

ANALISI MATEMATIKOA

SEGIDAK. SEGIDA KONBERGENTEA

2014-2015 IKASTURTEA

(EUSKERA TALDEA)

**Informatika Ingeniaritzako Gradua
Informatika Fakultatea
Donostia**

Ander Lopez

1 Segida Konbergentea

1.1 Propietatea.

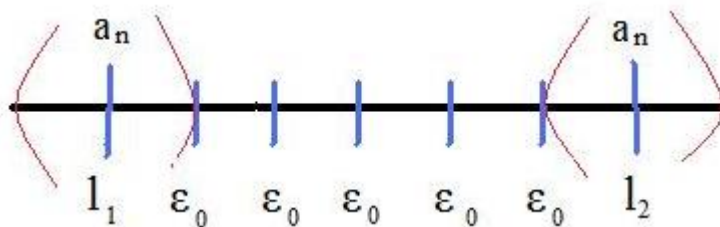
$\{a_n\}$ segida konbergentea bada, limite bakarra du.

Froga:

Demagun l_1 eta l_2 direla a_n segidaren bi limite desberdin, $l_1 \neq l_2$ beraz, $|l_1 - l_2| > 0$ da.

Har dezagun $\varepsilon_0 = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$ erradioa.

Irudia 1:



Osa ditzagun $\varepsilon(l_1, \varepsilon_0)$ eta $\varepsilon(l_2, \varepsilon_0)$ inguruneak. Ingurune horiek disjuntuak dira, hau da, $\varepsilon(l_1, \varepsilon_0) \cap \varepsilon(l_2, \varepsilon_0) = \emptyset$

$-l_1$ bada a_n segidaren limitea, $\varepsilon_0 > 0$ emanik, $\exists n(\varepsilon_0) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n(\varepsilon_0) \quad a_n \in \varepsilon(l_1, \varepsilon_0)$

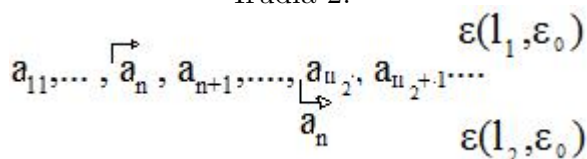
$-l_2$ bada a_n segidaren limitea, $\varepsilon_0 > 0$ emanik,

$\exists n_2(\varepsilon_0) \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_2(\varepsilon_0) \quad a_n \in \varepsilon(l_2, \varepsilon_0)$

Hortik, $n_0(\varepsilon_0) = \max \{n_1(\varepsilon_0), n_2(\varepsilon_0)\}$ bada, $\forall n \geq n_0(\varepsilon_0)$ $a_n \in \varepsilon(l_1, \varepsilon_0) \cap \varepsilon(l_2, \varepsilon_0)$ ateratzen dugu.

Hori ezinezkoa da inguruneak disjuntuak direlako. Ondorioz, bi limiteak ezin dira ezberdinak izan.

Irudia 2:



1.2 Propietatea.

$\{a_n\}$ segida konbergetea bada, bere azpisegida guztiak konbergenteak dira eta limite bera dute.

1.3 Propietatea.

a_n segida konbergentea bada, segida bornatua da.

Froga: Demagun l dela a_n segidaren limitea

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \quad \underline{a_n \in \varepsilon(l, \varepsilon)} \text{ edo } \underline{a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)}$$

$$\text{edo } \underline{(l - \varepsilon) < a_n < (l + \varepsilon)}$$

Horrek esan nahi du segidaren $\{a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots\}$ azpimultzoa bornaturik dagoela. Bestalde, $\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}\}$ azpimultzoa finitua da, beraz bornatua da. Ondorioz, $\{a_n\}$ segida bi azpimultzo bornatuan banatu dugu, hau da, $\{a_n\}$ segida ere bornatua da.

1.4 Propietatea.

$\{a_n\}$ segida konbergentearen limitea ez bada zero, segidaren gai batetik aurrera segidaren gai guztiak limitearen zeinua dute.

1.5 Propietatea.

$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segida limite l bada eta $\forall n \geq n_0 \quad a_n \leq C_n \leq b_n$ bada, $\{C_n\}$ segida ere konbergentea da eta bere limitea l da.

