

# Électromagnétisme dans l'ARQS

## Sommaire

<b>5.1 Approximation des régimes quasi-stationnaires . . . . .</b>	<b>2</b>
5.1.1 Définition de l'ARQS . . . . .	2
5.1.2 ARQS électrique (HP) . . . . .	2
5.1.3 ARQS magnétique . . . . .	2
<b>5.2 Courants de Foucault . . . . .</b>	<b>3</b>
5.2.1 Observations expérimentales et définition . . . . .	3
5.2.2 Évaluation des courants de Foucault dans un conducteur cylindrique . . . . .	4
5.2.3 Dissipation d'énergie . . . . .	4
5.2.4 Influence du feuilletage . . . . .	5
5.2.5 Champ magnétique créé par les courants induits . . . . .	5
<b>5.3 Phénomènes d'induction dans des circuits électriques filiformes . . . . .</b>	<b>5</b>
5.3.1 Auto-induction . . . . .	6
5.3.2 Mutuelle induction . . . . .	7
5.3.3 Énergie magnétique . . . . .	9

## Questions de cours :

- Notion d'approximation des régimes quasi-stationnaires. Cas particulier de l'ARQS magnétique, conséquences.
- Courants de Foucault : définition, évaluation des courants de Foucault dans un conducteur cylindrique, géométrie des courants de Foucault, puissance moyenne dissipée.
- Inductance mutuelle : définition, exemple de calcul simple, présentation du couplage entre circuits et exemples.
- Énergie magnétique : densité volumique d'énergie magnétique, énergie magnétique lors d'un couplage par mutuelle : notion de couplage parfait ou partiel.

## Capacités exigibles du BO :

- Simplifier les équations de Maxwell et l'équation de conservation de la charge dans l'ARQS en admettant que les courants de déplacement sont négligeables.
- Étendre le domaine de validité des expressions des champs magnétiques obtenues en régime stationnaire.
- Relier la circulation de  $\vec{E}$  à la dérivée temporelle du flux magnétique, faire qualitativement le lien avec la loi de Faraday vue en première année.
- Dans le cas d'un conducteur cylindrique soumis à un champ magnétique parallèle à son axe, uniforme et oscillant, décrire la géométrie des courants de Foucault, exprimer la puissance dissipée par effet Joule en négligeant le champ propre. Expliquer l'influence du feuilletage.
- Exprimer l'énergie magnétique d'une bobine seule ou de deux bobines couplées en fonction des coefficients d'inductance et des intensités.
- Citer l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique. La retrouver dans le cas de la bobine dont on néglige les effets de bord à partir de la relation  $E = \frac{1}{L} i^2$ .
- Exploiter la continuité temporelle du flux magnétique.
- Dans le cas de deux bobines couplées, établir l'inégalité  $M^2 \leq L_1 L_2$ .



Nous venons de voir que les équations de Maxwell en régime variable couplent fortement le champ électrique avec le champ magnétique. Néanmoins, dans une certaine gamme de fréquences, nous allons voir que ces équations peuvent être simplifiées et permettent de retrouver des résultats démontrés rigoureusement en régime stationnaire.

## I. Approximation des régimes quasi-stationnaires

### I.1 Définition de l'ARQS

L'approximation des régimes quasi-stationnaires consiste à pouvoir négliger la durée de propagation des phénomènes électromagnétiques d'un point à l'autre d'un système devant tous les temps d'évolution caractéristiques du système (période, temps de relaxation,...). Cela signifie que les phénomènes de propagation des signaux sont imperceptibles à l'échelle du système, et donc que toute modification d'une grandeur en un point quelconque du système est instantanément perçue en tout autre point du système.

Considérons un dispositif de taille caractéristique  $a$ , source d'un champ électromagnétique où  $T$  est le temps caractéristique de sa variation. En notant  $c$  la célérité des ondes électromagnétiques, cela revient à la condition :

$$\tau_{\text{propag}} = \frac{a}{c} \ll T \iff a \ll cT = \lambda \quad (5.1)$$

Pour des fréquences de l'ordre de 1 MHz, l'approximation des régimes quasi-stationnaires est donc vérifiée si  $a \ll 300$  m.

Dans ce cadre général, on distingue deux cas particuliers selon la prédominance de la distribution de charges ou de courants.

### I.2 ARQS électrique (HP)

Dans l'ARQS électrique, on considère que prédomine la distribution de charge. Cela se traduit concrètement, en comparant des grandeurs homogènes, par  $\|\vec{j}\| \ll \rho c$ , ou encore  $\|\vec{E}\| \gg c \|\vec{B}\|$  (cela se démontre, mais avec des outils hors programme). Ainsi les équations de Maxwell dans l'ARQS électriques deviennent :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \text{div } \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad , \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.3)$$

**Dans l'ARQS électrique, le champ électrique est le même que dans le cas statique**, et il existe un champ magnétique dont l'importance énergétique sera faible.

La forme des équations de Maxwell peut se justifier en calculant des ordres de grandeur :

$$\frac{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}} \sim \frac{\frac{B}{T}}{\frac{E}{a}} \sim \frac{cB}{E} \times \frac{a}{cT} \ll 1 \quad (5.4)$$

De la même façon pour l'équation de Maxwell-Ampère, en utilisant en ordre de grandeur  $\frac{E}{a} \sim \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  :

$$\frac{\|\mu_0 \vec{j}\|}{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|} \sim \frac{j}{\varepsilon_0 E/T} \sim \frac{j}{\rho c} \times \frac{cT}{a} \quad (5.5)$$

donc on ne peut rien dire (et il en est de même de  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$  par rapport aux deux termes du second membre).

## I.3 ARQS magnétique

### a) Énoncé

#### ARQS magnétique

L'ARQS magnétique reprend l'hypothèse générale de l'ARQS, à savoir  $a \ll \lambda = cT$ , auquel on adjoint l'hypothèse que la distribution de courant prédomine, à savoir  $\|\vec{j}\| \gg \rho c$ , ou encore  $\|\vec{E}\| \ll c\|\vec{B}\|$ . Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

\*

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (5.6)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (5.7)$$

Ainsi **dans l'ARQS magnétique, le champ magnétique est le même que dans le cas statique**, et il existe un champ électrique dont l'importance énergétique sera faible, mais qui est à l'origine des phénomènes inductifs. Cela se justifie en ordre de grandeur car :

$$\frac{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \mu_0 \vec{j} \right\|} \sim \frac{\rho c}{j} \times \frac{a}{cT} \gg 1 \quad (5.8)$$

de même  $\frac{\left\| \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|}{\left\| \operatorname{rot} \vec{B} \right\|} \sim \frac{E}{cB} \times \frac{a}{cT} \ll 1$ . Par contre on ne peut rien dire pour l'équation de Maxwell-Faraday, où les deux termes ont même ordre de grandeur.

### b) Conséquences

Il en résulte plusieurs conséquences :

- le **vecteur densité de courant est à flux conservatif**, comme en statique, vu que  $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  donc  $\operatorname{div} \vec{j} = 0$  car  $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{B}) = 0$ . Par conséquent l'intensité reste uniforme en tout point d'une branche de circuit, et la loi des nœuds reste valide.
- le champ magnétique dans l'ARQS magnétique a la même expression qu'en régime stationnaire, à condition de remplacer  $I(M)$  ou  $\vec{j}(M)$  en  $I(M, t)$  ou  $\vec{j}(M, t)$ . D'ailleurs, l'équation de Maxwell-Ampère étant identique au cas statique, le **théorème d'Ampère reste donc valable**.

En pratique, c'est dans l'ARQS magnétique que l'on se place pour étudier l'ensemble des phénomènes d'induction (couplage entre bobines, transformateur, moteurs, freinage ou chauffage par induction, etc.). En effet, l'équation de Maxwell-Faraday reste inchangée au cas général, donc la loi de Faraday est valable :

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{S} \quad (5.9)$$

Notons que le champ magnétique « inducteur » étant à l'origine d'un champ électrique induit, dans le cadre d'un conducteur ce dernier est donc source d'un courant induit, lui-même source d'un champ magnétique induit. Selon les cas, on pourra ou non négliger son influence par rapport au champ magnétique inducteur.

