Universidade Estadual de Maringá – Centro de Ciências Exatas

Sistema Massa-Mola

Relatório de Física Experimental I

Acadêmicos:

1. Giovanna Nogueira, RA 112491 – Física, Turma F
2. Nathalia Castanho, RA 112492 – Física, Turma F
3. Vitor Ferrari, RA 112481 – Física, Turma F

Maringá, 13 de Novembro de 2019

Sistema Massa-Mola

Relatório de Física Experimental I

Resumo

A prática experimental teve como objetivo, construir um sistema massa-mola que oscilasse sob a ação de uma massa suspensa de modo que pudéssemos analisar o experimento em duas fases, uma delas o caso estático e a outra o caso dinâmico e determinar a constante elástica da mola.

Através da segunda Lei de Newton, e da Lei de Hooke, é possível obter equações que possibilitam o estudo do movimento realizado por um corpo que oscila. Quando a força que um corpo sofre é proporcional ao descolamento referente à uma posição de equilíbrio, dizemos que este corpo realiza um Movimento Harmônico Simples (MHS), o qual ocorre tanto na horizontal quanto na vertical no nosso sistema montado em laboratório.

Introdução

Um oscilador massa-mola ideal é um modelo físico composto por uma mola sem massa que possa ser deformada sem perder suas propriedades elásticas, chamada mola de *Hooke*, e um corpo de massa *m* que não se deforme sob ação de qualquer força.

Este sistema é fisicamente impossível já que uma mola, por mais leve que seja, jamais será considerada um corpo sem massa e após determinada deformação perderá sua elasticidade. Enquanto um corpo de qualquer substância conhecida, quando sofre a aplicação de uma força, é deformado, mesmo que seja de medidas desprezíveis.

Mesmo assim, para as condições que desejamos calcular, este é um sistema muito eficiente. E sob determinadas condições, é possível obtermos, com muita proximidade, um oscilador massa-mola.

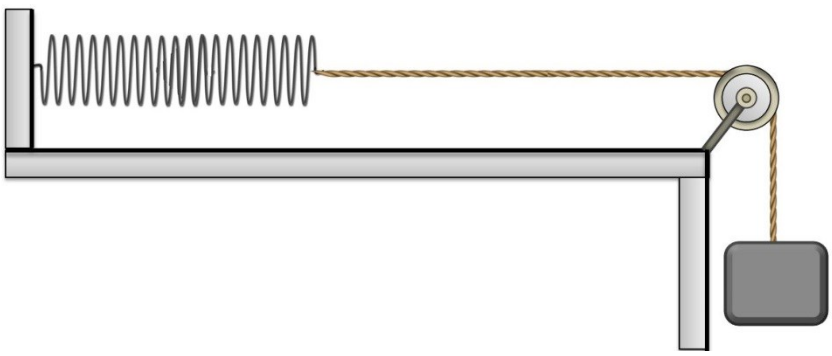


Figura 1 - Sistema Massa-Mola

Fundamentação teórica

No experimento de oscilações mecânicas o foco será o estudo das distensões lineares de molas helicoidais (movimento unidimensional) quando submetida a uma determinada força externa, $F_{EXTERNA}$. As distensões, Δx, dos materiais elásticos (e as molas se inserem nesse contexto) possuem em geral, uma relação não linear com a força externa aplicada. No entanto, a linearidade é obedecida até um determinado valor da $F_{EXTERNA}$. Sendo assim, dentro do limite da linearidade, a relação entre a força, $F_{EXTERNA}$, aplicada numa dada direção x de um material elástico, e a respectiva distensão (elongação) produzida nessa direção é do tipo $K \cdot \Delta x$, onde K é a constante de proporcionalidade entre a força aplicada e a distensão, e está relacionada à constante da mola.

