Universidade Estadual de Maringá – Centro de Ciências Exatas

Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V)

Relatório de Física Experimental I

Acadêmicos:

1. Giovanna Maria Nogueira, RA 112479 – Física, Turma F
2. João Vitor Honório Ribeiro, RA 99360 – Física, Turma F
3. Vitor Hugo Ferrari Ribeiro, RA 112481 – Física, Turma F

Maringá, 29 de Maio de 2019

Movimento Retilíneo Uniformemente Variado (M.R.U.V)

Relatório de Física Experimental I

Resumo

A prática experimental teve como objetivo a determinação da velocidade de um corpo descrevendo um movimento retilíneo uniformemente variado (M.R.U.V) a partir de variadas medições em intervalos de espaço por tempo. Utilizando um “carrinho” e um trilho de ar inclinado (plano inclinado), verificou-se que a velocidade não é constante devido à existência de uma força externa (no caso, a aceleração da gravidade), visto que o atrito com o solo é praticamente nulo.

Introdução

O primeiro passo para estudar o movimento de um corpo é descrevê-lo. A descrição do movimento de um objeto real pode ser excessivamente complexa. Então, é imperativo que se introduza uma idealização para que possa representar uma situação real mediante simplificação de muitos aspectos, tornando as equações matemáticas mais simples e solúveis. Depois de obter uma descrição de um sistema idealizado, correções podem ser introduzidas para que o resultado se aproxime melhor da situação real. Como primeiro passo, o conceito de *ponto material* ou *partícula*, cujo movimento é o mais fácil de descrever, será introduzido. *Um ponto material ou partícula é um objeto cujas dimensão e estrutura interna são desprezíveis quando comparadas com outras dimensões envolvidas no problema*. Por exemplo, a Terra pode ser considerada partícula na maioria dos problemas de movimento planetário, mas certamente não é possível nos problemas terrestres.

A posição de uma partícula *P* pode ser descrita localizando-se um ponto no espaço. Isto pode ser feito fixando-se três eixos mutuamente ortogonais a partir de uma origem O no espaço e especificando-se suas coordenadas retangulares com relação a estes eixos, como ilustrado na Figura 1.1. Um sistema como estes contendo três eixos é denominado sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Dadas as coordenadas em relação a um sistema que localiza a posição de uma partícula, o que se deseja em seguida é descrever a trajetória percorrida por esta partícula em movimento. Uma representação paramétrica, onde o tempo é o parâmetro, é uma das maneiras de especificar essa trajetória. Assim, para descrever a trajetória do movimento de uma partícula, as coordenadas em função do tempo $x(t), y(t)$ e $z(t)$, são especificadas.

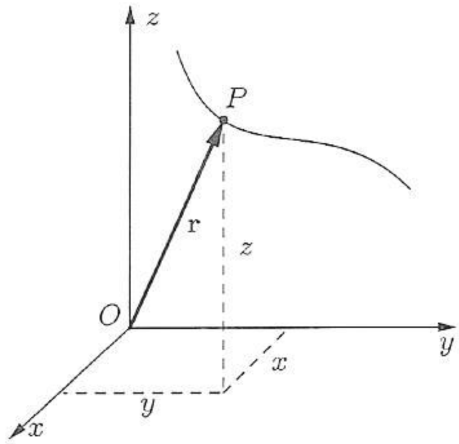


Figura 1.1 - Coordenadas cartesianas ortogonais, especificando a posição de uma partícula P em relação à origem O do sistema.

Fundamentação teórica

O significado físico das funções $x(t), y(t)$ e $z(t)$ é, então, cada uma das coordenadas da posição da partícula em estudo medidas em cada instante t do tempo. Escolhe-se um instante t_0 para o início da medida do tempo, *geralmente adotado como zero*.

