les deux parois, et la continuité de la vitesse en $x = 0$ et en $x = L$ fournissent 6 équations vérifiées par les 7 inconnues p_i, p_r, p_a, p_b, p_t , X, Y où les deux premières pressions sont les pressions incidente et réfléchie dans le milieu 1, les deux suivantes sont les pressions incidente et réfléchie dans le milieu 2 et la dernière est la pression transmise dans le milieu 3, et X et Y sont les amplitudes des déplacements des deux parois.

Après calcul, on trouve le **coefficient de transmission en intensité** :

$T_I = |T|^2 = \frac{\overline{I_t}}{I_i} = \frac{(Z_1Z_2)^2}{(Z_1^2+\omega^2\mu^2)Z_2^2\cos^2 k_2L+(\frac{(Z_2^2+Z_1^2-\omega^2\mu^2)^2}{4}+\omega^2\mu^2Z_1^2)\sin^2 k_2L}$ avec $k_2 = \omega/c_2$

Cas particuliers :

➢ $L \to 0$: on retrouve un simple vitrage de masse surfacique 2μ avec $T_I = \frac{1}{1+\frac{\omega^2\mu^2}{Z_1^2}}$

➢ $\mu \to 0$: on retrouve un bidioptre avec $Z_1 = Z_3$

➢ Double vitrage = vide entre les deux parois minces :$\rho_2 \to 0$ et $Z_2 \to 0 \Rightarrow T_I \to 0$

➢ Vide partiel : ordres de grandeur, comparaison simple et double vitrages

2.2 Ondes guidées

2.2.1 Onde acoustique dans un guide rectangulaire

On considère une onde harmonique à **variables séparées** $p(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)e^{j\omega t}$ se propageant dans un guide d'onde rectangulaire de dimensions $L_x$et L_y dans les directions x et y et infini dans la direction z . On fait les hypothèses suivantes :

- les parois du guide d'onde sont infiniment rigides ($Z_{paroi} = \infty$ et $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = 0$ sur les parois),

- il n'y a pas de vitesse d'ensemble du fluide ($v_0 = 0$),

- le guide ne présente pas de coudes (infini dans la direction z).

- Equation de Helmoltz et conditions aux limites, modes (m, n)

- La pression vérifie l'**équation de Helmoltz** : $\triangle p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \triangle p + \frac{\omega^2}{c^2}p = 0$ soit $\triangle p + k^2 p = 0$ (équation de Helmholtz).

On cherche les solutions sous la forme $X(x) = a_x e^{jk_x x} + b_x e^{-jk_x x}$, idem pour $Y(y)$ et $Z(z)$, avec les conditions aux limites : $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = 0$ sur les parois en $x = 0, L_x$ et $y = 0, L_y$.

On en déduit : $a_x = b_x$, $k_x L_x = m\pi$ et $a_y = b_y$, $k_y L_y = n\pi$.

- Relation de dispersion : $\triangle p + \frac{\omega^2}{c^2}p = 0 \Rightarrow k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2$ avec $k = \frac{\omega}{c}$

- Expression de la **pression** : $p(x, y, z, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \cos\frac{m\pi x}{L_x}\cos\frac{n\pi y}{L_y}\left[P_{1_{m,n}}e^{jk_z z} + P_{2_{m,n}}e^{-jk_z z}\right]e^{j\omega t}$

- Expression de la **vitesse** (équation d'Euler) : $v_z(x, y, z, t) = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}$

$\Rightarrow$ Ondes **stationnaires** dans les directions x et y, **propagation** possible dans la direction z suivant les valeurs de $k_z(m, n)$ (modes (m, n))

- **Fréquence de coupure** du mode (m,n) : $k_c^2 = (\frac{\omega_c}{c})^2 = (\frac{2\pi f_c}{c})^2 = \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2$, **relation de dispersion** $k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2}$

Si $\omega > \omega_c(m, n)$, k_z est réel et le mode (m, n) **peut se propager** suivant z (vecteur d'onde $k_z < k$ pour l'onde plane)/

Si $\omega = \omega_c(m, n)$, $k_z = 0$, onde **stationnaire** en x et en y.

Si $\omega < \omega_c(m, n)$, $k_z = -j\alpha_z$ est imaginaire pur et le mode (m, n) ne se propage pas (onde **évanescente**).

Pour ω donné, il y a un nombre **fini** de modes propagatifs et un nombre **infini** de modes évanescents

- Cas du mode $(m = 0, n = 0)$

Expression de la **pression** : $p(z, t) = \left[P_1 e^{-jk_z z} + P_2 e^{jk_z z}\right]e^{j\omega t}$ où $k_z = \omega/c$

Expression de la **vitesse** (équation d'Euler) : $v_z(x, y, z, t) = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 c}\left[P_1 e^{-jk_z z} - P_2 e^{jk_z z}\right]e^{j\omega t}$

$\Rightarrow$ **onde plane** en champ libre (en pratique, le mode $(m = 0, n = 0)$ est le seul mode propagatif dans un guide d'onde de dimensions centimétriques, voir ci-dessous).

- Cas du mode $(m=1, n=0)$: premier mode transversal

Relation de dispersion : $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\pi}{L}\right)^2$avec $L = L_x$

Première fréquence de coupure : nombre d'onde $k_c = \frac{\pi}{L}$, pulsation $\omega_c = \frac{\pi c}{L}$, fréquence $f_c = \frac{c}{2L} \Rightarrow$ propagation du mode $(m=1, n=0)$ si $f > f_c$

Ordre de grandeur pour l'air : $L = 1$cm, $f_c = 17$ kHz donc seul le mode $(m=0, n=0)$ se propage aux fréquences audibles et **l'hypothèse d'onde plane** est justifiée.

