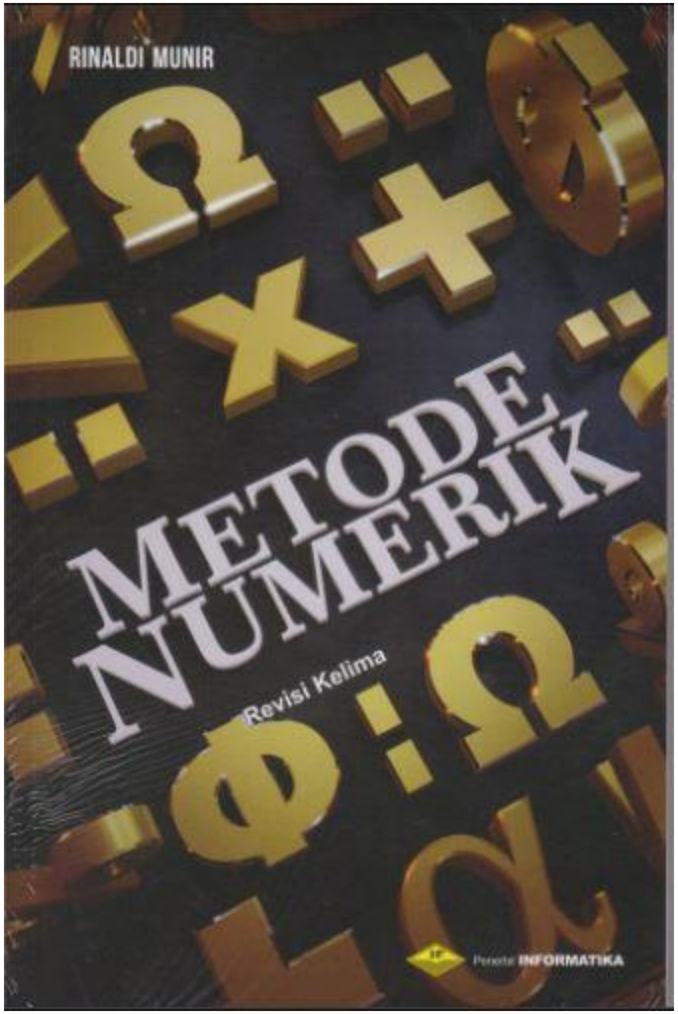
MSC12 – METODE NUMERIK

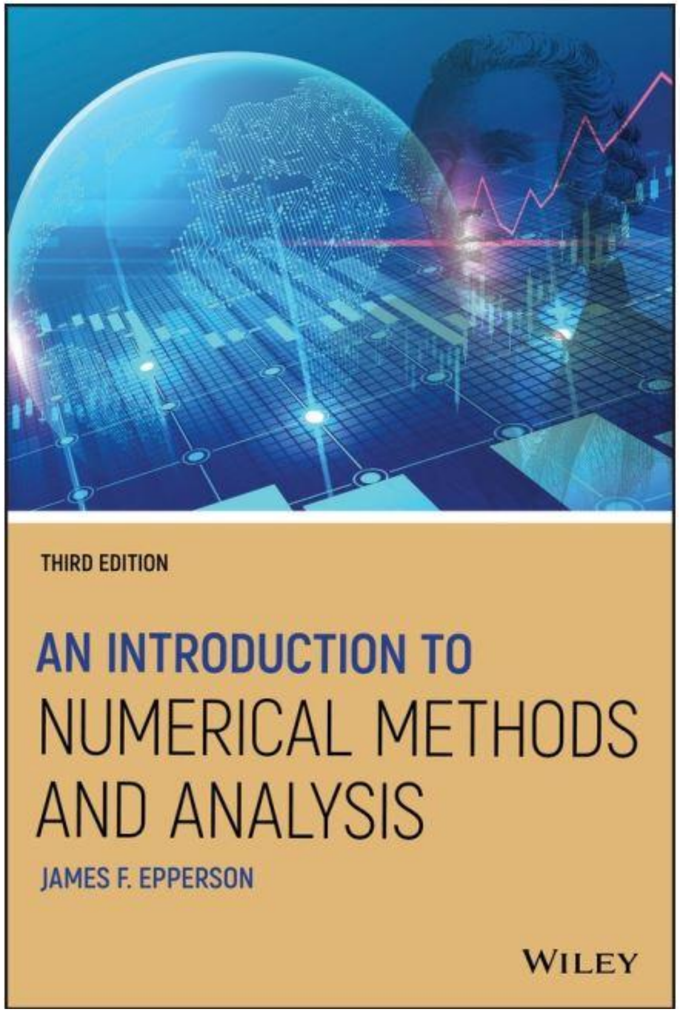
Universitas Bunda Mulia

Persamaan Linier

Universitas Bunda Mulia

Diadopsi dari sumber :





Sub-CPMK

Mahasiswa diharapkan mampu menghitung persamaan linier dengan metode eliminasi Gauss, eliminasi Gauss Jordan, metode matriks invers, serta metode dekomposisi LU. (C3, A3).

Materi

1. Bentuk umum sistem persamaan linier
2. Metode eliminasi Gauss
3. Tata ancang Pivoting
4. Penskalaan
5. Kemungkinan solusi SPL
6. Metode eliminasi Gauss - Jordan
7. Metode matriks invers
8. Metode dekomposisi LU

1. Bentuk Umum Persamaan Linier

Bentuk Umum Persamaan Linier

Sistem persamaan linier (SPL) dengan n peubah dinyatakan sebagai .

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n= b_1.$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n= b_2.$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n= b_1.$$

Dengan menggunakan perkalian matriks, kita dapat menulis persamaan matriks menjadi

$$Ax=b$$

Yang dalam hal ini

$A = [a_{ij}]$ adalah matriks berukuran nxn

$x = [x_j]$ adalah matriks berukuran nx1

$b = [b_j]$ adalah matriks berukuran nx1

Bentuk Umum Persamaan Linier (Lanj..)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier diatas

1. Metode eliminasi Gauss
2. Metode elimnasi Gauss-Jordan
3. Metode invers matriks
4. Metode dekomposisi LU
5. Metode lleran Jacobi
6. Metode leleran Gauss-Seidel

2. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss

Bentuklah matriks menjadi ***matriks segitiga atas*** kemudian gunakan subtitusi untuk menyelesaikan

