

Конспект по аналитической геометрии

VG6

2 половина 1 семестра

Содержание

1 §8. Прямая в пространстве.	2
2 Алгебраические линии и кривые 2 порядка	3
2.1 Эллипс. Вывод канонического уравнения. Свойства эллипса.	3
2.2 Вывод уравнения эллипса	3
2.3 Гипербола	4
2.4 Эксцентрист и директриса эллипса и гиперболы.	6
2.5 Парабола. Вывод канонического уравнения. Свойства параболы.	8
2.6 Упрощение алгебраического уравнения второго порядка на плоскости. Преобразование коэффициентов уравнений второго порядка при ортогональных преобразованиях.	9
2.6.1 Сдвиг.	9
2.6.2 Поворот.	10
2.7 Инварианта кривых второго порядка.	10
2.8 Приведение кривой второго порядка к каноническому виду ортогональными преобразованиями.	11
2.8.1 Центральная кривая	11
2.9 Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду в случае нецентральной прямой.	13

$$Ax + by + Cz + D = 0$$

Я всё проебал, надо написать хз что это.

Определение. Отклонение точки от плоскости

$$M_0(x_0, 0, z_0)$$

$$\delta(M_0, \pi) = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta z_0 \cos \gamma$$

1 §8. Прямая в пространстве.

OXYZ - ДПСК

Определение. Направленный вектор L.

$$\bar{p} \neq 0, \quad \bar{q} \parallel L$$

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\bar{q} = l, m, n$$

$$M = (x, y, z)$$

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0 M} \parallel \bar{q}$$

1.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

Канонические уравнения L.

2.

$$\overline{M_0 M} = t \bar{q}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, t \in (-\infty, +\infty) \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ 2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \bar{q} = [\overline{N_1}, \overline{N_2}]$$

Определение. Угол между прямой и плоскость - это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

$$\bar{q} = l, m, n$$

$$\overline{N} = A, B, C$$

$$\cos \psi = \sin \phi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

2 Алгебраические линии и кривые 2 порядка

2.1 Эллипс. Вывод канонического уравнения. Свойства эллипса.

Эллипс - множество точек плоскости таких, что сумма расстояний от них до фиксированных точек той же плоскости постоянна и равна $2a$. $r_1 + r_2 = 2a$

Фиксированные точки F1, F2 - фокусы.

Длины r1, r2 - фокальные радиусы.

Расстояние между F1, F2 - фокусное расстояние $= 2c$. с может быть равен 0, тогда будет окружность.

Окружность частный случай эллипса с фокусным расстоянием 0.

По неравенству треугольника: $a > c$

2.2 Вывод уравнения эллипса

Пусть фокусное расстояние не равно 0.

!!! INSERT IMAGE.

$$r_1 + r_2 = 2a \quad (1)$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (2)$$

$$x^2 + 2cy + c^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)}$$

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2$$

$$x^2 + y^2 + c^2 = t^2$$

$$\sqrt{t^4 - 4c^2x^2} = 2a^2 - t^2 \Rightarrow t^4 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2t^2 + t^4 - c^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + c^2)$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2(a^2 - c^2) =$$

$$(a^2 - c^2) > 0$$

$$= \frac{a^2 - c^2}{a^2} = b^2 \quad a \geq b$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

(3) \Rightarrow (2) - ?

$$y^2 = (1 - \frac{x^2}{a^2})b^2$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2} =$$

$$\sqrt{a^2 + 2cx + (\frac{c}{a}x)^2} = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} = |a + \frac{c}{a}x|$$

$$r_1 = |a + \frac{c}{a}x| \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |a - \frac{c}{a}x|$$

$$1. r_1 = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x$$

$$|x| \leq a, c < a$$

$$2. r_2 = |a - \frac{c}{a}x| = a - \frac{c}{a}x$$

Т.о. мы доказали равносильность преобразования и вывода формулы (3).

a - большая полуось

b - малая полуось

Прямоугольник со сторонами a, b - основной прямоугольник для эллипса.

$$\begin{cases} r_2 = a + \frac{c}{a}x \\ r_2 = a - \frac{c}{a}x \end{cases} \quad (4)$$

2.3 Гипербола

Гипербола - Множество точек плоскости таких, что модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости величина постоянная и равная 2a.