- Cas du guide cylindrique :

Relation de dispersion : $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{\chi_{m,n}}{a}\right)^2$

Expression de la pression : $p(r,\theta,z,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{r_{m,n}} r) e^{jm\theta} \left[P_{1_{m,n}} e^{jk_z z} + P_{2_{m,n}} e^{-jk_z z}\right] e^{j\omega t}$

où $J_m(k_{r_{m,n}} r)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre m, $\chi_{m,n}$ est solution de $\frac{dJ_m(k_{r_{m,n}} r)}{dr} = 0$ et a est le diamètre du guide cylindrique.

Pour le mode $(m=1, n=0)$: $\chi_{1,0} = 1.84$ et $f_c = \frac{1.84c}{2\pi a}$.

2.2.2 Cas de l'onde plane : mode (0, 0)

- Hypothèses et définitions

On suppose que : 1) la fréquence est **inférieure à la première fréquence de coupure**; 2) la section droite S du guide est constante; 3) il n'y a pas de source acoustique dans le guide. On définit les grandeurs suivantes :

- Débit acoustique : $q(z,t) = Sv(z,t)$ = nouvelle variable (unité: $m^3.s^{-1}$).

- Impédance caractéristique du guide d'onde : $Z_c = \frac{\rho_0 c}{S}$ (unité: $kg.m^{-4}.s^{-1} = Pa.s.m^{-3}$).

- Impédance acoustique : $Z(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ où $p(z,t) = P(z)e^{j\omega t} = \left[P_1 e^{-jkz} + P_2 e^{jkz}\right] e^{j\omega t}$ est la pression, et $q(z,t) = Q(z)e^{j\omega t} = \frac{1}{Z_c}\left[P_1 e^{-jkz} - P_2 e^{jkz}\right] e^{j\omega t}$ est le débit acoustique, avec $k = k_z = \frac{\omega}{c}$.

Remarque : l'impédance caractérsitique $Z_c = \frac{\rho_0 c}{S}$ et l'impédance acoustique $Z = P/Q$ définies ici n'ont pas la même dimension que l'impédance d'une onde plane (caractéristique du milieu) $Z = p/v = \rho_0 c$ (en $kg.m^{-2}.s^{-1} = Pa.s.m^{-1}$) définie précédemment.

- **Matrice de transfert** : passage d'une position z_1 à une position z_2 dans le guide d'onde (sans source acoustique interne)

$$\begin{bmatrix} P(z_1) \\ Q(z_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos k(z_2-z_1) & jZ_c \sin k(z_2-z_1) \\ \frac{j}{Z_c}\sin k(z_2-z_1) & \cos k(z_2-z_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(z_2) \\ Q(z_2) \end{bmatrix}$$

Remarque : cette expression est analogue à l'expression pour (U, I) le long d'une ligne de transmission en électricité.

- **Impédance ramenée** = expression de $Z(z_1) = \frac{P(z_1)}{Q(z_1)}$ en fonction de $Z(z_2) = \frac{P(z_2)}{Q(z_2)}$:

$$Z(z_1) = Z_c \frac{j \tan k(z_2-z_1) + \frac{Z(z_2)}{Z_c}}{1 + j\frac{Z(z_2)}{Z_c}\tan k(z_2-z_1)}$$

- Applications, filtres acoustiques

- 'Flûte' : tuyau de longueur $l = z_2 - z_1$ ouvert aux deux extrémités; $Z(z_1) = Z(z_2) = 0 \Rightarrow kl = n\pi$ et $f_n = n\frac{c}{2l}$: fondamental de fréquence $f_1 = \frac{c}{2l}$ et harmoniques $f_n = nf_1$

- 'Clarinette' : tuyau de longueur $l = z_2 - z_1$ fermé en z_1 et ouvert en z_2; $Z(z_1) = \infty$ et $Z(z_2) = 0 \Rightarrow kl = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ et $f_n = (2n+1)\frac{c}{4l}$: fondamental de fréquence $f_1 = \frac{c}{4l}$ et harmoniques $f_n = (2n+1)f_1$

- Discontinuité : passage d'une section $S_1 = hL_1$ à une section $S_2 = hL_2$ en $z = 0$; on suppose l'onde harmonique à basse fréquence ($\omega \to 0$) et plane loin de la discontinuité; continuité du débit et de la pression en $z = 0 \Rightarrow L_1 v_1 = L_2 v_2$ et $p_1 = p_2 \Rightarrow$ coefficient de transmission $T = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}$ et coefficient de réflexion $R = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$ où $\varepsilon = L_2/L_1$ (si $\varepsilon = L_2/L_1 \gg 1$, $T \propto 1/\sqrt{\varepsilon} \to 0$, faible transmission de l'onde).

- Embranchement : passage d'une section S_0 à deux sections S_1 et S_2; 'transmission loss' en intensité $TL_I = -10\log_{10}\frac{I_t}{I_i}$ lors du passage de la section S_0 à la section $S_{i=1\,\mathrm{ou}\,2}$: $TL_{I\,i} = 10\log_{10}\frac{(1+m_1+m_2)^2}{4m_i}$ où $m_i = S_i/S_0$.

