

Les équations de Maxwell



Sommaire

4.1 Les équations de Maxwell	2
4.1.1 Insuffisance des équations statiques	2
4.1.2 Des équations inchangées...	2
4.1.3 ... et des équations qui permettent de décrire le régime variable	2
4.2 Quelques propriétés des champs électromagnétiques	4
4.2.1 Symétries	4
4.2.2 Relations de passage	4

Capacités exigibles du BO :

- Citer les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday.
- Énoncer les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Thomson.
- Vérifier que le terme de courant de déplacement permet d'assurer la compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge.
- Utiliser les relations de passage fournies.

Dans les chapitres précédents, on a étudié les propriétés électromagnétiques d'un milieu dans lequel existent des charges et des courants stationnaires. On aborde maintenant le cas de distributions de charges et de courants variables ($\rho(M, t)$, $\vec{j}(M, t)$), à l'origine d'un champ électromagnétique (\vec{E} , \vec{B}). La théorie des champs électromagnétiques s'est élaborée durant plusieurs siècles, mais ce n'est qu'au XIX^e siècle que Maxwell a unifié plusieurs approches en une seule théorie que l'on utilise toujours aujourd'hui. Notons néanmoins que la formulation moderne des équations de Maxwell est le fruit d'un travail réalisé par Heaviside, qui a synthétisé les 20 équations initiales de Maxwell en 4 équations vectorielles !

I. Les équations de Maxwell

I.1 Insuffisance des équations statiques

En régime variable, les quatre équations de Maxwell précédemment décrites ne permettent pas de décrire l'ensemble des phénomènes que l'on peut observer. Citons notamment :

- *
 - l'incompatibilité entre les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge, car $\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{B})) = \vec{0} = \text{div}(\mu_0 \vec{j})$ incompatible avec $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$;
 - l'incompatibilité entre les équations de Maxwell, qui découplent champs électrique et magnétique, avec les phénomènes inductifs, où l'on a montré la possibilité de générer un champ électrique (et une différence de potentiel) en faisant varier un champ magnétique ;
 - l'observation du temps de retard entre l'évolution temporelle des sources et la détection de cette évolution par un observateur ne peut être expliquée par des équations qui sont indépendantes du temps.

I.2 Des équations inchangées...

On constate que deux équations de Maxwell sont inchangées en régime variable :

$$\boxed{\text{div} \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{div} \vec{B}(M, t) = 0} \quad (4.1)$$

respectivement les équations de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Thomson. Les conséquences observées en statique sont toujours valables :

- le théorème de Gauss reste valable et relie le flux du champ électrique à travers une surface fermée et la charge $Q(t)$ contenue dans le volume délimité par cette surface

$$\oiint_{(S)} \vec{E}(M, t) \cdot d\vec{S} = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0} \quad (4.2)$$

- le champ magnétique est toujours à flux conservatif, même si le flux peut dépendre du temps. Ainsi les lignes de champ magnétiques sont toujours bouclées sur elles-mêmes.

I.3 ... et des équations qui permettent de décrire le régime variable

a) Équation de Maxwell-Faraday

En régime variable, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit :

$$\boxed{\vec{\text{rot}}(\vec{E}(M, t)) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}} \quad (4.3)$$

Cela traduit directement le fait qu'un champ magnétique variable est source d'un champ électrique. On peut alors classiquement passer à l'équation intégrale :

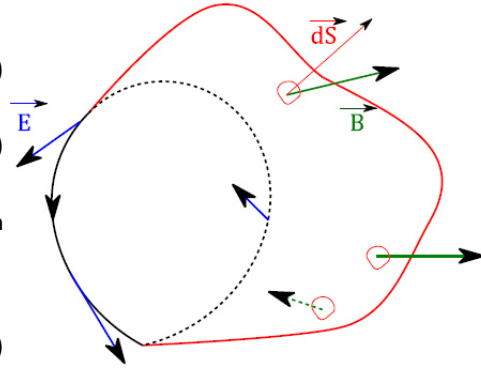
Intégrons l'équation de Maxwell-Faraday à travers une surface (S) immobile qui s'appuie sur un contour (Γ) fermé orienté :

$$\iint_{(S)} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (4.4)$$

$$\iff \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} \quad (4.5)$$

en utilisant le théorème de Stokes. D'où la **loi de Faraday**, à l'origine des phénomènes d'induction :

$$e = \oint_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\Phi_{\text{mag}}}{dt} \quad (4.6)$$



