GEO - Geometrisches Mittel

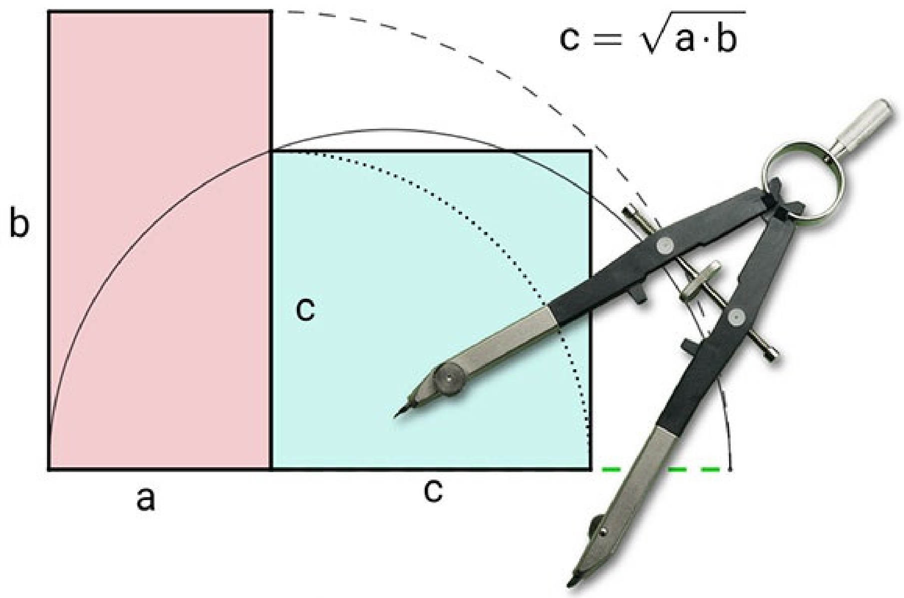


Abb: Petrus3743, CC BY-SA 4.0 , via Wikimedia Commons

Lernziele und Überblick

In dieser Lerneinheit betrachten wir das geometrische Mittel. Es werden ergänzend Berechnungsformeln für das gewichtete Mittel vorgestellt.

Lernziele

Nach dem Durcharbeiten dieser Lerneinheit sollen Sie:

- beschreiben können für welche Daten das geometrische Mittel benutzt wird,
- den Begriff geometrisches Mittel erklären und das Lagemaß berechnen können,
- das gewichtete geometrische Mittel berechnen können,
- die Eigenschaften des geometrischen Mittels erläutern können,

Gliederung der Lerneinheit

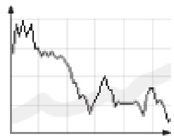
Zeitbedarf und Umfang

Für die Durcharbeitung dieser Lerneinheit benötigen Sie ca. 120 Minuten und für die Übungen ca. 100 Minuten.

1 Das geometrische Mittel

Das geometrische Mittel $\overline{x}_g$ (sprich: „x quer g") ist wie das arithmetische Mittel ein statistisches Lagemaß. Es gibt den Durchschnitt relativer, z. B. prozentualer Veränderungen wieder. Die wichtigste Anwendung des geometrischen Mittels findet man daher beispielsweise bei der Berechnung durchschnittlicher

- Wachstumsfaktoren,
- Wachstumsraten,
- Zuwachsraten,
- Zinsfaktoren,
- Lohnerhöhungen,
- Produktionssteigerungen,
- Belegschaftsverminderungen,
- Bevölkerungsverminderungen,
- Preissteigerungen,



die für mehrere Zeitperioden, etwa Jahre, Monate usw. beobachtet werden. Für solche Fälle ist es nicht sinnvoll, das arithmetische Mittel als Maß für einen Durchschnittswert zu verwenden, weil die Gesamtänderung nicht durch eine Summe, sondern durch ein Produkt beschrieben wird.

Die Rechnung sieht ganz einfach aus:

Beispiel

Geometrisches Mittel - ein einfaches Beispiel

Das geometrische Mittel der Zahlen 2, 4, 4, 8 ist:

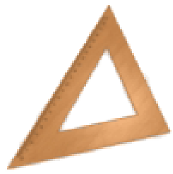
$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8} = \sqrt[4]{256} = 4$$

1.1 Das geometrische Mittel (Definition)

Den Rechenvorgang des Beispiels können wir leicht allgemein aufschreiben.

Definition

Geometrisches Mittel



Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Ausprägungen eines verhältnisskalierten Merkmals X, mit $x > 0$ dann heißt die n-te Wurzel aus dem Produkt aller Werte $\overline{x}_g$ (sprich: „x quer g") geometrisches Mittel.

In Formeln:

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

Betrachten wir ein Rechenbeispiel.

Beispiel

Aktienportfolio

Stellen Sie sich vor als erfolgreiche Wirtschaftsingenieurin oder erfolgreicher Wirtschaftsingenieur besitzen Sie ein Aktienportfolio von 100.000 Euro. Im ersten Jahr steigt der Wert um 10 % auf 110.000 €, im zweiten um 20 % auf 132.000 €, im dritten Jahr gibt es einen Wertrückgang von 8 % auf 121.440 €. Schließlich gibt es nochmals einen Wertanstieg um 12 % auf rund 136.013 €. Dieser Endbetrag ergibt sich aus den einzelnen Wachstumsfaktoren:

$$100.000\,€ \cdot (1 + 0{,}1) \cdot (1 + 0{,}2) \cdot (1 - 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}12) = 136.012{,}80$$

Wie groß war das **durchschnittliche** Wachstum in diesen 4 Jahren?

$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{1{,}1 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}92 \cdot 1{,}12} = 1{,}079928$$

Der durchschnittliche Wachstumsfaktor in diesen vier Jahren war 1,079928, das entspricht einer Wachstumsrate von 7,9928 %.

Um zum richtigen Ergebnis zu gelangen, müssen Sie zur Berechnung des geometrischen Mittels stets den Wachstumsfaktor benutzen, **nicht** die Rate!

Wäre Ihr Aktienportfolio in diesen vier Jahren also gleichmäßig um 7,9928 % gewachsen, so hätte es am Ende dieser Zeit ebenfalls einen Wert von rund 136.013 €. Prüfen wir unser Ergebnis einmal nach:

$100.000\,€ \cdot 1{,}079928^4 = 136.013$ €. Stimmt genau!

Betrachten wir gleich noch ein zweites Beispiel.

Beispiel

Umsatzentwicklung Reiseunternehmen

Die Zeitreihe in der folgenden Grafik zeigt die Entwicklung der Umsätze für die Wintersaison des Reiseunternehmens Hagen Alpin Tours in den Jahren 2014 bis 2022.