- Silencieux : section S_1 suivie d'une longueur l de section S_2puis section S_1; $TL_I = 10\log_{10}(1 + \frac{1}{4}(m - \frac{1}{m})^2 \sin^2 kl)$ où $m = S_2/S_1$.

2.2.3 Cas basse fréquence, constantes localisées

Hypothèses : **basses fréquences** (fréquences audibles) $\Leftrightarrow$ dimensions du guide $l = z_2 - z_1 \ll$ longueur d'onde, mode ($m = 0, n = 0$), onde plane se propageant dans la direction z.

- Expression de la **matrice de transfert** si $kl \ll 1$:

$$\begin{bmatrix} P(z_1) \\ Q(z_1) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & j\frac{\rho_0\omega l}{S} \\ j\frac{\omega l S}{\rho_0 c^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(z_2) \\ Q(z_2) \end{bmatrix}$$

Dans le cadre de l'approximation basse fréquence : impédances discrètes appelées **constantes localisées** du circuit (on parle de constantes réparties si l'approximation basse fréquence n'est pas valable).

- Analogie électrique, circuit équivalent

$$P(z_1) \simeq P(z_2) + j\rho_0\omega l v(z_1)$$
$$P(z_2) \simeq \frac{\rho_0 c^2}{j\omega l}(v(z_1) - v(z_2))$$

Analogie : pression $\leftrightarrow$ tension électrique, vitesse/débit $\leftrightarrow$ courant électrique; $\frac{l}{\rho_0 c^2}$ = **capacité acoustique** spécifique et $\rho_0 l$ = **inductance acoustique** spécifique

2.2.4 Application au résonateur de Helmholtz

- Système et hypothèses

- On considère une cavité ('goulot') de section S_1 et de longueur $l_1 = z_2 - z_1$ suivie d'une cavité fermée ('bouteille') de section S_2 et de longueur $l_2 = z_3 - z_2$ avec $S_1 \ll S_2$.

- Hypothèses : approximation **basse fréquence**, constantes localisées (l_1, l_2, $\sqrt{S_1}$, $\sqrt{S_2}$ sont tous $\ll \lambda$), parois rigides.

- Matrices de transfert

Matrices de transfert $z_1 \to z_2^-$ dans le petit tube ('goulot') puis $z_2^+ \to z_3$ dans le grand tube ('bouteille') + conditions limites en z_2 (continuité de la pression et du débit $P(z_2^-) = P(z_2^+) = P(z_2)$ et $Q(z_2^-) = Q(z_2^+) = Q$) + condition limite en $z_3 (Q(z_3) = 0)$

$\Rightarrow P(z) = P_c =$ cte dans la cavité ($z_2 < z < z_3$) et $P_c = \frac{1}{j\omega C_a} Q$ où $C_a = \frac{l_2 S_2}{\rho_0 c^2}$ est la **capacité acoustique**.

$\Rightarrow P(z_1) = P_c + j\omega L_a Q$ où $L_a = \frac{l_1 \rho_0}{S_1}$ est l'**inductance acoustique**.

$\Rightarrow Q(z_1) = Q\left(1 + \frac{l_1 S_1}{l_2 S_2}\right) \simeq Q$ car $l_1 S_1 \ll l_2 S_2$ donc le débit dans le petit tube ('goulot') est constant.

- Circuit électrique équivalent au résonateur de Helmoltz : inductance + capacité (circuit R,C en série)

- **Fonction de transfert, résonance** :

La fonction de transfert du résonateur de Helmoltz est $\frac{P_c}{P(z_1)} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}$ avec $\omega_r = 2\pi f_r = \frac{1}{\sqrt{L_a C_a}} = c\sqrt{\frac{S_1}{l_1 V}}$ où $V = l_2 S_2$ est le volume de la cavité.

- Phénomène de résonance : limité par les pertes viscothermiques et les vibrations des parois, ignorées ici.

- Ordre de grandeur : $f_r = 156$ Hz pour une bouteille de volume $V = 75$ cl et un goulot de rayon 1 cm et de longueur $l_1 = 5$ cm.

2.2.5 Généralités sur les filtres acoustiques

- **Matrice de transfert** $[M]$ d'un tronçon de tube de longueur l :

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\Gamma & Z_c \sinh\Gamma \\ Z_c^{-1}\sinh\Gamma & \cosh\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

si le quadrupôle est **réciproque** ($\det [M] = 1$) et **symétrique** ($[M] = {}^t[M]$) par analogie avec les quadrupôles et les lignes de transmission en électricité.

Z_c est l'**impédance itérative** du tube telle que $Z_c = P/Q$.

Cas particulier du mode ($m = 0, n = 0$) d'un tube de section S (voir 2.2.2) : $l = z_2 - z_1$, $Z_c = \frac{\rho_0 c}{S}$, et $\Gamma = jkl$.

- Par itération : $\begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh n\Gamma & Z_c \sinh n\Gamma \\ Z_c^{-1}\sinh n\Gamma & \cosh n\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix}$

- Filtre **idéal** :

- **Filtre idéal** = si l'impédance terminale $Z_t = \frac{P_n}{Q_n}$ est égale à l'impédance itérative, ie. si $Z_t = \frac{P_n}{Q_n} = \pm Z_c$ ($+Z_c$ pour les ondes 'aller' dans le sens $z > 0$ ou $-Z_c$ pour les ondes 'retour' dans le sens $z < 0$).

