Universidade Estadual de Maringá – Centro de Ciências Exatas

Ondas Estacionárias em Cordas Vibrantes

Relatório de Física Experimental II

Acadêmicos:

1. Giovanna Nogueira, RA 112491 – Física, turma F
2. Nathalia Castanho Max, RA 112492 – Física, turma F
3. Vitor Ferrari, RA 112481 – Física, Turma F

Maringá, 13 de Novembro de 2019

Ondas Estacionárias em Cordas Vibrantes

Relatório de Física Experimental II

Resumo

Uma onda pode ser entendida como uma perturbação que se propaga em um meio. Dentre as mais fundamentais propriedades associadas a uma onda está o transporte de energia sem envolver o arrasto do meio material onde ela se propaga. Neste experimento, estudaremos as características de ondas transversais que se propagam numa corda vibrante, particularmente daquelas que chamamos de ondas harmônicas estacionárias. Este tipo de onda é caracterizado por uma grande amplitude de vibração, e é uma manifestação de ressonância da corda com relação à excitação por uma força externa. Vamos notar que este sistema possui inúmeras frequências de ressonância.

Introdução

Desde a época que a ciência começou a estudar os movimentos oscilatórios, encontrou-se muitas dificuldades em se definir o que seria uma onda. Foi o filósofo grego Pitágoras de Samos (c.560-c.480) um dos primeiros a descobrir uma relação harmoniosa entre os comprimentos das cordas dos instrumentos musicais e a força aplicada nelas, relação essa que produzia combinações harmônicas de sons (altura). É oportuno registrar que essa descoberta levou Pitágoras a afirmar que as órbitas dos planetas formavam uma imensa Lira (instrumento musical nacional da Grécia) cujas cordas se curvavam em círculos. Assim parecia evidente que os intervalos entre as "cordas" orbitais seriam governados pelas leis harmônicas.

Portanto, para Pitágoras, o intervalo musical formado pela Terra e Lua era de um tom; da Lua a Mercúrio, havia um semitom; de Mercúrio a Vênus, também um semitom: de Vênus ao Sol, uma terça menor; de Sol a Marte, um tom; de Marte a Júpiter, um semitom: de Júpiter a Saturno, ainda um semitom; de Saturno à esfera das estrelas fixas, uma terça menor. Desse modo, a Escala Harmônica Pitagórica deve estar na mesma razão que os comprimentos das cordas (sob tensões iguais) que produzem as sete notas musicais: *dó, ré, mib, sol, lá, sib, si.* Observe que outros historiadores consideram uma outra escala diferente dessa (p.e.: *dó,ré, mi, fá, sol, lá, si*). [Arthur Koestler, O Homem e o Universo (IBRASA, 1989)].

Uma nova contribuição ao estudo da Acústica deve-se, provavelmente, ao artista e inventor Italiano Leonardo da Vinci (1452-1519) ao afirmar que: - O golpe em um sino produz um eco e provoca um movimento fraco em uma outra corda semelhante da mesma altura colocada no outro lado. Contudo, foi a partir do Século 17 que começaram os estudos quantitativos dos movimentos ondulatórios. Assim, em 1625, o matemático, filósofo e teólogo, o padre franciscano francês Marin Mersenne (1588-1648) observou que a frequência (número de ondulações por segundo) de uma corda vibrante de comprimento L, tensão T (força por unidade de comprimento) e densidade linear σ (massa por unidade de comprimento), satisfaz a seguinte expressão: (Em 1636, Mersenne publicou o livro Harmonie Universelle ("Harmonia Universal") no qual enumerou todas as melodias possíveis com até 64 sons não repetidos. Note que foi também de Mersenne a observação, em 1644, de que o período de um pêndulo é independente de sua amplitude, assim como, em 1646, ele foi o primeiro a determinar a duração de oscilação das figuras planas.

Hoje em dia a ciência define uma onda como a distribuição de energia no espaço e a trajetória que a mesma percorre. Ondas estacionárias são uma combinação de pulsos de onda que se interferem destrutiva e construtivamente, formando um padrão em que podem ser observados nós e anti-nós. Algumas cordas, quando tracionadas produzem sons. São ditas, portanto de cordas vibrantes. As cordas vibrantes possuem frequência, cujos módulos podem ser divididos em: 1 Harmonioso; 2 Harmonioso; 3 Harmonioso. Esses padrões observados são também conhecidos como modos normais de vibração. Eles dependem da tensão, densidade linear e comprimento da corda, além da frequência.

