

Prova 1

Victor F. Ferrari

MO814A/MC937A - Tópicos in Computação Gráfica

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

25 de abril de 2020

Questão 1

Explique o *pipeline* de visualização em um sistema gráfico. Quais suas etapas?

Nota: tive 3 interpretações desse enunciado. Tenho certa certeza de que a resposta 1 é a desejada, mas se não for, incluí mais 2 respostas de interpretações diferentes. Creio que não sejam necessárias.

Resposta 1: pipeline de uma representação gráfica para a exibição ao usuário.

Em um sistema gráfico, a imagem se inicia com seus pontos em OCS, coordenadas do objeto. O objetivo é transformar esses pontos para coordenadas do mundo, depois para coordenadas de visão, e finalmente para coordenadas da **janela** de exibição.

Assim, a primeira etapa é a transformação para **WCS**, coordenadas da cena, que podem ser diferentes das coordenadas de um objeto. Em seguida, se realiza a transformação para as **coordenadas de visão**, o que normalmente consiste em transformações projetivas. Por último, é feita a conversão para coordenadas da janela de exibição (*viewport*), chamadas de **DCS**. É nessa etapa que ocorre o *clipping* de polígonos e retas, e enfim a imagem está pronta para exibição: a cena foi transformada em uma imagem a ser exibida.

Resposta 2: pipeline de um sistema de visão computacional.

Se o sistema tem uma percepção do ambiente que precisa ser interpretado, o processo inicia com a **aquisição** da imagem com uma câmera digital ou outro dispositivo, representando a cena a ser "vista". Então, a imagem pode ser **pré-processada** inteiramente para melhorar a qualidade da entrada. Isso leva à fase de **processamento**, na qual apenas as informações importantes para a aplicação são filtradas e limpas para melhor análise (por exemplo, extraíndo bordas de objetos e filtrando ruído).

A imagem então passa por **análise**, que depende da aplicação em questão (por exemplo, identificar bifurcações e terminais em impressões digitais). Esses pontos de interesse são então modelados por **extração de características** (por exemplo, combinar múltiplos pontos identificados geometricamente), e finalmente usados para **reconhecimento de padrões**, comparando a estrutura final com entradas anteriores ou uma referência armazenada.

Resposta 3: etapas para visualização de dados.

Se o sistema não tem percepção, e quer apenas oferecer uma visualização de dados para o usuário, o sistema passa por uma fase de análise dos dados, para extrair informações interessantes para a aplicação, em seguida uma etapa de agregação e modelamento desses dados em gráficos e outras estruturas gráficas. Finalmente, essa estrutura final é exibida ao usuário.

Questão 2

Como você definiria as seguintes cores em RGB, CMY e HSV?

- a) Uma cor vermelho pura
- b) Uma cor lilás
- c) Amarelo
- d) Marrom
- e) Como é dada a equivalência entre os modelos RGB, CMY e HSV?

a)

A cor vermelho é dada diretamente pelo modelo RGB, por ser uma cor básica do modelo.

- RGB: (255, 0, 0): maior valor possível em vermelho, e os menores valores possíveis em verde e azul.
- CMY: $(1 \ 1 \ 1) - \frac{(255 \ 0 \ 0)}{255} = (0, 1, 1)$, normalizado. De 0 a 100, temos (0, 100, 100).
- HSV:

Começamos com RGB normalizado para (1,0,0).

$$V = \max(RGB) = 1$$
$$C = V - \min(RGB) = V = 1.$$

Como V é igual a R:

$$H = 60 * \frac{(G - B)}{C} = 60 * 0 = 0$$
$$S = \frac{C}{V} = 1$$

Assim, **HSV = (0, 1, 1)**

b)

A cor lilás, no modelo RGB, tem valores (200, 162, 200).

- RGB: (200, 162, 200).

- CMY: $(1 \ 1 \ 1) - \frac{(200 \ 162 \ 200)}{255} = (0.2157, 0.3647, 0.2157)$, normalizado. De 0 a 100, temos (21.57, 36.47, 21.57). O lilás é uma cor que se beneficia do modelo CMYK, consistindo apenas de magenta e K (preto), porém no modelo CMY as outras cores são usadas para se obter o preto.

- HSV:

Começamos com RGB normalizado para (0.78431373, 0.63529412, 0.78431373).

$$V = \max(RGB) = 0.78431373$$

$$C = V - \min(RGB) = V - G = 0.149$$

Como V é igual a B:

$$H = 60 * (4 + \frac{(R - G)}{C}) = 60 * (4 + 1) = 300$$

$$S = \frac{C}{V} = 0.19$$

Assim, **HSV = (300, 0.19, 0.7843)**

c)

A cor amarelo é dada diretamente pelo modelo CMY, por ser uma cor básica do modelo.

- CMY: (0, 0, 100): maior valor possível em amarelo, e os menores valores possíveis em magenta e ciano.
- RGB: $(1 \ 1 \ 1) - \frac{(0 \ 0 \ 100)}{100} = (1, 1, 0)$, normalizado. De 0 a 255, temos (255, 255, 0).
- HSV:

Começamos com RGB normalizado para (1, 1, 0).

$$V = \max(RGB) = 1$$

$$C = V - \min(RGB) = V = 1$$

Como V é igual a R:

$$H = 60 * \frac{(G - B)}{C} = 60 * 1 = 60$$

$$S = \frac{C}{V} = 1$$

Assim, **HSV** = (60, 1, 1)

d)

A cor marrom, no modelo RGB, tem valores (150, 75, 0).

- RGB: (150, 75, 0).
- CMY: $\left(1 \ 1 \ 1\right) - \frac{\begin{pmatrix} 150 & 75 & 0 \end{pmatrix}}{255} = (0.4118, 0.7059, 1)$, normalizado. De 0 a 100, temos (41.18, 70.59, 100).
- HSV:

Começamos com RGB normalizado para (0.58823529, 0.29411765, 0).

$$\begin{aligned} V &= \max(RGB) = 0.58823529 \\ C &= V - \min(RGB) = V = 0.58823529 \end{aligned}$$

Como V é igual a R:

$$\begin{aligned} H &= 60 * \frac{(G - B)}{C} = 60 * 0.5 = 30 \\ S &= \frac{C}{V} = 1 \end{aligned}$$

Assim, **HSV** = (30, 1, 0.5882)

e) RGB e CMY são modelos complementares, ou seja, ciano é a cor complementar (ou secundária) de vermelho, magenta é a cor complementar de verde, e amarelo é a cor complementar de azul. Assim, RGB é um modelo aditivo (soma das cores é branco) e CMY é um modelo subtrativo (soma das cores é preto), sendo tão ligados que basta tomar o inverso dos valores de um modelo para atingir o outro. Ambos se baseiam na teoria tricromática.

Já o modelo HSV se baseia em outras características de cor: a matiz, a luminosidade e a saturação. Sendo fundamentalmente diferente, a relação com os outros dois não é direta, e sim algorítmica. Esse algoritmo se baseia em modelar o HSV como um cone/pirâmide, em vez do cubo RGB (que também inclui CMY). Nessa pirâmide de seis lados, cada vértice da base corresponde a uma das cores dos outros modelos vistos, o centro da base é a cor branca e o vértice da pirâmide é a cor preta. A altura representa o "valor" (V), que é a luminosidade, o ângulo a partir do centro é a matiz (H), e a distância do centro é a saturação (S).

