

Численное решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа

Михаил Протопопов

2023

1 Описание исходной задачи

Необходимо решить краевую задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} -u'' = f \\ u(0) = a, u(1) = b \end{cases}$$

численно с помощью метода конечных разностей.

Решаем задачу на интервале $(0, 1)$, вводя на ней равномерную сетку x_0, x_1, \dots, x_N , $x_i = i * h$, $h = \frac{1}{N}$. Дискретная аппроксимация уравнения:

$$-\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} = f(x_i)$$

для приграничных узлов (x_1, x_{N-1}) сюда войдут граничные условия

2 Метод прогонки

a_i - элементы стоящие на поддиагонали в i -ой строке

b_i - элементы стоящие на диагонали в i -ой строке

c_i - элементы стоящие на наддиагонали в i -ой строке

d_i - элемент правой части в i -ой строке

Прямая прогонка состоит в вычислении прогоночных коэффициентов α_i и β_i , где i - номер строки матрицы. Этот этап выполняется при $i = 1 \dots n$ строго по возрастанию значения i .

1) В первой строке матрицы $i = 1$ используются формулы:

$$y_1 = b_1, \alpha_1 = \frac{-c_1}{y_1}, \beta_1 = \frac{d_1}{y_1}$$

2) Для строк i от 2 до $N - 2$ используются рекуррентные формулы:

$$y_i = b_i + a_i * \alpha_{i-1}, \alpha_i = \frac{-c_i}{y_i}, \beta_i = \frac{(d_i - a_i * \beta_{i-1})}{y_i}$$

3) При $i = N - 1$ прямая прогонка завершается вычислением:

$$y_{N-1} = b_{N-1} + a_{N-1} * \alpha_{N-2}, \beta_{N-1} = \frac{(d_{N-1} - a_{N-1} * \beta_{N-2})}{y_{N-1}}$$

После этого производится обратная прогонка, в которой происходит вычисление неизвестных y_i . Этот этап выполняется при $i = n \dots 1$ строго по убыванию значения i .

4) В последней строке матрицы $i = N - 1$ выполнено $x_{N-1} = \beta_{N-1}$

5) Для всех остальных строк при i от $N - 2$ до 1 применяется формула:

$$x_i = \alpha_i * x_{i+1} + \beta_i$$

График зависимости точности с-нормы и дискретной l2-нормы от шага сетки в логарифмическом виде выглядят следующим образом