Analisando um material elástico na condição de equilíbrio, ou seja, a força de natureza elástica que atua no material terá a mesma intensidade e a mesma direção da força aplicada externamente, porém com o sentido oposto. Assim, a força elástica é expressa como:

$$F_{ELÁSTICA} = -K \cdot \Delta x$$

Onde o sinal negativo indica que a força elástica é uma força restauradora, pois $F_{ELÁSTICA}$ possui o sentido contrário ao da distensão Δx. A equação anterior expressa uma lei dos materiais elásticos conhecida como $Lei\ de\ Hooke$ na qual K é denominada de constante elástica do material.

Considerando uma mola em espiral, feita de um material homogêneo e isotrópico, a $Lei\ de\ Hooke$ expressará a relação entre a força elástica da mola e sua elongação (esticada ou comprimida). A constante elástica da mola, K, está relacionada com o módulo de rigidez e com a geometria da mola por intermédio da expressão as seguir.

$$K = \frac{G \cdot \Phi_{fio}^4}{8 \cdot N \cdot \Phi_{mola}^3}$$

Onde:

- Φ_{fio} - o diâmetro do fio que constitui a mola;
- Φ_{mola} - o diâmetro interno da espira;
- N - é o número de espiras;
- G - é o módulo de rigidez do fio.

No movimento harmônico simples (MHS), representado aqui por um sistema massa-mola sem atrito, a frequência angular e dada por:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Em que k é a constante da mola e m é a massa do objeto; isso nos leva à:

$$m = \frac{k}{4 \cdot \pi^2} \cdot \tau^2$$

Onde τ é o período da oscilação.

Além disso, a partir da Lei de Hooke, temos que:

$$k = \frac{F}{x}$$

Em que F é o módulo da força restauradora e x é o deslocamento da posição de equilíbrio.

Equações da constante elástica – Caso Estático e Dinâmico

Teoricamente aplicando a segunda lei de Newton, para o sistema apresentado esquematicamente na Figura 2;

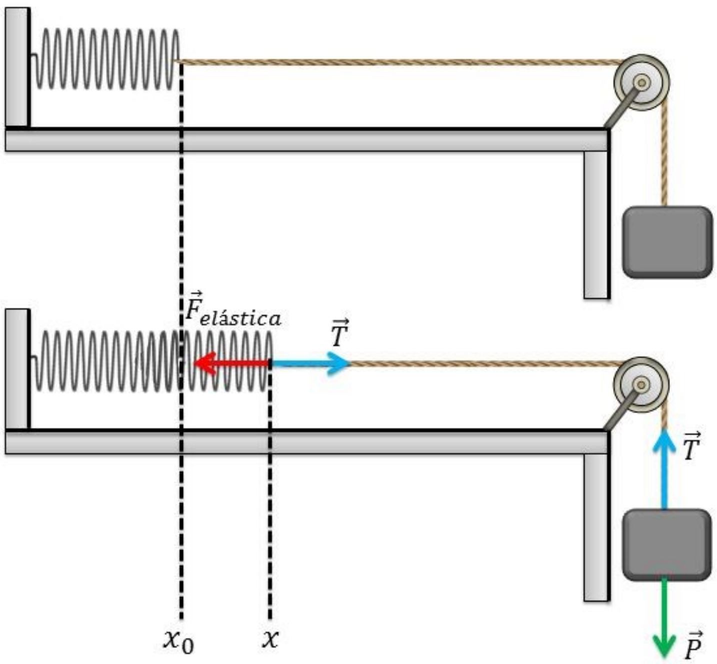


Figura 2 - Esquema do arranjo experimental do sistema massa-mola

As equações para a constante elástica para cada caso (estático e dinâmico) ficam na forma:

- Caso Estático:

$$k_{estático} = \frac{m \cdot g}{\Delta x}$$

- Caso Dinâmico:

$$k_{dinâmico} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m}{T^2}$$

Sendo m a massa suspensa que provocará a distensão (Δx) após ser submetida a força peso, e na equação anterior T é o período de oscilação provocada por uma pequena força externa.

Em um sistema massa-mola, este também realiza um MHS, não mais de forma angular, mas linear, $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$, e que com o decorrer do tempo a amplitude do movimento diminui, sendo um MHA para o tempo total de movimento:

$$(x(t) = A(t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = x_M \cdot e^{-\frac{b}{2 \cdot m} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi))$$

Neste caso:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ e } b < \sqrt{4 \cdot m \cdot K}$$

A força restauradora e dada pela Lei de Hooke ($F = -K \cdot x$).