L'égalité $\iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$ passe d'une dérivée partielle à une dérivée droite : autant le champ magnétique dépend *a priori* de l'espace et du temps, autant le flux du champ magnétique ne dépend plus que du temps.

b) Équation de Maxwell-Ampère

L'équation de Maxwell-Ampère doit être conforme à l'équation de conservation de la charge en régime variable. Or :

$$\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \implies \text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \text{div}(\vec{E})) = 0 \implies \text{div} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.7)$$

* En régime variable, ce n'est pas \vec{j} mais $\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ qui est à flux conservatif. Cela revient formellement à rajouter un vecteur densité de courant supplémentaire, appelé **courant de déplacement** $\vec{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Attention, il n'est associé à aucun déplacement de matière ! On écrit alors l'équation de Maxwell-Ampère en régime variable :

$$\text{rot}(\vec{B}(M, t)) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(M, t)}{\partial t} \quad (4.8)$$

Notons que les deux constantes μ_0 et ϵ_0 vérifient

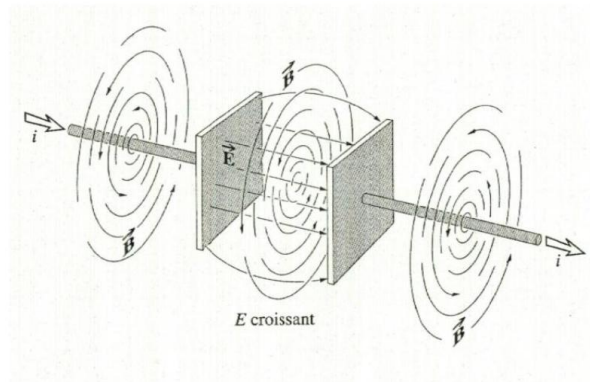
$$\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1 \quad (4.9)$$

avec c la célérité de la lumière dans le vide.

Le théorème d'Ampère prend alors une formulation différente :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}(t) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) \quad (4.10)$$

Remarquons que c'est l'équation de Maxwell-Ampère en régime variable qui permet de justifier le « passage » du courant de part et d'autre d'un condensateur.



En effet, les armatures d'un condensateur sont séparées par un isolant qui interdit tout courant en tant que déplacement de charge. Néanmoins le champ électrique variable à l'intérieur du diélectrique est à l'origine d'un champ magnétique orthoradial, ce dernier permet alors, en appliquant le théorème d'Ampère sur la seconde armature, d'expliquer la présence d'un courant de l'autre côté du condensateur.

II. Quelques propriétés des champs électromagnétiques

II.1 Symétries

Compte-tenu du fait que l'on ne peut plus dissocier les distributions de charges et de courants en régime variable comme sources de champs électromagnétiques, il n'est plus possible non plus de dissocier les propriétés de symétrie du champ électrique et du champ magnétique. Néanmoins, les conclusions obtenues en régime stationnaire se reconduisent en régime variable à condition de prendre en compte les plans de symétrie ou d'antisymétrie communs à l'ensemble des distributions (ρ, \vec{j}) :

- si à chaque instant t , Π_S est un plan de symétrie du couple (ρ, \vec{j}) , pour $M \in (\Pi_S)$, $\vec{E}(M, t)$ est contenu dans (Π_S) et $\vec{B}(M, t)$ lui est orthogonal ;
- si à chaque instant t , Π_A est un plan d'antisymétrie du couple (ρ, \vec{j}) , pour $M \in (\Pi_A)$, $\vec{E}(M, t)$ est orthogonal à Π_S et $\vec{B}(M, t)$ est contenu dans Π_A ;
- en cas d'invariance par translation ou rotation du couple (ρ, \vec{j}) , le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) est indépendant du paramètre caractérisant la translation ou la rotation.

