

Программная реализация



```
21 | k = [0.85, 0.1]
22 | print(euler(equations, 0, 1, [1, 0], 0.1, args=(k, )))
23 |
```

```
[[1, 0],
 [0.915, 0.085],
 [0.838075, 0.16192500000000004],
 [0.7684578750000001, 0.23154212500000004],
 [0.7054543768750001, 0.29454562312500004],
 [0.6484362110718751, 0.35156378892812506],
 [0.596834771020047, 0.4031652289799532],
 [0.5501354677731425, 0.4498645322268577],
 [0.5078725983346939, 0.4921274016653062],
 [0.469624701492898, 0.5303752985071022],
 [0.4350103548510727, 0.5649896451489275]]
```

Метод Рунге-Кутты



Пусть дана следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases} \quad (6)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} y_1|_{x=x_0} &= y_{01} \\ y_2|_{x=x_0} &= y_{02} \end{aligned} \quad (7)$$

Метод Рунге-Кутты

При использовании метода Рунге-Кутты, расчетные формулы примут следующий вид:

$$\begin{cases} y_{i,1} = y_{(i-1),1} + h/6 \cdot (k_{1,1} + 2 \cdot k_{2,1} + 2 \cdot k_{3,1} + k_{4,1}) \\ y_{i,2} = y_{(i-1),2} + h/6 \cdot (k_{1,2} + 2 \cdot k_{2,2} + 2 \cdot k_{3,2} + k_{4,2}) \\ x_i = x_{i-1} + h \end{cases} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= f_1 \left(x, y_{(i-1),1}, y_{(i-1),2} \right); & k_{1,2} &= f_2 \left(x, y_{(i-1),1}, y_{(i-1),2} \right); \\ k_{2,1} &= f_1 \left(x + \frac{h}{2}, y_{(i-1),1} + k_{1,1} \cdot \frac{h}{2}, y_{(i-1),2} + k_{1,2} \cdot \frac{h}{2} \right); & k_{2,2} &= f_2 \left(x + \frac{h}{2}, y_{(i-1),1} + k_{1,1} \cdot \frac{h}{2}, y_{(i-1),2} + k_{1,2} \cdot \frac{h}{2} \right); \\ k_{3,1} &= f_1 \left(x + \frac{h}{2}, y_{(i-1),1} + k_{2,1} \cdot \frac{h}{2}, y_{(i-1),2} + k_{2,2} \cdot \frac{h}{2} \right); & k_{3,2} &= f_2 \left(x + \frac{h}{2}, y_{(i-1),1} + k_{2,1} \cdot \frac{h}{2}, y_{(i-1),2} + k_{2,2} \cdot \frac{h}{2} \right); \\ k_{4,1} &= f_1 \left(x + h, y_{(i-1),1} + k_{3,1} \cdot h, y_{(i-1),2} + k_{3,2} \cdot h \right); & k_{4,2} &= f_2 \left(x + h, y_{(i-1),1} + k_{3,1} \cdot h, y_{(i-1),2} + k_{3,2} \cdot h \right). \end{aligned} \quad (9)$$

где h – шаг интегрирования; $f_1(x_i, y_{(i-1),1}, y_{(i-1),2})$ и $f_2(x_i, y_{(i-1),1}, y_{(i-1),2})$ – правые части дифференциальных уравнений, $k_{1,j}, k_{2,j}, k_{3,j}, k_{4,j}$ – параметры метода Рунге-Кутты для j -го уравнения.