1. (a) の回路における電力の導出

入力電圧の最大値を E_m とすると

$$e = E_m \sin\omega t$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R}\sin\omega t$$

$$ei = E_m \sin\omega t \cdot \frac{E_m}{R}\sin\omega t$$

$$= \frac{E_m^2}{R}\sin^2\omega t$$

$$= \frac{E_m^2}{R}(1-\cos 2\omega t)$$

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \text{より},$$

$$E_m^2 = 2E^2 \text{であるから},$$

$$ei = ei_R = \frac{E^2}{R}(1-\cos 2\omega t)$$

2. (b) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

インダクタンス L [H] に流れる電流を i [A] とすると, 誘導起電力 e_L [V] は

$$e_L = -L\frac{di}{dt}$$

$e + e_L = 0$ が成り立つため,

$$e = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{e}{L}dt = di$$

$$\int di = \int \frac{e}{L}dt$$

$$i = \int \left(\sqrt{2}E\sin\omega t dt\right)$$

$$= -\sqrt{2}\frac{E}{\omega L}\cos\omega t$$

$$= \sqrt{2}\frac{E}{\omega L}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$ei = \frac{2E^2}{\omega L}\sin\omega t \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

積和の公式

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$$

を用いて変形すると

$$ei = \frac{2E^2}{\omega L}\left(-\frac{1}{2}\left(\cos\left(\omega t + \omega t - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\omega t - \omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= -\frac{E^2}{\omega L}\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

3. (c) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

静電容量 C [F] に加わる電圧を v [V] とすると, 流れる電流 i [A] は

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}Cv$$

$$= C\frac{d\left(\sqrt{2}E\sin\omega t\right)}{dt}$$

$$= \sqrt{2}\omega CE\cos\omega t$$

これらから, 電力 ei は

$$ei = 2E^2\omega C\sin\omega t\cos\omega t$$

$$= E^2\omega C\sin(2\omega t)$$

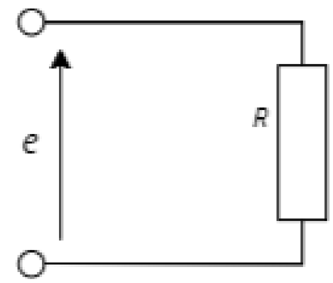

Figure 1: 回路 a

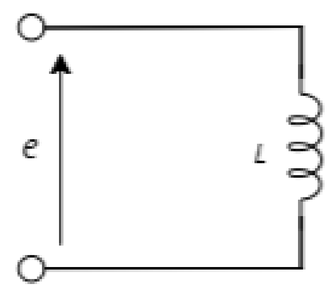

Figure 2: 回路 b

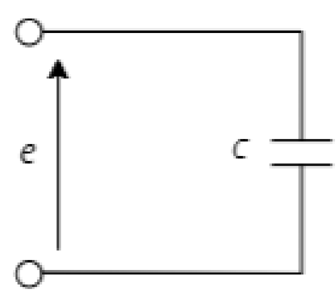

Figure 3: 回路 c

4. (d) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$

また, 各素子の電圧降下の合成と考えると

$e = iR + L\dfrac{di}{dt}$とも表すことができる.

抵抗とインダクタンスの合成インピーダンスを Z,

合成インピーダンスの位相のずれをΦとすると

電流 i は,

$$i = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

この i を用いて電力 ei を表すと,

$$\begin{aligned} ei &= \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\sin(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

加法定理を用いて, $\sin(\omega t - \Phi)$ を変形すると

$$\begin{aligned} ei &= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t(\sin\omega t\cos\Phi - \cos\omega t\sin\Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi - \sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi\right) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi\right) - \frac{2E^2}{\|Z\|}(\sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi) \end{aligned}$$

左の項には sin の半角公式

右の項には $\sin\alpha\cos\beta$の積和公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} ei &= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)\cos\Phi\right) \\ &\quad - \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t + \sin 0)\sin\Phi\right) \\ &= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t \end{aligned}$$

また, 各素子における電力を求める.

抵抗での電圧降下 e_Rは,

$$e_R = iR = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R\sin(\omega t - \Phi)$$

であるから,

$$\begin{aligned} ei_R &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R\sin(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}R\sin^2(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

半角の公式を用いて

$$\begin{aligned} &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}R\left(\frac{1-\cos 2(\omega t - \Phi)}{2}\right) \\ &= \frac{E^2}{\|Z\|^2}R(1-\cos 2(\omega t - \Phi)) \end{aligned}$$

R とωL との位相差は$\dfrac{\pi}{2}$であり,

合成インピーダンス Z の位相差をΦとすると,

$\dfrac{R}{\|Z\|} = \cos\Phi$となるため,

$$ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi(1-\cos 2(\omega t - \Phi))$$

次にコイルでの電圧降下 e_Lは,

$$\begin{aligned} e_L &= L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} ei_L &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\cos(\omega t - \Phi)\sin(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

積を和に直す公式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} ei_L &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t - 2\Phi)\right) \\ &= \frac{E^2}{\|Z\|^2}\omega L(\sin 2\omega t - 2\Phi) \end{aligned}$$

また,$\dfrac{\omega L}{\|Z\|} = \sin\Phi$となるため,

$$ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi(\sin 2\omega t - 2\Phi)$$