SI on suppose $Z_t = \frac{P_n}{Q_n} = Z_c$, on a alors $\begin{bmatrix} P_0 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{n\Gamma} & 0 \\ 0 & e^{n\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_n \\ Q_n \end{bmatrix}$ et $\left|\frac{P_n}{P_0}\right| = \left|\frac{Q_n}{Q_0}\right| = e^{-n\Gamma}$

$\Rightarrow$ atténuation (bande affaiblie) si $\mathrm{Re}(\Gamma) > 0$, bande passante sinon.

- Remarque : pour le mode ($m = 0, n = 0$) d'un tube $\Gamma = jkl$ est imaginaire pur.

2.3 Ondes sphériques

2.3.1 Définitions

- Onde sphérique = solution de l'équation d'onde à **symétrie sphérique**; $p(r,t)$ et $\overrightarrow{v} = v(r,t)\overrightarrow{e}_r$ vérifient $\Box p = 0$ et $\Box\overrightarrow{v} = 0$ avec $\Box . = (\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle).$. Une onde sphérique est émise par un émetteur (source) 'ponctuel' (i.e. de taille $\ll \lambda$ où λ est la longueur d'onde).

- Intensité acoustique : $\overrightarrow{I} = p\overrightarrow{v} = I(r,t)\overrightarrow{e}_r$

- Expansion sphérique : intensité moyenne $< I_r >$ constante sur une sphère de rayon r et $\mathcal{P}_a = 4\pi r^2 < I_r >$ où $\mathcal{P}_a$ est la puissance de la source $\Rightarrow < I_r > \propto 1/r^2$ (propriété d'expansion sphérique, perte de 6 dB du niveau d'intensité L_I lorsque la distance à la source est doublée).

- Equation d'onde en symétrie sphérique : $\Box p(r,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \triangle p = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} = 0$

2.3.2 Potentiel des vitesses, pression et vitesse d'une onde acoustique sphérique

Le **potentiel des vitesses** Φ (tel que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$ et $p = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t}$) vérifie aussi l'équation d'onde $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (r\Phi)}{\partial r^2} = 0$. On cherche Φ sous la forme d'une onde **divergente** à partir de la source : $\Phi(r,t) = \frac{1}{r}F(t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{r}F(u)$ avec $u = t - \frac{r}{c}$.

$\Rightarrow$ **Pression** $p(r,t) = -\frac{\rho_0}{r}\frac{\partial F}{\partial u}$ (équation d'Euler) et composante radiale de la **vitesse** $v_r(r,t) = \frac{p(r,t)}{\rho_0 c} - \frac{1}{r^2}F(u)$ (définition de Φ).

$\Rightarrow$ à grande distance de la source ($r \to \infty$), la composante radiale de la vitesse se comporte **comme une onde plane**.

2.3.3 Onde harmonique, champ proche et champ lointain

- Onde harmonique

La source injecte du fluide de manière sinusoïdale dans le temps.

- Pression : $p(r,t) = \frac{A}{r}e^{j(\omega t - kr)}$

- Potentiel des vitesses : $\Phi(r,t) = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\frac{A}{r}e^{j(\omega t - kr)}$ (équation d'Euler)

- Vitesse radiale : $v_r(r,t) = \frac{1}{\rho_0 c}\frac{A}{r}\left[1 + \frac{1}{jkr}\right]e^{j(\omega t - kr)}$

Remarque : l'expression de Φ peut s'obtenir par l'approche des fonctions de Green ($G(r,t) = \frac{\delta(t - r/c)}{4\pi r} = \Phi(r,t)$ est la réponse impulsionelle à un taux d'injection $\delta(t - r/c)$ donc $\Phi(r,t) = \frac{a}{4\pi r}e^{j(\omega t - kr)}$ est la réponse à un taux d'injection sinusoïdal $ae^{j(\omega t - kr)}$).

- Hypothèse du **champ lointain**

Si $kr \gg 1$ ($r \gg \lambda \propto c/\omega$, faible longueur d'onde ou haute fréquence) alors $v_r(r,t) \simeq \frac{1}{\rho_0 c}\frac{A}{r}e^{j(\omega t - kr)} = \frac{p}{\rho_0 c}$ comme pour l'**onde plane** $\Rightarrow$ la limite d'une onde sphérique à grande distance (champ lointain) est une onde plane.

- **Impédance** d'une onde sphérique harmonique : $Z = \frac{p}{v} = \frac{\rho_0 c}{1 + \frac{1}{jkr}}$, $Z = \rho_0 c$ en champ lointain (onde plane)

- **Intensité acoustique** d'une onde sphérique harmonique : $< I_r > = \frac{1}{2}\text{Re}(pv^*) = \frac{|A|^2}{2r^2\rho_0 c} \propto 1/r^2$ (expansion sphérique)

Chapter 3

Sources acoustiques, rayonnement acoustique

3.1 Sources acoustiques élémentaires

3.1.1 Exemples de sources sonores

- **Rayonnement** = vibrations d'une source transmises un fluide environnant, continuité des vitesses normales sur la surface de la source S; problème du rayonnement = connaissant le mouvement des sources, déterminer p et $\overrightarrow{v}$ sur une surface S' fermée entourant la source S; problème inverse = connaissant p et $\overrightarrow{v}$ sur S', déterminer la ou les sources.
- **Exemples** de sources : aéroacoustique, thermoacoustique, acoustique sous-marine, acoustique industrielle, acoustique musicale, électroacoustique, acoustique architecturale

3.1.2 Hypothèses du rayonnement des sources acoustiques

- Hypothèses

Source de surface S en mouvement dans un fluide, vitesse $\overrightarrow{v}_s(M)$ d'un point M à la surface de la source, vitesse $\overrightarrow{v}(M)$ du fluide en M.