## II. Courants de Foucault

### II.1 Observations expérimentales et définition



#### Manipulation

Expérience de l'anneau de fusion, freinage des oscillations d'un pendule pesant ([https://www.youtube.com/watch?v=9\\_rbI-5RnnU](https://www.youtube.com/watch?v=9_rbI-5RnnU)), aimant qui chute dans des tubes de cuivre et PVC.

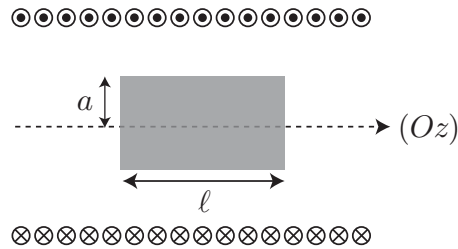
- \* On met en évidence ici l'apparition de courants induits, dont le but est dans le premier cas de chauffer le matériau par effet Joule dans un conducteur ; et dans les deux cas suivants de s'opposer à un mouvement (freinage), en lien avec la loi de Lenz (le mouvement étant à l'origine d'un phénomène d'induction). Dans tous les cas, cela s'explique par la présence d'un courant.

#### Définition : courant de Foucault

Les courants de Foucault sont des courants volumiques induits dans des matériaux non fili-formes plongés dans des champs magnétiques.

## 11.2 Évaluation des courants de Foucault dans un conducteur cylindrique

Considérons un conducteur cylindrique massif de longueur  $\ell$ , rayon  $a$  et de conductivité  $\gamma$ , qui évolue dans le cadre de l'ARQS magnétique. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme sinusoïdal, parallèle à son axe ( $Oz$ ) produit par un solénoïde de rayon  $R_1$ , longueur  $L \gg R_1$  pour négliger les effets de bords, alimenté par un courant d'intensité  $I = I_m \cos(\omega t)$ , et de densité linéique de spires  $n$  :



$$\vec{B} = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z \quad (5.10)$$

avec  $B_m = \mu_0 n I_m$ .

Le conducteur est alors le siège de courants induits que l'on va quantifier en déterminant le champ électrique dans le matériau, vu que  $\vec{j}_i = \gamma \vec{E}$ .

Étudions d'abord les symétries : les symétries du courant inducteur du solénoïde se retrouvent dans celles des champs. Comme le plan passant par  $M$  et  $\vec{e}_z$  est un plan d'antisymétrie pour les courants, le champ électrique lui est donc orthogonal : en se plaçant en coordonnées cylindriques, on écrit donc  $\vec{E} = E(M, t) \vec{e}_\theta$ . Du fait de l'invariance par rotation d'angle  $\theta$  et translation d'axe ( $Oz$ ) (en négligeant les effets de bords), on a donc :

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta \quad (5.11)$$

- \* Utilisons la loi de Faraday sur un contour circulaire de rayon  $r$ , dont le centre passe par l'axe ( $Oz$ ), orienté de sorte que  $\vec{S}$  soit orienté selon  $+\vec{e}_z$  :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} \iff 2\pi r E(r, t) = -\frac{d}{dt} (B_m \cos(\omega t) \pi r^2) \quad (5.12)$$

d'où :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{1}{2} B_m \omega r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \quad (5.13)$$

Le vecteur densité volumique de courant induit s'écrit :

$$\vec{j}_i = \frac{1}{2} \gamma B_m \omega r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta \quad (5.14)$$

## 11.3 Dissipation d'énergie

On vient de montrer que la pièce métallique soumise à un champ magnétique variable est siège de courants orthoradiaux, correspondant à la géométrie des courants de Foucault. Elle reçoit donc de l'énergie électromagnétique, de puissance volumique :

$$p = \vec{j}_i \cdot \vec{E} = \frac{1}{4} \gamma B_m^2 \omega^2 r^2 \sin^2(\omega t) \quad (5.15)$$

de valeur moyenne temporelle :

$$p_{\text{moy}} = \langle p(r, t) \rangle = \frac{1}{8} \gamma B_m^2 \omega^2 r^2 \quad (5.16)$$

- \* On peut alors estimer la puissance moyenne dissipée dans tout le cylindre par intégration :

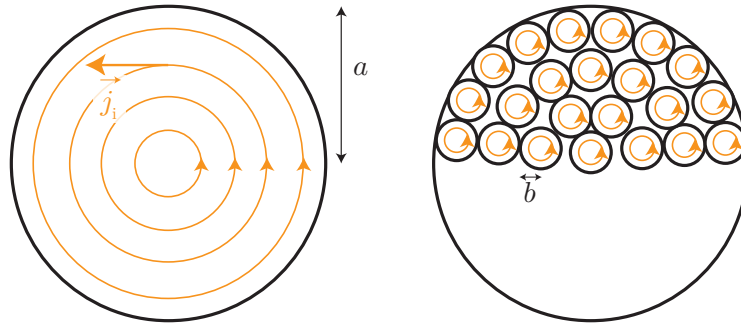
$$\mathcal{P}_{\text{moy}} = \iiint_{(V)} p_{\text{moy}} d\tau = 2\pi \ell \frac{1}{8} \gamma B_m^2 \omega^2 \int_0^a r^3 dr = \boxed{\frac{\pi \gamma \omega^2 B_m^2 \ell a^4}{16}} \quad (5.17)$$

Cette puissance reçue est évidemment dissipée par effet Joule, ce qui explique l'expérience introductive, et le principe général des plaques ou fours à induction.

Notons que l'on pourrait penser utiliser une fréquence très grande, tout en diminuant l'intensité du champ magnétique, de sorte à diminuer la consommation énergétique au niveau de l'inducteur. Néanmoins un effet non inclus dans cette modélisation, **l'effet de peau**, démontre que le champ électrique n'est présent dans un conducteur que sur une certaine épaisseur  $\delta \propto \frac{1}{\sqrt{\omega}}$ , ce qui astreint à haute fréquence le passage du courant sur une zone réduite du matériau et une diminution des pertes par effet Joule. Il y a donc une pulsation qui maximise la puissance dissipée.

## II.4 Influence du feuilletage

Dans certains cas, les pertes liées aux courants de Foucault ne sont pas souhaitables, on cherche donc à les diminuer. Une première approche pourrait consister à diviser le cylindre par  $N$  petits cylindres de rayon  $b$ .



En ordre de grandeur :

$$N \simeq \frac{\pi a^2}{\pi b^2} = \frac{a^2}{b^2} \quad (5.18)$$

est le nombre de cylindres nécessaires, en négligeant les interstices. La puissance dissipée dans les  $N$  cylindres vaut alors, en notant  $K = \frac{\pi \gamma \omega^2 B_{\text{moy}}^2 \ell}{16}$  :

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = N K b^4 = N K \frac{b^4}{a^4} \times a^4 = \frac{K a^4}{N} = \frac{\mathcal{P}_{\text{moy}}}{N} \quad (5.19)$$

C'est-à-dire qu'on réduit d'un facteur  $N$  la puissance perdue.

Dans les faits, on procède au feuilletage du matériau, en le découpant de sorte à réduire la taille des lignes de courants. Nous retrouverons ces phénomènes lors de l'étude des transformateurs et moteurs.

## II.5 Champ magnétique créé par les courants induits

Pour terminer, discutons de l'influence des courants induits : ces derniers sont à l'origine d'un champ magnétique induit. On peut chercher, en ordre de grandeur, à quelle condition on peut le négliger devant le champ magnétique inducteur.

Le champ magnétique induit  $\vec{B}_i$  est lié à l'équation de Maxwell-Ampère, soit en ordre de grandeur :

$$\text{rot } \vec{B}_i = \mu_0 \gamma \vec{E} \implies \frac{B_i}{a} \sim \mu_0 \gamma \omega a B \quad (5.20)$$

car d'après l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \frac{E}{a} \simeq \omega B \implies E \sim \omega \ell B \quad (5.21)$$

Le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique inducteur dès que :

$$\frac{B_i}{B} \ll 1 \iff \mu_0 \gamma \omega a^2 \ll 1 \iff a \ll \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \gamma \omega}} \quad (5.22)$$

En notant  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$  l'épaisseur de peau du conducteur, on trouve donc en ordre de grandeur

$$\frac{B_i}{B} \ll 1 \implies a \ll \delta \quad (5.23)$$

c'est-à-dire que le champ électrique comme les courants se développent dans l'intégralité du matériau conducteur, et non à sa surface.

