

# Конспект по математическому анализу

Голубов Владислав

Сентябрь 2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Комплексные числа</b>	<b>3</b>
1.1	Определение и свойства . . . . .	3
1.2	Арифметические операции . . . . .	3
1.3	Формула Эйлера . . . . .	3
1.4	Геометрическое представление . . . . .	4
1.5	Тригонометрическая форма . . . . .	4
1.6	Формула Де-Муавра . . . . .	4
1.7	Комплексные корни . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Метод математической индукции (ММИ)</b>	<b>5</b>
2.1	Бином Ньютона . . . . .	5
2.2	Неравенство о средних . . . . .	6
2.3	Неравенство треугольника . . . . .	8
<b>3</b>	<b>§1. Пределы и числовая система</b>	<b>9</b>
3.1	Пределы последовательности . . . . .	9
3.2	Что-то про доказательство существования иррациональных чисел (про $\sqrt{2}$ ).1 . . . . .	9
3.3	Ограниченные и сходящиеся последовательности . . . . .	10
3.4	Бесконечно малые последовательности . . . . .	11
3.4.1	Ограничение на количество элементов центрального класса. . . . .	15
3.4.2	Пример 2-х последовательностей стягивающихся к 0 . . . . .	15
3.4.3	Пример 2-х последовательностей стягивающихся к $\sqrt{2}$ . . . . .	15
3.5	Действительные числа . . . . .	15
3.6	Сравнение действительных чисел и арифметические операции . . . . .	16
3.6.1	Определение сравнения рационального и действительного числа. . . . .	16
3.6.2	Определение сравнения 2-х действительных чисел (запись лекции) . . . . .	16
3.7	Арифметические операции . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Вложенные стягивающиеся отрезки с действительными концами</b>	<b>18</b>
4.1	Определения. . . . .	18
4.2	Окрестностное определение предела последовательности. . . . .	18
<b>5</b>	<b>§3 Число <math>e</math> как предел последовательности.</b>	<b>20</b>
<b>6</b>	<b>§4 Последовательности.</b>	<b>22</b>

<b>7</b>	<b>§5 Теорема Больцано-Вейерштрасса</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>§5. Критерий Коши сходящейся последовательности.</b>	<b>24</b>
8.1	Фундоментальные последовательности. . . . .	24
8.2	Критерий Коши. . . . .	24
<b>9</b>	<b>§6. Верхний и нижний предел.</b>	<b>25</b>
<b>10</b>	<b>Числовые ряды</b>	<b>26</b>
10.1	Определения и элементарные факты. . . . .	26
10.1.1	Определение . . . . .	26
10.1.2	<b>Теорема 1.</b> . . . . .	27
10.1.3	<b>Теорема 2. Критерий Коши о сходимости ряда.</b> . . . .	27
10.1.4	<b>Следствие 1. Изменение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость.</b> . . . .	27
10.2	<b>Следствие 2. Необходимое условие сходимости ряда.</b> . . . .	27
10.3	Абсолютно сходящийся ряд. . . . .	28
10.3.1	<b>Теорема 1. Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.</b> . . . .	28
10.3.2	<b>Определение.</b> . . . . .	28
10.3.3	<b>Теорема 2.</b> . . . . .	29
10.3.4	<b>Теорема 3. Признак сравнения.</b> . . . . .	29
10.3.5	<b>Следствие. (Признак сравнения).</b> . . . . .	29
10.3.6	<b>Теорема 4. Признак Коши.</b> . . . . .	30
<b>11</b>	<b>Глава 3. Функции</b>	<b>33</b>
11.1	Понятие функции. . . . .	33
11.2	Способы задания. . . . .	33
11.2.1	Ограниченность функций. . . . .	34
11.3	Предел функции в точке. . . . .	35
11.4	Односторонние пределы. . . . .	38
11.5	Критерий Коши. Существование предела функции в точке. . . . .	39
11.6	Пределы при стремлении к бесконечности. Бесконечные пределы. . . . .	40
11.7	Свойства функций, имеющих предел . . . . .	40
11.8	Некоторые важные пределы. . . . .	43

# 1 Комплексные числа

## 1.1 Определение и свойства

**Определение.** *Комплексными числами* называются числа вида  $z = x + iy$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ , а  $i$  — *мнимая единица*, обладающая свойством  $i^2 = -1$ .

- $x = \operatorname{Re} z$  — **действительная часть** числа  $z$ .
- $y = \operatorname{Im} z$  — **мнимая часть** числа  $z$ .
- Если  $y = 0$ , то  $z = x$  — действительное число.
- Число  $\bar{z} = x - iy$  называется **комплексно-сопряжённым** к  $z$ .

**Свойство:**  $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$ .

Важное примечание

**Нельзя** сравнивать комплексные числа операциями  $<, >, \leq, \geq$ !

## 1.2 Арифметические операции

Пусть  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

1. **Сложение/Вычитание:**  $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
2. **Умножение:**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

3. **Деление:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

## 1.3 Формула Эйлера

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$
$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$$

## 1.4 Геометрическое представление

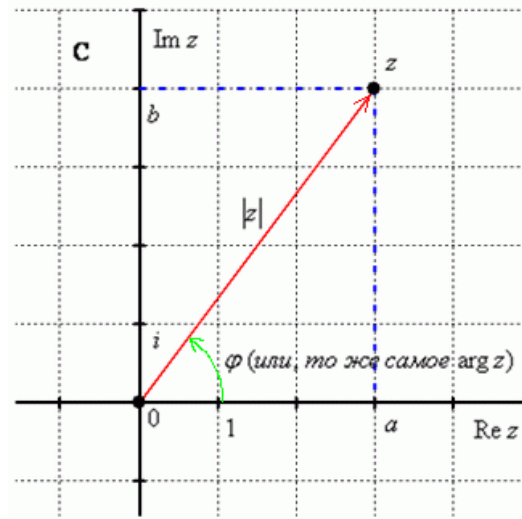


Рис. 1: Геометрическая интерпретация комплексного числа.

## 1.5 Тригонометрическая форма

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad r = |z|$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\phi_1 - \phi_2) + i \sin(\phi_1 - \phi_2))$$

## 1.6 Формула Де-Муавра

$$(\cos \phi + i \sin \phi)^k = \cos k\phi + i \sin k\phi$$

## 1.7 Комплексные корни

$$\sqrt[n]{z} = \omega$$

$$\omega^n = z, \quad z \neq 0$$

$$z = re^{i\phi}, \quad \omega = \rho e^{i\Psi}$$

$$\omega^n = \rho^n e^{in\Psi} = z = re^{i\phi} = re^{i(\phi+2\pi k)}$$

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$$

$$n\Psi = \phi + 2\pi k \Rightarrow \Psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$$

Корни будут образовывать правильный многоугольник.

## 2 Метод математической индукции (ММИ)

**Алгоритм доказательства по индукции:**

1. **База индукции:** Проверить утверждение для  $n = 1$ .
2. **Индукционное предположение:** Предположить, что утверждение верно для  $n = k$ .
3. **Индукционный переход:** Доказать, что из этого следует верность утверждения для  $n = k + 1$ .

### 2.1 Бином Ньютона

**Определение.** *Биномиальный коэффициент:*  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , где  $n, k \in \mathbb{N}_0$ ,  $0! = 1$ .

**Формула бинома Ньютона:**

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

**Доказательство по ММИ**

**База индукции:** Для  $n = 1$ :

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$\sum_{k=0}^1 C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a + b$$

База индукции доказана.

**Индукционное предположение:** Предположим, формула верна для  $n = m$ :

$$(a + b)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k$$

**Индукционный переход:** Докажем для  $n = m + 1$ . Умножим обе части

предположения на  $(a + b)$ :

$$(a + b)^{m+1} = (a + b) \cdot \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^k$$

Раскроем скобки:

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} b^{k+1}$$

Во второй сумме сделаем замену индекса  $j = k + 1$ :

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j$$

Теперь объединим суммы, выделяя крайние слагаемые:

$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^m [C_m^k + C_m^{k-1}] a^{(m+1)-k} b^k + C_m^m b^{m+1}$$

Используем свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$$

Учитывая, что  $C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1$  и  $C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1$ , получаем:

$$(a + b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{(m+1)-k} b^k$$

Индукционный переход завершён.

## 2.2 Неравенство о средних

**Теорема (Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим):** Для любых  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  справедливо:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

Доказательство по ММИ (метод Коши / метод обратной индукции)

Докажем теорему в три этапа.

**1. База индукции для степеней двойки ( $n = 2^m$ ).**

- Для  $n = 2$ : Докажем  $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$ .

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2)^2 \geq 0 &\Rightarrow a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0 \Rightarrow a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 4a_1a_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}\end{aligned}$$

- Предположим, неравенство верно для  $n = k$ .
- Докажем для  $n = 2k$ :

$$\begin{aligned}\frac{a_1 + \dots + a_{2k}}{2k} &= \frac{\frac{a_1 + \dots + a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \dots + a_{2k}}{k}}{2} \geq \\ &\geq \frac{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \dots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 \dots a_{2k}}\end{aligned}$$

**2. Докажем, что если неравенство верно для  $n$ , то оно верно и для  $n - 1$ .** Рассмотрим  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \geq 0$ . Пусть

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}}{n - 1}$$

Для набора из  $n$  чисел неравенство верно:

$$\frac{a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$$

Подставим  $a_n$ :

$$\frac{(a_1 + \dots + a_{n-1}) + \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n - 1} = a_n$$

Таким образом:

$$a_n \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$$

Возведём в степень  $n$ :

$$a_n^n \geq a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \Rightarrow a_n^{n-1} \geq a_1 a_2 \dots a_{n-1}$$

Извлекая корень  $(n - 1)$ -й степени:

$$a_n \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \Rightarrow \frac{a_1 + \dots + a_{n-1}}{n - 1} \geq \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$$

**3. Завершение доказательства.** Мы доказали, что:

1. Неравенство верно для  $n = 2$  (а значит, для  $n = 4, 8, 16, \dots$ )
2. Из верности для  $n$  следует верность для  $n - 1$

Следовательно, неравенство верно для любого натурального  $n$ .

