Конспект по аналитической геометрии

VG6

2 половина 1 семестра

Содержание

$$Ax + by + Cz + D = 0$$

Я всё проебал, надо написать хз что это.
Определение. Отклонение точки от плоскости

$$M_0(x_{0,0}, z_0)$$

$$\delta(M_0, \pi) = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta z_0 \cos\gamma$$

1 §8. Прямая в пространстве.

OXYZ - ДПСК
Определение. Направленный вектор L.

$$\overline{p} \neq 0, \quad \overline{q}||L$$

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\overline{q} = l, m, n$$

$$M = (x, y, z)$$

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M}||\overline{q}$$

1. $$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

   Канонические уравнения L.

2. $$\overline{M_0M} = t\overline{q}$$

   $$\begin{cases} x = x_0 + lt, t \in (-\infty, +\infty) \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

3. $\begin{cases} \text{П1: } A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \text{П2: } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \overline{q} = [\overline{N_1}, \overline{N_2}]$

Определение. Угол между прямой и плоскость - это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

$$\overline{q} = l, m, n$$

$$\overline{N} = A, B, C$$

$$\cos\psi = \sin\phi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

2 Алгебраические линии и кривые 2 порядка

2.1 Элипс. Вывод канонического уравнения. Свойства элипса.

Элипс - множество точек плоскости таких, что сумма расстояний от них до фиксированных точек той же плоскость постоянна и равна 2a. $r_1 + r_2 = 2a$
Фиксированные точки F1, F2 - фокусы.
Длинны r1, r2 - факальные радиусы.
Расстояние между F1, F2 - фокусное расстояние = 2c. c может быть равен 0, тогда будет окружность.
Окружность частный случай элипса с фокусным растоянием 0.
По неравенству треугольника: $a > c$

2.2 Вывод уравнения элипса

Пусть фокусное расстояние не равно 0.
!!! INSERT IMAGE.

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{1}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{2}$$

$$x^2 + 2cy + c^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)}$$

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2$$

$$x^2 + y^2 + c^2 = t^2$$

$$\sqrt{t^4 - 4c^2x^2} = 2a^2 - t^2 \Rightarrow t^4 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2t^2 + t^4 - c^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + c^2)$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2(a^2 - c^2) =$$

$$(a^2 - c^2) > 0$$

$$= \underline{a^2 - c^2 = b^2} \qquad \underline{a \geq b}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

(3) $\Rightarrow$ (2)−?

$$y^2 = (1 - \frac{x^2}{a^2})b^2$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2} =$$

$$\sqrt{a^2 + 2cx + (\frac{c}{a}x)^2} = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} = |a + \frac{c}{a}x|$$

$$r_1 = |a + \frac{c}{a}x| \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |a - \frac{c}{a}x|$$

1. $r_1 = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x$
   $|x| \leq a, \ c < a$

2. $r_2 = |a - \frac{c}{a}x| = a - \frac{c}{a}x$

Т.о. мы доказали равносильность преобразования и вывода формулы (3).
a - большая полуось
b - малая полуось
Прямоугольник со сторонами a, b - основной прямоугольник для элипса.

$$\begin{cases} r_2 = a + \frac{c}{a}x \\ r_2 = a - \frac{c}{a}x \end{cases} \tag{4}$$

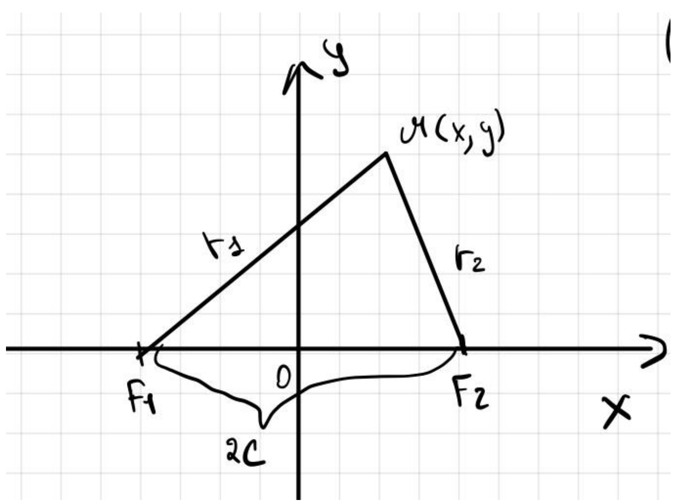
2.3 Гипербола

Гипербола - Множество точек плоскости таких, что модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости величина постоянная и равная 2a.
Фиксированные точки F1, F2 - фокусы.
Длинны r1, r2 - факальные радиусы.
Расстояние между F1, F2 - фокусное расстояние = 2c.

$$c > a \qquad c > 0$$

Вводим каноническую систему координат.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$|r_1 - r_2| = 2a \tag{1}$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a \tag{2}$$

$$x^2 + 2cy + c^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)} = 4a^2$$

$$2(x^2+c^2+y^2)-2\sqrt{(x^2+c^2+y^2)^2-4c^2x^2}=4a^2$$
$$(x^2+c^2+y^2)=t^2$$
$$t^2-2a^2=\sqrt{t^4-4c^2x^2}\Rightarrow 4c^2x^2-4a^2(x^2+c^2+y^2)=-4a^4$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4=a^2(c^2-a^2)$$
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{3}$$

