

Ce mini-projet, à effectuer en binôme, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, notebook, version papier...). Un notebook avec le prototype des différentes fonctions à implémenter est disponible pour les parties 2 et 3 du mini-projet. Le rendu s'effectuera sur Moodle. La date limite de rendu est le lundi 06/05 à 09h00, aucun rendu ne sera possible après cela.

Tomographie à rayons X

La tomographie est une technique d'imagerie très utilisée dans les domaines de l'imagerie médicale ou des matériaux. Son principe est de mesurer l'absorption d'un faisceau de rayons X monochromatiques le long de différentes droites traversant l'objet qu'on cherche à imager, puis de reconstruire l'image d'origine à partir de ces différentes mesures d'absorption.

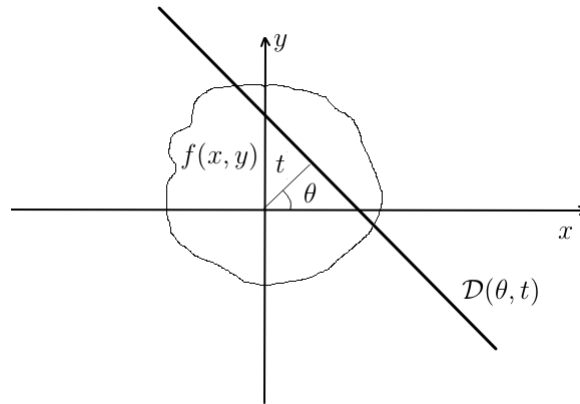


FIGURE 1 – Schéma de principe d'une mesure de tomographie.

Notons $\mathcal{D}(\theta, t)$ la droite de direction $(-\sin \theta, \cos \theta)$ qui passe par le point de coordonnées $(t \cos \theta, t \sin \theta)$ situé à une distance t de l'origine. Supposons qu'on émette un faisceau de rayons X d'intensité I_0 le long de cette droite. On peut alors montrer que l'intensité transmise à un détecteur situé de l'autre côté de l'objet à imager est :

$$I = I_0 \exp(-\mathcal{R}f(\theta, t))$$

où

$$\mathcal{R}f(\theta, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t \cos \theta - \rho \sin \theta, t \sin \theta + \rho \cos \theta) d\rho.$$

Dans cette expression, la quantité $f(x, y)$ décrit l'atténuation du rayonnement en chaque point (x, y) de l'espace et correspond à la quantité qu'on cherche à déterminer. La quantité $\mathcal{R}f(\theta, t)$ est appelée *transformée de Radon* de la fonction f .

L'objectif de ce mini-projet est d'étudier différentes méthodes de traitement du signal et d'optimisation permettant de reconstituer l'image d'origine à partir de mesures tomographiques. Nous utiliserons une image

synthétique, le "Shepp-Logan phantom". Le Shepp-Logan phantom est une image de test standard créée par Larry Shepp et Benjamin F. Logan en 1974 et qui sert de modèle d'acquisition d'une tête humaine dans le développement et le test d'algorithmes de reconstruction d'images [2].

Rappel On définit la transformée de Fourier bi-dimensionnelle d'un signal continu $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ en posant, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}f(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(ux+vy)} dx dy$$

1 Transformée de Radon

1. Dans le notebook associé au mini-projet, implémenter le calcul de la transformée de Radon d'une image. On pourra notamment s'appuyer sur la fonction *rotate* de la librairie scikit-image.
2. Montrer que la transformée de Fourier de $t \mapsto \mathcal{R}f(\theta, t)$ est donnée, pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour tout $\omega \in \mathbb{R}$, par :

$$\widehat{\mathcal{R}f(\theta, \cdot)}(\omega) = \mathcal{F}f(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta).$$

2 Reconstruction par rétro-projection

Notre objectif est de reconstruire l'image d'origine à partir des mesures tomographiques i.e. de sa transformée de Radon. Afin d'approcher $f(x, y)$, une première approche intuitive consiste à moyenner les observations $\mathcal{R}f(\theta, t)$ pour lesquelles la droite $\mathcal{D}(\theta, t)$ passe par le point (x, y) . La rétro-projection de f est ainsi définie par :

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathcal{R}f(\theta, x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta, \quad (1)$$

où la quantité $x \cos \theta + y \sin \theta$ correspond au produit scalaire des vecteurs $n_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ orthogonal à la droite $\mathcal{D}(\theta, t)$ et (x, y) .

