Билеты к коллоквиуму по математическому анализу

VG6

11 неделя 2025

Содержание

1 Введение

1.1 Комплексные числа. Действия над ними. Геометрическое представлние. Алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел. Формула Эйлера, определение e^z через действительную экспоненту и действительные тригонометрические функции.

1.1.1 Определение и свойства

Определение. *Комплексными числами* называются числа вида $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}$, а i — *мнимая единица*, обладающая свойством $i^2 = -1$.

- $x = \operatorname{Re} z$ — **действительная часть** числа z.
- $y = \operatorname{Im} z$ — **мнимая часть** числа z.
- Если $y = 0$, то $z = x$ — действительное число.
- Число $\overline{z} = x - iy$ называется **комплексно-сопряжённым** к z.

Свойство: $z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$.

Важное примечание

Нельзя сравнивать комплексные числа операциями $<, >, \leq, \geq$!

1.1.2 Арифметические операции

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

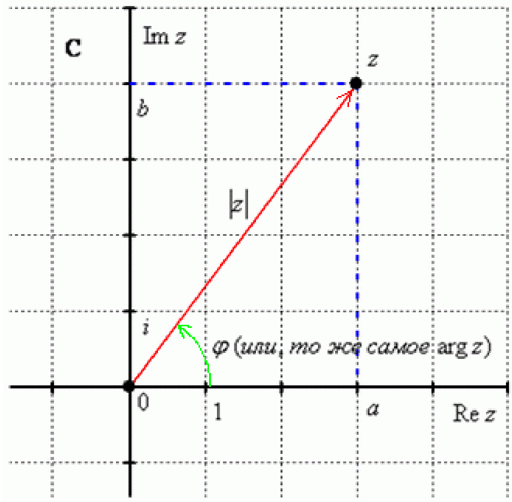
1. **Сложение/Вычитание:** $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
2. **Умножение:**

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

3. **Деление:**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

1.1.3 Геометрическое представление



1.1.4 Тригонометрическая форма

$$\boxed{z = r(cos\phi + i\ sin\phi),\ r = |z|}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (cos(\phi_1 + \phi_2) + i\ sin(\phi_1 + \phi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\phi_1 - \phi_2) + i\ sin(\phi_1 - \phi_2))$$

1.1.5 Формула Эйлера

$$\boxed{\begin{gathered} e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi \\ e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (cos\ y + i \cdot sin\ y) \end{gathered}}$$

Действительная часть: $Re\ e^z = e^x \cos y$
Мнимая часть: $Im\ e^z = e^x \sin y$

1.2 Возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел. Форула Муавра.

1.2.1 Формула Де-Муавра

$$\boxed{(cos\phi + i\ sin\phi)^k = cos\ k\phi + i\ sin\ k\phi}$$

1.2.2 Комплексные корни

$$\sqrt[n]{z} = \omega$$

$$\omega^n = z, z \neq 0$$

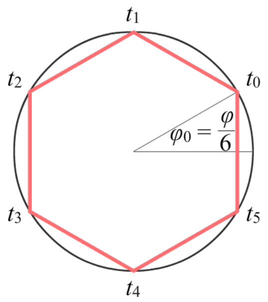
$$z = re^{i\phi}, \omega = \rho e^{i\Psi}$$

$$\omega^n = \rho^n e^{in\Psi} = z = re^{i\phi} = re^{i(\phi + 2\pi k)}$$

$$\rho^n = r \Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}$$

$$n\Psi = \phi + 2\pi k \Rightarrow \Psi = \frac{\phi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$$

Корни будут образовывать правильный многоугольник.



1.3 Неравенство треугольника для действительных и комплексных чисел, геометрическое и алгебраическое доказательства.