Проверим (3) $\Rightarrow$ (1), (2)

$$y^2=(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2$$
$$r_1=\sqrt{(x^2+c^2)+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}=$$
$$b^2=c^2-a^2$$
$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+\frac{c^2}{a^2}x-\frac{a^2}{a^2}x^2-c^2+a^2}=\sqrt{a^2+2\frac{cx}{a}a+(\frac{cx}{a})^2}=\sqrt{(a+\frac{cx}{a})^2}=|a+\frac{cx}{a}|$$

$$\boxed{\begin{gathered} r_1=|a+\frac{cx}{a}| \\ r_2=|a-\frac{cx}{a}| \end{gathered}}$$

1. $x>a$

$$r_1=|a+\frac{cx}{a}|=a+\frac{cx}{a}$$
$$r_2=|a-\frac{cx}{a}|=-a+\frac{cx}{a}$$
$$|r_1-r_2|=|a+\frac{cx}{a}+a-\frac{cx}{a}|=|2a|$$

2. $x<-a$

$$|r_1-r_2|$$
$$r_1=|a+\frac{x}{a}c|=-a-\frac{x}{a}c$$
$$|\frac{x}{a}|>0,\ c>x\ \frac{x}{a}<0$$
$$r_2=|a-\frac{c}{a}x|=a+\frac{c}{a}x$$
$$|r_1-r_2|=|-a-\frac{x}{a}c-a+\frac{c}{a}x|$$

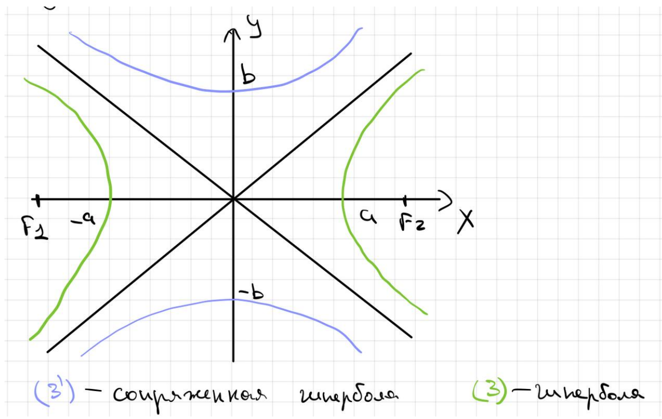
Введём $\hat{y_1} = \frac{b}{a}x$
Введём $\hat{y_2} = -\frac{b}{a}x$
Это будут уравнения диагоналей прямоугольника (асимптоты)

$$y > 0, x \to +\infty$$

$$y = \sqrt{(\frac{b^2}{a^2} - 1)b^2}$$

$$y(x) - \hat{y_1}(x) = \sqrt{(\frac{x^2}{a^2}b^2)} - \frac{b}{a}x = \frac{\frac{x^2b^2}{a^2} - b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}{\sqrt{\frac{x^2b^2}{a^2} - b^2} + \frac{b}{a}x} = \frac{-b^2}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - b^2}\frac{b}{a}x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

a - действительная полуось
b - мнимая полуось

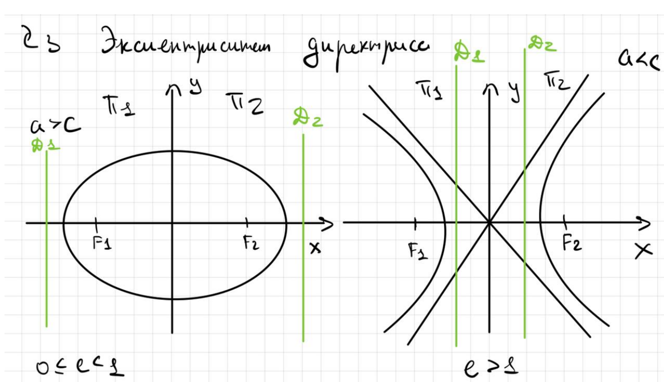


Свойства гиперболы:

1. Симметрична относительно центра (начала координат)
2. Фоуксы вне прямоугольника
3. b и a никак не свДиректриса и екс/Директриса и екс.

2.4 Эксиетристет и директриса элипса и гиперболы.

Определение. Эксиетристет это $e = \frac{c}{a}$



Для элипса: $0 \leq e < 1$ Для окружности: $e = 1$
Для гиперболы: $e > 1$

$$1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

Элипс: $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$
Гипербола: $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$
Определение. Директрисы - это прямые ... в проебал

$$\rho(D_i, 0) = \frac{a}{e}(or \frac{\pi}{e})$$

$$D_1 : -x = \frac{a}{e}$$

$$D_2 : x = \frac{a}{e}$$

$$-x - \frac{a}{e} = 0$$

$$x - \frac{a}{e} = 0$$

Теорема. $M(x, y)$
r_i - ... радиусы $= \rho(M, F_1)$
$d_1 =, D_i$

$$\frac{r_i}{d_i} = e, \quad i = 1, 2$$

Доказательство

1. Элипс

$$r_1 = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x = a + cx$$

$$d_1 = |-x - \frac{a}{e}| = |x + \frac{a}{e}| = x + \frac{a}{e} = \frac{ex + a}{e}$$

$$\frac{r_1}{d_1} = e$$

$$r_2 = |a - \frac{c}{a}x| = a - \frac{c}{a}x = a - cx$$

$$d_1 = |x - \frac{a}{e}| = -x + \frac{a}{e} = \frac{-ex + a}{e}$$

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

Для элипса доказали.