### III. Phénomènes d'induction dans des circuits électriques filiformes

#### III.1 Auto-induction

##### a) Exemple du solénoïde

Considérons dans un premier temps un solénoïde d'axe  $(O, \vec{e}_x)$  alimenté par un générateur de tension. Dans le cas où cette tension est variable, un phénomène d'induction se produit, que l'on qualifie d'**auto-induction** ou **induction propre**.

**Qualitativement**, un champ magnétique  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_x$  est créé et traverse chacune des spires constitutives du solénoïde. Il existe donc un flux variable au travers de ce circuit, donc une fém induite ; comme le circuit est fermé, on a alors un courant induit, et d'après la loi de Lenz, un champ magnétique est créé dans une direction qui va s'opposer aux variations de champ "propre" de la bobine. Ainsi le circuit agit sur lui-même.

#### Démonstration

On peut aller plus loin en calculant le flux de ce champ, appelé **flux propre**  $\Phi_p$  car lié au champ créé par le circuit source du champ magnétique :

- en première approximation, comme le solénoïde est suffisamment long, on considère que le champ magnétique est constant y compris sur les bords ;
- on suppose aussi que le pas de l'hélice formant la bobine est suffisamment petit devant le rayon pour considérer le bobinage comme un ensemble de  $N$  spires accolées sur une distance  $\ell$  (on parle de bobine à spires jointives).

Le flux dans une spire de la bobine vaut simplement :

$$\Phi_{\text{spire}} = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 n I S \quad (5.24)$$

où l'on a **orienté les spires dans le sens du passage du courant**. Puis en considérant que le flux est le même dans toutes les spires,

$$\Phi_p = N \Phi_{\text{spire}} = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S I \quad (5.25)$$

#### Flux propre et inductance propre

Pour un circuit parcouru par un courant  $i(t)$ , le champ magnétique créé par le circuit étant proportionnel à  $i$ , il est à l'origine d'un flux dans le circuit pouvant se mettre sous la forme :

$$\Phi_p = L i(t) \quad (5.26)$$

où  $L$  est appelé **coefficient d'auto-induction**, ou **inductance propre** ou plus simplement **inductance**, noté  $L$ , et mesuré en henry. Il ne dépend que de la structure géométrique du circuit considéré et est toujours positif.

Dans le cas du solénoïde, par identification :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \quad (5.27)$$

Un odg pour  $N = 1000$ ,  $r = 5$  cm et  $\ell = 20$  cm donne  $L = 50$  mH, valeur typique au laboratoire.

L'utilisation de matériaux ferromagnétiques doux (fer) au sein de la bobine est intéressante car il permet de renforcer le champ magnétique traversant le circuit (on atteint le tesla), et donc augmenter le flux propre : on peut ainsi augmenter la valeur de  $L$ , ou réduire considérablement la taille de la bobine pour qu'il rentre dans un circuit électronique. Nous étudierons ces phénomènes au prochain chapitre.

## b) Fém auto-induite et schéma électrique équivalent

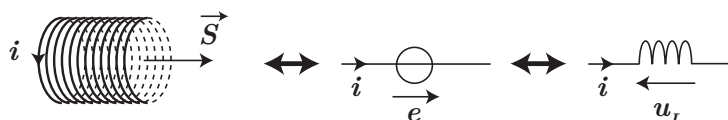
Si le courant circulant dans un circuit fixe est constant, aucun effet d'induction n'est perceptible : il faut que le flux soit variable, et donc que le courant soit variable. Apparaît alors une fém d'auto-induction

$$e = -\frac{d\Phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

correspondant à une tension en convention générateur.

Il est aussi possible d'observer des effets d'auto-induction si la valeur de  $L$  varie au cours du temps : le circuit est alors déformable.

On peut faire le lien avec la loi de Lenz : si un générateur externe impose une augmentation du courant, la fém d'auto-induction est négative et s'oppose à l'augmentation du courant !



D'un point de vue pragmatique, si un exercice n'évoque pas la notion d'inductance propre, il est probable que l'auto-induction puisse être négligée, particulièrement dans le cas où le bobinage est très faible (quelques spires).

On peut alors remplacer dans le schéma électrique le bobinage par une inductance  $L$  de tension  $u_L(t) = L\frac{di}{dt}$ .

## c) Superposition de l'auto-induction et d'un phénomène d'induction externe

Il est possible que plusieurs effets se combinent : d'une part un phénomène d'auto-induction dû au passage d'un courant dans un élément inductif, et d'autre part un champ magnétique "extérieur" qui vient se superposer au champ propre et engendre un flux supplémentaire. Ainsi il faudra distinguer la fém d'auto-induction de la fém due au champ extérieur :  $e = -L\frac{di}{dt} + e_{\text{ext}}$ . Cependant, dans la majorité des cas, le phénomène d'induction lié à un champ extérieur est le phénomène prépondérant, et l'on néglige l'inductance propre.

## III.2 Induction mutuelle

L'induction propre est un phénomène que l'on exploite avec les bobines, par exemple dans les circuits électriques pour du filtrage ou encore pour produire des étincelles. Néanmoins un phénomène encore plus courant est celui de l'**induction mutuelle**, que l'on retrouve dans les antivol, les systèmes NFC des téléphones portables, etc.

### a) Phénomène de couplage entre deux bobines

Considérons pour simplifier le cas deux circuits filiformes pouvant être parcourus par des courants. Outre le phénomène d'auto-induction, le champ créé par le premier circuit peut passer dans le deuxième et provoquer un phénomène d'induction, et vice-versa. On dit que les circuits sont couplés. Le flux dans le premier circuit se décompose alors en deux parties :

$$\Phi_1 = \Phi_{1,p} + \Phi_{2 \rightarrow 1} \quad (5.28)$$

où  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  est le flux du champ magnétique issu du deuxième circuit à travers le premier.

#### Inductance mutuelle

De la même manière que l'on a défini le coefficient d'auto-induction, le flux  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  du champ magnétique créé par le circuit 2 dans le circuit 1 est proportionnel au champ magnétique  $\vec{B}_2$ , donc au courant traversé par le deuxième circuit. On appelle la constante de proportionnalité  $M$ , **coefficient d'inductance mutuelle**, dont le signe est quelconque (et dépend de l'orientation de chaque circuit), exprimé en henry :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = Mi_2 \quad (5.29)$$

On peut montrer également que, de manière symétrique :

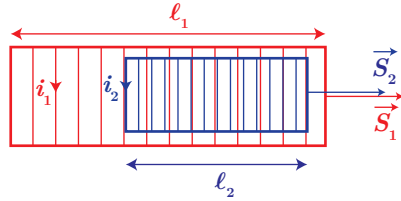
$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = Mi_1 \quad (5.30)$$



avec le même coefficient de proportionnalité, ne dépendant que de la géométrie des deux circuits, et leurs positions respectives.

## Démonstration

Prenons l'exemple de deux solénoïdes emboîtés, de section  $S_i$  et longueur  $\ell_i$ ,  $i \in 1, 2$  avec  $\ell_2 < \ell_1$ .



Calculons le flux  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2, \text{spire}} = \vec{B}_1 \cdot \vec{S}_2 = (\mu_0 N_1 / \ell_1 i_1) S_2 \quad (5.31)$$

puis avec les  $N_2$  spires traversées par le champ magnétique  $\vec{B}_2$ , il vient :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = N_2 \Phi_{1 \rightarrow 2, \text{spire}} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_2}{\ell_1} i_1 = M i_1 \quad (5.32)$$

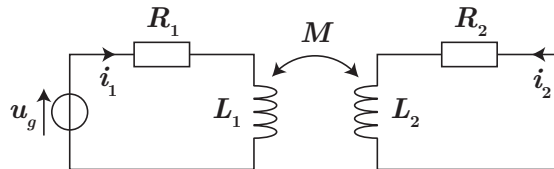
D'un point de vue pratique, il est parfois plus facile de calculer un des deux flux issus du couplage : on peut alors en déduire le coefficient de mutuelle inductance qui sera forcément le même pour l'autre flux.

