Вопросы по математическому анализу

1 семестр. Лектор Д. С. Теляковский

2025/26 учебный год

Введение

1. Комплексные числа и действия над ними. Геометрическое представление. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Эйлера, определение e^z.

2. Возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел. Формула Муавра.

3. Неравенство треугольника для действительных и комплексных чисел, геометрическое и алгебраическое доказательства.

4. Формулы Моргана.

5. Метод математической индукции. Прямая индукция, формула бинома Ньютона.

6. Метод математической индукции. Обратная индукция, неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Действительные числа. Числовые множества

1. Дедекиндовы сечения. Определение действительных чисел по Дедекинду, полнота $\mathbb{R}$ по Дедекинду.

2. Лемма об отделимости.

3. Точная верхняя и нижняя грани ограниченных множеств из $\mathbb{R}$. Теорема Вейерштрасса о существовании точной верхней грани ограниченного сверху множества как следствие леммы об отделимости (принцип полноты $\mathbb{R}$ по Вейерштрассу).

4. Последовательности стягивающихся отрезков с действительными концами. Теорема Кантора о стягивающихся отрезках с действительными концами (принцип полноты $\mathbb{R}$ по Кантору).

5. Полнота $\mathbb{R}$ по Дедекинду как следствие принципа стягивающихся отрезков.

6. Счётность множества рациональных чисел и несчётность множества действительных чисел.

Последовательности и ряды

1. Свойства сходящихся последовательностей (сходимость постоянной последовательности, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности).
2. Предельный переход в неравенствах для последовательностей.
3. Теорема о зажатой последовательности (о трёх последовательностях).
4. Теоремы о сохранении знака сходящейся последовательностью и о сходимости модулей.
5. Бесконечно малые последовательности, их свойства.
6. Бесконечно большие последовательности. Связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.
7. Арифметические свойства сходящихся последовательностей.
8. Монотонные последовательности. Критерий сходимости монотонной последовательности.
9. Число e как предел последовательности.
10. Теорема Больцано–Вейерштрасса.
11. Частичные пределы. Критерий частичного предела.
12. Критерий Коши существования предела последовательности.
13. Существование верхнего и нижнего пределов у любой последовательности.
14. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Признак сравнения.
15. Признаки абсолютной сходимости рядов Даламбера и Коши.
16. Критерий Коши сходимости ряда с монотонными членами. Исследование сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {}^{1}/{n^p}$, $p > 0$.

Пределы и непрерывность функций одной переменной

1. Два определения предела функции в точке. Доказательство их эквивалентности (из определения по Гейне определение по Коши).
2. Два определения предела функции в точке. Доказательство их эквивалентности (из определения по Коши определение по Гейне).
3. Критерий Коши существования предела функции в точке.
4. Свойства функций, имеющих пределы: единственность предела, предел модуля, предельные переходы в неравенствах и теорема о зажатой функции (о трёх функциях).
5. Свойства функций, имеющих пределы: арифметические свойства, локальная ограниченность и теорема о сохранении знака.
6. Бесконечно большие и бесконечно малые функции.
7. Предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.
8. Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.
9. Монотонные функции. Существование односторонних пределов у монотонных функций.
10. Непрерывность функции в точке (по Коши и по Гейне). Односторонняя непрерывность. Арифметические свойства непрерывных функций.
11. Непрерывность сложной функции, теорема о сохранении знака.
12. Точки разрыва функции и их классификация, примеры.
13. Теоремы Вейерштрасса о непрерывной на отрезке функции.
14. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции.
15. Теорема о функции, обратной к строго монотонной непрерывной на отрезке функции (функция, обратная к строго монотонной непрерывной на отрезке функции однозначно обратима, строго монотонна и непрерывна).

16. Критерий непрерывности монотонной функции.
17. Критерий однозначной обратимости непрерывной на отрезке функции.
18. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
19. O-символика, эквивалентные функции, главная часть. Основные соотношения эквивалентности.
20. Предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x}$, $a > 1$.
21. Пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^\varepsilon}$ и $\lim\limits_{x\to+0} x^\varepsilon \log x$ при $\varepsilon > 0$.

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Определение производной. Дифференцируемые функции.
2. Дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала.
3. Арифметические операции над дифференцируемыми функциями.
4. Производные e^x, $\sin x$, $\cos x$, x^α и $\log x$.
5. Производная сложной и обратной функций. Производные $\arcsin x$, $\arccos x$ и $\operatorname{arctg} x$.
6. Производные высших порядков. Правило Лейбница.
7. Локальные экстремумы функций. Теоремы Ферма и Ролля.
8. Формулы конечных приращений Лагранжа и Коши.
9. Формула Тейлора, остаточный член в форме Лагранжа.
10. Формула Тейлора, остаточный член в форме Пеано.
11. Формула Тейлора для e^x, $\sin x$ и $\cos x$, оценка остатка.
12. Формула Тейлора для $(1+x)^\alpha$ и $\log(1+x)$, оценка остатка.
13. Правило Лопиталя. Применение правила Лопиталя к раскрытию неопределённостей вида $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, $(+\infty)^0$ и $(+\infty)-(+\infty)$.

Основная литература

1. *Зорич В.А.* Математический анализ. Том I.
2. *Теляковский С.А.* Курс лекций по математическому анализу. Семестр I.
3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том I.

Дополнительная литература

1. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Математический анализ в примерах и упражнениях, том 1, М. МГУ, МЦНМО, 2017.
2. *Гелбаум Б., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе.
3. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I.
4. *Коровкин П.П.* Неравенства. Популярные лекции по математике.
5. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу", том. 1.
6. Лекции С.Б. Стечкина по математическому анализу. Том I.
7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Том I.
8. *Рудин У.* Основы математического анализа.
9. *Courant R., John F.* Introduction to Calculus and Analysis. Volume I.