## 2.3 Неравенство треугольника

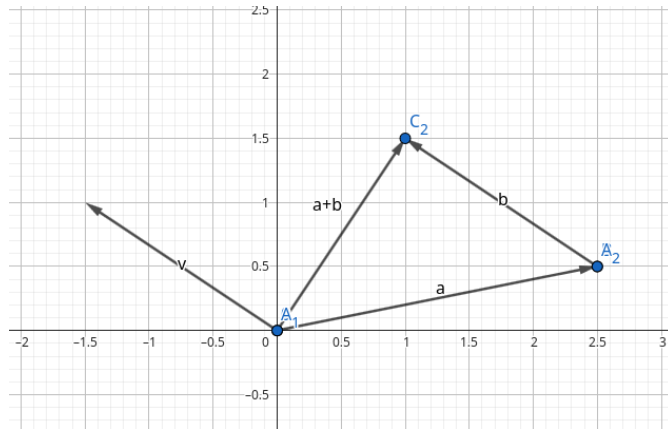


Рис. 2: Геометрический смысл неравенства треугольника: длина стороны  $|\vec{a} + \vec{b}|$  не превосходит суммы длин сторон  $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ .

**Теорема (Неравенство треугольника):** Для любых комплексных чисел  $z_1, z_2$  справедливо:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Доказательство

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

1.  $a \geq 0$  ( $|a| \geq |b|$ )

$a + b \geq 0$ , то  $|a + b| = a + b$ .

$a + b \leq 0$ , то  $|a + b| = -(a + b) = -a - b \leq |a| + |b|$

2.  $|a - b| \geq ||a| - |b||$

$a = (a - b) + b$  по н.т.:  $|a + 0| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a - b| \geq |a| - |b|$

Аналогично  $|b| \leq |b - a| + |a| \Rightarrow |a - b| \geq |b| - |a|$

Получим, что 
$$\begin{cases} |a - b| \geq |a| - |b| \\ |a - b| \geq |b| - |a| \end{cases} \Rightarrow |a - b| \geq ||a| - |b||$$

Следствие

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$



## 3 §I. Пределы и числовая система

### 3.1 Пределы последовательности

**Определение.** Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{a_n\}$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n > N_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  или  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ .

#### Теорема о единственности предела

**Теорема:** Последовательность не может иметь более одного предела.

**Доказательство от противного:** Предположим, что последовательность  $\{a_n\}$  имеет два различных предела:  $a_n \rightarrow A$  и  $a_n \rightarrow B$ , где  $A \neq B$ . Пусть  $\varepsilon = \frac{|A-B|}{4} > 0$ . Тогда по определению предела:

- $\exists N_1 : \forall n > N_1 : |a_n - A| < \varepsilon$
- $\exists N_2 : \forall n > N_2 : |a_n - B| < \varepsilon$

Возьмём  $n > \max(N_1, N_2)$ . Тогда выполняются оба неравенства. Оценим разность  $|A - B|$ :

$$|A - B| = |(A - a_n) + (a_n - B)| \leq |A - a_n| + |a_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = \frac{|A - B|}{2}$$

Получили противоречие:  $|A - B| < \frac{|A - B|}{2}$ . Следовательно, наше предположение неверно, и предел единственен.

### 3.2 Что-то про доказательство существования иррациональных чисел (про $\sqrt{2}$ ).1

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$$

$$\frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \text{ Пусть: } p = 2k \Rightarrow 4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

### 3.3 Ограниченные и сходящиеся последовательности

**Определение**  $\{a_n\}$  ограничена, если  $\exists M > 0 : \forall n |a_n| < M, a_n, M, n \in \mathbb{Q}$

**Определение**  $\{a_n\}$  не ограничена, если  $\forall M > 0 : \exists n |a_n| \geq M, a_n, M, n \in \mathbb{Q}$

**Теорема 2** Любая сходящаяся последовательность ограничена  
Если  $\{a_n\}$  сходится  $\Rightarrow \{a_n\}$  ограничена

Доказательство Т2

$$\varepsilon := 1 \quad \exists N : \forall n > N \quad |a_n - a| < 1 \Leftrightarrow -1 < a_n - a < 1 \Leftrightarrow a - 1 < a_n < a + 1$$

$$M := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a - 1|, |a + 1|\} + 1$$

$\Rightarrow \{a_n\}$  - ограничена (сверху)

**Определение**  $\{a_n\}$  ограничена сверху, если  $\exists M : \forall n a_n < M$

**Определение**  $\{a_n\}$  ограничена снизу, если  $\exists m : \forall n a_n > m$

Пример:

1.  $\{\cos n\} \mid \cos n| \leq 1$
2.  $\{n\}$  ограничена снизу но не сверху  $(0, 1, \dots)$

### 3.4 Бесконечно малые последовательности

**Определение** Бесконечно малые последовательности

$\{\alpha_n\}$  ( $\forall n, \alpha_n \in Q$ ) бесконечно малая, если  $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

**Теорема 3**

Если  $a_n \rightarrow a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$ , где  $\{\alpha_n\}$  - б.м.

Доказательство Т3

$\Rightarrow$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\text{Пусть } |a_n - a| = \alpha_n \Rightarrow a_n = a + \alpha_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon |a_n - a| = |\alpha_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$\Leftarrow$ :

$$\{\alpha_n\} - \text{б.м.}, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \varepsilon > |\alpha_n| = |a_n - a| \Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

**Теорема 4**

1.  $\{\alpha_n\}$  и  $\{\beta_n\}$  - б.м.  $\Rightarrow \{\alpha_n \pm \beta_n\}$  - б.м.
2.  $\{\alpha_n\}$  - б.м. и  $\{\beta_n\}$  - ограничена  $\Rightarrow \{\alpha_n \cdot \beta_n\}$  - б.м.

Доказательство Т4: Предел суммы/разности б.м. последовательностей

**Доказательство:**

I Требуется доказать, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\varepsilon |\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon$ .

1. Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ .
2. Так как  $\{\alpha_n\}$  — б.м., то для числа  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  найдётся номер  $n'_\varepsilon$  такой, что:  
 $\forall n > n'_\varepsilon \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
3. Аналогично  $\forall n > n''_\varepsilon \quad |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$
4. Выберем номер  $n_\varepsilon = \max\{n'_\varepsilon, n''_\varepsilon\}$ . Тогда для всех  $n > n_\varepsilon$  будут выполняться **оба** неравенства из пунктов (2) и (3).
5. Оценим модуль суммы (или разности) для всех  $n > n_\varepsilon$ , используя неравенство треугольника:

$$|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Так как  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon |\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon$ , то по определению последовательность  $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$  является бесконечно малой.

II  $\beta_n$  - ограничена  $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n |b_n| < M \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

### Теорема 5

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a, b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$$

$$1. a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$$

$$2. a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$$

$$3. \text{ Если } b_n \neq 0 \forall n \text{ и } b \neq 0, \text{ то } \frac{a_n}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b}$$

### Доказательство Т5: Арифметические свойства предела

#### Из Т4 про арифметические свойства б.м. последовательностей

$$1. a_n + b_n = (a + \alpha_n) + (b + \beta_n) = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$$

$(\alpha_n + \beta_n)$  - Сумма б.м.,  $(a + b) + (\alpha_n + \beta_n) =$  по Т3  $= a_n + b_n \rightarrow a + b$

$$2. a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (\alpha_n b + \beta_n a + \alpha_n \beta_n) \xrightarrow{T3} ab$$

$$3. \text{ Докажем, что } \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \text{ - б.м.}$$

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{a_n b - a b_n}{b_n b} = \frac{(a + \alpha_n)b - a(b + \beta_n)}{b b_n} = \frac{\alpha_n b - a \beta_n}{b b_n}$$

$\alpha_n b - a \beta_n$  - бесконечно малая

Проверим ограниченность  $\frac{1}{b b_n}$

$$\varepsilon = \frac{|b|}{2} : \exists n_\varepsilon \forall n > n_\varepsilon |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|b_n| = |b - (b - b_n)| \geq (\text{неравенство треугольника}) \geq ||b| - |b - b_n|| \geq$$

$$|b| - |b - b_n| > \frac{|b|}{2} \Rightarrow \frac{1}{|b_n|} < \frac{2}{|b|} \Rightarrow \left\{ \frac{1}{b_n} \right\} \text{ - ограничена}$$

$$\text{Значит, что } \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} = \frac{\alpha_n b - a \beta_n}{b b_n} \text{ - бесконечно малая.}$$

## §2 Дедекиндовы сечения по видеозаписи

### Неполнота рациональных чисел.

$$r = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

Дробь можно сделать несократимой.

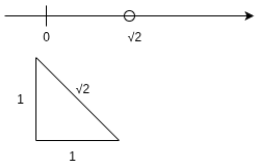
Пусть  $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$  - несократимая дробь  $\Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p = 2k$  (p - чётное число)

$$k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q - \text{чётное число}$$

т.к. дробь несократимая, а числитель и знаменатель чётные, то она на самом деле сократима.

Противоречие!

Значит это число **нельзя** представить рациональной дробью.



Если на оси отметить все рациональные числа точками, то  $\sqrt{2}$  - будет выколотой точкой.

### Отрезки

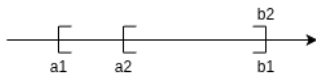
$$I_n = [a_n, b_n] = \{r \in \mathbb{Q} \mid a_n \leq r \leq b_n\}, \text{ где } a_n, b_n \in \mathbb{Q}$$

Будем считать, что  $\forall n [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$  - **вложенные отрезки**.