2. Гипербола. Рассмотрим 1 случай, остальное по аналогии.

$$x \geq a, i = 2$$

$$r_2 = |a - \frac{c}{a}x| = -a + \frac{c}{a}x = -a + cx$$

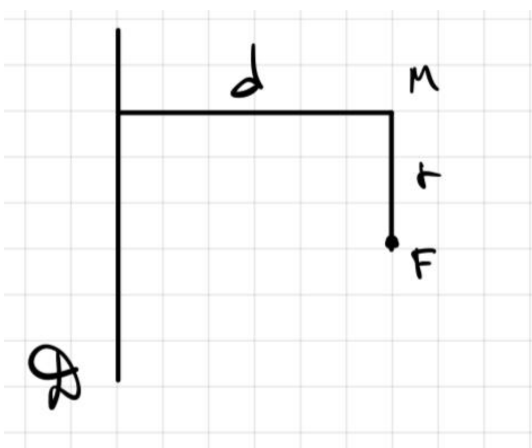
$$d_2 = |x - \frac{a}{e}| = x - \frac{a}{e} = \frac{ex - a}{e}$$

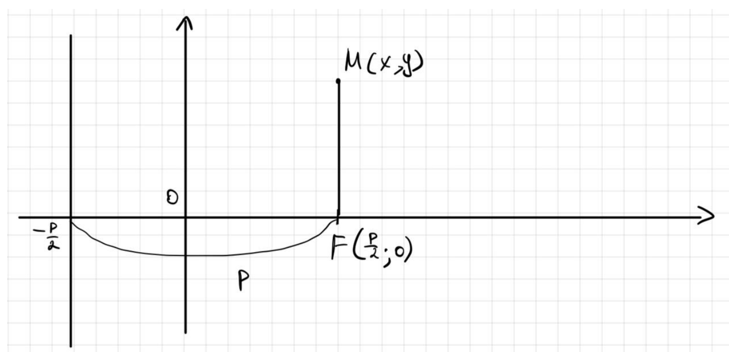
$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

Доказали для гиперболы.

2.5 Парабола. Вывод канонического уравнения. Свойства параболы.

Парабола - множество точек плоскости таких что расстояние от которых до фиксированной точки плоскости (фокуса) равно расстоянию до фиксированной прямой (директрисы). Фоукус на директрисе не лежит.





$$r = d \tag{1}$$

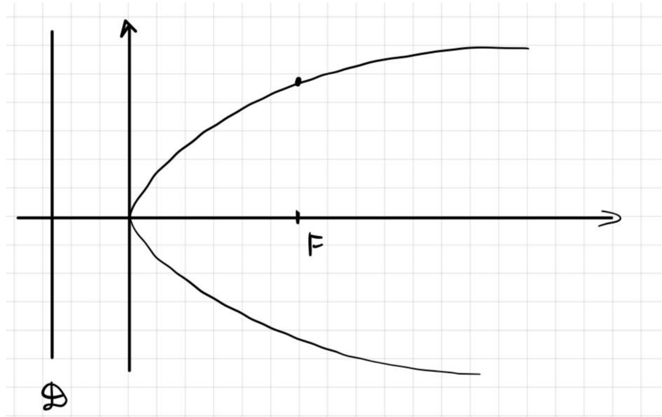
Факальный параметр параболы: $P = \rho(F, D)$ $D : -x - \frac{P}{2} = 0$

$$\sqrt{(x - \frac{P}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{P}{2}| \tag{2}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px \tag{3}$$



Свойства параболы:

- Симметрично относително Ox
- Расположено в правой полуплоскости (x > 0)

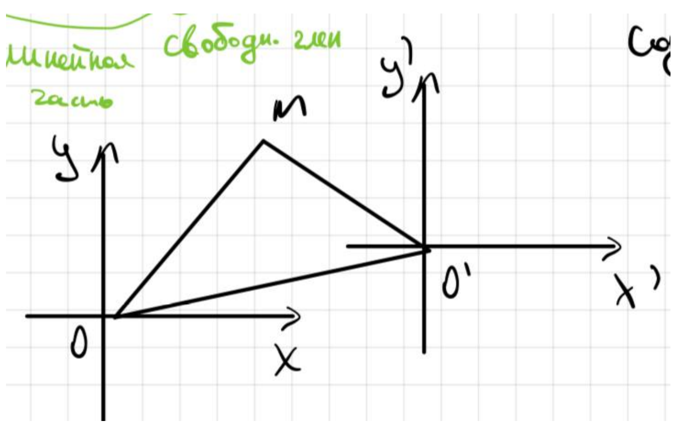
2.6 Упрощение алгебраического уравнения второго порядка на плоскости. Преобразование коэфициентов уравнений второго порядка при ортогональных преобразованиях.

2.6.1 Сдвиг.

