Solução do Desafio da Semana
Séries Temporais I - Data: 5 de novembro de 2025.

Nome: Ivan Cunha Vieira

Matrícula: 2023100838

Para verificarmos se o processo $\{X_t\}$ é estacionário, basta verificarmos suas propriedades:

- $\mathbb{E}X_t = m$, onde m é constante;
- $\mathbb{E}|X_t|^2 < \infty$;
- $\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t)$, $h \in \mathbb{Z}$.

Como temos que

$$X_1 = W_1,$$
$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \quad t = 2, 3, \dots,$$

onde $\{W_t\}$ é ruído branco com média nula e variância σ_W^2, e que

$$E[W_t] = 0, \quad E[W_t^2] = \sigma_W^2, \quad E[W_t W_s] = 0 \text{ se } t \neq s,$$

podemos verificar que $X_2 = \phi X_1 + W_2 = \phi W_1 + W_2$, o que nos leva a $X_3 = \phi X_1 + W_2 = \phi(\phi W_1 + W_2) + W_3$. Repetindo esse processo t vezes, obtemos $X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j W_{t-j}$.

Portanto, encontramos que

$$E[X_t] = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j E[W_{t-j}] = 0, \ \forall t.$$

Como os W_j são independentes com variância σ_W^2,

$$E[X_t^2] = Var(X_t) = \sum_{j=0}^{t-1} (\phi^j)^2 Var(W_{t-j}) = \sigma_W^2 \sum_{j=0}^{t-1} \phi^{2j}.$$

Resolvendo a série geométrica, obtemos que

$$Var(X_t) = \sigma_W^2 \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}.$$

Agora, basta apenas obter a função de autocovariância. Pela definição, a função de autocovariância de um processo $\{X_t\}$ é dada por

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_{t+h}, X_t), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Usando a definição, vemos que

$$\gamma_X(1) = \text{Cov}(X_{t+1}, X_t),$$

Dessa forma, podemos encontrar $\gamma_X(1)$ transformando X_{t+1}:

$$\gamma_X(1) = \mathrm{Cov}(X_{t+1}, X_t) = \mathrm{Cov}(\phi X_t + W_{t+1}, X_t) = \phi \,\mathrm{Cov}(X_t, X_t) + \mathrm{Cov}(W_{t+1}, X_t).$$

Como W_{t+1} é independente de X_t, o segundo termo é nulo, e assim:

$$\gamma_X(1) = \phi\gamma_X(0).$$

De maneira semelhante, temos que:

$$X_{t+h} = \phi X_{t+h-1} + W_{t+h}.$$

Portanto, seguindo os mesmos passos feitos anteriores:

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{Cov}(\phi X_{t+h-1} + W_{t+h}, X_t) = \phi \,\mathrm{Cov}(X_{t+h-1}, X_t) + \mathrm{Cov}(W_{t+h}, X_t).$$

Como W_{t+h} é independente de X_t,

$$\gamma_X(h) = \phi \,\mathrm{Cov}(X_{t+h-1}, X_t) = \phi\gamma_X(h-1).$$

Aplicando essa relação repetidamente, obtemos:

$$\gamma_X(h) = \phi^h\gamma_X(0), \quad h \geq 0.$$

Agora, é necessário obtermos $\gamma_X(0)$. Observamos que

$$\gamma_X(0) = \mathrm{Var}(X_t) = \sigma_W^2 \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2},$$

que depende de t, fazendo com que $\{X_t\}$ seja um processo não estacionário. No entanto, podemos prosseguir da seguinte forma:

$$\lim_{x\to\infty} \gamma_X(0) = \lim_{x\to\infty} Var(X_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} - \lim_{x\to\infty} \phi^{2t} = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2},$$

pois $|\phi| < 1$.

Substituindo $\gamma_X(0)$ na expressão anterior, encontramos

$$\gamma_X(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\phi^h, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Percebemos assim que o processo $\{X_t\}$ cumpre os requisitos de um processo estacionário quando $t \to \infty$, fazendo com que a variância e função de autocovariância sejam constante (não dependam de t).