Supondo-se que o significado de $x(t), y(t)$ e $z(t)$ estão claros, pode-se definir as componentes cartesianas v_x, v_y e v_z da velocidade num instante t como:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}$$

$$v_z = \frac{dz}{dy} = \dot{z}$$

Que representam as taxas de variação de cada uma das coordenadas de posição em função do tempo. Da mesma maneira, as taxas de variação de cada uma das componentes da velocidade em função do tempo são definidas como as componentes cartesianas da aceleração, a_x, a_y e a_z num instante t é dadas por:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}_x = \ddot{x}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \dot{v}_y = \ddot{y}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \dot{v}_z = \ddot{z}$$

(Mecânica Clássica, Kazunori Watari)

Um movimento retilíneo chama-se *uniformemente acelerado (variado)* quando a aceleração instantânea é constante (independente do tempo):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt} = a = \text{constante}$$

Podemos usar as técnicas de solução do "problema inverso" para determinar a lei horária de um movimento uniformemente acelerado.

Para isto, consideraremos o movimento durante um intervalo de tempo $[t_0, t]$, onde t_0 é o "instante inicial" (frequentemente se toma $t_0 = 0$). Então:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a\,dt = a(t - t_0)$$

Que é a área do retângulo da figura 2.

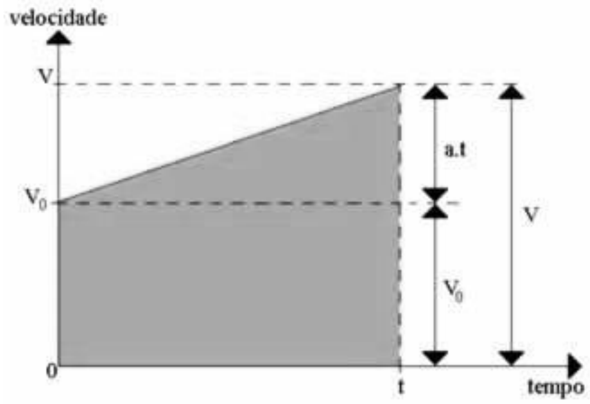


Figura 2 - Gráfico de aceleração

O valor $v(t_0) = v_0$ da velocidade no instante inicial chama-se *velocidade inicial*. Da velocidade no instante inicial chama-se *velocidade inicial*.

$$v(t) = v_0 + a \cdot (t - t_0)$$

Mostrando que a velocidade é uma função linear do tempo no movimento uniformemente acelerado.

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

Onde achamos de t' a variável de integração para evitar confusão com t, o extremos superior da integral. A área do trapézio, conforme mostra a figura 3, pode também ser calculada como a soma da área do retângulo sombreado, que é $v_0(t - t_0)$, com a área do triângulo sombreado, que é:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0) \cdot (t - t_0)$$

Ou seja:

$$x(t) - x(t_0) = v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$$

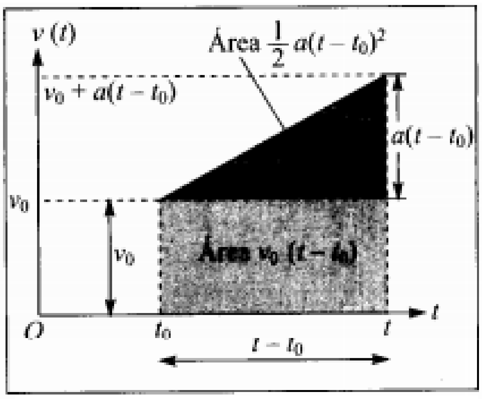


Figura 3 - Integração da Velocidade

Analogamente à $v(t_0) = v_0$, definimos:

$$x(t_0) = x_0$$

Com a composição inicial. A equação acima, dá então finalmente a *lei horária do movimento retilíneo uniformemente acelerado*:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot (t - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Em função dos valores iniciais x_0 e v_0 da posição e da velocidade no instante inicial t_0.

Frequentemente interessa também exprimir a velocidade no movimento uniformemente acelerado em função da posição x (em lugar do tempo t).

$$t - t_0 = \frac{v - v_0}{a} \rightarrow x - x_0 = v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 = \frac{(v - v_0) \cdot (v + v_0)}{2 \cdot a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$$

Ou seja:

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

Que é a expressão procurada. (Equação de Torricelli).