Procedimento e dados experimentais

Materiais Utilizados

- 1 Mola helicoidal;
- 1 Trilho plano da Pasco;
- 1 Régua;
- 1 Roldana;
- Cronômetro;
- Trena;
- Fio inextensível;
- Suporte para massas;
- Balança.

Montagem Experimental

O sistema é constituído de uma mola helicoidal, fixa em um suporte lateral no trilho da Pasco e na outra extremidade possui um fio inextensível que passa por uma roldana e suspende diferentes massas com valores controlados (Tabela 1). No caso estático a massa suspensa é a massa base (m_0) somente para manter o fio esticado e paralelo ao trilho, equivalente a posição inicial (x_0). No caso dinâmico toda a massa suspensa faz parte do sistema, e irá oscilar em torno do ponto de equilíbrio (x_0).

Procedimento Experimental – Caso Estático

1) Meça o comprimento das molas com a régua (considere somente a parte em espiral), anote na Tabela 1 em ordem crescente;

2) Enumere as massas a serem suspensas, afira seus valores e anote as na Tabela 1;

3) Faça a montagem experimental representada na Figura 2, prendendo a mola helicoidal no suporte;

4) Coloque uma pequena massa suspensa "o próprio suporte para massas", tal que a mola fique em estado de equilíbrio (o mais reto possível, sem saliência para baixo) e anote a posição x_0 na tabela 1;

5) Adicione a primeira massa que provocará o deslocamento a partir do x_0;

6) Meça $\Delta x = x - x_0$ e anote na tabela 1;

7) Repita o processo para mais 5 massas suspensas de forma acumulativa, utilizando à mesma mola;

Caso Dinâmico

1) Desloque o sistema da condição de equilíbrio (pequena força externa, faça uns testes antes, para que a mola não solte do suporte, e anote qual foi esse deslocamento para liberar da mesma posição nas repetições) e coloque-o para oscilar;

2) Com o auxílio de um cronômetro meça o tempo total para realizar 5 oscilações completas (1 período – processo de ida e volta); Repita o procedimento mais 5 vezes. Anote os resultados na Tabela 2.

3) Varie a massa m e repita o processo. Faça isso para 6 massas diferentes (cuidado para não deformar a mola por excesso de massa (m), não coloque mais do que 150 g no suporte);

Resultados

A tabela abaixo possui medidas experimentais do sistema massa-mola, que foram obtidos através do trilho plano com suporte de mola da Pasco. As quais apresentam (τ) em segundos – tempo pela qual móvel teve para concluir uma oscilação (período), (x) em metros – deslocamento da mola e (m) em quilograma – massa suspensa.

$\boldsymbol{\tau}\ (\boldsymbol{s})$	$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{kg})$	$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{m})$	$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{N})$
1,28	0,12673	0,3105	1,1623975
1,19	0,10699	0,2503	0,9683533
1,12	0,09735	0,2204	0,8735921
0,99	0,078	0,1603	0,6833816
0,85	0,0586	0,1003	0,4926796
$\boldsymbol{x_0 = 6,2\ cm}$	$\boldsymbol{m_0 = 8,48g}$	----------	----------

Tabela 1 - Medidas Experimentais – Sistema Massa-Mola

Análise do caso DINÂMICO

Com os dados da tabela 1, elevaremos τ ao quadro, para que possamos fazer uma regressão linear e ainda, construir um gráfico de τ^2 versus m; os próximos dados nos darão detalhes do sistema massa-mola no caso dinâmico.