Em Física, ao estudarmos ondas, que são perturbações periódicas no tempo que se propagam oscilantes no espaço, consideramos as mecânicas e as eletromagnéticas. As ondas mecânicas necessitam de um meio para se propagar já as eletromagnéticas não, estas se propagam no vácuo. Considere uma corda no qual uma extremidade se encontra fixa num suporte e a outra ligada numa fonte de ondas. Se a fonte produzir ondas com frequência constante, elas sofrerão reflexão na extremidade fixa e, então ocorrerá uma interferência da onda incidente com a refletida. Essa onda terá a forma representada na figura;

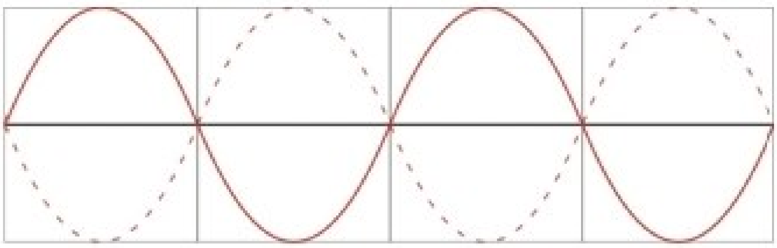


Figura 1 - Ondas Estacionárias

Se excitarmos um ponto deste fio por meio de um alto-falante, toda a extensão do fio entrará em vibração. São as chamadas Oscilações Forçadas. Quando a frequência de vibração emitida pelo alto-falante for igual a uma das frequências próprias do fio, dizemos que a vibração e o fio estão em ressonância. Neste caso, a amplitude de vibração do fio é máxima e formam-se ondas estacionárias.

A onda formada terá a forma ora da linha contínua, ora da linha tracejada, formando assim a onda estacionária. Definimos então ondas estacionárias como sendo aquela obtida pela interferência de duas ondas iguais que se propagam no mesmo meio e em sentidos contrários. Entende-se por ondas iguais aquelas que possuem mesma frequência, mesma amplitude, mesmo comprimento de onda, mesma velocidade.

- ***Ondas estacionárias*** *- são ondas que possuem um padrão de vibração estacionário. Formam-se a partir de uma superposição de duas ondas idênticas mas em sentidos opostos, normalmente quando as ondas estão confinadas no espaço como ondas sonoras em um tubo fechado e ondas de uma corda com as extremidades fixas. Esse tipo de onda é caracterizado por pontos fixos de valor zero, chamados de nodos, e pontos de máximo também fixos, chamados de antinodos. São ondas resultantes da superposição de duas ondas de mesma frequência, mesma amplitude, mesmo comprimento de onda, mesma direção e sentidos opostos.*

As principais propriedades relacionadas a uma onda são: a velocidade de propagação de uma onda depende do material em que ela se propaga e a tensão que está submetida; o meio através do qual a onda é transmitida não se desloca no espaço, as partículas que compõem este meio oscilam em torno de suas respectivas posições; a energia fornecida para a ocorrência de um movimento ondulatório é transmitida sem haver o transporte de matéria. Quando duas ondas se propagam em um mesmo meio, uma não interfere na propagação da outra, porém os deslocamentos dessas ondas em cada ponto se somam de modo a formar uma onda resultante, esse é o princípio da superposição de ondas.

Quando essas ondas possuem a mesma amplitude de oscilação, mesmo comprimento de onda e mesma velocidade, porém se propagam em sentidos opostos, ocorre a formação de uma onda estacionária. Em uma onda estacionária existem pontos particulares onde a corda não se move, ou seja. sua amplitude é zero, são chamados de nós. Entre dois nós consecutivos existe um ponto chamado ventre, onde a amplitude do movimento é máxima.