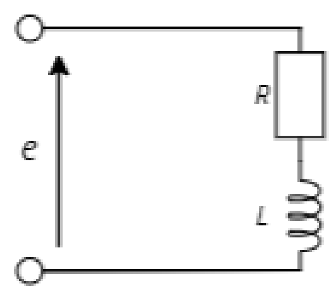

Figure 4: 回路 d

5. (e) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$

並列接続であるから, 抵抗および

インダクタンスにかかる電圧は等しいので,

$e = e_R = e_L$

また, 各素子における電圧降下で考えると,

$e = i_R R = L\dfrac{di_L}{dt}$

抵抗に流れる電流は, オームの法則より,

$$i_R = \frac{e}{R}$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t$$

インダクタンスに流れる電流は,

$$e = L\frac{di_L}{dt}$$
$$\frac{e}{L}dt = di_L$$
$$\int di_L = \int \frac{e}{L}dt$$
$$i_L = \frac{\sqrt{2}E}{L}\int \sin\omega t dt$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$

ところで, 合成アドミタンス Y は,

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$
$$= \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$$
$$\|Y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

つまり, 合成インピーダンス Z は,

$$\|Z\| = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

電圧を基準として電流の位相差をを考えると,

電圧と同位相である $\frac{1}{R}$ と, $-\frac{\pi}{2}$ ずれている $\frac{1}{\omega L}$

によって得られる電流は Y の位相であるため,

Y の位相をΦとすると,

$$\cos\Phi = \frac{\frac{1}{R}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\cos\Phi}{\|Z\|}$$
$$\sin\Phi = \frac{\frac{1}{\omega L}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{\omega L} \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \frac{\sin\Phi}{\|Z\|}$$

となる. これらから電流 i_Rと,i_Lを変形すると,

$$i_R = \frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\cos\Phi\sin\omega t$$
$$i_L = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\Phi\cos\omega t$$

となり, 式 3.17, 式 3.18 が得られ, 各素子の電力は,

$$ei_R = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\cos\Phi\sin\omega t$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\sin^2\omega t$$

半角の公式を用いて,

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(1-\cos 2\omega t\right)$$
$$ei_L = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\Phi\cos\omega t\right)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin\omega t\cos\omega t$$

積和の公式を用いて,

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\left(\frac{1}{2}\left(\sin 2\omega t - \sin 0\right)\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$
$$\therefore ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(1-\cos 2\omega t\right)$$
$$\therefore ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$

6. (f) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

ここで, 各素子の合成インピーダンスを考える.

$$Z_{R1} = R_1$$
$$Z_{RL} = R_2 + j\omega L$$

であるから, 並列接続部分の合成インピーダンスは,

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_{R1}} + \frac{1}{Z_{RL}}$$

回路全体の合成インピーダンスを Z とすると,

$$Z = R_0 + Z_p$$

Z の位相をΦとすると, 回路に流れる電流 i_sは,

$$i_s = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t - \Phi\right)$$

となり, 電力は

$$ei = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t - \Phi\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(1-\cos 2\omega t\right) - \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$

また, 各素子の電力は, その素子に流れる電流,
その素子にかかる電圧, その素子のインピーダンスに
よって立式されている.

7. (e) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$ とすると，

直列接続であるから合成インピーダンス Z は，

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

となり，

$$\|Z\| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Z による位相のずれをΦとすると，

コンデンサによって電流は電圧よりも位相が

進むため，

$$i = \frac{e}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t + \Phi)$$

これらから, 回路全体の電力は,

$$ei = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t + \Phi)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\sin(\omega t + \Phi)$$

加法定理を用いて変換すると，

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\left(\sin\omega t\cos\Phi + \cos\omega t\sin\Phi\right)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi + \sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi\right)$$

半角公式および, 積和公式を用いれば,

$$\therefore ei = \frac{E^2}{\|Z\|}\left((1 - \cos 2\omega t)\cos\Phi + \sin 2\omega t\sin\Phi\right)$$

次に e_Rについて考える.e_Rは, オームの法則より,

$$e_R = iR = \frac{\sqrt{2}ER}{\|Z\|}\sin(\omega t + \Phi)$$

$$ei_R = \frac{\sqrt{2}ER}{\|Z\|}\sin(\omega t + \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t + \Phi)$$

$$= \frac{2E^2R}{\|Z\|^2}\sin^2(\omega t + \Phi)$$

$$= \frac{2E^2R}{\|Z\|^2}\left(\frac{1 - \cos 2(\omega t + \Phi)}{2}\right)$$

$$= \frac{E^2R}{\|Z\|^2}\left(1 - \cos 2(\omega t + \Phi)\right)$$

ここで, $\dfrac{R}{\|Z\|} = \cos\Phi$であるから,

$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(1 - \cos 2(\omega t + \Phi)\right)$$

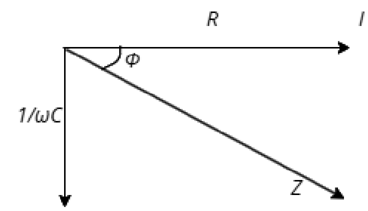

Figure 5: 回路 c