Билеты к коллоквиуму по математическому анализу

VG6

11 неделя 2025

Содержание

1 Введение

1.1 Комплексные числа. Действия над ними. Геометрическое представлние. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Эйлера, определение e^z.

1.1.1 Определение и свойства

Определение. *Комплексными числами* называются числа вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, а i — *мнимая единица*, обладающая свойством $i^2 = -1$.

- $x = \operatorname{Re} z$ — **действительная часть** числа z.
- $y = \operatorname{Im} z$ — **мнимая часть** числа z.
- Если $y = 0$, то $z = x$ — действительное число.
- Число $\overline{z} = x - iy$ называется **комплексно-сопряжённым** к z.

Свойство: $z \cdot \overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

Важное примечание

Нельзя сравнивать комплексные числа операциями $<, >, \leq, \geq$!

1.1.2 Арифметические операции

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

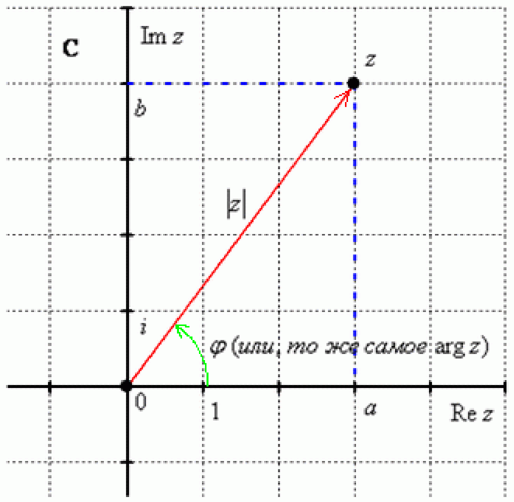
1. **Сложение/Вычитание:** $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
2. **Умножение:**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

3. **Деление:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

1.1.3 Геометрическое представление



1.1.4 Тригонометрическая форма

$$\boxed{z = r(cos\phi + i\ sin\phi),\ r = |z|}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (cos(\phi_1 + \phi_2) + i\ sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\phi_1 - \phi_2) + i\ sin(\phi_1 - \phi_2))$$

1.1.5 Формула Эйлера

$$\boxed{\begin{gathered} e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi \\ e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (cos\ y + i \cdot sin\ y) \end{gathered}}$$

Действительная часть: $Re\ e^z = e^x \cos y$
Мнимая часть: $Im\ e^z = e^x \sin y$

1.2 Возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел. Форула Муавра.

1.2.1 Формула Де-Муавра

$$\boxed{(cos\phi + i\ sin\phi)^k = cos\ k\phi + i\ sin\ k\phi}$$

1.2.2 Комплексные корни

$$\sqrt[n]{z} = \omega$$

$$\omega^n = z, z \neq 0$$

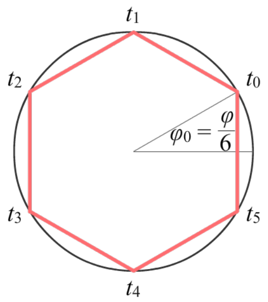
$$z = re^{i\phi}, \omega = \rho e^{i\Psi}$$

$$\omega^n = \rho^n e^{in\Psi} = z = re^{i\phi} = re^{i(\phi + 2\pi k)}$$

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$$

$$n\Psi = \phi + 2\pi k \Rightarrow \Psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$$

Корни будут образовывать правильный многоугольник.



1.3 Неравенство треугольника для действительных и комплексных чисел, геометрическое и алгебраическое доказательства.

1.3.1 Неравенство треугольника

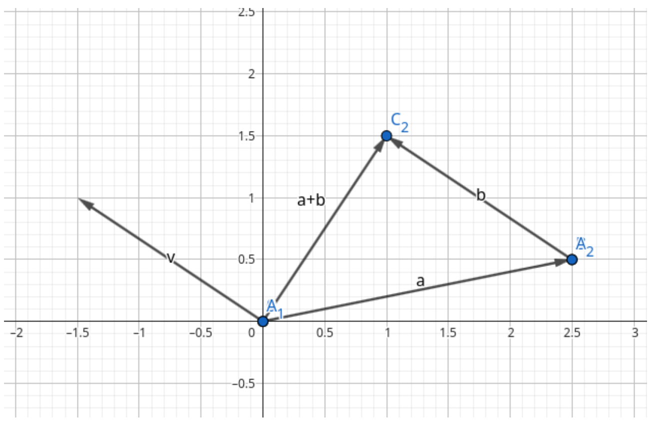


Рис. 1: Геометрический смысл неравенства треугольника: длина стороны $|\vec{a}+\vec{b}|$ не превосходит суммы длин сторон $|\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Теорема (Неравенство треугольника): Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Доказательство

$|a + b| \leq |a| + |b|$

1. $a \geq 0$ $(|a| \geq |b|)$
   $a + b \geq 0$, то $|a + b| = a + b$.
   $a + b \leq 0$, то $|a + b| = -(a + b) = -a - b \leq |a| + |b|$
2. $|a - b| \geq ||a| - |b||$
   $a = (a - b) + b$ по н.т.: $|a + 0| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|$

Аналогично $|b| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |a-b| \geq |b| - |a|$

Получим, что $\begin{cases} |a-b| \geq |a| - |b| \\ |a-b| \geq | - (|a| - |b|) \end{cases} \Rightarrow |a-b| \geq ||a| - |b||$

Следствие

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.4 -Формулы Моргана

1.5 Метод математической индукции (ММИ). Прямая индукция. Формула Бинома Ньютона

1.5.1 Метод математической индукции (ММИ)

Алгоритм доказательства по индукции:

1. **База индукции:** Проверить утверждение для $n = 1$.
2. **Индукционное предположение:** Предположить, что утверждение верно для $n = k$.
3. **Индукционный переход:** Доказать, что из этого следует верность утверждения для $n = k + 1$ (Прямая индукция).

1.5.2 Бином Ньютона

Определение.

Биномиальный коэффициент: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где $n, k \in \mathbb{N}_0$

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Доказательство по ММИ

База индукции: Для $n = 1$:

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a + b$$

База индукции доказана.

Индукционное предположение: Предположим, формула верна для $n =$

m:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k$$

Индукционный переход: Докажем для $n = m+1$. Рассмотрим левую часть:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k$$

Раскроем скобки:

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}$$

Во второй сумме сделаем замену индекса $j = k+1$:

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j$$

Теперь объединим суммы, выделяя крайние слагаемые:

$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[C_m^k + C_m^{k-1} \right] a^{(m+1)-k} b^k + C_m^m b^{m+1}$$

Используем свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$$

Учитывая, что $C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1$ и $C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1$, получаем:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{(m+1)-k} b^k$$

Индукционный переход завершён.

1.6 ММИ. Обратная индукция. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Неравенство о средних

Теорема (Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим): Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ справедливо:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство по ММИ (метод Коши / метод обратой индукции)

Докажем теорему в три этапа.

1. База индукции для степеней двойки ($n = 2^m$).

- **Для $n = 2$:** Докажем $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

$$(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Rightarrow a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0 \Rightarrow a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 4a_1a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

- **Предположим, неравенство верно для $n = k$.**

- **Докажем для $n = 2k$:**

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2k}}{2k} = \frac{\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 \dots a_{2k}}$$

2. Докажем, что если неравенство верно для n, то оно верно и для $n - 1$. Рассмотрим $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \geq 0$. Пусть

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1}$$

Для набора из n чисел неравенство верно:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n}$$

Подставим a_n:

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_{n-1}) + \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = a_n$$

Таким образом:

$$a_n \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n}$$

Возведём в степень n:

$$a_n^n \geq a_1a_2 \dots a_{n-1}a_n \Rightarrow a_n^{n-1} \geq a_1a_2 \dots a_{n-1}$$

Извлекая корень $(n-1)$-й степени:

$$a_n \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2 \dots a_{n-1}} \Rightarrow \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2 \dots a_{n-1}}$$

3. Завершение доказательства. Мы доказали, что:

1. Неравенство верно для $n = 2$ (а значит, для $n = 4, 8, 16, \dots$)
2. Из верности для n следует верность для $n - 1$

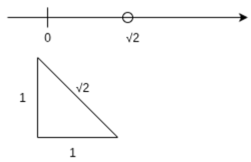
Следовательно, неравенство верно для любого натурального n.