Fundamentação teórica

Para que se possa colocar a frequência em relação ao número de ventres, necessitamos saber como é a equação de uma onda progressiva. Esta equação (considerando-se a propagação na direção de x_+), em termos da amplitude (y_m), número de onda ($k = 2\pi/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda), frequência angular (ω) e tempo (t), é dada pela equação :

$$y = y_m \cdot \sin(k \cdot x - \omega \cdot t)$$

Uma onda estacionária se forma pela superposição de duas ondas que tenham a mesma frequência, velocidade e amplitude e que se propaguem em sentidos opostos. Assim, a equação final de duas ondas superpostas $\big(y_1 = y_m \cdot sen(k \cdot x - \omega \cdot t)\big)$ e $(y_2 = y_m \cdot sen(k \cdot x + \omega \cdot t))$, levando em conta o princípio de superposição de uma onda,$y = y_1 + y_2$, temos que

$$y = 2 \cdot y_m \cdot \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Na onda estacionaria cada ponto (cada valor de x), tem sua amplitude dada por:

$$y_m = 2 \cdot y_m \cdot \sin(k \cdot x)$$

Na equação anterior, temos que a amplitude será máxima, e igual a $2 \cdot y_m$, para:

$$k \cdot x = \frac{\pi}{2}; \frac{3 \cdot \pi}{2}; \frac{5 \cdot \pi}{2}; \cdots, ou$$

$$x = \frac{\lambda}{4}; \frac{3 \cdot \lambda}{4}; \frac{5 \cdot \lambda}{4}, \cdots$$

Esses pontos são denominados de antinodos ou ventres, estando distanciados entre si de meio comprimento de onda ($\lambda/2$)

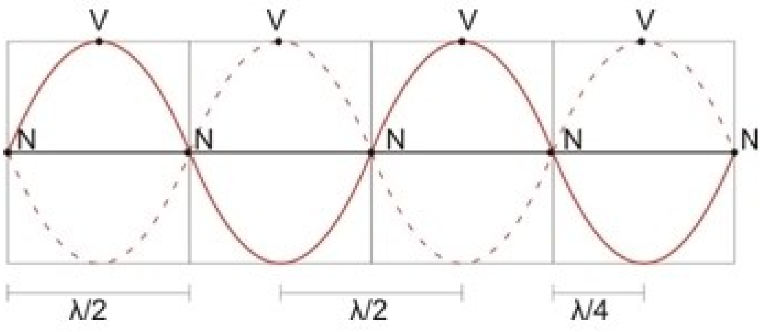


Figura 2 - Figura esquemática de uma onda Estacionária, onde L é o comprimento do fio, λ o comprimento da onda.

Também pela equação $y_m = 2 \cdot y_m \cdot \sin(k \cdot x)$, temos que a amplitude será mínima, e igual a zero, quando:

$$k \cdot x = \pi, 2 \cdot \pi, 3 \cdot \pi, \cdots, ou$$

$$x = \frac{\lambda}{2}; \ \lambda; \ \frac{3 \cdot \lambda}{2}; \cdots$$

Tais pontos denominam-se nodos, e também estão distanciados entre si de meio comprimento de onda (Fig. 2). Em nosso experimento, usaremos um fio de comprimento (L), fixo em ambas as extremidades. Uma das extremidades é presa a um alto-falante que vibra com frequência (f) e amplitude pequena e a outra extremidade ligada a uma massa, após passar por uma roldana (Fig. 3).

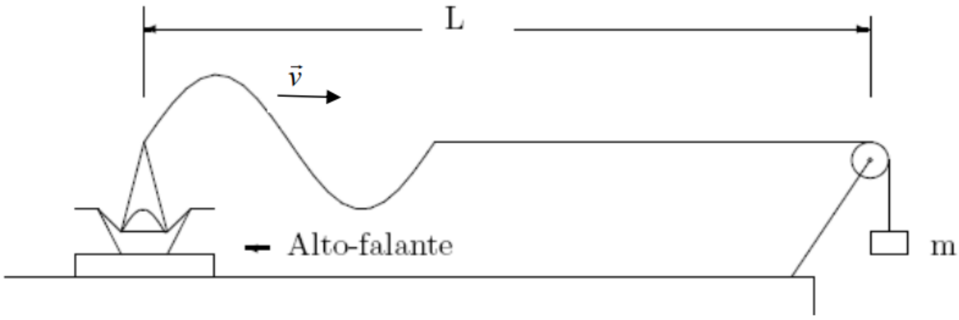


Figura 3 - Figura esquemática da montagem experimental. Sendo m a massa suspensa, $\vec{v}$ a velocidade com que a onda se propaga, e L o comprimento do fio.