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Selesaikanlah sistem persamaan berikut dengan Metode eliminasi Gauss

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3 &= 9 \\ 2x_1+7x_2+3x_3 &= 19 \\ 3x_1+\ \ x_2+2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

Metode eliminasi Gauss (Lanj..)

penyelesaian

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 19 \\ 3 & 1 & 2 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} B_{21}^{(-2)} \\ B_{31}^{(-3)} \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -8 & -4 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{c} B_{32}^{(8)} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -12 \end{array}\right)$$

$x_1+3x_2+2x_3= 9$

$x_2 - x_3= 1$

$-12x_3= -12 \rightarrow x_3=1$

$x_3=1$ disubtitusi ke $x_2 - 1 =1 \rightarrow x_2=2$

$x_3=1$ dan $x_2=2$ disub ke $x_1+3(2)+2(1)= 1 \rightarrow x_1=1$

Maka diperoleh :

$x_1=1$, x_2 =2 , x_3 = 1

3. Tata Ancang Pivoting

Tata Ancang Pivoting

Prinsip tata-ancang pivoting adalah sebagai berikut: jika ap,p(p-1) = 0, cari baris k dengan ak,p $\neq$ 0 dan k > p, lalu pertukarkan baris p dan baris k. Metode eliminasi Gauss dengan tata-ancang pivoting disebut metode eliminasi Gauss yang diperbaiki (modified Gaussian elimination).

4. Penskalaan

Penskalaan

Selain dengan pivoting sebagian, penskalaan (scaling) juga dapat digunakan untuk mengurangi galat pembulatan pada SPL yang mempunyai perbedaan koefisien yang mencolok. Situasi demikian sering ditemui dalam praktek rekayasa yang menggunakan ukuran satuan yang berbeda-beda dalam menentukan persamaan simultan.

Penskalaan (Lanj..)