У нас есть ДПСК. $OXY \to O`X`Y`$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ - квадратная часть. $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$
$2Dx + 2Ey$ - линейная часть
F - свободный член.



$$\begin{cases} x = x` + x_0 \\ y = y` + y_0 \end{cases}$$

$$A`x`^2 + 2B`x`y` + C`y^{2`} + 2D`x` + 2E`y` + F` = 0$$

$$A(x^21+2x`x_0+x_0`)+2B(x`+x_0)(y`+y_0)+C(y`^2+2y\psi_0+y_0^2)+2D(x`+x_0)+2E(y`+y_0)+F=0$$

$A` = A$
$B` = B$
$C` = C$
$D` = Ax_0 + By_0 + D$
$E` = Bx_0 + Cy_0 + E$
$F` = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F$

2.6.2 Поворот.

$$\begin{cases} x = x`\cos\alpha - y`\sin\alpha \\ y = x`\sin\alpha + y`\cos\alpha \end{cases}$$

$$A(x`\cos\alpha - y`\sin\alpha)^2 + 2B(x`\cos\alpha - y`\sin\alpha)(x`\sin\alpha + y`\cos\alpha) + C(x`\sin\alpha + y`\cos\alpha)^2 +$$
$$+2D(x`\cos\alpha - y`\alpha) + 2E(x`\sin\alpha + y`\cos\alpha) + F = 0$$

$$A(x`^2\cos^2\alpha - 2x`y`\sin\alpha\cos\alpha + y`^2\sin^2\alpha) + 2B(x`^2\cos\alpha\sin\alpha - x`y`\sin^2\alpha + x`y`\cos^2\alpha - y`^2\sin\alpha\cos\alpha) +$$
$$+C(x`^2\sin^2\alpha + 2x`y`\sin\alpha\cos\alpha + y`^2\cos^2\alpha) + 2D(x`\cos\alpha - y`\sin\alpha) + 2E(x`\sin\alpha + y`\cos\alpha) + F = 0$$

$$A` = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha = \frac{A}{2}(1+\cos 2\alpha) + B\sin 2\alpha + \frac{C}{2}(1-\cos 2\alpha) = \frac{A+C}{2} + B\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\ \mathrm{c}$$

$$B` = -A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{A}{2}\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha + \frac{C}{2}\sin 2\alpha = -\frac{A-C}{2}\sin 2\alpha + B\ \mathrm{c}$$

$$C` = A\cos^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha = \frac{A}{2}(1-\cos 2\alpha) - B\sin 2\alpha + \frac{C}{2}(1+\cos 2\alpha) = \frac{A+C}{2} - B\sin 2\alpha - \frac{A-C}{2}\ \mathrm{c}$$

$$\boxed{\begin{gathered} A` = \frac{A+C}{2} + B\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha \\ B` = -\frac{A-C}{2}\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha \\ C` = \frac{A+C}{2} - B\sin 2\alpha - \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha \\ D` = D\cos\alpha + E\sin\alpha \\ E` = -D\sin\alpha + E\cos\alpha \\ F` = F \end{gathered}}$$

2.7 Инварианта кривых второго порядка.

$$J_1 = A + C$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Теорема. J_1, J_2, J_3 - ортогональны инвариантной кривой 2^{20} порядка.

Доказательство

Для J_1 и J_2

1. $A` = A, B` = B, C` = C// \ J_1` = J_1, \ J_2` = J_2$ - см формулы пересчёта для сдвига.

2. $J_1` = A` + C` = \frac{A+C}{2} + B\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha + \frac{A+C}{2} - B\sin 2\alpha - \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha = A + C$
$J_2` = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A`C` - B`^2 = (\frac{A+C}{2} + B\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha)(\frac{A+C}{2} - B\sin 2\alpha - \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha) - (-\frac{A-C}{2}\sin 2 + B\sin 2\alpha)^2 = \frac{(A+C)^2}{4} - (B\sin 2\alpha + \frac{A-C}{2}\cos 2\alpha)^2 - (-\frac{A-C}{2}\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha) = (\frac{A+C}{4})^2 - B^2\sin^2 2\alpha - B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha - (\frac{A-C}{2})^2\sin^2 2\alpha + B(A-C)\sin 2\alpha\cos 2\alpha - B^2\cos 2\alpha = (\frac{A+C}{2})^2 - (\frac{A-C}{2})^2 - B^2 = AC - B^2$

Кривая называется **центральной** если у неё есть единственный центр симметрии. Кривая **не центральная** если у неё нет центров симметрии, или их больше 1.
Теорема 2.

Кривая второго порядка центральная$\Leftrightarrow J_2 \neq 0$
Кривая второго порядка нецентральная $\Leftrightarrow J_2 = 0$

Элипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2b^2} > 0$
Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$
Парабола: $y^2 = 2px$
$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

2.8 Приведение кривой второго порядка к каноническому виду ортагональными преобразованиями.