Это значит, что  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$  и следующий отрезок меньше предыдущего.

$$b_n - a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 - \text{стягивающиеся отрезки.}$$

Дальше будем подразумеваться, что все последовательности  $\{I_n\}$  - вложенные и стягивающиеся в точку.



Что нам дают такие отрезки:  $\forall r$

$$\exists n : r < a_n \Rightarrow \forall m > n : r < a_m \quad (1)$$

$$\exists n : r > b_n \Rightarrow \forall m > n : r > b_m \quad (2)$$

$$\forall n : a_n \leq r \leq b_n \quad (3)$$

1. левый класс для  $\{I_n\}$  (всегда не пуст)
2. правый класс для  $\{I_n\}$  (всегда не пуст)

3. центральный класс для  $\{I_n\}$  (может быть пустым учитывая  $r \in \mathbb{Q}$ ). Не может содержать более 1  $\mathbb{Q}$  числа.

Слово "класс" подразумевает множество.

**Дедекиндово сечение** - множество рациональных чисел ( $\mathbb{Q}$ ) порождённое последовательностью  $\{I_n\}$ .

Тогда каждому действительному числу будет соответствовать своё дедекиндово сечение.

### Определение

$\{I_n\}$  и  $\{I_n'\}$  - **эквиваленты**, если они порождают одинаковые разбиения на классы

### Теорема 1

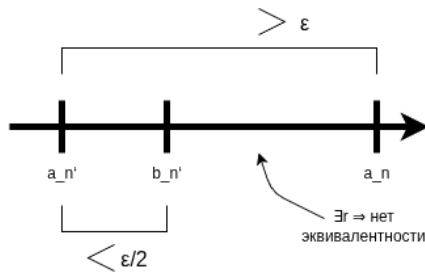
$\{I_n\} \sim \{I_n'\} \Leftrightarrow$

$$1. \forall n \quad a_n - a_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ИЛИ

$$2. \forall n \quad a_n \leq b_n', \quad a_n' \leq b_n$$

### Доказательство Т1



#### Только п.1.

$$\Rightarrow: \{I_n\} \sim \{I_n'\} \Rightarrow a_n - a_n' \rightarrow 0$$

от противного: тогда  $a_n - a_n' \not\rightarrow 0 \Leftrightarrow$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N \quad \exists n > N \quad |a_n - a_n'| \geq \varepsilon$$

$\Rightarrow$  для бесконечно многих номеров либо  $a_n - a_n' > \varepsilon$ , либо  $a_n' - a_n > \varepsilon$

Пусть для бесконечно многих номеров  $a_n - a_n' > \varepsilon$

$$\exists n_\varepsilon \text{ длина } [a_n', b_n'] < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$b_n' - a_n' \rightarrow 0 \quad \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \quad |b_n' - a_n'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Т.к.  $\exists r \in [b_n', a_n]$ , то она принадлежит правому классу  $\{I_n'\}$  и левому классу  $\{I_n\}$ . Последовательности не эквивалентны.

$$\Leftarrow: a_n - a_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{I_n\} \sim \{I_n'\}$$

От противного: пусть  $\{I_n\} \not\sim \{I_n'\}$ , то есть  $\exists r \in \mathbb{Q}$   $r$  из левого класса для одной и центрального или правого класса другой.

г из левого класса  $\{I_n\} \exists n : r < a_n$

i. г из правого класса  $\{I_n'\} \Rightarrow \exists n' : \forall n > n' \quad a_n' \leq b_n' < r < a_n \leq a_m$

ii. г из центрального класса  $\{I_n'\}$

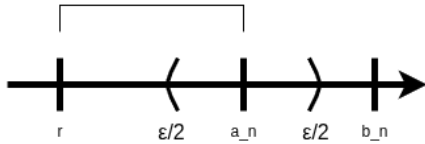
$\exists n : r < a_n$  Пусть  $\varepsilon = a_n - r (> 0)$

$\exists n_\varepsilon : \forall m > n_\varepsilon |b_m' - a_m'| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow [a_m', b_m']$  на расстоянии не меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$  от  $a_n$

**2 вариант доказательства в обратную сторону.**

$\Leftarrow: a_n - a_n' \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow \{I_n\} \sim \{I_n'\}$

а) совпадение левых классов  $r \in$  левый класс для  $\{I_n\}$   
 $:= \varepsilon$



$\exists n : r < a_n$

$\exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \quad |a_n - a_n'| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow r < a_n' \Rightarrow r \in$  левый класс для  $\{I_n'\}$

б) правые классы аналогично

### 3.4.1 Ограничение на количество элементов центрального класса.

Если г из центрального класса, то  $\forall n : a_n \leq r \leq b_n$

А если  $\exists r', r \in$  центральный класс  $r < r'$ , то  $a_n \leq r < r' \leq b_n$ . Тогда длина отрезка не может быть меньше длины отрезка  $[r, r']$  значит она не стремится к 0.

В центральном классе может быть либо 0 число либо 1.

### 3.4.2 Пример 2-х последовательностей стягивающихся к 0

$\{I_n\} = [\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}] \quad \{I_n'\} = [\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n+1}] \quad \{I_n''\} = [0, \frac{1}{2n+1}]$  Они определяют 1 и то же число.

### 3.4.3 Пример 2-х последовательностей стягивающихся к $\sqrt{2}$

$[\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}]$

## 3.5 Действительные числа

**Действительные числа** - это вложенные стягивающиеся отрезки с рациональными концами. Числа равны, если последовательность  $\{I_n\} \sim \{I_n'\}$

**Действительное число** - отождествляется с дедекиндовым сечением, порождённым  $\{[a_n, b_n]\}$ . Числа равны, если последовательность  $\{[a_n, b_n]\} \sim$

$$\{[a_n', b_n']\}$$

### 3.6 Сравнение действительных чисел и арифметические операции

$$r, p, q \in \mathbb{Q}$$

$$x, y, z \in \mathbb{R}$$

#### 3.6.1 Определение сравнения рационального и действительного числа.

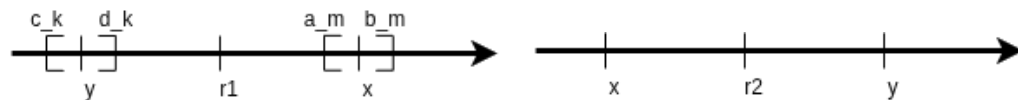
1.  $r < x$ , если  $r$  из левого класса  $\{[a_n, b_n]\}$
2.  $r \equiv x$ , если  $r$  из центрального класса  $\{[a_n, b_n]\}$
3.  $r > x$ , если  $r$  из правого класса  $\{[a_n, b_n]\}$

Нет зависимости от конкретного выбора  $\{[a_n, b_n]\}$

#### 3.6.2 Определение сравнения 2-х действительных чисел (запись лекции)

$$x, y \in \mathbb{R}$$

1.  $x \neq y \Leftrightarrow \exists r_1 \in$  левый класс для  $x$   
 $r_1 \in$  правый класс для  $y$ .  
 Либо  
 $\exists r_2 \in$  Правый класс для  $x$ ,  $r_2 \in$  Левый класс для  $y$ .



$$c_n < d_n < d_k < r_1 < a_m \leq a_n < b_n, \forall n > k + m$$

2.  $x < y$ , если  $\exists r \in \mathbb{Q}$   
 $x < r < y$
3.  $x > y$ , если  $\exists r \in \mathbb{Q}$   
 $x > r > y$
4. Транзитивность  $x < y$ ,  $y < z \Rightarrow x < z$  :  
 $\exists r_1 \in \mathbb{Q}, \exists r_2 \in \mathbb{Q} : x < r_1 < y < r_2 < z$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$  если левые и правые классы совпадают  $\Rightarrow x = y$  для  $x$  и  $y$ .

Если не совпадают, то либо  $\exists r \in \mathbb{Q}$ ,  $r$  в левому классу для  $y$  и правому классу для  $x$ .

$$x \leq r \leq y \Rightarrow x < y$$

либо  $\exists r \in \mathbb{Q} : r$  в правому классу для  $y$  и правому классу для  $x$ .

$$x < r < x \Rightarrow y < x$$



Условия:

1. Если  $r < x \Leftrightarrow r < a_n$  для достаточно больших номеров( $n$ )
2. Если  $r = x \Leftrightarrow \forall n \ a_n \leq r \leq b_n$
3. Если  $r < x \Leftrightarrow r > b_n$  для достаточно больших номеров( $n$ )

Доказательство 2.

1. Если  $r < x \Leftrightarrow r$  из левого класса для  $\{[a_n, b_n]\} \Leftrightarrow \exists n \ r < a_n$
2. аналогично
3. не 1. и не 2.

$x, y \in R \ x < y$ , если  $\exists r \in Q : x < r < y$

### 3.7 Арифметические операции

$x, y \in \mathbb{R} \quad x \sim \{[a_n, b_n]\}$

**Действительное число** - класс эквивалентности стягивающихся отрезков с иррациональными концами.

По простому у каждого такого класса есть рациональное число - центральный класс.

$$x + y \sim \{[a_n + c_n, b_n + d_n]\}$$

Определим операцию сложения

1.  $\{[a_n + c_n, b_n + d_n]\}$  - вложенные стягивающиеся отрезки.  $\forall n \ a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$   
 $\forall n \ c_n \leq c_{n+1} < d_{n+1} \leq d_n$   
 $a_n + c_n \leq a_{n+1} + c_{n+1} < b_{n+1} + d_{n+1} \leq b_n + d_n$   
 $[a_{n+1} + c_{n+1}, b_{n+1} + d_{n+1}] \subset [a_n + c_n, b_n + d_n]$  - вложенность.  
 $(d_n + d_n) - (a_n + c_n) = (b_n - a_n) + (d_n - c_n) \rightarrow 0$  - стягиваемость.