1. Supposons que f soit la fonction indicatrice d'un disque de rayon $R = 1$. Donner alors une expression de la rétro-projection de f sous la forme d'une intégrale. La formule de rétro-projection est-elle une formule d'inversion ?
2. Dans le notebook, implémenter la reconstruction de l'image tomographique à partir de sa transformée de Radon en utilisant une version discrétisée de la formule de rétro-projection. Commenter le résultat obtenu. En particulier, la reconstruction est-elle très différente de l'image originale ?
3. On peut montrer que

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\mathcal{R}f(\theta, \cdot) * h](x \cos \theta + y \sin \theta, \theta) d\theta, \quad (2)$$

où la transformée de Fourier du filtre h est donnée pour les basses fréquences par

$$\hat{h}(\omega) = |\omega|.$$

Implémenter la reconstruction par rétro-projection filtrée dans le notebook en discrétisant le calcul de l'intégrale (2).

4. Que se passe-t-il lorsqu'on applique la formule de rétro-projection filtrée en présence d'un bruit de haute fréquence ? Que peut-on en déduire sur la stabilité de la méthode ?

3 Approche par compressed sensing

Supposons maintenant que nous ne connaissions que partiellement, grâce à des mesures tomographiques, le spectre de Fourier d'une image discrétisée f de $n = N \times N$ pixels que nous souhaitons reconstruire. On dispose ainsi de $p < n$ coefficients de Fourier sélectionnés aléatoirement pour effectuer la reconstruction.

On peut voir l'opération de mesure réalisée sur l'image comme un processus en deux étapes : la première étape consiste à calculer la transformée de Fourier bi-dimensionnelle de l'image et la seconde à multiplier le spectre par un masque de sélection qui va retenir de façon aléatoire une partie des coefficients. La composition de ces deux opérations s'écrit comme l'application d'un opérateur linéaire M de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C}^p à l'image f , vue comme un élément de \mathbb{R}^n . Si on note $m \in \mathbb{C}^p$ les mesures obtenues, on a

$$m = Mf. \quad (3)$$

Le système (3) est sous-déterminé : il n'y a donc pas unicité de la solution recherchée. L'ensemble des solutions constitue même un espace vectoriel de dimension $n - p$.

3.1 Construction de l'opérateur de mesure M

Un code python permettant de directement calculer l'opérateur de mesure M vous est donné dans le fichier *utils.py*. Nous expliquons brièvement dans cette section comment cette matrice de mesure est obtenue.

On définit la transformée de Fourier discrète d'un signal bidimensionnel $(f[x, y])_{0 \leq x, y \leq N-1}$ en posant, pour tout $u \in -N/2 + 1, \dots, 0, \dots, N/2$ et pour tout $v \in -N/2 + 1, \dots, 0, \dots, N/2$:

$$\hat{f}[u, v] = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f[x, y] e^{i \frac{2\pi}{N} (xu + yv)}.$$

On remarque que la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'image est donnée par n coefficients complexe (soit $2n$ coefficients réels : la transformée de Fourier étant une bijection, on voit immédiatement que l'information apportée par la transformée de Fourier est redondante).

Dans le cas présent, nous cherchons à représenter la transformée de Fourier par un opérateur matriciel F , qu'on applique à une représentation unidimensionnelle de l'image obtenue en concaténant toutes ses colonnes en un unique vecteur. Pour déterminer la matrice F , nous calculons simplement la transformée de Fourier de chacune des images $I_{p,q}$ de la base canonique de l'espace vectoriel des images de taille $N \times N$, où l'image $I_{p,q}$ prend la valeur 1 au pixel de coordonnées (p, q) et la valeur 0 sinon. On obtient ainsi une matrice F complexe de taille $n \times n$.

Une fois la matrice F obtenue, on en déduit la matrice de mesure M en sélectionnant aléatoirement $p \leq n$ lignes de F parmi les n coefficients de Fourier complexes. Afin de pouvoir effectuer la reconstruction avec la norme TV (cf. ci-après), on sélectionne systématiquement le premier coefficient de Fourier, qui correspond à la fondamentale de l'image.

3.2 Résolution du problème d'optimisation

Dans la suite du sujet, et sauf mention contraire de l'énoncé, on testera les algorithmes développés sur le Shepp-Logan phantom pour $N = 16$.

1. Pour reconstruire l'image d'origine, une première approche possible consiste à sélectionner, parmi l'ensemble des solutions possibles, la solution de norme ℓ^2 minimale. Cela revient ainsi à résoudre le problème suivant, dit de moindres carrés sous-déterminés :

$$\begin{aligned} \min_{f \in \mathbb{R}^n} \quad & \|f\|^2 \\ \text{tel que} \quad & Mf = m \end{aligned} \quad (4)$$

où M matrice complexe $p \times n$ de rang p ($p < n$) et m vecteur de \mathbb{C}^p .

