1. (a) の回路における電力の導出

入力電圧の最大値を E_m とすると

$$e = E_m \sin\omega t$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R}\sin\omega t$$

$$ei = E_m \sin\omega t \cdot \frac{E_m}{R}\sin\omega t$$

$$= \frac{E_m^2}{R}\sin^2\omega t$$

$$= \frac{E_m^2}{R}(1-\cos 2\omega t)$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \text{より},$$

$$E_m^2 = 2E^2 \text{であるから},$$

$$ei = ei_R = \frac{E^2}{R}(1-\cos 2\omega t)$$

2. (b) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

インダクタンス L [H] に流れる電流を i [A]
とすると, 誘導起電力 e_L [V] は

$$e_L = -L\frac{di}{dt}$$

$e + e_L = 0$ が成り立つため,

$$e = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{e}{L}dt = di$$

$$\int di = \int \frac{e}{L}dt$$

$$i = \int \left(\sqrt{2}E\sin\omega t dt\right)$$

$$= -\sqrt{2}\frac{E}{\omega L}\cos\omega t$$

$$= \sqrt{2}\frac{E}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$ei = \frac{2E^2}{\omega L}\sin\omega t \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

積和の公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$$

を用いて変形すると

$$ei = \frac{2E^2}{\omega L}\left(-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\omega t + \omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\omega t - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{E^2}{\omega L}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

3. (c) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

静電容量 C [F] に加わる電圧を v [V]
とすると, 流れる電流 i [A] は

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}Cv$$

$$= C\frac{d\left(\sqrt{2}E\sin\omega t\right)}{dt}$$

$$= \sqrt{2}\omega CE\cos\omega t$$

これらから, 電力 ei は

$$ei = 2E^2\omega C\sin\omega t\cos\omega t$$

$$= E^2\omega C\sin(2\omega t)$$

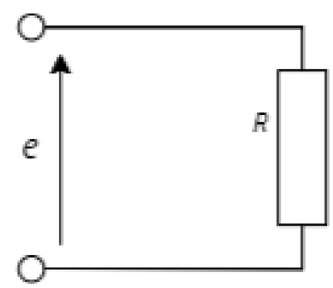

Figure 1: 回路 a

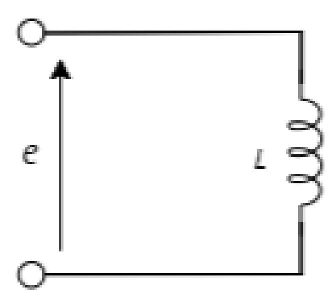

Figure 2: 回路 b

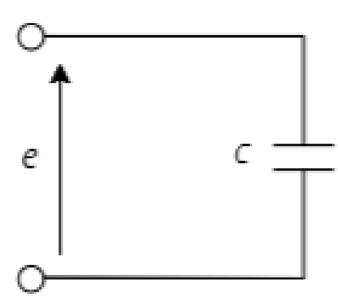

Figure 3: 回路 c

4. (d) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$

また, 各素子の電圧降下の合成と考えると

$e = iR + L\dfrac{di}{dt}$とも表すことができる.

抵抗とインダクタンスの合成インピーダンスを Z,

合成インピーダンスの位相のずれをΦとすると

電流 i は,

$$i = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

この i を用いて電力 ei を表すと,

$$ei = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\sin(\omega t - \Phi)$$

加法定理を用いて, $\sin(\omega t - \Phi)$ を変形すると

$$ei = \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\Phi - \cos\omega t\sin\Phi)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi - \sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi\right)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi\right) - \frac{2E^2}{\|Z\|}(\sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi)$$

左の項には sin の半角公式

右の項には$\sin\alpha\cos\beta$の積和公式を用いて変形すると

$$ei = \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)\cos\Phi\right)$$
$$-\frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t + \sin 0)\sin\Phi\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$

また, 各素子における電力を求める.