Questão 3

Dados os seguintes polígonos:

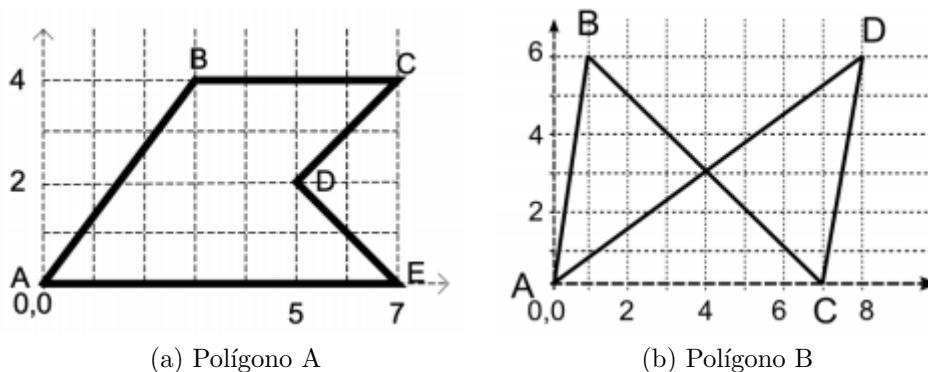


Figura 1: Polígonos

- Para o polígono A: Mostre como fica a AET para as linhas de varredura 0 a 4 e quais pixels são desenhados em cada interação do algoritmo de preenchimento de polígonos.
- Para o polígono B: Mostre como fica a AET para as linhas de varredura 0 a 6 e quais pixels são desenhados em cada interação do algoritmo de preenchimento de polígonos.

a)
A AET do polígono A pode ser vista na figura 2.

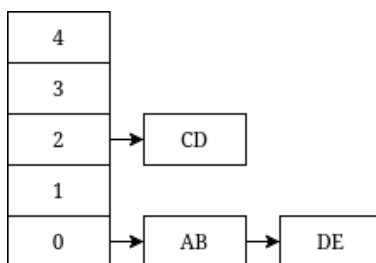


Figura 2: AET do polígono A

A cada iteração do algoritmo, se tem uma AEL (*Active Edge List*), a partir da qual são calculados os pixels a serem desenhados. Para cada iteração (ou seja, *scanline*), temos um diagrama da AEL correspondente, e cada iteração desenha pixels na imagem com uma cor específica. No texto, os pixels indicados são os valores em X, como o valor em Y é o mesmo para cada iteração.

- Linha 0: pixels 0-6 (amarelo).

Active Edge List

	AB	DE
<i>maxY</i>	4	2
<i>currentX</i>	0	7
<i>Xincr</i>	3/4	-1

AEL na linha 0.

- Linha 1: pixels 1-5 (vermelho).

Active Edge List

	AB	DE
<i>maxY</i>	4	2
<i>currentX</i>	3/4	6
<i>Xincr</i>	3/4	-1

AEL na linha 1.

- Linha 2: pixels 2-4 (azul).

Active Edge List

	AB	DE	CD
<i>maxY</i>	4	2	4
<i>currentX</i>	3/2	5	5
<i>Xincr</i>	3/4	-1	1

AEL na linha 2.

- Linha 3: pixels 3-5 (verde).

Active Edge List

	AB	CD
<i>maxY</i>	4	4
<i>currentX</i>	9/4	6
<i>Xincr</i>	3/4	1

AEL na linha 3.

- Linha 4: nenhum pixel.

	Active Edge List									
	<table><tr><td>AB</td></tr><tr><td>4</td></tr><tr><td>3</td></tr><tr><td>3/4</td></tr></table>	AB	4	3	3/4	<table><tr><td>CD</td></tr><tr><td>4</td></tr><tr><td>7</td></tr><tr><td>1</td></tr></table>	CD	4	7	1
AB										
4										
3										
3/4										
CD										
4										
7										
1										
<i>maxY</i>										
<i>currentX</i>										
<i>Xincr</i>										

AEL na linha 4.

Assim, vemos que o polígono A preenchido após a execução do algoritmo na figura 3 abaixo.

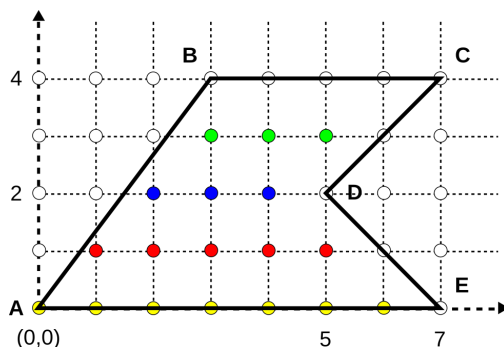


Figura 3: Polígono A preenchido

b)

A AET do polígono B pode ser vista na figura 4.

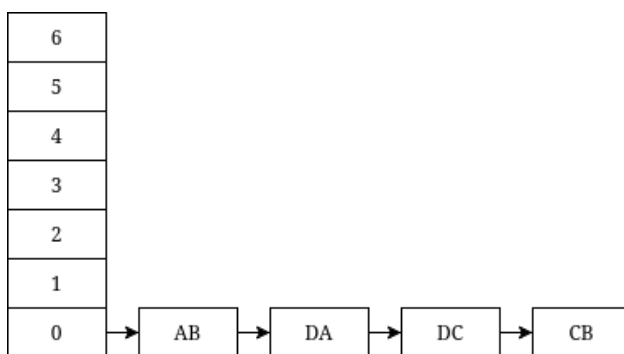


Figura 4: AET do polígono B

A cada iteração do algoritmo, se tem uma AEL (*Active Edge List*), a partir da qual são calculados os pixels a serem desenhados. Para cada iteração (ou seja, *scanline*), temos um diagrama da AEL correspondente, e cada iteração desenha pixels na imagem com uma cor específica. No texto, os pixels indicados são os valores em X, como o valor em Y é o mesmo para cada iteração.

- Linha 0: nenhum pixel.

Active Edge List				
	AB	AD	BC	CD
<i>maxY</i>	6	6	6	6
<i>currentX</i>	0	0	7	7
<i>Xincr</i>	1/6	4/3	-1	1/6

AEL na linha 0.

- Linha 1: pixels 1 e 6-7 (vermelho).

Active Edge List				
	AB	AD	BC	CD
<i>maxY</i>	6	6	6	6
<i>currentX</i>	1/6	4/3	6	$7 + 1/6$
<i>Xincr</i>	1/6	4/3	-1	1/6

AEL na linha 1.

- Linha 2: pixels 1-2 e 5-7 (azul).

Active Edge List				
	AB	AD	BC	CD
<i>maxY</i>	6	6	6	6
<i>currentX</i>	1/3	8/3	5	$7 + 1/3$
<i>Xincr</i>	1/6	4/3	-1	1/6

AEL na linha 2.

- Linha 3: pixels 1-3 e 4-7 (verde).

Active Edge List				
	AB	AD	BC	CD
<i>maxY</i>	6	6	6	6
<i>currentX</i>	1/2	4	4	$7 + 1/2$
<i>Xincr</i>	1/6	4/3	-1	1/6

AEL na linha 3.

- Linha 4: 1-2 e 6-7 (magenta).

	Active Edge List			
	AB	BC	AD	CD
<i>maxY</i>	6	6	6	6
<i>currentX</i>	2/3	3	16/3	$7 + 2/3$
<i>Xincr</i>	1/6	-1	4/3	1/6

AEL na linha 4.

- Linha 5: 1 e 7 (ciano).

	Active Edge List			
	AB	BC	AD	CD
<i>maxY</i>	6	6	6	6
<i>currentX</i>	5/6	2	20/3	$7 + 5/6$
<i>Xincr</i>	1/6	-1	4/3	1/6

AEL na linha 5.

- Linha 6: nenhum pixel.

	Active Edge List			
	AB	BC	AD	CD
<i>maxY</i>	6	6	6	6
<i>currentX</i>	1	1	8	8
<i>Xincr</i>	1/6	-1	4/3	1/6

AEL na linha 6.

Assim, vemos que o polígono A preenchido após a execução do algoritmo na figura 5 abaixo.

