1. (a) の回路における電力の導出

入力電圧の最大値を E_mとすると

$$e = E_m \sin \omega t$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t$$

$$ei = E_m \sin \omega t \cdot \frac{E_m}{R} \sin \omega t$$

$$= \frac{E_m^2}{R} \sin^2 \omega t$$

$$= \frac{E_m^2}{R} (1 - \cos 2\omega t)$$

$E = \dfrac{E_m}{\sqrt{2}}$ より、

$E_m^2 = 2E^2$であるから、

$$ei = ei_R = \frac{E^2}{R} (1 - \cos 2\omega t)$$

2. (b) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2} E \sin \omega t$$

インダクタンス L [H] に流れる電流を i [A]

とすると、誘導起電力 e_L [V] は

$$e_L = -L \frac{di}{dt}$$

$e + e_L = 0$ が成り立つため、

$$e = L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{e}{L} dt = di$$

$$\int di = \int \frac{e}{L} dt$$

$$i = \int \left(\sqrt{2} E \sin \omega t dt \right)$$

$$= -\sqrt{2} \frac{E}{\omega L} \cos \omega t$$

$$= \sqrt{2} \frac{E}{\omega L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$ei = \frac{2E^2}{\omega L} \sin \omega t \cdot \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

積和の公式

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta))$$

を用いて変形すると

$$ei = \frac{2E^2}{\omega L} \left(-\frac{1}{2} \left(\cos \left(\omega t + \omega t - \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(\omega t - \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

$$= -\frac{E^2}{\omega L} \cos \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

3. (c) の回路における電力の導出

$$e = \sqrt{2} E \sin \omega t$$

静電容量 C [F] に加わる電圧を v [V]

とすると、流れる電流 i [A] は

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} C v$$

$$= C \frac{d \left(\sqrt{2} E \sin \omega t \right)}{dt}$$

$$= \sqrt{2} \omega C E \cos \omega t$$

これらから, 電力 ei は

$$ei = 2E^2 \omega C \sin \omega t \cos \omega t$$

$$= E^2 \omega C \sin (2\omega t)$$

4. (d) の回路における電力の導出

$e = \sqrt{2}E \sin \omega t$

また、各素子の電圧降下の合成と考えると

$e = iR + L\dfrac{di}{dt}$とも表すことができる.

抵抗とリアクタンスの合成インピーダンスを Z,

合成インピーダンスの位相のずれをΦとすると

電流 i は,

$$i = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

この i を用いて電力 ei を表すと,

$$ei = \sqrt{2}E \sin \omega t \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin \omega t \sin(\omega t - \Phi)$$

加法定理を用いて、$\sin(\omega t - \Phi)$ を変形すると

$$ei = \frac{2E^2}{\|Z\|}\sin \omega t (\sin \omega t \cos \Phi - \cos \omega t \sin \Phi)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2 \omega t \cos \Phi - \sin \omega t \cos \omega t \sin \Phi\right)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\sin^2 \omega t \cos \Phi\right) - \frac{2E^2}{\|Z\|}(\sin \omega t \cos \omega t \sin \Phi)$$

左の項には sin の半角公式

右の項には$\sin\alpha\cos\beta$の積和公式を用いて変形すると

$$ei = \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}\right)\cos \Phi\right)$$

$$- \frac{2E^2}{\|Z\|}\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t + \sin 0)\sin \Phi\right)$$

$$= \frac{E^2}{\|Z\|}\cos \Phi (1 - \cos 2\omega t) - \frac{E^2}{\|Z\|}\sin \Phi \sin 2\omega t$$

また、各素子における電力を求める.

抵抗での電圧降下 e_Rは,

$$e_R = iR = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R \sin(\omega t - \Phi)$$

であるから,

$$ei_R = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}R \sin(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}R \sin^2(\omega t - \Phi)$$

半角の公式を用いて

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}R\left(\frac{1 - \cos 2(\omega t - \Phi)}{2}\right)$$

$$= \frac{E^2}{\|Z\|^2}R(1 - \cos 2(\omega t - \Phi))$$

R とωL との位相差は$\dfrac{\pi}{2}$であり、

合成インピーダンス Z の位相差をΦとすると,

$\dfrac{R}{\|Z\|} = \cos \Phi$となるため,

$$ei_R = \frac{E^2}{\|Z\|}\cos \Phi (1 - \cos 2(\omega t - \Phi))$$

次にコイルでの電圧降下 e_Lは,

$$e_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L \cos(\omega t - \Phi)$$

であるから,

$$ei_L = \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\omega L \cos(\omega t - \Phi) \cdot \frac{\sqrt{2}E}{\|Z\|}\sin(\omega t - \Phi)$$

$$= \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L \cos(\omega t - \Phi)\sin(\omega t - \Phi)$$

積を和に直す公式を用いて変形すると,

$$ei_L = \frac{2E^2}{\|Z\|^2}\omega L\left(\frac{1}{2}(\sin 2\omega t - 2\Phi)\right)$$

$$= \frac{E^2}{\|Z\|^2}\omega L(\sin 2\omega t - 2\Phi)$$

また,$\dfrac{\omega L}{\|Z\|} = \sin \Phi$となるため,

$$ei_L = \frac{E^2}{\|Z\|}\sin \Phi (\sin 2\omega t - 2\Phi)$$