1.3.1 Неравенство треугольника

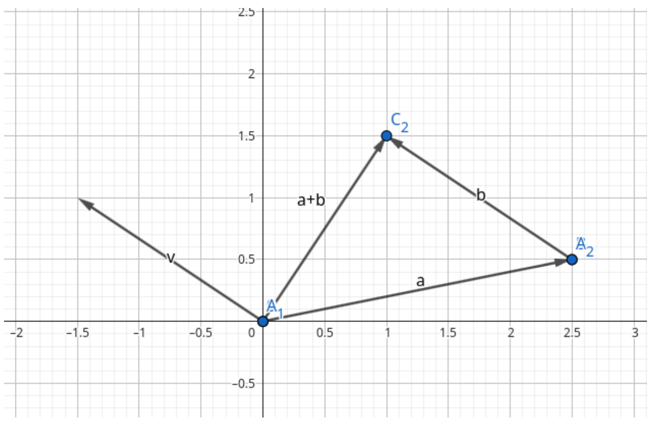


Рис. 1: Геометрический смысл неравенства треугольника: длина стороны $|\vec{a}+\vec{b}|$ не превосходит суммы длин сторон $|\vec{a}| + |\vec{b}|$.

Теорема (Неравенство треугольника): Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Доказательство

$|a+b| \leq |a| + |b|$

1. $a \geq 0$ $(|a| \geq |b|)$
   $a + b \geq 0$, то $|a+b| = a + b$.
   $a + b \leq 0$, то $|a+b| = -(a+b) = -a - b \leq |a| + |b|$

2. $|a-b| \geq ||a| - |b||$
   $a = (a-b) + b$ по н.т.: $|a+0| \leq |a-b| + |b| \Rightarrow |a-b| \geq |a| - |b|$

Аналогично $|b| \leq |b-a| + |a| \Rightarrow |a-b| \geq |b| - |a|$

Получим, что $\begin{cases} |a-b| \geq |a| - |b| \\ |a-b| \geq | - (|a| - |b|) \end{cases} \Rightarrow |a-b| \geq ||a| - |b||$

Следствие

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

1.4 Метод математической индукции (ММИ). Прямая индукция. Формула Бинома Ньютона

1.4.1 Метод математической индукции (ММИ)

Алгоритм доказательства по индукции:

1. **База индукции:** Проверить утверждение для $n = 1$.
2. **Индукционное предположение:** Предположить, что утверждение верно для $n = k$.
3. **Индукционный переход:** Доказать, что из этого следует верность утверждения для $n = k + 1$ (Прямая индукция).

1.4.2 Бином Ньютона

Определение.

Биномиальный коэффициент: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, где $n, k \in \mathbb{N}_0$

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

Доказательство по ММИ

База индукции: Для $n = 1$:

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k a^{1-k} b^k = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = 1 \cdot a \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot b = a + b$$

База индукции доказана.

Индукционное предположение: Предположим, формула верна для $n = m$:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k$$

Индукционный переход: Докажем для $n = m + 1$. Рассмотрим левую часть:

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^k$$

Раскроем скобки:

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m-k} b^{k+1}$$

Во второй сумме сделаем замену индекса $j = k + 1$:

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k a^{m+1-k} b^k + \sum_{j=1}^{m+1} C_m^{j-1} a^{m+1-j} b^j$$

Теперь объединим суммы, выделяя крайние слагаемые:

$$= C_m^0 a^{m+1} + \sum_{k=1}^{m} \left[C_m^k + C_m^{k-1}\right] a^{(m+1)-k} b^k + C_m^m b^{m+1}$$

Используем свойство биномиальных коэффициентов:

$$C_m^k + C_m^{k-1} = C_{m+1}^k$$

Учитывая, что $C_m^0 = C_{m+1}^0 = 1$ и $C_m^m = C_{m+1}^{m+1} = 1$, получаем:

$$(a+b)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k a^{(m+1)-k} b^k$$

Индукционный переход завершён.

1.5 ММИ. Обратная индукция. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим.

