ANALISI MATEMATIKOA

SEGIDAK. SEGIDA KONBERGENTEA

2014-2015 IKASTURTEA

(EUSKERA TALDEA)

Informatika Ingeniaritzako Gradua
Informatika Fakultatea
Donostia

Ander Lopez

1 Segida Konbergentea

1.1 Propietatea.

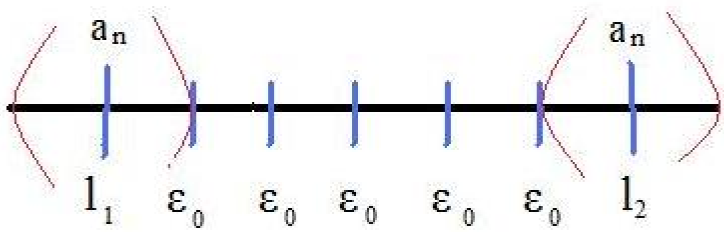
$\{a_n\}$ *segida konbergentea bada, limite bakarra du.*

Froga:

Demagun l_1 *eta* l_2 *direla* a_n *segidaren bi limite desberdin,* $l_1 \neq l_2$ *beraz,* $| l_1 - l_2 |> 0$ *da.*

Har dezagun $\varepsilon_0 = \dfrac{| l_1 - l_2 |}{3}$ *erradioa.*

Irudia 1:



Osa ditzagun $\varepsilon((l_1, \varepsilon_0)$ *eta* $\varepsilon(l_2, \varepsilon_0)$ *inguruneak. Ingurune horiek disjuntuak dira, hau da,* $\varepsilon(l_1,\varepsilon_0) \cap \varepsilon(l_2,\, \varepsilon_0) = \emptyset$

-l_1 *bada* a_n *segidaren limitea,* $\varepsilon_0 > 0$ *emanik,* $\exists n(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n(\varepsilon_0) \quad a_n \in \varepsilon(l_1, \varepsilon_0)$

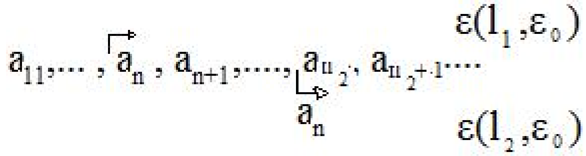
-l_2 *bada* a_n *segidaren limitea,* $\varepsilon_0 > 0$ *emanik,*

$\exists n_2(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}\ /\ \forall n \geqslant n_2(\varepsilon_0) \qquad a_n \in \varepsilon(l_2, \varepsilon_0)$

Hortik, $n_0(\varepsilon_0) = max\ \{n_1(\varepsilon_0), n_2(\varepsilon_0)\}$ *bada,* $\forall n \geqslant n_0(\varepsilon_0)$
$a_n \in \varepsilon(l_1,\, \varepsilon_0) \cap \varepsilon(l_2,\, \varepsilon_0)$ *ateratzen dugu.*

Hori ezinezkoa da inguruneak disjuntuak direlako. Ondorioz, bi limiteak ezin dira ezberdinak izan.

Irudia 2:



1.2 Propietatea.

$\{a_n\}$ segida konbergetea bada, bere azpisegida guztiak konbergenteak dira eta limite bera dute.

1.3 Propietatea.

a_n segida konbergentea bada, segida bornatua da.

Froga: Demagun l dela a_n segidaren limitea

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \; / \forall n \geqslant n_0(\varepsilon) \qquad \underline{a_n \in \varepsilon(l, \varepsilon)} \text{ edo } \underline{a_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)}$$

$$\text{edo } \; \underline{(l-\varepsilon) < \; a_n \; < (l+\varepsilon)}$$

Horrek esan nahi du segidaren $\{a_{n0}, a_{n0+1}, ...\}$ azpimultzoa bornaturik dagoela. Bestalde, $\{a_1, a_2, ..., a_{n0-1}\}$ azpimultzoa finitua da, beraz bornatua da. Ondorioz, $\{a_n\}$ segida bi azpimultzo bornatuan banatu dugu, hau da,$\{a_n\}$ segida ere bornatua da.

1.4 Propietatea.

$\{a_n\}$ segida konbergentearen limitea ez bada zero, segidaren gai batetik aurrera segidaren gai guztiak limitearen zeinua dute.

1.5 Propietatea.

$\{a_n\}$ eta $\{b_n\}$ segida limite l bada eta $\forall n \geqslant n_0 \;\; a_n \leqslant C_n \leqslant b_n$ bada,$\{C_n\}$ segida ere konbergentea da eta bere limitea l da.