2 Действительные чсла. Числовые множества.

2.1 Дедекиндовы сечения. Определение действительных чисел по Дедекинду. Полнота $\mathbb{R}$ по Дедекинду.

2.1.1 Неполнота рациональных чисел.

$r = \dfrac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$
Дробь можно сделать несократимой.
Пусть $(\dfrac{p}{q})^2 = 2$ - несократимая дробь $\Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2k$ (p - чётное число)
$k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$ q - чётное число
т.к. дробь несократимая, а числитель и знаменатель чётные, то она на самом деле сократимая. Противоречие!
Значит это число **нельзя** представить рациональной дробью.



Если на оси отметить все рациональные числа точками, то $\sqrt{2}$ - будет выколотой точкой.

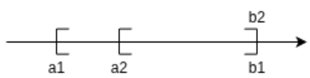
Отрезки

$I_n = [a_n, b_n] = \{r \in \mathbb{Q} \mid a_n \leq r \leq b_n\}$, где $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$

> Будем считать, что $\forall n [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ - **вложенные отрезки.**
> Это значит, что $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ и следующий отрезок меньше предыдущего.

> $b_n - a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ - **стягивающиеся отрезки.**

Дальше будем подразумеваться, что все последовательности $\{I_n\}$ - вложенные и стягивающиеся в точку.



Что нам дают такие отрезки: $\forall r$

$$\exists n : r < a_n \Rightarrow \forall m > n : \; r < a_m \tag{1}$$

$$\exists n : r > b_n \Rightarrow \forall m > n : \; r > b_m \tag{2}$$

$$\forall n : a_n \leq r \leq b_n \tag{3}$$

1. левый класс для $\{I_n\}$ (всегда не пуст)

2. правый класс для $\{I_n\}$ (всегда не пуст)

3. центральный класс для $\{I_n\}$ (может быть пустым учитывая $r \in \mathbb{Q}$). Не может содержать более 1 Q числа.

Слово "класс"подразумевает множество.

Дедекиндово сечение - множество рациональных чисел (Q) порождённое последовательностью $\{I_n\}$.

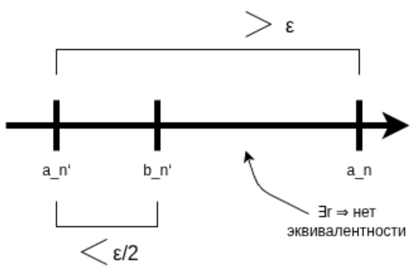
Тогда каждому действительному числу будет соответствовать своё дедекиндово сечение.

Определение
$\{I_n\}$ *и* $\{I_n``\}$ - ***эквиваленты****, если они порождают одинаковые разбиения на классы*

Теорема 1
$\{I_n\} \sim$ эквивалентна $\{I_n`\} \Leftrightarrow$

1. $\forall n \;\; a_n - a_n` \xrightarrow{n\to\infty} 0$
   ИЛИ
2. $\forall n a_n \leq b_n`, \;\; a_n` \leq b_n$

Доказательство Т1



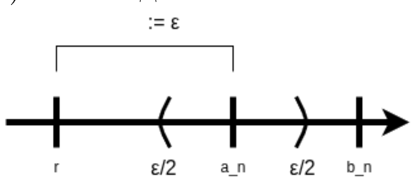
Только п.1.
$\Rightarrow$: $\{I_n\} \sim \{I_n`\} \Rightarrow a_n - a_n` \to 0$
от противного: тогда $a_n - a_n` \nrightarrow 0 \Leftrightarrow$
$\exists \varepsilon > 0 : \;\forall N \;\; \exists n > N \; |a_n - a_n`| \geq \varepsilon$
$\Rightarrow$ для бесконечно многих номеров либо $a_n - a_n` > \varepsilon$, либо $a_n` - a_n > \varepsilon$
Пусть для бесконечно многих номеров $a_n - a_n` > \varepsilon$
$\exists n_\varepsilon$ длина $[a_n`, b_n`] < \dfrac{\varepsilon}{2}$
$b_n` - a_n` \to 0 \; \exists n_\varepsilon : \;\forall n > n_\varepsilon \; |b_n` - a_n`| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
Т.к. $\exists r \in [b_n`, a_n]$, то она принадлежит правому классу $\{I_n`\}$ и левому классу $\{I_n\}$. Последовательности не эквивалентны.

$\Leftarrow$: $a_n - a_n` \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \{I_n\} \sim \{I_n`\}$
От противного: пусть $\{I_n\} \nsim \{I_n`\}$, то есть $\exists r \in Q \; r$ из левого класса для одной и центрального или правого класса другой.
r из левого класса $\{I_n\} \exists n : r < a_n$

i. r из правого класса $\{I_n`\} \Rightarrow \exists n` : \forall n > n` \;\; a_n` \leq b_n` < r < a_n \leq a_m$

ii. r из центрального класса $\{I_n`\}$
$\exists n : r < a_n$ Пусть $\varepsilon = a_n - r (> 0)$
$\exists n_\varepsilon : \forall m > n_\varepsilon |b_m` - a_m`| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow [a_m`, b_m`]$ на расстоянии не меньше $\dfrac{\varepsilon}{2}$ от a_n

2 вариант доказательства в обратную сторону.
$\Leftarrow: a_n - a_n` \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \{I_n\} \sim \{I_n`\}$
а) совпадение левых классов $r \in$ левый класс для $\{I_n\}$



$\exists n : r < a_n$
$\exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \ |a_n - a_n`| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow r < a_n` \Rightarrow r \ \in$ левый класс для $\{I_n`\}$
б) правые классы аналогично

2.1.2 Ограничение на количество элементов центрального класса.

Если r из центрального класса, то $\forall n : \ a_n \le r \le b_n$
А если $\exists r`, r \in$ центральный класс $r < r`$, то $a_n \le r < r` \le b_n$. Тогда длина отрезка не может быть меньше длины отрезка $[r, r`]$ значит она не стремится к 0.
В центральном классе может быть либо 1 число либо 0.

Пример 2-х последовательностей стягивающихся к 0

$\{I_n\} = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ $\{I_n`\} = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}]$ $\{I_n``\} = [0, \frac{1}{2n+1}]$ Они определяют 1 и то же число.

Пример 2-х последовательностей стягивающихся к $\sqrt{2}$

$[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}]$

2.1.3 Действительные числа

Действительные числа *- это вложенные стягивающиеся отрезки с рациональными концами. Числа равны, если последовательность* $\{I_n\} \sim \{I_n`\}$
Действительные число *- отождествляется с дедекиндовым сечением, порождённым* $\{[a_n, b_n]\}$ *. Числа равны, если последовательность* $\{[a_n, b_n]\} \sim \{[a_n`, b_n`]\}$

Ограничение на количество элементов центрального класса.

Если r из центрального класса, то $\forall n : \ a_n \le r \le b_n$
А если $\exists r`, r \in$ центральный класс $r < r`$, то $a_n \le r < r` \le b_n$. Тогда длина отрезка не

может быть меньше длины отрезка $[r, r`]$ значит она не стремится к 0.
В центральном классе может быть либо ё число либо 0.

Пример 2-х последовательностей стягивающихся к 0

$\{I_n\} = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}]$ $\{I_n`\} = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}]$ $\{I_n``\} = [0, \frac{1}{2n+1}]$ Они определяют 1 и то же число.