2. Если  $\{[a_n, b_n]\} \sim \{[a_n', b_n']\}$  и  $\{[c_n, d_n]\} \sim \{[c_n', d_n']\} \Rightarrow \{[a_n + c_n, b_n + d_n]\} \sim \{[a_n' + c_n', b_n' + d_n']\}$   
 $a_n - a_n' \rightarrow 0 \quad c_n - c_n' \rightarrow 0$   
Достаточно проверить, что  $(a_n + c_n) - (a_n' + c_n') \rightarrow 0$

3. Если  $x, y \in \mathbb{Q}$

Пусть  $x \sim \{[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]\}$ ,  $y \sim \{[y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}]\}$

$$x + y \sim \{[x + y - \frac{2}{n}, x + y + \frac{2}{n}]\}$$

$x+y$  принадлежит центральному классу. Значит корректно.

Свойства:

1.  $x + y = y + x$  - из определения.
2.  $(x + y) + z = x + (y + z)$  - из определения.
3.  $x - y : \sim \{[a_n - c_n, b_n - d_n]\}$  - это неправильно!
3.  $x - y : \sim \{[a_n - d_n, b_n - c_n]\}$
4.  $x \cdot y, x > 0, y > 0$   
 $x \cdot y \sim \{[a_n c_n, b_n d_n]\}$ , а концы могут быть какими угодно. Проблемы со знаком. Тогда пусть  $a_1 > 0, c_1 > 0$ . Доказывать всё не будем. Надо понять, что оно доказывается просто перебором всех случаев.

## 4 Вложенные стягивающиеся отрезки с действительными концами

### 4.1 Определения.

$x, y \in \mathbb{R}, x < y$  для ограниченного отрезка

**отрезок**  $[x, y] = \{z \in \mathbb{Z}; x \leq z \leq y\}$  -

**полуинтервал**  $[x, y) = \{z \in \mathbb{Z}; x \leq z < y\}$

**полуинтервал**  $(x, y] = \{z \in \mathbb{Z}; x < z \leq y\}$

**интервал**  $(x, y) = \{z \in \mathbb{Z}; x < z < y\}$

**Определение**

Если  $z \in (x, y)$ , то  $U_z(x, y)$  - **окрестность** точки (числа)  $z$

**Определение** Диаметр  $U_z = y - x$

$\forall \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) - U_{x, \varepsilon}$  -  $\varepsilon$ -**окрестность** числа  $x$ .

### 4.2 Окрестностное определение предела последовательности.

**Окрестностное определение предела**  $\{x_n\}$ .  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ ,  $(\forall x_n, x \in \mathbb{R})$ , если

$\forall U_x \exists n_{U_x} : \forall n > n_{U_x} \ x_n \in U_x$

**Определение предела**  $\{x_n\}$ .  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ , если

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \ |x_n - x| < \varepsilon$

**Определение**  $\{[a, b]\}$  - вложенные стягивающиеся отрезки с  $\mathbb{R}$  концами

**Последовательность стягивающихся вложенных отрезков с действительными концами**

$$\{[x_n, y_n]\}, \forall n \ x_n, y_n \in \mathbb{R}$$

1.  $\forall n [x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n]$

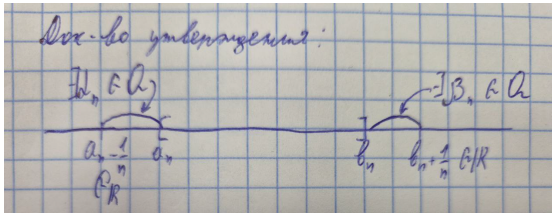
$$2. y_n - x_n \rightarrow 0$$

**Утверждение** Центральный класс всегда не пуст в  $\mathbb{R}$

Вариант с записи:

$$\exists! z \in \mathbb{R} : \forall n z \in [x_n, y_n]$$

Доказательство.



$$\{[a_n, b_n]\} \rightarrow \{[\alpha_n, \beta_n]\}, \text{ где } a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{Q}$$

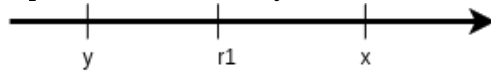
$$|\beta_n - \alpha_n| = |(\beta_n - b_n) + (b_n - a_n) + (a_n - \alpha_n)| \leq \text{неравенство треугольника}$$

$$|\beta_n - b_n|' < 1/n' + |b_n - a_n|' \rightarrow 0' + |a_n - \alpha_n|' < 1/n' \rightarrow 0$$

$$\alpha_1,$$

С записи:

1. Множество  $\mathbb{Q}$  всюду плотно, то есть  $\forall (x, y) \exists r \in \mathbb{Q}, r \in (x, y)$ .  $x < y$  по определению  $\exists r \in \mathbb{Q}$



$$(a) \beta \in \mathbb{Q}$$

Здесь могла бы быть ваша картинка.

$$(b) x_2 - \frac{1}{2^2}$$

$$\alpha_2 \in (\alpha_1; x_2) \quad \alpha_2 \in (x_2 - \frac{1}{2^2}; x_2)$$

$$\beta_1 \in (y_2, \beta_1) \cap (y_2; y_2 + \frac{1}{2^2})$$

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [x_1, y_1]$$

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset [x_2, y_2]$$

Вложенные отрезки с рациональными концами.

$$\{[\alpha_n, \beta_n]\}$$

Эта последовательность стягивается.  $\forall n [x_n, y_n] \subset [\alpha_n, \beta_n]$

$$\beta_n - \alpha_n = (\beta_n - y_n) + (y_n - x_n) + (x_n - \alpha_n)$$

$\exists! r \in \mathbb{R}$  - общая точка всех  $[\alpha_n, \beta_n]$

Пусть  $\exists n z < x_n$

В ведь здесь тоже мог бы быть ваш рисунок.

**Принцип полноты множества по Вейерштрассу** Принцип полноты множества по Вейерштрассу означает, что любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю грань

**Определение**  $\{a_n\}$  монотонна, если возрастает/ строго возрастает/убывает/строго убывает.

**Теорема по Вейерштрассу**

1.  $\{a_n\} \uparrow \Rightarrow a_n \rightarrow \sup\{a_n\}$
2.  $\{a_n\} \downarrow \Rightarrow a_n \rightarrow \inf\{a_n\}$

**Определение**  $\sup\{a_n\}$  - это  $\sup$  множества членов последовательности.

**Доказательство полноты  $\mathbb{R}$  по Вейерштрассу**

**Доказательство**

1. Ограничено сверху  $\exists M : \forall n a_n \leq M \Rightarrow \exists \sup\{a_n\} = M \in \mathbb{R}$   
 По определению предела  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon |a_n - M| < \varepsilon$   
 $\Leftrightarrow M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon$  т.к.  $M = \sup\{a_n\}$ , то  $a_n \leq M$  надо проверить  $M - \varepsilon < a_n \leq M$   
 $M$  - наименьшая верхняя грань  $\Rightarrow \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon \quad M - \varepsilon \leq a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq M$   
 т.е. по определению

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

**Следствие**  $\{a_n\}$  - монотонна  $\{a_n\}$  - сходится  $\Leftrightarrow \{a_n\}$  - ограничена.

## 5 §3 Число $e$ как предел последовательности.

Вспомним неравенство среднего геометрического и среднего арифметического.

$$\forall k : a_k > 0 \quad \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Пусть  $a_1 = a > 0$ ,  $a_2 = a_3 = \dots = a_{n+1} = d > 0$

$$\sqrt[n+1]{a \cdot b^n} \leq \frac{a + nb}{n+1}$$

$(1 + \frac{1}{n})^k$  - сходится

**Доказательства монотонности**

1.  $(1 + \frac{1}{n})^k \uparrow$

Пусть  $a = 1$ ,  $b = 1 + \frac{1}{n}$

$$\sqrt[n+1]{a \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \uparrow n+1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

2.  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \uparrow$

Пусть  $a = 1$ ,  $b = 1 - \frac{1}{n}$

$$\sqrt[n+1]{a \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1 + n\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \uparrow n+1$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

3.  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{\frac{n}{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} \downarrow$

$\forall k, m \quad n = \max\{k, m\}$

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m+1} \Rightarrow$$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  - ограничена сверху  $\Rightarrow$  сходится.

### Определение

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

### Доказать/подумать

1.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

2.  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}$

3. Сколько слагаемых нужно взять, чтобы получить  $e$  с точностью  $10^{-3}$

4. Какое нужно взять  $n$ , чтобы получить  $\epsilon$  с точностью  $10^{-3}$

## 6 §4 Последовательности.

**Определения:** предела, последовательности, сходящейся последовательности, ограниченной последовательности.

### Теоремы

1. Единственность предела
2. Ограниченность сходящейся последовательности
3.  $\{a_n\} \rightarrow a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$ ,  $\alpha_n$  - б.м.
4. Арифметические свойства

**Теорема 1.** Если  $\exists N : \forall n > N \quad a_n = a \Rightarrow a_n \rightarrow a$

### Доказательство

$$\forall \epsilon > 0 \quad \forall n > N \quad |a_n - a| = 0 < \epsilon \Rightarrow a_n \rightarrow a$$

по определению

**Теорема 2.** Если  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b \quad \forall n > N \quad a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

### Доказательство

**От противного:**

Пусть  $a < b$

НАДО ПОСМОТРЕТЬ ПРЕДЫДУЩИЕ ЛЕКЦИИ. ЭТО ОТТУДА.

## 7 §5 Теорема Больцано-Вейерштрасса

$n_k$  - строго возрастает последовательность натуральных чисел  $\Rightarrow n_k \geq k$ .