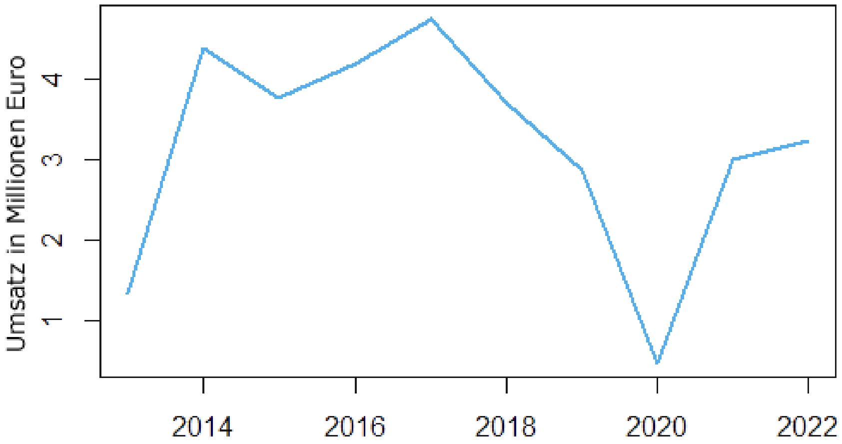


Abb.: Umsatzentwicklung, Daten: Hagen Alpin Tours, https://www.hagenalpintours.de

Die folgende Tabelle zeigt die genauen Zahlen – inklusive des Wachstumsfaktors:

#	Jahr	Umsatz in €	Wachstumsfaktor
1	2013	1.325.653,1	
2	2014	4.374.629,2	3,2999803
3	2015	3.758.411,6	0,8591383
4	2016	4.192.117,9	1,1153962
5	2017	4.740.855,7	1,1308975
6	2018	3.699.684,2	0,7803832
7	2019	2.867.372,4	0,7750317
8	2020	471.642,1	0,1644858
9	2021	2.997.647,8	6,3557684
10	2020	3.238.218,5	1,0802532

Um die Frage zu beantworten wie groß die Umsatzsteigerung in diesen 10 Jahren durchschnittlich war, berechnen wir das geometrische Mittel. Den Radikand haben wir für die Darstellung gekürzt. Sie können es aber gerne nachrechnen.

$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{3{,}2999803 \cdot 0{,}8591383 \cdot \ldots \cdot 1{,}0802532} \approx 1{,}104326$$

Der durchschnittliche Wachstumsfaktor liegt bei rund 1,1, d. h. der Umsatz ist im Durchschnitt 10 % pro Jahr gewachsen. Wir können unser Ergebnis prüfen in dem wir nachrechen:

$1.325.653{,}1\,€ \cdot 1{,}104326^9 \approx 3.238.214\,€$. Stimmt!

Die geringe Abweichung von 4,50 Euro entsteht durch das Runden des Wachstumsfaktors.

Weitere interessante Beispiel und Anmerkungen zum geometrischen Mittel, finden sie auf dieser Seite:

https://www.statisticshowto.com

1.2 Übungen zum geometrischen Mittel

In den folgenden Übungen sollen Sie sich mit der Berechnung des geometrischen Mittels und den Ergebnissen vertraut machen.

Berechnen

Übung GEO-01

Bestimmung des geometrischen Mittels

Bestimmen Sie das geometrische Mittel für die folgenden Merkmalsausprägungen: 3, 3, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 7, 8, 9.

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

Berechnen

Übung GEO-02

Produktionssteigerung

Dem Jahresbericht eines Betriebes entnimmt man die folgenden Angaben über die Produktionssteigerung in drei aufeinander folgenden Jahren: 6 %, 10 %, 12 %. Berechnen Sie die durchschnittliche jährliche Produktionssteigerung.

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

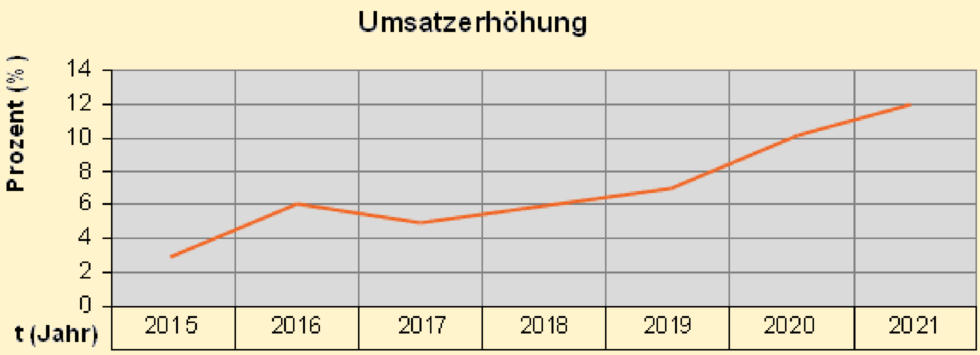
Berechnen

Übung GEO-03

Umsatzentwicklung

Die Umsatzentwicklung eines Betriebes hat die folgenden Angaben in sieben aufeinander folgenden Jahren:

Jahr	Umsatzsteigerung (%)
2015	3
2016	6
2017	5
2018	6
2019	7
2020	10
2021	12



Bestimmen Sie die durchschnittliche jährliche Umsatzsteigerung (in %).

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 10 Minuten

1.3 Das gewichtete geometrische Mittel

Das gewichtete arithmetische Mittel haben Sie bereits in der Lerneinheit *„ARM, Kap 2.3“* kennengelernt. Hier folgt nun die Entsprechung für das gewichtete geometrische Mittel. Die Formel zur Berechnung gewichteter Mittel erleichtert das Rechnen wenn gleiche Werte mehrfach in einem Datensatz auftreten.

Definition

Gewichtetes geometrisches Mittel bei absoluten Häufigkeiten

Das gewichtete geometrische Mittel für eine Stichprobe $x_1, \ldots, x_k$ mit $x_i > 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$, ist gegeben durch:

$$\overline{x}_g = \sqrt[n]{x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i}}$$

Hinweis: $n = \sum_i n_i$

$n_1, \ldots, n_k$ sind die **absoluten** Häufigkeiten der einzelnen x-Werte.

Formeln

Gewichtetes geometrisches Mittel bei relativen Häufigkeiten

Sind die relativen Häufigkeiten $h_1, \ldots, h_n$ der Merkmalsausprägungen $x_i, \ldots, x_n$ gegeben, berechnet sich das gewichtete geometrische Mittel wie folgt:

$$\overline{x}_g = x_1^{h_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{h_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{h_i}$$

Schauen wir uns das mal ein einem Beispiel an.