Plano Inclinado

O plano inclinado é um exemplo de máquina simples. Como o nome sugere, trata-se de uma superfície plana cujos pontos de início e fim estão a alturas diferentes.

Ao mover um objeto sobre um plano inclinado em vez de movê-lo sobre um plano completamente vertical, o total de força F a ser aplicada é reduzido, ao custo de um aumento na distância pela qual o objeto tem de ser deslocado.

Observe que pela Lei da Conservação de Energia, a mesma quantidade de energia mecânica é requerida para levantar um dado objeto até uma certa altura, seja através do plano inclinado ou do plano vertical. No entanto, o plano inclinado permite que o mesmo trabalho seja realizado aplicando-se uma força menor por uma distância maior.

Resumindo, o plano inclinado permite uma troca força x distância que é conveniente nas suas aplicações.

Ao analisarmos as forças que atuam sobre um corpo em um plano inclinado, temos:

A força Peso e a força Normal, neste caso, não tem o mesma direção pois, como já vimos, a força Peso, é causada pela aceleração da gravidade, que tem origem no centro da Terra, logo a força Peso têm sempre direção vertical. Já a força Normal é a força de reação, e têm origem na superfície onde o movimento ocorre, logo tem um ângulo igual ao plano do movimento.

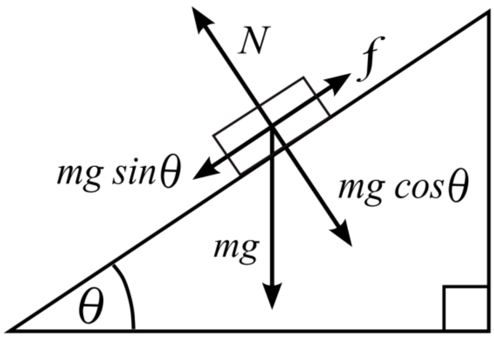


Figura 4 - Diagrama de forças em um plano inclinado com atrito.

Para que seja possível realizar este cálculo devemos estabelecer algumas relações:

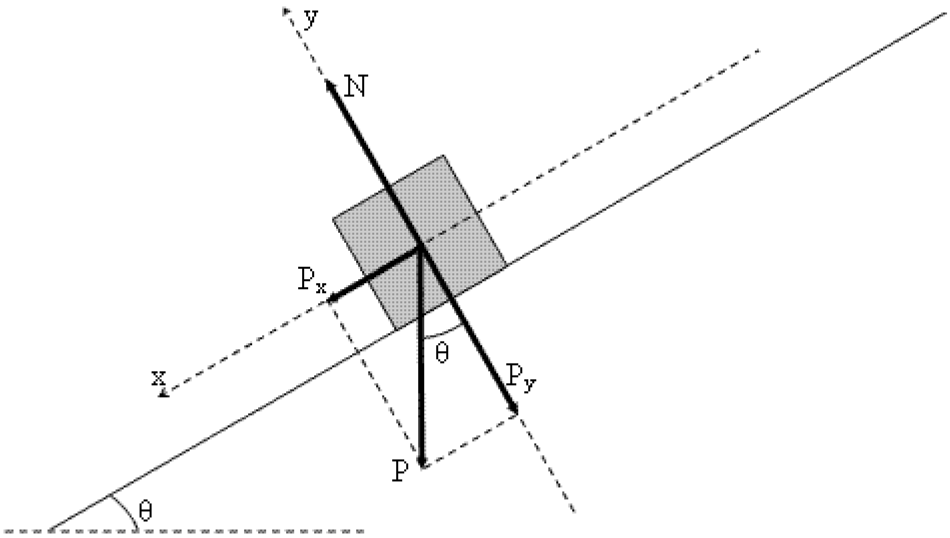


Figura 5 - Diagrama de forças e suas componentes, caso sem atrito.