$\boldsymbol{\tau^2}\ (\boldsymbol{s^2})$	$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{kg})$
1,6384	0,12673
1,4161	0,10699
1,2544	0,09735
0,9801	0,078
0,7225	0,0586

Tabela 2 - Dados experimentais para o caso dinâmico

Para representar os dados acima, obtidos experimentalmente em um gráfico (plano milímetro) é necessário definir um módulo de escala para que todos os valores caibam dentro do gráfico, para isso iremos utilizar a equação abaixo:

$$Módulo\ de\ Escala = \frac{Intervalo\ diponível\ no\ papel\ milímetrado}{Maior\ valor\ obtido\ experimentalemte}$$

Iremos usar os dois maiores dados obtidos entre os dois experimentos para definirmos uma escalar, de modo que caibam os dois gráficos em um único plano:

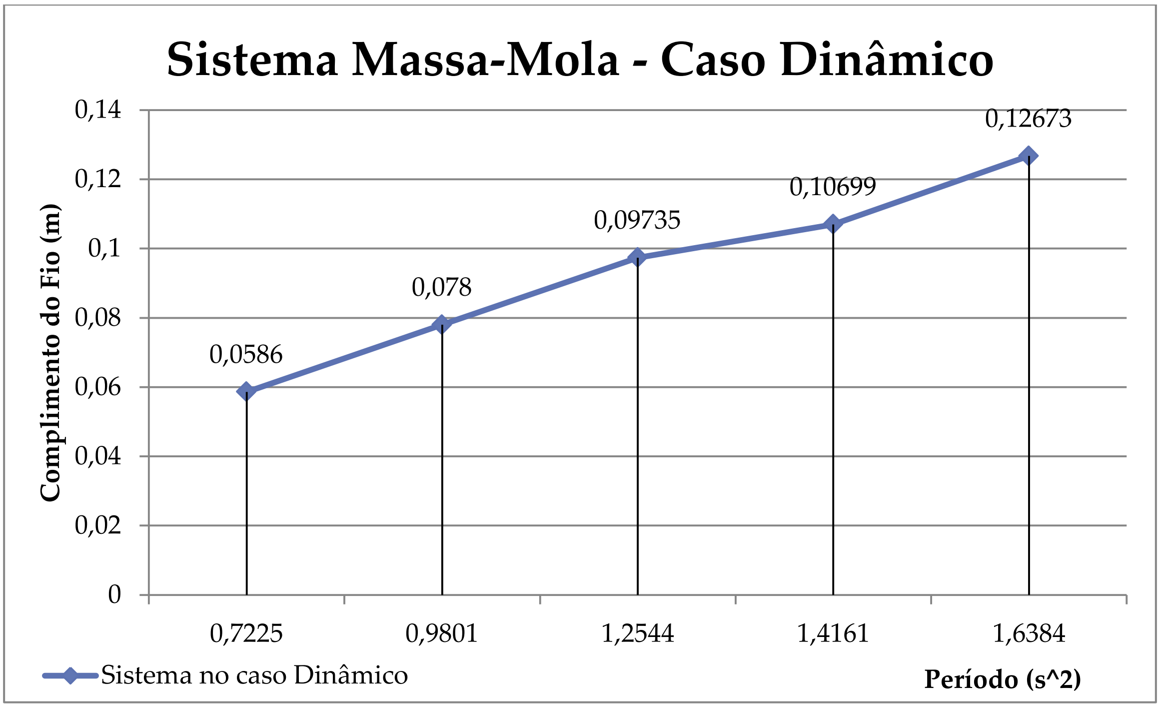
$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ y\ (m) = \frac{150}{0{,}14 - 0{,}05} = 1666{,}667$$

$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ x\ (\tau^2) = \frac{200}{1{,}8 - 0{,}5} = 153{,}846$$

$\boldsymbol{\tau^2 \times Me_x (mm/s)}$	$\boldsymbol{m \times Me_y (mm/m)}$
$(1{,}6384 - 0{,}5) \times 153{,}846 = 175$	$(0{,}12673 - 0{,}05) \times 1666{,}667 = 128$
$(1{,}4161 - 0{,}5) \times 153{,}846 = 141$	$(0{,}10699 - 0{,}05) \times 1666{,}667 = 95$
$(1{,}2544 - 0{,}5) \times 153{,}846 = 116$	$(0{,}09735 - 0{,}05) \times 1666{,}667 = 79$
$(0{,}9801 - 0{,}5) \times 153{,}846 = 74$	$(0{,}078 - 0{,}05) \times 1666{,}6678 = 47$
$(0{,}7225 - 0{,}5) \times 153{,}846 = 34$	$(0{,}0586 - 0{,}05) \times 1666{,}667 = 14$