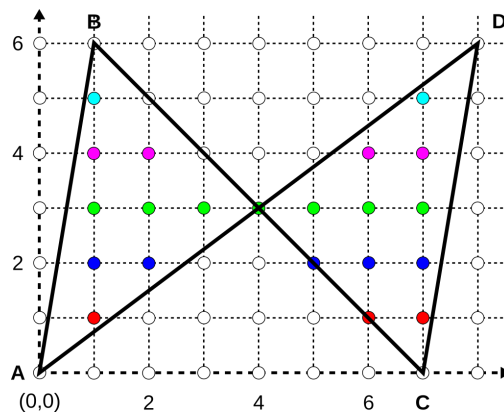


Figura 5: Polígono B preenchido

Questão 4

Explique como funcionaria o recorte de linhas de CohenSutherland para o conjunto de linhas abaixo, em relação à janela de recorte dada (indique a sequencia de passos, para cada segmento de reta mostrado).

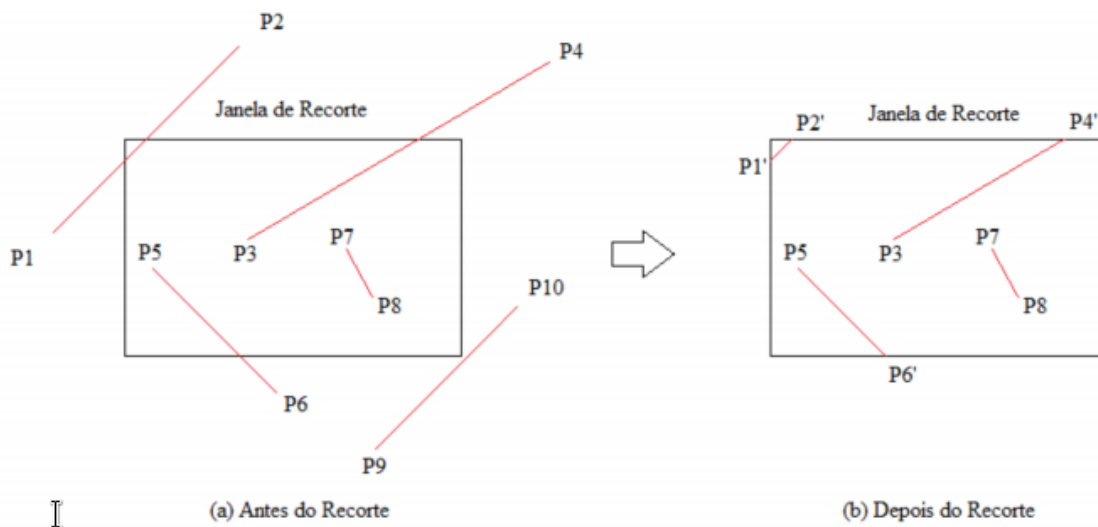


Figura 6: Conjunto de linhas

O algoritmo será executado para cada segmento de reta.

No algoritmo de Cohen-Sutherland, cada bit indica se um ponto está dentro ou fora de uma aresta específica da janela. Cada bit indica uma aresta, como pode ser visto na figura 7.

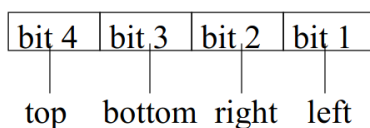
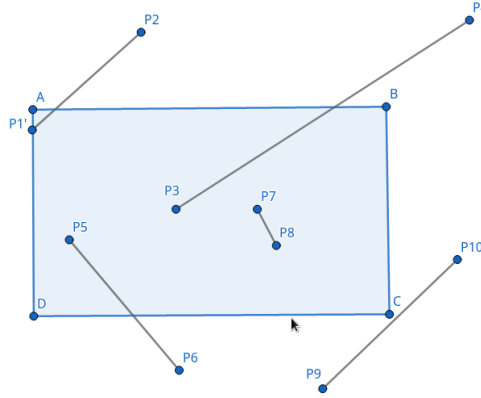


Figura 7: Códigos 2D Cohen-Sutherland

- Segmento P1-P2:

$c_0 : 0001$ $c_1 : 1000$

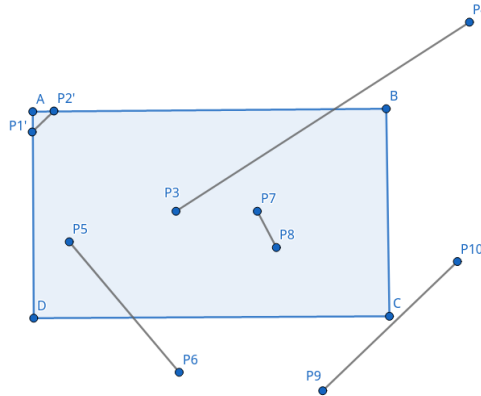
Ambos vértices estão fora da janela, mas $c_0 \wedge c_1 = 0$, então esse segmento P1-P2 não é trivialmente rejeitado. Assim, *clipping* é necessário, e faremos a mudança em P1. Logo: P1 se torna P1'.



Iteração 1

$c_0 : 0000$ $c_1 : 1000$

P0 está dentro da janela, e P1 está fora da janela, então o segmento P1'-P2 não é trivialmente aceito ou rejeitado. Assim, *clipping* é necessário, modificando P2. Logo: P2 se torna P2'.



Iteração 2

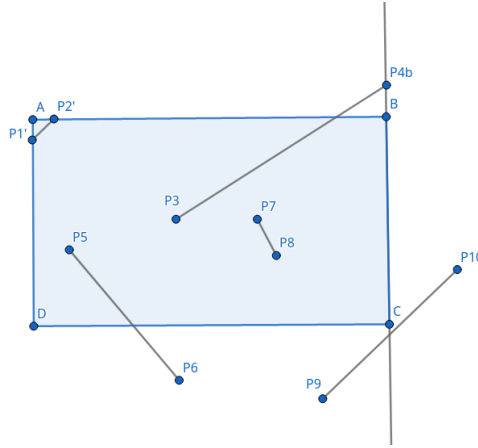
$c_0 : 0000$ $c_1 : 0000$

Ambos vértices estão dentro da janela, com código zero então $c_0 \vee c_1 = 0$. Portanto, o segmento P1'-P2' é aceito trivialmente.

- Segmento P3-P4:

$c_0 : 0000$ $c_1 : 1010$

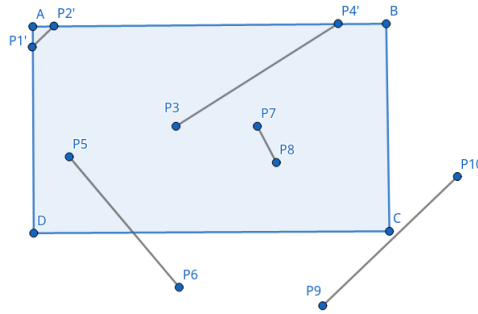
P3 está dentro da janela, e P4 está fora da janela, então o segmento P3-P4 não é trivialmente aceito ou rejeitado. Assim, *clipping* é necessário, modificando P4. Logo: P4 se torna P4_b.



Iteração 3

$c_0 : 0000$ $c_1 : 1000$

P3 está dentro da janela, e $P4_b$ está fora da janela, então o segmento $P3-P4_b$ não é trivialmente aceito ou rejeitado. Assim, *clipping* é necessário, modificando $P4_b$. Logo: $P4_b$ se torna $P4'$.



Iteração 4

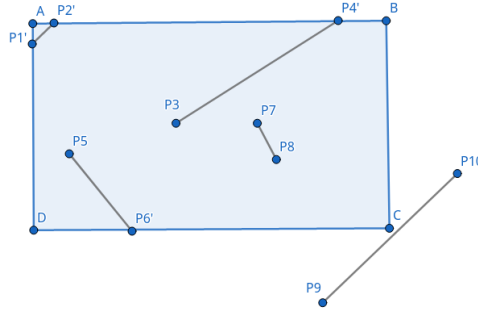
$c_0 : 0000$ $c_1 : 0000$

Ambos vértices estão dentro da janela, com código zero então $c_0 \vee c_1 = 0$. Portanto, o segmento $P3-P4'$ é aceito trivialmente.