Contoh: Selesaikan sistem persamaan lanjar berikut sampai 3 angka bena dengan menggunakan metode eliminasi Gauss yang menerapkan penskalaan dan tanpa penskalaan:

$2x_1 + 100000\ x_2 = 100000$

$x_1 + x_2 = 2$

(Solusi sejatinya dalam 3 angka bena adalah x1 = x2 = 1.00)

Penyelesaian

Penskalaan (Lanj..)

(i) Tanpa penskalaan :

$$\left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{2} & 100000 & 100000 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \; R_2 - 1/2\, R_1 \; \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 100000 & 100000 \\ 0 & -50000 & -50000 \end{array}\right]$$

Solusinya adalah

$x_2 = 1.00$

$x_1 = 0.00$ (salah)

(ii) Dengan penskalaan :

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 100000 x_2 = 100000 \\ x_1 \qquad\qquad x_2 = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} : 100000 \\ : 1 \end{array} \left| \begin{array}{r} 0.00002 \;\; x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0.00002 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \underset{(*)}{R_1 \Leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0.00002 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1.00 \end{array}\right]$$

Solusinya,

$x_2 = 1.00$

$x_1 = 1.00$ (benar)

5. Kemungkinan Solusi SPL

Kemungkinan Solusi SPL

Untuk SPL dengan tiga buah persamaan atau lebih (dengan tiga peubah atau lebih), tidak terdapat tafsiran geometrinya (tidak mungkin dibuat ilustrasi grafisnya) seperti pada SPL dengan dua buah persamaan. Namun, kita masih dapat memeriksa masing-masing kemungkinan solusi itu berdasarkan pada bentuk matriks akhirnya. Agar lebih jelas, tinjau contoh pada SPL yang disusun oleh tiga persamaan

Kemungkinan Solusi SPL (Lanj..)

Contoh

1. Solusi unik/tunggal

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Solusi: $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$

2. Solusi banyak/tidak terhingga

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Eliminasi Gauss}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Perhatikan hasil eliminasi Gauss pada baris terakhir. Persamaan yang bersesuaian dengan baris terakhir tersebut adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

Kemungkinan Solusi SPL (Lanj..)

Lanjutan

3. Tidak ada solusi

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{Eliminasi}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Universitas Bunda Mulia

6. Metode Eliminasi Gauss - Jordan

Metode eliminasi Gauss - Jordan

Bentuklah matriks menjadi matriks identitas

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & b_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n \end{array}\right)$$

Maka solusinya $x_1 = b_1$, $x_2 = b_2$, $x_3 = b_3$, … $x_n = b_n$.

Metode eliminasi Gauss – Jordan (Lanj..)

Selesaikanlah sistem persamaan berikut dengan Metode eliminasi Gauss - Jordan

$$3x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_3 = 7{,}85$$
$$0{,}1x_1 + 7x_2 - 0{,}3x_3 = -19{,}3$$
$$0{,}3x_1 - 0{,}2x_2 + 10x_3 = 71{,}4$$

Maka solusinya :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -0{,}1 & -0{,}2 & 7{,}85 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{array}\right) B_1^{(1/3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}0333 & -0{,}0667 & 2{,}6167 \\ 0{,}1 & 7 & -0{,}3 & -19{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 10 & 71{,}4 \end{array}\right) \begin{array}{l} B_{21}^{(-0{,}1)} \\ B_{31}^{(-0{,}3)} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}0333 & -0{,}0667 & 2{,}6167 \\ 0 & 7{,}0033 & -0{,}2933 & -19{,}5617 \\ 0 & -0{,}1900 & 10{,}020 & 70{,}6150 \end{array}\right) B_2^{(1/7{,}0033)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -0{,}0333 & -0{,}0667 & 2{,}6167 \\ 0 & 1 & -0{,}0419 & -2{,}7932 \\ 0 & -0{,}1900 & 10{,}020 & 70{,}6150 \end{array}\right) \begin{array}{l} B_{12}^{(-0{,}0033)} \\ B_{32}^{(-0{,}1900)} \\ \end{array}$$