As ondas provocadas pelo alto-falante percorrem o fio, são invertidas pela reflexão fixa, no suporte em L invertido, e retornam à extremidade inicial com uma variação de fase de 180°. Como a amplitude do alto-falante é pequena, ele reflete a onda como se fosse um suporte fixo, e a onda é novamente invertida voltando a percorrer o fio no sentido inicial. Como as ondas incidentes e refletidas possuem a mesma frequência e se propagam em sentidos opostos, sob condições apropriadas, elas podem combinar-se produzindo ondas estacionárias. Nesse momento, o fio e o alto-falante estão em ressonância, sendo o comprimento (L) do fio um múltiplo inteiro de meios comprimentos de onda, Fig. (2). Portanto, na ressonância:

$$L = n \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

Onde $n = 1, 2, 3, \cdots$, representa o número de ventres. Isto quer dizer que, para valores diferentes de (n), teremos vários modos de vibração (ou ressonância) do fio. A velocidade com a qual a onda percorre um meio é determinada pelas propriedades deste.

Para o caso de um fio longo e flexível, é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

Em que F é a tensão aplicada no fio, e ρ a massa por unidade de comprimento.

$$\rho = \frac{m}{L}$$

O comprimento de onda (λ) de uma onda progressiva é dado pela distância entre dois máximos sucessivos, isto é, a distância em que a forma da onda se repete, num intervalo de tempo igual ao período (T). Dessa forma, a relação entre a frequência f, o comprimento de onda λ, e a velocidade v, de uma onda harmônica é dada pela equação:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Combinando as equações:

$$L = n \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right);\ v = \sqrt{\frac{F}{\rho}};\ \lambda = \frac{v}{f}$$

Temos que a expressão geral para as frequências de vibração (ou ressonância) do fio, também chamados de harmônicos:

$$f_n = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

A equação acima é conhecida como fórmula de Lagrange. Para $n = 1$, tem-se o 1° harmônico ou frequência fundamental. As outras frequências chamadas de 2° harmônico, 3° harmônico, etc..., (Fig. 4) são múltiplos da frequência fundamental, ou seja,

$$f_n = n \cdot f_1 \quad com \quad f_1 = \frac{1}{2 \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\rho}}$$