Пример 2-х последовательностей стягивающихся к $\sqrt{2}$

$[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}]$

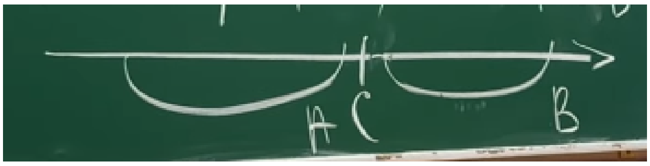
2.1.4 Полнота по Дедекинду

Полнота по Дедекинду - это непустота центрального класса.

2.2 Лемма об отделимости.

2.2.1 Отделимость множеств

$$A, B \subset \mathbb{R}, A, B \neq \varnothing,\ \forall a \in A, \forall b \in B$$



$$a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}:$$
$$\forall a \in A, \forall b \in B \ \ a \leq c \leq b$$

Доказательство

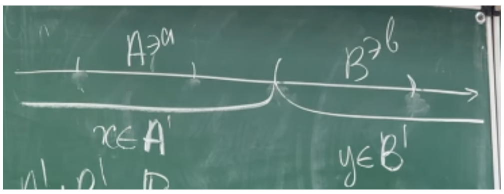
1. $A \cap B \neq \varnothing \ \ \exists c \in Aa \cap B$

$$\begin{cases} c \in A \Rightarrow \forall b \in B \ \ c \leq b \\ c \in B \Rightarrow \forall a \in A \ \ a \leq c \end{cases} \Rightarrow \forall a \in A\ \forall b \in B \ \ a \leq c \leq b$$

Как доп вопрос может спросить про единственность c. Там очев, так что сами.

2. $A \cap B = \varnothing\ \forall a \in A, \forall b \in B\ a \leq b$, если бы $a = b \in A \cap B \Rightarrow a < b$

Пусть множется A и B непустые.



$$B` := \{y \in \mathbb{R} :\ \exists b \in B : b \leq y\}$$
$$\forall b \in B \ \ b \leq b \Rightarrow b \in B`$$

$$\forall a \in A \; \forall b \in B \;\; a < b \Rightarrow a \notin B` \Rightarrow A \cap B = \varnothing$$

$$A` := \mathbb{R} \setminus B` \supset A \Rightarrow A` \neq \varnothing$$

$$A` \cup B` = \mathbb{R}$$

$$\forall y \in B` \Rightarrow \exists b \in B : b \leq y$$

$$\forall x \in A` \;\; \forall b \in B \;\; x \leq b$$

Если бы не так, то $\exists b \in B : x \geq b \Rightarrow x \in B` \Rightarrow x \in A`$

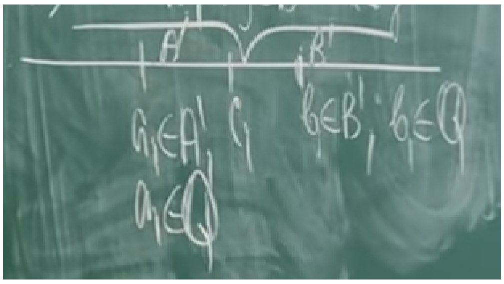
$$\forall x \in A` \; \forall y \in B` \; \exists b_y : x < b_y \leq y$$

Свойства:

(a) $A`, B` \neq \varnothing$

(b) $A` + B` = \mathbb{R}$

(c) $\forall x \in A`, \forall y \in B` \;\; x < y$



$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$
$$c_1 \in \mathbb{Q}$$

Если $c_1 \; inA`$, то

$$[a_2, b_2] := [c_1, b_1]$$

Если $c_1 \in B`$, то $[a_2, b_2] := [a_1, c_1]$

$$[a_2, b_2] \supset [a_1, b_1]$$

Длинна $[a_2, b_2] = \frac{1}{2}$ длинны $[a_1, b_1]$

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

$[a_3, b_3]$ тот из отрезков $[a_2, c_2]$ и $[c_2, b_2]$, концы которого $a_3 \in A` \quad b_3 \in B`$

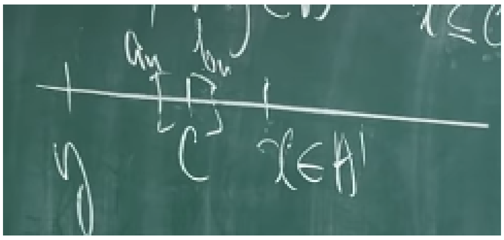
...

$[a_n, b_n]$ длиинна $[a_m, b_n] = \frac{1}{2}$ длинна $[a_{n-1}, b_{n-1}] = \frac{1}{2^{n-1}}$ длина $[a_1, b_1] \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$$\forall a_n \in A`, \forall b_n \in B` \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} \; \forall n \; c \in [a_n, b_n]$$

$$\forall n \;\; a_n \leq c \leq b_n$$

$$\forall x \in A`, \forall y \in B` \;\; x \leq c \leq y$$



С разделяет А‘ и В‘ $\Rightarrow$ разделяет А и В.

Из отделимости следует существование точной верхней грани.
Следствие. Если E ограничено сверху, то существует точная верхняя грань E.

$$M = \sup E$$

Следствие. Если E ограничено снизу, то существует точная нижняя грань E.

$$m = \inf E$$

Доказательство

E ограничено сверху, M - множество верхних граней. $\forall x \in E, \forall m \in M$

$$x \leq m \Rightarrow \exists m‘ \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in E, \forall m \in M \quad x \leq m‘ \leq m$$

2.3 Точная верхняя и нижняя грани ограниченных множеств из R. Теорема Вейерштрасса о существовании точной верхней грани ограниченного сверху множества как следствие леммы об отделимости (принцип полноты R по Вейерштрассу).

2.3.1 Точная верхняя грань

$$E \subset \mathbb{R}, E \neq \varnothing$$

Определение. E ограничено сверху, если $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : x \leq M$
M - Верхняя грань (граница)

Ограниченность снизу анологична.

Определение. M - точная верхняя грань E, если

1. M - верхняя граница E
2. M - наименьшая верхняя граница, т.е. $\forall M‘ < M \ \exists x_M \in E : x_M > M‘$

2.3.2 Полнота по Вейерштрассу

Принцип полноты множества по Вейерштрассу Принцип полноты множества по Вейерштрассу означает, что любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань

Определение $\{a_n\}$ монотонна, если возрастает/ строго возрастает/убывает/строго убывает.

Теорема по Вейерштрассу

1. $\{a_n\} \uparrow \Rightarrow a_n \to sup\{a_n\}$
2. $\{a_n\} \downarrow \Rightarrow a_n \to inf\{a_n\}$

Определение $sup\{a_n\}$ - это sup множества членов последовательности.

Доказательство полноты $\mathbb{R}$ по Вейерштрассу

Доказательство

1. Ограничено сверху $\exists M : \forall n a_n \leq M \Rightarrow \exists sup\{a_n\} = M \in \mathbb{R}$
   По определению предела $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon |a_n - M| < \varepsilon$
   $\Leftrightarrow M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon$ т.к. $M = sup\{a_n\}$, то $a_n \leq M$ надо проверить $M - \varepsilon < a_n \leq M$
   М - наименьшая верхняя грань $\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \quad M - \varepsilon \leq a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq M$
   т.е. по определению
   $$M = \lim_{n \to \infty} a_n$$
   Следствие $\{a_n\}$ - монотонна $\{a_n\}$ - сходится $\Leftrightarrow \{a_n\}$ - ограничена.

2.4 Последовательности стягивающихся отрезков с действительными концами. Теорема Кантора о стягивающихся отрезках с действительными концами (принцип полноты R по Кантору).