- Segmento P5-P6:

$c_0 : 0000$ $c_1 : 0100$

P5 está dentro da janela, e P6 está fora da janela, então o segmento $P5-P6$ não é trivialmente aceito ou rejeitado. Assim, *clipping* é necessário, modificando P6. Logo: P6 se torna $P6'$.



Iteração 5

$c_0 : 0000$ $c_1 : 0000$

Ambos vértices estão dentro da janela, com código zero então $c_0 \vee c_1 = 0$. Portanto, o segmento P5-P6' é aceito trivialmente.

- Segmento P7-P8:

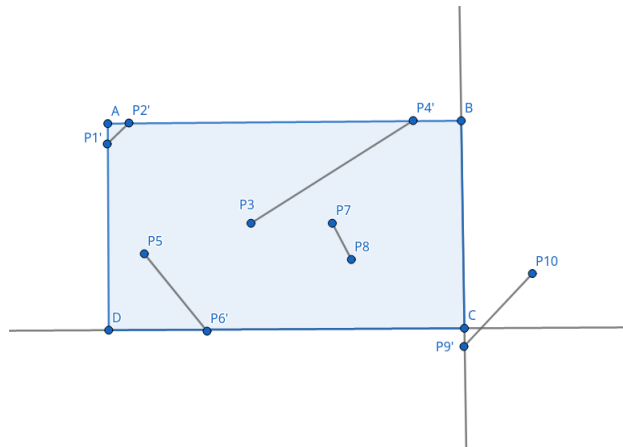
$c_0 : 0000$ $c_1 : 0000$

Ambos vértices estão dentro da janela, com código zero então $c_0 \vee c_1 = 0$. Portanto, o segmento P7-P8 é aceito trivialmente.

- Segmento P9-P10:

$c_0 : 0100$ $c_1 : 0010$

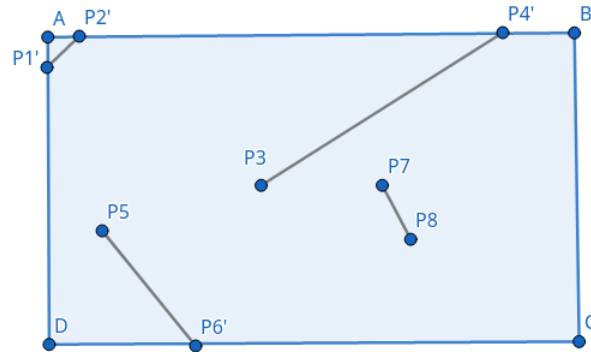
Ambos vértices estão fora da janela, mas $c_0 \wedge c_1 = 0$, então esse segmento P9-P10 não é trivialmente rejeitado. Assim, *clipping* é necessário, e faremos a mudança em P9. Logo: P9 se torna P9'.



Iteração 6

$c_0 : 0110$ $c_1 : 0010$

Ambos vértices estão fora da janela, e $c_0 \wedge c_1 \neq 0$, então segmento $P9'-P10$ é trivialmente rejeitado.



Resultado Final

Questão 5

Explique como funcionaria o recorte de polígonos de SutherlandHodgman para o polígono abaixo, em relação à janela de recorte dada (indique a sequência de passos que seriam executados pelo algoritmo).

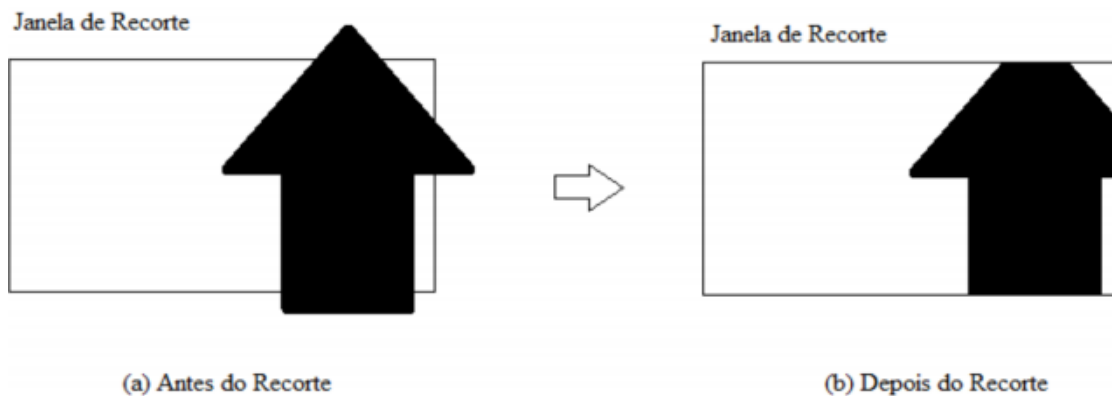


Figura 8: Polígono

Na execução do algoritmo, os lados testados são, em ordem, o esquerdo, o direito, o superior e enfim o inferior (left, right, up, bottom, in order).

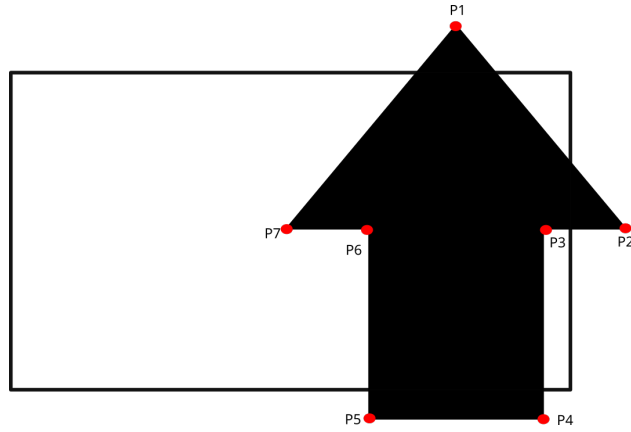


Imagem inicial, com pontos destacados.

- Lado esquerdo.

Analisando o lado esquerdo, a saída é igual à entrada, pois não há interseção do polígono naquele lado. Podemos pular a execução nesse lado.

$L : .P7P6P5P4P3P2P1 \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B :$

$L : \rightarrow R : .P1P7P6P5P4P3P2 \rightarrow U : \rightarrow B :$

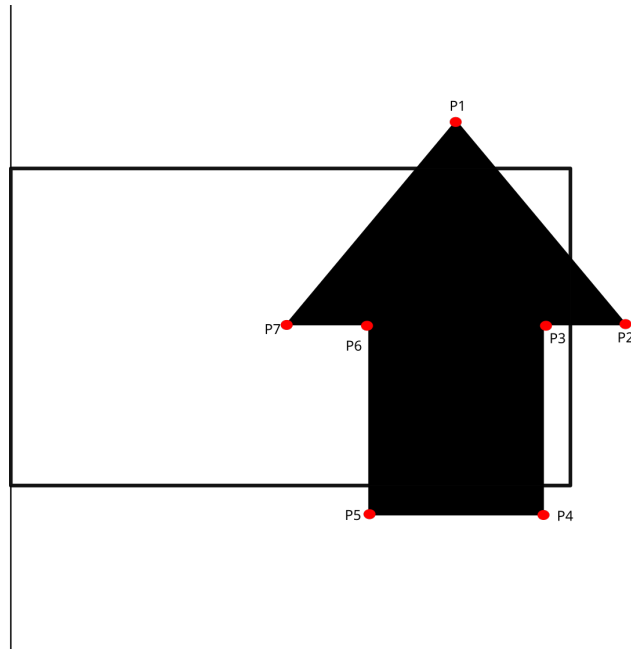


Imagem após iterações do lado esquerdo.

- Lado direito.

