**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации**

федеральное государственное автономное образовательное учреждение

высшего образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ**

**ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Инженерная школа природных ресурсов

Направление подготовки Химическая технология

Отделение химической инженерии

**Численные методы**

**Решения обыкновенных дифференциальных уравнений**

**Лабораторная работа по дисциплине «Углубленный курс информатики»**

Выполнил студент гр. А.В. Исаева

(Подпись)

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 г.

Отчет принят:

Преподаватель

доцент ОХИ ИШПР, к.т.н. В.А. Чузлов

(Подпись)

\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2020 г.

Томск 2020 г.

**Цель работы:** составление программ с решением обыкновенных дифференциальных уравнений.

**Теоретическая часть**

**Метод Эйлера**

Пусть дано дифференциальное уравнение:

С начальным условием:



****

Формула Эйлера***:***

где *h* – шаг вычисления;  *f(xi, yi)* – правая часть дифференциального уравнения

**Метод Рунге-Кутты**

Пусть дано дифференциальное уравнение:

С начальным условием:



****

Формула Эйлера***:***

где *h* – шаг вычисления;  *f(xi, yi)* – правая часть дифференциального уравнения

**Практическая часть**

**Задание 1**

**Исходные данные**:



**Задание**

Решите дифференциальное уравнение методами Эйлера и Рунге-Кутты. Определите погрешность расчетного значения переменной ***y*** для каждого из методов, использовав формулу:

где - расчетное значение, - значение, полученное из аналитического решения.

**Программная реализация**

1. **program** lab12\_1a;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -(2 \* y + 1) \* cos(x) / sin(x);

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := (5 / (2 \* sin(x) \* sin(x))) - 1 / 2

**end**;

**function** eyler(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(eyler(1, 2, 0.1, 3.0307)))

**end**.

**Ответ**

1.0000 3.0307 0.0002

1.1000 2.5773 2.6563

1.2000 2.2640 4.7870

1.3000 2.0491 6.5469

1.4000 1.9076 8.0402

1.5000 1.8245 9.3430

1.6000 1.7916 10.5170

1.7000 1.8050 11.6172

1.8000 1.8649 12.6973

1.9000 1.9752 13.8141

2.0000 2.1443 15.0302

**program** lab12\_1b;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -(2 \* y + 1) \* cos(x) / sin(x);

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := (5 / (2 \* sin(x) \* sin(x))) - 1 / 2

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(runge\_kutt\_method(1, 2, 0.1, 3.0307)))

**end**.

**Ответ**

1.0000 3.0307 0.0002

1.1000 2.6476 0.0003

1.2000 2.3779 0.0003

1.3000 2.1927 0.0003

1.4000 2.0744 0.0003

1.5000 2.0126 0.0003

1.6000 2.0021 0.0003

1.7000 2.0422 0.0003

1.8000 2.1361 0.0003

1.9000 2.2918 0.0003

2.0000 2.5236 0.0003

1. **program** lab12\_2a;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -y \* ln(y) / x;

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := exp(1 / x)

**end**;

**function** eyler(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(eyler(1, 2, 0.2, e)))

**end**.

**Ответ**

1.0000 2.7183 0.0000

1.2000 2.1746 5.4912

1.4000 1.8931 7.3267

1.6000 1.7205 7.9098

1.8000 1.6038 7.9825

2.0000 1.5196 7.8312

**program** lab12\_2b;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := -y \* ln(y) / x;

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := exp(1 / x)

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(runge\_kutt\_method(1, 2, 0.2, e)))

**end**.

**Ответ**

1.0000 2.7183 0.0000

1.2000 2.3010 0.0003

1.4000 2.0427 0.0004

1.6000 1.8683 0.0004

1.8000 1.7429 0.0003

2.0000 1.6487 0.0003

1. **program** lab12\_3a;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := 2 \* x / exp(y - x \* x);

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := ln(exp(x \* x) + 1)