2.4.1 Принцип вложенных отрезков (полнота $\mathbb{R}$ по Кантору)

$$\forall n \ A_n \neq \varnothing$$

1. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ... \subset A_k$
   $$\cap_{n=1} A_n \neq \varnothing$$
2. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1} \subset ...$
   (a) $A_k := \{x \in \mathbb{R}, \ x \geq k\}$
   $$\cap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \varnothing$$

(b) $A_k = (0, \frac{1}{k}]$

$$\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \varnothing$$

$$\forall k \; x \notin A_k$$

(c) $A_k := (-\frac{1}{k}; \frac{1}{k})$

$$\cap_{k=1}^{\infty} A_k = 0$$

Теорема. $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \supset ...$

2.5 Полнота $\mathbb{R}$ по Дедекинду как следствие принципа стягивающихся отрезков.

2.6 Счётность множества, рациональных чисел и несчётность множества действительных чисел.

3 Последовательность и ряды.

3.1 Свойства сходящихся последовательностей (сходимость постоянной последовательности, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности).

3.1.1 Предел последовательности

Определение. Число a называется *пределом последовательности* $\{a_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$.

3.1.2 Сходимость постоянной последовательности

Теорема 1. Если $\exists N : \forall n > N \;\; a_n = a \Rightarrow a_n \to a$

Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \forall n > N \;\; |a_n - a| = 0 < \varepsilon \Rightarrow a_n \to a$$

по определению

Теорема 2. Если $a_n \to a, \;\; b_n \to b \;\; \forall n > N \;\; a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

Доказательство

От противного:
Пусть $a < b$

НАДО ПОСМОТРЕТЬ ПРЕДЫДУЩИЕ ЛЕКЦИИ. ЭТО ОТТУДА.

3.1.3 Теорема о единственности предела.

Теорема: Последовательность не может иметь более одного предела.

Доказательство теоремы

Доказательство от противного: Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ имеет два различных предела: $a_n \to A$ и $a_n \to B$, где $A \neq B$. Пусть $\varepsilon = \frac{|A-B|}{4} > 0$. Тогда по определению предела:

- $\exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$
- $\exists N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - B| < \varepsilon$

Возьмём $n > \max(N_1, N_2)$. Тогда выполняются оба неравенства. Оценим разность $|A - B|$:

$$|A - B| = |(A - a_n) + (a_n - B)| \leq |A - a_n| + |a_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{|A - B|}{2}$$

Получили противоречие: $|A - B| < \frac{|A-B|}{2}$. Следовательно, наше предположение неверно, и предел единственен.

3.1.4 Ограниченные и сходящиеся последовательности

Определение $\{a_n\}$ *ограничена*, если $\exists M > 0 : \forall n \; |a_n| < M, \; a_n, M, n \in Q$

Определение $\{a_n\}$ *не ограничена*, если $\forall M > 0 : \exists n \; |a_n| \geq M, \; a_n, M, n \in Q$

Теорема 2 *Любая сходящаяся последовательность ограничена*
Если $\{a_n\}$ сходиться $\Rightarrow \{a_n\}$ ограничена

Доказательство Т2

$$\varepsilon := 1 \; \exists N : \forall n > N \quad |a_n - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n - a < 1 \Leftrightarrow a - 1 < a_n < a + 1$$

$$M := max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |a - 1|, |a + 1|\} + 1$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ - ограничена (сверху)

Определение $\{a_n\}$ *ограничена сверху, если* $\exists M : \forall n \; a_n < M$

Определение $\{a_n\}$ *ограничена снизу, если* $\exists m : \forall n\ a_n < m$

Пример:

1. $\{\cos n\}\ |\cos n| \leq 1$
2. $\{n\}$ ограничена снизу но не сверху (0, 1, ...)

~~3.2 Предельный переход в неравенствах для последовательностей.~~

~~3.3 Теорема о зажатой последовательности (о трёх последовательностях).~~

~~3.4 Теоремы о сохранении знака сходящейся последовательностью и о сходимости модулей.~~

3.5 Бесконечно малые последовательности, их свойства.

Определение *Бесконечно малые последовательности*

$$\{\alpha_n\}\ (\forall n, \alpha_n \in Q) \text{ бесконечно малая, если } \alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Теорема 3

$$\text{Если } a_n \to a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n, \text{ где } \{\alpha_n\} \text{ - б.м.}$$

Доказательство Т3

$\Rightarrow$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{Пусть } |a_n - a| = \alpha_n \Rightarrow a_n = a + \alpha_n$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon\ |a_n - a| = |\alpha_n - 0| < \epsilon \Leftrightarrow \alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Leftarrow$:

$$\{\alpha_n\} \text{ - б.м., т.е. } \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon\ \varepsilon > |\alpha_n| = |a_n - a| \Leftrightarrow a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Теорема 4

1. $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$ - б.м. $\Rightarrow \{\alpha_n \pm \beta_n\}$ - б.м.
2. $\{\alpha_n\}$ - б.м. и $\{\beta_n\}$ - ограничена $\Rightarrow \{\alpha_n \cdot \beta_n\}$ - б.м.

Доказательство Т4: Предел суммы/разности б.м. последовательностей

Доказательство:

I Требуется доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon\ |\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon$.

1. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$.

2. Так как $\{\alpha_n\}$ — б.м., то для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ найдётся номер n'_ε такой, что: $\forall n > n'_\varepsilon \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
3. Аналогично $\forall n > n''_\varepsilon \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
4. Выберем номер $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$. Тогда для всех $n > n_\varepsilon$ будут выполняться **оба** неравенства из пунктов (2) и (3).
5. Оценим модуль суммы (или разности) для всех $n > n_\varepsilon$, используя неравенство треугольника:
$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Так как $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon\ |\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon$, то по определению последовательность $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ является бесконечно малой.

II β_n - ограничена $\Rightarrow \exists M > 0 :\ \forall n\ |b_n| < M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon\ |\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| \leq \dfrac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$

Теорема 5

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a,\ b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$$

1. $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a + b$
2. $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a \cdot b$
3. Если $b_n \neq 0\ \forall n\ nb \neq 0$, то $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a}{b}$

Доказательство Т5: Арифметические свойства предела

Из Т4 про арифметические свойства б.м. последовательностей

1. $a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$
$(\alpha_n + \beta_n)$ - Сумма б.м., $(a + b) + (\alpha_n + \beta_n) =$ по Т3 $= a_n + b_n \to a + b$
2. $a_n b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) \xrightarrow{T3} ab$
3. Докажем, что $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}$ - б.м.
$\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_n b - a b_n}{b_n b} = \dfrac{(a + \alpha_n)b - a(b + \beta_n)}{b b_n} = \dfrac{\alpha_n b - a\beta_n}{b b_n}$
$\alpha_n b - a\beta_n$ - бесконечно малая
Проверим ограниченность $\dfrac{1}{b b_n}$
$\varepsilon = \dfrac{|b|}{2} : \exists n_\varepsilon\ \forall n > n_\varepsilon\ |b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq$ (неравенство треугольника)$\geq ||b| - |b - b_n|| \geq$
$|b| - |b - b_n| > \dfrac{|b|}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{|b_n|} < \dfrac{2}{|b|} \Rightarrow \{\dfrac{1}{b_n}\}$ - ограничена

Значит, что $\dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{\alpha_n b - a\beta_n}{bb_n}$ - бесконечно малая.

3.6 ~~Бесконечно большие последовательности. Связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.~~

3.7 ~~Арифметические свойства сходящихся последовательностей.~~

3.8 ~~Монотонные последовательности. Критерий сходимости монотонной последовательности.~~

3.9 Число e как предел последовательности.