$L : \rightarrow R : .P1P7P6P5P4P3P2 \rightarrow U : \rightarrow B :$

$L : \rightarrow R : .P1P7P6P5P4P3 \rightarrow U : P3a \rightarrow B :$

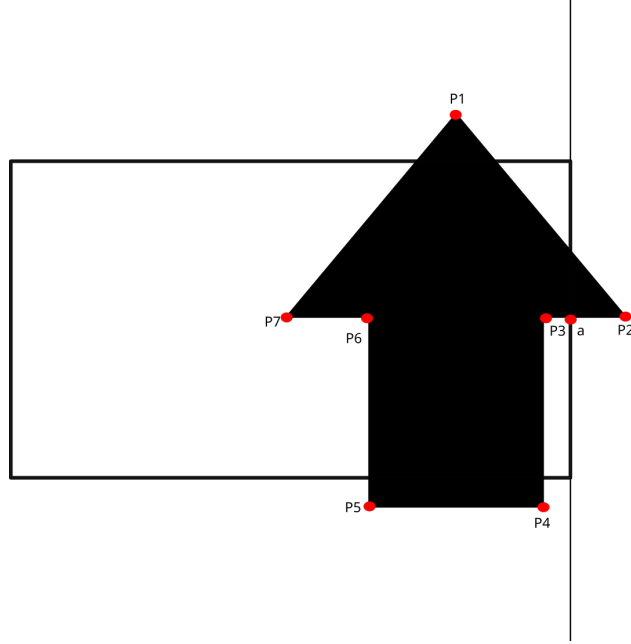


Imagem após primeira iteração do lado direito.

$L : \rightarrow R : .P1P7P6P5P4 \rightarrow U : P4P3a \rightarrow B :$
 $L : \rightarrow R : .P1P7P6P5 \rightarrow U : P5P4P3a \rightarrow B :$
 $L : \rightarrow R : .P1P7P6 \rightarrow U : P6P5P4P3a \rightarrow B :$
 $L : \rightarrow R : .P1P7 \rightarrow U : P7P6P5P4P3a \rightarrow B :$
 $L : \rightarrow R : .P1 \rightarrow U : P1P7P6P5P4P3a \rightarrow B :$
 $L : \rightarrow R : . \rightarrow U : bP1P7P6P5P4P3a \rightarrow B :$

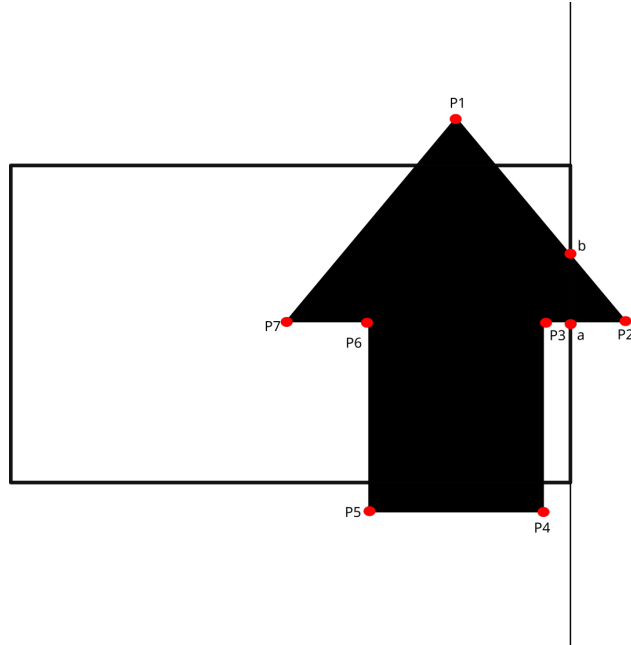


Imagem após iterações do lado direito.

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1P7P6P5P4P3a \rightarrow B :$

- Lado superior.

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1P7P6P5P4P3a \rightarrow B :$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1P7P6P5P4P3 \rightarrow B : P3$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1P7P6P5P4 \rightarrow B : P4P3$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1P7P6P5 \rightarrow B : P5P4P3$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1P7P6 \rightarrow B : P6P5P4P3$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1P7 \rightarrow B : P7P6P5P4P3$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .bP1 \rightarrow B : cP7P6P5P4P3$

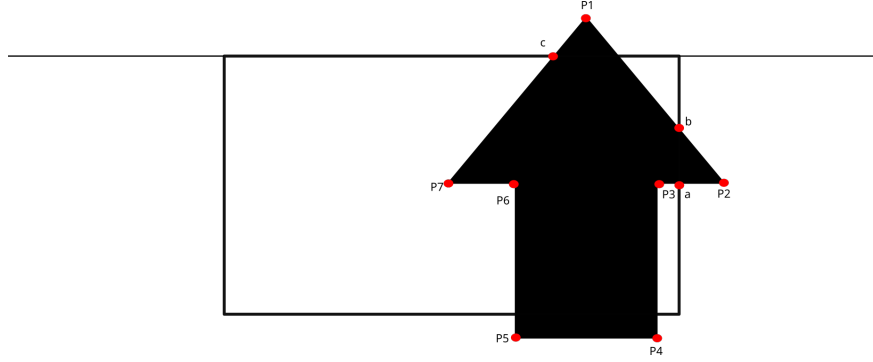


Imagem após primeira interseção do lado superior.

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : .b \rightarrow B : bdcP7P6P5P4P3$

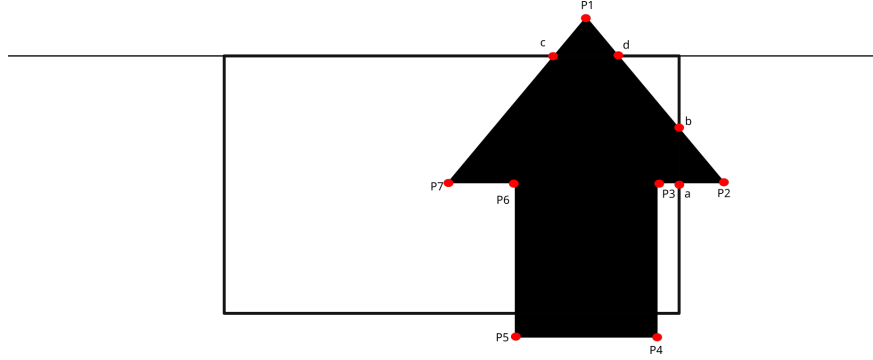


Imagem após segunda interseção do lado superior.

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : . \rightarrow B : abdcP7P6P5P4P3$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abdcP7P6P5P4P3$

- Lado inferior.

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abdcP7P6P5P4P3 \rightarrow$

$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abdcP7P6P5P4 \rightarrow e$

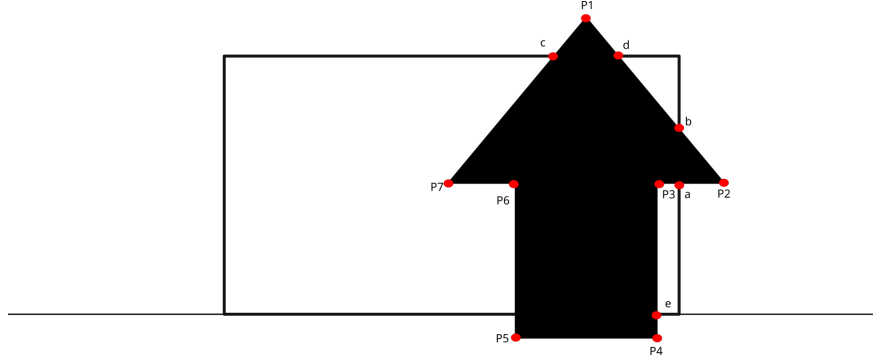


Imagem após primeira interseção do lado inferior.

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abdcP7P6P5 \rightarrow e$$

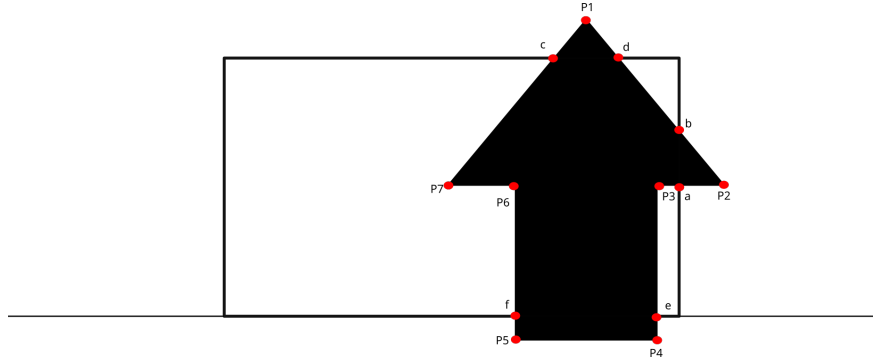
$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abdcP7P6 \rightarrow P6fe$$


Imagem após segunda interseção do lado inferior.

