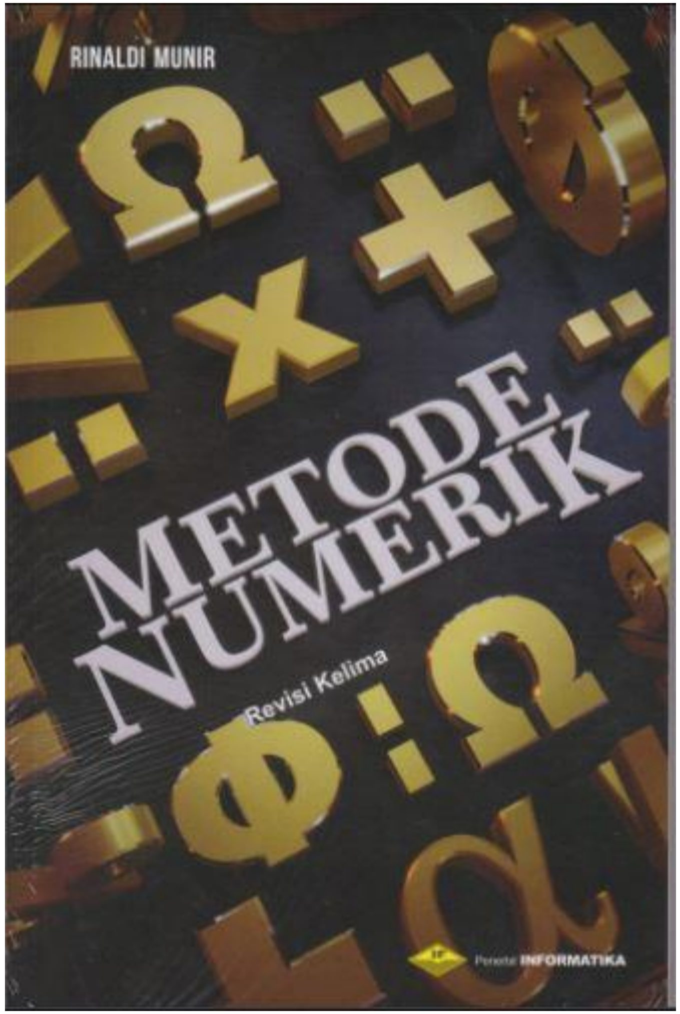
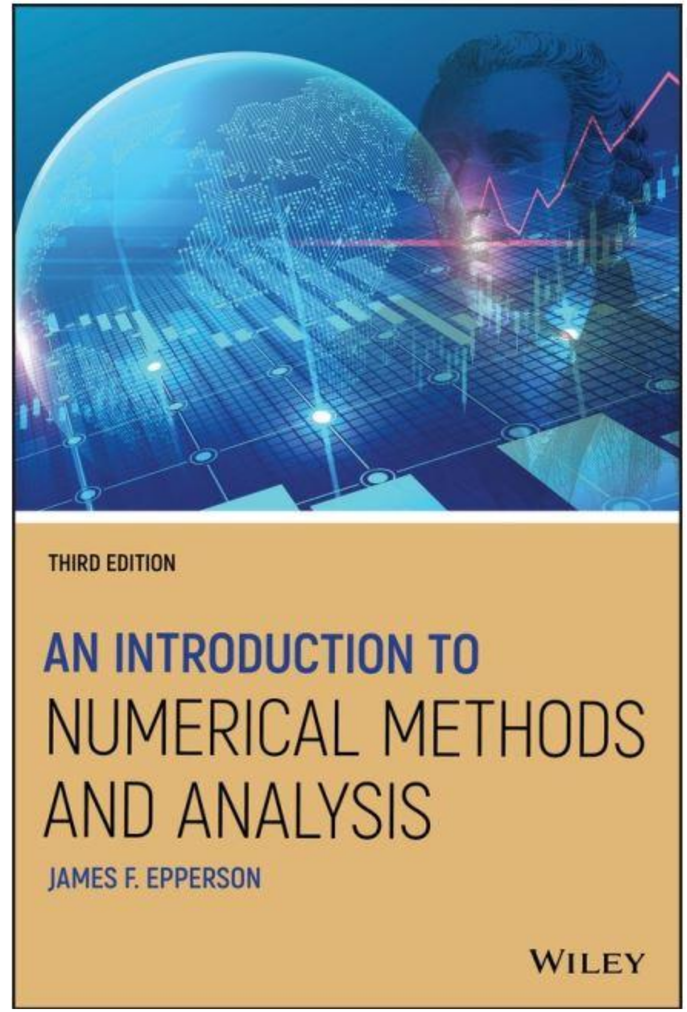
MSC12 – METODE NUMERIK

