Solução do Desafio da Semana
Séries Temporais I - Data: 6 de novembro de 2025.

Nome: Ivan Cunha Vieira

Matrícula: 2023100838

Seja $\{Y_t\}$ um processo definido por

$$Y_t = X_t + Z_t, \qquad X_t = \phi X_{t-1} + W_t,$$

onde $|\phi| < 1$, $\{Z_t\}$ é ruído branco com média 0 e variância σ_Z^2, $\{W_t\}$ é ruído branco com média 0 e variância σ_W^2, e X_t e W_s são não-correlacionados para todo t e s.

Precisamos verificar, inicialmente, se $\{X_t\}$ é um processo estacionário. Temos que

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t = \phi(\phi X_{t-2} + W_{t-1}) + W_t = \phi[\phi(\phi X_{t-3} + W_{t-2})] + \phi W_{t-1} + W_t = \ldots.$$

Dessa forma, encontramos que $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}$.

Para verificar a estacionariedade, verificamos o primeiro e o segundo momento e a função de autocovariância do processo:

$$E[X_t] = E[\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}] = E[W_t] + \phi E[W_{t-1}] + \phi^2 E[W_{t-2}] + \ldots.$$

Como $E[W_t] = 0, \quad \forall t = 1, 2, \ldots$, temos que $E[X_t] = 0$. Dessa forma, vemos que $Var(X_t) = E[X_t^2]$. Assim,

$$E[X_t^2] = Var(X_t) = \sum_{j=0}^{\infty} (\phi^j)^2 Var(W_{t-j}) = \sigma_W^2 \sum_{j=0}^{\infty} \phi^{2j}.$$

Resolvendo a série geométrica para $t \to \infty$, temos que a série converge:

$$E[X_t^2] = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} < \infty.$$

A função de autocovariância desse processo é dada por:

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Como $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}$, definimos $X_{t-h} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k W_{t-h-k}$ e, portanto, a função de autocovariância é dada por:

$$\gamma_X(h) = E\left[\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k W_{t-h-k}\Big)\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \phi^{j+k} E[W_{t-j} W_{t-h-k}].$$

Como $\{W_t\}$ constitui um ruído branco, tem-se que $E[W_{t-j} W_{t-h-k}] = \sigma_W^2$ apenas quando $t-j = t-h-k$, o que implica $k = j-h$. Para $h \geq 0$, essa condição leva a $j \geq h$ e, definindo $m = j-h \geq 0$, obtemos

$$\gamma_X(h) = \sigma_W^2 \sum_{j=h}^{\infty} \phi^{j+(j-h)} = \sigma_W^2 \phi^h \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{2m} = \sigma_W^2 \phi^h \frac{1}{1-\phi^2}.$$

Utilizando a simetria $\gamma_X(-h) = \gamma_X(h)$, concluímos, para qualquer inteiro h,

$$\gamma_X(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\,\phi^{|h|}.$$

Como X_t é estacionário e $\{Z_t\}$ um ruído branco de média zero, obtemos que

$$E[Y_t] = E[X_t] + E[Z_t] = 0.$$

Além disso, uma vez que X_t e Z_t não apresentam correlação, segue que

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{E}[Y_t^2] = \mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(Z_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2 < \infty.$$

A autocovariância de Y_t pode ser expressa como

$$\begin{aligned}\gamma_Y(h) &= \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \mathrm{Cov}(X_t + Z_t,\ X_{t-h} + Z_{t-h}) \\ &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) + \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t-h}).\end{aligned}$$

Portanto, quando $h = 0$,

$$\gamma_Y(0) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2,$$

pois $\mathrm{Cov}(Z_t, Z_t) = \sigma_Z^2$.

Dessa forma, para $h \neq 0$, tem-se que

$$\rho_Y(h) = \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\,\phi^{|h|}}{\dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2}.$$