Beispiel

Indexmiete

Bei einer Indexmiete entwickelt sich die Miete parallel zur Inflation. Natascha hat vor 7 Jahren einen Indexmietvertrag für ihre Dreizimmerwohnung abgeschlossen. Wie hoch ist die Teuerungsrate durchschnittlich gewesen?

Jahr	Inflation %
1	3,1
2	0,5
3	1,4
4	1,4
5	1,5
6	0,5
7	0,5

Wir haben in drei Jahren 0,5 % und in zwei Jahren 1,4 % Inflation. Wir berechnen das geometrische Mittel mit den absoluten Häufigkeiten:

$$\overline{x}_g = (1{,}031 \cdot 1{,}005^3 \cdot 1{,}014^2 \cdot 1{,}015)^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}013$$

Im Durchschnitt ist die Miete in den letzten sieben Jahren um 1,3 % jährlich gestiegen.

1.4 Vergleich geometrisches und arithmetisches Mittel

Warum aber müssen wir bei prozentualen - also relativen Veränderungen das geometrische Mittel benutzen und warum führt hier das arithmetische Mittel zu falschen Ergebnissen? Den Antworten auf diese Fragen möchten wir uns anhand von Beispielen nähern.

Beispiel

Umsätze Hotel

In den Jahren 2017- 2021 macht ein Hotel folgende Umsätze:

Jahr	Umsatz in €	Wachstumsrate in %	Wachstumsfaktor in %
2017	20.000.000		
2018	18.600.000	-0,07	0,93
2019	21.204.000	14	1,14
2020	22.794.300	7,5	1,075
2021	24.617.844	8	1,08

Angegeben ist das Wachstum im Vergleich zum Vorjahr

Wie groß ist die nun durchschnittliche Wachstumsrate bzw. der durchschnittliche Wachstumsfaktor? Wir rechnen dieses Beispiel sowohl mit dem geometrischen als auch mit dem arithmetischen Mittel.

Geometrisches Mittel

Wenn wir richtigerweise das geometrische Mittel berechnen, müssen wir darauf achten die Wachstumsfaktoren bei der Berechnung zu verwenden.

$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{0{,}93 \cdot 1{,}14 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}08} = 1{,}053307$$

Wir erhalten einen durchschnittlichen Wachstumsfaktor vom 1,053307 und eine durchschnittliche Wachstumsrate von 5,3307 %.

Probe: Prüfen wir ob wir mit diesem durchschnittlichen Wachstumsfaktor vom Umsatz des Jahres 2017 auf den Umsatz im Jahr 2021 gelangen:

$$20.000.000\,€ \cdot 1{,}053307^4 = 24.617.844\,€$$

Unsere Berechnung stimmt also. ✔

Arithmetisches Mittel

Berechnen wir fälschlicherweise das arithmetische Mittel, sieht die Rechnung wie folgt aus:

$$\overline{x} = \frac{1}{4} \cdot (0{,}93 + 1{,}14 + 1{,}075 + 1{,}08) = 1{,}05625$$

Wir erhalten einen durchschnittlichen Wachstumsfaktor vom 1,05625 und eine durchschnittliche Wachstumsrate von 5,625 %. Der Unterschied zum geometrischen Mittel scheint zunächst gering zu sein.

Probe: Berechnen wir aber mit diesem „falschen“ Wachstumsfaktor den Umsatz in 2021 kommen wir zu diesem Ergebnis:

$$20.000.000\,€ \cdot 1{,}05625^4 = 24.894.126\,€$$

Die Differenz zum tatsächlichen Umsatz in 2021 liegt bei 24.894.126 € - 24.617.844 € = 276.282 €. Rechnen wir also fälschlich mit dem arithmetischen Mittel verkalkulieren wir uns um **276.282** Euro.

Alles andere als Peanuts! ✘

Das arithmetische Mittel in dieser Beispielrechnung ist größer als das geometrische Mittel. Ganz allgemein gilt:

Hinweis

Das arithmetische Mittel ist **stets** größer als oder gleich dem geometrischen Mittel:

$$\overline{x}_g \leq \overline{x}$$

Jetzt sind Sie wieder dran. Versuchen Sie die Übung zu lösen.

Berechnen

Übung GEO-04

Wasserstoffauto

Im Jahr 2020 kostete ein Wasserstoffauto 80.000 Euro. Aufgrund von erhöhten Preisen der Zulieferer verteuert es sich 2021 um 10 %. Im Jahr darauf kann der Preis aufgrund von staatlichen Subventionen wieder um 10 % gesenkt werden.

1. Kostet das Auto 2022 wieder so viel wie zuvor, also 80.000 Euro? Wenn nein, wieviel kostet das Auto 2022?
2. Beweisen Sie durch Berechnung, dass das arithmetische Mittel hier zu falschen Ergebnissen führt.

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

Zum Vergleich zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel hier noch ein Zitat aus einem interessanten Artikel zu diesem Thema aus AnlegerPlus von Dr. Marko Gränitz.

> *„Auf den ersten Blick sind Renditeberechnungen ganz einfach, aber im Detail dann doch kompliziert – vor allem, wenn es um Durchschnittsrenditen geht. Im einfachsten Fall werden diese arithmetisch als Mittelwert aller Jahresrenditen berechnet. Für den DAX ergab sich auf diese Weise in den 30 Jahren von 1990 bis 2019 eine durchschnittliche Rendite von 9,67 % pro Jahr. Doch das ist nicht die jährliche Wachstumsrate, die inklusive Zinseszinseffekt vom Start- auf den Endwert der Zeitreihe führt. Diese wahre, geometrische Durchschnittsrendite beträgt für den gleichen Zeitraum nur 6,9 %.(…) „Korrekt“ aus Sicht des Anlegers ist deshalb die geometrische Rendite. (…) In der Praxis werden aber gern die arithmetischen Durchschnittsrenditen angegeben, da diese stets höher sind und deshalb einen besseren Eindruck vermitteln.“*

Dr. Marko Gränitz, AnlegerPlusAusgabe, 8/2022, 3.9.2022, Kapital Medien GmbH
https://anlegerplus.de/renditeberechnungen

1.5 Eigenschaften des geometrischen Mittels

Wie schon beim Median und dem arithmetischen Mittel ist es wichtig, dass Sie relevante Eigenschaften des geometrischen Mittels kennen und verstehen, um es sinnvoll einzusetzen und die Ergebnisse Ihrer Berechnung einordnen zu können.

Eigenschaft 1

Das geometrische Mittel ist nur für Werte $x > 0$ definiert und sinnvoll. Keiner der Werte darf negativ sein, da sonst ein negativer Term unter der Wurzel steht und es keine Lösung in den reellen Zahlen gibt. Ist einer der Werte gleich null wird das geometrische Mittel selbst null.

