

1. (a) の回路における電力の導出

$$\begin{aligned}
 & \text{入力電圧の最大値を } E_m \text{ とすると} \\
 e &= E_m \sin \omega t \\
 i &= \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t \\
 ei &= E_m \sin \omega t \cdot \frac{E_m}{R} \sin \omega t \\
 &= \frac{E_m^2}{R} \sin^2 \omega t \\
 &= \frac{E_m^2}{R} (1 - \cos 2\omega t) \\
 E &= \frac{E_m}{\sqrt{2}} \text{ より,} \\
 E_m^2 &= 2E^2 \text{ であるから,} \\
 ei &= ei_R = \frac{E^2}{R} (1 - \cos 2\omega t)
 \end{aligned}$$

2. (b) の回路における電力の導出

$$\begin{aligned}
 e &= \sqrt{2}E \sin \omega t \\
 & \text{インダクタンス } L \text{ [H] に流れる電流を } i \text{ [A]} \\
 & \text{とすると, 誘導起電力 } e_L \text{ [V] は} \\
 e_L &= -L \frac{di}{dt} \\
 e + e_L &= 0 \text{ が成り立つため,} \\
 e &= L \frac{di}{dt} \\
 \frac{e}{L} dt &= di \\
 \int di &= \int \frac{e}{L} dt \\
 i &= \int (\sqrt{2}E \sin \omega t dt) \\
 &= -\sqrt{2} \frac{E}{\omega L} \cos \omega t \\
 &= \sqrt{2} \frac{E}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\
 ei &= \frac{2E^2}{\omega L} \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\
 & \text{積和の公式} \\
 \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \\
 & \text{を用いて変形すると} \\
 ei &= \frac{2E^2}{\omega L} \left(-\frac{1}{2} \left(\cos \left(\omega t + \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \cos \left(\omega t - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right) \\
 &= -\frac{E^2}{\omega L} \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

3. (c) の回路における電力の導出

$$\begin{aligned}
 e &= \sqrt{2}E \sin \omega t \\
 & \text{静電容量 } C \text{ [F] に加わる電圧を } v \text{ [V]} \\
 & \text{とすると, 流れる電流 } i \text{ [A] は} \\
 i &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C v \\
 &= C \frac{d(\sqrt{2}E \sin \omega t)}{dt} \\
 &= \sqrt{2}\omega C E \cos \omega t \\
 & \text{これらから, 電力 } ei \text{ は} \\
 ei &= 2E^2 \omega C \sin \omega t \cos \omega t \\
 &= E^2 \omega C \sin(2\omega t)
 \end{aligned}$$

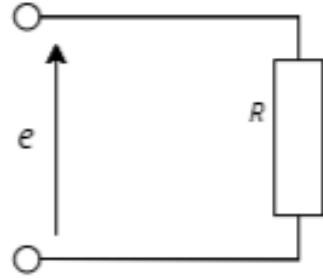


Figure 1: 回路 a

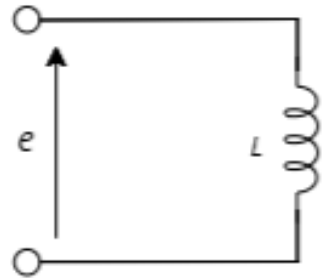


Figure 2: 回路 b

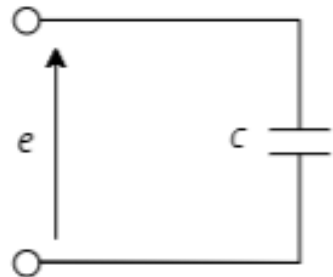


Figure 3: 回路 c

4. (d) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E \sin \omega t$$

また、各素子の電圧降下の合成と考えると

$$e = iR + L \frac{di}{dt} \text{ とも表すことができる.}$$

抵抗とインダクタンスの合成インピーダンスを Z 、
合成インピーダンスの位相のずれを Φ とすると

電流 i は、

$$i = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi)$$

この i を用いて電力 ei を表すと、

$$\begin{aligned} ei &= \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \omega t \sin(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

加法定理を用いて、 $\sin(\omega t - \Phi)$ を変形すると

$$\begin{aligned} ei &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \Phi - \cos \omega t \sin \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|} (\sin^2 \omega t \cos \Phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|} (\sin^2 \omega t \cos \Phi) - \frac{2E^2}{\|Z\|} (\sin \omega t \cos \omega t \sin \Phi) \end{aligned}$$

左の項には \sin の半角公式

右の項には $\sin \alpha \cos \beta$ の積和公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned} ei &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \left(\left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) \cos \Phi \right) \\ &\quad - \frac{2E^2}{\|Z\|} \left(\frac{1}{2} (\sin 2\omega t + \sin 0) \sin \Phi \right) \\ &= \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|} \sin \Phi \sin 2\omega t \end{aligned}$$

また、各素子における電力を求める。

抵抗での電圧降下 e_R は、

$$e_R = iR = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} R \sin(\omega t - \Phi)$$

であるから、

$$\begin{aligned} ei_R &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} R \sin(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2} R \sin^2(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