抵抗での電圧降下 e_Rは,

$$e_R = iR = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R\sin(\omega t - \Phi)$$

であるから,

$$ei_R = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R\sin(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}R\sin^2(\omega t - \Phi)$$

半角の公式を用いて

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}R\left(\frac{1-\cos 2(\omega t - \Phi)}{2}\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|^2}R(1-\cos 2(\omega t - \Phi))$$

R とωL との位相差は$\dfrac{\pi}{2}$であり,

合成インピーダンス Z の位相差をΦとすると,

$\dfrac{R}{\|Z\|} = \cos\Phi$となるため,

$$ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2(\omega t - \Phi))$$

次にコイルでの電圧降下 e_Lは,

$$e_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos(\omega t - \Phi)$$

であるから,

$$ei_L = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\cos(\omega t - \Phi)\sin(\omega t - \Phi)$$

積を和に直す公式を用いて変形すると,

$$ei_L = \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t - 2\Phi)\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|^2}\omega L(\sin 2\omega t - 2\Phi)$$

また, $\dfrac{\omega L}{\|Z\|} = \sin\Phi$となるため,

$$ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi(\sin 2\omega t - 2\Phi)$$

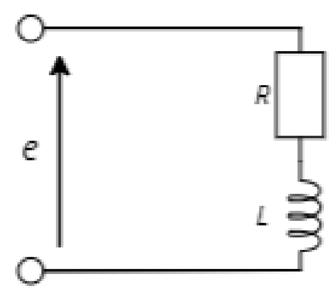

Figure 4: 回路 d

5. (e) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$

並列接続であるから, 抵抗および

インダクタンスにかかる電圧は等しいので,

$e = e_R = e_L$

また, 各素子における電圧降下で考えると,

$e = i_R R = L\dfrac{di_L}{dt}$

抵抗に流れる電流は, オームの法則より,

$$i_R = \frac{e}{R}$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t$$

インダクタンスに流れる電流は,

$$e = L\frac{di_L}{dt}$$
$$\frac{e}{L}dt = di_L$$
$$\int di_L = \int \frac{e}{L}dt$$
$$i_L = \frac{\sqrt{2}E}{L}\int \sin\omega t dt$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$

ところで, 合成アドミタンス Y は,

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$
$$= \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$$
$$\|Y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

つまり, 合成インピーダンス Z は,

$$\|Z\| = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

電圧を基準として電流の位相差をを考えると,

電圧と同位相である $\frac{1}{R}$ と, $-\frac{\pi}{2}$ ずれている $\frac{1}{\omega L}$

によって得られる電流は Y の位相であるため,

Y の位相をΦとすると,

$$\cos\Phi = \frac{\frac{1}{R}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\cos\Phi}{\|Z\|}$$
$$\sin\Phi = \frac{\frac{1}{\omega L}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{\omega L} \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \frac{\sin\Phi}{\|Z\|}$$

となる. これらから電流 i_R と,i_L を変形すると,

$$i_R = \frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\cos\Phi\sin\omega t$$
$$i_L = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\Phi\cos\omega t$$

となり, 式 3.17, 式 3.18 が得られ, 各素子の電力は,

$$ei_R = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\cos\Phi\sin\omega t$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\sin^2\omega t$$

半角の公式を用いて,

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2\omega t)$$
$$ei_L = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\Phi\cos\omega t\right)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin\omega t\cos\omega t$$

積和の公式を用いて,

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t - \sin 0)\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$
$$\therefore ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2\omega t)$$
$$\therefore ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$

6. (f) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

ここで, 各素子の合成インピーダンスを考える.

$$Z_{R1} = R_1$$
$$Z_{RL} = R_2 + j\omega L$$

であるから, 並列接続部分の合成インピーダンスは,

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_{R1}} + \frac{1}{Z_{RL}}$$

回路全体の合成インピーダンスを Z とすると,

$$Z = R_0 + Z_p$$

Z の位相をΦとすると, 回路に流れる電流 i_s は,

$$i_s = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

となり, 電力は

$$ei = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$

また, 各素子の電力は, その素子に流れる電流,
その素子にかかる電圧, その素子のインピーダンスに
よって立式されている.