Eigenschaft 2

Der Logarithmus des geometrischen Mittel $\overline{x}_g$ ist gleich dem arithmetischen Mittel der logarithmierten Werte:

$$\log \overline{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) = \overline{\log(X)}$$

Diese Eigenschaft beschreibt den Zusammenhang zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel.

Beispiel

Rendite

Eine Firma erzielte in den Jahren 2018-2021 folgende Renditen.

Jahr	Rendite	Wachstumsfaktor	Logarithmierter Wachstumsfaktor
2018	1,84	1,0184	0,0079
2019	0	1	0
2020	1,01	1,0101	0,0044
2021	1,3	1,03	0,0128
		∑	0,0251

$\overline{\log(X)} \approx \frac{1}{4} \cdot 0{,}0251 = 0{,}006275 = \log \overline{x}_g \Rightarrow \overline{x}_g \approx 1{,}015$

Die durchschnittliche Rendite für die Firma lag in diesen Jahren bei 1.5 %
Alternativ können wir auch wie bisher das geometrische Mittel errechnen:

$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{1{,}0184 \cdot 1 \cdot 1{,}0101 \cdot 1{,}03} \approx 1{,}015$$

Eigenschaft 3: Schwerpunkt

Durch die Schwerpunkteigenschaft (Siehe *„ARM* *Kap. 3.1**“*) eignet sich das geometrische Mittel als Mittelwert für Wachstumsfaktoren!

Schwerpunkt

Schwerpunkteigenschaft

Für das geometrische Mittel gilt:

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\overline{x}_g} = 1$$

Wir können diese Eigenschaft einmal an unserem Hotelbeispiel aus Kapitel 1.4 überprüfen.

Beispiel

Umsätze Hotel

Aus dem Beispiel kennen Sie bereits die Umsätze aus den Jahren 2017 bis 2021 und die Zuwächse im Vergleich zum Vorjahr.

Jahr	Umsatz in €	Wachstumsrate in %	Wachstumsfaktor in %
2017	20.000.000		
2018	18.600.000	-0,07	0,93
2019	21.204.000	14	1,14
2020	22.794.300	7,5	1,075
2021	24.617.844	8	1,08

Wir hatten dort in vier aufeinander folgenden Jahren diese Wachstumsfaktoren: 0,93 ; 1,14; 1,075; 1,08 was zu einem mittleren Wachstumsfaktor von $\overline{x}_g$ = 1{,}053307 geführt hat. Setzen wir diese Werte in die Formel der Schwerpunkteigenschaft ein erhalten wir wie erwartet 1.

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\overline{x}_g} = \frac{0{,}93}{1{,}053307} \cdot \frac{1{,}14}{1{,}053307} \cdot \frac{1{,}075}{1{,}053307} \cdot \frac{1{,}08}{1{,}053307} = 1$$

Eigenschaft 4: Transformation

Betrachten wir nun die Transformationseigenschaft.

Transformation

Transformationseigenschaft

Die Berechnung des geometrischen Mittels und proportionale Transformationen sind vertauschbar.

Werden die Werte $x_1, \ldots, x_n$ proportional (multiplikativ) transformiert: $y_i = b \cdot x_i, b > 0$ so ist das geometrische Mittel der proportional transformierten Werte gleich dem proportional transformierten geometrischen Mittel $\overline{y}_g = b \cdot \overline{x}_g$

Auch diese Eigenschaft betrachten wir uns an einem Beispiel.

Beispiel

Preissteigerung bei Werkstoffen

Der Preis eines Werkstoffes stieg jährlich auf 110 %, 107.5 %, 112 % und schließlich im letzten Jahr auf 106 % des Vorjahrespreises. Der durchschnittliche Wachstumsfaktor betrug

$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{1{,}1 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}06} \approx 1{,}088507$$

Damit lag die durchschnittliche Teuerungsrate bei rund 8,85 %. In derselben Zeit waren die jährlichen Wachstumsfaktoren eines zweiten Werkstoffes aufgrund versiegender Quellen doppelt so hoch.

Wie groß ist der durchschnittliche Wachstumsfaktor für diese vier Jahre für Werkstoff zwei?

Dank der Transformationseigenschaft des geometrischen Mittels lässt sich das recht einfach berechnen. Der durchschnittliche Wachstumsfaktor für Werkstoff zwei liegt bei $2 \cdot 1{,}088507 = 2{,}177014.$

Behaupten können wir viel, prüfen wir es einmal nach:

$$x_i = 1{,}1,\ 1{,}075,\ 1{,}12,\ 1{,}06,\ i = 1,\ \ldots, 4$$
$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{1{,}1 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}06} \approx 1{,}088507$$
$$y_i = 2 \cdot x_i = 2{,}2,\ 2{,}15,\ 2{,}24,\ 2{,}12$$
$$\overline{y}_g = \sqrt[4]{2{,}2 \cdot 2{,}15 \cdot 2{,}24 \cdot 2{,}12} \approx 2{,}177014 = 2 \cdot 1{,}088507 = 2 \cdot \overline{x}_g$$

Eigenschaft 5

Die letzte Eigenschaft des geometrischen Mittel kennen Sie bereits aus dem Beispiel: Umsätze Hotel..

Hinweis

Das arithmetische Mittel ist immer größer als oder gleich dem geometrischen Mittel:

$$\overline{x}_g \leq \overline{x}$$

Sie sind fast am Ende dieser Lerneinheit angelangt. Auf den folgenden Seiten finden Sie Übungen um Ihr Wissen und Ihre Rechenfähigkeiten zum Thema geometrisches Mittel zu überprüfen. Zusätzlich stellen wir Ihnen einige Aufgaben zur Verfügung, die Sie mit R lösen können und die es Ihnen erlauben mit einer modernen, weit verbreiteten Statistikprogrammiersprache erste wertvolle Erfahrungen zu sammeln. Damit schließen Sie die letzte Lerneinheit im Abschnitt „Lageparameter“ ab. Das nächste Abenteuer, dass sie erwartet heißt „Streuung“!

2 Übungsaufgaben zur Vertiefung

Anhand der folgenden Aufgaben sollen Sie alle Begriffe dieser Lerneinheit wiederholen und üben.