Tabela 3 - Valores prontos para serem plotados em um plano milímetrado

No plano a seguir está representada a tabela 3, sendo (τ^2- tempo) o eixo das abcissas – eixo x e (m – massa suspensa) o eixo das coordenadas – eixo y. Também se encontra em anexo ao final deste documento um gráfico com os dados plotados e a reta de ajuste traçada.



Ao trabalharmos com dados obtidos experimentalmente, devemos levar em consideração diversos tipos de erros que podem aparecer durante o experimento, como, por exemplo, atrito com o ar, atrito com entre o fio e o ponto fixo e entre outros. Ao olharmos o gráfico feito à mão, vemos que nem todos os pontos ficam alinhados como uma reta, para isso, existe um método em que conseguiremos traçar uma reta de ajuste, esse método recebe o nome de "método dos mínimos quadrados". Para isso é necessário considerar a equação da reta $m = A + B \cdot \tau^2$, onde:

Seu coeficiente linear (A), é dado pela seguinte equação:

$$A = \frac{\sum x \sum t^2 - \sum t \sum tx}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

E seu coeficiente angular (B), é dado pela seguinte equação:

$$B = \frac{n \sum tx - \sum t \sum x}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

Utilizando os dados da tabela 2, temos que da equação da reta $m = A + B \cdot \tau^2$, onde m representa o peso da massa suspensa e τ^2 o período.

Comparando

$$m = \frac{k}{4 \cdot \pi^2} \cdot \tau^2$$

Com a equação da reta $m = A + B \cdot \tau^2$, temos que:

$$A = 0 \quad e \quad B = \frac{k}{4 \cdot \pi^2}$$

Tendo feito o cálculo dos coeficientes pela regressão linear, obtemos:

$A = 5{,}9807 \times 10^{-3}$

$B = 0{,}0729$

$r^2 = 0{,}9975$

$Sxx = 0{,}51818894$

$Syy = 2{,}75928972 \times 10^{-3}$

$Sxy = 0{,}03776547$

$QMR = 2{,}062319 \times 10^{-6}$

$Me(A) = 7{,}901009717 \times 10^{-2}$

$Me(B) = 6{,}347957743 \times 10^{-3}$

$k = 2{,}877976643$

Análise do caso ESTÁTICO

Com os dados da tabela 1, faremos uma regressão linear e ainda construiremos um gráfico de x versus F; os próximos dados nos darão detalhes do sistema massa-mola no caso estático.

$\boldsymbol{F(N)}$	$\boldsymbol{x(m)}$
1,1623975	0,3105
0,9683533	0,2503
0,8735921	0,2204
0,6833816	0,1603
0,4926796	0,1003

Tabela 4 - Dados experimentais para o caso estático

Para representar os dados acima, obtidos experimentalmente em um gráfico (plano milímetro) é necessário definir um módulo de escala para que todos os valores caibam dentro do gráfico, para isso iremos utilizar a equação abaixo:

$$Módulo\ de\ Escala = \frac{Intervalo\ diponível\ no\ papel\ milímetrado}{Maior\ valor\ obtido\ experimentalemte}$$

Iremos usar os dois maiores dados obtidos entre os dois experimentos para definirmos uma escalar, de modo que caibam os dois gráficos em um único plano:

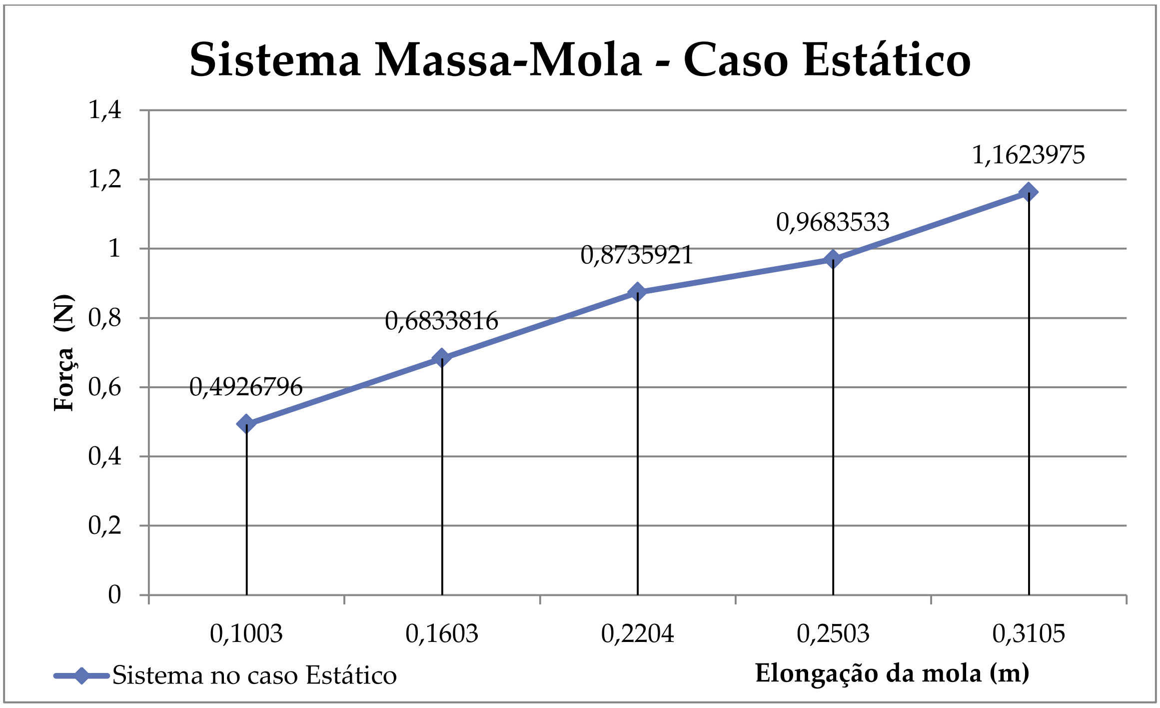
$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ y\ (F) = \frac{150}{1{,}20} = 125$$

$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ x\ (x) = \frac{200}{0{,}35} = 571{,}429$$

$\boldsymbol{x \times Me_x (mm/s)}$	$\boldsymbol{F \times Me_y (mm/m)}$
$0{,}3105 \times 571{,}429 = 177{,}43$	$1{,}1623975 \times 125 = 145{,}29$
$0{,}2503 \times 571{,}429 = 143{,}03$	$0{,}9683533 \times 125 = 121{,}04$
$0{,}2204 \times 571{,}429 = 125{,}94$	$0{,}8735921 \times 125 = 109{,}19$
$0{,}1603 \times 571{,}429 = 91{,}60$	$0{,}6833816 \times 125 = 85{,}42$
$0{,}1003 \times 571{,}429 = 57{,}31$	$0{,}4926796 \times 125 = 61{,}59$

Tabela 4 - Valores prontos para serem plotados em um plano milímetrado

No plano a seguir está representada a tabela 3, sendo (τ^2- tempo) o eixo das abcissas – eixo x e (m – massa suspensa) o eixo das coordenadas – eixo y. Também se encontra em anexo ao final deste documento um gráfico com os dados plotados e a reta de ajuste traçada.



Ao trabalharmos com dados obtidos experimentalmente, devemos levar em consideração diversos tipos de erros que podem aparecer durante o experimento, como, por exemplo, atrito com o ar, atrito com entre o fio e o ponto fixo e entre outros. Ao olharmos o gráfico feito à mão, vemos que nem todos os pontos ficam alinhados como uma reta, para isso, existe um método em que conseguiremos traçar uma reta de ajuste, esse método recebe o nome de "método dos mínimos quadrados". Para isso é necessário considerar a equação da reta $m = A + B \cdot \tau^2$, onde:

Seu coeficiente linear (A), é dado pela seguinte equação:

$$A = \frac{\sum x \sum t^2 - \sum t \sum tx}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

E seu coeficiente angular (B), é dado pela seguinte equação:

$$B = \frac{n \sum tx - \sum t \sum x}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

Utilizando os dados da tabela 2, temos que da equação da reta $m = A + B \cdot \tau^2$, onde m representa o peso da massa suspensa e τ^2 o período.

