



Universidade Estadual de Maringá – Centro de Ciências Exatas

# Momento de Inércia

Relatório de Física Experimental I

Acadêmicos:

1. Giovanna Maria Nogueira, RA 112479 – Física, Turma F
2. João Vitor Honório Ribeiro, RA 99360 – Física, Turma F
3. Vitor Hugo Ferrari Ribeiro, RA 112481 – Física, Turma F

Maringá, 04 de Setembro de 2019

# Momento de Inércia

## Relatório de Física Experimental I

### Introdução

Em mecânica, o momento de inércia expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. Diferentemente da massa inercial (que é um escalar), o momento de inércia ou Tensor de Inércia também depende da distribuição da massa em torno de um eixo de rotação escolhido arbitrariamente.

Quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será girá-lo ou alterar sua rotação, ou seja, maior será a resistência do corpo de alterar sua velocidade angular. Contribui mais para o aumento do valor do momento de inércia a porção de massa que está mais afastada do eixo de giro. Um eixo girante fino e comprido, com a mesma massa de um disco que gira em relação ao seu centro, terá um momento de inércia menor que este. Sua unidade de medida, no SI, é quilograma vezes metro ao quadrado ( $kg \cdot m^2$ ). Em mecânica clássica, momento de inércia também pode ser chamado inércia rotacional ou momento polar de inércia.

Para movimentos planos de um corpo, a trajetória de todos os pontos acontece em planos paralelos e a rotação ocorre apenas em torno do eixo perpendicular a esse plano. Neste caso, o corpo tem um único momento de inércia, medido em torno desse eixo.

Considera-se o corpo rígido como um sistema de muitas partículas, cujas posições relativas permanecem fixas. Pode-se definir corpo rígido como um sistema de partículas em que todas as distâncias existentes entre elas são constantes. As forças que mantêm as partículas em

### Resumo

Esse experimento trata do princípio da conservação de energia e torque. À luz da física dos movimentos translacionais e rotacionais. O momento de Inércia de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo é uma grandeza análoga à massa  $M$  no movimento de translação. Utilizando 2 Discos de diâmetros diferentes. Tem como objetivo geral investigar o movimento de translação e rotação em um sistema discos-massa e como objetivo específico a determinação do momento de inércia de um disco homogêneo experimentalmente, explorar os conceitos de conservação de energia mecânica e explorar o conceito de torque.

distâncias fixas em relação umas às outras são internas e podem ser imaginadas como exercidas por hastes rígidas, sem peso, ligando todos os pares de partículas. Forças como estas, mantendo certas relações fixas entre as partículas de um sistema, são chamadas forças de vínculo, e pode-se considerar que satisfazem a terceira lei de Newton (na forma forte), pois os vínculos poderiam ser mantidos por hastes rígidas atadas às partículas por meio de juntas universais sem atrito. Pode-se, então, aplicar os Teoremas da Conservação do Momento Linear e Angular para movimento de corpos rígidos. Para um corpo perfeitamente rígido, o Teorema da Conservação da Energia Mecânica também é válido, pois é fácil demonstrar com o auxílio da terceira lei de Newton que as forças de vínculos não realizam trabalho no movimento rígido do sistema de partículas.

O trabalho realizado pela força exercida pela haste em movimento sobre a partícula numa das extremidades é igual e oposto ao trabalho realizado pela força exercida pela haste sobre a partícula na outra extremidade, pois ambas as partículas têm o mesmo componente da velocidade na direção da haste.

A derivação das equações do movimento de um corpo rígido baseia-se nestas leis da conservação. Nenhum sólido real é perfeitamente rígido, de forma que a teoria do movimento de corpos rígidos aqui apresentados é uma aproximação idealizada do movimento dos corpos reais. Entretanto, na maioria das aplicações, a diferença entre corpos sólidos reais e corpos com rigidez verdadeira não é significativa. Com o mesmo espírito, levanta-se a suposição de que se pode imaginar um corpo rígido ideal como constituído de partículas puntiformes ideais, mantidas a distâncias fixas umas das outras.