**end**;

**function** eyler(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(eyler(0, 2, 0.2, ln(2))))

**end**.

**Ответ**

0.0000 0.6931 0.0000

0.2000 0.6931 2.8317

0.4000 0.7348 5.3538

0.6000 0.8248 7.2451

0.8000 0.9756 8.2639

1.0000 1.2044 8.2910

1.2000 1.5304 7.3937

1.4000 1.9689 5.8728

1.6000 2.5240 4.1947

1.8000 3.1874 2.7749

2.0000 3.9463 1.7882

**program** lab12\_3b;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := 2 \* x / exp(y - x \* x);

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := ln(exp(x \* x) + 1)

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(runge\_kutt\_method(0, 2, 0.2, ln(2))))

**end**.

**Ответ**

0.0000 0.6931 0.0000

0.2000 0.7133 0.0001

0.4000 0.7763 0.0006

0.6000 0.8893 0.0015

0.8000 1.0635 0.0031

1.0000 1.3133 0.0055

1.2000 1.6528 0.0089

1.4000 2.0920 0.0128

1.6000 2.6349 0.0164

1.8000 3.2790 0.0190

2.0000 4.0190 0.0204

1. **program** lab12\_4a;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := (y - 3) / (3 \* x \* x + x);

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := (3.5 \* x / (3 \* x + 1)) + 3

**end**;

**function** eyler(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

y := y + h \* f(x, y);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(eyler(2, 3, 0.2, 4)))

**end**.

**Ответ**

2.0000 4.0000 0.0000

2.2000 4.0143 0.0281

2.4000 4.0264 0.0504

2.6000 4.0368 0.0684

2.8000 4.0459 0.0831

3.0000 4.0539 0.0953

**program** lab12\_4b;

**type**

matrix = **array of array of** real;

**function** f(x, y: real): real;

**begin**

result := (y - 3) / (3 \* x \* x + x);

**end**;

**function** g(x: real): real;

**begin**

result := (3.5 \* x / (3 \* x + 1)) + 3

**end**;

**function** runge\_kutt\_method(start\_x, stop\_x, h, start\_y: real): matrix;

**var**

x, y: real;

k1, k2, k3, k4: real;

i: integer;

**begin**

SetLength(result, Trunc((stop\_x - start\_x) / h) + 1);

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

SetLength(result[i], 2);

x := start\_x;

y := start\_y;

**for** i := 0 **to** High(result) **do**

**begin**

result[i, 0] := x;

result[i, 1] := y;

k1 := f(x, y);

k2 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k1);

k3 := f(x + h / 2, y + h / 2 \* k2);

k4 := f(x + h, y + h \* k3);

y := y + h / 6 \* (k1 + 2 \* k2 + 2 \* k3 + k4);

x := x + h

**end**;

**end**;

**function** get(y: matrix): matrix;

**var**

i, j: integer;

**begin**

SetLength(result, Length(y));

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

SetLength(result[i], 3);

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

result[i, 2] := abs(y[i, 1] - g(y[i, 0])) / g(y[i, 0]) \* 100;

**for** j := 0 **to** 1 **do**

result[i, j] := y[i, j];

**end**;

**end**;

**procedure** print(y: matrix);

**var**

i, j: integer;

**begin**

**for** i := 0 **to** High(y) **do**

**begin**

**for** j := 0 **to** High(y[i]) **do**

write(y[i, j]:10:4);

writeln

**end**

**end**;

**begin**

print(get(runge\_kutt\_method(2, 3, 0.2, 4)))

**end**.

**Ответ**

2.0000 4.0000 0.0000

2.2000 4.0132 0.0000

2.4000 4.0244 0.0000

2.6000 4.0341 0.0000

2.8000 4.0426 0.0000

3.0000 4.0500 0.0000

**Выводы**

В ходе работы были составленные программы с решением обыкновенных дифференциальных уравнений.