II.2 Relations de passage

Nous avons constaté dans les chapitres précédents, au travers d'exemples, que les distributions volumiques de charges et de courants donnaient naissance à des champs continus dans l'espace. Par contre, les distributions surfaciques et linéiques présentaient souvent des singularités (discontinuité ou divergence). Dans le cas particulier des distributions surfaciques, en notant $\sigma(M, t)$ et $\vec{j}_s(M, t)$ les densités surfaciques de charge et de courant présentes sur une surface S , les champs vérifient les relations de passage :

$$\vec{E}(M_2 \approx M, t) - \vec{E}(M_1 \approx M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.11)$$

$$\text{et } \vec{B}(M_2 \approx M, t) - \vec{B}(M_1 \approx M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (4.12)$$

avec des points M_1 et M_2 infiniment proches d'un point M appartenant à la surface S et le vecteur $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ le vecteur normal à S orienté de M_1 vers M_2 .

Cela a pour conséquence que la composante tangentielle du champ électrique est continue au passage de l'interface, tout comme la composante normale du champ magnétique. Nous réutiliserons ces relations de passage prochainement pour l'étude des milieux ferromagnétiques, et également lors de la réflexion des ondes électromagnétiques sur les métaux.

Exercices

4.1 Décharge d'un conducteur dans l'air

On constate expérimentalement qu'une boule conductrice de rayon R uniformément chargée et abandonnée dans l'air avec une charge initiale q_0 se décharge. Pour interpréter ce phénomène, on suppose que l'air est faiblement conducteur, de conductivité σ : la densité de charge y est nulle et la densité de courant y est fournie par la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. L'origine de l'espace étant prise au centre O de la boule, on adopte des coordonnées sphériques de centre O et on cherche un champ électromagnétique de la forme $\{\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r, \vec{B} = \vec{0}\}$.

1. Justifier la forme de \vec{E} par une étude des symétries et invariances.
2. Déterminer $E(r, t)$ en fonction de $q(t)$ pour $r > R$.
3. Vérifier que les expressions de \vec{E} et \vec{B} sont compatibles avec les équations de Maxwell (on pourra utiliser le formulaire d'analyse vectorielle pour l'expression des opérateurs en coordonnées sphériques) et déterminer $q(t)$.
4. Pourquoi les expériences d'électrostatique sont-elles plus difficiles à réaliser lorsque l'air est humide ?

1. Initialement, la distribution de charge possède les symétries et invariances classiques permettant de chercher un champ électrique sous la forme $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r$, et $\vec{B} = \vec{0}$ en l'absence de charges mobiles. Lorsqu'on considère l'air conducteur, comme il n'y a pas de direction privilégiée pour le transport de charges, on peut écrire $\vec{j} = j(r) \vec{e}_r$ (invariance par rotation d'angle θ et φ), il en est donc de même pour le champ électrique. Enfin, comme les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de courant, $\vec{B} = \vec{0}$.
2. Pour $r > R$, l'application du théorème de Gauss conduit à

$$\vec{E} = \frac{q(t)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (4.13)$$

3. Vérifions que les équations de Maxwell sont bien vérifiées :

- pour le champ électrique, $\text{div}(\vec{E}) = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ avec pour $r > R$ une densité volumique de charge nulle ; $\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ d'après un formulaire d'analyse vectorielle en coordonnées sphériques, conforme au fait que $\vec{B} = \vec{0}$;
- pour le champ magnétique, $\text{div}(\vec{B}) = 0$ est valide, et l'équation de Maxwell-Ampère nous donne (enfin) une relation permettant de déterminer $q(t)$:

$$\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (4.14)$$

c'est-à-dire en utilisant la loi d'Ohm et en projection selon \vec{e}_r :

$$\sigma q(t) + \epsilon_0 \frac{dq}{dt} = 0 \quad (4.15)$$

En posant $\tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$, $q(t) = q_0 e^{-t/\tau}$.