(Mecânica, Symon)

## Fundamentação teórica

### Calculo do momento de inércia de um disco circular.

Podemos imaginar o disco decomposto em anéis circulares concêntricos delgados (Fig. 1) de raio  $\rho$  e largura infinitésima  $d\rho$ , onde  $\rho$  varia de 0 a  $R$ .

A massa  $dm$  de um desses anéis está para a massa  $M$  do disco assim como o volume do anel está para o disco, ou seja,

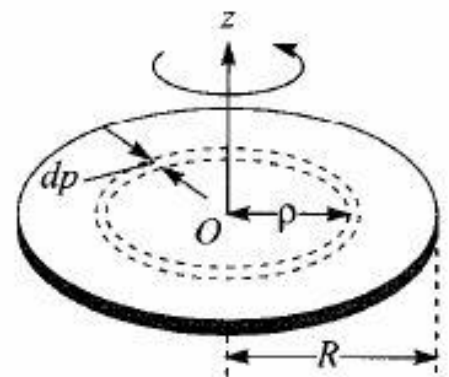


Figura 1 - Disco Circular



$$\frac{dm}{M} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot d\rho}{\pi \cdot R^2} = \frac{2}{R^2} \cdot \rho \cdot d\rho$$

De modo que:

$$I = \int \rho^2 \cdot dm = \frac{2 \cdot M}{R^2} \cdot \int_0^R \rho^3 \cdot d\rho = \frac{2 \cdot M}{R^2} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{2 \cdot M \cdot R^4}{4 \cdot R^2}$$

Ou seja, finalmente:

$$I = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$$

Note que a dedução, e por conseguinte este resultado, é independente da espessura do disco (ela se cancela na razão de volumes) de modo que o resultado dá o momento de inércia de um cilindro circular de massa  $M$ , raio  $R$  e altura  $L$ , em torno do eixo do cilindro, qualquer que seja  $L$ .

Para analisar os dados obtidos na experimentação, iremos deduzir as equações à partir da conservação da energia mecânica.

$$\Delta E = 0 \rightarrow E_i = E_f$$

$$m_s \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Como

$$v = \omega \cdot r \text{ então, } \omega = v/r$$

Logo,

$$m_s \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{r^2} \quad \times \left( \frac{r^2}{v^2} \right)$$

$$2 \cdot m_s \cdot g \cdot h \cdot \frac{r^2}{v^2} = m_s \cdot r^2 + I$$

$$I = m_s \cdot r^2 \cdot \frac{2 \cdot g \cdot h}{v^2} - m_s \cdot r^2$$

$$I = m_s \cdot r^2 \cdot \left( \frac{2 \cdot g \cdot h}{v^2} - 1 \right)$$

$$\begin{cases} v = v_0 - a \cdot t \\ z = z_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{cases}$$

$$v_0 = 0 \quad \text{e} \quad z_0 = h$$

$$\begin{cases} v = -a \cdot t \\ 0 = h - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{cases}$$

$$2 \cdot h = a \cdot t^2 \rightarrow a = \frac{2 \cdot h}{t^2}$$

$$v = -\frac{2 \cdot h}{t} \rightarrow v^2 = \frac{4 \cdot h^2}{t^2}$$

Portanto:

$$I = m_s \cdot r^2 \cdot \left( \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot h} - 1 \right)$$

## Procedimento e dados experimentais

### Materiais Utilizados

- 2 Discos de diâmetros diferentes;
- Cilindro metálico maciço;
- Fio inextensível
- Cronômetro
- Trena
- Régua
- Fita Adesiva
- Paquímetro
- Balança

## Montagem Experimental

A montagem experimental, apresentada na Figura 8.2, é composta de dois discos, de diâmetros diferentes, acoplados por um único eixo tal que os discos giram juntos e estão fixados na parede a uma certa altura  $H$  do solo. Um fio de comprimento  $L$ , tem uma de suas extremidades fixada no disco de menor diâmetro e na outra extremidade do fio encontra-se um corpo cilíndrico de massa  $m_s$  (massa suspensa). O fio é enrolado em torno do disco menor tal que fique a uma altura  $h$  do solo, sendo que ( $L > h$ ).