- Podemos definir o plano cartesiano com inclinação igual ao plano inclinado, ou seja, com o eixo x formando um ângulo igual ao do plano, e o eixo y, perpendicular ao eixo x;
- A força Normal será igual à decomposição da força Peso no eixo y;
- A decomposição da força Peso no eixo x será a responsável pelo deslocamento do bloco;
- O ângulo formado entre a força Peso e a sua decomposição no eixo y, será igual ao ângulo formado entre o plano e a horizontal;
- Se houver força de atrito, esta se oporá ao movimento, neste caso, apontará para cima.

Sabendo disso podemos dividir as resultantes da força em cada direção, temos em y:

$$\sum F_y \Rightarrow N - P_y = 0$$

Como o bloco não se desloca para baixo e nem para cima, esta resultante é nula, então:

$$P_y = N$$

Temos que:

$$P_y = P \cdot \cos\theta \rightarrow m \cdot g \cdot \cos\theta$$

Então:

$$N = m \cdot g \cdot \cos\theta$$

E em x:

$$\sum F_x \Rightarrow P_x = m \cdot a$$

Temos que:

$$P_x = P \cdot \sin\theta \rightarrow m \cdot g \cdot \sin\theta$$

Então:

$$\cancel{m} \cdot g \cdot \sin\theta = \cancel{m} \cdot a$$

$$a = g \cdot \sin\theta$$

Procedimento e dados experimentais

Materiais Utilizados

- 1 trilho de ar;
- 1 compressor de ar;
- 1 cronômetro digital;
- 1 móvel;
- 1 eletroímã;
- 5 sensores de tempo;
- 1 trena;
- 2 blocos de madeira.

Montagem Experimental

A Figura 6, apresenta uma figura esquemática da montagem experimental a ser utilizada para analisar o movimento de um móvel que percorre uma trajetória retilínea sobre um plano inclinado.