Interpolasi

Universitas Bunda Mulia

Diadopsi dari sumber :





Sub-CPMK

Mahasiswa diharapkan mampu menemukan suatu persamaan interpolasi berdasarkan data yang diketahui (C3, A3).

Materi

1. Interpolasi Polinom
2. Interpolasi Linier
3. Interpolasi kuadrat
4. Interpolasi kubik

1. Interpolasi Polinom

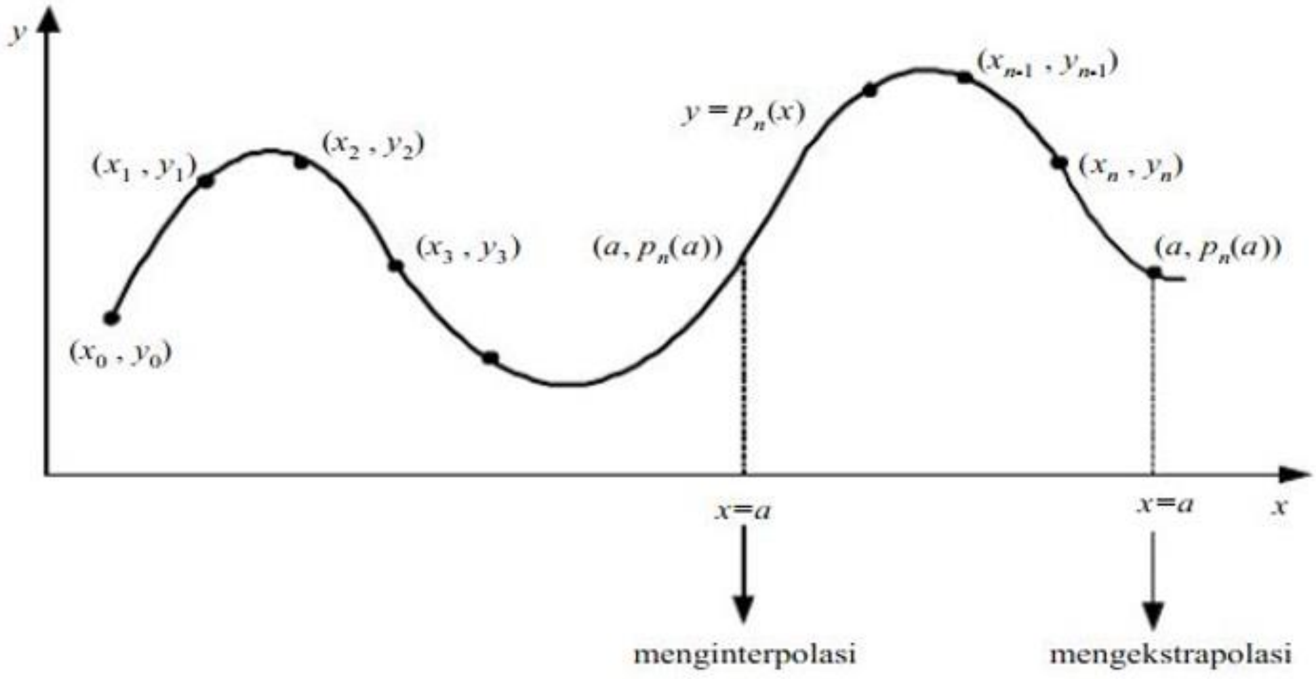
Interpolasi Polinom

Diberikan n+1 buah titik berbeda, (x0, y0), (x1, y1), ..., (xn, yn). Tentukan polinom pn(x) yang menginterpolasi (melewati) semua titik-titik tersebut sedemikian rupa sehingga

yi = p_n(xi) untuk i = 0, 1, 2, …, n

Nilai yi dapat berasal dari fungsi matematika f(x) (seperti ln x, sin x, fungsi Bessel, persamaan P.6.1, dan sebagainya) sedemikian sehingga yi = f(xi), sedangkan pn(x) disebut fungsi hampiran terhadap f(x). Atau, yi berasal dari nilai empiris yang diperoleh melalui percobaan atau pengamatan.