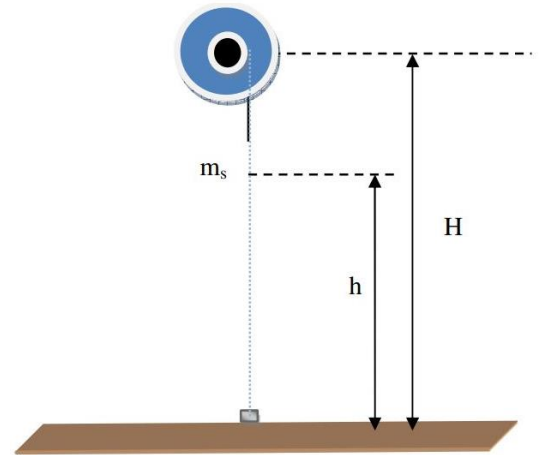


Figura esquemática apresentando a montagem experimental: dois discos de diâmetros diferentes acoplados por um único eixo, e fixos na parede a uma altura  $H$  (m) do solo. E, uma massa suspensa,  $m_s$  (Kg), presa por um fio cuja extremidade oposta está fixada em torno do eixo do disco menor, que translada de uma altura  $h$  (m) até o solo.

## Procedimento Experimental

- 1 – Afira o valor da massa do objeto a ser suspenso ( $m_s$ ) e anote na tabela;
- 2 – Anote os valores das massas e diâmetros dos discos na tabela. Os valores das massas dos discos estão apresentados em uma tabela junto ao disco na parede. Nesta tabela também contêm os valores dos diâmetros dos discos. Despreze esses valores e meça com um paquímetro o diâmetro do disco menor (este deve ser medido em torno do ponto onde se enrola o fio e não na borda externa do mesmo) e com uma régua ou trena o diâmetro do disco maior, considerando assim o desvio dos instrumentos utilizados.
- 3 – Adote um fio de comprimento ( $L$ ) suficiente para que uma de suas extremidades ao ser enrolada no disco menor dê uma volta no disco, e a outra extremidade amarrada ao objeto suspenso, toque o solo (Fig. 2). Evite cortar o fio antes para evitar o desperdício.
- 4 – Enrole o fio uniformemente e de tal forma que não deslize no disco menor até a altura  $h$  (evite alturas menores do que 1 metro);
- 5 – Mantenha o corpo na altura  $h$  estipulada;

6 – Meça com a trena a altura de percurso  $h$  (leve em consideração que a força peso atua no centro de massa do corpo suspenso). Cuidado não dobre a trena, meçam de baixo (início da trena) para cima. Anote o valor de  $h$  na tabela;

7 – Mantenha o corpo suspenso parado sem movimentos aleatórios;

8 – Libere o disco (enquanto este rotaciona a massa suspensa translada, ambos partindo com velocidade inicial nula) e quando o corpo começar a transladar acione o cronômetro, trave-o quando a base do corpo atingir o solo. Anote o valor do tempo de percurso que a massa suspensa leva para percorrer a altura  $h$  na tabela;

9 – Repita este procedimento mais 4 vezes, liberando o corpo suspenso sempre da mesma altura  $h$  e anote os dados do tempo aferidos na tabela;

## Resultados

Dados preliminares para o experimento.

