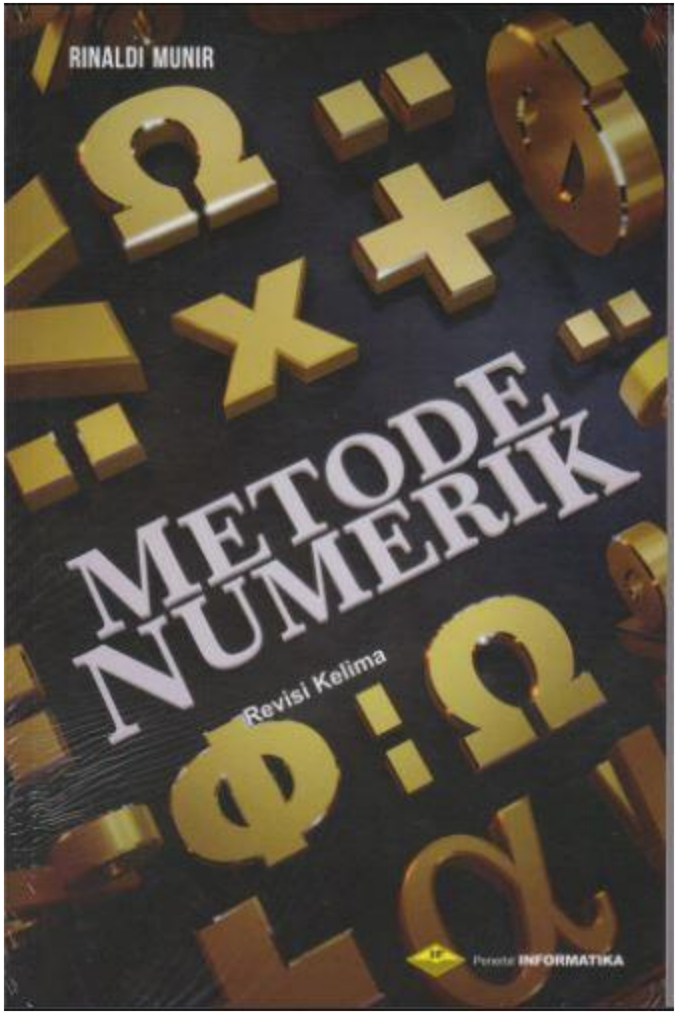
MSC12 – METODE NUMERIK

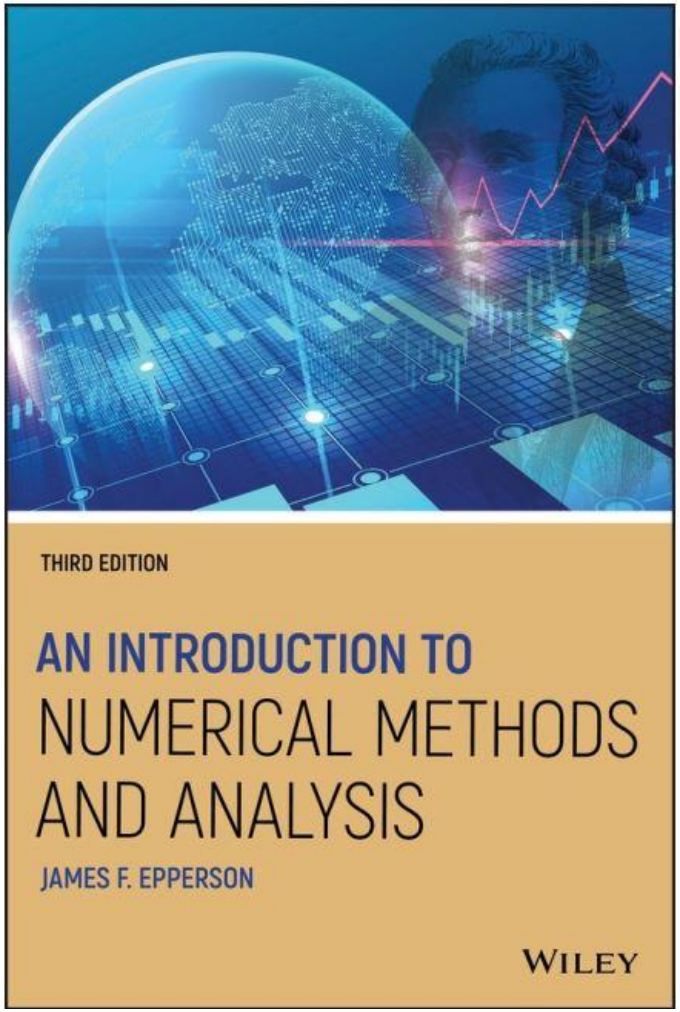
Capaian Pembelajaran Mata Kuliah

Mahasiswa mampu mengimplementasikan konsep dan teori dasar matematika untuk mendukung, memodelkan, dan mengatasi berbagai masalah yang berkaitan dengan logika. (C3, A3).

Deret Taylor

Diadopsi dari sumber :





Sub-CPMK

Mahasiswa diharapkan mampu menghasilkan deret Taylor serta mampu menghitung bilangan titik kambang ternormalisasi. (C3, A3).

Materi

1. Deret Taylor.
2. Analisa error.
3. Sumber utama error.
4. Orde approximation.
5. Floating point numbers.

1. Deret Taylor

Definisi deret Taylor

Andaikan f dan semua turunannya, f′,f″,f‴,f‴,… menerus di dalam interval [a,b]. Misal $x_0 \in$ [a,b], maka nilai-nilai x di sekitar x_0 dan $x \in$[a,b],f(x) dapat diperluas ke dalam deret Taylor :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \ldots$$

Definisi deret Taylor (Lanj..)

Contoh: Hampiri fungsi f(x)= sin x ke dalam deret Taylor di sekitar $x_0 = 1$

Penyelesaian:

Kita terlebih dahulu mencari turunan f(x) = sin x

$f(x)$	$= \sin x$	$f(x)$	$= \sin 1$
$f'(x)$	$= \cos x$	$f'(x)$	$= \cos 1$
$f''(x)$	$= -\sin x$	$f''(x)$	$= -\sin 1$
$f'''(x)$	$= -\cos x$	$f'''(x)$	$= -\cos 1$
$f''''(x)$	$= \sin x$	$f''''(x)$	$= \sin 1$
$f'''''(x)$	$= \cos x$	$f'''''(x)$	$= \cos 1$

Dan seterusnya…

Diperoleh :