2.8.1 Центральная кривая

1. Сдвиг. Цель - убрать линейные слагаемые (найти O` (x_0, y_0) решить систему)

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad *$$

Её доказывать не будем:

Теорема Крамера. (*) имеет единственное решение $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$ Найдём $O`(x_0, y_0)$

$$A\xi`^2 + 2B\xi\psi` + C`y`^2 + F` = 0$$

$$A` = A, B` = B, C` = C$$

2. Поворот. Цель - убрать B` угол $\alpha : -\frac{A`-C`}{2}\sin 2\alpha + B`\cos 2\alpha = 0$
   beginenumerate

   Если $B` = 0$ то ничего делать не надо

   $B` \neq \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A`-C`}{2B`}$

$$\begin{cases} x` = x``\cos\alpha - y``\sin\alpha \\ y` = x``\sin\alpha + y``\cos\alpha \end{cases}$$

$$A``x``^2 + C``y``^2 + F`` = 0$$

$J_2 = \begin{vmatrix} A`` & 0 \\ 0 & C`` \end{vmatrix} = A``C`` \neq 0 \Rightarrow A`` \neq 0 and C`` \neq 0$

$J_3 = \begin{vmatrix} A`` & 0 & 0 \\ 0 & C`` & 0 \\ 0 & 0 & F`` \end{vmatrix} = A``C``F`` = J_2F`` \Rightarrow F`` = \frac{J_3}{J_2}$

$$A``x``^2 + C``y``^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0$$

$$A``x`` + C``y`` = -\frac{J_3}{J_2}$$

1. Элипс
   $J_2 > 0, J_2 = A``C`` > 0$
   $A`` = C``$
   $A`` > 0, C`` > 0$

$$J_1 > 0$$

   (a) $J_3 < 0, J_2 > 0$
   $-\frac{J_3}{J_2} > 0$
   $\frac{x``^2}{-\frac{J_3}{J_2A``}} + \frac{y``^2}{-\frac{J_3}{J_2C``}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x``^2}{a^2} + \frac{y``^2}{b^2} = 1$

   (b) $J_3 = 0$
   $A``x``^2 + C``y``^2 = 0$
   Выражденый эллипс.

(c) $J_3 > 0$
$\frac{x``^2}{-\frac{J_3}{J_2 A``}} + \frac{y``^2}{-\frac{J_3}{J_2 C``}} = -1$

$$\frac{x``^2}{\frac{1}{A``}} + \frac{y``^2}{\frac{1}{C``}} = 0$$

$$\frac{x`^2}{a^2} + \frac{y``^2}{b^2} = 0$$

$$\frac{x`^2}{a^2} + \frac{y``^2}{b^2} = -1$$

- это мнимый элипс

2. Гипербола
$J_2 < 0, J_2 = A``C`` < 0$
$A`` = -C``$
$A`` > 0, C`` < 0$

$$J_1 > 0$$

(a) $J_3 = 0, J_2 < 0$

$$A``x``^2 - (-C``)y``^2 = -\frac{J_3}{J_2}$$

$\frac{x``^2}{-\frac{J_3}{J_2 A``}} - \frac{y``^2}{-\frac{J_3}{J_2 C``}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x``^2}{a^2} - \frac{y``^2}{b^2} = 1$
либо $-\frac{x``^2}{a^2} + \frac{y``^2}{b^2} = 1$

(b) $J_3 = 0$

$$A``x``^2 + C``y``^2 = 0$$

$$A`` > 0, C`` < 0$$

$$(\sqrt{A``}x``)^2 - (\sqrt{-C``}y``)^2 = 0$$

- Это 2 пересекающиеся прямые.

Замечание к сдвигу. После сдвига начало координат - центр кривой (и он единственный).

2.9 Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду в случае нецентральной прямой.

$J_2 = 0$
Поворотб сдвиг. Цель - убрать B.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}$$

$$A`x`^2 + C`y`^2 + 2D`x` + 2E`y` + F` = 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} A` & 0 \\ 0 & C` \end{vmatrix} = A`C` = 0 \Rightarrow A` = 0, C` = 0$$

$$C`y`^2 + 2D`x` + 2E`y` + F` = 0, C` \neq 0$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D` \\ 0 & C` & E` \\ D` & E` & F` \end{vmatrix} = -C`D`^2$$

1. $J_3 \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0$

$$C`y`^2 + 2E`y` = -D`x` - F`$$

$$(y` + b) = -\frac{2D`}{C`}(x` + a)$$

Сдвиг

$$\begin{cases} x`` = x` + a \\ y`` = y` + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x` = x`` - a \\ y` = y`` - b \end{cases} \qquad O``(a, b)$$

Парабола

$$y``^2 = -\frac{2D`}{C`}x``$$

2. $D` = 0 \Leftrightarrow J_3 = 0$

$$C`y`^2 + 2E`y` + F` = 0$$

$$y`^2 + 2\frac{E`}{C`}y` + \frac{F`}{C`} = 0$$

$$(y`^2 + 2\frac{E`}{C`}y` + \frac{E`^2}{C`^2}) + \frac{F`}{C`} - \frac{E`^2}{C`^2} = 0$$

$$(y + \frac{E`}{C`})^2 = \frac{E`^2}{C`^2} - \frac{F`}{C`}$$

Сдвиг:

$$\begin{cases} x`` = x` \\ y`` = y` + \frac{E`}{C`} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x` = x`` \\ y` = y`` - \frac{E`}{C`} \end{cases}$$

$$y``^2 = \frac{E`^2}{C`^2} - \frac{F`}{C`}$$

(a) $\frac{E`^2}{C`^2} - \frac{F`}{C`} > 0$ - 2 прямые

(b) $\frac{E`^2}{C`^2} - \frac{F`}{C`} = 0$ - 2 совпадающие прямые

(c) $\frac{E`^2}{C`^2} - \frac{F`}{C`} < 0$ - 2 мнимые параллельные прямые

3 Классификация прямых 2 порядка по инвариантам.