## Exercice

Refaites la même chose avec  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  afin de montrer que le coefficient  $M$  est identique.

Le calcul donne  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = \left( \frac{N_1}{\ell_1} \right) \ell_2 \times \mu_0 N_2 / \ell_2 i_2 S_2 = M i_2$  puisque le nombre de spires du circuit 1 traversé par le champ  $\vec{B}_2$  est  $\frac{N_1}{\ell_1} \ell_2$ .

Dès que l'on a deux circuits électriques dont les éléments inductifs sont proches, il faut tenir compte de l'inductance mutuelle dans les équations électriques. On peut par exemple étudier le montage ci-dessous :



Pour la bobine 1,  $\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2$  et pour la bobine 2  $\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1$  conduisant aux équations différentielles suivantes par l'application de la loi des mailles :

$$\begin{cases} u_g = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (5.33)$$

$$(5.34)$$

que l'on peut très bien réécrire en régime sinusoïdal forcé si  $u_g(t) = u_0 \cos \omega t$  :

$$\begin{cases} u_0 = i_1 (R_1 + j L_1 \omega) + j M \omega i_2 \\ 0 = i_2 (R_2 + j L_2 \omega) + j M \omega i_1 \end{cases} \quad (5.35)$$

$$(5.36)$$

ainsi l'approche du circuit 2 par rapport au circuit 1 **modifie l'impédance branchée au générateur** car on peut alors écrire en combinant les deux équations

$$u_0 = i_1 \left( R_1 + j L_1 \omega + \frac{M^2 \omega}{R_2 + j L_2 \omega} \right) \quad (5.37)$$

Cela permet concrètement la détection du circuit 2, non relié à un générateur, principe que l'on retrouve dans :

- la détection des voitures (la carrosserie jouant alors le rôle de circuit du fait de sa carcasse métallique) ;

- les détecteurs de vols (une étiquette avec un circuit en spirale sur l'objet, et les portiques jouent le rôle de circuit inducteur).

### III.3 Énergie magnétique

#### a) Densité volumique d'énergie magnétique

On a déjà vu que l'énergie stockée dans une inductance s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} Li^2 \quad (5.38)$$

Dans le cas particulier d'un solénoïde, on peut exprimer la densité volumique d'énergie magnétique associée :

$$* \quad e_m = \frac{\mathcal{E}_m}{S\ell} = \frac{\frac{1}{2} \mu_0 N^2 S i^2}{S\ell} = \boxed{\frac{B^2}{2\mu_0}} \quad (5.39)$$

car  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i$  Cette expression est en fait très générale et sera revue lors des bilans d'énergie pour les ondes électromagnétiques.

Notons que l'énergie magnétique peut s'exprimer en fonction du flux et de  $L$  :

$$\mathcal{E}_m(t) = \frac{1}{2} L \left( \frac{\Phi}{L} \right)^2 = \frac{\Phi(t)^2}{2L} \quad (5.40)$$

- \* Comme l'énergie est une grandeur continue en physique, on en déduit que **le flux magnétique est une fonction continue du temps**.

#### b) Énergie magnétique lors d'un couplage par mutuelle

D'un point de vue strictement énergétique, comment doit-on prendre en compte le couplage par inductance mutuelle ? En effet, on pourrait s'attendre à ce que l'énergie totale sous forme magnétique soit simplement

$$E_t = E_{L_1} + E_{L_2} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \quad (5.41)$$

mais ce n'est pas le cas. En reprenant l'exemple précédent des deux circuits électriques couplés par mutuelle, on va conduire un **bilan énergétique global en multipliant chaque loi des mailles par le courant le traversant** :

$$\begin{cases} u_g i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (5.42)$$

$$\quad \quad \quad \begin{cases} 0 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (5.43)$$

que l'on peut réécrire ainsi :

$$\begin{cases} P_{\text{fournie}} = P_{1,J} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ 0 = P_{2,J} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (5.44)$$

$$\quad \quad \quad \begin{cases} 0 = P_{2,J} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (5.45)$$

Plusieurs termes sont limpides (effet Joule, puissance fournie au générateur, puissance au niveau des inductances), mais les deux termes liés à la mutuelle ne sont pas clairs. Sommons les deux équations :

$$P_{\text{fournie}} = P_{1,J} + P_{2,J} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt} \quad (5.46)$$

où les derniers termes se réécrivent sous la forme  $\frac{d(M i_1 i_2)}{dt}$ . Ainsi le bilan de puissance devient plus clair :

$$P_{\text{fournie}} = P_{1,J} + P_{2,J} + \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \quad (5.47)$$

où

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2} \quad (5.48)$$

est l'énergie magnétique stockée dans les deux bobines, en tenant compte du fait qu'il y a de l'énergie magnétique liée au couplage par mutuelle, *via* le terme  $M i_1 i_2$ .

Comme l'énergie magnétique est positive quels que soient les courants (et le signe de  $M$  n'y change rien), il vient :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} i_2^2 \left( L_1 \frac{i_1^2}{i_2^2} + 2M \frac{i_1}{i_2} + L_2 \right) \geq 0 \quad (5.49)$$

En posant  $x = \frac{i_1}{i_2}$ , il faut donc que le polynôme en  $x$   $L_1 x^2 + 2Mx + L_2$  n'ait aucune racine réelle (sinon changement de signe). Donc le discriminant doit être négatif :

\*

$$\Delta = M^2 - L_1 L_2 \leq 0 \iff |M| \leq \sqrt{L_1 L_2} \quad (5.50)$$

- Le cas  $M = 0$  correspond aux circuits non couplés ;
- le cas  $|M| = \sqrt{L_1 L_2}$  correspond aux circuits **parfaitement couplés**, pour lesquels toutes les lignes de champ magnétique d'un des circuits traversent l'autre circuit et réciproquement ;
- entre ces deux valeurs limites, les circuits sont **partiellement couplés**.

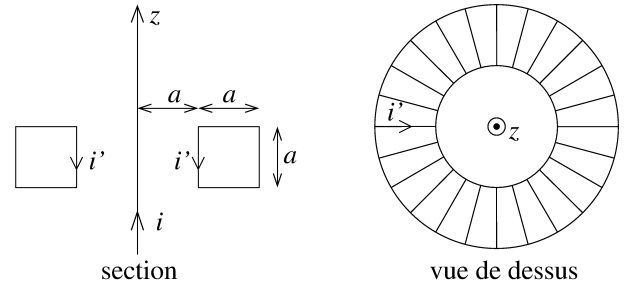
# Exercices

## 5.1 Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est un appareil permettant de mesurer des intensités.

Elle est constituée par un tore de section carrée de côté  $a = 5 \text{ cm}$ , d'axe  $(Oz)$  sur lequel on a bobiné régulièrement un grand nombre  $N = 10^4$  de spires carrées de côté  $a$  en série. Ceci forme un circuit de résistance  $R = 0,2 \Omega$ , fermé sur un ampèremètre de résistance  $r' = 0,3 \Omega$ .

Le tore encercle un fil infini confondu avec l'axe  $(Oz)$  parcouru par un courant d'intensité  $i(t) = I \cos \omega t$  de fréquence  $f = 50 \text{ Hz}$ . C'est  $I$  qu'on souhaite mesurer.