7. (g) の回路における電力の導出

$e=\sqrt{2}E\sin\omega t$ とする.

直列接続であるから合成インピーダンス Z は,

$$Z=R+\frac{1}{j\omega C}=R-j\frac{1}{\omega C}$$

となり,

$$\|Z\|=\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Z による位相のずれをΦとすると,

コンデンサによって電流は電圧よりも位相が

進むため,

$$i=\frac{e}{\|Z\|}=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t+\Phi\right)$$

これらから, 回路全体の電力は,

$$ei=\sqrt{2}E\sin\omega t\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t+\Phi\right)$$

$$=\frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\sin\left(\omega t+\Phi\right)$$

加法定理を用いて変換すると,

$$=\frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\left(\sin\omega t\cos\Phi+\cos\omega t\sin\Phi\right)$$

$$=\frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi+\sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi\right)$$

半角公式および, 積和公式を用いれば,

$$\therefore ei=\frac{E^2}{\|Z\|}\left(\left(1-\cos 2\omega t\right)\cos\Phi+\sin 2\omega t\sin\Phi\right)$$

次に e_Rについて考える.e_Rは, オームの法則より,

$$e_R=iR=\frac{\sqrt{2}ER}{\|Z\|}\sin\left(\omega t+\Phi\right)$$

$$ei_R=\frac{\sqrt{2}ER}{\|Z\|}\sin\left(\omega t+\Phi\right)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t+\Phi\right)$$

$$=\frac{2E^2R}{\|Z\|^2}\sin^2\left(\omega t+\Phi\right)$$

$$=\frac{2E^2R}{\|Z\|^2}\left(\frac{1-\cos 2\left(\omega t+\Phi\right)}{2}\right)$$

$$=\frac{E^2R}{\|Z\|^2}\left(1-\cos 2\left(\omega t+\Phi\right)\right)$$

ここで,$\dfrac{R}{\|Z\|}=\cos\Phi$であるから,

$$=\frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(1-\cos 2\left(\omega t+\Phi\right)\right)$$

次にキャパシタンスによる電力を考える.

$$i=\frac{de_c}{dt}C$$

$$\frac{1}{C}idt=de_c$$

$$\int de_c=\int\frac{1}{C}idt$$

$$e_c=\frac{1}{C}\int\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t+\Phi\right)dt$$

$$e_c=\frac{\sqrt{2}E}{C\|Z\|}\int\sin\left(\omega t+\Phi\right)dt$$

$$e_c=-\frac{\sqrt{2}E}{\omega C\|Z\|}\cos\left(\omega t+\Phi\right)$$

$$ei_c=-\frac{\sqrt{2}E}{\omega C\|Z\|}\cos\left(\omega t+\Phi\right)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t+\Phi\right)$$

$$=-\frac{2E^2}{\omega C\|Z\|^2}\cos\left(\omega t+\Phi\right)\sin\left(\omega t+\Phi\right)$$

$\sin\Phi=\dfrac{\frac{1}{\omega C}}{\|Z\|}=\dfrac{1}{\omega C\|Z\|}$及び, 加法定理の逆より,