Фиксированные точки F1, F2 - фокусы.

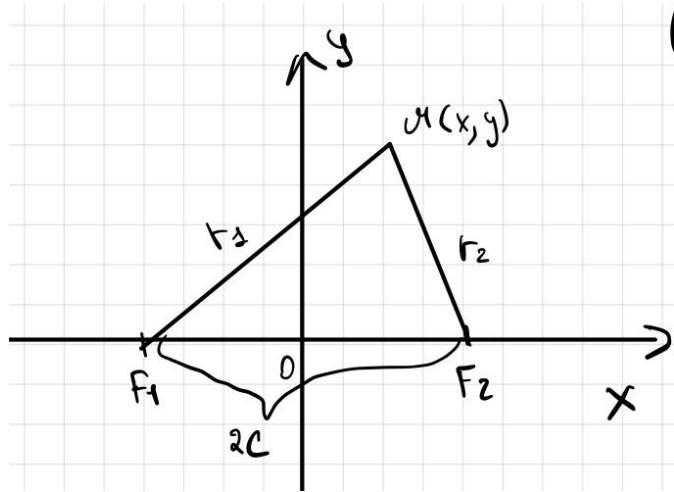
Длины r1, r2 - факальные радиусы.

Расстояние между F1, F2 - фокусное расстояние = 2c.

$$c > a \quad c > 0$$

Вводим каноническую систему координат.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$|r_1 - r_2| = 2a \quad (1)$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a \quad (2)$$

$$x^2 + 2cy + c^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)} = 4a^2$$

$$\begin{aligned}
2(x^2 + c^2 + y^2) - 2\sqrt{(x^2 + c^2 + y^2)^2 - 4c^2x^2} &= 4a^2 \\
(x^2 + c^2 + y^2) &= t^2 \\
t^2 - 2a^2 &= \sqrt{t^4 - 4c^2x^2} \Rightarrow 4c^2x^2 - 4a^2(x^2 + c^2 + y^2) = -4a^4 \\
(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 = a^2(c^2 - a^2) \\
b^2x^2 - a^2y^2 &= a^2b^2
\end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

Проверим (3) \Rightarrow (1), (2)

$$\begin{aligned}
y^2 &= (\frac{x^2}{a^2} - 1)b^2 \\
r_1 &= \sqrt{(x^2 + c^2) + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} = \\
&\quad b^2 = c^2 - a^2 \\
\sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + \frac{c^2}{a^2}x - \frac{a^2}{a^2}x^2 - c^2 + a^2} &= \sqrt{a^2 + 2\frac{cx}{a}a + (\frac{cx}{a})^2} = \sqrt{(a + \frac{cx}{a})^2} = |a + \frac{cx}{a}|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= |a + \frac{cx}{a}| \\
r_2 &= |a - \frac{cx}{a}|
\end{aligned}$$

1. $x > a$

$$\begin{aligned}
r_1 &= |a + \frac{cx}{a}| = a + \frac{cx}{a} \\
r_2 &= |a - \frac{cx}{a}| = -a + \frac{cx}{a} \\
|r_1 - r_2| &= |a + \frac{cx}{a} + a - \frac{cx}{a}| = |2a|
\end{aligned}$$

2. $x < -a$

$$\begin{aligned}
|r_1 - r_2| &= |a + \frac{x}{a}c - a - \frac{x}{a}c| \\
&= |\frac{x}{a}| > 0, \quad c > x \quad \frac{x}{a} < 0 \\
r_2 &= |a - \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x \\
|r_1 - r_2| &= |-a - \frac{x}{a}c - a + \frac{c}{a}x|
\end{aligned}$$

Введём $\hat{y}_1 = \frac{b}{a}x$

Введём $\hat{y}_2 = -\frac{b}{a}x$

Это будут уравнения диагоналей прямоугольника (асимптоты)