Berechnen

Übung GEO-05

Beobachtungen

Berechnen Sie das geometrische Mittel für die folgenden Beobachtungen:
5, 5, 5, 10, 10, 15, 20, 20;

Häufigkeitsverteilung:

Index i	x_i	Absolute Häufigkeit n_i
1	5	3
2	10	2
3	15	1
4	20	2

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

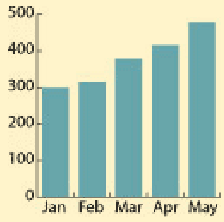
Berechnen

Übung GEO-06

Umsatzentwicklung

Die Inhaberin des Weinfachgeschäftes Maestro hat in diesem Jahr eine neue Sorte Prosecco in ihr Sortiment aufgenommen. Seit dieser Zeit konnte die Inhaberin ihren Umsatz von Monat zu Monat steigern

Monat	Umsatz (€)
Januar	300,00
Februar	315,00
März	378,00
April	415,80
Mai	478,17



1. Bestimmen und interpretieren Sie die durchschnittliche monatliche Umsatzhöhe.
2. Bestimmen und interpretieren Sie die durchschnittliche prozentuale monatliche Umsatzsteigerung.

Lösung (Siehe Anhang)

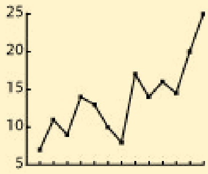
Bearbeitungszeit: 10 Minuten

Berechnen

Übung GEO-07

Mittlere Jahresrendite

Die Inhaberin des Weinfachgeschäftes Maestro hatte zum 01.01.2018 einen bestimmten Betrag zur Verfügung, den sie auf zwei Anlagealternativen aufteilt.



Ein Drittel des Betrages investiert sie in festverzinsliche Wertpapiere mit vier Jahren Laufzeit. Zum 31.12. der Jahre 2018, 2019, 2021, 2022 erhält sie 2 %, 4 %, 8 % bzw. 16 % Zinsen, die in den folgenden Jahren jeweils mitverzinst werden.

Zwei Drittel investiert sie bei einer Genossenschaft, wobei sie zum jeweiligen Jahresende 7,5 % Dividende bekommt; diese Beträge legt sie in weiteren Genossenschaftsanteilen an.

Welche der beiden Anlagealternativen besitzt die höhere mittlere Jahresrendite? Interpretieren Sie bitte kurz das Ergebnis.

Welche mittlere Jahresrendite hat die Gesamtanlage? Interpretieren Sie bitte kurz das Ergebnis.

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 10 Minuten

Zusammenfassung

- Es ist immer von grundlegender Wichtigkeit zu wissen für welche Werte sich ein Parameter überhaupt berechnen lässt.
- Das geometrische Mittel ist nur für Werte größer Null definiert und sinnvoll.
- Bei relativen Änderungen wie bspw. bei Wachstumsfaktoren ist das geometrische Mittel zu verwenden.
- Bei relativen Änderungen wie bspw. bei Wachstumsfaktoren führt das arithmetische Mittel zu falschen Ergebnissen.
- Zur Berechnung des durchschnittlichen Wachstums muss der Wachstumsfaktor benutzt werden und nicht die Rate.
- Kommen die gleichen Datenwerte häufiger vor, kann zur Berechnung die Formel für das gewichtete geometrische Mittel genutzt werden.
- Ein gängiger Fehler ist es, das arithmetische Mittel zu nutzen wo das geometrische Mittel richtig wäre. Seien Sie sich daher bewusst, dass das geometrische Mittel stets kleiner oder maximal genauso groß ist wie das arithmetische Mittel.

Sie sind am Ende dieser Lerneinheit angelangt. Auf den folgenden Seiten finden Sie noch die Übungen zur Wissensüberprüfung und die Übungen für die Statistiksoftware R.

Wissensüberprüfung

Mit der folgenden Übung können Sie ihr Wissen überprüfen. Versuchen Sie zuerst, die Aufgabe selbst zu lösen, bevor Sie sich die Antworten anzeigen lassen.

Lückentext

Übung GEO-08

Lückentext zum Geometrischen Mittel

Das geometrische Mittel ist wie das arithmetische Mittel ein statistisches _____. Bei _____ Veränderungen ist es nicht sinnvoll, das arithmetische Mittel als Maß für einen Durchschnittswert zu verwenden, weil die Gesamtänderung nicht durch eine _____, sondern durch ein _____ beschrieben wird. Bei der Berechnung des geometrischen Mittels müssen stets die _____ benutzen werden, nicht die _____!

Das geometrische Mittel ist nur für Werte _____ Null definiert und sinnvoll. Das arithmetische Mittel ist immer _____ als oder _____ dem geometrischen Mittel. Die Formel zur Berechnung _____ Mittel erleichtert das Rechnen wenn _____ Werte mehrfach in einem Datensatz auftreten.

Durch die _____ eignet sich das geometrische Mittel als Mittelwert für Wachstumsfaktoren!

- gewichteter
- gleich
- größer
- Lagemaß
- Mittelwert
- Produkt
- prozentualen
- Raten
- Schwerpunkteigenschaft
- Summe
- Transformation
- Verteiler
- Wachstumsfaktoren

Übungen mit der Statistiksoftware R

Statistiksoftware R

Die in der Lerneinheit behandelten Themen können Sie anhand der folgenden Übungsaufgaben auch mit der Statistiksoftware **R** bearbeiten. Um die Übungen zu bearbeiten, sollte die Software „**R**" auf Ihrem Rechner installiert sein.

Installationshinweise [Manuals | **R** Installation and Administration]

Versuchen Sie, die auf dieser Seite gestellten Aufgaben mit Hilfe von **R** oder **R-Studio** zu lösen. Ihre Ergebnisse können Sie mit der Lösungsdatei vergleichen. Speichern Sie dazu die R-Datei mit der Lösung auf Ihrem Rechner und öffnen Sie die Datei mit **R**. Überprüfen Sie vor dem Öffnen, ob das Arbeitsverzeichnis von **R** mit dem Speicherort der Datei übereinstimmt.

Für einige Übungen stehen auch Musterlösungen für das Programm Excel bereit.

Berechnen

Übung GEO-09a

Eigenschaften des geometrischen Mittels

Gegeben sind die folgenden Daten:

5, 5, 5, 10, 10, 15, 20, 20

1. Berechnen Sie mit R das geometrische Mittel des Datensatzes

Im Basispaket von R gibt es **keinen** Befehl um das geometrische Mittel direkt zu berechnen. Natürlich kann man problemlos ein Erweiterungspaket installieren welches einen entsprechenden Befehl enthält. Alternativ kann das geometrische Mittel mit dieser Befehlskette berechnet werden: **`exp(mean(log(data)))`**

Sollte Ihnen noch nicht klar sein wofür die einzelnen Befehle stehen, informieren Sie sich indem Sie in der R-Console die Hilfe verwenden bspw. mit der Eingabe von **`help(exp)`**, **`help(mean)`** bzw. **`help(log)`**.