$$\therefore ei_c=-\frac{E^2}{\|Z\|}\sin 2\left(\omega t+\Phi\right)$$

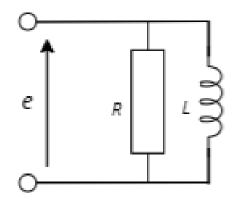

Figure 5: 回路 e

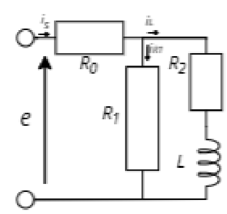

Figure 6: 回路 f

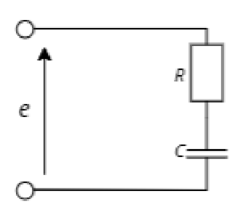

Figure 7: 回路 g

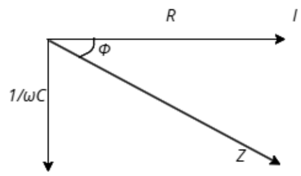

Figure 8: ベクトル図

8. (h) の回路における電力の導出

$$
\begin{aligned}
e &= \sqrt{2}E\sin\omega t
\end{aligned}
$$

合成アドミタンスは,

$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{1}{R} + j\omega C \\
\|Y\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} \\
\|Z\| &= \frac{1}{\|Y\|}
\end{aligned}
$$

並列接続より各素子にかかる電圧は等しい.

$$
\begin{aligned}
i_R &= \frac{e}{R} \\
ei_R &= \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t \\
&= \frac{2E^2}{R}\sin^2\omega t \\
&= \frac{E^2}{R}(1-\cos 2\omega t)
\end{aligned}
$$

ここで, 合成アドミタンスとの位相差を考えると

$$
\frac{\frac{1}{R}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{R} = \cos\Phi \text{であるから,}
$$

$$
\therefore ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2\omega t)
$$

次にキャパシタンスによる電力を考える.

$$
\begin{aligned}
i_c &= \frac{de_c}{dt}C \\
&= C\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}E\sin\omega t\right) \\
&= \sqrt{2}E\omega C\cos\omega t \\
ei_c &= \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \sqrt{2}E\omega C\cos\omega t \\
&= 2E^2\omega C\sin\omega t\cos\omega t \\
&= E^2\omega C\sin 2\omega t
\end{aligned}
$$

ここで, 電圧を基準にしてベクトルを考えると,
位相差Φを使って,

$$
\begin{aligned}
\sin\Phi &= \frac{\omega C}{\|Y\|} = \|Z\|\omega C \\
\omega C &= \frac{1}{\|Z\|}\sin\Phi \text{であるから} \\
\therefore ei_c &= \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t
\end{aligned}
$$

9. (i) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$ とする.
合成インピーダンスは

$$
\begin{aligned}
Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\
&= R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \\
\|Z\| &= \sqrt{R^2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}
\end{aligned}
$$

合成インピーダンスの位相差をΦとする.
電流はオームの法則より,

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{e}{\|Z\|} \\
&= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi) \\
ei &= \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi) \\
&= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\sin(\omega t - \Phi)
\end{aligned}
$$

加法定理より,

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\Phi - \cos\omega t\sin\Phi) \\
&= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi - \sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi\right) \\
&= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\cos\Phi - \frac{1}{2}(\sin 2\omega t + \sin 0)\sin\Phi\right) \\
\therefore ei &= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t \\
ei_r &= i^2R = \frac{2E^2}{(\|Z\|)^2}R\sin^2(\omega t - \Phi)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{R}{\|Z\|} = \cos\Phi \text{より,}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\sin^2(\omega t - \Phi) \\
&= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(\frac{1-\cos 2(\omega t - \Phi)}{2}\right) \\
\therefore ei_r &= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2(\omega t - \Phi))
\end{aligned}
$$

次に, インダクタンスでの電力を考える.

$$e_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos(\omega t - \Phi)$$
$$ei_L = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos(\omega t - \Phi)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\sin(\omega t - \Phi)\cos(\omega t - \Phi)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\left(\frac{1}{2}\sin 2(2\omega t)\right)$$
$$\therefore ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|^2}\omega L\sin 2(\omega t - \Phi)$$

最後にキャパシタンスの電力を考える.