1.1 Interpolasi dan ekstrapolasi



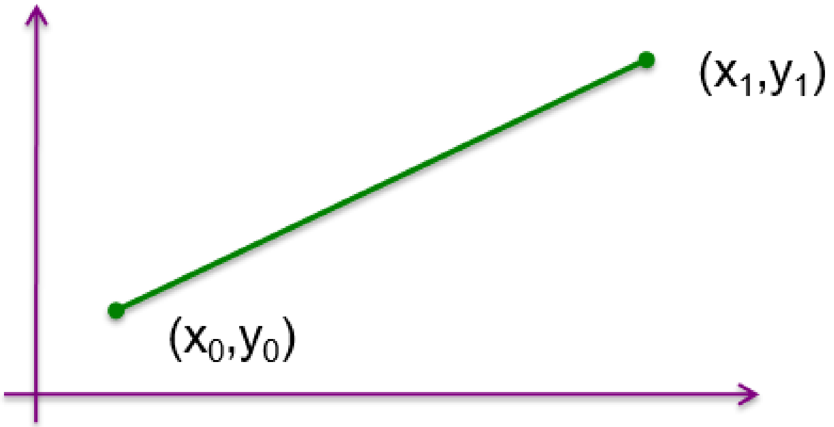
Setelah polinom interpolasi $p_n(x)$ ditemukan, $p_n(x)$ dapat digunakan untuk menghitung perkiraan nilai y di x = a, yaitu y = $p_n(a)$.

2. Interpolasi Linier

Interpolasi Linier

Interpolasi Linier adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Misal diberikan dua buah titik (x_0,y_0) dan (x_1,y_1). Polinom yang meginterpolasi kedua titik itu adalah persamaan garis lurus yang berbentuk

$$p_1(x)=a_0+a_1x$$



Interpolasi Linier (Lanj..)

Koefisien a_0 dan a_1 diperoleh dengan mensubtitusi atau eliminasi. Mensubtitusi (x_0,y_0) dan (x_1,y_1) kedalam persamaan ***$p_1(x)=a_0+a_1x$*** , diperoleh dua buah persamaan linier

$$y_0 = a_0 + a_1x_0.$$
$$y_1 = a_0 + a_1x_1.$$

Kedua persamaan linier ini diselesaikan dengan eliminasi , yang memberikan

$$a_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \rightarrow \ a_1 = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0}$$

Disubtitusi kedalam persamaan $p_1(x)=a_0+a_1x$

Interpolasi Linier (Lanj..)

Diperoleh :

$$p_1(x) = y_0 + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0)$$

Contoh :

Dari data ***ln(9,0) = 2,1927, ln(9,5) = 2,2513*** tentukan ln(9,2) dengan interpolasi linier sampai 5 angka bena

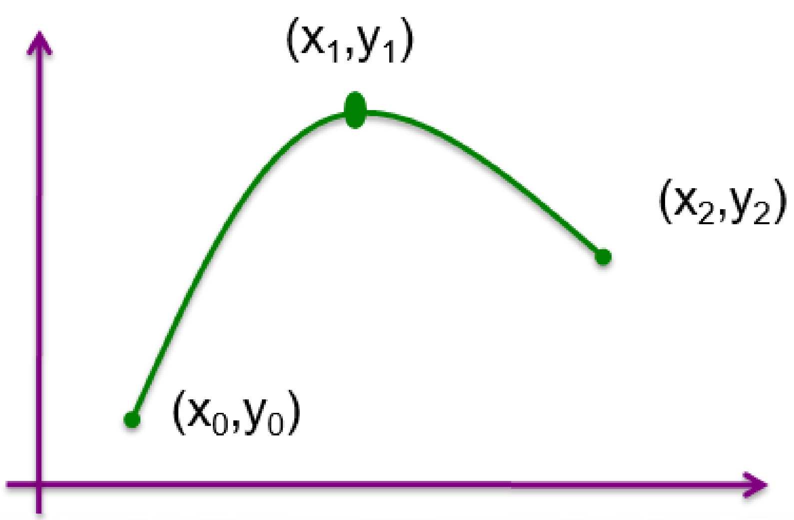
$$p_1(9{,}2) = 2{,}1972 + \frac{2{,}2513 - 2{,}1972}{9{,}5 - 9{,}0}(9{,}2 - 9{,}0) = 2{,}2192$$