**Определение**  $\forall \{a_n\} \quad \{a_{n_k}\}$  - подпоследовательность  $\{a_n\}$

$\{a_n\} = 2^n$ , тогда 2, 16, 64, 128 - подпоследовательность

$\begin{cases} 2, 3, 4, 16, \dots \\ 16, 2, 32, \dots \end{cases}$  - не подпоследовательности

## Теорема Больцано-Вейерштрасса

$\forall$  ограниченной  $\{a_n\}$   $\exists$  сходящаяся подпоследовательность  $\{a_n\}$

Рф Рф-Рф.png

## Доказательство

Принцип вложенных отрезков.

$\exists [c, d] : \forall n \ a_n \in [c, d]$

$$1. \ [c_1, d_1] = [c, d] \ \forall a_{n_1} \in [c_1, d_1]$$

$$2. \ b_1 = \frac{c_1 + d_1}{2} \ [c_2, d_2] \text{ тот из } [c_1, b_1] \text{ и } [b_1, d_1] \text{ на котором содержится бесконечно много членов последовательности } \{a_n\}$$

$$a_{n_2} : a_{n_2} \in [c_2, d_2], n_2 > n_1$$

$$3. \ b_2 = \frac{c_2 + d_2}{2}$$

$$[c_3, d_3] \text{ тот из } [c_2, b_2] \text{ и } [b_2, d_2] \dots$$

$$a_{n_3} : a_{n_3} \in [c_3, d_3], n_3 > n_2$$

$$\{a_n\} \ a_{n_k} \in [c_k, d_k], n_k > n_{k-1} \ [c_1, d_1] \supset [c_2, d_2] \supset \dots \supset [c_k, d_k] \supset \dots$$

$$\text{длина } [c_k, d_k] = \frac{1}{2^{k-1}} \text{ длина } [c_1, d_1] \rightarrow 0 \Leftrightarrow \exists a' = U[c_k, d_k]$$

$$\forall k \ |a_n - a'| \leq \frac{1}{2^{k-1}} - \text{длина } [c_1, d_1] \rightarrow 0 \ a_{n_k}, a' \in [c_k, d_k] \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow a'$$

**Определение** Частичный предел  $\{a_n\}$  - предел  $\forall$  сходящейся подпоследовательности  $\{a_n\}$

Следствие из теоремы

$\forall \{a_n\} \exists$  подпоследовательность  $\{a_{n_k}\}$  которая имеет либо конечное либо бесконечное число пределов.

Доказательство

Если в  $\{a_n\} \exists \{a_{n_k}\} a_{n_k} \rightarrow a' \in \mathbb{R}$

Если такого нет, то по Теореме Б-В  $\{a_n\}$  - не ограничена сверху или снизу.

Если  $\{a_n\}$  - не ограничена сверху:

1. 1 - не верхняя грань  $\{a_n\} : a_{n_1} : a_{n_1} > 1$

2. 2 - не верхняя грань  $\Rightarrow \exists n_2 : a_{n_2} > 2, n_2 > n_1$

...

к.  $\exists n_k : a_{n_k} > \max\{k, a_1, a_2, \dots, a_{n_{k-1}}\}, n_k > n_{k-1}$

## 8 §5. Критерий Коши сходящейся последовательности.

### 8.1 Фундаментальные последовательности.

Последовательность  $\{a_n\}$  фундаментальна - если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n, m > n_\varepsilon |a_n - a_m| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, \forall p |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

### 8.2 Критерий Коши.

$\{a_n\}$  - сходится  $\Leftrightarrow \{a_n\}$  - фундаментальна.

Доказательство

Взять с записи



## 9 §6. Верхний и нижний предел.

**Утверждение 1.**  $\forall$  последовательность имеет хотя-бы 1 частичный предел (конечный или бесконечный).

### Доказательство

1. Пусть  $\{a_n\}$  - не ограничена сверху.  
Напоминание:  $\{a_n\}$  - не ограничена сверху, если  $\forall M \exists a_n > M \Leftrightarrow \exists$  бесконечно много таких членов.  
 $a_n > 1, a_{n_2} > 2, n_2 > n_1$   
 $a_{n_k} > k, n_k > n_{k-1}$   
 $\{a_{n_k}\} \rightarrow +\infty$
2. Если  $\{a_n\}$  не ограничена снизу, то  $\exists a_{n_k} \rightarrow -\infty$  (аналогично)
3. Если  $\{a_n\}$  - ограничена, то Б-В.

**Утверждение 2.** критерий частичного предела.

$a$  - частичный предел  $\{a_n\} \Leftrightarrow \forall U_a$  принадлежит б.м. членов последовательности.

$$\forall U_a \exists a_{n_k} \in U_a^\circ = U_a / \{a\}$$

- ЭТО ХУЙНЯ. НАДО НАЙТИ ОШИБКУ

На экзамене: что-то может быть.

$\forall U_a \exists k_{U_a} : \forall k > k_{U_a} \ a_{n_k} \in U_a$   
 $\Rightarrow$  в  $U_a$  бесконечно много членов последовательности.  
 $\Leftarrow$  в  $\forall U_a$  бесконечно много членов  $\{a_n\}$ .  
 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \ U_a = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$  - отсюда любой член  $\{a_n\}$   
 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2^2} \ \exists a_{n_2} \in (a - \varepsilon_2; a + \varepsilon_2), n_2 > n_1$   
 $\dots$   
 $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k} \ \exists a_{n_k} \in (a - \varepsilon_k; a + \varepsilon_k), n_k > n_{k-1}$   
 $\{a_{n_k}\} a_{n_k} \rightarrow a$ , при  $k \rightarrow \infty$   
 $\forall k \ a - \frac{1}{2^n} \rightarrow a = a - \varepsilon_k < a_{n_k} < a_\varepsilon = a + \frac{1}{2^k} \rightarrow a$   
 По теореме о зажатой последовательности  $a_{n_k} \rightarrow a$

### Определение.

Наибольший из частичных пределов.  $\{a_n\}$  - верхний предел  $a_n$   
 Наименьший из частичных пределов.  $\{a_n\}$  - нижний предел  $a_n$

**Теорема**  $\forall \{a_n\} \exists$  верхний и нижний предел.

1.  $\exists \liminf a_n$  - нижний предел  $a_n$

Пусть  $\{a_n\}$  - не ограничена те  $\forall M \exists a_n < M$ . Таких  $a_n$  - бесконечно много.

$$a_{n_1} < -1, a_{n_2} < \min\{-2, a_1, \dots, a_{n_1}\} - 1 \quad n_2 > n_1$$

$$a_{n_k} < \min\{-k, a_1, \dots, a_{n_{k-1}}\} - 1$$

$$a_{n_k} - k, n_k > n_{k-1}$$

$\{a_{n_k}\}$  - подпоследовательность.

$$a_{n_k} < -k \Rightarrow a_{n_k} \rightarrow -\infty$$

2. Пусть  $\{a_n\}$  - ограничена снизу.

а)  $\{a_n\}$  имеет конечные частичные пределы.

$A$  - множество конечных частных пределов.  $A \neq \emptyset$  и ограничена снизу.

$\inf A = a$ . Покажем, что  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$



$$\forall \varepsilon > 0 \exists a' \in A$$

$$a \leq a' < a + \varepsilon$$

б)  $\{a_n\}$  нет конечных частичных пределов.

$$a_n \rightarrow +\infty$$

Если  $a_n \not\rightarrow +\infty \exists M : \forall N \exists n > N \quad a_n \leq M$

$\exists$  бесконечно много  $\{a_n\} < M$  по Б-В  $\exists$  конечный частичный предел. !!!

Каждое действительное число является её частичным пределом.

## 10 Числовые ряды

### 10.1 Определения и элементарные факты.

$\{a_k\}$  - ЧП

$$\{a_k\} \rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

#### 10.1.1 Определение

**Определяем бесконечную сумму.**

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  - ряд

$a_k$  - элемент ряда (общий член).

$S_n$  -  $n$ -ая частичная сумма ряда.

Если  $S_n$  - сходится, то ряд  $(\sum_1^{\infty} a_k)$  называется **сходящимся**,  $S := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

- **суммой ряда**:  $\sum_1^{\infty} a_k = S$ .

Если  $\{S_n\}$  расходится, то  $\sum_1^{\infty} a_k$  - **расходится**.

### 10.1.2 Теорема 1.

$$\sum_1^{\infty} a_k \pm \sum_1^{\infty} b_k = \sum_1^{\infty} (a_k \pm b_k)$$

### 10.1.3 Теорема 2. Критерий Коши о сходимости ряда.

$\sum_1^{\infty} a_k$  - сходится  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall n > n_{\varepsilon} \forall p \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

$$\left| \sum_1^{n+p} a_k - \sum_1^n a_k \right| = \left| \sum_{n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

### 10.1.4 Следствие 1. Изменение конечного числа членов ряда не влияет на сходимость.

Сумма конечно может измениться, но на сходимость это не влияет.

### 10.2 Следствие 2. Необходимое условие сходимости ряда.

Можно считать определением: Если  $\sum_1^{\infty} a_k$  сходится  $\Rightarrow a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$

#### Доказательство

$\sum_1^{\infty} a_k$  - сходится  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall n > n_{\varepsilon} \forall p \quad \left| \sum_{n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_{n+1}| < \varepsilon$   
При  $p = 1$ , то есть  $\{a_n\}$  - б.м. по определению.

#### Пример 1.

Если  $|q| < 1$

$$\sum_1^{\infty} q^k, S_n = 1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{q}{1 - q}$$

#### Пример 2.

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$$

$a, b, c$  положительные.  $c$  - среднее гармоническое  $a$  и  $b$ , если  $\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$a = \frac{1}{n-1}, b = \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{2}{c} = (n-1) + (n+1) = 2n$$

Каждый элемент является средним гармоническим 2-х соседий. По критерию Коши ряд - расходящийся.

$$\left| \sum_{n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| = \frac{2}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{p}{n+p}$$

Пусть  $p = n \cdot \frac{p}{n+p} = \frac{1}{2}$ .