1) Efforts exercés par le fluide sur la source **normaux à la surface** S: $\overline{\overline{T}} = -p\overline{\overline{I}}$ et $\overrightarrow{dF} = \overline{\overline{T}}\overrightarrow{dS} = -p\overrightarrow{dS}$

2) **Continuité** des vitesses normales : composante normale de la vitesse de la source égale à celle du fluide en tout point de la surface : $\overrightarrow{v}_s(M).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}(M).\overrightarrow{n}$

- Champ sonore proche et champ lointain : r_0 distance entre la source et l'observateur, D taille (extension) de la source

Distinguer champ proche/lointain (dépend de la fréquence) de champ faible/grande distance (indépendant de la fréquence) :

Champ **proche** : $kr_0 \ll 1$ ou $r_0 \ll \lambda$ (grandes longueurs d'onde ou basses fréquences); champ **lointain** : $kr_0 \gg 1$ ou $r_0 \gg \lambda$

Champ **à faible distance** : $r_0 \ll D$ ou $r_0 \sim D$; champ **à grande distance** : $r_0 \gg D$

- **Directivité** d'une source : diagramme du niveau sonore en pression (SPL) L_P ou en intensité (SIL) L_I en dB (log) mesuré en fonction de l'angle θ à fréquence donnée en chambre anéchoïque (voir 1.3.3).
- **Intensimétrie** : mesures de SPL (dépend de la distance la source) ou de puissance acoustique moyenne (calculée sur une surface fermée entourant la source).
- Méthodes de **calcul** du rayonnement acoustique : calcul exact, approximations (géométriques : par exemple, champ à grande distance $r_0 \gg D$; en fréquence : à l'émission $kD \ll 1$ ou $kD \gg 1$ ou champ proche/lointain $kr_0 \ll 1$ ou $kr_0 \gg 1$), simulations numériques (différences finies, éléments finis, méthodes intégrales, FFT, voir aussi 4.3.6)

3.1.3 Cas du piston 1D

Piston 1D : déplacement du piston à la vitesse $v(t) = V\cos\omega t$ crée une pression $p(x,t) = \rho_0 cV\cos(\omega - kx)$

Puissance rayonnée par unité de surface du piston : $I = P_{moy/S} = \frac{1}{T}\int_0^T p(t')v(t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{2}\rho_0 cV^2 = \frac{1}{2}ZV^2$

$\Rightarrow$ à puissance moyenne fixée, la vitesse V est fixée et le déplacement du piston $x = -\frac{V}{j\omega}$ est grand à basse fréquence et petit à haute fréquence

3.1.4 Champ créé par un monopôle acoustique : sphère pulsante

Source monopolaire $\Rightarrow$ champ à symétrie sphérique; exemples; source étendue = somme de monopôles

- Modèle de la **sphère pulsante**

Sphère $\mathcal{S}$ de rayon a **vibrant uniformément** sur sa surface la vitesse $V_a e^{j\omega t}$

Pression sous la forme d'une onde sphérique harmonique : $p(r,t) = C\frac{e^{-jkr}}{r}e^{j\omega t}$; équation d'Euler + condition limite en $r = a$ ($\overrightarrow{v}_{sphère}(r=a).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v}_{fluide}(r=a).\overrightarrow{n}$) $\Rightarrow p(r,t) = \frac{j\omega\rho_0 a^2 V_a}{1+jka}\frac{e^{-jk(r-a)}}{r}e^{j\omega t}$

Puissance rayonnée : $W = \overline{I}S = \frac{1}{2}S\,|V_a|^2\,\frac{k^2a^2}{1+k^2a^2}\rho_0 c \Rightarrow$ si $a \ll \lambda$ (source de petite taille ou basse fréquence) alors faible rayonnement

- **Monopôle**

Limite de la sphère pulsante où $a \to 0 \Rightarrow$ **pression** $p(r,t) = \frac{j\omega\rho_0}{4\pi}Q\frac{e^{-jkr}}{r}e^{j\omega t}$ avec $Q = 4\pi a^2 V_a =$ flux sortant de la sphère $\mathcal{S}$ = débit volumique de la source = débit du monopôle

Potentiel des vitesses : $\Phi(r,t) = \frac{Q}{4\pi}\frac{e^{-jkr}}{r}e^{j\omega t}$

Vitesse : $v(r,t) = \frac{j\omega}{4\pi c}Q\frac{e^{-jkr}}{r}(1 + \frac{1}{jkr})e^{j\omega t}$

Impédance acoustique spécifique d'un monopôle : $Z(r,\omega) = \frac{p}{v} = r_r + j\omega m_r$ où $r_r = \frac{k^2r^2}{1+k^2r^2} =$ **résistance** acoustique spécifique et $m_r = \frac{\rho_0 r}{1+k^2r^2} =$ **masse acoustique** spécifique (en champ lointain, $Z(r,\omega) \simeq \rho_0 c$, onde sphérique = onde plane en champ lointain)

Densité d'énergie d'un monopôle : $w(r,\omega) = \rho_0\left(\frac{Qk}{4\pi r}\right)^2\left[1 + \frac{1}{2k^2r^2}\right]$ (en champ lointain, $w \propto 1/r^2$)