4. Si l'air est humide, la permittivité augmente, donc le temps de décharge est plus important et on pourrait penser que les charges resteraient plus longtemps sur des conducteurs. Cependant il y a de fortes chances que l'air devienne aussi beaucoup plus conducteur, cet effet étant sans doute prédominant !

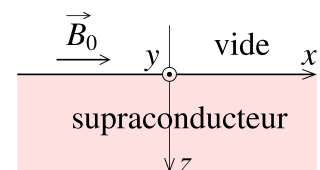
4.2 Effet Meissner

En 1935, les frères London décrivent théoriquement l'« effet Meissner », donnant l'évolution du champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur (dont la permittivité ϵ_0 et la perméabilité μ_0 sont celles du vide).

Lorsque le matériau est dans sa phase supraconductrice et qu'il est soumis à un champ magnétique \vec{B} extérieur, des courants \vec{j} apparaissent. Soient \vec{v} la vitesse instantanée des porteurs de charges associés à ces courants, m leur masse, q leur charge électrique et n leur densité volumique (nombre par unité de volume).

On notera $\vec{E}(M, t)$ le champ électrique à l'intérieur du supraconducteur.

1. (a) À partir de l'équation du mouvement d'un porteur de charge, considéré comme n'étant soumis qu'à la seule action du champ électrique, montrer que $\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$, où l'on exprimera λ en fonction de m , n , q et μ_0 .



- (b) Montrer que λ est une longueur.
- (c) Calculer λ pour l'aluminium. Données : $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, $n = 1,8 \cdot 10^{29}$ m $^{-3}$, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H·m $^{-1}$.
2. Dans toute la suite, on se place dans un cadre (appelé régime quasi-stationnaire magnétique) tel qu'on peut négliger $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant \vec{j} . Le matériau est localement neutre ($\rho = 0$ en tout point). À partir des équations de Maxwell, montrer que $\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} \right) = \vec{0}$. On utilisera $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} - \Delta$.
- On admet qu'on a en réalité $\Delta \vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}$
3. Dans toute la suite, on considère le cas d'une plaque supraconductrice infinie dans les directions x et y , occupant le demi-espace $z > 0$, l'origine O étant choisie sur la surface de la plaque.
- On applique le champ $\vec{B} = B_0 \vec{e}_x$ uniforme à l'extérieur du matériau et on cherche un champ de la forme $\vec{B} = B(z) \vec{e}_x$ dans le matériau.
- (a) Déterminer $B(z)$ à partir de l'équation différentielle précédente, les courants étant considérés comme répartis dans le volume du matériau (pas de courant surfacique).
- (b) Tracer l'allure du graphe $B(z)$ et commenter.

1. (a) La loi de la quantité de mouvement appliquée une charge q conduit à

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = q \vec{E} \implies \frac{m}{nq} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = q \vec{E} \iff \vec{E} = \mu_0 \frac{m}{nq^2 \mu_0} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (4.16)$$

- (b) Donc $\lambda = \sqrt{\frac{m}{nq^2 \mu_0}}$, homogène à une longueur. On peut le montrer via le fait que $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$ et $[Li^2] = [E]$ conduisant à $[\mu_0] = MLT^{-2}A^{-2}$. Ainsi $[\lambda] = L$.
- (c) AN : $\lambda = 12,5$ nm.

2. On va se servir des équations de Maxwell. On cherche à faire apparaître le laplacien de \vec{B} , donc à l'aide de la formule de l'énoncé, prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}(\mu_0 \vec{j}) \iff -\Delta \vec{B} = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} \quad (4.17)$$

comme $\text{div}(\vec{B}) = 0$. Soit en dérivant par rapport au temps, en supposant que l'on peut bien intervertir les opérateurs :

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\Delta \vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (4.18)$$

avec l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. D'où l'équation demandée.