**Пример 3.**

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$$

$$S_{2n} = 0$$

$$S_{2n+1} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

А теперь давайте мухлевать. Переставим сумму ряда. Шоу ИМПРОВИЗАЦИЯ!!!

$$(1 + \frac{1}{2}) - 1 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{11}) - \frac{1}{2}$$

Берём много положительных слагаемых и вычитаем меньшее по модулю число. Из-за этого ряд расходится.

**Пример 4.**

$$\sum_0^{\infty} (-1)^k = (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

$$\sum_0^{\infty} (-1)^k = 1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

### 10.3 Абсолютно сходящийся ряд.

**Определение.** Если  $\sum_1^{\infty} |a_k|$  сходится, то  $\sum_1^{\infty} a_k$  сходится абсолютно.

**10.3.1 Теорема 1.** Если ряд сходится абсолютно, то ряд сходится.

Доказательство (Критерий Коши)

По критерию Коши, т.к.  $\sum_1^{\infty} |a_k|$  сходится, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists n_{\varepsilon} : \forall n > n_{\varepsilon} \forall p \left| \sum_{n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \left| \sum_{n+1}^{n+p} |a_k| \right| < \varepsilon \Rightarrow$  по критерию Коши  $\sum a_k$  сходится.

**Пример 1.**

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots - \text{сходится, но не абсолютно.}$$

**10.3.2 Определение.**

Если  $\sum_1^{\infty} a_k$  сходится, а  $\sum_1^{\infty} |a_k|$  расходится, то  $\sum a_k$  сходится условно.

### 10.3.3 Теорема 2.

$\sum_1^\infty a_k, \forall k \ a_k \geq 0$   
 $\sum_1^\infty a_k$  сходится  $\Leftrightarrow \{S_N\}$  ограничена.

#### Доказательство

$$\forall n \ S_{n+1} = \sum_1^{n+1} a_k \geq \sum_1^n a_k = S_n$$

$S_n \uparrow$  возрастающая  $\{S_n\}$  сходится  $\Leftrightarrow$  ограничена.

### 10.3.4 Теорема 3. Признак сравнения.

Для комплексов не годится.

$\sum_1^\infty a_k, \sum_1^\infty b_k, \forall k \ a_k \geq \underline{b_k} \geq 0$

Тогда:

1. Если  $\sum_1^\infty a_k$  сходится  $\Rightarrow \sum_1^\infty b_k$  сходится.
2. Если  $\sum_1^\infty a_k$  расходится  $\Rightarrow \sum_1^\infty b_k$  расходится.

#### Доказательство

Следствие критерия сходимости ряда с неотрицательными членами.

1.  $A_n = \sum_1^n a_k, \ B_n = \sum_1^n b_k$   
 $A_n \uparrow, \ B_n \uparrow$  и  $A_n \geq B_n$  ( $A_n$  мажорирует  $B_n$ )  
 Если  $\sum a_k$  сходится  $\Rightarrow \{A_n\}$  ограничена сверху  $\Rightarrow \{B_n\}$  ограничена сверху  $\Rightarrow \sum b_k$  сходится.

### 10.3.5 Следствие. (Признак сравнения).

$\sum a_k, \sum b_k \ \forall k \ a_k \geq |b_k| > 0$ . Не отрицательность  $a_k$ .  
 Сходимость  $\sum a_k \Rightarrow$  сходимость  $\sum b_k$  (абсолютная).

#### Пример 1.

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n}{n^2}$$

$$\left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}, n \neq 1$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_2^\infty \frac{1}{(n-1)n} = \sum_2^\infty \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right)$$

$$S_n = \sum_2^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \left( \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots$$

### 10.3.6 Теорема 4. Признак Коши.

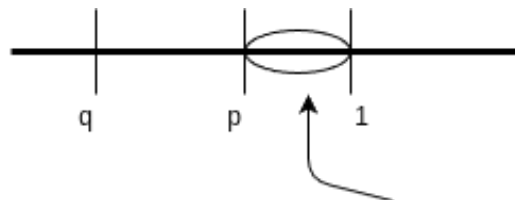
$$q = \overline{\lim}_1 \sqrt[k]{|a_k|}$$

Тогда:

1.  $q < 1 \Rightarrow$  абсолютно сходится.
2.  $q > 1$  расходится
3.  $q = 1$  ?

#### Доказательство

Сравнение с геометрической прогрессией.



Конечное число членов

1.  $0 \leq q < p < 1$   
 $\exists n_p : \forall n > n_p$   
 $\sqrt[k]{|a_k|} < p \Leftrightarrow |a_k| < p^k$   
 $\sum_{n+1}^{\infty} p^k$  геометрическая прогрессия с положительным знаком  $|x|$ .  
 $\Rightarrow \sum_1^{\infty} a_k$  сходится абсолютно (по признаку сравнения)
2.  $q = \overline{\lim} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$   
 $1 > p > 1$   
 $\forall$  окрестности  $q$  бесконечно много членов  $\sqrt[k]{|a_k|}$

**Замечание.** Признак Коши бесполезно использовать, если ряд не похож на геометрическую прогрессию.

**Запомните.** Признак Коши достаточное условие абсолютной сходимости.

**Следствие** Если  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1 \Rightarrow \exists q, N \forall n > N : \sum a_n$  сходится абсолютно

**Пример.**  $\sum_{n=1}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n \cdot z^n$

$$\sqrt[n]{((2 + (-1)^n)^n z^n)} = (2 + (-1)^n) |z| n = 2k : \sqrt[n]{|a_n|} = 3|z| = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} n = 2k + 1 : \sqrt[n]{|a_n|} = |z|$$

Если:  $3|z| < 1$  сходится  $|z| < \frac{1}{3}$

$3|z| > 1$  расходится  $|z| > \frac{1}{3}$

$3|z| = 1|z| = \frac{1}{3}$

### Теорема 5. Признак д-Аламбера

!Он всегда слабее признака Коши.

$$\sum_{n=1}^{\infty} : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow q$$

1.  $q < 1 \Rightarrow$  абсолютно сходится
2.  $q < 1 \Rightarrow$  расходится
3.  $q = 1 \Rightarrow$  Ничего не даёт

Доказательство.

1. Сравнение с геометрической прогрессией.

$$\exists n_p : \forall n > n_p \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < p$$

Пусть для  $\forall n$

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} |a_{n+1}| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \cdot |a_1| < p^n |a_1|$$

$\sum p^n |a_1|$  сходится (геометрическая прогрессия)

2.  $\exists N : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad \forall n > N$

$$\text{Пусть } \forall N \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$$

$$|a_{n+1}| > |a_n| > |a_{n-1}| > \dots |a_1| > 0 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0$$

3.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \frac{a_{n+1}}{n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left| \frac{a_{n+1}}{n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$

**Следствие.**  $\forall n > N : \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1 \Rightarrow \sum a_n$  сходится абсолютно.

Доказательство следствия

$$\text{Пусть } \forall n \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$

$|a_{n+1}| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \cdot \dots \cdot \left| \frac{a_2}{a_1} \right| \cdot |a_1| \leq q^n |a_1|$  Т.к.  $|q| < 1$ , то  $\sum q^n |a_1|$  сходящаяся геометрическая прогрессия.

**Вопрос на 5:** Если можно исследовать по Деламберу то можно и по Коши.

**Пример**  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{4}, n = 2k$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2}, n = 2k+1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} < 1$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{4^{2k}}}{\frac{1}{2^{2k}}} \dots$$

**Пример**  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{4}, n = 2k$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{3+(-1)^n} = \frac{1}{2}, n = 2k+1$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{2} < 1$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{\frac{1}{4^{2k}}} = \frac{4^{2k}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2} 2^{2k} n = 2k$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{2^{2k+1}}}{\frac{1}{4^{2k}}} = \frac{4^{2k}}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} n = 2k+1$$

**Замечание.**  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq 1 < 1$ , а не  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$

**Пример.**

$$\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0$$

**Теорема 6. Теорема Коши о сходимости монотонных рядов.**

$$\sum_1^{\infty} a_n, a_n \downarrow, \forall n a_n \geq 0$$

$$\sum_1^{\infty} a_n \text{ сходится} \Leftrightarrow \sum_1^{\infty} 2^n \cdot a_{2n} \text{ сходится}$$



Если  $\sum a_k : \forall k a_k \geq 0$ , то  $\sum a_k$  сходится  $\Leftrightarrow S_n = \sum_1^n a_k$  ограничена  
 $a_2 \leq a_2 \leq a_1$   
 $2a_4 < a_3 + a_4 \leq 2a_2$   
 $\frac{1}{2}2^3 a_{2^3} = 2^2 a_{2^3} = 2^2 a_8 \leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \leq 4a_4 = 2^2 a_{2^2}$   
 $\frac{1}{2}2^{k+1} a_{2^{k+1}} = 2^k a_{2^{k+1}} \leq a_{2^k+1} + \dots + a_{2^{k+1}} \leq 2^k a_{2^k} \sum_{n=2}^{2^{k+1}} a_n \leq \sum_{n=0}^{2^k} 2^n a_{2^n}$

## 11 Глава 3. Функции

### 11.1 Понятие функции.

**Определени.**  $X$  и  $Y$  множества

$$\forall x \in X \xrightarrow{f(x)} y \in Y$$

$(f, X, Y)$  - функция.