- (a) Rappeler (comme vu en TD) ou réobtenir, par la méthode de votre choix, la solution du problème d'optimisation réel correspondant

$$\begin{aligned} \min_{f \in \mathbb{R}^n} \quad & \|f\|^2 \\ \text{tel que} \quad & Af = b \end{aligned} \quad (5)$$

où A matrice réelle $k \times n$ de rang k ($k < n$) et b vecteur de \mathbb{R}^k .

- (b) Vous semble-t-il approprié d'utiliser directement la fonction `lstsq` de `numpy.linalg` pour résoudre (4) ? Justifier le résultat numérique obtenu en procédant de la sorte.
(c) Comment faudrait-il procéder pour réécrire le problème (4) sous la forme (5) ?
(d) Alternativement, on se propose de résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \min_{f \in \mathbb{R}^n} \quad & \|\mathcal{F}f\|^2 \\ \text{tel que} \quad & Mf = m \end{aligned} \quad (6)$$

où la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'image est vue comme une fonction de f . Justifier que ce problème est équivalent à (4) et admet comme solution la transformée de Fourier inverse du vecteur constitué des mesures m et complété par des coefficients nuls pour les coordonnées non-mesurées.

2. En lieu et place du problème (6), on cherche à résoudre le problème régularisé

$$\min_{f \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} \|Mf - m\|^2 + \mu \|f\|^2 \quad (7)$$

où $\mu \geq 0$ est un paramètre de régularisation à choisir.

- (a) Montrer que ce problème s'écrit de façon équivalente sous la forme quadratique suivante

$$\min_{f \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} f^T Q f + a^T f + c \quad (8)$$

où Q matrice réelle symétrique définie positive, a vecteur de \mathbb{R}^n et c réel positif.

- (b) Résoudre le problème (8) analytiquement.
(c) Implémenter cette solution et comparer les résultats pour différentes valeurs de μ : 1×10^{-6} , 1×10^{-2} , 1 et 1×10^2 . Comparer avec la solution fournie par les moindres carrés et conclure sur l'effet de la régularisation ℓ^2 , cad du terme $\mu \|f\|^2$ dans la fonction objectif de (7)

Une idée alternative de reconstruction est celle dite de *compressed sensing*, qui vise à exploiter la parcimonie du signal dans certaines bases de représentation. On dit d'un signal qu'il est parcimonieux dans une base de représentation si une part importante des coefficients du signal dans cette base prennent la valeur 0. Dans le cas présent, on sait que l'image est globalement constante par morceaux, de sorte que son gradient discret vaut 0 en un grand nombre de points. Une seconde approche possible pour effectuer la reconstruction consiste donc à sélectionner la solution pour laquelle la norme de variation totale est minimale. La norme de variation totale est donnée par

$$\|f\|_{TV} = \|D_g f\|_1 \quad (9)$$

où $D_g \in \mathbb{R}^{2N(N-1) \times n}$ (avec $n = N^2$) est l'opérateur bidimensionnel de différence, aussi appelé gradient par analogie avec le problème continu, et $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^k |x_i|$ représente la norme 1 d'un vecteur x dans \mathbb{R}^k ($k \in \mathbb{N}$). On peut montrer que minimiser la norme de variation totale permet de sélectionner des signaux dont le gradient est parcimonieux, c'est à dire des signaux constants par morceaux.

3. On considère ainsi le nouveau problème d'optimisation régularisé

$$\min_{f \in \mathbb{R}^n} \quad \frac{1}{2} \|Mf - m\|^2 + \mu \|f\|_{TV} \quad (10)$$

où $\|\cdot\|_{TV}$ a été défini en (9) et

$$D_g = \begin{pmatrix} D_{gh} \\ D_{gv} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad D_{gh}, D_{gv} \in \mathbb{R}^{N(N-1) \times n} \text{ et telles que} \quad (11)$$

$$\begin{cases} D_{gh} = (0_{N(N-1) \times N} & I_{N(N-1)}) - (I_{N(N-1)} & 0_{N(N-1) \times N}) \\ D_{gv} = \text{diagblock}(\Delta, \dots, \Delta) \quad \text{où} \quad \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \in \mathbb{R}^{(N-1) \times N} \quad (12)$$

D_{gh} et D_{gv} sont les opérateurs de différence selon la première et la seconde dimension, respectivement.