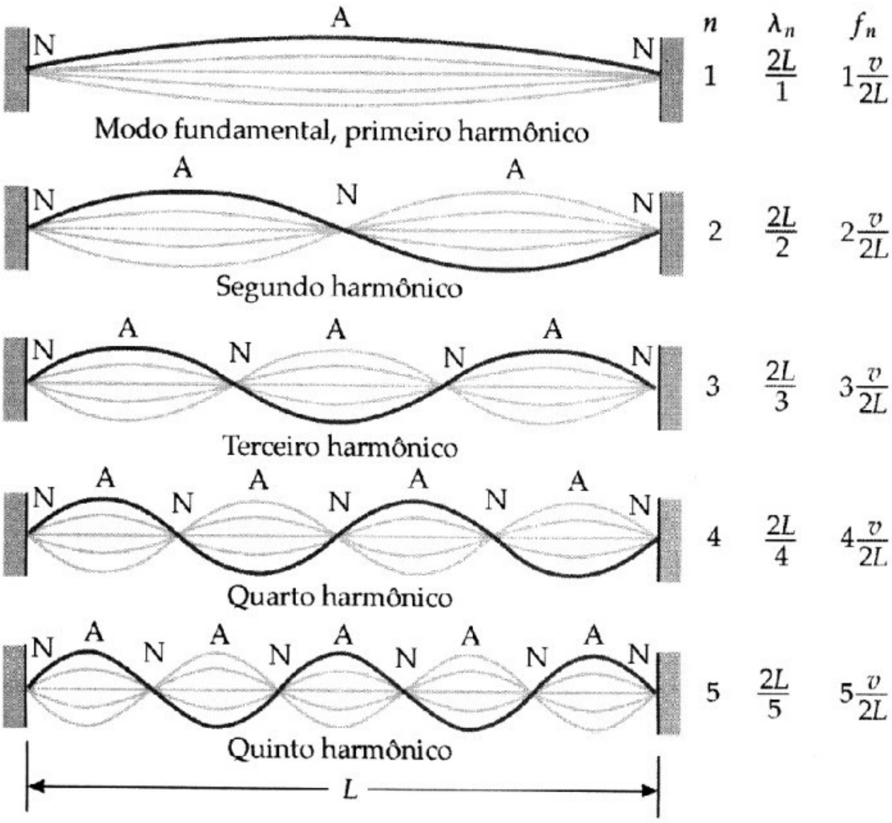


Figura 4 - Figura esquemática das ondas para as frequências de ressonância, número de ventres (n) e os harmônicos.

Procedimento e dados experimentais

Materiais Utilizados

- Fio do tipo cordonê;
- 5 massa de valores diferentes;
- Suporte lateral;
- Trena;
- Balança;
- Alto-falante;
- Gerador de funções;
- Amplificador;

Montagem Experimental

A montagem consiste em esticar um papel de fundo escuro, para dar contraste, sobre a mesa, em uma das extremidades da mesa fixar um suporte em forma de "L" para apoiar o fio. Na outra extremidade deve ser colocado o alto falante, conectado com o gerador de funções e com o amplificador. No centro do alto-falante encontramos uma espécie de agulha vertical, por onde deve ser passado e preso o fio. na outra ponta do fio (após passado pelo suporte em L) deve ser preso o suporte de massas, e nele colocado as massas desejadas para cada leitura de frequência.

Procedimento Experimental

1 – Afira os valores das massas em ordem crescente de tamanho e anote os seus valores na Tabela (1);

2 – Monte o sistema, como especificado na (Fig. 3), utilizando a menor massa e adequando as escalas dos instrumentos;

3 – Alinhe o sistema tal que o fio fique paralelo à mesa, e alinhado com relação a ranhura do suporte em L invertido;

4 – Selecione a escala de $50Hz$ no gerador, mantenha o amplificador na metade da escala, e a partir do zero, aumente lentamente a frequência do gerador até o fio entrar em ressonância, no modo de vibração fundamental ($n = 1$) – Figura 4. Anote o valor desta frequência na Tabela (1). Caso o botão do gerador já esteja no limite, aumente a escala para $500Hz$, ao ocorrer à vibração o mesmo deve ser silencioso, caso fique realizando zunidos, diminua a escala do amplificador, ou gerador.

Resultados

A tabela abaixo possui medidas experimentais sobre ondas estacionárias em cordas vibrantes, que foram obtidos através do aparato experimental apresentado em sala (alto-falante, gerador de funções e etc.). As quais apresentam (f_1) em hertz – frequência de oscilação e (F) em Newton - massa do peso suspenso.

$f_1\ (Hz)$	f_1^2	$F\ (N)$
16,4	269,0	0,49
19,6	384,2	0,72
21,7	470,9	0,92
24,3	590,5	1,12
26,4	697,0	1,30

Tabela 1 - Medidas Experimentais

Para representar os dados acima, obtidos experimentalmente em uma gráfico (plano milímetro) é necessário definir um módulo de escala para que todos os valores caibam dentro do gráfico, para isso iremos utilizar a equação abaixo:

$$Módulo\ de\ Escala = \frac{intervalo\ disponivel\ no\ papel\ milímetrado}{Maior\ valor\ obtido\ experimentalmente}$$

Iremos usar os dois maiores dados obtidos entre os dois experimentos para definirmos uma escalar, de modo que caibam os dois gráficos em um único plano:

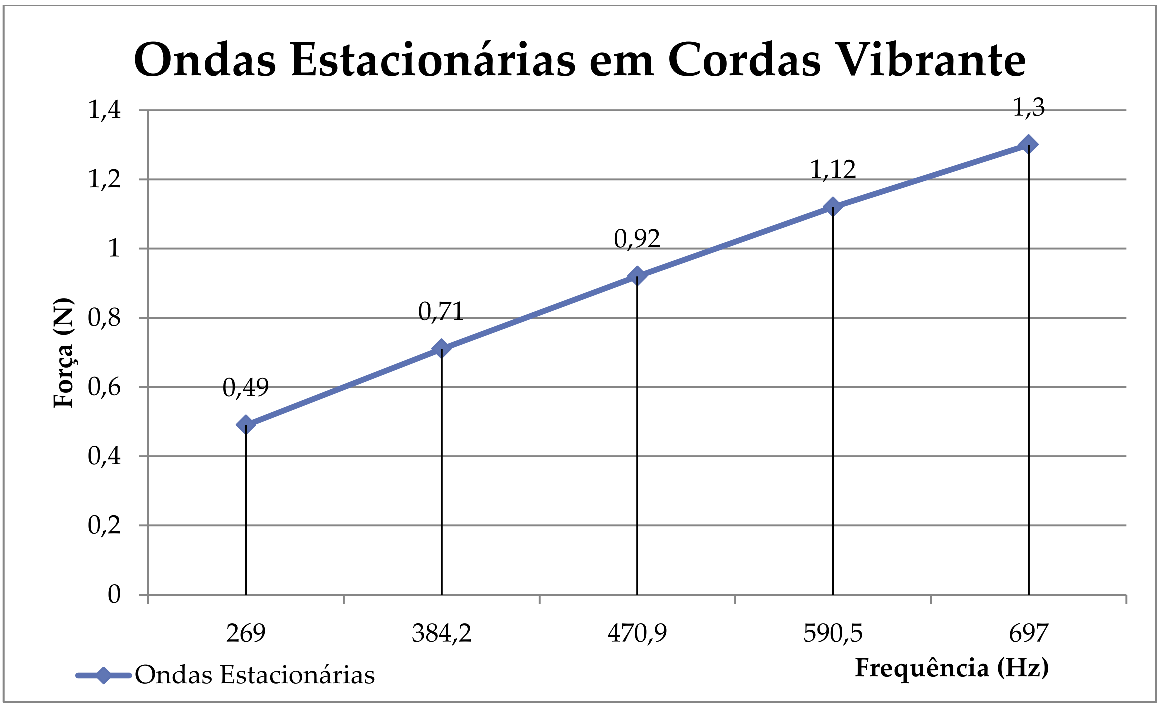
$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ x\ (f^2) = \frac{200}{750 - 250} = 0{,}4$$

$$\boldsymbol{Me}\ eixo\ y\ (F) = \frac{150}{1{,}4 - 0{,}4} = 150$$

$\boldsymbol{f_1^2} \times \boldsymbol{Me_x}(\ \boldsymbol{mm/Hz})$	$\boldsymbol{F}\ (\boldsymbol{N}) \times \boldsymbol{Me_y}(\boldsymbol{mm/N})$
$(269{,}0 - 250) \times 0{,}4 = 8$	$(0{,}49 - 0{,}4) \times 150 = 14$
$(384{,}2 - 250) \times 0{,}4 = 54$	$(0{,}72 - 0{,}4) \times 150 = 48$
$(470{,}9 - 250) \times 0{,}4 = 68$	$(0{,}92 - 0{,}4 \times 150 = 78$
$(590{,}5 - 250) \times 0{,}4 = 136$	$(1{,}12 - 0{,}4) \times 150 = 108$
$(697{,}0 - 250) \times 0{,}4 = 179$	$(1{,}30 - 0{,}4) \times 150 = 135$

Tabela 2 - Valores prontos para serem plotados em um plano milimetrado

No plano a seguir está representada a tabela 2, sendo (f^2 – frequência do harmônico) o eixo das coordenadas – eixo l e (F – o peso da massa suspensa) o eixo das abcissas – eixo x. Também se encontra em anexo ao final deste documento um gráfico com os dados plotados e a reta de ajuste traçada.