3. Interpolasi Kuadrat

Interpolasi Kuadrat

Interpolasi Kuadrat adalah interpolasi tiga buah titik dengan sebuah garis. Misal diberikan tiga buah titik (x_0,y_0), (x_1,y_1), dan (x_2,y_2). Polinom yang meginterpolasi ketiga buah titik itu adalah

$$p_2(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2.$$



Interpolasi Kuadrat (Lanj..)

Polinom $p_2(x)$ ditentukan dengan cara subtitusi (x_i,y_i) kepersamaan ***$p_2(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2$***. maka diperoleh tiga buah persamaan sebagai berikut

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^{\ 2} = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^{\ 2} = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^{\ 2} = y_2$$

Hitung a_0,a_1,$a_2$dengan metode eliminasi Gauss - Jordan

Interpolasi Kuadrat (Lanj..)

Diberikan titik ***ln(8,0) = 2,0794, ln(9,0) = 2,1972, ln(9,5)=2,2513***. tentukan nilai ln(9,2) dengan interpolasi kuadrat.
Penyelesaian : sistem persamaan linier yang terbentuk

$$a_0 + 8{,}0\ a_1 + 64{,}00\ a_2 = 2{,}0794$$
$$a_0 + 9{,}0\ a_1 + 81{,}00\ a_2 = 2{,}1972$$
$$a_0 + 9{,}5\ a_1 + 90{,}25\ a_2 = 2{,}2513$$

Penyelesaian sitem persamaan dengan eliminasi diperoleh: a_0 = 0,6762 , a_1 = 0,2266, a_2 = -0,0064
Maka diperoleh persamaan

$$p_2(x) = 0{,}6762 + 0{,}2266\ x - 0{,}0064x_2.$$

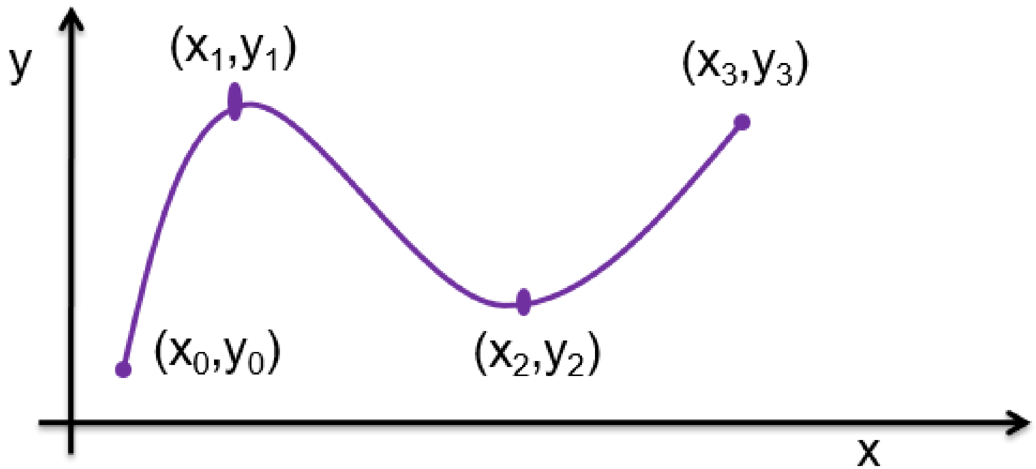
Sehingga diperoleh : $p_2(9{,}2) = 2{,}2192$

4. Interpolasi Kubik

Interpolasi Kubik

Interpolasi Kubik adalah interpolasi empat buah titik dengan sebuah garis. Misal diberikan tiga buah titik (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), dan (x_3,y_3). Polinom yang meginterpolasi ketig buah titik itu adalah

$$p_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$



Interpolasi Kubik (Lanj..)