2. Erklären Sie warum wir mit dem Aufruf von **`exp(mean(log(data)))`** zum geometrischen Mittel gelangen.

Lösung mit R und Excel (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 10 Minuten

Berechnen

Übung GEO-09b

Umsatzhöhe

Die Inhaberin des Weinfachgeschäftes Maestro hat in diesem Jahr eine neue Sorte Prosecco in ihr Sortiment aufgenommen. Seit dieser Zeit konnte die Inhaberin ihren Umsatz von Monat zu Monat steigern. Die Umsätze sind in folgender Tabelle zusammengefasst.

Monat	Umsatz
Jan	300,00
Feb	315,00
Mae	378,00
Apr	415,80
Mai	478,17

Aufgabe

Bestimmen Sie die durchschnittliche monatliche Umsatzsteigerung mit Hilfe des geometrischen Mittels.

Lösung mit R (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 10 Minuten

Berechnen

Übung GEO-09c

Festverzinsliche Wertpapiere

Die Inhaberin des Weinfachgeschäftes Maestro hat zum 01.01.2018 einen bestimmten Betrag zur Verfügung, den sie in festverzinsliche Wertpapiere mit vier Jahren Laufzeit investiert. Zum 31.12. der Jahre 2018, 2019, 2020, 2021 erhält sie 2 %, 4 %, 8 %, 16 % Zinsen, die in den folgenden Jahren jeweils mitverzinst werden.

Aufgabe: Berechnen Sie die mittlere Jahresrendite.

Lösung mit R und Excel (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 10 Minuten

Berechnen

Übung GEO-09d

Streik

die Tabelle zeigt die jährlich durch Streiks ausgefallenen Arbeitstage nach Ländern von 2011 bis 2020.

Belgien	97
Frankreich	93
Kanada	79
Finnland	52
Spanien	48
Dänemark	44
Norwegen	38
Niederlande	21
Vereinigtes Königreich	18
Deutschland	18
Irland	16
Polen	16
Portugal	13
USA	9
Ungarn	4
Österreich	2
Schweden	2
Schweiz	1

Quelle: Hans-Böckler-Stiftung; WSI (Statista) 2022

Aufgaben:

1) Berechnen Sie

a) den Median und das arithmetische Mittel.
b) die Spannweite und den Quartilsabstand.

2) Welche der unter a und b berechneten Größen verändert sich stärker, falls man Belgien nicht berücksichtigt?

Lösung mit R (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 10 Minuten

Zusätzliche Übungsaufgaben

Zum Vertiefen der vorgestellten Inhalte finden Sie hier zusätzliche Übungsaufgaben zur freiwilligen Bearbeitung.

Berechnen

Übung GEO-10

Wertpapierentwicklung

Ein Fan von Borussia Dortmund besitzt eine Aktie des Fußballvereins, welche in den letzten Jahren folgende Wertsteigerungen durchlaufen hat:

2004	2005	2006	2007	2008
+12 %	+7 %	+1 %	+4 %	-10 %

Ermitteln Sie mithilfe des geometrischen Mittels die durchschnittliche Wertsteigerung der Aktie.

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

Berechnen

Übung GEO-11

Bruttoinlandsprodukt (BIP)

In der folgenden Tabelle ist die Entwicklung des Bruttoinlandsproduktes eines Landes für einen Zeitraum von 25 Jahren wiedergegeben:

Prozentsatz	Absolute Häufigkeit
-2	2
-1	1
0	2
1	6
2	10
3	4

Bestimmen Sie die mittlere Wachstumsrate des Bruttoinlandsproduktes.
(Hinweis: gewichtetes geometrisches Mittel)

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

Berechnen

Übung GEO-12

Population 1

Bestimmen Sie anhand der folgenden Tabelle das durchschnittliche Wachstum einer Population:

Wachstumsrate	Absolute Häufigkeit
0,97	3
0,98	2
0,99	5
1,01	10
1,03	15

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

Berechnen

Übung GEO-13

Population 2

Bestimmen Sie anhand der folgenden Tabelle das durchschnittliche Wachstum einer Population:

Prozentsatz	Relative Häufigkeit
0,97	0,05
0,98	0,1
0,99	0,05
1,01	0,03
1,03	0,5

Lösung (Siehe Anhang)

Bearbeitungszeit: 5 Minuten

Appendix

Lösung für Übung GEO-01

Bestimmung des geometrischen Mittels:

Man kann das geometrische Mittel als ungewogenes Mittel berechnen:

$$\overline{x}_g = \sqrt[11]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}$$

$$= (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^{\frac{1}{11}}$$

$$= (50.009.400)^{\frac{1}{11}} = 5{,}01$$

oder als gewichtetes Mittel:

$$\overline{x}_g = \sqrt[11]{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 8^1 \cdot 9^1} = 3^{\frac{4}{11}} \cdot 5^{\frac{2}{11}} \cdot 7^{\frac{3}{11}} \cdot 8^{\frac{1}{11}} \cdot 9^{\frac{1}{11}}$$

$$= 1{,}491072 \cdot 1{,}339940 \cdot 1{,}700127 \cdot 1{,}208089 \cdot 1{,}221095 = 5{,}01$$

Beide Rechenwege führen natürlich zum selben Ergebnis.

Lösung für Übung GEO-02

Produktionssteigerung

$$\overline{x}_g = \sqrt[3]{1{,}06 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}12} = 1{,}093$$

Die Produktion ist durchschnittlich um 9,3 % pro Jahr gestiegen.

Lösung für Übung GEO-03

Umsatzentwicklung

$$\overline{x}_g = \sqrt[7]{1{,}03 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}12}$$

$$= \sqrt[7]{1{,}601890} = 1{,}069629$$

Das geometrische Mittel ist 1,069629. Die durchschnittliche jährliche Umsatzsteigerung liegt bei rund 6,96 %

Lösung für Übung GEO-04

Antwort 1: Nein, das Wasserstoffauto kostet 2022 weniger. Denn die 10 % Vergünstigung beziehen sich auf den bereits erhöhten Preis!

$80.000\,€ \cdot 1{,}1 = 88.000\,€$. So viel kostet der Wagen 2021 nach der Preiserhöhung .

$88.000\,€ \cdot 0{,}9 = 79.200\,€$. So viel kostet das Wasserstoffauto 2022 nach der Preissenkung.

Antwort 2: Beweis

Wachstumsfaktor: $\overline{x}_g = \sqrt{1{,}1 \cdot 0{,}9} = 0{,}9949874$
Wachstumsrate: $0{,}9949874 - 1 = -0{,}005012563 \approx -0{,}5\%$

Das heißt im Durchschnitt ist der Preis des Wasserstoffautos jährlich um 0,5 % gesunken.