Intensité acoustique moyenne d'un monopôle : $\overline{I} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(pv^*) = \frac{\rho_0 c}{2}\left(\frac{Qk}{4\pi r}\right)^2$

Puissance acoustique rayonneé par un monopôle de débit Q : $W_m = 4\pi r^2 \overline{I} = \frac{\rho_0 \omega^2 Q^2}{8\pi c}$ (indépendant de r et $\propto \omega^2$)

3.1.5 Champ créé par un dipôle acoustique

Exemples

Définition : **dipôle** = superposition de deux monopôles de débits $+Q$ et $-Q$ séparés par une distance d; moment dipolaire $D = Qd$; approximation dipolaire : $d \ll r$

Pression : $p(r,\theta,\omega) = \frac{k^2 D \rho_0 c}{4\pi r}\cos\theta\left(1 + \frac{1}{jkr}\right)e^{-jkr}$

Calculs de la **vitesse** $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{j\omega\rho_0}\overrightarrow{grad}\, p$, de la **densité d'energie** $w = \frac{1}{2}\rho_0 v^2$, de l'**intensité acoustique** $\overrightarrow{I} = p\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} I_r = \rho_0 c\left(\frac{k^2 D}{4\pi r}\right)^2 \cos^2(\theta) \\ I_\theta = 0 \end{pmatrix}$ et de l'**intensité acoustique moyenne** du dipôle $\overline{I} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(pv^*)$

Puissance acoustique rayonée par le dipôle de moment dipolaire $D = Qd$: $W_d = \int_S \overrightarrow{I}.\overrightarrow{n}\,\mathrm{d}S = \frac{\rho_0\omega^4 D^2}{12\pi c^3}$ ($\propto \omega^4$ donc très faible basse fréquence et $\frac{W_d}{W_m} = \frac{8\pi^2}{3}\frac{d^2}{\lambda^2} \ll 1$si $d \ll \lambda$)
Directivité : $p = 0$ et $I_r = 0$ si $\theta = \pi/2$

3.2 Rayonnement des sources planes

Principe ici : interactions structure/fluide et problèmes aux limites, approche simplifiée de la théorie scalaire de la diffraction

Couplage fluide/structure : vibrations de la surface de la source (équations du mouvement, milieu élastique : contrainte σ, déplacement $\overrightarrow{u}$) $\leftrightarrow$ mouvements du fluide (équation d'onde : pression p, vitesse $\overrightarrow{v}$)

Conditions aux limites sur la surface de la source : continuité de la vitesse normale $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n} = \frac{\partial\overrightarrow{u}}{\partial t}.\overrightarrow{n}$ et continuité des contraintes $-p\overrightarrow{n} = \sigma\overrightarrow{n}$

Condition de Sommerfeld : non réflexion à l'infini (pas de puits, uniquement des sources), onde plane $\overrightarrow{v} \simeq \frac{p}{\rho_0 c}\overrightarrow{n}$ si $r \to \infty$ et $\lim_{r\to\infty}(\frac{\partial p}{\partial \overrightarrow{n}} + \frac{1}{c}\frac{\partial p}{\partial t})r = 0$

3.2.1 Champ sonore au voisinage d'un écran rigide infini

Condition limite sur l'écran rigide infini vérifiée en plaçant une source image S' symétrique de la source S (monopôle) par rapport l'écran (méthode des **sources-images**) $\Rightarrow$ potentiel des vitesses au point M à la distance r de O (situé entre S et S') et dans la direction θ : $\Phi(r,\theta,\omega) = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{e^{-jk(r-e\cos\theta)}}{r-e\cos\theta} + \frac{e^{-jk(r+e\cos\theta)}}{r+e\cos\theta}\right]e^{j\omega t}$

3.2.2 Intégrale de Rayleigh

- Monopôle encastré

La source S (monopôle) se rapproche de l'écran, $e \ll r$ donc $\Phi(r,\theta,\omega) = \frac{Q}{4\pi r} e^{-jkr}(2\cos(ke\cos\theta))$ (on omet le facteur $e^{j\omega t}$) (champ directif)

Encastrement de la source : $e \to 0$ donc $\Phi(r,\omega) = \frac{Q}{2\pi r} e^{-jkr}$ (champ non directif, monopôle encastré rayonne sur 2π steradians)

Source **étendue encastrée** dans un écran rigide infini : la source étendue S est la superposition de monopôles dS de débit acoustique élémentaire $dQ = \vec{v}.\vec{dS} = \vec{v}.\vec{n}\,dS = v_n dS$ donc $\Phi(r,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_S \mathrm{d}Q \frac{e^{-jkr'}}{r'}$

Intégrale de Rayleigh : $\Phi(r,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_S \mathrm{d}v_n(r_s)\frac{e^{-jk|r-r_s|}}{|r-r_s|}$ avec $k = \omega/c$

3.2.3 Application au rayonnement d'un piston plan encastré dans un écran infini

Application de l'intégrale de Rayleigh au cas du haut parleur (= piston encastré dans un écran infini)

- Hypothèses et notations

Membrane du haut parleur vibre avec une vitesse normale $v_n(t) = V_0 e^{j\omega t}$ identique sur toute sa surface (piston), piston plan circulaire de rayon a situé dans le plan (xOz), champ symétrie de révolution par rapport à (Oy),grandes distances $r \gg a$, débit du piston $Q_0 = V_0 \pi a^2$

