Семинары по мат аналу

Октябрь 2025

1 Пределы

1.1 Доказано, что (на зачёте уметь доказать):

$\frac{a^k}{a^n} \to 0$, при $a > 1$

2 Ряды

2.1 Определение сходимости ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Определение.
Если S_n - сходится, при $n \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}$ - сходится

2.2 Критерий Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \forall n, m > n_\varepsilon \;\; |S_n - S_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} | \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k | < \varepsilon$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}, n \to \infty$$

$$S_n \to S, S_{n-1} \to S \Rightarrow a_n \to 0$$

Пример

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;\; \forall n > n_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N}$$

$$|\sum_{n+1}^{n+p} a - n| < \varepsilon \quad \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \dots \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} =^{p=n}= \frac{1}{2}$$

Противоречие:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \geq \frac{1}{2}$$

Пример

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\exists\varepsilon > 0 \;\; \forall n, p = 3n$$
$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| \geq 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+3n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} + \sum_{k=2n+1}^{4n}$$

Ряд геометрической прогресии

$$\sum_{1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$$

$\sum_1^\infty |a_k|$ - сходится $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ - тоже сходится
$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, \forall p |\sum_{n+1}^{n+p} a_k| \leq \sum_{n+1}^{n+p} |a_k| = |\sum_{n+1}^{n+p} |a_k|| < \varepsilon$

Пример. $\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$

$$S_{2n} = a_1+a_2+\dots+a_{2n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n} = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\dots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}) =$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots|\frac{1}{(2n-1)2n} < \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

Тогда $\sum_{k=1}^{2n} \dfrac{1}{k^2}$ - имеет предел, а значит и $\sum_1^{2n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ имеет предел

Докажем для нечётных

$$S_n \to S$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} S_n$$

Тогда $\sum_1^\infty \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ имеет предел

$\sum a_k -$ сходится $\sum b_k : \forall k |b_k| \leq a_k \Rightarrow \sum b_k$ - сходится

Доказать, что ряд сходится $\sum \dfrac{n^3 \cdot cos\ n + 3}{n^5 + 10n^3 \cdot sin\ n}$

Считаем доказаным, что

$\sum \dfrac{1}{n}$ - расходится

$\sum \dfrac{1}{n^2}$ - сходится

$\sum q^n, \;\; |q| < 1$ - сходится

$$\sum \frac{n^3 \cdot cos\ n + 3}{n^5 + 10n^3 \cdot sin\ n} = \frac{cos\ n + \dfrac{3}{n^3}}{n^2 + 10 \cdot sin\ n}$$

$$|\frac{cos\ n + \dfrac{3}{n^3}}{n^2 + 10 \cdot sin\ n}| \leq \frac{4}{n^2 - 10}$$

При $n > 3$

$$\frac{4}{n^2 - 10} < \frac{4}{\frac{n^2}{2}}$$

2.3 Признак Аламбера

признак Аламбера

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \forall k \ \ |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q < 1$$

Значит ряд сходится.

Пример. $\sum_0^\infty \dfrac{a^n}{n!}$ По признаку Аламбера:

$$|\frac{\frac{a^{n+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^n}{k!}}| = |\frac{a}{k+1}| \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1 \Rightarrow \sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}$$

Ряд сходится

2.4 Радикальный признак Коши

Признак Коши

$$\sum a_k$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$$

2.5 Необходимое условие сходимости ряда

$\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow a_n \to 0$

$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ... \geq 0$

$\sum a_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum 2^k a_{2^k}$

3 O малая и O большое

$$g(x) = \overline{\overline{o}}(f(x)),\ x \to a$$

$$g(x) = \alpha(x) f(x),\ \alpha(x) \to 0$$

Такой вопрос: $x \to a\ \overline{\overline{o}}(f(x)) + \overline{\overline{o}}(f(x)) = \overline{\overline{o}}(2f(x))$?
Нет, $x \to a\ \overline{\overline{o}}(f(x)) + \overline{\overline{o}}(f(x)) = \overline{\overline{o}}(f(x))$?

$$= \alpha(x) f(x) + \beta(x) f(x) = (\alpha(x) + \beta(x)) f(x)$$

$$g(x) = \underline{\underline{O}}(f(x)), x \to a \Leftrightarrow \exists U_a, \exists C > 0 :\ \forall x \in \dot{U_a}\ \ |g(x)| \le C|f(x)|$$

Верно ли, что:

$$\overline{\overline{o}}(f(x)) = \underline{\underline{O}}(f(x))$$
$$\underline{\underline{O}}(f(x)) = \overline{\overline{o}}(f(x))$$

Расспишем.

$$|\overline{\overline{o}}(f(x))| = |\alpha(x) f(x)| \le 1 \cdot |f(x)|$$

Пусть $C = 1$, тогда $\exists \delta_1 > 0 : \forall x\ 0 < |x - a| < \delta_1\ |\alpha(x)| < 1$
Любое функция удовлетворяющая оценки o удовлетворяет O.
Любое функция удовлетворяющая оценки O не обязана удовлетворять o.

4 1 замечательный предел

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$
$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$$
$$\sin x = x + \alpha(x) x = x + \overline{\overline{o}}(x)$$

$$e^x = 1 + x + \overline{\overline{o}}(x), x \to 0$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2), x \to 0$$
$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \overline{\overline{o}}(x), x \to 0$$
$$log(1 + x) = x + \overline{\overline{o}}(x), x \to 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x + \overline{\overline{o}}(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)} = (x + \overline{\overline{o}}(x))(1 - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2))^-1 =$$
$$= (x + \overline{\overline{o}}(x))[\ 1 + (-1)(-\frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)) + \overline{\overline{o}}(-\frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2))\ ] = (x + \overline{\overline{o}}(x))[\ 1 + \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2) + \overline{\overline{o}}(x^2)\ ] =$$
$$(x + \overline{\overline{o}}(x))[\ 1 + \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)\ ]\ = x + \frac{x^3}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2) x + \overline{\overline{o}}(x) + \frac{x^2}{2}\overline{\overline{o}}(x) + \overline{\overline{o}}(x) + \overline{\overline{o}}(x^2)$$

$$\frac{x^3}{2} = \frac{x^2}{2} x = \overline{\overline{o}}(x)$$
$$\overline{\overline{o}}(x^2) = (\beta(x) x^2) x = \overline{\overline{o}}(x)$$