Quando observamos $X_t = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j W_{t-j}$, podemos reparar também que $X_t = \phi^{t-1} W_1 + \sum_{j=0}^{t-2} \phi^j W_{t-j}$. Como $|\phi| < 1$, a medida que t cresce, $\phi^{t-1} \to 0$, o que faz com que o processo passe a apresentar comportamento estacionário.

A função de autocorrelação para esse processo pode ser dada como

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h,0)}{\sqrt{\mathrm{Var(X_{t+h})\,Var(X_t)}}} = \frac{\sigma_W^2 \phi^h \dfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}}{\sqrt{\sigma_W^2 \dfrac{1-\phi^{2(t+h)}}{1-\phi^2} \sigma_W^2 \dfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}}} = \phi^h \sqrt{\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^{2(t+h)}}}.$$

Aplicando o limite de $t \to \infty$ para essa função, encontramos

$$\lim_{x\to\infty} \rho(h) = \lim_{x\to\infty} \phi^h \sqrt{\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^{2(t+h)}}} = \phi^h.$$

Assim como visto no caso da função de autocovariância, a correlação é dependente de t. No entanto, para um t suficientemente grande, o processo converge para sua forma estacionária, onde o efeito da condição inicial perde significância e o processo passa a apresentar variância constante e autocovariância dependente apenas de h.

Considerando agora $X_1 = \dfrac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}}$, podemos aplicar os mesmos passos para encontrar se $\{X_t\}$ é um processo estacionário:

Verificamos que $X_2 = \phi X_1 + W_2 = \phi \dfrac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}} + W_2$, o que nos leva a $X_3 = \phi X_1 + W_2 = \phi(\phi \dfrac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}} + W_2) + W_3$. Repetindo esse processo t vezes, obtemos $X_t = phi^{t-1} \dfrac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}} + \sum_{j=0}^{t-2} \phi^j W_{t-j}$.

Portanto, encontramos que

$$E[X_t] = \frac{\phi^{t-1}}{\sqrt{1-\phi^2}} E[W_1] + \sum_{j=0}^{t-2} \phi^j E[W_{t-j}] = 0, \ \forall t.$$

Seguindo para a variância, temos o seguinte:

$$E[X_t^2] = Var(X_t) = \frac{\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2} Var(W_1) + \sum_{j=0}^{t-2} (\phi^j)^2 Var(W_{t-j}) = \sigma_W^2 \left[\frac{\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2} + \sum_{j=0}^{t-2} \phi^{2j} \right].$$

Resolvendo a série geométrica, obtemos

$$\mathrm{Var}(X_t) = \sigma_W^2 \left[\frac{\phi^{2(t-1)}}{1-\phi^2} + \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} \right] = \sigma_W^2 \frac{1-\phi^{2t}+\phi^{2t}}{\phi(1-\phi^2)} = \frac{\sigma_W^2}{\phi(1-\phi^2)}.$$

Podemos perceber aqui que a variância de $\{X_t\}$, para o caso em que $X_1 = \dfrac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}}$, não depende de t. Sua função de autocovariância ficará dessa forma:

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{Cov}(\phi X_{t+h-1} + W_{t+h}, X_t) = \phi\,\mathrm{Cov}(X_{t+h-1}, X_t) + \mathrm{Cov}(W_{t+h}, X_t).$$

Como W_{t+h} é independente de X_t,

$$\gamma_X(h) = \phi \operatorname{Cov}(X_{t+h-1}, X_t) = \phi\gamma_X(h-1).$$

Aplicando essa relação repetidamente, obtemos:

$$\gamma_X(h) = \phi^h \gamma_X(0), \quad h \geq 0.$$

Como pode ser observado, obtivemos o mesmo formato para a função de autocovariância. A diferença se encontra apenas em $\gamma_X(0) = \operatorname{Var}(X_t) = \dfrac{\sigma_W^2}{\phi(1-\phi^2)}$, pois a função de autocovariância depende apenas de h. Assim,

$$\gamma_X(h) = \phi^h \gamma_X(0) = \phi^h \frac{\sigma_W^2}{\phi(1-\phi^2)}.$$

Dessa forma, o processo $\{X_t\}$, onde $X_1 = \dfrac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}}$, é estacionário.

Para um processo estacionário, identificamos sua função de autocorrelação como

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)} = \frac{\phi^h \gamma(0)}{\gamma(0)} = \phi^h,$$