- Diagramme de directivité

Calcul du **potentiel des vitesses** : $\Phi(r,\theta,\omega) = \frac{Q_0}{2\pi r} e^{-jkr}\frac{2\mathrm{J}_1(ka\cos\theta)}{ka\cos\theta}$ où J_1est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1

Facteur de directivité : $D(\theta) = \frac{2\mathrm{J}_1(ka\cos\theta)}{ka\cos\theta}$, étude de $D(\theta) \Rightarrow$ diagramme de directivité : maximum en $\theta = \pi/2$; $D(\theta) = 0 \Rightarrow p = 0$ pour $\theta_i = \arccos(\frac{X_i}{2\pi}\frac{\lambda}{a})$ où les X_i sont les zéros de $J_1(X)$; λ/a diminue (i.e. fréquence augmente) $\Rightarrow$ le nombre de **lobes de directivité** augmente et la directivité augmente (exemple : ultrasons)

- Bilan énergétique, impédance de rayonnement d'un haut parleur

Résultante des forces de pression exercées sur le piston : $F = \int_S\int_S \frac{j\omega\rho_0}{2\pi} V_0 \frac{e^{-jkr}}{r}\mathrm{d}S\mathrm{d}S'$

Impédance mécanique de rayonnement : $Z_{m\,r} = \frac{F}{V_0} = \frac{j\omega\rho_0}{2\pi}\int_S\int_S \frac{e^{-jkr}}{r}\mathrm{d}S\mathrm{d}S'$

Impédance acoustique de rayonnement : pression $p_T = F/S$ et débit $Q_0 = SV_0 \Rightarrow Z_{a\,r} = \frac{p_T}{Q_0} = \frac{Z_{m\,r}}{S^2}$

Puissance dissipée dans le milieu fluide : $\mathcal{P} = \mathrm{Re}(Z_{m\,r})\frac{V_0^2}{2} = \mathrm{Re}(Z_{a\,r})\frac{Q_0^2}{2}$

Cas du piston circulaire de rayon a : $Z_{m\,r} = \rho_0 c S\left[1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + \frac{j}{ka}S_1(2ka)\right]$ où S_1 est la fonction de Struve d'ordre 1; $z_{m\,r} = \frac{Z_{m\,r}}{\rho_0 c S}$ est appelée impédance mécanique de rayonnement réduite

Chapter 4

[Couplage fluide-structure]

4.1 Intéraction élasto-acoustique

4.1.1 Plaque mince isotrope infinie

-Théorie des plaques, modèle de Kirchhoff-Love (vibrations de flexion transversales)

- Equation du mouvement de flexion, calcul du déplacement $z = W(x, y, t)$, calcul de la pression, relation de dispersion de la plaque

- Impédance propre de la plaque

4.1.2 Problème vibroacoustique, plaque couplée à deux milieux fluides

- Problème couplé mécanique (structure) / acoustique (fluide), équation du mouvement, solution générale, équation de dispersion de la plaque couplée aux fluides, puissance acoustique rayonnée par la plaque, coefficient de rayonnement dans les fluides

- Cas de deux fluides identiques

- Cas du fluide 'léger', fréquence critique

- Cas plus complexes : plaques finies/courbées/couplées avec une cavité

4.2 Acoustique musicale

4.2.1 Généralités sur le son musical

- Production de sons musicaux

- Son musical : voix, instruments de musique, analyse temporelle, analyse spectrale

4.2.2 Corde vibrante (instruments à cordes)

- Corde idéale, corde pincée

- Force transmise par la corde

- Corde réelle, vibrations et rayonnement

4.2.3 Flexion des barres (instruments à percussion)

- Modèle 1D, équation d'Euler-Bernoulli, conditions limites et initiales
- Fréquences propres
- Analyse spectrale des sons émis par la barre

4.3 Acoustique des salles

Notion de réverbération

4.3.1 Théorie modale de la réverbération (théorie ondulatoire)

- Solution de l'équation des ondes pour une salle rectangulaire
- Modes dans une salle rectangulaire, modes axiaux/tangentiels/obliques
- Densité modale, nombres de modes axiaux/tangentiels/obliques
- Approximation hautes fréquences, espacement entre modes

4.3.2 Théorie de la réverbération de Sabine

- Hypothèses
- Pression efficace et densité d'énergie moyenne, bilan d'énergie, puissance absorbée par les murs
- Temps de réverbération, formule de Sabine, ordres de grandeur
- Fréquence de Schroeder et espacement des modes

4.3.3 Théorie de la réverbération de Norris-Eyring

- Libre parcours moyen
- Réverbération de Norris-Eyring

4.3.4 Rayon critique d'une salle

- Densité d'énergie du son direct
- Densité d'énergie du champ diffus
- Pression acoustique efficace, rayon efficace

4.3.5 Applications : propagation à travers un mur, une ouverture, salles couplées

- Transmission à travers un mur
- Transmission à travers une fenêtre
- Salles couplées

4.3.6 Méthodes de simulations en acoustique des salles

- Méthode des images

- Méthode des rayons et des cônes

Bibliographie

Ondes acoustiques – A. Chaigne (Ed. Ecole Polytehcnique 2001)

Ondes mécaniques et diffusion - C. Garing (Ellipses 1998)

Hydrodynamique physique – E. Guyon, J-P. Hulin, L. Petit (EDP Sciences, 2012)