Berechnung des arithmetischen Mittels

$\frac{1}{2} \cdot (10\,\% + (-10\,\%)) = 0$

Hier zeigt sich deutlich, dass das arithmetische Mittel für Wachstumsraten nicht geeignet ist. Wir kämen hier mit dem arithmetische Mittel auf eine falsche Wachstumsrate von 0 und damit nach zwei Jahren wieder auf den ursprünglichen Preis von 80.000 €.

Musterlösung für Übung GEO-05

Beobachtungen

$$\overline{x}_g = \sqrt[8]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 20} = 9{,}64679$$

bzw.

$$\overline{x}_g = \sqrt[8]{5^3 \cdot 10^2 \cdot 15^1 \cdot 20^2} = 5^{\frac{3}{8}} \cdot 10^{\frac{2}{8}} \cdot 15^{\frac{1}{8}} \cdot 20^{\frac{2}{8}}$$

$$= 1{,}829 \cdot 1{,}778 \cdot 1{,}403 \cdot 2{,}115$$

$$= 9{,}64679$$

Musterlösung für Übung GEO-06

Umsatzentwicklung

Zu Frage 1:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{1}{5}(300 + 315 + 378 + 415{,}80 + 478{,}17) = \frac{1886{,}97}{5} = 377{,}39\,€$$

$\overline{x} = 377{,}39\,€$, d. h. der durchschnittliche monatliche Umsatz des Weinfachgeschäftes Maestro für die Monate Januar bis Mai beträgt 377,39 €.

Interpretation

Der monatliche Umsatz des Weinfachgeschäftes Maestro lag im Januar bei 300 €:

Zu Frage 2:

Monat	Umsatzsteigerung gegenüber dem Vormonat	Umsatz (auf Basis Januar mit 300 €)
Februar	5 %	300 · 1,05 = 315 €
März	20 %	300 · 1,05 · 1,20 = 378 €
April	10 %	300 · 1,05 · 1,20 · 1,10 = 415,80 €
Mai	15 %	300 · 1,05 · 1,20 · 1,10 · 1,15 = 478,17 €

Die Gesamtsteigerung des monatlichen Umsatzes von Januar bis Mai beträgt

$$\overline{x}_g = \sqrt[4]{1{,}05 \cdot 1{,}20 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}15} = 1{,}1236$$

Interpretation

D. h. eine durchschnittliche monatliche Umsatzsteigerung des Weinfachgeschäftes beträgt 12,36 %.

Musterlösung für Übung GEO-07

Mittlere Jahresrendite

Die mittlere Jahresrendite ergibt sich aus dem geometrischen Mittel der zu den Zinssätzen gehörigen Wachstumsfaktoren:
Festverzinsliche Wertpapiere:

$$\overline{x}_{G_f} = \sqrt[4]{1{,}02 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}08 \cdot 1{,}16} = \sqrt[4]{1{,}3290} = 1{,}0737$$

Interpretation:

Die mittlere Jahresrendite beträgt 7,37 %.

Genossenschaftsanteile:

$$\overline{x}_{G_g} = \sqrt[4]{1{,}075 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}075 \cdot 1{,}075} = 1{,}075$$

Interpretation

Die mittlere Jahresrendite beträgt für die Genossenschaftsanteile 7,5 %. Damit ist etwas höher als für Wertpapiere. Die mittlere Jahresrendite für die Gesamtanlage berechnet sich wie folgt:

$$\overline{x}_G = \sqrt[4]{\frac{1}{3} \cdot 1{,}0737^4 + \frac{2}{3} \cdot 1{,}0750^4} = \sqrt[4]{1{,}3333} = 1{,}0746.$$

Wir erhalten eine mittlere Rendite von 7,46 % für die Gesamtanlage.

Lösung für Übung GEO-09a

Eigenschaften des geometrischen Mittels

Aufgabe 1: Das geometrische Mittel beträgt rund **9,65**

Aufgabe 2:

Wie bereits in Kapitel 1.5 „Eigenschaften des geometrischen Mittels“ dargelegt, machen wir uns zu Nutze, dass der Logarithmus des geometrischen Mittels $\overline{x}_g$ gleich dem arithmetischen Mittel der logarithmierten Werte ist:

$$\log \overline{x}_g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log(x_i) = \overline{\log(X)}$$

Das heißt wir logarithmieren unsere Werte zunächst und berechnen dann das arithmetische Mittel. Damit erhalten wir das logarithmierte geometrische Mittel der Daten. Um daraus das geometrische Mittel selbst zu bekommen nutzen wir die Exponentialfunktion:

$$e^{\ln \overline{x}_g} = \overline{x}_g \cdot \ln(e) = \overline{x}_g$$

Beachten Sie das der Befehl `log()` in R per default den Logarithmus zur Basis e berechnet also dem natürlichen Logarithmus $\ln$ entspricht.

Lösung mit R

haeufigkeitver_loesung.R

```
data = c(5,5,5,10,10,15,20,20)  # Daten werden als Vektor in data gespeichert
exp(mean(log(data)))    # Exponentialfunktion, arith. Mittel, Logarithmus

```

Lösung mit Excel

WMS_GEO_09a_Haeufigkeitsverteilung.xlsx (9 KB)

Es gibt in Excel drei Möglichkeiten, für diese Aufgabe das geometrische Mittel zu berechnen. Für die erste müssen wir die Daten in folgender Form aufschreiben:

B2 f_x 5

	A	B	C	D
1		x		
2		5		
3		5		
4		5		
5		10		
6		10		
7		15		
8		20		
9		20		

Dann berechnen wir das geometrische Mittel nach der bekannten Formel mithilfe der Funktionen `PRODUKT` und `ANZAHL`. Das ist im Bild unten zu sehen.

A23 | f_x | =PRODUKT(B2:B9)^(1/ANZAHL(B2:B9))

	A	B	C	D	E	F	G
22	Geometrisches Mittel aus erster Darstellung:						
23	9,6467863						
24							

Die zweite Möglichkeit – das geometrische Mittel zu berechnen – ist der ersten sehr ähnlich, allerdings ist die Formel in der Darstellung etwas weniger leicht zu erkennen. Dafür können die Daten direkt so verwendet werden, wie sie in der Aufgabenstellung gegeben sind (zur Erinnerung nochmal eine Abbildung).

	A	B
13	xi	abs. Häuf.
14	5	3
15	10	2
16	15	1
17	20	2

Hier verwenden wir die Funktion `SUMME`. Im Bild unten ist zu sehen, was in der entsprechenden Zelle stehen muss.

