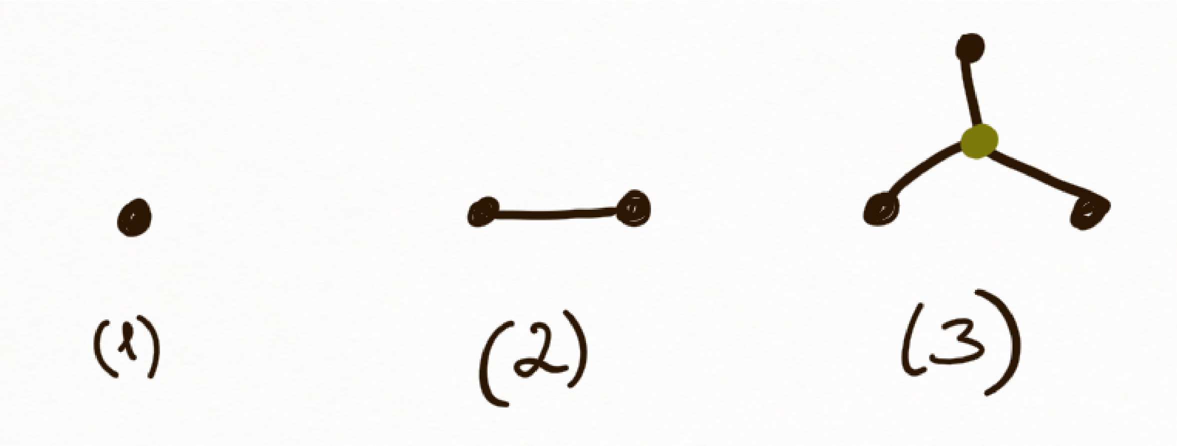
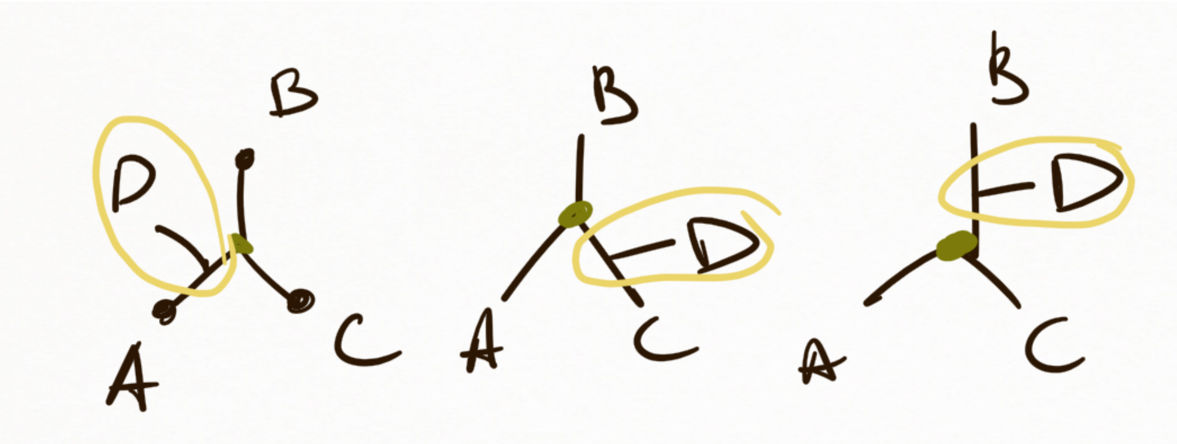
Сколько существует возможных укорененных и неукорененных топологий деревьев на N листьях?

Неукорененные

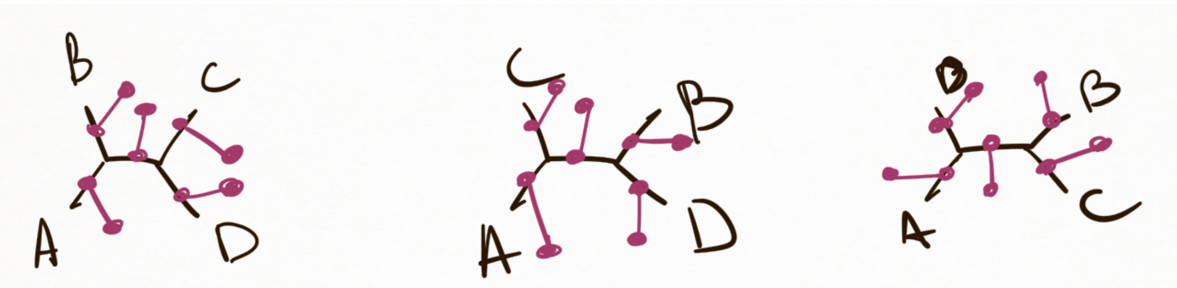
Итак, сначала посмотрим для неукорененных. Очевидно, что для одного-трех листов у нас только одна топология (картинка):



Попробуем понять, как от трех перейти к четырем. Заметим, что такой переход возможен за счет пририсовывания нового ребра к любому из уже существующих:



Каждый раз в таком случае у нас получается новая топология, ведь мы каждый раз соединяем новую вершину D с какой-то своей вершиной (каждый раз разной), поэтому повторения топологий быть не может. Теперь попробуем найти тут какое-то правило. Заметим, что мы можем из одной старой топологии (на n-1 листе) получить столько новых, сколько у той топологии ребер. Проверим это на переходе от 4 к 5:



Итого, здесь видно, что из каждой старой топологии мы можем получить по 5 новых (каждый раз мы берем какое-то одно из 5 розовых ребер), при этом все эти топологии будут уникальны, ведь новая связь образуется на стыке двух вершин.