半角の公式を用いて

$$\begin{aligned} &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2} R \left(\frac{1 - \cos 2(\omega t - \Phi)}{2} \right) \\ &= \frac{E^2}{\|Z\|^2} R (1 - \cos 2(\omega t - \Phi)) \end{aligned}$$

R と ωL との位相差は $\frac{\pi}{2}$ であり、

合成インピーダンス Z の位相差を Φ とすると、

$$\frac{R}{\|Z\|} = \cos \Phi \text{ となるため,}$$

$$ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2(\omega t - \Phi))$$

次にコイルでの電圧降下 e_L は、

$$\begin{aligned} e_L &= L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \omega L \cos(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} ei_L &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \omega L \cos(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2} \omega L \cos(\omega t - \Phi) \sin(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

積を和に直す公式を用いて変形すると、

$$\begin{aligned} ei_L &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2} \omega L \left(\frac{1}{2} (\sin 2\omega t - 2\Phi) \right) \\ &= \frac{E^2}{\|Z\|^2} \omega L (\sin 2\omega t - 2\Phi) \end{aligned}$$

また、 $\frac{\omega L}{\|Z\|} = \sin \Phi$ となるため、

$$ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|} \sin \Phi (\sin 2\omega t - 2\Phi)$$

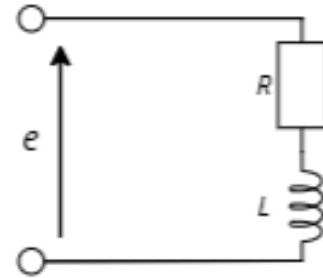


Figure 4: 回路 d

5. (e) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E \sin \omega t$$

並列接続であるから、抵抗および

インダクタンスにかかる電圧は等しいので、

$$e = e_R = e_L$$

また、各素子における電圧降下で考えると、

$$e = i_R R = L \frac{di_L}{dt}$$

抵抗に流れる電流は、オームの法則より、

$$i_R = \frac{e}{R} \\ = \frac{\sqrt{2}E}{R} \sin \omega t$$

インダクタンスに流れる電流は、

$$e = L \frac{di_L}{dt}$$

$$\frac{e}{L} dt = di_L$$

$$\int di_L = \int \frac{e}{L} dt$$

$$i_L = \frac{\sqrt{2}E}{L} \int \sin \omega t dt \\ = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L} \cos \omega t$$

ところで、合成アドミタンス Y は、

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} \\ = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L}$$

$$\|Y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

つまり、合成インピーダンス Z は、

$$\|Z\| = \frac{\omega LR}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

電圧を基準として電流の位相差を考えると、

電圧と同位相である $\frac{1}{R}$ と、 $-\frac{\pi}{2}$ ずれている $\frac{1}{\omega L}$ によって得られる電流は Y の位相であるため、 Y の位相を Φ とすると、

$$\cos \Phi = \frac{\frac{1}{R}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{\cos \Phi}{\|Z\|}$$

$$\sin \Phi = \frac{\frac{1}{\omega L}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{\omega L} \Rightarrow \frac{1}{\omega L} = \frac{\sin \Phi}{\|Z\|}$$

となる。これらから電流 i_R と i_L を変形すると、

$$i_R = \frac{\sqrt{2}E}{R} \sin \omega t \\ = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \cos \Phi \sin \omega t$$

$$i_L = -\frac{\sqrt{2}E}{\omega L} \cos \omega t \\ = -\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin \Phi \cos \omega t$$

となり、式 3.17、式 3.18 が得られ、各素子の電力は、

$$ei_R = \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \cos \Phi \sin \omega t$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|} \cos \Phi \sin^2 \omega t$$

半角の公式を用いて、

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|} \cos \Phi \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right)$$

$$= \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2\omega t)$$

$$ei_L = \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin \Phi \cos \omega t \right)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \Phi \sin \omega t \cos \omega t$$

積和の公式を用いて、

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \Phi \left(\frac{1}{2} (\sin 2\omega t - \sin 0) \right)$$

$$= \frac{E^2}{\|Z\|} \sin \Phi \sin 2\omega t$$

$$\therefore ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\therefore ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|} \sin \Phi \sin 2\omega t$$

6. (f) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E \sin \omega t$$

ここで、各素子の合成インピーダンスを考える。

$$Z_{R1} = R_1$$

$$Z_{RL} = R_2 + j\omega L$$

であるから、並列接続部分の合成インピーダンスは、

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_{R1}} + \frac{1}{Z_{RL}}$$

回路全体の合成インピーダンスを Z とすると、

$$Z = R_0 + Z_p$$

Z の位相を Φ とすると、回路に流れる電流 i_s は、

$$i_s = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin (\omega t - \Phi)$$

となり、電力は

$$ei = \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin (\omega t - \Phi)$$

$$= \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|} \sin \Phi \sin 2\omega t$$

また、各素子の電力は、その素子に流れる電流、その素子にかかる電圧、その素子のインピーダンスによって立式されている。

7. (g) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E \sin \omega t$ とする.