1. En régime permanent, le circuit de la pince ampèremétrique est parcouru par un courant  $i' = I' \cos(\omega t + \varphi)$ . Expliquer l'existence de ce courant.
2. Soit  $\vec{B}$  le champ magnétique total, créé par le fil et la pince.
  - (a) Justifier que  $\vec{B} = B_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$ .
  - (b) En appliquant le théorème d'Ampère, déterminer  $B_\theta(r, z)$  en un point  $M$  situé dans la section d'une spire carrée du tore.
  - (c) En déduire le flux magnétique total  $\phi$  à travers les  $N$  spires.
3. Montrer qu'on a  $\frac{I'}{I} = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r'+R)}{N\mu_0\omega a \ln 2}\right)^2}}$ . En utilisant les valeurs numériques, justifier la simplification  $\frac{I'}{I} \simeq \frac{1}{N}$ .
4. En quoi cet appareil permet-il de mesurer  $I$ ? Quels avantages et inconvénients voyez-vous par rapport à l'utilisation directe d'un ampèremètre?

- 
1. Le fil étant parcouru par un courant d'intensité variable, il génère un champ magnétique variable orthoradial. Son flux à travers le tore est donc variable, ce qui crée bien dans un circuit fermé un courant électrique, de même fréquence que le courant  $i$ .
  2. (a) Invariance par rotation d'angle  $\theta$ , mais pas par translation selon  $(Oz)$  si on tient compte du champ créé par la pince également. Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie pour la distribution de courant, donc  $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$ .  
 (b) Appliquons le théorème d'Ampère à un cercle de rayon  $r$ , d'axe  $(Oz)$ , d'altitude telle que le cercle soit contenu dans le tore :

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = 2\pi r B(r, z) = \mu_0(i - Ni') \iff B(r, z) = \frac{\mu_0(i - Ni')}{2\pi r} \quad (5.51)$$

- (c) Le flux magnétique total à travers les  $N$  spires vaut :

$$\phi = N \iint_{(S)} B(r, z) dr dz = Na \frac{\mu_0(i - Ni')}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 Na(i - Ni')}{2\pi} \ln(2) \quad (5.52)$$

3. Appliquons la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 Na}{2\pi} \ln(2) \frac{d}{dt}(i - Ni') \quad (5.53)$$

Dans le tore, la loi des mailles s'écrit alors :

$$e = (r' + R)i' \implies \underline{e} = -\frac{\mu_0 Na}{2\pi} \ln(2) j\omega(\underline{i} - N\underline{i}') = (r' + R)\underline{i}' \quad (5.54)$$

soit en regroupant les termes :

$$\left(N + j \frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 Na \omega \ln(2)}\right) \underline{i}' = \underline{i} \quad (5.55)$$

soit en module :

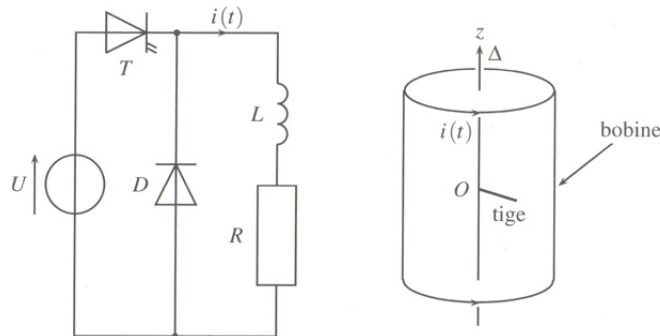
$$\frac{I'}{I} = \left| \frac{1}{N + j \frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 Na \omega \ln(2)}} \right| = \frac{1}{\sqrt{N^2 + \left(\frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 Na \omega \ln(2)}\right)^2}} \quad (5.56)$$

Comme  $\frac{2\pi(r' + R)}{\mu_0 N a \omega \ln(2)} = 23 \ll N$ , on a bien  $\frac{I'}{I} \simeq \frac{1}{N}$ .

4. L'ampèremètre branché à la pince permet donc de mesurer l'intensité efficace de  $i'(t)$ , elle-même reliée à  $I$ . Ce dispositif est donc efficace lorsqu'il est nécessaire de mesurer des intensités importantes, du fait du facteur d'atténuation de  $N = 10^4$ . Ainsi, dans les avantages : mesure sans contact électrique, pour des intensités élevées. Inconvénients : le résultat dépend de la fréquence, on ne peut pas mesurer l'intensité d'un courant continu, peu précis si  $I$  est petit (typiquement, si la résolution de l'ampèremètre est  $r$ , il faut que  $I > Nr$ ).

## 5.2 Mise en rotation d'une tige

Considérons le circuit ci-dessous, où  $U > 0$  est une tension constante. Pour  $t < 0$ , l'interrupteur  $T$  est fermé et l'interrupteur  $D$  est ouvert. À la date  $t = 0$  on ouvre  $T$  et on ferme  $D$ . La bobine a un rayon  $a$ , une longueur  $\ell$ , comporte  $n$  spires par unité de longueur. Sa résistance électrique est  $R$ . La bobine a un axe vertical  $\Delta$ . On attache au centre de la bobine et perpendiculairement à l'axe ( $Oz$ ) une tige homogène de moment d'inertie  $J$ , de longueur  $b$ . La tige peut pivoter sans frottement orthogonalement à ( $Oz$ ). Elle est isolante et porte une charge de densité linéique  $\lambda$  positive et uniforme.



1. Établir l'expression de l'intensité du courant dans la bobine pour  $t < 0$  puis  $t > 0$ .
2. Établir l'expression du champ électrique dans le solénoïde.
3. Calculer la vitesse angulaire  $\omega(t)$  de la tige considérant qu'elle est immobile à  $t = 0$ .

1. Pour  $t < 0$ , l'intensité du courant dans la bobine est  $I_0 = \frac{U}{R}$  par une loi des mailles. Pour  $t > 0$ , on déconnecte le générateur, donc l'énergie stockée dans la bobine est libérée et l'intensité diminue selon :

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (5.57)$$

car  $i$  vérifie  $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$ .

2. La bobine crée un champ magnétique  $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$ , variable, à l'origine d'un champ électrique. On néglige ici la contribution de la tige. Du fait de la distribution des courants, le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan d'antisymétrie, le champ électrique lui est orthogonal, donc  $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_\theta$  (invariance par rotation d'angle  $\theta$  et translation d'axe ( $Oz$ )). En écrivant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \iff \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} \vec{e}_z = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{e}_z = \quad (5.58)$$

donc

$$rE(r, t) = -\mu_0 n \frac{r^2}{2} \frac{di}{dt} \implies \vec{E} = -\mu_0 n \frac{r}{2} \frac{di}{dt} \vec{e}_\theta \quad (5.59)$$

3. On peut maintenant s'intéresser au mouvement de la tige. Qualitativement, le champ électrique orthoradial exerce une force de Lorentz sur les charges qui composent la tige, elle peut donc se mettre à tourner.

- Pour une portion  $dr$  de tige située à une distance  $r$  de l'axe ( $\Delta$ ), la force associée est  $\delta \vec{F} = \lambda dr \vec{E}$  ;
- cette force élémentaire est associée à un moment élémentaire (bras de levier  $r$ ) :

$$\delta \mathcal{M}_\Delta = (\lambda E(r, t) dr) r \quad (5.60)$$

- donc le moment résultant est :

$$\mathcal{M}_\Delta = -\mu_0 n \lambda \frac{di}{dt} \int_0^b \frac{r^2}{2} dr = -\frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6} \frac{di}{dt} \quad (5.61)$$

En appliquant la loi du moment cinétique scalaire à la tige, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_\Delta = -\frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6} \frac{di}{dt} \quad (5.62)$$

dont l'intégration conduit, avec  $\omega(t=0) = 0$  :

$$\omega(t) = \frac{\mu_0 n \lambda b^3}{6J} (i(0) - i(t)) = \frac{\mu_0 n \lambda b^3 U}{6JR} (1 - e^{-t/\tau}) \quad (5.63)$$

### 5.3 Étude d'une table à induction

Le chauffage du fond métallique (plaque circulaire) des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen des courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage inducteur alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et la plaque circulaire. Dans le domaine de la cuisson, il s'agit de créer une forte dissipation par effet Joule dans le fond des récipients tout en limitant au plus bas l'échauffement de l'inducteur. Pour atteindre cet objectif, il faut faire un choix judicieux quant au métal à chauffer. Nous allons comparer les propriétés d'un fond en acier amagnétique à celui d'un fond en acier magnétique.