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abdcP7 \rightarrow P7P6fe$$

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abdc \rightarrow cP7P6fe$$

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .abd \rightarrow dcP7P6fe$$

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .ab \rightarrow bdcP7P6fe$$

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : .a \rightarrow abdcP7P6fe$$

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : . \rightarrow P3abdcP7P6fe$$

$$L : \rightarrow R : \rightarrow U : \rightarrow B : \rightarrow .P3abdcP7P6fe$$

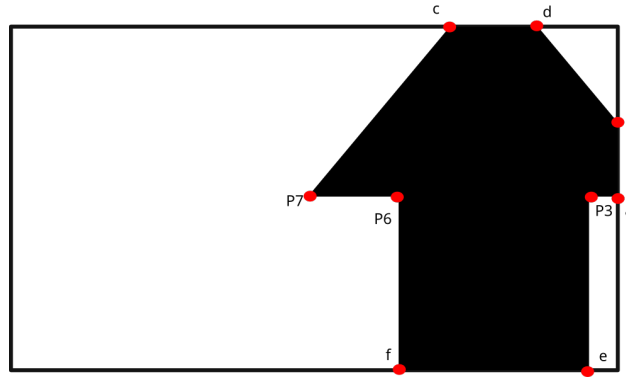


Imagem final após *clipping*.

Temos assim que a sequência final de vértices do polígono resultante é "e,f,P6,P7,c,d,b,a,P3".

Questão 6

Indique verdadeiro ou falso e justifique a resposta:

- a) A composição de duas translações comuta. (V)

Uma translação pelo vetor (x_1, y_1) e outra pelo vetor (x_2, y_2) é o mesmo que uma translação pelo vetor $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Isso pode ser visto tanto pela translação utilizando soma quanto a em coordenadas homogêneas. Como a operação de soma é comutativa, a translação também é. Por isso a afirmação é verdadeira.

- b) Toda transformação afim é uma transformação rígida. (F)

A afirmação é falsa pois inverte as posições de ambos tipos de transformação na hierarquia. Toda transformação rígida é uma transformação afim, porém as transformações rígidas são um subconjunto incompleto das afins, não englobando escala, reflexão, cisalhamento e outras transformações afins.

- c) A imagem do ponto $(4, -3)$ sob uma reflexão no eixo x é $(-4, -3)$. (F)

A afirmação é falsa pois uma reflexão no eixo x implica que a coordenada do ponto em x se mantém, sendo refletida a coordenada em y para o outro lado do eixo x, ou seja, $y_f = -y_i$, ao contrário da afirmação, que inverte a coordenada em x. A afirmação mostra uma reflexão no eixo y. Uma reflexão no eixo x seria $(4, 3)$.

- d) A imagem do ponto $(-5, 4)$ sob uma reflexão através do eixo y é $(5, 4)$. (V)

A afirmação é verdadeira pois uma reflexão no eixo y implica que a coordenada do ponto em y se mantém, sendo refletida a coordenada em x para o outro lado do eixo y, ou seja, $x_f = -x_i$, assim como afirmado.

Questão 7

Dadas as seguintes figuras, desenhe a imagem do resultado da figura após a transformação e defina o tipo de transformação em cada caso.

a) $(x,y) \rightarrow (x,-y)$.

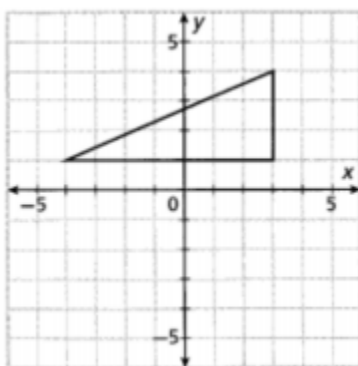


Figura 9: 7A

A transformação da figura 9 é uma **reflexão através do eixo x**.

As coordenadas da imagem são $(-4,1)$, $(3,1)$ e $(3,4)$, então após a reflexão o resultado é $(-4,-1)$, $(3,-1)$, $(3,-4)$. O resultado está na figura 10 abaixo:

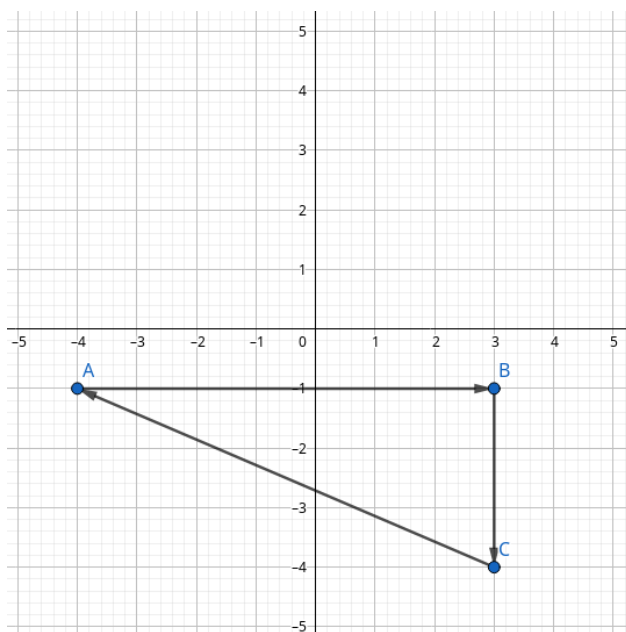


Figura 10: Resultado do item 7a.

b) $(x,y) \rightarrow (x,3y)$.

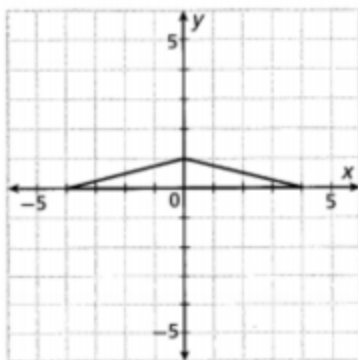


Figura 11: 7B

A transformação da figura 11 é uma **escala com fator 3 em y e fator 1 em x**. As coordenadas da imagem são $(0,3)$, $(-4,0)$ e $(4,0)$, então após a escala o resultado é $(0,3)$, $(-4,0)$, $(4,0)$. O resultado está na figura 12 abaixo:

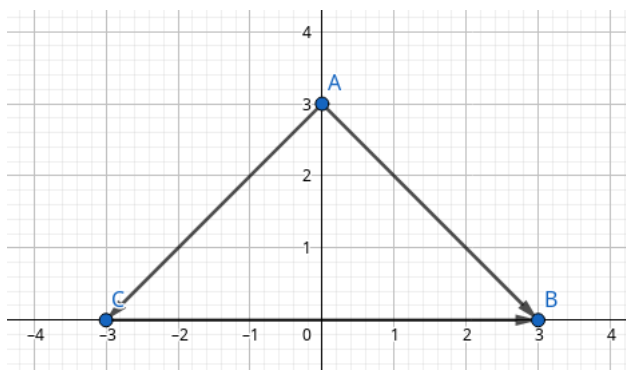


Figura 12: Resultado do item 7b.

c) $(x,y) \rightarrow (x-4,y-4)$.

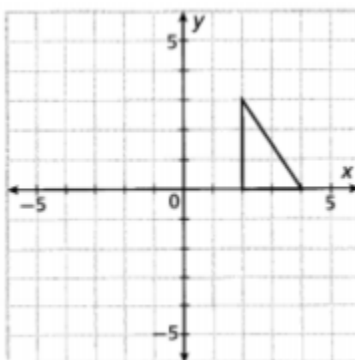


Figura 13: 7C

A transformação da figura 13 é uma **translação com offset em x igual a -4 e offset em y igual a -4**.