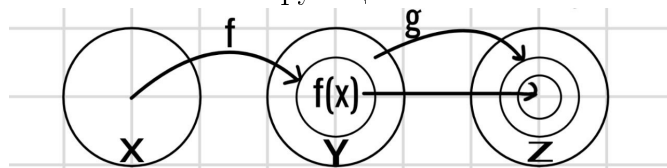
**Определени.**  $f(X) := \{y \in Y : \exists x \in X f(x) = y\}$  - образ  $X$  при отображении  $y = f(x)$

**Примеры:**

1.  $y = x^2, x \in [0; +\infty)$
2.  $y = x^2, x \in (-\infty; +\infty)$
3.  $y = \operatorname{tg} x, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Обратная функция:  $x = f^{-1}(y)$

Понятие сложной функции:



$$g(f(X)) \subset Z$$

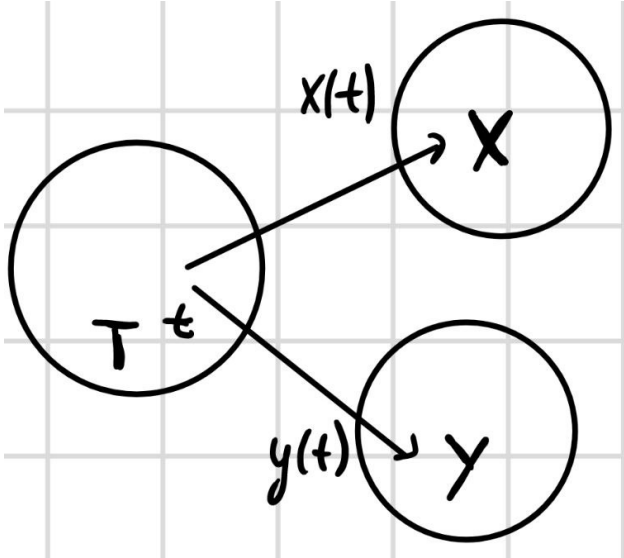
### 11.2 Способы задания.

1. Аналитическое задание
2. Графическое
3. Неявное задание

$$f(x, y) = 0$$

$$\text{Пример: } x^2 + y^2 = R^2, y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$$

#### 4. Параметрическое задание.



$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in T$$

$$\begin{cases} x = R \cos \phi \\ y = R \sin \phi \end{cases}, \phi \in [0, 2\pi)$$

#### 11.2.1 Ограниченность функций.

**Определение.**  $f(x)$  ограничена сверху на  $X$ , если

$$\exists M : \forall x \in X, f(x) < M$$

**Определение.**  $f(x)$  ограничена снизу на  $X$ , если

$$\exists m : \forall x \in X, f(x) > m$$

Если  $f(x)$  принимает комплексные значения, то ограниченность  $f(x)$  на  $X$

$$\exists M : \forall x \in X, |f(x)| < M$$

**Определение.**  $f(x) : X \in X \rightarrow Y$

1. отображение "на" если

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x)$$

2. отображение "в" если

$$\forall x \in X \exists y \in Y : y = f(x)$$

3. "взаимно однозначное отображение"

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : y = f(x)$$

$$\forall y \in Y \exists! x \in X : y = f(x)$$

**Определение.**  $f(x) : X \rightarrow Y$

$$\sup_X f(x) = \sup f(X)$$

$$M = \sup_X f(x)$$

если

$$1. \forall x \in X f(x) \leq M$$

$$2. \forall M' < M \exists x \in X : f(x) > M'$$

**Определение.** Если  $f(x)$  не ограничена сверху на  $X$ , то  $\exists \{x_n\} \subset X$

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

**Определение.**  $f(x)$  принимает  $\max$  в  $x_0 \in X$ , если

$$\forall x \in X f(x) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0) = \max_X f(x)$$

$$f(x) = \sin[0, 1)$$

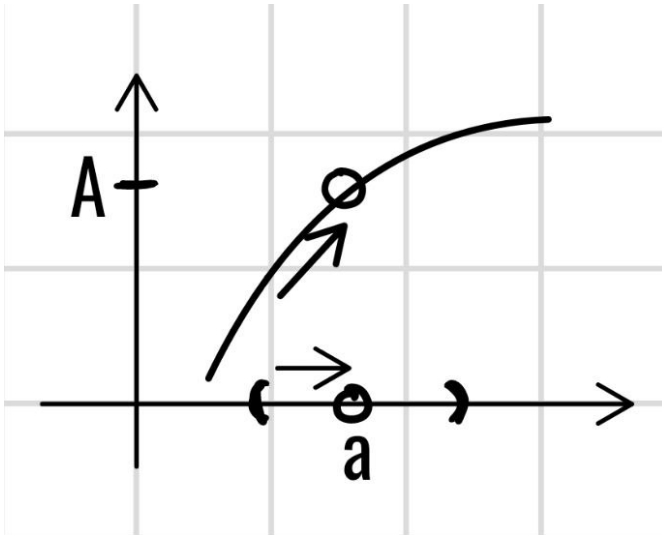
$$\min_{[0,1)} f(x) - \inf_{[0,1)} f(x) = 0$$

$$\sup_{[0,1)} f(x) = 1 \quad \max_{[0,1)} f(x) \nexists$$

### 11.3 Предел функции в точке.

На протяжении всего параграфа:  $f(x)$  на  $\overset{\circ}{U}_a = U_a \setminus \{a\}$

$$a \in (d, c) = U_a$$



**Определение. Предел по Коши.**  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

**Определение. Существование предела функции в точке.**  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow a$ , если

$$\exists A \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

**Определение. Предел по Гейне.**  $f(x)$  имеет предел при  $x \rightarrow a$ , если  $\forall \{x_n\} \forall n, x_n \in \dot{U}_a, x_n \rightarrow a \quad \{f(x_n)\}$  сходится

Не обязательно, чтобы предел функции и последовательности был одним и тем же.

**Теорема. Предел в смысле Коши.**  $\exists \Leftrightarrow \exists$  предел по Гейне.

**Доказательство**

$$\Rightarrow \exists A : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$$

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) / \{a\} \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

Пусть  $\{x_n\} : \forall n \quad x_n \in \dot{U}_a, x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a$

$$\exists N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n > N_{\delta_\varepsilon} \quad 0 < |x_n - a| < \delta_\varepsilon$$

$$\Rightarrow x_n \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) / \{a\} \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$$

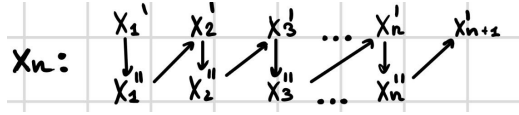
$\Leftarrow$  Пусть  $f(x)$  имеет в  $a$  предел в смысле Гейне.

1.  $\lim f(x_n)$  не зависит от  $\{x_n\}$

Пусть не так зависит), тогда  $\exists \{x_n\}$

$$x_n' \rightarrow a, x_n' \neq a \quad \forall n : f(x_n') \rightarrow A'$$

$$\exists \{x_n''\}, x_n' \rightarrow a, x_n'' \neq a \quad \forall n, f(x_n'') \rightarrow A''$$



$$x_{2k} = x_k''$$

$$x_{2k-1} = x_k'$$

$$\forall n \quad x_n \rightarrow a, x_n \neq a$$

По определению предела по Гейне:

$$\exists A : f(x_n) \rightarrow A : f(x_{2n}) \rightarrow A'', f(x_{2n-1}) \rightarrow A'$$

таким образом:  $\exists A : \forall \{x_n\}$

$$f(x_n) \rightarrow A$$

2.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$  по Коши

От противного:

Пусть  $f(x) \not\xrightarrow{g \rightarrow a} A$  по Коши

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_n : 0 < |x - a| < \delta \quad |f(x) - A| \geq \varepsilon$$

$$x_1 : 0 < |x_1 - a| < 1/1 \quad |f(x_1) - A| \geq \varepsilon$$

$$x_2 : 0 < |x_2 - a| < \frac{1}{2} \quad |f(x_2) - A| \geq \varepsilon$$

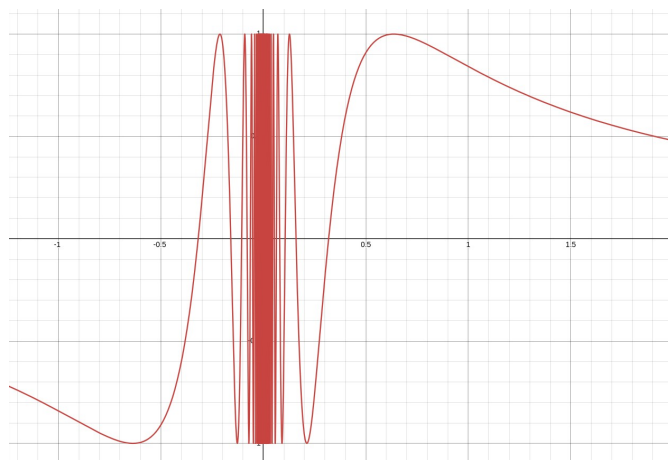
...

$$x_n : 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$$

...

$\{x_n\}, x_n \rightarrow a, x_n \neq a, \forall n \Rightarrow f(x_n) = A$  противоречие

Пример эквивалентности определений по Коши и по Гейне:  $y = \sin \frac{1}{x}$



Вопрос на доп баллы: Привести пример функции непрерывной на интервале, которая не имела бы предела при  $x$  стремящемся к концу интервала.

$\forall x_n \rightarrow 0 \{f(x_n)\}$  - сходится

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{N}$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \quad f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = (-1)^n$$

$$x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \quad f(x_n) = 1$$

$$x_n'' = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n} \quad f(x_n) = -1$$

## 11.4 Односторонние пределы.

**Определение.** Предел справа.

$f(x)$  на  $(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) \rightarrow A$ , при  $x \rightarrow a + 0$

$f(x) \rightarrow A$ , при  $x \rightarrow a, x > a$

$f(x) \rightarrow A$ , при  $x \rightarrow a$  справа  $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) (\forall x : |x - a| < \delta, x > a) |f(x) - A| < \varepsilon$

**Определение.** Предел слева.

$$B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall x \quad b - \delta < x < b, |f(x) - B| < \varepsilon$$

**Определение по Гейне.**

$$\exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \Leftrightarrow \forall \{x_n\} \subset (a, b) \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad f(x_n) \text{ — converges}$$

**Утверждение.** Существование предела по Коши справа или слева равносильно существованию соответствующего одностороннего предела по Гейне.