1. L'inducteur est un bobinage de 20 spires dont la résistance totale est  $R_1 = 1,80 \cdot 10^{-2} \Omega$ . Pour mesurer son inductance propre  $L_1$  on l'alimente sans poser le récipient de cuisson, sous une tension efficace de 24 V à la fréquence de 25 kHz. On mesure alors un courant efficace de 5,1 A. Exprimer  $L_1$  en fonction des données et exprimer sa valeur numérique.
2. L'induit, c'est-à-dire la plaque circulaire constituant le fond métallique du récipient de cuisson, a un rayon de 10 cm et une épaisseur de 1 cm. Lorsqu'elle est en acier magnétique, sa résistance est  $R_2 = 8,26 \cdot 10^{-2} \Omega$  et son inductance propre est  $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$ . Montrer que l'on pourra négliger  $R_2^2$  devant  $(L_2 \omega)^2$  avec une erreur inférieure à 5%.
3. L'inducteur est alimenté sous une tension  $v_1(t)$ . Sachant que l'ensemble inducteur-induit se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle inductance  $M$  :
  - (a) Écrire sans approximation les équations temporelles de couplage entre le courant  $i_1(t)$  circulant dans l'inducteur et  $i_2(t)$  circulant dans la plaque.
  - (b) En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes  $\frac{I_2}{I_1}$ .
  - (c) En déduire l'expression littérale de l'impédance complexe  $\underline{Z} = \frac{V_1}{I_1}$  associée à l'inducteur.
  - (d) Simplifier les expressions ci-dessus puis effectuer le calcul numérique de leurs modules, sachant que la mutuelle est estimée à  $2 \mu\text{H}$ .
4. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W. Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ? En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, de l'intensité du courant dans la plaque et de la puissance de chauffe développée dans celle-ci.

- 
1. On considère un circuit RL série en régime sinusoïdal forcé, dont la loi des mailles permet d'écrire :

$$e(t) = R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} \xrightarrow{c} \underline{e} = (R_1 + jL_1 \omega) \underline{i} \quad (5.64)$$

Ainsi l'amplitude du courant vérifie :

$$I = \frac{E\sqrt{2}}{\sqrt{R_1^2 + L_1^2 \omega^2}} = I_{\text{eff}} \sqrt{2} \iff L_1 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{E^2}{2I_{\text{eff}}^2} - R_1^2} = 30 \mu\text{H} \quad (5.65)$$

2.  $\frac{R_2^2}{L_2^2 \omega^2} = 0,048$ , soit moins de 5%.
3. (a) On a les deux équations (lois de mailles) pour l'inducteur et l'induit respectivement :

$$v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \quad (5.66)$$

(b) En passant en notations complexe :

$$V_1 = (R_1 + jL_1\omega)I_1 + jM\omega I_2 \quad \text{et} \quad 0 = (R_2 + jL_2\omega)I_2 + jM\omega I_1 \quad (5.67)$$

soit à l'aide de la deuxième équation

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \quad (5.68)$$

(c) On injecte cette équation dans la première loi des mailles pour aboutir à :

$$\underline{Z} = \frac{V_1}{I_1} = R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega} \quad (5.69)$$

(d) En se servant de l'approximation de la question 2 :

$$\frac{I_{2,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}} \simeq \frac{|M|}{L_2} \simeq 8,3 \quad (5.70)$$

puis, comme  $L_1\omega \gg R_1$  :

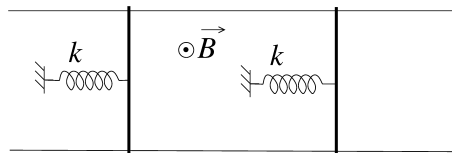
$$\underline{Z} \simeq j \left( L_1\omega - \frac{(M\omega)^2}{L_2\omega} \right) = jL_1\omega \left( 1 - \frac{M^2}{L_1L_2} \right) \quad (5.71)$$

donc  $|\underline{Z}| \simeq L_1\omega \left| 1 - M^2/(L_1L_2) \right| = 2,1 \Omega$ .

4. Dans l'inducteur, la puissance dissipée provient simplement, en régime sinusoïdal forcé, de la partie résistive :  $\langle P_{1,j} \rangle = \langle Ri_1^2(t) \rangle = RI_{1,\text{eff}}^2$  par définition de la valeur efficace. Ainsi  $I_{1,\text{eff}} < \sqrt{P_{1,\text{max}}/R_1} = 53 \text{ A}$ . D'où les résultats suivants :

$$V_{1,\text{eff,max}} = |\underline{Z}| I_{1,\text{eff,max}} = 110 \text{ V} \quad , \quad I_{2,\text{eff,max}} = 8,3 I_{1,\text{eff,max}} = 439 \text{ A} \quad \text{et} \quad \langle P_{2,j} \rangle = R_2 I_{2,\text{eff,max}}^2 = 1,6 \text{ kW} \quad (5.72)$$

## 5. 4 Oscillateurs couplés



Deux barres conductrices horizontales identiques reposent sur des rails conducteur dirigés suivant  $(Ox)$  et distants de  $a$ . Les barres sont libres de se translater sans frottement dans la direction  $(Ox)$ . Elles sont reliées à des ressorts identiques dont l'autre extrémité est fixe, et sont distantes initialement de  $\ell$ , à l'équilibre.

Le tout est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . On écarte la barre gauche de  $x_0$  depuis sa position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. On supposera la résistance totale du circuit  $R$  constante et on négligera l'auto-induction.

1. Étudier les mouvement des deux barres dans le cas où la raideur des ressorts est grande (on précisera ce que cela signifie).
2. Conduire un bilan énergétique.

1. Déterminons l'expression de l'intensité du courant circulant dans le circuit du fait du phénomène d'induction (la taille du circuit varie).

- En notant  $x_1$  et  $x_2$  la position des deux barres par rapport à leur position d'équilibre, le flux du champ magnétique vaut, en orientant le circuit dans le sens trigonométrique :

$$\Phi = Ba(x_2 - x_1 + \ell) \quad (5.73)$$

- la fém d'induction vaut d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = Ba(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5.74)$$

- la loi des mailles permet enfin d'écrire  $e = Ri$ , donc l'intensité du courant vaut

$$i(t) = \frac{Ba}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5.75)$$

D'un point de vue mécanique, on peut appliquer la loi de la quantité de mouvement à chaque barre, de masse identique, que l'on projette selon l'axe horizontal :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k(x_1 - \ell_0) - iaB = -kx_1 - \frac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - \ell_0) + iaB = -kx_2 + \frac{B^2a^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (5.76)$$

$$(5.77)$$

Il s'agit d'un système d'équations différentielles couplées. On peut vérifier les signes facilement : les équations différentielles doivent décrire des systèmes stables si on fixe  $x_1 = 0$  ou  $x_2 = 0$ . On les réécrit en introduisant  $\omega_0^2 = k/m$  et  $\alpha = \frac{B^2 a^2}{mR}$  :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -\omega_0^2 x_1 - \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \\ \ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \end{cases} \quad (5.78)$$

$$\ddot{x}_2 = -\omega_0^2 x_2 + \alpha(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \quad (5.79)$$

On constate que la somme des deux équations conduit à quelque chose de simple à résoudre :

$$\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0 \quad (5.80)$$

soit en posant  $x_+ = x_1 + x_2$  :

$$x_+(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (5.81)$$

L'intuition nous pousse à écrire la différence des deux équations différentielles couplées, soit en posant  $x_- = x_2 - x_1$  :

$$\ddot{x}_- + 2\alpha\dot{x}_- + \omega_0^2 x_- = 0 \quad (5.82)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti, dont la résolution est simplifiée si  $Q \gg 1$ , c'est-à-dire en identifiant  $\frac{\omega_0}{2\alpha} = 2\alpha$  :

$$\frac{\omega_0}{2\alpha} \gg 1 \iff k \gg 4m\alpha^2 = \frac{4(Ba)^4}{mR^2} \quad (5.83)$$

Dans ce cas, la solution s'écrit :

$$x_-(t) \simeq e^{-\alpha t} (C \cos(\omega_0 t) + D \sin(\omega_0 t)) \quad (5.84)$$

car la pseudo-pulsation se confond avec la pulsation propre si  $Q \gg 1$ .