As coordenadas da imagem são (2,3), (2,0) e (4,0), então após a translação o resultado é (-2,-1), (-2,-4), (0,-4). O resultado está na figura 14 abaixo:

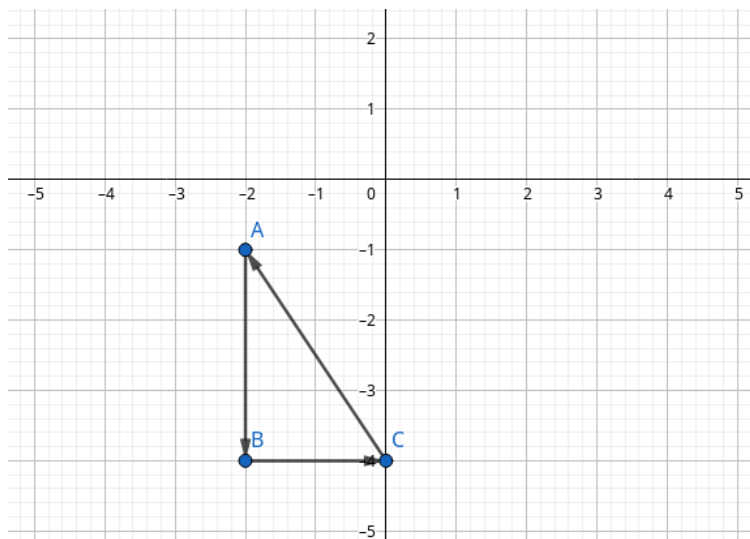


Figura 14: Resultado do item 7c.

Questão 8

Matriz de transformação:

- a) Construa a equação para a matriz de transformação que faça a translação $T(3,2)$ e a rotação $R(30^\circ)$, nesta ordem, para o objeto abaixo. Execute a operação para cada um dos pontos e faça o gráfico da nova posição do objeto.

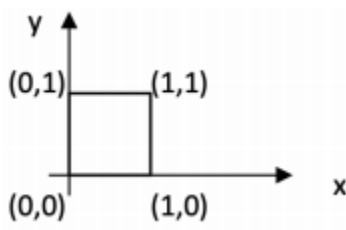


Figura 15: 8A

Queremos uma rotação em 30° . Assim, precisamos dos valores de seno e cosseno desse valor.
 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Com esses valores, podemos construir a matriz de rotação em 30° . Para realizar ambas transformações, precisamos realizar uma operação de composição. Então, A sendo a trans-

formação desejada, R sendo a rotação e T a translação, temos que:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = R \cdot T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = A \cdot P$$

$$A = R \cdot T$$

Vemos então que a composição é feita de, na ordem, $R \cdot T$. R e T são dados por:

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, a composição fica:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}-2}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} + \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As coordenadas do objeto da figura 15 são (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Após a transformação, as coordenadas finais são (1.6, 3.2), (1.1, 4.1), (2.5, 3.7), (2.0, 4.6), arredondando para 1 casa decimal. O resultado pode ser visto na figura 16 abaixo:

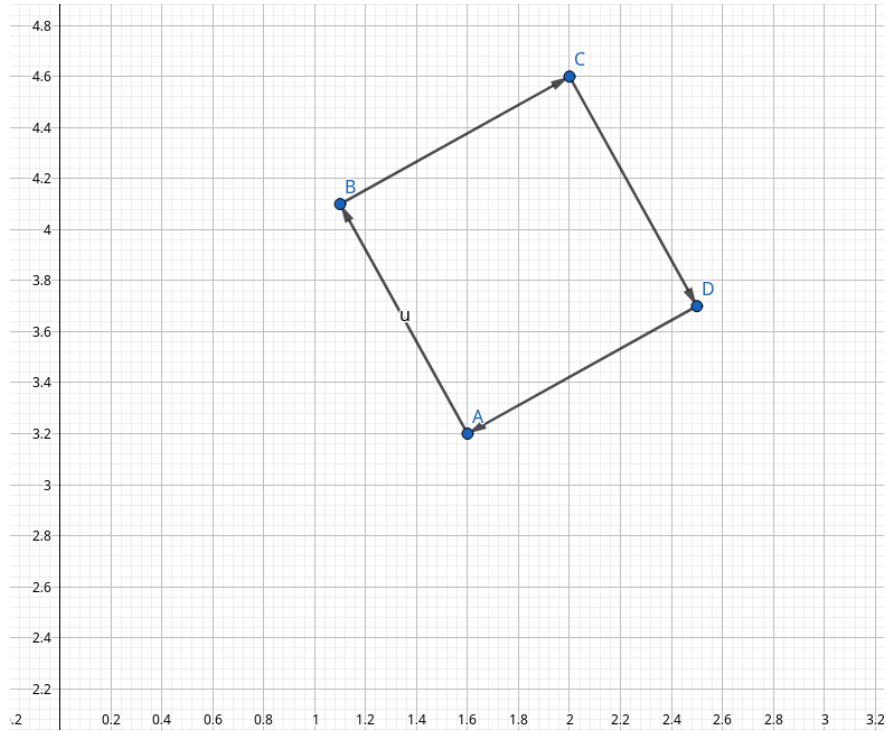


Figura 16: Resultado do item 8a

- b) Para o mesmo objeto da questão anterior, inverta a ordem das operações, ou seja faça primeiro a rotação e depois a translação. Construa a matriz de transformação e aplique ao objeto. Mostre graficamente a nova posição do objeto.

Para realizar ambas transformações, precisamos realizar uma operação de composição. Então, B sendo a transformação desejada, R sendo a rotação e T a translação, temos que:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = T \cdot R \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = B \cdot P$$

$$B = T \cdot R$$

Assim, a composição fica:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

As coordenadas do objeto da figura 15 são (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Após a transformação, as coordenadas finais são (3, 2), (3.9, 2.5), (2.5, 2.9), (3.4, 3.4), arredondando para 1 casa decimal. O resultado pode ser visto na figura 17 abaixo:

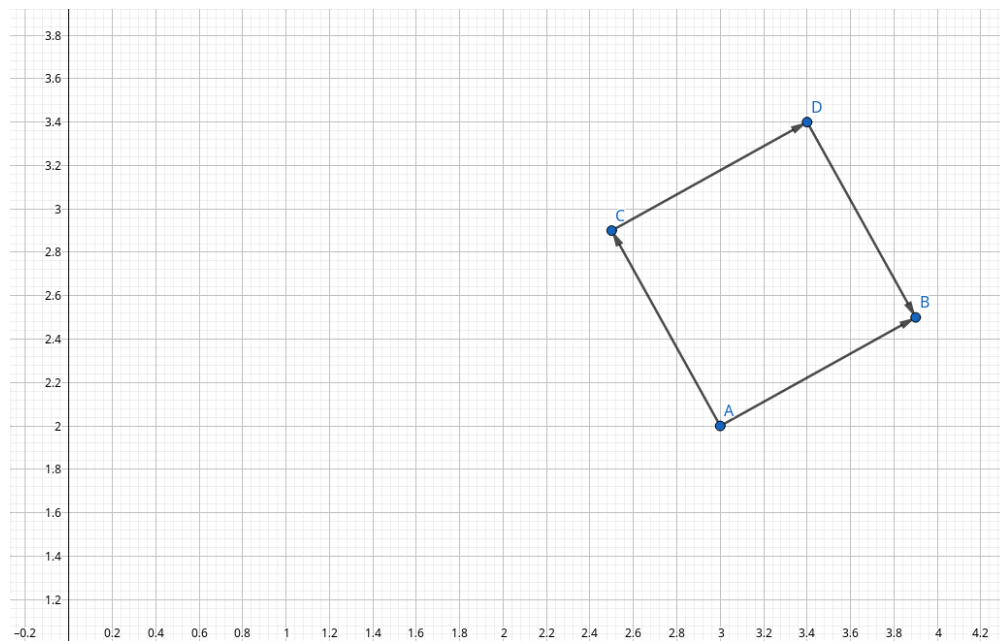


Figura 17: Resultado do item 8b

c) O que pode concluir?