Вспомним неравенство среднего геометрического и среднего арифметического.

$$\forall k : a_k > 0 \quad \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + ... + a_3}{n}$$

Пусть $a_1 = a > 0,\ a_2 = a_3 = ... = a_{n+1} = d > 0$

$\sqrt[n+1]{a \cdot b^n} \le \dfrac{a + nb}{n+1}$

$(1 + \dfrac{1}{n})^k$ - сходится

Доказательства монотонности

1. $(1 + \dfrac{1}{n})^k \uparrow$

   Пусть $a = 1,\ b = 1 + \dfrac{1}{n}$

   $$\sqrt[n+1]{a \cdot (1 + \frac{1}{n})^n} < \frac{1 + n(1 + \frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \uparrow n+1$$

   $$(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

2. $(1 - \dfrac{1}{n})^k \uparrow$

   Пусть $a = 1,\ b = 1 - \dfrac{1}{n}$

   $$\sqrt[n+1]{a \cdot (1 - \frac{1}{n})^n} < \frac{1 + n(1 - \frac{1}{n})}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \uparrow n+1$$

   $$(1 - \frac{1}{n})^n < (1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$$

3. $(1 + \dfrac{1}{n})^{n+1} = (\dfrac{1}{\frac{n}{n+1}})^{n+1} = \dfrac{1}{(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}} \downarrow$

$\forall k, m \quad n = max\{k, m\}$

$$(1+\frac{1}{k})^k \leq (1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n})^{n+1} \leq (1+\frac{1}{m})^{m+1} \Rightarrow$$

$(1+\frac{1}{n})^n$ - ограничена сверху $\Rightarrow$ сходится.

Определение

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

Доказать/подумать

1. $$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...++\frac{1}{n!})$$
2. $(1+\frac{1}{n})^{n+2}$
3. Сколько слагаемых нужно взять, чтобы получить e с точностью 10^{-3}
4. Какое нужно взять n, чтобы получить e с точностью 10^{-3}

3.10 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

n_k - строго возрастает последовательность натуральных чисел $\Rightarrow n_k \geq k$.

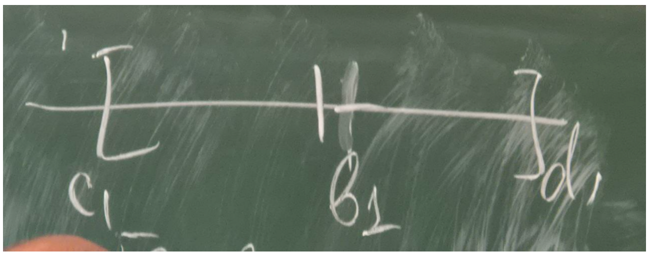
Определение $\forall\{a_n\}$ $\{a_n\}$ - подпоследовательность $\{a_n\}$

$\{a_n\} = 2^n$, тогда 2, 16, 64, 128 - подпоследовательность

$\begin{cases} 2, \mathbf{3}, 4, 16, ... \\ 16, \mathbf{2}, 32, ... \end{cases}$ - не подпоследовательности

Теорема Больцано-Вейерштрасса

$\forall$ ограниченой $\{a_n\}\exists$сходящаяся подпоследовательность $\{a_n\}$



Доказательство

Приципп вложенных отрезков.
$\exists[c,d]:\forall n\ a_n\in[c,d]$

1. $[c_1,d_2]=[c,d]\ \ \forall a_{n_1}\in[c_2,d_1]$

2. $b_1=\dfrac{c_1+d_1}{2}$ $[c_2,d_2]$ тот из $[c_1,b_1]$ и $[b_1,d_1]$ на котором содержится бесконечно много членов последовательности $\{a_n\}$
$a_{n_2}:a_{n_2}\in[c_2,d_2],n_2>n_1$

3. $b_2=\dfrac{c_2+d_2}{2}$
$[c_3,d_3]$ тот из $[c_2,b_2]$ и $[b_2,d_2]$...
$a_{n_3}:a_{n_3}\in[c_3,d_3],n_3>n_3$
$\{a_n\}\ \ a_{n_k}\in[c_k,d_k],n_k>n_{k-1}\ [c_1,d_1]\supset[c_2,d_2]\supset...\supset[c_k,d_k]\supset...$
длина $[c_k,d_k]=\dfrac{1}{2^{k-1}}$ длина $[c_1,d_1]\to 0\Leftrightarrow\exists a\text{‘}=U[c_k,d_k]$
$\forall k\ \ |a_n-a\text{‘}|\le\dfrac{1}{2^{k-1}}$ - длина $[c_1,d_1]\to 0\ a_{n_k},a\text{‘}\in[c_k,d_k]\Rightarrow a_{n_k}\to 0\text{‘}$

Определение Частичный предел $\{a_n\}$ - предел $\forall$ сходящейся подпоследовательности $\{a_n\}$

Следствие из теоремы

$\forall\{a_n\}\exists$ подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$ которая имеет либо конечное либо бесконечное число пределов.

Доказательство

Если в $\{a_n\}\exists\{a_{n_k}\}a_{n_k}\to a\text{‘}\in\mathbb{R}$
Если такого нет, то по Теореме Б-В $\{a_n\}$ - не ограничена сверху или снизу.

Если $\{a_n\}$ - не ограничена сверху:

1. 1 - не верхняя грань $\{a_n\}:a_{n_1}:a_{n_1}>1$

2. 2 - не верхняя грань $\Rightarrow\exists n_2:a_{n_2}>2,n_2>n_1$

...

k. $\exists n_k:a_{n_k}>max\{k,a_1,a_2,...,a_{n_{k-1}}\},n_k>n_{k-1}$

3.11 Частичные пределы. Критерий частичного предела.

Было на лекции от 06.11

3.12 Критерий Коши существования предела последовательности.

$\{a_n\}$ - сходится $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ - фундаментальна.

Доказательство

Взять с записи

3.12.1 Фундоментальные последовательности.

Последовательность $\{a_n\}$**фундаментальна** - если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon : \forall n, m > n_\varepsilon \ \ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, \forall p \ \ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

3.13 Существование верхнего и нижнего пределов у любой последовательности.

Утверждение 1. $\forall$ последовательность имеет хотя-бы 1 частичный предел (конечный или бесконечный).

Доказательство

1. Пусть $\{a_n\}$ - не ограничена сверху.
   Напоминание: $\{a_n\}$ - не ограничена сверху, если $\forall M \ \exists a_n > M \Leftrightarrow \exists$ бесконечно много таких членов.
   $a_n > 1, a_{n_2} > 2, \ n_2 > n_1$
   $a_{n_k} > k, n_k > n_{k-1}$
   $\{a_{n_k}\} \to +\infty$
2. Если $\{a_n\}$ не ограничена снизу, то $\exists a_{n_k} \to -\infty$ (аналогично)
3. Если $\{a_n\}$ - огрничена, то Б-В.

Утверждение 2. критерий частичного предела.
a - частичный предел $\{a_n\} \Leftrightarrow \forall U_a$ принадлежит б.м. членов последовательности.

$$\forall U_a \exists a_{n_k} \in U_a^\circ = U_a / \{a\}$$

- ЭТО ХУЙНЯ. НАДО НАЙТИ ОШИБКУ
На экзамене: что-то может быть.

$\forall U_a \ \exists k_{U_a} : \forall k > k_{U_a} \ \ a_{n_k} \in U_a$
$\Rightarrow$ в U_a бесконечно много членов последовательности.
$\Leftarrow$ в $\forall U_a$ бесконечно много членов $\{a_n\}$.
$\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2} \ \ U_a = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ - отсюда любой член $\{a_n\}$
$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2^2} \ \ \exists a_{n_2} \in (a - \varepsilon_2; a + \varepsilon_2), n_2 > n_1$

...
$\varepsilon_k = \dfrac{1}{2^k}$ $\exists a_{n_k} \in (a - \varepsilon_k; a + \varepsilon_k), n_k > n_{k-1}$
$\{a_{n_k}\} a_{n_k} \to a$, при $k \to \infty$
$\forall k \quad a - \dfrac{1}{2^n} \to a = a - \varepsilon_k < a_{n_k} < a_\varepsilon = a + \dfrac{1}{2^k} \to a$
По теореме о зажатой последовательности $a_{n_k} \to \infty$

Определене.
Наибольший из часичных пределов. $\{a_n\}$ - верхний прдел a_n
Наименьший из часичных пределов. $\{a_n\}$ - нижний прдел a_n

Теорема $\forall\{a_n\}$ $\exists$ верхний и нижний предел.