On détermine enfin les constantes d'intégration avec les conditions initiales :

$$x_1(0) = x_0 \quad \text{et} \quad x_2(0) = 0 \implies A = x_0 \quad \text{et} \quad C = -x_0 \quad (5.85)$$

$$\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \implies B\omega_0 = 0 \quad \text{et} \quad -\alpha C + D\omega_0 = 0 \quad (5.86)$$

d'où  $B = 0$  et  $D = \frac{-\alpha x_0}{\omega_0} \ll C$  si  $Q \gg 1$ . Ainsi les solutions simplifiées s'écrivent :

$$x_+(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \quad \text{et} \quad x_-(t) \simeq -x_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t) \quad (5.87)$$

On revient alors aux positions de chaque barre :

$$x_1(t) = \frac{x_+ - x_-}{2} \simeq \frac{x_0}{2} \cos(\omega_0 t) (1 + e^{-\alpha t}) \quad \text{et} \quad x_2(t) \simeq \frac{x_0}{2} \cos(\omega_0 t) (1 - e^{-\alpha t}) \quad (5.88)$$

2. Pour conduire un bilan énergétique, on multiplie par  $i$  l'équation électrique, et par  $\dot{x}_i$  chaque équation mécanique :

$$\begin{cases} ei = Ri^2 \iff P_{\text{fem}} = P_{\text{Joule}} & (P1) \\ m\dot{x}_1\ddot{x}_1 = -k\dot{x}_1x_1 - iaB\dot{x}_1 \iff \frac{dE_{c,1}}{dt} = -\frac{dE_{p,1}}{dt} + P_{L,1} & (P2) \\ m\dot{x}_2\ddot{x}_2 = -k\dot{x}_2x_2 + iaB\dot{x}_2 \iff \frac{dE_{c,2}}{dt} = -\frac{dE_{p,2}}{dt} + P_{L,2} & (P3) \end{cases} \quad (5.89)$$

où on introduit les énergies cinétiques  $E_{c,i} = \frac{1}{2}m\dot{x}_i^2$ , potentielles  $E_{p,i} = \frac{1}{2}kx_i^2$  et on fait apparaître la puissance des forces de Laplace. L'équation (P1) s'interprète par le fait que la puissance fournie par le fém induite est intégralement dissipée par effet Joule. En effectuant la somme des équations (P1), (P2) et (P3), en posant  $E_m = E_{c,1} + E_{c,2} + E_{p,1} + E_{p,2}$  :

$$\frac{dE_m}{dt} + P_{\text{Joule}} = P_{\text{fem}} + P_{L,1} + P_{L,2} = 0 \quad (5.90)$$

car  $P_{\text{fem}} = \frac{(Ba)^2}{R}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 = -P_{L,1} - P_{L,2}$  (couplage électromécanique parfait).

On peut calculer finalement l'énergie dissipée par effet Joule durant tout le mouvement :

$$\mathcal{E}_{\text{Joule}} = E_m(0) - E_m(+\infty) = \frac{1}{2}kx_0^2 - 2 \times \left( \frac{1}{2}k \left( \frac{x_0}{2} \right)^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \left( \frac{x_0}{2} \right)^2 \sin^2(\omega_0 t) \right) = \frac{1}{2}kx_0^2 - \frac{1}{4}kx_0^2 = \frac{1}{4}kx_0^2 \quad (5.91)$$

car  $m\omega_0^2 = k$ .

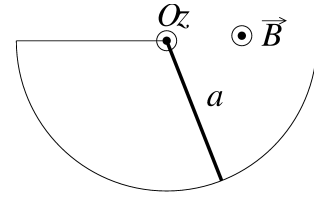


## 5.5 Pendule magnétique

Une barre conductrice de longueur  $a$ , de masse  $m$ , de moment d'inertie  $J = \frac{1}{3}ma^2$  par rapport à  $(Oz)$ , de résistance  $R$  peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal  $Oz$ .

La barre glisse sans frottement sur un support conducteur circulaire de résistance négligeable. On ferme le circuit entre le support et  $O$ . Le système est placé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  uniforme et permanent.

La tige est écartée d'un angle  $\theta_0$  de sa position d'équilibre et abandonnée sans vitesse initiale.



1. Décrire qualitativement les phénomènes qui se produisent.
2. Calculer la force électromotrice induite dans la barre et en déduire l'équation électrique du circuit.
3. Établir l'équation du mouvement de la barre.
4. Dans le cas où  $\theta_0 \ll 1$ , déterminer la valeur minimale du champ magnétique pour que la barre n'oscille pas.

1. Du fait du mouvement de la barre (moment du poids), le flux du champ magnétique à travers la surface fermée varie temporellement, ce qui crée une fém induite et donc un courant dans le circuit fermé. Un moment de Laplace s'exerce donc sur la tige, qui va s'opposer au moment du poids, à l'origine du phénomène d'induction. La tige va être freinée.

2. Le flux vaut  $\Phi = B \times \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} + \theta$  car l'aire d'une portion de disque d'angle  $\alpha$  vaut  $\frac{\alpha}{2}a^2$ . Ainsi la fém  $e = Ri$  (équation électrique) vaut d'après la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{Ba^2}{2}\dot{\theta} = Ri \quad (5.92)$$

3. On va appliquer la loi du moment cinétique scalaire à la tige, par rapport à l'axe  $(Oz)$ , dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$J\ddot{\theta} = -\frac{mga}{2}\sin\theta + \int_0^a (i dr B) \times r = -\frac{mga}{2}\sin\theta - \frac{B^2 a^4}{4R}\dot{\theta} \quad (5.93)$$

où le moment de Laplace correspond bien à un moment de freinage. En divisant par  $J = \frac{1}{3}ma^2$  et en réarrangeant les termes :

$$\ddot{\theta} + \frac{3(Ba)^2}{4mR}\dot{\theta} + \frac{3g}{2a}\sin\theta = 0 \quad (5.94)$$

Cela correspond à l'équation d'un pendule (caractérisé par la présence de  $\sin\theta$ ) amorti par frottements fluides.

4. Dans le cas où l'angle initial est petit, on peut faire l'hypothèse que  $\sin\theta \simeq \theta$ . On aboutit donc à une équation d'oscillateur amorti de forme canonique :

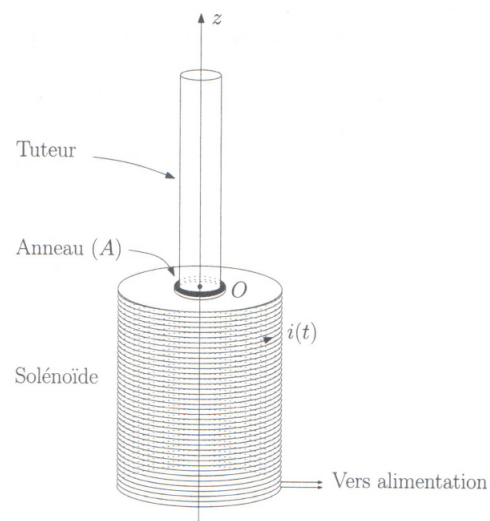
$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2a}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{4mR}{3(Ba)^2} \sqrt{\frac{3g}{2a}} \quad (5.95)$$

La barre ne va pas osciller si le régime de l'oscillateur est apériodique. Il faut donc :

$$Q < \frac{1}{2} \iff \dots \iff B > \left( \frac{32g(mR)^2}{3a^5} \right)^{1/4} \quad (5.96)$$

## 5.6 Expérience d'Elihu Thomson

L'expérience d'Elihu Thomson est une expérience spectaculaire illustrant la loi de Faraday (<https://www.youtube.com/watch?v=PL7KyVIJ1iE>). Le dispositif, représenté ci-contre, peut être réalisé soit avec une alimentation continue soit avec une alimentation alternative. Dans le cas d'une alimentation continue, le protocole est le suivant : on place l'anneau métallique (A) sur l'axe du solénoïde alimenté en courant continu puis, à l'aide d'un interrupteur adapté, on inverse rapidement le sens du courant. On constate alors que l'anneau est projeté vers le haut puis redescend. Dans le cas d'une alimentation alternative, l'anneau est également projeté vers le haut, mais on constate que la lévitation de l'anneau est possible.