Se pode concluir que, como as figuras resultantes de ambas composições não são iguais, translação e rotação não são transformações comutativas entre si. No primeiro resultado, a imagem está mais deslocada para cima, enquanto no segundo resultado a imagem está mais deslocada para a direita, e a diferença em ambos eixos é de aproximadamente 1.2 a 1.4.

d) Porque usamos coordenadas homogêneas para especificar transformações geométricas em CG?

Usamos coordenadas homogêneas para melhor realizar composição de transformações com multiplicações entre matrizes. Sem elas, algumas transformações (como translação) não poderiam ser compostas com multiplicação.

Questão 9

Dado três pontos $(x(0), y(0))$, $(x(1), y(1))$, $(x(2), y(2))$ no plano (x, y) , mostre como calcular uma matriz de coeficiente C (2×3) tal que

$$q(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

a curva $q(t)$ passa pelos três pontos dados em $t = 0, 0.5, 1$. Note que a curva $q(t)$ é quadrática, em vez de cúbica.

Como a curva é quadrática, temos que:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_x t^2 + b_x t + c_x \\y(t) &= a_y t^2 + b_y t + c_y\end{aligned}$$

Assim, com os valores de t que temos, podemos, para ambos eixos, encontrar sistema de 3 equações e 3 incógnitas. Primeiro, para o eixo x:

$$\begin{aligned}x(0) &= c_x = x_0 \\x(0.5) &= \frac{a_x}{4} + \frac{b_x}{2} + c_x = x_1 \\x(1) &= a_x + b_x + c_x = x_2\end{aligned}$$

Substituindo c_x em todas as equações e multiplicando $x(0.5)$ por 4, temos:

$$\begin{aligned}4x_1 &= a_x + 2b_x + 4x_0 \\x_2 &= a_x + b_x + x_0\end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, conseguimos encontrar b_x :

$$\begin{aligned}4x_1 - x_2 &= b_x + 3x_0 \\b_x &= -3x_0 + 4x_1 - x_2\end{aligned}$$

Substituindo em $x(1)$, conseguimos o último coeficiente a_x :

$$\begin{aligned}x_2 &= a_x - 3x_0 + 4x_1 - x_2 + x_0 \\a_x &= 2x_0 - 4x_1 + 2x_2\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned}a_x &= 2x_0 - 4x_1 + 2x_2 \\b_x &= -3x_0 + 4x_1 - x_2 \\c_x &= x_0\end{aligned}$$

O processo é exatamente o mesmo para o eixo y, gerando o mesmo resultado, mas com $y_i, 0 \leq i \leq 2$.

A matriz de coeficientes C é da forma:

$$C = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \end{bmatrix}$$

Considerando as equações para os coeficientes da primeira linha e seus análogos para y, temos:

$$C = \begin{bmatrix} 2x_0 - 4x_1 + 2x_2 & -3x_0 + 4x_1 - x_2 & x_0 \\ 2y_0 - 4y_1 + 2y_2 & -3y_0 + 4y_1 - y_2 & y_0 \end{bmatrix}$$

Questão 10

Defina exemplos de representações implícitas, explícitas e paramétricas de uma superfície. Quando consideramos uma imagem como uma função matemática bidimensional, podemos considerar a imagem como uma superfície? Em caso afirmativo, qual das três representações acima corresponde a uma imagem?

Formas implícitas de uma superfície no espaço estão na forma $f(x, y, z) = 0$. Um exemplo seria uma esfera representada por $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$, onde r é o raio da esfera.

Formas explícitas de uma superfície no espaço são dadas na forma $z = f(x, y)$ ou equivalente. Um exemplo seria o plano $z = 3x + y$.

Formas paramétricas de uma superfície no espaço podem ser obtidas a partir das outras formas substituindo parâmetros u, v para definirem a superfície. Por exemplo, no plano dado explicitamente, $z = 3x + y$, podemos definir $u = x - 1$ e $v = y + 5$, e assim temos a curva paramétrica:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u + 1 \\y(u, v) &= v - 5 \\z(u, v) &= 3u + v - 2\end{aligned}$$

Podemos considerar uma imagem como uma superfície, representando como função, na qual o eixo z é o valor de cada pixel, dado pela coordenada (x, y) . A imagem, nesse caso, estaria na forma **explícita** de superfície $z = f(x, y)$.

Questão 11

Defina a forma paramétrica da curva cúbica Bézier $B(t)$ considerando os seguintes pontos de controle: $P_0 = (1, 2)$, $P_1 = (4, -1)$ e $P_2 = (8, 6)$. Calcule as equações $(x(t), y(t))$ e obtenha o ponto $B(0.5)$.

Questão cancelada: faltando um ponto de controle.

Questão 12

Uma curva cúbica Hermite passa através dos pontos $(0,0)$, $(2,4)$, $(4,3)$, $(5,-2)$ as quais estão parametrizadas em $t = [0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1]$, respectivamente. Determine a matriz de coeficientes C na qual C pode ser definida como (M^*G) .

A curva cúbica Hermite fornece a matriz de coeficientes C , sendo que $C = MG$. Na curva de Hermite, M é uma matriz definida a partir da inversa de uma matriz obtida pelo polinômio cúbico e a parametrização, e G é a matriz definida pelos pontos fornecidos:

$$\begin{aligned}
P(0) &= (0, 0) \\
P\left(\frac{1}{4}\right) &= (2, 4) \\
P\left(\frac{3}{4}\right) &= (4, 3) \\
P(1) &= (5, -2) \\
G &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

O polinômio, para cada parâmetro, tem mesma equação para x e y . Assim, substituindo os valores de t no polinômio cúbico, obtemos os coeficientes da matriz inversa de M , a matriz que, ao multiplicar C , gera os pontos dados:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{64} & \frac{1}{16} & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{27}{64} & \frac{9}{16} & \frac{3}{4} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz M é obtida ao obter a inversa de B .

$$M = \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} & \frac{32}{3} & -\frac{32}{3} & \frac{16}{3} \\ \frac{32}{3} & -\frac{56}{3} & \frac{40}{3} & -\frac{16}{3} \\ -\frac{19}{3} & 8 & -\frac{8}{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Enfim, temos $C = MG$:

$$C = \begin{bmatrix} -\frac{16}{3} & \frac{32}{3} & -\frac{32}{3} & \frac{16}{3} \\ \frac{32}{3} & -\frac{56}{3} & \frac{40}{3} & -\frac{16}{3} \\ -\frac{19}{3} & 8 & -\frac{8}{3} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & 0 \\ -\frac{32}{3} & -24 \\ \frac{31}{3} & 22 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos então, que $P(t) = TC$, e ao realizar a multiplicação pode-se confirmar que a matriz está correta.

Questão 13

Bônus: Defina a forma paramétrica da curva cúbica Hermite, dados os pontos bidimensionais $P1 = (0,0)$ e $P2 = (1,0)$ e os dois vetores tangentes $Pt1 = (1,1)$ e $Pt2 = (0,-1)$.

A curva cúbica Hermite fornece a matriz de coeficientes C , sendo que $C = MG$. Na curva de Hermite, M é uma matriz definida a partir da inversa de uma matriz obtida pelo polinômio cúbico e sua derivada (vetores tangentes), e G é a matriz definida pelos pontos extremos e os vetores tangentes fornecidos:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim, a matriz C é dada por:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A forma paramétrica da curva pode ser encontrada multiplicando os termos do polinômio com essa matriz ($P(t) = TMG = TC$).

$$P(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t^3 + t^2 + t & -t^2 + t \end{bmatrix}$$

Assim, temos que a curva paramétrica é:

$$x(t) = -t^3 + t^2 + t$$

$$y(t) = -t^2 + t$$