- Raio menor do disco: 0,0345 m
- Raio maior do disco: 0,1081 m
- Massa do disco menor: 0,017 kg
- Massa do disco maior: 2,664 kg
- Massa total dos discos: 2,747 kg
- Massa suspensa: 0,094 kg
- Altura: 1,655 m

$t_1(s)$	$t_2(s)$	$t_3(s)$	$t_4(s)$	$t_5(s)$	$t_6(s)$	$t_7(s)$	$t_8(s)$	$t_9(s)$	$t_{10}(s)$	$t_{Médio}(s)$
7,35	7,47	7,68	7,50	7,45	7,24	7,27	7,20	7,19	7,21	<b>7,36</b>

Tabela 1 - Dados experimentais dos tempos de percurso na vertical da massa  $m_s$

Para calcular o momento de inércia do experimento, vamos substituir todos os dados contidos nessa seção na equação obtida pela conservação da energia mecânica e vamos chama-la agora de “Momento de Inércia Experimental ( $I_{exp}$ )”:

$$I_{exp} = m_s \cdot r^2 \cdot \left( \frac{g \cdot t^2}{2 \cdot h} - 1 \right)$$

$$I_{exp} = 0,094 \cdot 0,0345^2 \cdot \left( \frac{9,8 \cdot 7,36^2}{2 \cdot 1,655} - 1 \right)$$

$$I_{exp} = 1,118835 \times 10^{-4} \cdot \left( \frac{530,86208}{3,31} - 1 \right)$$

$$I_{exp} = 1,118835 \times 10^{-4} \cdot 159,3812931$$

$$\mathbf{I_{exp} = 0,017832136}$$

Para analisar o dado obtido experimentalmente, iremos compara-lo com um valor obtido pela definição de momento de inércia, que será calculado à seguir.

$$I = \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

$$I = \frac{1}{2} \cdot 2,664 \cdot 0,1081^2 + \frac{1}{2} \cdot 0,017 \cdot 0,0345^2$$

$$I = 1,332 \cdot 0,01168561 + 8,5 \times 10^{-3} \cdot 1,19025 \times 10^{-3}$$

$$I = 0,015565232 + 1,0117125 \times 10^{-5}$$

$$\mathbf{I = 0,015575349}$$

Para estimar qual foi a diferença entre os dados obtidos, iremos calcular o desvio percentual dos dados através da seguinte equação;

$$\Delta = \left| \frac{I_{exp} - I}{I} \right| \times 100$$

$$\Delta = \left| \frac{0,017832136 - 0,015575349}{0,015575349} \right| \times 100$$

$$\Delta = 0,144894795 \times 100 \Rightarrow \Delta = \mathbf{14,4894795\%}$$



## Conclusão

Numa análise mais rigorosa, percebe-se que alguns fatores não podem ser desprezados na conclusão final da análise dos dados. Alguns desses fatores são: a resistência do ar contra a superfície da massa suspensa, o erro humano na imprecisão da medição dos tempos e da altura, a deformação da corda que ligava a massa com o disco e principalmente o atrito no eixo da polia com seu suporte. Inúmeros são os fatores que podem atuar como interferências no experimento mesmo fazendo o máximo para evitá-los.

Todavia, os dados obtidos neste experimento extraviaram um pouco as tolerâncias admitidas. O resultado esperado era de aproximadamente  $I = 0,0156$  e o encontrado no experimento foi de aproximadamente  $I = 0,0178$ . Tendo calculado o desvio percentual, encontramos um desvio de aproximadamente  $\Delta = 14,5\%$ . Considerando esse desvio, o experimento mostrou um resultado satisfatório, pois, dentro dos erros admitidos, cumpriu as previsões teóricas esperadas, uma vez que, no experimento calculamos o momento de inércia com a suposição de que a energia mecânica do sistema era conservada, mesmo sabendo da existência da força de atrito entre o eixo e o suporte.

Conclui-se que a partir dos procedimentos anteriormente listados entre materiais, métodos e como mostrado anteriormente, o experimento condiz com a realidade. Não foi possível obter resultados perfeitos, pois, toda medida ou grandeza quando analisada experimentalmente contém erros.

## Referências Bibliográficas

MUKAI, H., FERNANDES, P.R.G. Manual de Laboratório de Física I - DFI/UEM, 2008 a 2017.

KEITH, R. Symon - Mecânica (Quarta edição), Livro Texto.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica - Vol. 1 - Mecânica - 5ª Edição - São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

<https://brasilecola.uol.com.br/fisica/sistema-rotacao-momento-inercia.htm>