$J_2 > 0$ элиптический тип		
$J_3 < 0, J_1 > 0$ действительный элипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ центральная кривая	$J_3 = 0, J_1 > 0$ выражденый элипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ центральная кривая	$J_3 > 0, J_1 > 0$ мнимый элипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ центральная кривая

$J_2 < 0$ гиперболический тип	
$J_3 \neq 0$ гиперкуб $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ центральная кривая	$J_3 = 0$ пара пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ центральная кривая

height

$J2 = 0$ параболический тип	
$J_3 \neq 0$ парабола $y^2 = 2px$ не центральная кривая	$J_3 = 0$ a. $y^2 = a^2$ - пара паралельных прямых. b. $y^2 = 0$ - пара совпадающих прямых. c. $y^2 = -a^2$ - пара паралельных мнимых прямых. не центральная кривая

height

Плоскости

3.1 Цилиндрические поверхности

S - **называется цилиндрической повехностью** с образающей паралельнной Oz, если для любо /й точки $m_0 \in S$ вся прямая, проходящая через $(.)m_0$ и лежит на S.
Теорема. Уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

Задаёт цилиндрическую поверхность с образующей Oz.

$$S : M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$$

$$F(x_0, y_0) = 0$$

$$M_0 \in L \;\&\; L||Oz$$

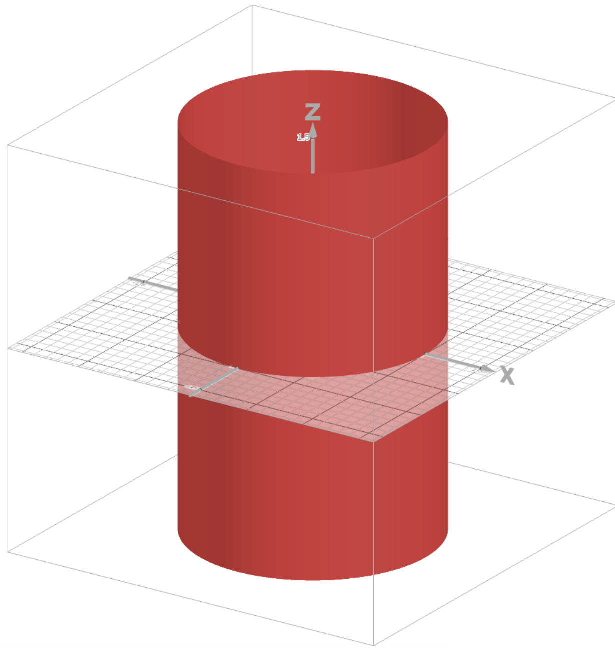
$$\overline{q} = \{0, 0, 1\}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + 0t \\ y = y_0 + 0t \\ z = z_0 + t \end{cases} \quad M \in L$$

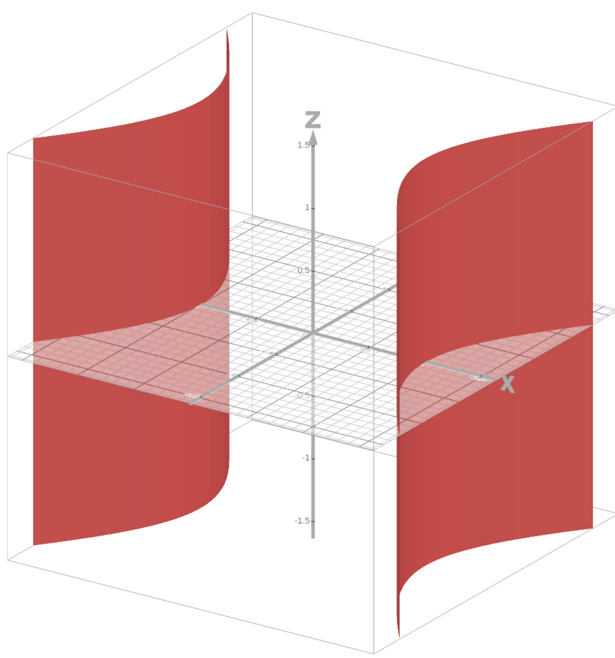
$$F(x_0 + 0t, y_0 + 0t) = F(x, y) = 0 \Rightarrow M \in S$$

Пусть F(x, y) - влгебраическй многочлен 2 порядка.

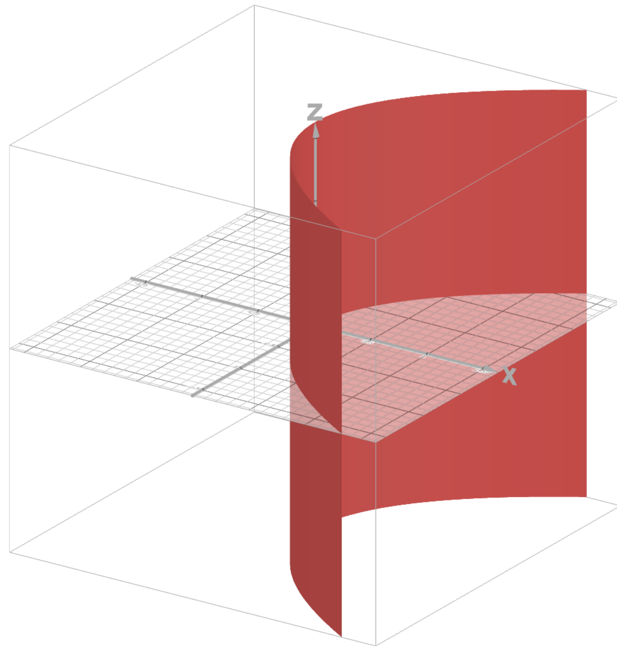
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - элиптический цилиндр.