$$i = \frac{de_C}{dt}C$$
$$\int de_C = \frac{1}{C}\int idt$$
$$de_C = \frac{1}{C}\int\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)\,dt$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega C\|Z\|}\cos(\omega t - \Phi)$$
$$ei_C = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega C\|Z\|}\cos(\omega t - \Phi)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$
$$= -\frac{2E^2}{\omega C\|Z\|^2}\sin(\omega t - \Phi)\cos(\omega t - \Phi)$$
$$= -\frac{2E^2}{\omega C\|Z\|^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2(\omega t - \Phi)\right)$$
$$= -\frac{E^2}{\omega C\|Z\|^2}\sin 2(\omega t - \Phi)$$

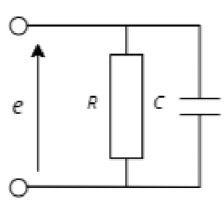

Figure 9: 回路 h

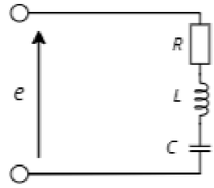

Figure 10: 回路 i

10. (j) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

合成アドミタンスは,

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}$$
$$= \frac{1}{R} + j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)$$
$$\|Y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)^2}$$
$$\|Z\| = \frac{1}{\|Y\|}$$

並列接続より各素子にかかる電圧は等しい.

$$i_R = \frac{e}{R}$$
$$ei_R = \sqrt{2}E\sin\omega t\cdot\frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t$$
$$= \frac{2E^2}{R}\sin^2\omega t$$
$$= \frac{E^2}{R}(1 - \cos 2\omega t)$$

ここで, 合成アドミタンスとの位相差を考えると

$\frac{\frac{1}{R}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{R} = \cos\Phi$であるから,

$$\therefore ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1 - \cos 2\omega t)$$

次にインダクタンスによる電力を考える.

$$e = L\frac{di_L}{dt}$$
$$\int di_L = \frac{1}{L}\int edt$$
$$i_l = \frac{1}{L}\int\sqrt{2}E\sin\omega tdt$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$
$$ei_L = \sqrt{2}E\sin\omega t\cdot -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$
$$= -\frac{2E^2}{\omega L}\sin\omega t\cos\omega t$$

$\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$より,

$$= -\frac{E^2}{\omega L}\sin 2\omega t$$
$$\therefore ei_L = -\frac{E^2}{\omega L}\sin 2\omega t$$

最後にキャパシタンスによる電力を考える.

$$i_c = \frac{de_c}{dt}C = C\frac{d}{dt}\left(\sqrt{2}E\sin\omega t\right)$$
$$= \omega C\sqrt{2}E\cos\omega t$$
$$ei_c = \sqrt{2}E\sin\omega t\cdot\omega C\sqrt{2}E\cos\omega t$$
$$= \omega C2E^2\sin\omega t\cos\omega t$$
$$\therefore ei_c = \omega CE^2\sin 2\omega t$$

11. (k) の回路における電力の導出

$$e=\sqrt{2}E\sin\omega t$$

R-L 直列の合成インピーダンスを Z_1,
Z_1に流れる電流を i_1,
R-C 直列の合成インピーダンスを Z_2,
Z_2に流れる電流を i_2とし
Z_1,Z_2の位相差をそれぞれ$\Phi_1\Phi_2$
とすると, それぞれ以下のように示せる.

$$\|Z_1\|=\sqrt{{R_1}^2+(\omega L)^2}$$

$$\|Z_2\|=\sqrt{{R_2}^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$i_1=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_1\|}\sin(\omega t-\Phi_1)$$

$$i_2=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_2\|}\sin(\omega t+\Phi_2)$$

まず,R_1の電力を求める.

