1. (a) の回路における電力の導出

入力電圧の最大値を E_m とすると

$$
\begin{aligned}
e &= E_m \sin \omega t \\
i &= \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t \\
ei &= E_m \sin \omega t \cdot \frac{E_m}{R} \sin \omega t \\
&= \frac{E_m^2}{R} \sin^2 \omega t \\
&= \frac{E_m^2}{R} (1 - \cos 2\omega t) \\
E &= \frac{E_m}{\sqrt{2}} \text{より}, \\
E_m^2 &= 2E^2 \text{であるから}, \\
ei &= ei_R = \frac{E^2}{R} (1 - \cos 2\omega t)
\end{aligned}
$$

2. (b) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2} E \sin \omega t$$

インダクタンス L [H] に流れる電流を i [A]
とすると, 誘導起電力 e_L [V] は

$$e_L = -L \frac{di}{dt}$$

$e + e_L = 0$ が成り立つため,

$$
\begin{aligned}
e &= L \frac{di}{dt} \\
\frac{e}{L} dt &= di \\
\int di &= \int \frac{e}{L} dt \\
i &= \int \left(\sqrt{2} E \sin \omega t dt \right) \\
&= -\sqrt{2} \frac{E}{\omega L} \cos \omega t \\
&= \sqrt{2} \frac{E}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\
ei &= \frac{2E^2}{\omega L} \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}
$$

積和の公式

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \left(\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta) \right)$$

を用いて変形すると

$$
\begin{aligned}
ei &= \frac{2E^2}{\omega L} \left(-\frac{1}{2} \left(\cos \left(\omega t + \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - \cos \left(\omega t - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) \\
&= -\frac{E^2}{\omega L} \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}
$$

3. (c) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2} E \sin \omega t$$

静電容量 C [F] に加わる電圧を v [V]
とすると, 流れる電流 i [A] は

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C v \\
&= C \frac{d \left(\sqrt{2} E \sin \omega t \right)}{dt} \\
&= \sqrt{2} \omega C E \cos \omega t
\end{aligned}
$$

これらから, 電力 ei は

$$
\begin{aligned}
ei &= 2E^2 \omega C \sin \omega t \cos \omega t \\
&= E^2 \omega C \sin (2\omega t)
\end{aligned}
$$

4. (d) の回路における電力の導出

$e=\sqrt{2}E\sin\omega t$

また, 各素子の電圧降下の合成と考えると

$e=iR+L\dfrac{di}{dt}$とも表すことができる.

抵抗とインダクタンスの合成インピーダンスを Z,

合成インピーダンスの位相のずれをΦとすると

電流 i は,

$$i=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t-\Phi\right)$$

この i を用いて電力 ei を表すと,

$$ei=\sqrt{2}E\sin\omega t\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t-\Phi\right)$$
$$=\frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\sin\left(\omega t-\Phi\right)$$

加法定理を用いて, $\sin\left(\omega t-\Phi\right)$ を変形すると

$$ei=\frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\omega t\left(\sin\omega t\cos\Phi-\cos\omega t\sin\Phi\right)$$
$$=\frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi-\sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi\right)$$
$$=\frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2\omega t\cos\Phi\right)-\frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin\omega t\cos\omega t\sin\Phi\right)$$

左の項には sin の半角公式

右の項には$\sin\alpha\cos\beta$の積和公式を用いて変形すると

$$ei=\frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\left(\frac{1-\cos2\omega t}{2}\right)\cos\Phi\right)$$
$$-\frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\frac{1}{2}\left(\sin2\omega t+\sin0\right)\sin\Phi\right)$$
$$=\frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(1-\cos2\omega t\right)-\frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin2\omega t$$

また, 各素子における電力を求める.