Итого выходит такая последовательность:

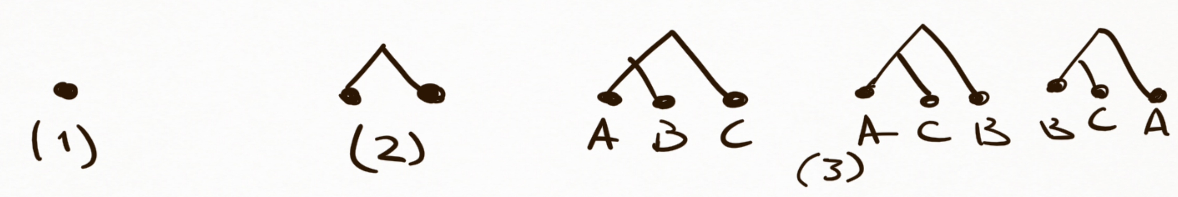
N листьев	Формула	Деревьев
1	1	1
2	1	1
3	1	1
4	$F_3 \cdot 3$	3
5	$F_4 \cdot 5$	$3 \cdot 5$
6	$F_4 \cdot 7$	$3 \cdot 5 \cdot 7$

Итого заметим, что это формула двойного факториала для нечетных чисел.

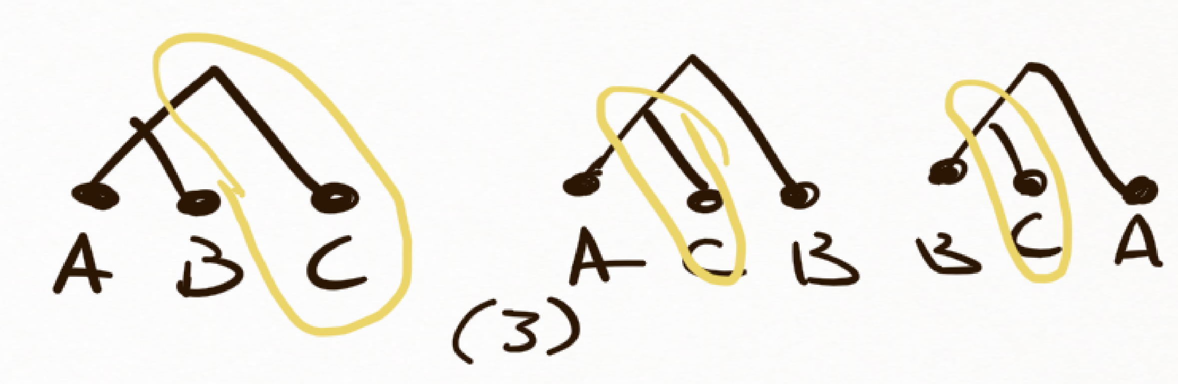
Тогда ответ для N листьев будет выглядеть как: $(2n-5)!!$

Укорененные

Для укорененных идея очень похожая, будем также просто приделывать новое ребро к каждому, которое видим. Очевидно, что для одного и двух листов у нас только одна топология, для трех уже три (картинка):

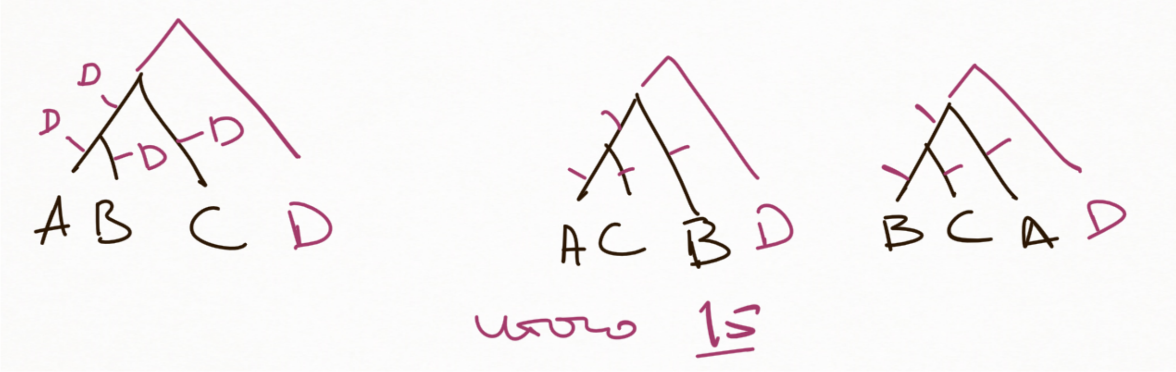


Попробуем понять, как мы перешли от двух вершин к трем:



Тут видно, что переход можно осуществить путем подвешивания новой вершины C к любому из ребер, а также к корню. Итого, новых топологий мы получим от одной старой столько, сколько было ребер в старой, плюс еще одна (которая от корня). Опять же проговорим, что мы так не можем получить одинаковых топологий, поскольку новые пары, которые образуются между новой вставленной вершиной и старыми, будут всегда разные.

Теперь осталось только проверить, что при переходе от каких-то двух старых топологий к новым, мы опять же не получим повторов. Сначала посмотрим на картинке:



Тут нужно обратить внимание на то, что поскольку все старые топологии были разными, при подвешивании нового ребра в каждое уникальное место мы получаем уникальную топологию (в каждом случае новая пара и ее местоположение на графе будут уникальными).

Итого выходит такая последовательность:

N листьев	**Формула**	**Деревьев**
1	1	1
2	1	1
3	$F_2 \cdot 3$	3
4	$F_3 \cdot 5$	$3 \cdot 5$
5	$F_4 \cdot 7$	$3 \cdot 5 \cdot 7$
6	$F_4 \cdot 9$	$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$

Итого заметим, что это формула двойного факториала для нечетных чисел.

Тогда ответ для N листьев будет выглядеть как: $(2n-3)!!$