1. $\exists$ $\underline{\lim} a_n$ - нижний предел a_n
   Пусть $\{a_n\}$ - не ограничена те $\forall M \exists a_n < M$. Таких a_n - бесконечно много.
   $a_{n_1} < -1, a_{n_2} < min\{-2, a_1, ..., a_{n_1}\} - 1$ $n_2 > n_1$
   $a_{n_k} < min\{-k, a_1, ..., a_{n_{k-1}}\} - 1$
   $a_{n_k} - k, n_k > n_{k-1}$
   $\{a_{n_k}\}$ - подпоследовательность.
   $$a_{n_k} < -k \Rightarrow a_{n_k} \to -\infty$$
2. Пусть $\{a_n\}$ - ограничена снизу.

а) $\{a_n\}$ имеет конечные частичные пределы.
А - множество конечных частных пределов. $A \neq \varnothing$ и ограничена снизу.
$\exists inf\ A = a$. Покажем, что $a = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$

$\forall \varepsilon > 0 \exists a` \in A$
$a \leq a` < a + \varepsilon$

б) $\{a_n\}$ нет конечных частичных пределов.
$a_n \to +\infty$
Если $a_n \not\to +\infty$ $\exists M : \forall N$ $\exists n > N$ $a_n \leq M$
$\exists$ бесконечно много $\{a_n\} < M$ по Б-В $\exists$ конечный частичный предел.
!!! Каждое действитеьное число является её частиыным пределом.

3.14 Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость числовых рялов. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Признак сравнения.

3.14.1 Определения и элементарные факты.

$\{a_k\}$ - ЧП

$$\{a_k\} \to S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Определения

Определяем бесконечную сумму.
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - **ряд**
a_k - **элемент ряда (общий член)**.
S_n - **n-ая частичная сумма ряда**.
Если S_n - сходится, то ряд ($\sum_1^\infty a_k$) называется **сходящимся**, $S := \lim_{n\to\infty} s_n$ - **суммой ряда**: $\sum_1^\infty = S$.
Если $\{S_n\}$ расходится, то $\sum_1^\infty a_k$ - **расходится**.

3.14.2 Теорема 1.

$$\sum_1^\infty a_k \pm \sum_1^\infty b_k = \sum_1^\infty (a_k \pm b_k)$$

3.14.3 Теорема 2. Критерий Коши о сходимости ряда.

$\sum_1^\infty a_k$ - сходится $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \forall n > n\varepsilon \forall p \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$$|\sum_1^{n+p} a_k - \sum_1^{n} a_k| = |\sum_{n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$$

Следствие 1. Изменение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость.

Сумма конечно может измениться, но на сходимость это не влияет.

Следствие 2. Необходимое условие сходимости ряда.

Можно считать определением: Если $\sum_1^\infty a_k$ сходится $\Rightarrow a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$

Доказательство

$\sum_1^\infty a_k$ - сходится $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon : \; \forall n > n_\varepsilon \;\; \forall p \; |\sum_{n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon$
При p = 1, то есть $\{a_n\}$ - б.м. по определению.

Пример 1.

Если |q| < 1

$$\sum_1^\infty q^k, S_n = 1 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{q}{1 - q}$$

Пример 2.

$\sum_1^\infty \frac{1}{n}$

a, b, c положительные. c - среднее гармоническое a и b, если $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$a = \frac{1}{n-1}, b = \frac{1}{n+1}$

$\frac{2}{c} = (n-1) + (n+1) = 2n$

Каждый элемент является средним гармоническим 2-х соседий. По критерию Коши ряд - расходящийся.

$$|\sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{k}| = \frac{2}{n+1} + ... + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p}$$

Пусть p = n. $\frac{p}{n+p} = \frac{1}{2}$.

Пример 3.

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + ...$$

$S_{2n} = 0$

$S_{2n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0$

А теперь давайте мухлевать. Переставим сумму ряда. Шоу ИМПРОВИЗАЦИЯ!!!

$(1 + \frac{1}{2}) - 1 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{11}) - \frac{1}{2}$

Берём много положительных слагаемых и вычитаем меньшее по модулю число. Из-за этого ряд расходится.

Пример 4.

$$\sum_0^\infty (-1)^k = (1-1) + (1-1) + ...$$

$$\sum_0^\infty (-1)^k = 1 - (1-1) - (1-1) - ...$$

3.14.4 Абсолютно сходящийся ряд.

Определение. Если $\sum_1^\infty |a_k|$ сходится, то $\sum_1^\infty a_k$ сходится абсолютно.

3.14.5 Теорема 1. Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.

Доказательство (Критерий Коши)

По критерию Коши, т.к. $\sum_1^\infty |a_k|$ сходится, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon : \ \ \forall n > n_\varepsilon \ \forall p \ \ |\sum_{n+1}^{n+p} a_k| \leq |\sum_{n+1}^{n+p} |a_k|| < \varepsilon \Rightarrow$ по критерию Коши $\sum a_k$ сходится.

Пример 1.

$1-1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+...$ - сходится, но не абсолютно.

Определение.

Если $\sum_1^\infty a_k$ сходится, а $\sum_1^\infty |a_k|$ расходится, то $\sum a_k$ сходится условно.

3.14.6 Теорема 2.

$\sum_1^\infty a_k, \forall k\ a_k \geq 0$
$\sum_1^\infty a_k$ сходится $\Leftrightarrow \{S_N\}$ ограничена.

Доказательство

$$\forall n\ S_{n+1} = \sum_1^{n+1} a_k \geq \sum_1^n a_k = S_n$$

$S_n \uparrow$ возрастающая $\{S_n\}$ сходится $\Leftrightarrow$ ограничена.

3.14.7 Теорема 3. Признак сравнения.

Для комплов не годится.
$\sum_1^\infty a_k,\ \ \sum_1^\infty b_k,\ \ \forall k\ \ a_k \geq \underline{b_k \geq 0}$
Тогда:

1. Если $\sum_1^\infty a_k$ сходится $\Rightarrow \sum_1^\infty b_k$ сходится.
2. Если $\sum_1^\infty a_k$ расходится $\Rightarrow \sum_1^\infty b_k$ расходится.

Доказательство

Следствие критерия сходимости ряда с неотрицательными членами.

1. $A_n = \sum_1^n a_k,\ \ B_n = \sum_1^n b_k$
   $A_n \uparrow,\ B_n \uparrow$ и $A_n \geq B_n$ (A_n можарирует B_n)
   Если $\sum a_k$ сходится $\Rightarrow \{A_n\}$ ограничена сверху $\Rightarrow \{B_n\}$ ограничена сверху $\Rightarrow \sum b_k$ сходится.

Следствие. (Признак сравнения).

$\sum a_k,\ \sum b_k\ \ \forall k\ a_k \geq |b_k| > 0$. Не отрицательность a_k.
Сходимость $\sum a_k \Rightarrow$ сходимость $\sum b_k$ (абсолютная).

Пример 1.

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n}{n^2}$$

$$|\frac{\sin n}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, n \neq 1$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n-1)n} = \sum_{2}^{\infty} (\frac{1}{-1} - \frac{1}{n})$$

$$S_n = \sum_{2}^{n} (\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}) = (\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ...$$

3.15 Признаки абсолютной сходимости рядов Даламбера и Коши.

3.15.1 Теорема 4. Признак Коши.

$$\sum_{1} a_k$$

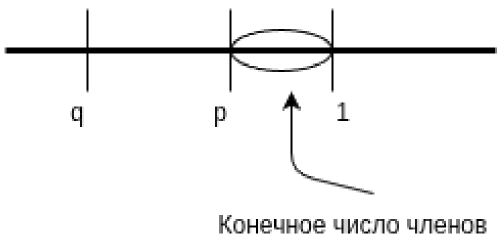
$$q = \overline{lim} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Тогда:

1. $q < 1 \Rightarrow$ абсолютно сходится.
2. q $>$ 1 расходится
3. q $=$ 1 ?