1.6 Adibidea.

$\{sinn\rceil$ aztertuko dugu:

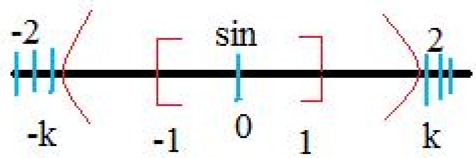
$\{D_n\} = \{sinn \;/\; sinn > \frac{1}{2}\} = \{1, sin2, sin7, ...\}$ konbergentea balitz, $\frac{1}{2} < l_1 <$ 1 litzateke.

$\{E_n\} = \{sinn \;/\; sinn < \frac{-1}{2}\} = \{4, sin5, sin10, ...\}$ konbergentea balitz, $\frac{-1}{2} > l_2 >$ -1 litzateke.

Hortaz, $l_1 \neq l_2$ lirateke. Ondorioz $\{sinn\}$ ezin da konbergentea izan.

Dibergentea izateko $\forall k > 0 \quad \exists n_0(k) \in \mathbb{N} \;/\; \forall n > n_0(k) \qquad a_n \in \; ext(\varepsilon(0, k)) \mid a_n \mid > k$

Irudia 3:



baina $\forall n$ $sinn \in (-2, 2)$*, beraz, ezin da dibergentea izan.*

Ondorioz $\{sinn\}$ *oszilatzailea da edo* $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} sinn$

1.7 Adibidea.
$a_n = \dfrac{n+2}{2n-1}$

3, 4/3, 1, 6/7,...

Seguida geroz eta txikiagoa da

$a_n - a_{n+1} > 0$

$$\frac{n+2}{2n-1} - \frac{(n+1)+2}{2(n+1)-1} > 0$$
$$\frac{n+2}{2n-1} - \frac{n+3}{2n+1} > 0$$
$$\frac{2n^2+n+4n+2-2n^2-6n+n+3}{4n^2-1} > 0$$
$$\frac{5}{4n^2-1} > 0$$

Monotonoa da:

-$a_1 = 3$

-$a_3 = 1$

-$a_{1000} = 0.501....$

Beraz limitea 0,5 da. Eta konbergentea dela ere esan genezake:

$$0,5 < a_n \leqslant 3$$

1.8 Adibidea.
$a_{n+1} = \sqrt[3]{4+(a_n)^2}$ $n \geqslant 2$
a_1 *izanik segida konbergentea alda?*

$n = 1$, $a_1 = 1 \leqslant 2$
$a_{n+1} \leqslant 2$ *dela konprobatu behar dugu.*

$(a_n)^2 \leqslant 4 \Rightarrow 4+(a_n)^2 \leqslant 4+4=8 \Rightarrow \sqrt[3]{4+(a_n)^2} \leqslant \sqrt[3]{8} \Rightarrow a_{n+1}=\sqrt[3]{4+(a_n)^2} \leqslant 2$

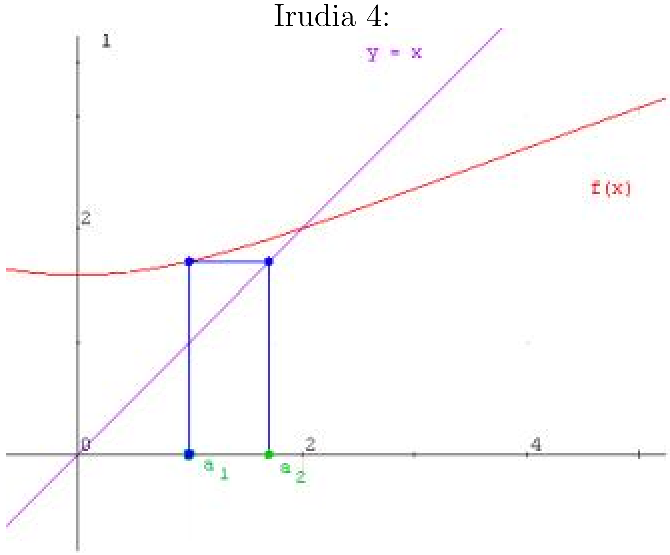
Orain monotonoa dela ikusiko dugu.

$a_{n+1} \geqslant a_n \Leftrightarrow \sqrt[3]{4+(a_n)^2} \geqslant a_n \Leftrightarrow 4+(a_n)^2 \geqslant (a_n)^3 \Leftrightarrow (a_n)^3-(a_n)^2-4 \leqslant 0 \Leftrightarrow (a_n-2)((a_n)^2+(a_n)+2) \leqslant 0$

Lehen $0 \leqslant a_n \leqslant 2$ *dela frogatu dugu beraz* $a_{n+1} \geqslant a_n$ *betetzen da.*

Beraz Segida konbergentea da.