抵抗での電圧降下 e_Rは,

$$e_R=iR=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R\sin\left(\omega t-\Phi\right)$$

であるから,

$$ei_R=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R\sin\left(\omega t-\Phi\right)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t-\Phi\right)$$
$$=\frac{2E^2}{\|Z\|^2}R\sin^2\left(\omega t-\Phi\right)$$

半角の公式を用いて

$$=\frac{2E^2}{\|Z\|^2}R\left(\frac{1-\cos2\left(\omega t-\Phi\right)}{2}\right)$$
$$=\frac{E^2}{\|Z\|^2}R\left(1-\cos2\left(\omega t-\Phi\right)\right)$$

R とωL との位相差は$\dfrac{\pi}{2}$であり,

合成インピーダンス Z の位相差をΦとすると,

$\dfrac{R}{\|Z\|}=\cos\Phi$となるため,

$$ei_R=\frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(1-\cos2\left(\omega t-\Phi\right)\right)$$

次にコイルでの電圧降下 e_Lは,

$$e_L=L\frac{di}{dt}=L\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t-\Phi\right)\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos\left(\omega t-\Phi\right)$$

であるから,

$$ei_L=\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L\cos\left(\omega t-\Phi\right)\cdot\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\left(\omega t-\Phi\right)$$
$$=\frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\cos\left(\omega t-\Phi\right)\sin\left(\omega t-\Phi\right)$$

積を和に直す公式を用いて変形すると,

$$ei_L=\frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\left(\frac{1}{2}\left(\sin2\omega t-2\Phi\right)\right)$$
$$=\frac{E^2}{\|Z\|^2}\omega L\left(\sin2\omega t-2\Phi\right)$$

また, $\dfrac{\omega L}{\|Z\|}=\sin\Phi$となるため,

$$ei_L=\frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\left(\sin2\omega t-2\Phi\right)$$

5. (e) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

並列接続であるから, 抵抗および
インダクタンスにかかる電圧は等しいので,

$$e = e_R = e_L$$

また, 各素子における電圧降下で考えると,

$$e = i_R R = L\frac{di_L}{dt}$$

抵抗に流れる電流は, オームの法則より,

$$i_R = \frac{e}{R}$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t$$

インダクタンスに流れる電流は,

$$e = L\frac{di_L}{dt}$$
$$\frac{e}{L}dt = di_L$$
$$\int di_L = \int \frac{e}{L}dt$$
$$i_L = \frac{\sqrt{2}E}{L}\int \sin\omega t dt$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$

ところで, 合成アドミタンス Y は,

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L}$$
$$= \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$$
$$\|Y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

つまり, 合成インピーダンス Z は,

$$\|Z\| = \frac{\omega L R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

電圧を基準として電流の位相差をを考えると,
電圧と同位相である $\frac{1}{R}$ と, $-\frac{\pi}{2}$ ずれている $\frac{1}{\omega L}$
によって得られる電流は Y の位相であるため,
Y の位相をΦとすると,

$$\cos\Phi = \frac{\frac{1}{R}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\cos\Phi}{\|Z\|}$$
$$\sin\Phi = \frac{\frac{1}{\omega L}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{\omega L} \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \frac{\sin\Phi}{\|Z\|}$$

となる. これらから電流 i_R と,i_L を変形すると,

$$i_R = \frac{\sqrt{2}E}{R}\sin\omega t$$
$$= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\cos\Phi\sin\omega t$$
$$i_L = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L}\cos\omega t$$
$$= -\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\Phi\cos\omega t$$

となり, 式 3.17, 式 3.18 が得られ, 各素子の電力は,

$$ei_R = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\cos\Phi\sin\omega t$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\sin^2\omega t$$

半角の公式を用いて,

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\left(\frac{1-\cos 2\omega t}{2}\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\,(1-\cos 2\omega t)$$
$$ei_L = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin\Phi\cos\omega t\right)$$
$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin\omega t\cos\omega t$$

積和の公式を用いて,

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t - \sin 0)\right)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$
$$\therefore ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\,(1-\cos 2\omega t)$$
$$\therefore ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$

6. (f) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E\sin\omega t$$

ここで, 各素子の合成インピーダンスを考える.

$$Z_{R1} = R_1$$
$$Z_{RL} = R_2 + j\omega L$$

であるから, 並列接続部分の合成インピーダンスは,

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_{R1}} + \frac{1}{Z_{RL}}$$

回路全体の合成インピーダンスを Z とすると,

$$Z = R_0 + Z_p$$

Z の位相をΦとすると, 回路に流れる電流 i_s は,

$$i_s = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

となり, 電力は

$$ei = \sqrt{2}E\sin\omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$
$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos\Phi\,(1-\cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|}\sin\Phi\sin 2\omega t$$

また, 各素子の電力は, その素子に流れる電流,
その素子にかかる電圧, その素子のインピーダンスに
よって立式されている.