Metode eliminasi Gauss – Jordan (Lanj..)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0{,}0681 & 2{,}5236 \\ 0 & 1 & -0{,}0419 & -2{,}7932 \\ 0 & 0 & 10{,}0200 & 70{,}0843 \end{array}\right) B_3^{(1/10{,}0200)} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -0{,}0681 & 2{,}5236 \\ 0 & 1 & -0{,}0419 & -2{,}7932 \\ 0 & 0 & 1 & 7{,}0000 \end{array}\right) \begin{array}{l} B_{31}^{(-0{,}0681)} \\ B_{23}^{(-0{,}0419)} \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3{,}0000 \\ 0 & 1 & 0 & -2{,}5000 \\ 0 & 0 & 1 & 7{,}0000 \end{array}\right)$$

Maka solusinya $x_1 = 3{,}0000$, $x_2 = -2{,}5000$, $x_3 = 7{,}0000$

7. Metode Matriks Invers

Metode invers matriks

Untuk matriks nxn ***invers matriks*** dapat dipeoleh dengan Metode eliminasi Gauss – Jordan (baca aljabar linier)

Selesaikanlah sistem persamaan berikut :

$$x_1+3x_2+2x_3=9$$
$$2x_1+7x_2+3x_3=19$$
$$3x_1+x_2+2x_3=7$$

Maka solusinya :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} B_{21}^{(-2)} \\ B_{31}^{(-3)} \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} B_{12}^{(-3)} \\ B_{32}^{(5)} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -13 & 5 & 1 \end{array}\right) B_3^{(1/-9)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{-1}{9} \end{array}\right) \begin{array}{l} B_{13}^{(-5)} \\ B_{23}^{(1)} \\ \end{array}$$

Metode invers matriks (Lanj..)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{128}{9} & \frac{-52}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{-1}{9} \end{array}\right)$$

inversnya :

$$\begin{pmatrix} \frac{128}{9} & \frac{-52}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{-5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{13}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix}$$

Solusinya :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{128}{9} & \frac{-52}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{-5}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-1}{9} \\ \frac{13}{9} & \frac{-5}{9} & \frac{-1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 19 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

8. Metode Dekomposisi LU

Metode dekomposisi LU (lower-upper)

Jika matriks A non-singular maka ia dapat difaktorkan menjadi matriks segitiga bawah L (***lower***) dan matriks segitiga atas (***upper***) : A=LU

Dalam bentuk matriks pemfaktoran ditulis

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Metode dekomposisi LU (lower-upper) (Lanj..)

Untuk memperoleh $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kita gunakan subtitusi maju (forwad subtitution)

$$Ly = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Untuk memperoleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kita gunakan subtitusi maju (forwad subtitution)

$$Ux = y \rightarrow \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ldots u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Metode dekomposisi LU (lower-upper) (Lanj..)

Langkah-langah menghitung sistem persamaan linier dengan metode dekomposisi LU dapat diringkas sebagai berikut :

1. Bentuklah matriks L dan U dari A.
2. Pecahkan Ly=b, lalu hitung y dengan sub maju.
3. Pecahkan Ux=y, lalu hitung x dengan sub mundur

Faktorkan matriks A berikut ini

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lalu pecahkan Ax=b

Metode dekomposisi LU (lower-upper) (Lanj..)

Penyelesaian

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} B_{21}^{(-2)} \\ B_{31}^{(1)} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} B_{23} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{Uper}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} B_{13}^{(1)} \\ B_{23}^{(-1)} \\ \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_{1}^{(1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_{21}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_{21}^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} B_{12} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Lower}$$

Jangan lupa menukar elemen b. $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Metode dekomposisi LU (lower-upper) (Lanj..)

Berturut-turut dihitung y dan x

$$Ly = b \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ringkasan

- Persamaan linier dirubah bentuknya kedalam bentuk matriks
- Eliminasi Gauss untuk menyelesaikan persamaan linier dengan memanfaatkan matriks
- Prinsip tata-ancang pivoting adalah sebagai berikut: jika ap,p(p-1) = 0, cari baris k dengan ak,p ≠ 0 dan k > p, lalu pertukarkan baris p dan baris k.
- Eliminasi Gauss - Jordan untuk menyelesaikan persamaan linier dengan memanfaatkan matriks
- Metode invers matriks untuk menyelesaikan persamaan linier
- Metode dekomposisi LU untuk menyelesaikan persamaan linier dengan memanfaatkan matriks

Terima Kasih