2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ - гиперболический цилиндр.



3. $y^2 = 2px$ - параболический цилиндр.



3.2 Конические поверхности

S - **коническая поверхность с вершиной в начале кординат**, если $\forall M_0 \in S$ вся прямая содержит O и $M_0 \in S$
F(x, t, z) - **однородная функция порядка K**, если $\forall t \in \mathbb{R}$ $F(tx, ty, tz) = t^k F(x, y, z)$
Теорема.

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

F - однородная функция порядка K задаёт коническую поверхность с вершиной в O.

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$$

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$M_0, O \in L$$

$$\overline{q} = \{x_0, y_0, z_0\}$$

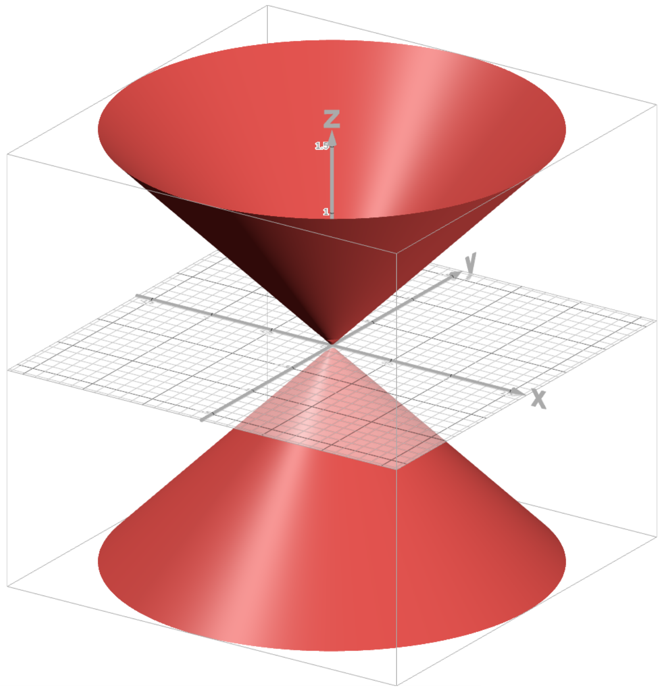
$$L: \begin{cases} x = 0 + x_0 t \\ y = 0 + y_0 t \\ z = 0 + z_0 t \end{cases}, M \in L$$

OXYZ - ДПСК

$$F(x, y, z) = F(x_0 t, y_0 t, z_0 t) = t^k F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

$$M_0 \in S$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$



Сечение плоскостью Z=C - выражденый элипс.

3.3 Поверхности вращения

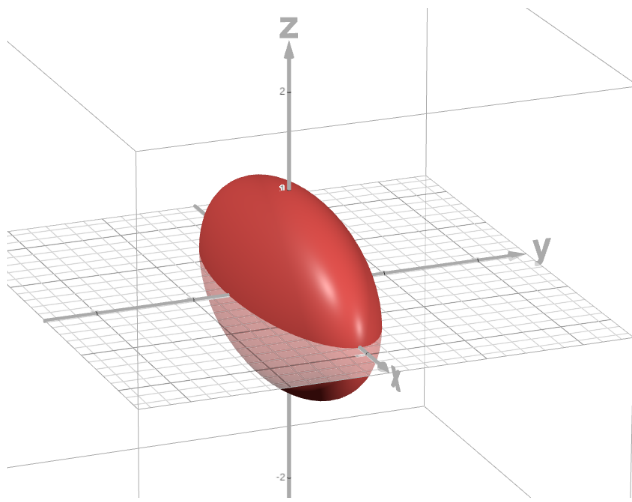
S - **поверхность вращения вокруг оси Oz**, если $\forall M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ вся окружность лежащая в плоскости $Z = Z_0$ с центром в $(0, 0, z_0)$ и радиусом $R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} \in S$

$$F(x^2, y^2, z^2) = 0 \tag{1}$$

Теорема. S задаёся уравнением (1), то S - поверхность вращения вокруг Oz.