On donne l'expression approchée du champ magnétique  $\vec{B}$ , créé par le solénoïde au niveau de l'anneau (A), situé à l'altitude  $z$  :

$$\vec{B} = B_z(z, t)\vec{e}_z + B_r(r, z, t)\vec{e}_r, \text{ où :} \quad (5.97)$$

- $B_z$  est de la forme  $B_z(z, t) = \mu_0 k(z) i(t)$  (avec  $k$  une fonction à valeurs positives) ;
- $B_r(r, z, t) = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$  et  $\frac{\partial B_z}{\partial z} = \mu_0 k'(z) i(t)$  (avec  $k'$  une fonction à valeurs négatives).

On note  $a$  le rayon de l'anneau,  $R$  sa résistance et  $L$  son inductance propre.

1. En appliquant la loi de Faraday, établir l'équation différentielle vérifiée par le courant  $i_a(t)$  induit dans l'anneau en fonction de  $k(z)$  et  $\frac{di}{dt}$ .
2. Exprimer la force agissant sur l'anneau en fonction de  $k'(z)$ ,  $i(t)$  et  $i_a(t)$ .
3. Dans le cas d'une alimentation continue, justifier du mouvement de l'anneau. On pourra dans cette question négliger l'inductance propre de l'anneau. Pourquoi l'anneau ne peut-il pas léviter ?
4. (a) Dans le cas d'une alimentation alternative générant un courant de la forme  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ , on admet que l'anneau est sensible uniquement à la valeur moyenne de la force qui s'exerce sur lui. Justifier du mouvement de l'anneau et notamment de la possibilité de le faire léviter.  
 (b) L'expérience est réalisée avec un anneau de cuivre de masse  $m = 0,87$  g, de résistance  $R = 1 \cdot 10^{-4} \Omega$  et d'inductance propre  $L = 1 \cdot 10^{-8}$  H. On souhaite faire léviter l'anneau à  $h = 1$  cm du solénoïde. Sachant que  $k(h) = 5 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$ ,  $k'(h) = -9 \cdot 10^4 \text{ m}^{-2}$ ,  $k''(h) > 0$  et qu'on travaille à  $f = 1$  kHz, déterminer l'amplitude  $I_m$  de l'intensité du courant parcourant le solénoïde, pour que l'anneau lévite. Cet équilibre est-il stable ?
5. On constate expérimentalement que si quelques instants avant l'expérience, l'on plonge l'anneau métallique dans un bain d'azote liquide, il monte beaucoup plus haut. Justifier.

1. Le flux de  $B$  valant  $\Phi = B_z(z, t)\pi a^2$ , en orientant la spire de sorte que le vecteur surface soit selon  $\vec{e}_z$ . Alors l'application de la loi de Faraday conduit à :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di_a}{dt} + Ri_a = -\mu_0 k(z) \pi a^2 \frac{di}{dt} \quad (5.98)$$

2. La force élémentaire qui s'exerce sur un élément de longueur  $d\vec{r} = ad\theta \vec{e}_\theta$  de l'anneau s'écrit :

$$\delta \vec{F} = i_a(t) d\vec{r} \wedge \vec{B} = i_a(t) ad\theta (B_z(z, t)\vec{e}_r - B_r(r = a, z, t)\vec{e}_z) \quad (5.99)$$

En sommant, seule la contribution selon  $\vec{e}_z$  est non nulle :

$$\vec{F} = -2\pi a i_a(t) B_r(r = a, z, t) \vec{e}_z = + \pi a^2 \mu_0 i_a(t) k'(z) i(t) \vec{e}_z \quad (5.100)$$

3. Il est fort probable que l'inductance propre de l'anneau soit négligeable, donc :

$$i_a(t) = -\frac{\mu_0 \pi a^2}{R} k(z) \frac{di}{dt} \quad (5.101)$$

donc la force de Laplace qui s'exerce sur l'anneau vaut :

$$\vec{F} = -\frac{(\mu_0 \pi a^2)^2}{R} k(z) k'(z) i \frac{di}{dt} \vec{e}_z \quad (5.102)$$

Ainsi, durant l'établissement du courant dans le solénoïde (qui n'est pas instantané par continuité du courant dans une bobine),  $\frac{di}{dt} > 0$ , et  $k(z)k'(z) < 0$ , donc la force est orientée selon  $+\vec{e}_z$ . Si elle compense le poids, l'anneau peut décoller.

Par contre il ne peut pas léviter, car en régime stationnaire,  $\frac{di}{dt} = 0$ .

4. (a) En écrivant  $i_a(t) = I_a \cos(\omega t + \varphi)$ , la force moyenne exercée sur l'anneau vaut :

$$\langle \vec{F} \rangle = \mu_0 \pi a^2 k'(z) \langle i_a(t) i(t) \rangle \vec{e}_z = \mu_0 \pi a^2 k'(z) I_a I_m \frac{\cos(\varphi)}{2} \vec{e}_z \quad (5.103)$$

comme en moyenne,  $\langle \cos(2\omega t + \varphi) \rangle = 0$ . Il est donc nécessaire de déterminer  $I_a \cos \varphi$ , en utilisant les complexes. L'équation électrique se réécrit :

$$-\mu_0 k(z) \pi a^2 j \omega \underline{i} = (R + jL\omega) \underline{i}_a \iff \underline{i}_a = -\frac{\mu_0 k(z) \pi a^2 j \omega}{R + jL\omega} \underline{i} \quad (5.104)$$

donc :

$$I_a \cos(\varphi) = \Re \left( -\frac{\mu_0 k(z) \pi a^2 j \omega}{R + j L \omega} I_m \right) = -\frac{\mu_0 k(z) \pi a^2 L \omega^2}{R^2 + (L \omega)^2} I_m \quad (5.105)$$

donc la force moyenne vaut :

$$\langle \vec{F} \rangle = -\frac{(\mu_0 \pi a^2)^2 k(z) k'(z) L \omega^2}{2(R^2 + (L \omega)^2)} I_m^2 \vec{e}_z \quad (5.106)$$

On constate ici le rôle essentiel de l'inductance propre de l'anneau : sans elle, la force moyenne serait nulle ! La force moyenne est bien orientée vers le haut, ce qui explique la possibilité de le faire léviter si elle compense le poids.

(b) En renversant l'équation précédente, en prenant  $\|\vec{F}\| = mg$  pour compenser le poids :

$$I_m = \frac{1}{\mu_0 \pi a^2} \sqrt{\frac{2mg(R^2 + (L \omega)^2)}{L \omega^2 k(h) |k'(h)|}} = 37 \text{ A} \quad (5.107)$$

Pour justifier de la stabilité, on peut soit :

- discuter qualitativement, en constatant que si  $z > h$ , la force de Laplace décroît en amplitude car  $k''(h) > 0$  donc  $k'$  est une fonction croissante autour de  $h$ , mais négative donc décroît en valeur absolue ;  $k'(h) < 0$  donc  $k$  est une fonction positive décroissante. Donc  $\|\vec{F}(z > h)\| < \|\vec{F}(z = h)\|$  donc le poids ramène l'anneau vers le bas ;
- déterminer le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} + m \vec{g} = -\frac{dE_p}{dz} \vec{e}_z = -\left( mg + \frac{(\mu_0 \pi a^2)^2 k(z) k'(z) L \omega^2}{2(R^2 + (L \omega)^2)} I_m^2 \right) \vec{e}_z \quad (5.108)$$

donc

$$\left( \frac{d^2 E_p}{dz^2} \right)_{z=h} > 0 \iff k'(h)^2 + k(h) k''(h) > 0 \quad (5.109)$$

ce qui est bien vérifié.

5. La diminution de température se traduit très certainement par une diminution de la résistance électrique (anneau en cuivre, un métal voit sa conductivité augmenter si la température diminue). En diminuant  $R$ , on augmente donc la force de Laplace !