Irudia 4:



1.9 Adibidea.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *segida, segida konbergentea alda? Eta bere limitea?*

Konbergentea izateko monotonoa eta bornatua izan behar du.

n ri balioak emanik ikus daiteke monotonoa dela beraz bornatua legoke.

Proba dezagun $0 < a_n \leqslant 1$.

$0 < a_n \leqslant 1$ *bada orduan* $0 < a_{n+1} \leqslant 1$ *orduan suposatuz* $0 < a_n \leqslant 1$ *hau ere egia da*

$$-1 \leqslant -a_n < 0$$

Biei 3a gehituz:

$$2 < 3 - a_n < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{3 - a_n} < \frac{1}{2}$$

Orduan, $0 < a_{n+1} \leqslant 1$

Monotonoa alda?

$a_{n+1} \leqslant a_n$*:*

$$\frac{1}{3 - a_n} \leqslant a_n \Leftrightarrow 1 \leqslant (3 - a_n)a_n \Leftrightarrow (a_n)^2 - 3a_n + 1 \leqslant 0$$

Beraz bai betetzen da eta beraz konbergentea da.

Limitea kalkulatuko dugu orain.
L deituko diogu a_n *segidari:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3 - a_{n-1}} = \frac{1}{3 - \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1}}$$

L-k hau bete behar du:

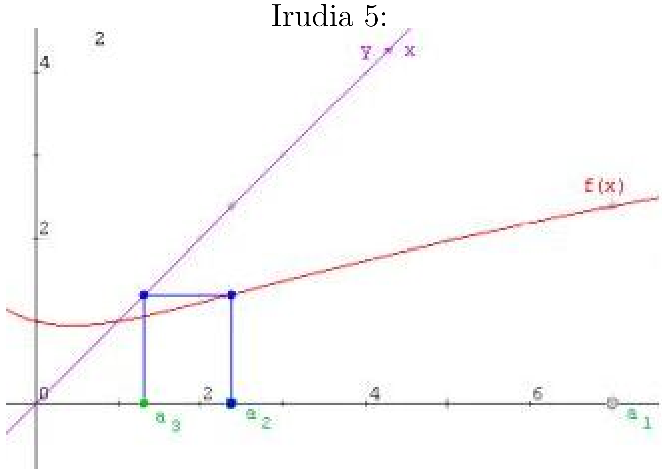
$L = \frac{1}{3-L} \Leftrightarrow L(3 - L) = 1$

$x(3 - x) = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Beraz $L = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2} < 1$

Irudia 5:



1.1 Segida Monotonoa

1.10 Definizioa.

$a_n \subset \mathbb{R}$ *segida emanik,*

- a_n *monotono gorakorra da* $\forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant a_{n+1}$ *betetzen bada.*
- a_n *hertsiki monotono gorakorra da* $\forall n \geqslant n_0 \quad a_n < a_{n+1}$ *betetzen bada.*
- a_n *monotono beherakorra da* $\forall n \geqslant n_0 \quad a_{n+1} \leqslant a_n$ *betetzen bada.*
- a_n *hertsiki monotono beherakorra da* $\forall n \geqslant n_0 \quad a_{n+1} < a_n$ *betetzen bada.*

1.11 Adibidea.

- $\{1\}$ *segida monotono gorakorra eta beherakorra da.*
- $\{\frac{n^2-1}{n^2}\}$ *segida hertsiki monotono gorakorra da.*
- $\{\frac{n^2+1}{n^2}\}$ *segida hertsiki monotono beherakorra da.*

1.12 Teorema.

Segida monotono bornatuak konbergenteak dira.

1.13 Adibidea.

$\{(1+\frac{1}{n})^n\} \to e$

Froga daiteke edozein n *hartuta dagoela* $2 \leqslant (1+\frac{1}{n})^n < 3$*, hau da, bornatua dela. Segida hertsiki monotono gorakorra da.*

1.14 Adibidea.

$a_n = \dfrac{2n-1}{n}$ *segida monotonoa alda?*

Ikus dezagun hau betetzen duen:

$$a_{n+1} - a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} =$$

$$= \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{(2n+1)*n-(n+1)(2n-1)}{(n+1)*1} =$$

$$= \frac{n^2-n^2+1}{(n+1)*n} = \frac{1}{(n+1)*n} > 0$$

Bai, beraz monotonoa da.