3. (a) L'équation admise a pour forme de solution :

$$B(z) = A \exp(z/\lambda) + C \exp(-z/\lambda) \quad (4.19)$$

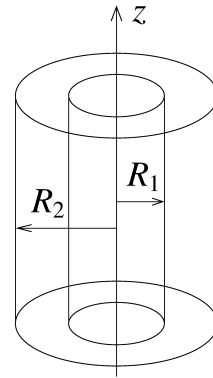
D'après l'énoncé, il n'y a pas de courants surfaciques, donc le champ magnétique est continu à l'interface. On a ainsi $B(z=0) = B_0$. D'autre part le champ magnétique ne diverge pas lorsque $z \rightarrow +\infty$, donc $A = 0$, puis $C = B_0$, ainsi :

$$B(z) = B_0 \exp\left(-\frac{z}{\lambda}\right) \quad (4.20)$$

- (b) Allure exponentiellement décroissante : au bout de quelques λ , le champ magnétique s'annule complètement dans la plaque supraconductrice. Cette dernière repousse le champ, et pourra permettre la lévitation de tels matériaux au-dessus d'un aimant.

4.3 Relaxation dans une enceinte cylindrique

Deux cylindres métalliques coaxiaux, de rayons respectifs R_1 et R_2 , sont séparés par un gaz isolant ayant même permittivité que le vide. À l'instant initial, le conducteur intérieur porte la densité surfacique de charge uniforme σ_0 , tandis que le conducteur extérieur n'est pas chargé. On négligera les effets de bords en raisonnant comme si les cylindres étaient de longueur infinie.



- Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_0(\vec{r})$ créé par ces charges en tout point de l'espace.
- On suppose qu'un rayonnement énergétique rend instantanément le gaz conducteur à $t = 0$, avec une conductivité γ . Quelles sont les directions et les dépendances de $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$?
- À l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère, établir une équation différentielle temporelle relative au champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
 - Intégrer cette équation et donner $\vec{E}(\vec{r}, t)$.
 - Préciser l'évolution de la densité surfacique de charge $\sigma_1(t)$ sur le conducteur intérieur.
 - Interpréter les propriétés obtenues après un temps très long. Vers quelle valeur tend la densité surfacique de charge σ_2 du cylindre extérieur ?
- Déterminer la densité volumique de charge $\rho(\vec{r}, t)$ dans le milieu conducteur de deux manières différentes.

-
- Calcul classique, $\vec{E} = \vec{0}$ pour $r < R_1$, $\vec{E}_0 = \frac{\sigma_0 R_1}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r$.
 - Le milieu étant isotrope, la conduction s'effectue radialement (cela permet la plus grande répulsion des charges). Par conséquent, les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ sont des plans de symétries de la distribution de charges ET de courants, et donc $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ et $\vec{B} = \vec{0}$.

-

$$\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \iff \frac{\epsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{E} = \vec{0} \quad (4.21)$$

comme $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ pour un milieu conducteur.

- Par intégration, en posant $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-t/\tau} = \frac{\sigma_0 e^{-t/\tau} R_1}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r \quad (4.22)$$

si $r > R_1$, et $\vec{E}(r < R_1) = \vec{0}$.

- En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre de rayon R_1^+ et de hauteur h , connaissant l'expression de \vec{E} , on aboutit à $\sigma_1(t) = \sigma_0 e^{-t/\tau}$.
- Après un temps très long, $\vec{E} = \vec{0}$, $\sigma_1 \rightarrow 0$ et l'ensemble des charges se retrouvent sur le conducteur extérieur, on retrouve une situation statique.

$$Q = \sigma_0 2\pi R_1 h = \sigma_2 2\pi R_2 h \iff \sigma_2 = \sigma_0 \frac{R_1}{R_2} \quad (4.23)$$

- On peut utiliser le théorème de Gauss pour un cylindre de rayon $R_1 < r < R_2$ quelconque :

$$E(r, t) 2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} (\sigma_1(t) 4\pi R_1^2 + q) \quad (4.24)$$

avec q la charge contenue dans le gaz du cylindre. On trouve alors $q = 0$! Donc $\rho = 0$. Avec $\text{div} \vec{E} = 0$, on trouve le même résultat (en coordonnées cylindriques).