$$\sin x = \sin 1 + \frac{(x-1)}{1!}\cos 1 + \frac{(x-1)^2}{2!}(-\sin 1) + \frac{(x-1)^3}{3!}(-\cos 1) + \frac{(x-1)^4}{4!}\sin 1 + \frac{(x-1)^5}{5!}\cos 1 + \ldots$$

1.1. Deret Taylor Terpotong

Karena suku-suku ***deret Taylor*** tidak berhingga banyaknya, maka untuk alasan praktis deret Taylor dipotong sampai suku orde tertentu

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + R_n(x)}$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \rightarrow x_0 < c < x}$$

1.1. Deret Taylor Terpotong (Lanj..)

Dengan demikian deret Taylor yang dipotong sampai suku orde ke n dapat ditulis sebagai

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Yang dalam hal ini

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^k(x_0)$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

1.1. Deret Taylor Terpotong (Lanj..)

Contoh: Hampiri fungsi f(x)= sin x ke dalam deret Taylor orde 4 di sekitar $x_0 = 1$

$$\sin x = \sin 1 + \frac{(x-1)}{1!}\cos 1 + \frac{(x-1)^2}{2!}(-\sin 1) + \frac{(x-1)^3}{3!}(-\cos 1) + \frac{(x-1)^4}{4!}\sin 1 + R_4(x)$$

Yang dalam hal ini

$$R_4(x) = \frac{(x-1)^5}{5!}\cos(c)$$

2. Analsis Error

Analisa Error (Galat)

Semakin kecil errornya semakin teliti solusi numeriknya yang didapatkan.
misal ậ adalah nilai hampiran terhadap nilai sejati a maka selisih.

$$\boxed{\varepsilon = a - \hat{a}}$$ disebut error

contoh :
Jika ậ = 10,5 adalah nilai hampiran dari a = 10,45 maka
errornya adalah ϵ = -0,01 , | ϵ | = 0,01.