1.6 Adibidea.

$\{ \sin n \}$ aztertuko dugu:

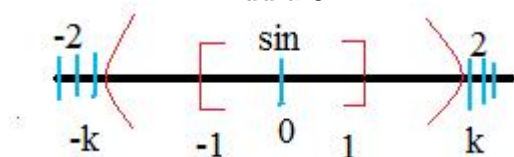
$\{D_n\} = \{ \sin n \ / \ \sin n > \frac{1}{2} \} = \{1, \sin 2, \sin 7, \dots\}$ konbergentea balitz, $\frac{1}{2} < l_1 < 1$ litzateke.

$\{E_n\} = \{ \sin n \ / \ \sin n < \frac{-1}{2} \} = \{4, \sin 5, \sin 10, \dots\}$ konbergentea balitz, $\frac{-1}{2} > l_2 > -1$ litzateke.

Hortaz, $l_1 \neq l_2$ lirateke. Ondorioz $\{ \sin n \}$ ezin da konbergentea izan.

Dibergentea izateko $\forall k > 0 \quad \exists n_0(k) \in \mathbb{N} \ / \ \forall n > n_0(k) \quad a_n \in \text{ext}(\varepsilon(0, k)) \mid a_n > k$

Irudia 3:



baina $\forall n \sin n \in (-2, 2)$, beraz, ezin da dibergentea izan.

Ondorioz $\{\sin n\}$ oszilatzailea da edo $\nexists \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$

1.7 Adibidea.

$$a_n = \frac{n+2}{2n-1}$$

3, 4/3, 1, 6/7,...

Seguida geroz eta txikiagoa da

$$a_n - a_{n+1} > 0$$

$$\frac{n+2}{2n-1} - \frac{(n+1)+2}{2(n+1)-1} > 0$$

$$\frac{n+2}{2n-1} - \frac{n+3}{2n+1} > 0$$

$$\frac{2n^2 + n + 4n + 2 - 2n^2 - 6n + n + 3}{4n^2 - 1} > 0$$

$$\frac{5}{4n^2 - 1} > 0$$

Monotonoa da:

$$-a_1 = 3$$

$$-a_3 = 1$$

$$-a_{1000} = 0.501....$$

Beraz limitea 0,5 da. Eta konbergentea dela ere esan genezake:

$$0,5 < a_n \leq 3$$

1.8 Adibidea.

$$a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \quad n \geq 2$$

a_1 izanik segida konbergentea alda?

$$n = 1, a_1 = 1 \leq 2$$

$a_{n+1} \leq 2$ dela konprobatu behar dugu.

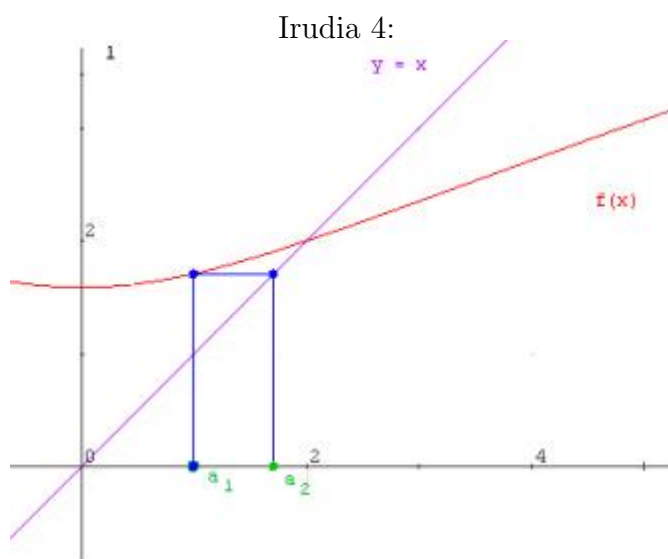
$$(a_n)^2 \leq 4 \Rightarrow 4 + (a_n)^2 \leq 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \leq \sqrt[3]{8} \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \leq 2$$

Orain monotonia dela ikusiko dugu.

$$a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow \sqrt[3]{4 + (a_n)^2} \geq a_n \Leftrightarrow 4 + (a_n)^2 \geq (a_n)^3 \Leftrightarrow (a_n)^3 - (a_n)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow (a_n - 2)((a_n)^2 + (a_n) + 2) \leq 0$$

Lehen $0 \leq a_n \leq 2$ dela frogatu dugu beraz $a_{n+1} \geq a_n$ betetzen da.