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$$
$$F(x_0^2 + y_0^2, z_0^2) = 0$$
$$z = z_0$$
$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2 y_0^2}$$
$$M \in S \Rightarrow F(x^2 + y^2, z) = F(x_0^2 + y_0^2, z_0) = 0$$
$$x^2 + y^2 - z^2$$

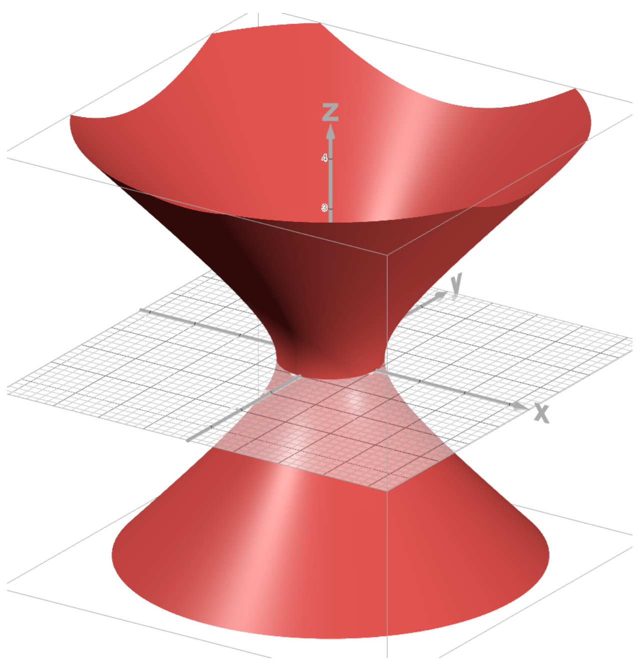
1. Элипсоид



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

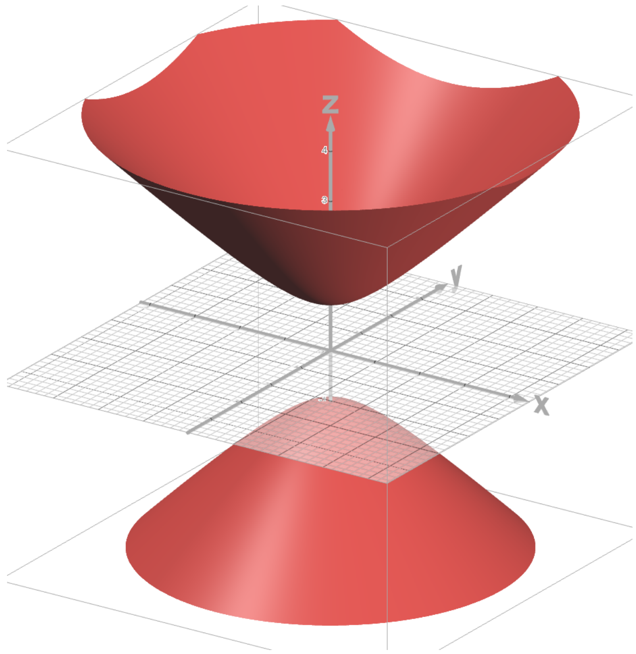
Похож на мяч для регби. Сфера - частный случай элипсоида.
Сечение любыми плоскостями в пределах элипсоида - элипс.

2. Однополостный гиперболоид



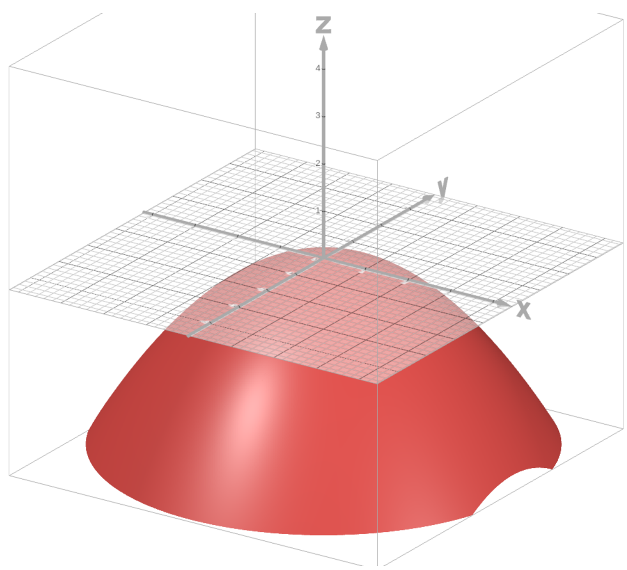
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

3. Двуполостный гиперболоид



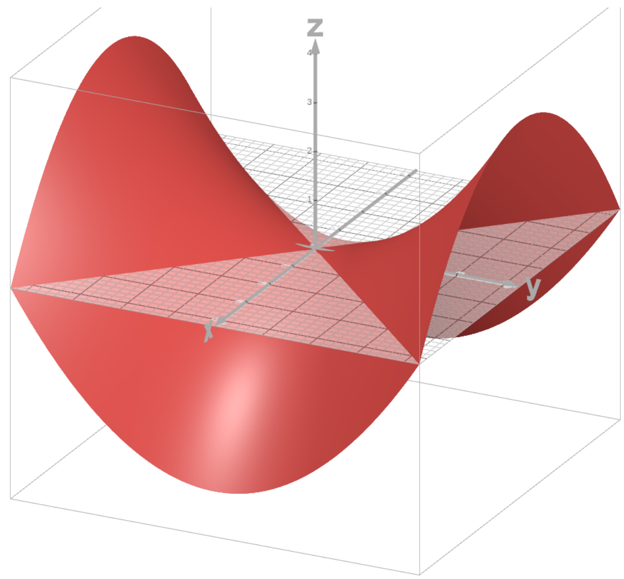
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

4. Элиптический параболоид



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

5. Гиперболический параболоид



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Седло ;)