Polinom $p_3(x)$ ditentukan dengan cara subtitusi kepersamaan ***$p_3(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2+a_3x^3$***. maka diperoleh tiga buah persamaan sebagai berikut

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 = y_0$$

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1$$

$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2$$

$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3$$

Hitung a_0,a_1,a_2,a_3 dengan metode eliminasi Gauss-Jordan

4.1. Polinom Lagrange

Bentuk umum ***polinom Lagrange*** derajat ≤ n untuk (n+1) titik berbeda adalah

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \ldots + a_n L_n(x)$$

$a_i = y_i$, $i = 0,1,2,\ldots,n$

dan,

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

4.1. Polinom Lagrange (Lanj..)

Hampiri fungsi ***f(x) = cos x*** dengan polinom interpolasi derajat tiga di dalam selang (0.0,1.2). Gunakan empat titik, x_0=0,0, x_1=0,4, x_2=0,8, x_3=1,2. perkirakan nilai awal P_3(0,5), dan bandingkan dengan nilai sejatinya.

Penyelesaian :

x_i	0,0	0,4	0,8	1,2
y_i	1,00000	0,921061	0,696707	0,362358

Polinom Lagrange derajat tiga yang menginterpolasi keempat titik adalah:

$$P_3(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + a_2 L_2(x) + a_3 L_3(x)$$

4.1. Polinom Lagrange (Lanj..)

$$\boxed{P_3(x) = a_0L_0(x) + a_1L_1(x) + a_2L_2(x) + a_3L_3(x)}$$

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$P_3(x) = 1{,}00000 \frac{(x-0{,}4)(x-0{,}8)(x-1{,}2)}{(0{,}0-0{,}4)(0{,}0-0{,}8)(0{,}0-1{,}2)} + 0{,}921061 \frac{(x-0{,}0)(x-0{,}8)(x-1{,}2)}{(0{,}4-0{,}0)(0{,}4-0{,}8)(0{,}4-1{,}2)} +$$

$$0{,}696707 \frac{(x-0{,}0)(x-0{,}4)(x-1{,}2)}{(0{,}8-0{,}0)(0{,}8-0{,}4)(0{,}8-1{,}2)} + 0{,}362358 \frac{(x-0{,}0)(x-0{,}4)(x-0{,}8)}{(1{,}2-0{,}0)(1{,}2-0{,}4)(1{,}2-0{,}8)}$$

4.1. Polinom Lagrange (Lanj..)

$$
\begin{aligned}
P_3(x) = -0{,}2604167\ & (x-0{,}4)(x-0{,}8)(x-1{,}2) \\
&+ 7{,}195789\ (x-0{,}0)(x-0{,}8)(x-1{,}2) \\
&- 5{,}443021\ (x-0{,}0)(x-0{,}4)(x-1{,}2) \\
&+ 0{,}943640\ (x-0{,}0)(x-0{,}4)(x-0{,}8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_3(0{,}5) = -0{,}2604167\ & (0{,}5-0{,}4)(0{,}5-0{,}8)(0{,}5-1{,}2) \\
&+ 7{,}195789\ (0{,}5-0{,}0)(0{,}5-0{,}8)(0{,}5-1{,}2) \\
&- 5{,}443021\ (0{,}5-0{,}0)(0{,}5-0{,}4)(0{,}5-1{,}2) \\
&+ 0{,}943640\ (0{,}5-0{,}0)(0{,}5-0{,}4)(0{,}5-0{,}8)
\end{aligned}
$$

$$P_3(0{,}5) = 0{,}877221$$

Ringkasan

- Interpolasi Polinom yi = $p_n(xi)$ untuk i = 0, 1, 2, …, n. Nilai yi dapat berasal dari fungsi matematika f(x), sedemikian sehingga yi = f(xi), sedangkan pn(x) disebut fungsi hampiran terhadap f(x). Atau, yi berasal dari nilai empiris yang diperoleh melalui percobaan atau pengamatan.
- ***Interpolasi Linier*** adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. $p_1(x)=a_0+a_1x$
- ***Interpolasi Kuadrat*** adalah interpolasi tiga buah titik dengan sebuah garis. $p_2(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2$.
- ***Interpolasi Kubik*** adalah interpolasi empat buah titik dengan sebuah garis. $p_3(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2+a_3x^3$.

Terima Kasih