A26 | f_x | =(A14^B14*A15^B15*A16^B16*A17^B17)^(1/SUMME(B14:B17))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
25	Geometrisches Mittel aus zweiter Darstellung:									
26	9,6467863									
27										

Die dritte und eleganteste Möglichkeit, das geometrische Mittel zu berechnen, ist die Verwendung der Funktion `GEOMITTEL`. Wie das geht, ist hier zu sehen:

A29 | f_x | =GEOMITTEL(B2:B9)

	A	B	C	D	E	F
28	Geometrisches Mittel aus Funktion:					
29	9,6467863					
30						

Mit allen drei Möglichkeiten kommen wir zu folgendem Ergebnis:

Geometrisches Mittel aus erster Darstellung:
9,6467863
Geometrisches Mittel aus zweiter Darstellung:
9,6467863
Geometrisches Mittel aus Funktion:
9,6467863

Lösung für Übung GEO-09b

Umsatzhöhe

Die durchschnittliche monatliche Umsatzsteigerung

	Feb	Mar	Apr	Mai
Steigerung	1,05	1,20	1,10	1,15

Die Steigerung mit Hilfe des geometrischen Mittels lautet **1,12**

Lösung mit R

umsatz_loesung.R

```r
prosecco <-
  data.frame(
    Monat = c("Jan", "Feb", "Mae", "Apr", "Mai"),
    Umsatz = c(300, 315, 378, 415.8, 478.17)
  )

p=c() # Ein leerer Vektor p wird kreiert

for(i in 1:4) # Schleife wird von 1 bis 4 durchlaufen
{
  p[i]<-prosecco$Umsatz[i+1]/prosecco$Umsatz[i]
  # Steigerung = Umsatz geteilt durch Umsatz Vormonat
}

exp(mean(log(p))) #geometrisches Mittel
```

Lösung für Übung GEO-09c

Festverzinsliche Wertpapiere

Die mittlere Jahresrendite beträgt 7 %

Lösung mit R

zinsen_loesung.R

```
zinsfaktoren<-c(1.02,1.04,1.08,1.16) #Vektor mit Zinsfaktoren = 1 + Zinssatz
exp(mean(log(zinsfaktoren))) #geometrisches Mittel
```

Lösung mit Excel

WMS_GEO_09c_Zinsen.xlsx (9 KB)

Da wir zur Berechnung von Zinsfaktoren das geometrische Mittel verwenden, können wir wieder die Funktion `GEOMITTEL` benutzen. Zunächst schreiben wir die Faktoren – mit denen das Guthaben jeweils im Jahr multipliziert wird – in eine neue Spalte. Wie das geht, ist wie folgt zu sehen.

10	Faktor, mit dem der Wert jeweils im Jahr multipliziert wird					
11	Jahr	Faktor				
12	2018	1,02				
13	2019	1,04				
14	2020	1,08				
15	2021	1,16				

Zur Berechnung schreiben wir folgende Formel:

A18 | fx | =GEOMITTEL(B12:B15)

	A	B	C	D	E	F
17	Berechnung des geometrischen Mittels:					
18	1,07369					
19						

So erhalten wir das Ergebnis in folgender Form:

Berechnung des geometrischen Mittels:			
1,07369			

Lösung für Übung GEO-09d

Streik

1a) Der Median beträgt 18 und das arithmetische Mittel rund 31,72222.

1b) Die Spannweite beträgt 96 und der Quartilsabstand 37

2) Das arithmetische Mittel und die Spannweite haben sich viel stärker verändert als der Median und der Quartialsabstand.

Lösung mit R

streik_loesung.R

```
streik <-
  data.frame(
    Land = c(
      "Belgien",
      "Frankreich",
      "Kanada",
      "Finnland",
      "Spanien",
      "Dänemark",
      "Norwegen",
      "Niederlande",
      "UK",
      "Deutschland",
      "Irland",
      "Polen",
      "Portugal",
      "USA",
      "Ungarn",
      "Österreich",
      "Schweden",
      "Schweiz"
    ),
    Tage = c(97, 93, 79, 52, 48, 44, 38, 21, 18, 18, 16, 16, 13, 9, 4, 2, 2, 1)
  )
#  1 a)
median(streik$Tage) # Median
mean(streik$Tage) # Arithmetisches Mittel

#  1 b)
max(streik$Tage)-min(streik$Tage) #Spannweite
quantile(streik$Tage,0.75)-quantile(streik$Tage,0.25) # Interquartilsabstand

# 2)
streik.neu<-subset(streik,Land!="Belgien") # Datensatz ohne Belgien wird in „streik.neu“ gespeichert

median(streik.neu$Tage) # Median „Streik.neu“
mean(streik.neu$Tage) # Arithmetisches Mittel „streik.neu“

max(streik$Tage)-min(streik$Tage) # Spannweite „streik.neu“

quantile(streik$Tage,0.75)-quantile(streik$Tage,0.25) # Interquartilsabstand „streik.neu“
```

Lösung für Übung GEO-10

Wertpapierentwicklung

Der Wert der Aktie hat sich in den angegebenen Jahren um folgende Faktoren verändert:

2004	2005	2006	2007	2008
1,12	1,07	1,01	1,04	0,9

Als geometrisches Mittel erhält man

$$\overline{x}_g = \sqrt[5]{1{,}12 \cdot 1{,}07 \cdot 1{,}01 \cdot 1{,}04 \cdot 0{,}9} = 1{,}02527$$

Die durchschnittliche jährliche Steigerung des Wertpapiers beträgt ca. 2,53 %

Lösung für Übung GEO-11

Bruttoinlandsprodukt (BIP)

Prozentsatz	absolute Häufigkeit	Wachstumsfaktor
-2	2	0,98
-1	1	0,99
0	2	1
1	6	1,01
2	10	1,02
3	4	1,03

$$\overline{x}_g = \sqrt[25]{0{,}98^2 \cdot 0{,}99^1 \cdot 1^2 \cdot 1{,}01^6 \cdot 1{,}02^{10} \cdot 1{,}03^4} = 1{,}013$$

Die mittlere Wachstumsrate beträgt 1,3 %.

Lösung für Übung GEO-12

Population 1

$$\overline{x}_g = \sqrt[35]{0{,}97^3 \cdot 0{,}98^2 \cdot 0{,}99^5 \cdot 1{,}01^{10} \cdot 1{,}03^{15}} = 1{,}0103$$

Die durchschnittliche Wachstumsrate dieser Population beträgt 1,03 %.

Lösung für Übung GEO-13

Population 2

$$\overline{x}_g = 0{,}97^{0{,}05} \cdot 0{,}98^{0.1} \cdot 0{,}99^{0{,}05} \cdot 1{,}01^{0{,}03} \cdot 1{,}03^{0{,}5} = 1{,}0111$$

Die durchschnittliche Wachstumsrate dieser Population beträgt 1,11 %.