$$e_{r1}=i_1R=\frac{\sqrt{2}ER}{\|Z_1\|}\sin(\omega t-\Phi_1)$$

$$ei_{r1}=\frac{\sqrt{2}ER}{\|Z_1\|}\sin(\omega t-\Phi_1)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_1\|}\sin(\omega t-\Phi_1)$$

$$=\frac{2E^2}{\|Z_1\|^2}R\sin^2(\omega t-\Phi_1)$$

$$\cos\Phi_1=\frac{R}{\|Z_1\|}\text{より},$$

$$=\frac{2E^2}{\|Z_1\|}\sin\Phi_1\sin^2(\omega t-\Phi_1)$$

$$\therefore ei_{r1}=\frac{E^2}{\|Z_1\|}\sin\Phi_1(1-\cos 2(\omega t-\Phi_1))$$

次にインダクタンスの電力を求める.

$$e_L=L\frac{di_1}{dt}=L\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_1\|}\sin(\omega t-\Phi_1)\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_1\|}\omega L\cos(\omega t-\Phi_1)$$

$$\sin\Phi_1=\frac{\omega L}{\|Z_1\|}\text{より},$$

$$=\sqrt{2}E\sin\Phi_1\cos(\omega t-\Phi_1)$$

$$ei_L=\sqrt{2}E\sin\Phi_1\cos(\omega t-\Phi_1)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_1\|}\sin(\omega t-\Phi_1)$$

$$=\frac{2E^2}{\|Z_1\|}\sin\Phi\sin(\omega t-\Phi_1)\cos(\omega t-\Phi_1)$$

$$=\frac{E^2}{\|Z_1\|}\sin\Phi\sin 2(\omega t-\Phi_1)$$

次に,R_2の電力を求めるが, 電流の位相差が異なるだけであるため,

$$e_{r2}=i_2R=\frac{\sqrt{2}ER}{\|Z_2\|}\sin(\omega t+\Phi_2)$$

$$ei_{r2}=\frac{\sqrt{2}ER}{\|Z_2\|}\sin(\omega t+\Phi_2)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_2\|}\sin(\omega t+\Phi_2)$$

$$\therefore ei_{r2}=\frac{E^2}{\|Z_2\|}\sin\Phi_2(1-\cos 2(\omega t+\Phi_2))$$

次に,C の電力を求める.

$$i_2=\frac{de_c}{dt}C$$

$$\int de_c=\frac{1}{C}\int di_c dt$$

$$e_c=\frac{1}{C}\int\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_2\|}\sin(\omega t+\Phi_2)dt$$

$$=-\frac{\sqrt{2}E}{\omega C\|Z_2\|}\cos(\omega t+\Phi_2)$$

$$ei_c=-\frac{\sqrt{2}E}{\omega C\|Z_2\|}\cos(\omega t+\Phi_2)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_2\|}\sin(\omega t+\Phi_2)$$

$$\sin\Phi_2=\frac{\omega C}{\|Z_2\|},\text{加法定理の逆より},$$

$$\therefore ei_c=-\frac{2E^2}{\|Z_2\|}\sin\Phi_2\sin 2(\omega t+\Phi_2)$$

全体の電力 ei は,

$$ei=e(i_1+i_2)$$

$$=\sqrt{2}E\sin\omega t\cdot\left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_1\|}\sin(\omega t-\Phi_1)+\frac{\sqrt{2}E}{\|Z_2\|}\sin(\omega t+\Phi_2)\right)$$

$$\therefore ei=\frac{E^2}{\|Z_1\|}(\cos\Phi_1-\cos(2\omega t-\Phi_1))-\frac{E^2}{\|Z_2\|}(\cos\Phi_2+\cos(2\omega t+\Phi_2))$$

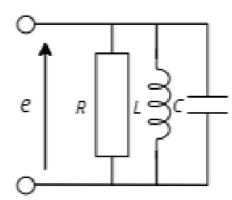

Figure 11: 回路 j

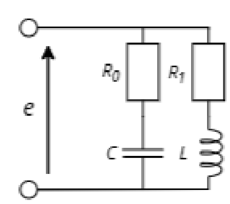

Figure 12: 図 3.5 の回路