Ao trabalharmos com dados obtidos experimentalmente, devemos levar em consideração diversos tipos de erros que podem aparecer durante o experimento, como, por exemplo, atrito com o ar, atrito entre o fio e o ponto fixo e entre outros. Ao olharmos o gráfico feito à mão, vemos que nem todos os pontos ficam alinhados como uma reta, para isso, existe um método em que conseguiremos traçar uma reta de ajuste, esse método recebe o nome de "método dos mínimos quadrados". Para isso é necessário considerar a equação da reta $F = A + B \cdot f_1^2$, onde:

Seu coeficiente linear (A), é dado pela seguinte equação:

$$A = \frac{\sum x \sum t^2 - \sum t \sum tx}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

E seu coeficiente angular (B), é dado pela seguinte equação:

$$B = \frac{n \sum tx - \sum t \sum x}{n \sum t^2 - (\sum t)^2}$$

Utilizando os dados da tabela 1, temos que da equação da reta $F = A + B \cdot f_1^2$, onde F representa o peso da massa suspensa e f_1^2 a frequência.

Comparando

$$F = 4 \cdot \mu \cdot L^2 \cdot f_1^2$$

Com a equação da reta $F = A + B \cdot f_1^2$, temos que:

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B = 4 \cdot \mu \cdot L^2$$

Tendo feito o cálculo dos coeficientes pela regressão linear, obtemos:

$A = -5{,}40031476 \times 10^{-3}$

$B = 1{,}897910754 \times 10^{-3}$

$r^2 = 0{,}996152443$

$Sxx = 113053{,}788$

$Syy = 0{,}4088$

$Sxy = 214{,}566$

$QMR = 5{,}242937191 \times 10^{-4}$

$Me(A) = 0{,}109476811$

$Me(B) = 2{,}166930306 \times 10^{-4}$

$L_{corda} = 1{,}47m \;\rightarrow 147cm$

Conclusão

Numa análise mais rigorosa, percebe-se que alguns fatores não podem ser desprezados na conclusão final da análise dos dados. Alguns desses fatores são: a resistência do ar contra a superfície da plataforma oscilante, o erro humano na imprecisão da configuração dos equipamentos (gerador de funções), possíveis deformações da corda que ligava a massa suspensa, interferências nas leituras do equipamento e até mesmo o atrito entre o eixo do suporte que ligava à massa suspensa. Mesmo que quase não houvesse atrito entre e a plataforma, possível inclinação na plataforma e até mesmo alguma anomalia no autofalante podem ter interferido nos resultados. Inúmeros são os fatores que podem atuar como interferências no experimento mesmo fazendo o máximo para evitá-los.

Todavia, os dados obtidos neste experimento não extraviaram as tolerâncias admitidas. O resultado do notável trabalho realizado por todos os grandes cientistas que estudaram os movimentos oscilatórios ao longo da história puderam ser observados. O experimento mostrou um resultado satisfatório, pois, dentro dos erros admitidos, cumpriu as previsões teóricas esperadas.

Conclui-se que a partir dos procedimentos anteriormente listados em materiais e métodos, obtemos os seguintes valores para μ , μ^*, r^2 e $\Delta\mu$:

$$\mu \pm Me(\mu) = 2{,}195741073 \times 10^{-4} \pm 2{,}166930306 \times 10^{-4}$$

$$\mu^* = 2{,}47 \times 10^{-4}$$

$$\Delta\mu = \left|\frac{\mu - \mu^*}{\mu^*}\right| \times 100 \rightarrow \Delta\mu = \left|\frac{10^{-4} \times (2{,}20 - 2{,}47)}{2{,}47 \times 10^{-4}}\right| \times 100$$

$$\Delta\mu = 1{,}093117409\ \%$$

$$r^2 = 0{,}99$$

Isso nos mostra que o experimento foi bem executado, pois o desvio percentual e a margem de erro das medidas foram bastante baixa; e o coeficiente r^2está muito próximo de 1, assegurando que o coeficiente de determinação condiz com a realidade.

Não foi possível obter resultados perfeitos, pois, toda medida ou grandeza quando analisada experimentalmente contém erros, mas, como é possível observar na linha de tendência presente no gráfico os resultados encontrados estão numa margem de erro praticamente nula constatando assim o objetivo da prática de comprovar a velocidade constante do movimento observado no experimento.

Referências Bibliográficas

MUKAI, H., FERNANDES, P.R.G. Manual de Laboratório de Física I - DFI/UEM, 2008 a 2017.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica –Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor, Vol.2- 5a Edição - São Paulo: Edgard Blücher, 2013.