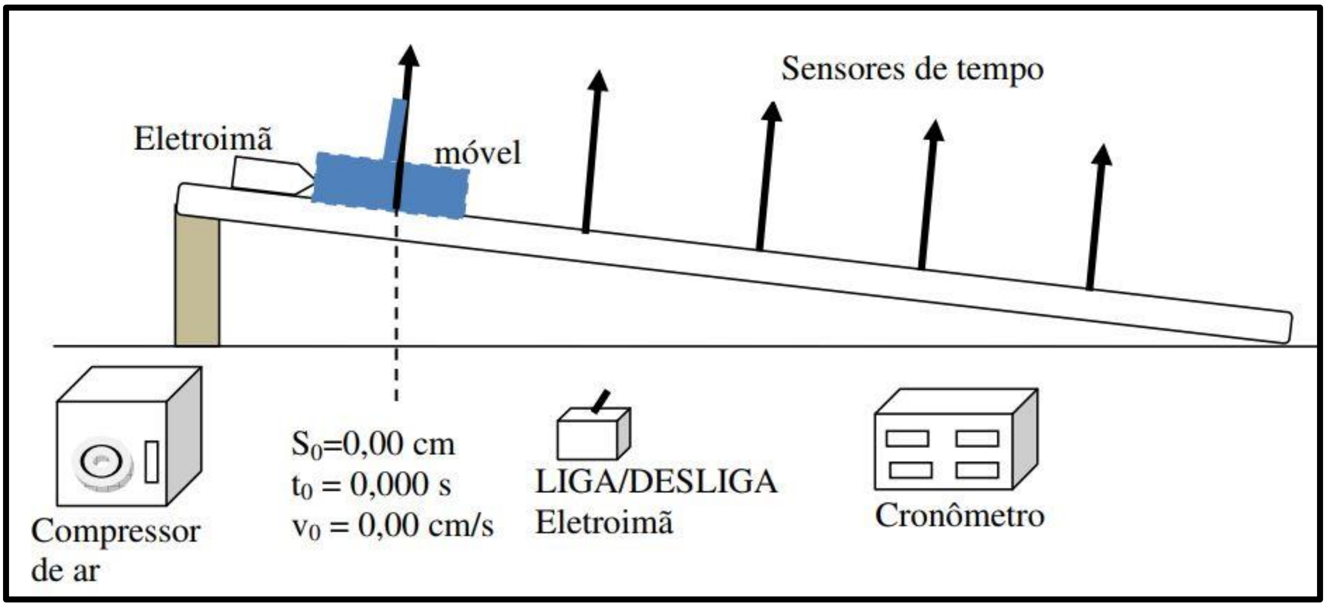


Figura 6 - Figura esquemática da montagem experimental do movimento de um corpo em um plano inclinado. Situação sem atrito.

Procedimento Experimental

1 - Incline o trilho de ar com um ângulo menor que 5º com a horizontal.

2 - Verifique se os sensores na parte de trás do cronômetro estão todos conectados corretamente.

3 - É conveniente que a velocidade inicial do móvel seja nula. Para obter este resultado ajuste o móvel de tal forma que quando for liberado, o sensor S0 seja imediatamente acionado (Figura 6).

4 - Coloque os sensores de tempo distanciados de 15,00 cm entre si (não use a escala do trilho, meça os espaços entre os sensores com uma trena na sua parte superior).

5 - Ligue o compressor de ar e mantenha a sua intensidade no máximo.

6 - Posicione o móvel junto ao eletroímã, que deve estar com a chave seletora na posição LIGA.

7 - Libere o móvel, desligando o eletroímã no controle LIGA-DESLIGA.

8 - Anote os dados que o cronômetro mostra no visor, esses são os tempos desde o primeiro sensor (posição inicial) até os outros sensores.

9 - Repita três vezes estas medidas;

10 - Anote os dados na Tabela 1;

11 - Mantenha os dois primeiros sensores na sua posição, e varie a posição de outros três de forma a ter mais dados. Repita o procedimento e anote os dados na Tabela 1.

Resultados

A tabela abaixo possui medidas experimentais do MRU, que foram obtidas através do trilho de ar da Azeheb. As quais apresentam (t) em segundos que o móvel passou por cada sensor posicionado em (x) centímetros.

$x(cm)$	$t_1(s)$	$t_2(s$	$t_3(s)$	$t_4(s)$
$\mathbf{0,00}$	0	0	0	0
$\mathbf{15,00}$	0,921	0,921	0,917	0,909
$\mathbf{30,00}$	1,376	1,376	1,371	1,364
$\mathbf{45,00}$	1,736	1,736	1,730	1,723
$\mathbf{60,00}$	2,035	2,035	2,029	2,022

Tabela 1 – Medidas experimentais do MRUV, obtidas com a inclinação θ_1.

O mesmo procedimento foi realizado uma segunda vez, agora com θ_2, também repetido quatro vezes e os tempos foram anotados na Tabela 2.

$x(cm)$	$t_1(s)$	$t_2(s$	$t_3(s)$	$t_4(s)$
$\mathbf{0,00}$	0	0	0	0
$\mathbf{15,00}$	0,667	0,639	0,657	0,653
$\mathbf{30,00}$	0,992	0,960	0,980	0,975
$\mathbf{45,00}$	1,248	1,214	1,235	1,230
$\mathbf{60,00}$	1,460	1,426	1,447	1,442

Tabela 2 – Medidas experimentais do MRUV, obtidas com a inclinação θ_2.

A partir das tabelas 1 e 2, calcularemos a média aritmética dos valores obtidos, para isso utilizaremos a equação:

Valor médio

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)}{n}$$

Onde:

$\bar{x}$: Representa as medidas, que serão representadas por $\bar{t}$.

n: Corresponde ao número total de medidas realizadas.