Доказательство

Сравнение с геометрической прогрессией.



1. $0 \leq q < p < 1$
   $\exists n_p : \forall n > n_p$
   $\sqrt[k]{a_k} < p \uparrow\Leftrightarrow |a_k| < p_k$
   $\sum_{n+1}^{\infty} p^k$ геометрическая прогрессия с положительным знаком |x|.
   $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_k$ сходится абсолютно (по признаку сравнения)
2. q $=$ $\overline{lim} \sqrt[k]{a_k} > 1$
   $1 > p > 1$
   $\forall$ окрестности q бесконечно много членов $\sqrt[k]{|a_k|}$

Замечание. Признак Коши бесполезно использовать, если ряд не похож на геометрическую прогрессию.
Запомните. Признак коши достаточное условие абсолютной сходимости.
Следствие Если $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow \exists q, N \ \forall n > N : \ \sum a_n$ сходится абсолютно

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n \cdot z^n$

$$\sqrt[n]{((2 + (-1)^n)^n z^n} = (2 + (-1)^n)|z| n = 2k : \ \sqrt[n]{|a_n|} = 3|z| = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} n = 2k + 1 : \ \sqrt[n]{|a_n|} = |z|$$

Если: $3|z| < 1$ сходится $|z| < \dfrac{1}{3}$

$3|z| > 1$ расходится $|z| > \dfrac{1}{3}$

$3|z| = 1 |z| = \dfrac{1}{3}$

Теорема 5. Признак д-Аламбера

!Он всегда слабее признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} : |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \to q$$

1. $q < 1 \Rightarrow$ абсолютно сходится
2. $q < 1 \Rightarrow$ расходится
3. $q = 1 \Rightarrow$ Ничего не даёт

Доказательство.

1. Сравнение с геометрической прогрессией.

   $\exists n_p : \forall n > n_p \ \ |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| < p$

   Пусть для $\forall n$

   $a_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_2}{a_1}$ $|a_{n+1}| = |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot |\dfrac{a_n}{a_{n-1}}| \cdot \ldots \cdot |\dfrac{a_2}{a_1}| \cdot |a_1| < p^n |a_1|$

   $\sum p^n |a_1|$ сходится (геометрическая прогрессия)

2. $\exists N : |\dfrac{a_n + 1}{a_n}| > 1 \ \ \forall n > N$

   Пусть $\forall N$ $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| > 1$

   $|a_{n+1}| > |a_n| > |a_{n-1}| > \ldots |a_1| > 0 \Rightarrow a_n \not\to 0$

3. $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n} \ \ |\frac{a_{n+1}}{n}| = \frac{n}{n+1} \to 1$

   $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \ |\frac{a_{n+1}}{n}| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \to 1$

Следствие. $\forall n > N : \ |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| \le q < 1 \Rightarrow \sum a_n$ сходится абсолютно.

Доказательство следствия

Пусть $\forall n$ $|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| \le q < 1$

$|a_{n+1}| = |\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \cdot |\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot |\dfrac{a_2}{a_1} \cdot |a_1| \le q^n |a_1|$ Т.к. $|q| < 1$, то $\sum q^n |a_1|$ сходящаяся геометрическая прогрессия.

Вопрос на 5: Если можно исследовать по Деламберу то можно и по Коши.

Пример $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(3+)-1)^n)^n}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{4}, n = 2k$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2}, n = 2k+1$

$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} < 1$

$|\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{2k+1}}\frac{1}{4^{2k}}}{=} \dots$

Пример $\sum_1^\infty \frac{1}{(3+)-1)^n)^n}$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{4}, n = 2k$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2}, n = 2k+1$

$sqrt[n]|a_n| \leq \frac{1}{2} < 1$

$|\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{\frac{1}{4^{2k}}} = \frac{4^{2k}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}2^{2k}n = 2k$

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{\frac{1}{4^{2k}}} = \frac{4^{2k}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}n = 2k+1$$

Замечание. $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| \leq 1 < 1$, а не $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1$

Пример.

$$\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$$

$$|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \to 0$$

3.16 Критерий Коши сходимости ряда с монотонными членами. Исследование сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p},\ p > 0$.

Теорема 6. Теорема Коши о сходимости монотонных рядов.

$$\sum_1^\infty a_n,\ a_n \downarrow,\ \forall n\ a_n \geq 0$$

$\sum_1^\infty a_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum_1^\infty 2^n \cdot a_{2n}$ сходится

Если $\sum a_k : \ \forall k \ a_k \geq 0$, то $\sum a_k$ сходится $\Leftrightarrow S_n = \sum_1^n a_k$ ограничена
$a_2 \leq a_2 \leq a_1$
$2a_4 < a_3 + a_4 \leq 2a_2$
$\frac{1}{2} 2^3 a_{2^3} = 2^2 a_{2^3} = 2^2 a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4 = 2^2 a_{2^2}$
$\frac{1}{2} 2^{k+1} a_{2^{2k+1}} = 2^k a_{2^{k+1}} \leq a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}} \leq 2^k a_{2^k} \ \sum_{n=2}^{2^{k+1}} a_n \leq \sum_{n=0}^{2^k} 2^n a_{2^n}$

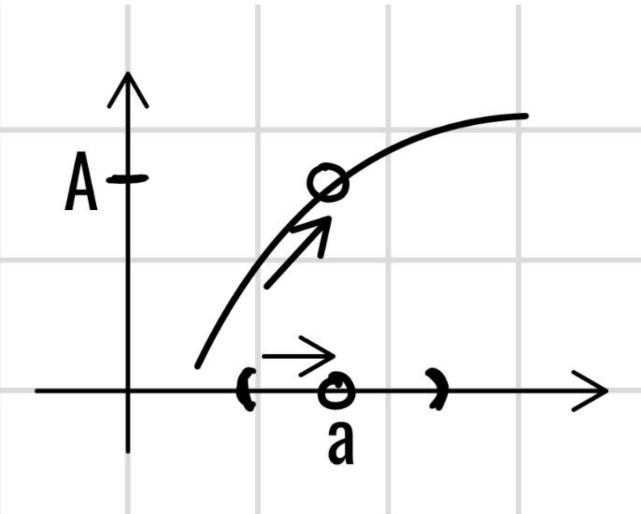
4 Функции

4.1 Два определения предела функции в точке. Доказательство эквивалентости (из определения по Гейне определение по Коши).

4.1.1 Предел функции в точке.

На протяжении всего параграфа: $f(x)$ на $\mathring{U}_a = U_a / \{a\}$

$$a \in (d, c) = U_a$$



Определение. Предел по Коши. $f(x) \to A$ при $x \to a$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение. Существование предела функции в точке. $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, если

$$\exists A \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \ \ |f(x) - A| < \varepsilon$$

Определение. Предел по Гейне. $f(x)$ имеет придел при $x \to a$, если $\forall \{x_n\} \ \forall n, x_n \in \mathring{U}_a, x_n \to a \ \{f(x_n)\}$ сходится

Не обязательно, чтобы предел функции и последовательности был одним и тем же.

4.1.2 Эквивалентность определений по Коши и по Гейне

Теорема. Предел в смысе Коши. $\exists \Leftrightarrow \exists$ предел по Гейне.

Доказательство

$\Rightarrow \exists A : \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0$

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta)/\{a\} \;\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

Пусть $\{x_n\} : \forall n \; x_n \in \mathring{U}_a, x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} a$

$$\exists N_{delta_\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n > N_{\delta_\varepsilon} \;\; 0 < |x_n - a| < \delta_\varepsilon$$

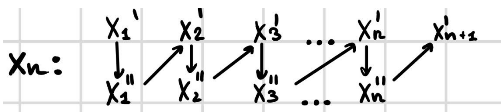
$$\Rightarrow x_n \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon)/\{a\} \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ Пусть $f(x)$ имеет в а предел в смысле Гейне.