**Теорема.**  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \\ \exists \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \end{cases}$$

**Доказательство**

$\Rightarrow$ :  $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  По определению  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x (0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \Leftrightarrow x \in (a - \delta_\varepsilon, a) \cup (a, a + \delta_\varepsilon))$

$$x \in (a - \delta_\varepsilon, a) \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

$$x \in (a, a + \delta_\varepsilon) \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$$

$\Leftrightarrow$ :

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) := A$$

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in (a, a + \delta_\varepsilon) |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon' > 0 \forall x \in (a - \delta_\varepsilon', a) |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\delta_\varepsilon = \min \delta_\varepsilon', \delta_\varepsilon'' \quad \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$

## 11.5 Критерий Коши. Существование предела функции в точке.

**Теорема. Критерий Коши.**  $f(x)$  на  $\mathring{U}_a$

$$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x', x'' \in (a - \delta_\varepsilon, a + \delta_\varepsilon) \setminus \{a\} \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

**Доказательство**

$$\Rightarrow: \exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) := A$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \forall x : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall x', x'' : 0 < |x' - a| < \delta_\varepsilon, 0 < |x'' - a| < \delta_\varepsilon$$

$$|f(x') - f(x'')| = |(f(x') - A) - (f(x'') - A)| \leq |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Leftarrow: \text{Пусть } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x', x'' \quad 0 < |x' - a| < \delta_\varepsilon \quad 0 < |x'' - a| < \delta_\varepsilon \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

$$\forall \{x_n\} \subset \mathring{U}_a \quad x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists n_{\delta_\varepsilon}$$

$$0 < |x_n - a| < \delta_\varepsilon \quad \forall n > n_{\delta_\varepsilon} \Rightarrow \forall n, m > n_{\delta_\varepsilon} \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$$

Что значит, что последовательность  $\{f(x_n)\}$  - фундаментальная, значит по Критерию Коши для последовательностей  $\{f(x_n)\}$  - сходится.  $\Rightarrow \exists \lim_{a \rightarrow a} f(x)$  в смысле Гейне.

**Отрицание.**  $f(x)$  определена на  $\dot{U}_a$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow a} f(x) \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x', x'' 0 < |x' - a| < \delta \quad 0 < |x'' - a| < \delta |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

**Пример.**

1.  $f(x) = \frac{1}{x}$  на  $(0, 1)$  Нет предела при  $x \rightarrow 0 + 0$   
Пусть  $\varepsilon = 1 \forall \delta \forall N > \frac{1}{\delta}$

$$x' := \frac{1}{N} \quad x'' := \frac{1}{N+1}$$

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{\frac{1}{N}} - \frac{1}{\frac{1}{N+1}} \right| \geq \varepsilon$$

2.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  на  $(0, 1)$   
 $\varepsilon := 1$  Сами.

## 11.6 Пределы при стремлении к бесконечности. Бесконечные пределы.

**Определение.**  $\varepsilon$  окрестность  $\infty$   $(-\infty; -\varepsilon) \cup (\varepsilon; +\infty)$

**Определение.**  $\forall a < b$  окрестность  $\infty$   $(-\infty; a) \cup (b; +\infty)$

**Определение.**  $\forall b$  окрестность  $+\infty$   $(b; +\infty)$

**Определение.**  $\forall a$  окрестность  $-\infty$   $(-\infty; a)$

$$\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a + 0, a - 0$$

**Определение.**  $f(x)$  определена на  $\dot{U}_a \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $f(x) \rightarrow \infty, x \rightarrow a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad |f(x)| > \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in U_{\infty, \varepsilon}$
2.  $f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow a, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad f(x) > \varepsilon$
3.  $f(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow a \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon \quad f(x) < -\varepsilon$

Extra:  $f(x)$  на  $U_{a+0} : f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow a + 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \forall x \in (a, a + \delta_\varepsilon)$$

$$f(x) \in (-\infty; -\varepsilon)$$

$$f(x) < -\varepsilon$$

## 11.7 Свойства функций, имеющих предел

**Теорема 1.** Если предел функции в точке существует, то он единственен.

Ну он опять свой доказательство придумал.



### Доказательство от противного

Пусть  $f(x) \rightarrow A', x \rightarrow a$   
 $f(x) \rightarrow A''$ , при  $x \rightarrow a$  и  $A' \neq A''$   
 $\varepsilon := \frac{|A' - A''|}{4}$   
 $\exists \delta' > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta' |f(x) - A'| < \varepsilon$   
 $\exists \delta'' > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta'' |f(x) - A''| < \varepsilon$   
 $\delta := \min\{\delta', \delta''\} > 0$   
 $\forall x : 0 < |x - a| < \delta$   
 $|f(x) - A''| = (f(x) - A') - (A'' - A') \geq |A' - A''| - |f(x) - A'| > \frac{3}{4}|A' - A''|$   
 $|f(x) - A'| < \frac{|A' - A''|}{4}$

Удостоверится, что  $a$  и  $A$  может быть  $\infty, \pm\infty$ .

**Теорема 2.**  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a \Rightarrow |f(x)| \rightarrow |A|$ , при  $x \rightarrow a$ .

### Доказательство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$||f(x)| - |A|| \leq |f(x) - A| < \varepsilon$$

**Теорема 3. О сохранении знака, только  $\mathbb{R}$ .**

Если  $f(x) \rightarrow A \neq 0, x \rightarrow a$ , то  $\exists \delta > 0 \forall x 0 < |x - a| < \delta \text{ sign } f(x) = \text{sign } A$

### Доказательство. Непосредственная проверка.

$$\varepsilon := \frac{|A|}{2} \exists \delta > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

1.  $A > 0$ :

$$f(x) > A - \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0$$

2.  $A < 0$ :

$$f(x) < A + \varepsilon = A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} < 0$$

**Теорема 4.** Если  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A$  число  $\Rightarrow \exists \mathring{U}_a$  в которой  $f(x)$  ограничена ( $f(x) \in B(\mathring{U}_a)$ ).

### Доказательство

$$\varepsilon := 30 \exists \delta > 0 : \forall x 0 < |a - a| < \delta |f(x) - A| < 30$$

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + 30$$

Таким образом функция ограничена.

**Теорема 5. Арифметические свойства.**

Пусть  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ . Тогда

1.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$  и  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2.  $\exists \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x))$  и  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3. Если  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$  и  $g(x) \neq 0$ , то  $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  и  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

Эквивалентность существования пределов по Гейне и Коши и соответствующие свойства для последовательностей.  
Сами дакажите. @Теляк.

### Теорема 6. Предельный переход в неравенствах.

$f(x) \leq g(x)$  при  $x, a \in (c, d), x \neq a$

Если  $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow a} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство. Эквивалентность пределов по Гейне и по Коши и теорема для последовательностей.

### Теорема 7. О зажатой функции.

$\forall a, x \in (c, d), x \neq a \quad f(x) \leq \phi(x) \leq g(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) \ \& \ \lim_{x \rightarrow a} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 A &:= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\
 \forall \varepsilon > 0 \delta_f > 0 : \forall 0 < |x - a| < \delta_f \quad |f(x) - A| < \varepsilon &\Leftrightarrow A - \varepsilon \leq f(x) \leq A + \varepsilon \\
 \exists \delta_g > 0 : \forall x \quad 0 < |x - a| < \delta_g \\
 |g(x) - A| < \varepsilon &\Leftrightarrow A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon \\
 \delta &:= \min\{\delta_f, \delta_g\} > 0 \\
 \forall x : 0 < |x - a| < \delta \\
 A - \varepsilon < f(x) \leq \phi(x) \leq g(x) &< A + \varepsilon \\
 A - \varepsilon < \phi(x) &< A + \varepsilon \\
 \phi(x) &\xrightarrow{x \rightarrow a} A
 \end{aligned}$$

**Теорема 8.**  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x) \quad (\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0)$

Продумайте какие Т про арифм действия переносятся на предел к бесконечности.

### Доказательство

$\Rightarrow$  По определению  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 |f(x) - A| < \varepsilon, \alpha(x) := f(x), \forall x 0 < |x - a| < \delta$   
 $\alpha(x) \rightarrow 0$  по определению  $f(x) = A + \alpha(x)$

$\Leftarrow$  Пусть  $f(x) = A + \alpha(x)$ , где  $\alpha(x)$  - б.м., при  $x \rightarrow a$

По определению  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta |\alpha(x)| < \varepsilon$   
 $|\alpha(x)| = |f(x) - A| \Rightarrow f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a$

### Теорема 9.

1. Если  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a}$ , то  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$
2.  $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0, \alpha(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$

### Доказательство

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{f(x)} \right| < \varepsilon$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : \forall x 0 < |x - a| < \delta_\varepsilon |\alpha(x)| < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{\alpha(x)} \right| > \varepsilon$$

## 11.8 Некоторые важные пределы.

Если понять какие моменты обман, то на экзамене будет + в карму.

**Теорема 1.**  $(1 + \frac{1}{x})^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} e$

### Доказательство

$$1. x \rightarrow +\infty$$

$$\forall x > 1 \quad 0 < [x] \leq x < [x] + 1$$

$$\frac{1}{[x]} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{[x] + 1}$$

$$1 + \frac{1}{[x]} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{[x] + 1}$$

$$\left(\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} > \left(\frac{1}{x}\right)^x > \left(\frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]}$$

Вспомним последовательности:  $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^n (1 + \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} / \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \rightarrow e$$