Алгоритмы. Домашнее задание №6

Власова Елизавета

27 ноября 2020 г.

1 Марковские цепи

1.1 Крупье выбирает монету из двух в начале с равной вероятностью (0.5). Вероятности выпадения орла и решки на правильной монете - одинаковые (0.5). Вероятность выпадения орла на неправильной монете - 0.9, решки - 0.1. Крупье начинает подкидывать монету и выпадают только орлы. После какого выпадения можно с уверенностью 95% говорить, что крупье выбрал неправильную монету?

Формализуем условие. По сути мы хотим найти вероятность того, что Крупье взял нерпавильную монету, при условии того, что мы наблюдаем какую-то последовательность. Мы хотим, чтобы эта вероятность была не менее 0.95. Это равносильно тому, что мы найдем вероятность того, что Крупье при данной последовательности имел правильную моенту, была не больше 0.05. Найдем эту вероятность
$P(correct|O...O) = P(correct, O...O)/P(O...O)$
Найдем вероятности из формулы:
P(correct, O...O) - вероятность того, что у нас была последовательность из какого-то числа орлов и при этом монета была правильная. Вероятность выпадения орла каждый раз 0.5 для правильной монеты, а еще мы должны были выбрать правильную монету (тоже 0.5 вероятность). Итого, получается $0.5 \cdot 0.5^n = 0.5^{n+1}$.
P(O...O) - вероятность вообще получить последовательность из какого-то количества орлов. Такое могло получиться из правильных монет, для которых мы уже вычислили вероятность, и из неправильных. Для них рассуждения те же - $0.5 \cdot 0.9^n$.
Итого получаем:
$P(correct|O...O) < 0.05$
$\frac{0.5^{n+1}}{0.5^{n+1}+0.5\cdot 0.9^n} < 0.05$
$n > 5.009$
Поскольку нам нужно все же целое число, округляем вверх и получаем, что нужно кинуть монетку хотя бы 6 раз.

1.2 Цепь Маркова имеет матрицу вероятностей перехода за одни шаг $\begin{bmatrix} 1-3a & a & a & a \\ a & 1-3a & a & a \\ a & a & 1-3a & a \\ a & a & a & 1-3a \end{bmatrix}$. Найти матрицу вероятностей перехода за n шагов.

Матрица за n шагов будет выглядеть вот так:

$$1/4 \begin{bmatrix} (3(1-4a)^n+1 & 1-(1-4a)^n & 1-(1-4a)^n & 1-(1-4a)^n \\ 1-(1-4a)^n & 3(1-4a)^n+1 & 1-(1-4a)^n & 1-(1-4a)^n \\ 1-(1-4a)^n & 1-(1-4a)^n & 3(1-4a)^n+1 & 1-(1-4a)^n \\ 1-(1-4a)^n & 1-(1-4a)^n & 1-(1-4a)^n & 3(1-4a)^n+1) \end{bmatrix}$$

Докажем по индукции:
База:
Для n=1 утверждение выполняется.
Переход:
Пусть выполняется для n-1. Тогда для n-1 имеем:

$$1/4 \begin{bmatrix} (3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} \\ 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} \\ 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1} \\ 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1) \end{bmatrix}$$

Тогда, чтобы получить матрицу на n-том шаге, необхоидмо перемножить матрицу в n-1 степени на исходную матрицу за один шаг. Проделаем это:

$$1/4\begin{bmatrix}(3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1}\\ 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1}\\ 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1}\\ 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1)\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1-3a & a & a & a\\ a & 1-3a & a & a\\ a & a & 1-3a & a\\ a & a & a & 1-3a\end{bmatrix}=$$

$$=1/4\begin{bmatrix}(3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1}\\ 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1}\\ 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1 & 1-(1-4a)^{n-1}\\ 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 1-(1-4a)^{n-1} & 3(1-4a)^{n-1}+1)\end{bmatrix}$$

Доказали.