1. $\lim f(x_n)$ не зависит от $\{x_n\}$
   Пусть не так зависит), тогда $\exists \{x_n'\}$

$$x_n' \to a, x_n' \neq a \; \forall n : f(x_n') \to A'$$

$$\exists \{x_n''\}, x_n' \to a, x_n'' \neq a \;\; \forall n, f(x_n'') \to A''$$



$$x_{2k} = x_k''$$

$$x_{2k-1} = x_k'$$

$$\forall n \;\; x_n \to a, x_n \neq a$$

По определению предела по Гейне:

$$\exists A : f(x_n) \to A : f(x_{2n}) - toA'', f(x_{2n-1}) - toA'$$

таким образо: $\exists A : \forall \{x_n\}$

$$f(x_n) \to A$$

2. $f(x) \xrightarrow{x \to a} A$ по Коши
   От противного:
   Пусть $f(x) \not\xrightarrow{a \to a} A$ по Коши

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x_n : 0 < |x - a| < \delta \;\; |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

$$x_1 : 0 < |x_1 - a| < 1/1 \;\; |f(x_1) - A| \geq \varepsilon$$

$$x_2 : 0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2} \;\; |f(x_2) - A| \geq \varepsilon$$

$$...$$

$$x_n : 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \;\; |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$$

$$...$$

$\{x_n\}$, $x_n \to a, x_n \neq a, \forall n \Rightarrow f(x_n) = A$ противоречие

4.2 Два определения предела функции в точке. Доказательство эквивалентости (из определения по Коши определение по Гейне).

Аналогично предыдущего.

4.3 Критерий Коши существоввания предела функции в точке.

Теорема. Критерий Коши. $f(x)$ на $\mathring{U}_a$

$$\exists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x‘, x“ \in (a-\delta_\varepsilon, a+\delta_\varepsilon)/\{a\}\ \ |f(x‘)-f(x“)| < \varepsilon$$

Доказательство

$\Rightarrow$: $\exists \lim_{x\to a} f(x) := A$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon\ \forall x : 0 < |x-a| < \delta_\varepsilon\ \ |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x‘, x“ : 0 < |x‘-a| < \delta_\varepsilon, 0 < |x“-a| < \delta_\varepsilon$$

$$|f(x‘)-f(x“)| = |(f(x‘)-A)-(f(x“)-A)| \le |f(x‘)-A|+|f(x“)-A| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\Leftarrow$: Пусть $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x‘, x“\ \ 0 < |x‘-a| < \delta_\varepsilon\ \ 0 < |x“-a| < \delta_\varepsilon\ \ |f(x‘)-f(x“)| < \varepsilon$

$$\forall \{x_n\} \subset \mathring{U}_a\ \ x_n \to a \Rightarrow \exists n_{\delta_\varepsilon}$$

$$0 < |x_n - a| < \delta_\varepsilon\ \ \forall n > n_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow \forall n, m > n_{\delta_\varepsilon}\ \ |f(x_n)-f(x_m)| < \varepsilon$$

Что значит, что последовательсноть $\{f(x_n)\}$ - фундаментальная, значит по Критерию Коши для последовательностей $\{f(x_n)\}$ - сходится. $\Rightarrow$ $\exists \lim_{a\to a} f(x)$ в смысле Гейне.

Отрицание. $f(x)$ определена на $\mathring{U}_a$

$$\nexists \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta\ \exists x‘, x“\ 0 < |x‘-a| < \delta\ \ 0 < |x“-a| < \delta |f(x‘)-f(x“)| \ge \varepsilon$$

Пример.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ на (0, 1) Нет предела при $x \to 0+0$
   Пусть $\varepsilon = 1\ \forall \delta\ \forall N > \frac{1}{\delta}$
   $$x‘ := \frac{1}{N}\quad x“ := \frac{1}{N+1}$$
   $$|f(x‘)-f(x“)| = |\frac{1}{\frac{1}{N}} - \frac{1}{\frac{1}{N+1}}| \ge \varepsilon$$

2. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ на (0, 1)
   $\varepsilon := 1$ Сами.

4.4 ~~Свойства функций, имеющий пределы: единственность предела, предел модуля, предельные переходы в неравенствах и теорема о зажатой функции (о трёх функциях)~~

4.5 Свойства функций, имеющих пределы: арифмитические свойства, локальная ограниченность и теорема о сохранении знака.

4.6 Бесконечно большие и бесконечно малые функции.

4.7 Предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

4.8 Предел $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$.

4.9 Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

4.9.1 Ограниченность функций.

Определение. $f(x)$ ограничена сверху на X, если

$$\exists M : \forall x \in X, f(x) < M$$

Определение. $f(x)$ ограничена снизу на X, если

$$\exists m : \forall x \in X, f(x) > m$$

Если $f(x)$ принимает комплексные значения, то ограниченность $f(x)$ на X

$$\exists M : \forall x \in X, |f(x)| < M$$

Определение. $f(x) : X \to Y$

$$\sup_X f(x) = \sup f(X)$$

$$M = \sup_X f(x)$$

если

1. $\forall x \in X\ f(x) \leq M$
2. $\forall M` < M\ \exists x \in X : f(x) > M`$

Определение. Если $f(x)$ не ограничена сверху на X, то $\exists\{x_n\} \supset X$

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Определение. $f(x)$ принимает max в $x_0 \in X$, если

$$\forall x \in X \;\; f(x) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0) = \max_X f(x)$$

4.9.2 Односторонние пределы.

Определение. Предел справа.
$f(x)$ на $(a, b) \to \mathbb{R}$
$f(x) \to A$, при $x \to a + 0$
$f(x) \to A$, при $x \to a, x > a$
$f(x) \to A$, при $x \to a$ справа $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta)(\forall x : |x - a| < delta, x > a)|f(x) - A| < \varepsilon$

Опеделение. Предел слева.

$$B = \lim_{x \to b-0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \forall x \; b - \delta < x < b, \; |f(x) - B| < \varepsilon$$

Определение по Гейне.

$$\exists \lim_{x \to a+0} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \supset (a, b) \; x_n \xrightarrow{n \to \infty} a \;\; f(x_n) - converges$$

Утверждение. Существование предела по Коши справа или слева равносильно существованию соответствующего одностороннего предела по Гейне.

Теорема. $\exists \lim_{x \to a} f(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \exists \lim_{x \to a+0} f(x) \\ \exists \lim_{x \to a-0} f(x) \\ \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) \end{cases}$$

Доказательство

$\Rightarrow$: $A = \lim_{x \to a} f(x)$ По определению $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x \; (0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \delta_\varepsilon, a) \cup (a, a + \delta_\varepsilon)$

$$x \in (a - \delta_\varepsilon, a) \Rightarrow A = \lim_{x \;\; toa-0} f(x)$$

$$x \in (a, a + \delta_\varepsilon) \Rightarrow A = \lim_{x \;\; toa+0} f(x)$$

$\Leftrightarrow$:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) := A$$

$$A = \lim_{x+0} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \; \forall x \in (a, a + \delta_\varepsilon) \;\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$A = \lim_{x-0} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon` > 0 \; \forall x \in (a - \delta_\varepsilon`, a) \;\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\delta_\varepsilon = \min \delta_e ps, \delta_\varepsilon` \;\; \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \;\; |f(x) - A| < \varepsilon$$

4.10 ~~Непрерывные функции в точке (по Коши и по Гейне). Односторонняя непрерывность. Арифмитические свойства непрерывных функций.~~

4.11 Непреревность сложной функции, теорема о сохранении знака.

Даллыше пока не было.