Comparando

$$m = \frac{k}{4 \cdot \pi^2} \cdot \tau^2$$

Com a equação da reta $m = A + B \cdot \tau^2$, temos que:

$$A = 0 \quad e \quad B = \frac{k}{4 \cdot \pi^2}$$

Tendo feito o cálculo dos coeficientes pela regressão linear, obtemos:

$A = 0{,}172958467$

$B = 3{,}182579923$

$r^2 = 0{,}99$

$Sxx = 0{,}026323232$

$Syy = 0{,}26662713$

$Sxy = 0{,}053775789$

$QMR = 1{,}328631705 \times 10^{-2}$

$Me(A) = 4{,}987717542 \times 10^{-3}$

$Me(B) = 0{,}022606476$

Conclusão

Numa análise mais rigorosa, percebe-se que alguns fatores não podem ser desprezados na conclusão final da análise dos dados. Alguns desses fatores são: a resistência do ar contra a superfície da plataforma oscilante, o erro humano na imprecisão da medição dos tempos, a deformação da corda que ligava a massa suspensa, interferências nas leituras do equipamento e até mesmo o atrito entre o eixo de rotação da polia e o suporte. Mesmo que quase não houvesse atrito entre e a plataforma, possível inclinação na plataforma e até mesmo alguma anomalia na mola podem ter interferido nos resultados. Inúmeros são os fatores que podem atuar como interferências no experimento mesmo fazendo o máximo para evitá-los.

Todavia, os dados obtidos neste experimento não extraviaram as tolerâncias admitidas. O resultado do notável trabalho realizado por todos os grandes cientistas que estudaram os movimentos oscilatórios ao longo da história puderam ser observados. O experimento mostrou um resultado satisfatório, pois, dentro dos erros admitidos, cumpriu as previsões teóricas esperadas.

Conclui-se que a partir dos procedimentos anteriormente listados em materiais e métodos, obtemos os seguinte valor para k , k^*, r^2 e Δk:

$$k = 2{,}88$$

$$Me(k) = Me(B) \therefore k \pm Me(k) = 2{,}88 \pm 6{,}35 \times 10^{-3}$$

$$k^* = B_{estático} = 3{,}18$$

$$Me(k^*) = Me(B_{estático}) \therefore k^* \pm Me(k^*) = 3{,}18 \pm 0{,}02$$

$$r^2 = 0{,}99$$

$$\Delta k = \left|\frac{k - k^*}{k^*}\right| \times 100 \rightarrow \Delta k = \left|\frac{2{,}88 - 3{,}18}{3{,}18}\right| \times 100 \cong 9{,}4\%$$

Isso nos mostra que o experimento foi bem executado, pois o desvio percentual e a margem de erro das medidas foram bastante baixa; o coeficiente r^2está muito próximo de 1, assegurando que o coeficiente de determinação condiz com a realidade e o desvio percentual mostra que diante de tudo, obtivemos 9,4% de erro, valor esse bastante baixo e aceitável.

Não foi possível obter resultados perfeitos, pois, toda medida ou grandeza quando analisada experimentalmente contém erros, mas, como é possível observar na linha de tendência presente no gráfico os resultados encontrados estão numa margem de erro praticamente nula constatando a veracidade das previsões teóricas.

Referências Bibliográficas

MUKAI, H., FERNANDES, P.R.G. Manual de Laboratório de Física I - DFI/UEM, 2008 a 2017.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica –Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor, Vol.2- 5a Edição - São Paulo: Edgard Blücher, 2013.

KEITH, R. Symon - Mecânica (Quarta edição), Livro Texto.