Analisa Error (Galat) (Lanj..)

error relatif didefenisikan sebagai $\epsilon_r = \epsilon/a$ atau

$\epsilon_r = (\epsilon/a)100\%$

error relatif hampiran didefenisikan sebagai $\epsilon_{ra} = \epsilon/ \hat{a}$

contoh :

misal nilai sejati =10/3 dan nilai hampiran = 3,333

Hitunglah error,error mutlak error relatif dan error relatif hampiran

error = 10/3-3,333 = 10/3 – 3333/1000 = 1/3000

= 0,000333

error mutlak = | 0,000333 | = 0,000333

error relative= (1/3000)/(10/3) = 1/1000 = 0,0001

error relatif hampiran = (1/3000/ 3,333) = 1/9999

Analisa Error (Galat) (Lanj..)

Untuk menghitung ϵ_{ra} , digunakan

$$\varepsilon_{RA} = \frac{(a_{r+1} - a_r)}{a_{r+1}}$$

Proses iterasi dihentikan jika $| \epsilon_{ra} | < \epsilon_s$

ϵ_s.adalah toleransi error yang dispesifikasikan ϵ_s.menentukan ketelitian solusi numerik , semakin kecil nilai ϵ_s. semakin teliti solusinya.

contoh :

misal ada prosedur iteration sebagai berikut

$\epsilon_{r+1} = (- X_r^3 + 3)/6$ Misal $X_0 = 0,5$ Dan $\epsilon_s. = 0,00001$

Analisa Error (Galat) (Lanj..)

$\epsilon_{r+1} = (-X_r^3 + 3)/6$ Misal $X_0=0,5$ Dan $\epsilon_s=0,00001$ Maka

$x_0 = 0,5$

$$x_1 = 0,4791667 \quad ; \left| \varepsilon_{ra} = \frac{(x_1 - x_0)}{x_1} \right| = 0,043478 \quad > \varepsilon_{ra}$$

$$x_2 = 0,4816638 \quad ; \left| \varepsilon_{ra} = \frac{(x_2 - x_1)}{x_2} \right| = 0,0051843 \quad > \varepsilon_{ra}$$

$$x_3 = 0,4813757 \quad ; \left| \varepsilon_{ra} = \frac{(x_3 - x_2)}{x_2} \right| = 0,0005984 \quad > \varepsilon_{ra}$$

$$x_4 = 0,4814091 \quad ; \left| \varepsilon_{ra} = \frac{(x_4 - x_3)}{x_3} \right| = 0,0000694 \quad > \varepsilon_{ra}$$

$$x_5 = 0,4814052 \quad ; \left| \varepsilon_{ra} = \frac{(x_5 - x_4)}{x_4} \right| = 0,0000081 \quad < \varepsilon_{ra}$$

Karena 0,0000081 < dari 0,00001 maka leleran berhenti

2.1. Error Pemotongan

Ekspresi matematika yang lebih konpleks diganti dengan formula yang lebih sederhana

Turunan Persamaan Fungsi f^1.

$$\boxed{f^1 = \frac{f(x_{i+1}) - f(x)}{h}}$$

Contoh :

Hampiran fungsi Cos (x) dengan bantuan deret Taylor disekitar $x_0 = 0$.

$$\mathrm{Cos}(x) = \underbrace{1 - x^2/2! + x^4/4! - x^6/6!}_{\text{nilai hampiran}} \quad \underbrace{+ x^8/8! - x^{10}/10!}_{\text{error pemotongan}}$$

$R_n(x) = (x - x_0)^{(n+1)}/(n+1)!f^{(n+1)}(x)$. $\qquad x_o < c < x$

$R_6(x) = (x - x_0)^7/7!$ cos c. $\qquad x_o < c < x$

2.1. Error Pemotongan (Lanj..)

Gunakan deret Taylor orde 4 disekitar x_o untuk menghampiri ln (0,9) dan beri taksiran untuk error pemotongan maksimum yang diberikan f(x) = ln(x)