直列接続であるから合成インピーダンス Z は,

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

となり,

$$\|Z\| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Z による位相のずれを Φ とすると,

コンデンサによって電流は電圧よりも位相が進むため,

$$i = \frac{e}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t + \Phi)$$

これらから, 回路全体の電力は,

$$ei = \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t + \Phi)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \omega t \sin(\omega t + \Phi)$$

加法定理を用いて変換すると,

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \Phi + \cos \omega t \sin \Phi)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|} (\sin^2 \omega t \cos \Phi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \Phi)$$

半角公式および, 積和公式を用いれば,

$$\therefore ei = \frac{E^2}{\|Z\|} ((1 - \cos 2\omega t) \cos \Phi + \sin 2\omega t \sin \Phi)$$

次に e_R について考える. e_R は, オームの法則より,

$$e_R = iR = \frac{\sqrt{2}ER}{\|Z\|} \sin(\omega t + \Phi)$$

$$ei_R = \frac{\sqrt{2}ER}{\|Z\|} \sin(\omega t + \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t + \Phi)$$

$$= \frac{2E^2R}{\|Z\|^2} \sin^2(\omega t + \Phi)$$

$$= \frac{2E^2R}{\|Z\|^2} \left(\frac{1 - \cos 2(\omega t + \Phi)}{2} \right)$$

$$= \frac{E^2R}{\|Z\|^2} (1 - \cos 2(\omega t + \Phi))$$

ここで, $\frac{R}{\|Z\|} = \cos \Phi$ であるから,

$$= \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2(\omega t + \Phi))$$

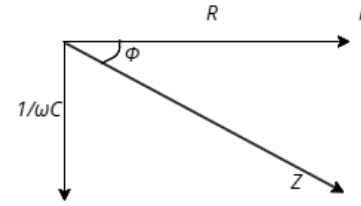


Figure 5: 回路 c

8. (h) の回路における電力の導出

9. (i) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E \sin \omega t$ とする.

合成インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} \end{aligned}$$

$$\|Z\| = \sqrt{R^2 + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

合成インピーダンスの位相差を Φ とする.

電流はオームの法則より,

$$\begin{aligned} i &= \frac{e}{\|Z\|} \\ &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ei &= \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \omega t \sin(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

加法定理より,

$$\begin{aligned} &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \sin \omega t (\sin \omega t \cos \Phi - \cos \omega t \sin \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|} (\sin^2 \omega t \cos \Phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \cos \Phi - \frac{1}{2} (\sin 2\omega t + \sin 0) \sin \Phi \right) \\ \therefore ei &= \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|} \sin \Phi \sin 2\omega t \end{aligned}$$

$$ei_r = i^2 R = \frac{2E^2}{(\|Z\|)^2} R \sin^2(\omega t - \Phi)$$

$$\frac{R}{\|Z\|} = \cos \Phi \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \cos \Phi \sin^2(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|} \cos \Phi \left(\frac{1 - \cos 2(\omega t - \Phi)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore ei_r = \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2(\omega t - \Phi))$$

次に, リアクタンスでの電力を考える.

$$e_L = L \frac{di}{dt} = L \frac{d}{dt} \left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \omega L \cos(\omega t - \Phi)$$

$$\begin{aligned} ei_L &= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \omega L \cos(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2} \omega L \sin(\omega t - \Phi) \cos(\omega t - \Phi) \\ &= \frac{2E^2}{\|Z\|^2} \omega L \left(\frac{1}{2} \sin 2(\omega t - \Phi) \right) \end{aligned}$$

$$\therefore ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|^2} \omega L \sin 2(\omega t - \Phi)$$

最後にキャパシタンスの電力を考える.

$$i = \frac{de_C}{dt} C$$

$$\int de_C = \frac{1}{C} \int i dt$$

$$\begin{aligned} de_C &= \frac{1}{C} \int \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) dt \\ &= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega C \|Z\|} \cos(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ei_C &= -\frac{\sqrt{2}E}{\omega C \|Z\|} \cos(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|} \sin(\omega t - \Phi) \\ &= -\frac{2E^2}{\omega C \|Z\|^2} \sin(\omega t - \Phi) \cos(\omega t - \Phi) \\ &= -\frac{2E^2}{\omega C \|Z\|^2} \left(\frac{1}{2} \sin 2(\omega t - \Phi) \right) \\ &= -\frac{E^2}{\omega C \|Z\|^2} \sin 2(\omega t - \Phi) \end{aligned}$$

10. (j) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2}E \sin \omega t$$

合成アドミタンスは,

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}$$

$$= \frac{1}{R} + j \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C \right)$$

$$\|Y\| = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right)^2}$$

$$\|Z\| = \frac{1}{\|Y\|}$$

並列接続より各素子にかかる電圧は等しい.

$$i_R = \frac{e}{R}$$

$$ei_R = \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{R} \sin \omega t$$

$$= \frac{2E^2}{R} \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{E^2}{R} (1 - \cos 2\omega t)$$

ここで, 合成アドミタンスとの位相差を考えると

$$\frac{\frac{1}{R}}{\|Y\|} = \frac{\|Z\|}{R} = \cos \Phi \text{であるから,}$$

$$\therefore ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|} \cos \Phi (1 - \cos 2\omega t)$$

11. (k) の回路における電力の導出