Após calcularmos as médias dos tempos t_1, t_2, t_3 e t_4, utilizando a equação do valor médio, fazendo uso dos dados contidos nas tabelas 1 e 2, obteremos os respectivos resultados que serão expressos nas tabelas a seguir (tabelas 3 e 4):

$\boldsymbol{x(cm)}$	$\boldsymbol{\bar{t}(s)}$	$\boldsymbol{\bar{t}^2(s)}$
0,00	0	0
15,00	0,917	0,841
30,00	1,371	1,880
45,00	1,731	2,996
60,00	2,030	4,121

Tabela 3 - médias dos tempos (t) quando a inclinação era $\boldsymbol{\theta_1}$.

$\boldsymbol{x(cm)}$	$\boldsymbol{\bar{t}(s)}$	$\boldsymbol{\bar{t}^2(s)}$
0,00	0	0
15,00	0,654	0,428
30,00	0,976	0,952
45,00	1,231	1,515
60,00	1,443	2,082

Tabela 4 - médias dos tempos (t) quando a inclinação era $\boldsymbol{\theta_2}$.

Para representar os dados acima, obtidos experimentalmente em uma gráfico (plano milimetrado) é necessário definir um módulo de escala para que todos os valores caibam dentro do gráfico, para isso iremos utilizar a equação abaixo .

$$Módulo\ de\ escalar = \frac{intervlo\ disponível\ no\ papel\ milimetrado}{Maior\ valor\ obtido\ experimentalmente}$$

Iremos usar os dois maiores dados obtidos entre os dois experimentos para definirmos uma escalar, de modo que caiba os dois gráficos em um único plano:

$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ y\ (t) = \frac{200}{4{,}2} = 47{,}619\ mm$$

$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ x\ (S) = \frac{150}{65} = 2{,}308\ mm$$

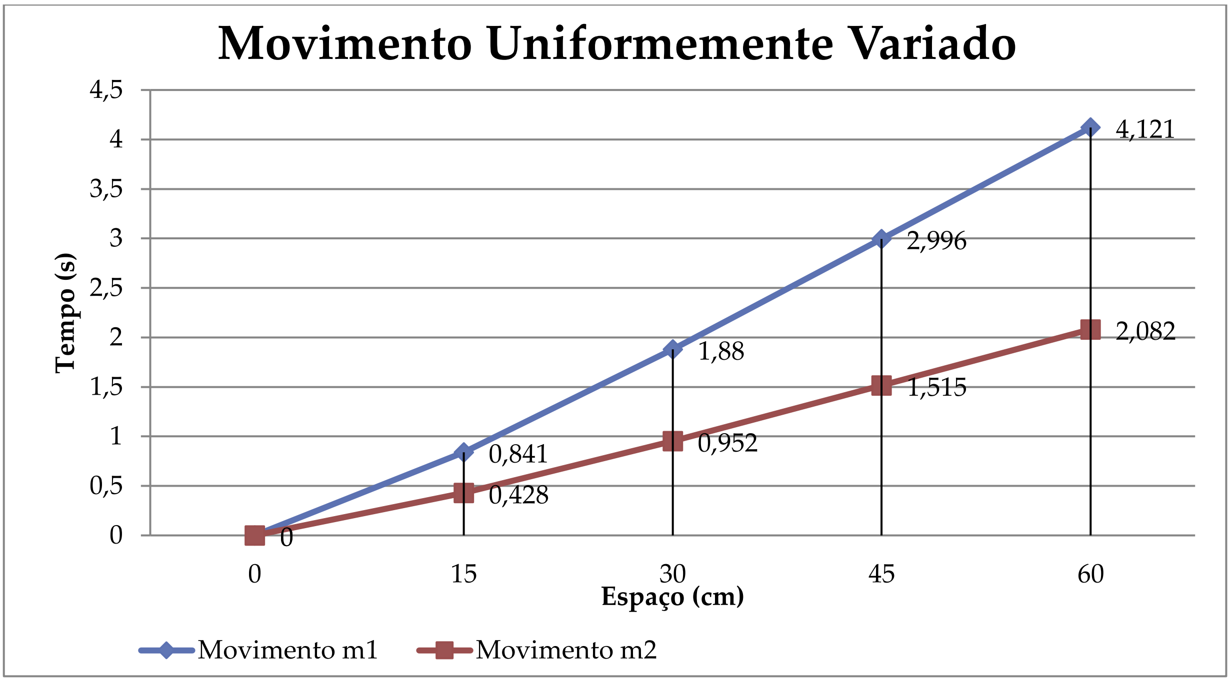
$\boldsymbol{x \times Me_s(mm/cm)}$	$\boldsymbol{t \times Me_t(mm/s)}$
$0{,}00$	0
$15 \times 2{,}308 = 35$	$0{,}841 \times 47{,}619 = 40$
$30 \times 2{,}308 = 69$	$1{,}880 \times 47{,}619 = 90$
$45 \times 2{,}308 = 104$	$2{,}996 \times 47{,}619 = 143$
$60 \times 2{,}308 = 138$	$4{,}121 \times 47{,}619 = 196$