Неравенство о средних

Теорема (Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим): Для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ справедливо:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Доказательство по ММИ (метод Коши / метод обратой индукции)

Докажем теорему в три этапа.
1. База индукции для степеней двойки ($n = 2^m$).

- **Для** $n = 2$**:** Докажем $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$.

$$(a_1 - a_2)^2 \geq 0 \Rightarrow a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 0 \Rightarrow a_1^2 + 2a_1a_2 + a_2^2 \geq 4a_1a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2)^2 \geq 4a_1a_2 \Rightarrow \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1a_2}$$

- **Предположим, неравенство верно для** $n = k$**.**

- **Докажем для** $n = 2k$**:**

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{2k}}{2k} = \frac{\frac{a_1+\cdots+a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+\cdots+a_{2k}}{k}}{2} \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k} \cdot \sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}} = \sqrt[2k]{a_1 \ldots a_{2k}}$$

2. Докажем, что если неравенство верно для n**, то оно верно и для** $n - 1$**.** Рассмотрим $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \geq 0$. Пусть

$$a_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n - 1}$$

Для набора из n чисел неравенство верно:

$$\frac{a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n}$$

Подставим a_n:

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_{n-1}) + \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n - 1} = a_n$$

Таким образом:

$$a_n \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n}$$

Возведём в степень n:

$$a_n^n \geq a_1a_2 \ldots a_{n-1}a_n \Rightarrow a_n^{n-1} \geq a_1a_2 \ldots a_{n-1}$$

Извлекая корень $(n - 1)$-й степени:

$$a_n \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2 \ldots a_{n-1}} \Rightarrow \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n - 1} \geq \sqrt[n-1]{a_1a_2 \ldots a_{n-1}}$$

3. Завершение доказательства. Мы доказали, что:

1. Неравенство верно для $n = 2$ (а значит, для $n = 4, 8, 16, \ldots$)

2. Из верности для n следует верность для $n - 1$

Следовательно, неравенство верно для любого натурального n.

2 Действительные чсла. Числовые множества.

2.1 Дедекиндовы сечения. Определение действительных чисел по Дедекинду. Полнота $\mathbb{R}$ по Дедекинду.

2.2 Лемма об отделимости.

2.3 Точная верхняя и нижняя грани ограниченных множеств из В. Теорема Вейерштрасса о существовании точной верхней грани ограниченного сверху множества как следствие леммы об отде- лимости (принцип полноты В по Вейерштрассу).

2.4 Последовательности стягивающихся отрезков с действительными концами. Теорема Кантора о стягивающихся отрезках с дей- ствительными концами (принцип полноты ® по Кантору).

2.5 Полнота К по Дедекинду как следствие принципа стягивающихся отрезков.

2.6 Счётность множества, рациональных чисел и несчётность множества действительных чисел.

3 Последовательность и ряды.

3.1 Свойства сходящихся последовательностей (сходимость постоянной последовательности, единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности).

3.2 Предельный переход в неравенствах для последовательностей.

3.3 Теорема о зажатой последовательности (о трёх последовательностях).

3.4 Теоремы о сохранении знака сходящейся последовательностью и о сходимости модулей.

3.5 Бесконечно малые последовательности, их свойства.

3.6 Бесконечно большие последовательности. Связь бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей.

3.7 Арифметические свойства сходящихся последовательностей.

3.8 Монотонные последовательности. Критерий сходимо

сти монотонной последовательности.

3.9 Число е как предел последовательности.

3.10 Теорема Больцано-Вейерштрасса.

3.11 Частичные пределы. Критерий частичного предела.

3.12 Критерий Коши существования предела последовательности.

3.13 Существование верхнего и нижнего пределов у любой последовательности.

3.14 Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость числовых рялов. Критерий Коши сходимости ряда. Необходимое условие сходимости ряда. Признак сравнения.

3.15 Признаки абсолютной сходимости рядов Даламбера и Коши.

3.16 Критерий Коши сходимости ряда с монотонными членами. Исследование сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},\ p > 0$.