L'acoustique par l'expérimentation – C. Mulet-Marquis (Ellipses, 2017)

+ cours de Mathias Fink/Arnaud Tourin, Denis Duhamel, Simon Ayrinhac (aspects fondamentaux)

+ cours de Christophe Adessi, Christophe Cloud, Xavier Vuylsteke, J. Malchaire, Nicolas Remy (applications)

[+ L Landau & E Lipschitz, Feynman et livres cités dans le cours de Mécanique]

BUPs (exemples récents)

841(2) – À propos d'une analogie entre la mécanique des fluides et l'électromagnétisme – G. Rousseaux, E. Guyon (2002)

875 - Ondes et renversement du temps – M. Fink (2005)

985 - Approche expérimentale de la pression de radiation acoustique – C. Mulet-Marquis (2016)

981 - Trous d'Young en acoustique avec réglage du déphasage temporel entre les sources – C. Mulet-Marquis (2016)

982 - Réponse d'un résonateur de type Helmholtz à différentes excitations – C. Mulet-Marquis (2016)

868 (1) - Une mesure de la vitesse du son – J. Winther (2004)

889 (2) - Harmonicité des instruments à vent cylindriques et coniques – M. Renard, L. Dettwiller (2006)

1002 - Étude d'une lentille à ultrasons - C. Mulet-Marquis et al. (2018)

Sujets

2017 Problème (effet Doppler)

2014 Composition (acoustique)

2009 Composition 'Modèles physiques de quelques instruments de musique et acoustiques'

2004 Compositions (ondes acoustiques)

1995 Composition (ondes)

Leçons 2018-2019

? 22. Rétroaction et oscillations.

24. Ondes progressives, ondes stationnaires.

25. Ondes acoustiques.

26. Propagation avec dispersion.

27. Propagation guidée des ondes.

? 39. Aspects ondulatoires de la matière. Notion de fonction d'onde.

? 45. Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen.

? 46. Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques.

48. Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique.

49. Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités.

Montages 2018-2019

? 17. Métaux.

? 18. Matériaux semi-conducteurs.

? 19. Effets capacitifs.

25. Mesure des fréquences temporelles (domaine de l'optique exclu).

26. Mesure de longueurs.

? 27. Systèmes bouclés.

28. Instabilités et phénomènes non-linéaires.

29. Ondes : propagation et conditions aux limites.

30. Acoustique.

31. Résonance.

32. Couplage des oscillateurs.

33. Régimes transitoires.

Sites Internet

Cours Mathias Fink Collège de France (2008-2009)

https://www.college-de-france.fr/site/mathias-fink/_audiovideos.htm

Site Institut Langevin ESPCI

https://www.institut-langevin.espci.fr/home

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/son/

http://www.agregation-physique.org/

http://bupdoc.udppc.asso.fr/consultation/selections.php

http://www.physagreg.fr/

http://www.physagreg.fr/video.php

https://www.ph-suet.fr/agrégation/

Videos et exemples

- Ondes acoustiques stationnaires

https://www.youtube.com/watch?v=pWekXMZJ2zM (flame tube)

https://www.youtube.com/watch?v=uENITui5_jU (water jet)

https://www.youtube.com/watch?v=3y4EaJrJP9w

https://www.youtube.com/watch?v=KEWWFFf_pzo (levitation acoustique)

https://www.youtube.com/watch?v=odJxJRAxdFU (levitation acoustique)

Trombone de Koenig (interférences sonores)

https://www.youtube.com/watch?v=O-TOK1FOooo

Tube de Kundt (ondes stationnaires)

https://www.youtube.com/watch?v=3dKvGaZA5lQ

- Simulation ondes acoustiques

Pot d'échappement

https://www.youtube.com/watch?v=GvRrn_I-Kbw

- Effet Doppler, onde de choc, mur du son

https://www.youtube.com/watch?v=fD-KkV64cyg (diapason tournant)

https://www.youtube.com/watch?v=jwHUrm5LmDw

- Matériaux et ondes acoustiques

https://www.youtube.com/watch?v=BAmxAUsyOkQ

https://www.youtube.com/watch?v=XKRj-T4l-e8

https://www.youtube.com/watch?v=e3CW0QTzUlc

[https://www.youtube.com/watch?v=cIpu0TT-nIg]

- Retournement temporel

https://www.youtube.com/watch?v=MzikrZqCeQc (simulation)

https://www.youtube.com/watch?v=eXVwFmlWGLo (ondes hydro de surface)

[https://www.youtube.com/watch?v=nuO8u83-Jzw] (ondes hydro de surface)

[https://www.youtube.com/watch?v=XDbLi2YGQn8] (ondes hydro de surface)

- Propagation solides

Table qui chante de Laurie Anderson 1997

https://vimeo.com/19207943

- Audition

https://www.youtube.com/watch?v=D7QHPqllMpU

[https://www.youtube.com/watch?v=7D6LvoCR5Pg]

[https://www.youtube.com/watch?v=PNjOKVaIJLw]

[https://www.youtube.com/watch?v=tGx1syJpp5k]

- Videos ondes

[https://www.youtube.com/watch?v=YviTr5tH8jw]

[https://www.youtube.com/watch?v=URRe-hOKuMs]

[https ://www.youtube.com/watch ?v=95macpu6xgM]

[https://www.youtube.com/watch?v=8IRZYOC7DeU]

- Cavitation

https://www.youtube.com/watch?v=qGSioE58YjA