Tabela 5 – Valores em nova escala prontos para serem plotados em um plano milimetrado – inclinação $\boldsymbol{\theta_1}$.

$\boldsymbol{x \times Me_s(mm/cm)}$	$\boldsymbol{t \times Me_t(mm/s)}$
$0{,}00$	0
$15 \times 2{,}308 = 35$	$0{,}428 \times 47{,}619 = 20$
$30 \times 2{,}308 = 69$	$0{,}952 \times 47{,}619 = 45$
$45 \times 2{,}308 = 104$	$1{,}515 \times 47{,}619 = 72$
$60 \times 2{,}308 = 138$	$2{,}082 \times 47{,},619 = 99$

Tabela 6 – Valores em nova escala prontos para serem plotados em um plano milimetrado – inclinação $\boldsymbol{\theta_2}$.

No plano a seguir estão representados as tabelas 5 e 6, sendo (t - tempo) o eixo das abcissas, respectivamente (x), e (x - espaço) o eixo das coordenadas respectivamente (y). Também encontra-se em anexo ao final deste documento um gráfico com os dados plotados e a reta de ajuste traçada.



Ao trabalharmos com dados obtidos experimentalmente, devemos levar em consideração diversos tipos de erros que podem aparecer durante o experimento, como, por exemplo, atrito com o ar, atrito com a polia e entre outros; ao olharmos o gráfico feito à mão, vemos que nem todos os pontos ficam alinhados como uma reta, para isso, existe um método em que conseguiremos traçar uma reta de ajuste, esse método recebe o nome de "método dos mínimos quadrados". Para isso é necessário considerar a equação da reta $y = A + Bx$ onde:

Seu coeficiente linear (A), é dado pela seguinte equação:

$$\mathrm{A} = \frac{\sum \mathrm{x} \sum \mathrm{t}^2 - \sum \mathrm{t} \sum \mathrm{tx}}{\mathrm{n} \sum \mathrm{t}^2 - (\sum \mathrm{t})^2}$$

e seu coeficiente angular (B), é dado pela seguinte equação:

$$B = \frac{n \sum tx - \sum t \sum x}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

Utilizando os dados das tabelas 3 e 4, temos que da equação da reta $y = A + Bx$, onde y representa a posição e x o tempo. Similar a equação horaria do movimento uniformemente acelerado, $x(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$.

Fazendo o cálculo dos coeficientes para o experimento em que a inclinação era θ_1. Os valores são:

$A = 1{,}700218237$

$B = 14{,}38289376$

$r^2 = 0{,}996926309$

$\bar{x} = 1{,}9676$

$\bar{y} = 30$

$S_{xx} = 10{,}8430892$

$S_{yy} = 2.250$

$S_{xy} = 155{,}955$

$QMR = 2{,}305267857$

$Me(A) = 1{,}133196128$

$Me(B) = 0{,}461088384$

Da mesma forma, realizando os cálculos para o experimento quando a massa suspensa era de m_2. Os valores obtidos são:

$A = 1{,}647996088$

$B = 28{,}48302583$

$r^2 = 0{,}99709579$

$\bar{x} = 0{,}9954$

$\bar{y} = 30$

$S_{xx} = 2{,}7653312$

$S_{yy} = 2{,}250$

$S_{xy} = 78{,}765$

$QMR = 2{,}178156815$

$Me(A) = 1{,}102754418$

$Me(B) = 0{,}88750538$

Tendo calculado os coeficientes para ambos os movimentos, podemos descrever uma equação de movimento que melhor representa os valores obtidos experimentalmente. Temos que: $S = A + B \cdot t^2 \rightarrow S = A \pm Me(A) + B \pm Me(B) \cdot t^2$

Para θ_1.

$$S = 0 + 14{,}383 \pm 0{,}461 \cdot t^2 \rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Para θ_2.

$$S = 0 + 28{,}483 \pm 0{,}888 \cdot t^2 \rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Conclusão

Numa análise mais rigorosa, percebe-se que alguns fatores não podem ser desprezados na conclusão final da análise dos dados. Alguns desses fatores são: a resistência do ar contra a superfície do carro, o erro humano na imprecisão da medição das posições dos sensores, a deformação da corda que ligava o carro à massa aceleradora, interferências nas leituras do equipamento e até mesmo o atrito entre a corda e a polia e o eixo da polia com o seu suporte. Mesmo que quase não houvesse atrito entre o carro e a superfície do trilho, possíveis obstruções nas saídas de ar que mantinham o carro flutuando, uma leve inclinação no trilho e até mesmo algum desnível no formato do carro podem ter interferido nos resultados. Inúmeros são os fatores que podem atuar como interferências no experimento mesmo fazendo o máximo para evitá-los.

Todavia, os dados obtidos neste experimento não extraviaram as tolerâncias admitidas. O resultado do notável trabalho realizado por todos os grandes cientistas que estudaram os movimentos ao longo da história pode ser observado. O experimento mostrou um resultado satisfatório pois, dentro dos erros admitidos, cumpriu as previsões teóricas esperadas.

Conclui-se que a partir dos procedimentos anteriormente listados em materiais métodos e como mostrado no gráfico 1 em que as velocidades obtidas em cada intervalo de tempo beiram a velocidade constante, onde essa velocidade foi obtida originalmente da velocidade média de cada intervalo de espaço. Isso foi observado a partir da medição dos intervalos tempo, os quais para a obtenção da velocidade constante deveriam ser proporcionais aos intervalos de espaço, analisando-os e calculando seus erros e desvios para uma maior precisão. Não foi possível obter resultados perfeitos, pois, toda medida ou grandeza quando analisada experimentalmente contém erros mas, como é possível observar na linha de tendência presente no gráfico 1 os resultados encontrados estão numa margem de erro praticamente nula constatando assim o objetivo da prática de comprovar a velocidade constante do movimento observado no experimento.

Observando o gráfico, vemos que $A = 0$ e $B = \frac{1}{2} \cdot a \rightarrow a = 2 \cdot B$. Assim, a equação final que obtemos é:

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Que é a equação do movimento uniformemente acelerado, para um corpo que percorre uma trajetória retilínea, com velocidade variável, para a posição inicial no tempo inicial igual a zero.

Observasse também que a reta de ajuste não ficou muito fora dos padrões esperados para o experimento e o coeficiente de determinação r^2apresentou seu valor muito próximo de 1, exatamente 0,997 para ambos, ou seja, quanto mais perto de 1, mais preciso foram dados coletados no experimento, nos dando uma garantia de que o experimento esta muito próximo da teoria.

Referências Bibliográficas

MUKAI, H., FERNANDES, P.R.G. Manual de Laboratório de Física I - DFI/UEM, 2008 a 2017.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica - Vol. 1 - Mecânica - 5ª Edição - São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

KEITH, R. Symon - Mecânica (Quarta edição), Livro Texto.

WATARI, Kazunori - Mecânica Clássica – Vol 2. 2 ª Edição – São Paulo: Livraria da Física

https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Dinamica/pi.php

https://pt.wikipedia.org/wiki/Plano_inclinado