(a) Montrer que le problème est équivalent à

$$\begin{aligned} \min_{(f, s_+, s_-) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2N(N-1)} \times \mathbb{R}^{2N(N-1)}} & \quad \frac{1}{2} \|Mf - m\|^2 + \mu \mathbf{1}^T s_+ + \mu \mathbf{1}^T s_- \\ \text{tel que} & \quad D_g f = s_+ - s_-, \\ & \quad s_+, s_- \geq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur constant de composantes égales à 1 de $\mathbb{R}^{2N(N-1)}$.

- (b) Développer un algorithme de résolution avec une librairie Python présentée en cours, Casadi ou Scipy.¹
- (c) Ecrire la fonction coût sous forme quadratique, comme précédemment, et formulez le problème d'optimisation sous la forme du problème QP (Quadratic Programming)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^q} & \quad \frac{1}{2} x^T Q_e x + a_e^T x + c_e \\ \text{tel que} & \quad Ax = b, \\ & \quad Gx \leq h \end{aligned} \quad (14)$$

On précisera les différentes matrices du problème, ainsi que les variables de décision et leur dimension.

- (d) On se propose d'utiliser un solveur dédié à cette classe de problème d'optimisation, à savoir le solveur `coneqp` de `CVXOPT`, basé sur une méthode primale-duale de points intérieurs (<https://cvxopt.org/documentation/index.html>). Développez un second algorithme de résolution avec ce solveur et comparez les résultats et performances (temps de calcul) en fonction de N pour les valeurs données précédemment avec ceux obtenus avec votre algorithme précédent.
4. Pour obtenir une résolution numérique plus performante, on s'intéresse à des méthodes de gradient proximales pour les problèmes (7) et (14), respectivement.
- (a) Soient $h_1 : f \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f\|^2$ et $h_2 : x \in \mathbb{R}^q \mapsto \|x\|_{TV}$. Etablir les expressions suivantes pour les opérateurs proximaux correspondants

$$\text{Prox}_{\mu h_1}(f) = \frac{1}{1 + 2\mu} f \quad (15)$$

$$\text{Prox}_{\mu h_2}(x) = x - \mu \Pi_{\{s \in \mathbb{R}^q \mid \|M_d s\|_\infty \leq 1\}} \left(\frac{x}{\mu} \right) \quad (16)$$

où Π_S est l'opérateur de projection sur un sous-ensemble S convexe fermé et $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, k} |x_i|$ représente la norme infini d'un vecteur \mathbf{x} dans \mathbb{R}^k ($k \in \mathbb{N}$). Expliquer pourquoi la formule (16) ne peut pas directement être utilisée pour calculer numériquement $\text{Prox}_{\lambda h_2}$.

1. Les matrices G et A du problème étant parcimonieuses, on pourrait utiliser des méthodes sparse en déclarant ces matrices sparse au solveur d'optimisation choisi. Dans le cas présent, on améliorerait l'allocation mémoire mais on gagnerait très peu en rapidité d'exécution. On n'y aura donc pas recours dans ce projet.

- (b) A l'aide de (15), implémenter une méthode de gradient proximale pour résoudre le problème (7). Comparer les résultats avec ceux donnés par la formule analytique obtenue en Q2 (solution, temps d'exécution).
 - (c) On cherche à appliquer une méthode similaire pour la résolution du problème de variation totale (14). Pour calculer l'opérateur proximal correspondant, on se propose d'utiliser une fonction² dédiée de la librairie `skimage.restoration`, nommée `denoise_tv_chambolle` (voir la documentation de `skimage`). En utilisant cette fonction, implémenter une méthode de gradient proximale pour résoudre le problème (14).
 - (d) Comparer vos résultats avec ceux obtenus à la Q3.
5. Comparer les résultats et performances des différentes méthodes de résolution, en fonction de la dimension du problème, c-à-d de la valeur de N . On considèrera $N = 16$, $N = 32$ et $N = 64$ (sauf pour l'algorithme de la Q3(b) développé avec Casadi ou Scipy, où l'on se contentera du cas $N = 16$). Conclure sur les avantages et faiblesses des différentes méthodes de reconstruction étudiées.
 6. Comment est-ce que la proportion de pixels sélectionnés influe-t-elle les résultats précédents ?

Références

- [1] Antonin Chambolle. An algorithm for total variation minimization and applications. *Journal of Mathematical imaging and vision*, 20 :89–97, 2004.
- [2] Lawrence A Shepp and Benjamin F Logan. The fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on nuclear science*, 21(3) :21–43, 1974.

2. Cette fonction utilise une méthode de point fixe pour résoudre les conditions de KKT correspondant au problème proximal. On pourra se référer à [1] pour le détail de la méthode employée.