$f(x)$	$= \ln(x)$
$f(x)^1$	$= 1/x$
$f(x)^{11}(x)$	$=-1/x^2.$
$f(x)^{111}(x)$	$= 2/x^3.$
$f(x)^{1111}(x)$	$= -6/x^4.$
$f(x)^{11111}(x)$	$= 24/x^5.$
………….	………

$\ln(x) \quad = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + r4(x)$

$\ln(0,9) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. = - 0,105383 + r4(x)$

$Rs(0.9) < \text{Max } 24/C^5 \,.\, (- 0.1)^5/5! = 0.0000034.$

2.2. Error Pembulatan (Lanj..)

Error Pembulatan

$1/6 = 0{,}16666666$

$1/6 = 0{,}1666667$ Error Pembulatan

$1/6 - 0{,}1666667 = 0{,}000000333$

Error Total

Error Total = Error Pemotongan + Error Pembulatan

Contoh.

$\text{Cos}(0{,}2) = 1 - 0{,}2^2/2 + 0{,}2^4/24 \quad = 0{,}9800667$

Error Pemotongan Error Pembulatan

3. Sumber Utama Error

Sumber Utama Error

ada 2 sumber utama penyebab error antara lain:

1. Error pemotongan(truncation error)
2. Error pembulatan(round off error)

3.1. Error Pemotongan

Error pemotongan mengacu pada error yang timbulkan akibat penggunaan hampiran sebagai pengganti formula eksak. Maksudnya, ekpresi matematik yang lebih kompleks “diganti” dengan formula yang lebih sederhana. Tipe error pemotongan pada metode komputasi yang di gunakan untuk penghampiran kadang-kadang di sebut **error metode**

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$$

3.1. Error pemotongan (Lanj..)

Contoh

Gunakan deret taylor orde 4 di sekitar $x_0 = 1$ untuk menghampiri ln(0.9) dan berikan taksiran untuk error pemotongan maksimum yang di buat.

Penyelesaian:

$$f(x) = \ln \rightarrow f(1) = 0$$

$$f^{'}(x) = 1/x \rightarrow f^{'}(1) = 1$$

$$f^{''}(x) = -1/x^2 \rightarrow f^{''}(1) = -1$$

$$f^{'''}(x) = 2/x^3 \rightarrow f^{'''}(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -6/x^4 \rightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

$$f^{(5)}(x) = 24/x^5 \rightarrow f^{(5)}(c) = 24/c^5$$

Sehingga:

$$\ln(x) = (x-1) - (x-1)^2/2 + (x-1)^3/3 - (x-1)^4/4 + R_4(x)$$

dan

$$\ln(0.9) = -0.1 - (-0.1)^2/2 + (-0.1)^3/3 - (-0.1)^4/4 + R_4(x) = -0.1053583 + R_4(x)$$

Diperoleh:

$$|R_5(0.9)| \langle \max \left| \frac{25}{0.9^5} \right| x \frac{(-0.5)^5}{5!}$$

$$|R_4(0.9)| < \max \left| \frac{24}{0.9^5} \right| x \frac{(-0.1)^5}{5!} \approx 0.0000034$$

3.2. Error Pembulatan

Perhitungan dengan menggunakan metode numeri hampir selalu bilangan rill. keterbatasan komputer dalam menyajikan bilanag rill menghasilkan error yang di sebut error pembulatan.

Sebagai contoh 1/6≈0.16666666…tidak dapat di sajikan secara tepat oleh komputer karena digit 6 panjangnya tidak terbatas. Kebanyakan komputer digital mempunyai dua buah cara penyajian bilangan rill, yaitu:

3.3. Angka Penting (Angka Bena)

Konsep angka penting telah dikembangkan secara formal untuk menandakan keandalan suatu nilai numerik.