Beraz Segida konbergentea da.



1.9 Adibidea.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ segida, segida konbergentea alda? Eta bere limitea?

Konbergentea izateko monotonia eta bornatua izan behar du.

n ri balioak emanik ikus daiteke monotonia dela beraz bornatua legoke.

Proba dezagun $0 < a_n \leq 1$.

$0 < a_n \leq 1$ bada orduan $0 < a_{n+1} \leq 1$ orduan suposatuz $0 < a_n \leq 1$ hau ere egia da
 $-1 \leq -a_n < 0$

Biei 3a gehituz:

$$2 < 3 - a_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3 - a_n} < \frac{1}{2}$$

Orduan, $0 < a_{n+1} \leq 1$

Monotonia alda?

$a_{n+1} \leq a_n$:

$$\frac{1}{3 - a_n} \leq a_n \Leftrightarrow 1 \leq (3 - a_n)a_n \Leftrightarrow (a_n)^2 - 3a_n + 1 \leq 0$$

Beraz bai betetzen da eta beraz konbergentea da.

Limitea kalkulatu dugu orain.

L deituko diogu a_n segidari:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 - a_{n-1}} = \frac{1}{3 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1}}$$

L -k hau bete behar du:

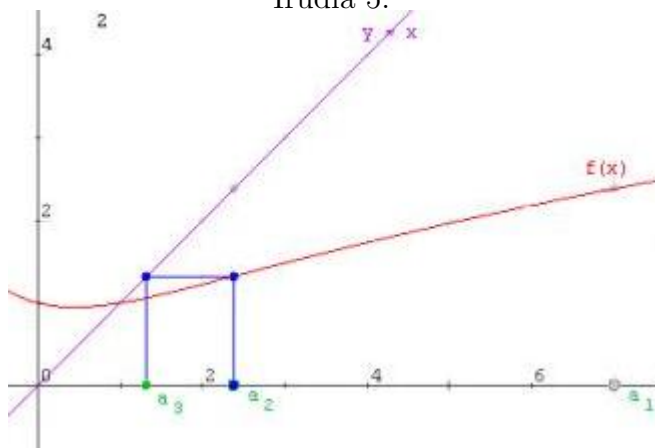
$$L = \frac{1}{3-L} \Leftrightarrow L(3-L) = 1$$

$$x(3-x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Beraz } L = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$$

Irudia 5:



1.1 Segida Monotonoa

1.10 Definizioa.

$a_n \subset \mathbb{R}$ segida emanik,

- a_n monotono gorakorra da $\forall n \geq n_0$ $a_n \leq a_{n+1}$ betetzen bada.
- a_n hertsiki monotono gorakorra da $\forall n \geq n_0$ $a_n < a_{n+1}$ betetzen bada.
- a_n monotono beherakorra da $\forall n \geq n_0$ $a_{n+1} \leq a_n$ betetzen bada.
- a_n hertsiki monotono beherakorra da $\forall n \geq n_0$ $a_{n+1} < a_n$ betetzen bada.

1.11 Adibidea.

- $\{1\}$ segida monotono gorakorra eta beherakorra da.
- $\{\frac{n^2 - 1}{n^2}\}$ segida hertsiki monotono gorakorra da.
- $\{\frac{n^2 + 1}{n^2}\}$ segida hertsiki monotono beherakorra da.

1.12 Teorema.

Segida monotono bornatuak konbergenteak dira.

1.13 Adibidea.

$$\{(1 + \frac{1}{n})^n\} \rightarrow e$$

Froga daiteke edozein n hartuta dagoela $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n < 3$, hau da, bornatua dela. Segida hertsiki monotono gorakorra da.

1.14 Adibidea.

$$a_n = \frac{2n - 1}{n} \text{ segida monotonoa alda?}$$

Ikus dezagun hau betetzen duen:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1) - 1}{n+1} - \frac{2n - 1}{n} = \\ &= \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{(2n+1)*n - (n+1)(2n-1)}{(n+1)*1} = \\ &= \frac{n^2 - n^2 + 1}{(n+1)*n} = \frac{1}{(n+1)*n} > 0 \end{aligned}$$

Bai, beraz monotonoa da.