Contoh

42,715	5 Angka Penting
40002,715	8 Angka Penting
0,002715	4 Angka Penting
0,0015	2 Angka Penting
42,71500	7 Angka Penting

4. Orde Aprroximation

Orde Aproximation

Satu cara untuk menggunakan tingkat ketelitian penghampiran itu adalah menggunakan notasi O-besar (*Big-oh*)

$$f(h) = p(h) + O(h^n)$$

$O(h^n)$ juga dapat di artikan sebagai orde error dari penghampiran fungsi. Karena umumnya cukup kecil yaitu lebih kurang dari 1, maka semakin tinggi nilain n, semakin kecil error, yang berarti semakin teliti penghampiran fungsinya.

- Umumnya deret taylor digunakan untuk penghampiran fungsi misalnya, $x_{i+1} = x_i + h$
- Adalah titi-titik selebar h, maka hampiran $f(x_{i+1})$, dengan deret taylor di sekitar x_i adalah

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x)}{1!} f'(x_i) + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} f'' + \ldots + \frac{(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + R_n(x_{i+1})$$

$$= f(x_i) + \frac{h}{1!} f'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f'''(x_i) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + R(x_{i+1})$$

Dapat ditulis sbb:

$$f(x_{i+1}) \sum_{k=0}^{n} \frac{h^n}{k!} f^{(k)}(x_i) + O(h^{n+1})$$

Orde Aproximation (Lanj..)

Contoh

$$e^h = 1 + h + h^2/2! + h^3/3! + h^4/4! O(h^5)$$

$$\ln(x+1) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + x^5/4 + Oh(h^5)$$

$$\sin(h) = h - h^3/3! + h^5/5! + O(h^7)) bukan\_O(h^6), karena\_suku\_orde\_6 = 0)$$

$$\cos(h) = 1 - h^2/4! + h^4/6! + O(h^8)(bukan O(h^7), karena\_suku\_orde\_7 = 0$$

5. Floating point numbers

Floating point numbers

Format bilangan rill di dalam komputer berbeda-beda bergantung dengan piranti keras dan compiler bahasa pemogramannya. Bilangan rill di dalam komputer umumnya disajikan dalam format bilangan titik kambang.

Floating point numbers a ditulis sebagai:

$$a = \pm mxB^{p} = \pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots d_n xB^{n}$$

M= mantisa rill adalah digit atau bit mantisa yang nilainya dari 0-(B-1),

N= adalah panjang digit(bit)mantisa.

B=basis sistem bilangan yang di pakai (2,8,10,16,dan sebagainya).

p=panjang(berupa bilangan bulat)nilainya dari

Floating point numbers (Lanj..)

Contoh

Tulislah bilangan e dalam format bilangan titik kambang ternormalisasi dengan basis 10, basis 2 dan basis 16

Penyelesaian:

Dalam basis 10 (menggunakan 8 angka bena)

$$e \approx 2.7182818 = 0.27182818 x 10^3$$

Dalam basis 2 (menggunakan 30 bit bena)

$$e \approx 0.10101101111110000010101000010110_2 \, x 2^2$$

Dalam 16 bit (gunakan fakta bahwa $16 = 2^4$ artinya $2^2 = \frac{1}{4} x 16^1$ sehingga

$$e \approx 0.101011011111100001010100010110_2 \, x 2^2$$

$$= \frac{1}{4} 0.101011011111100001010100010110_2 \, x 16^1$$

$$= 0.101011011111100001010100010110_2 \, x 16^1$$

$$= 0.2B7E1516_{16} \, x 16^1$$

Ringkasan

- Deret Taylor dalam matematika adalah representasi fungsi matematika sebagai jumlahan tak hingga dari suku-suku yang nilainya dihitung dari turunan fungsi tersebut di suatu titik. Deret ini dapat dianggap sebagai limit polinomial Taylor.
- Deret Taylor $\boxed{f(x) = P_n(x) + R_n(x)}$
- Analsis Error $\boxed{\varepsilon = a - \hat{a}}$
- Aproximation $f(x_{i+1})\sum_{k=0}^{n}\frac{h^n}{k!}f^{(k)}(x_i) + O(h^{n+1})$
- Ploting point number $a = \pm mxB^{\ p} = \pm 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots d_n xB^{\ n}$

Terima Kasih