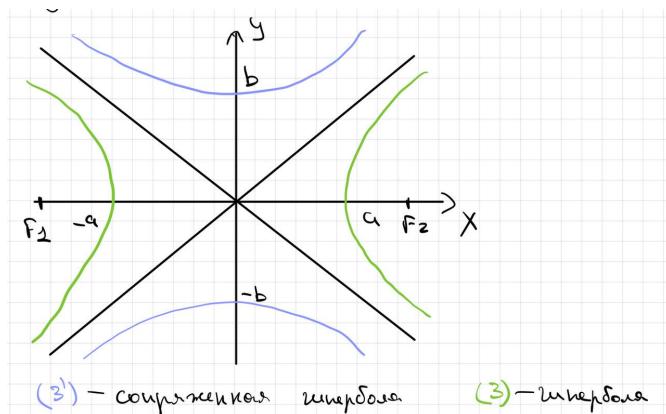
$$y > 0, x \rightarrow +\infty$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)b^2}$$

$$y(x) - \hat{y}_1(x) = \sqrt{\left(\frac{x^2 b^2}{a^2}\right)} - \frac{b}{a}x = \frac{\frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}{\sqrt{\frac{x^2 b^2}{a^2} - b^2} + \frac{b}{a}x} = \frac{-b^2}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - b^2} \frac{b}{a}x} \xrightarrow{+\infty} 0$$

a - действительная полуось

b - мнимая полуось

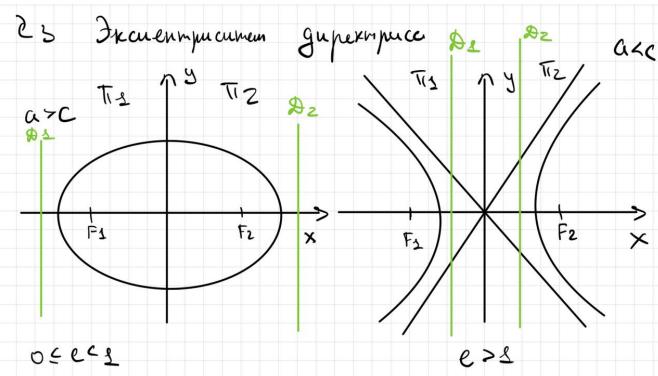


Свойства гиперболы:

1. Симметрична относительно центра (начала координат)
2. Фокусы вне прямоугольника
3. b и a никак не свдиректриса и екс/Директриса и екс.

2.4 Эксцентристет и директриса эллипса и гиперболы.

Определение. Эксцентристет это $e = \frac{c}{a}$



Для эллипса: $0 \leq e < 1$ Для окружности: $e = 1$

Для гиперболы: $e > 1$

$$1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

$$\text{Эллипс: } 1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\text{Гипербола: } e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$$

Определение. Директрисы - это прямые ... в проециональной

$$\rho(D_i, 0) = \frac{a}{e} (\text{or } \frac{\pi}{e})$$

$$D_1 : -x = \frac{a}{e}$$

$$D_2 : x = \frac{a}{e}$$

$$-x - \frac{a}{e} = 0$$

$$x - \frac{a}{e} = 0$$

Теорема. $M(x, y)$

r_i - ... радиусы $= \rho(M, F_i)$

$d_1 = D_i$

$$\frac{r_i}{d_i} = e, \quad i = 1, 2$$

Доказательство

1. Эллипс

$$r_1 = \left| a + \frac{c}{a}x \right| = a + \frac{c}{a}x = a + cx$$

$$d_1 = \left| -x - \frac{a}{e} \right| = \left| x + \frac{a}{e} \right| = x + \frac{a}{e} = \frac{ex + a}{e}$$

$$\frac{r_1}{d_1} = e$$

$$r_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = a - \frac{c}{a}x = a - cx$$

$$d_1 = \left| x - \frac{a}{e} \right| = -x + \frac{a}{e} = \frac{-ex + a}{e}$$

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

Для эллипса доказали.

2. Гипербола. Рассмотрим 1 случай, остальное по аналогии.

$$x \geq a, i = 2$$

$$r_2 = \left| a - \frac{c}{a}x \right| = -a + \frac{c}{a}x = -a + cx$$

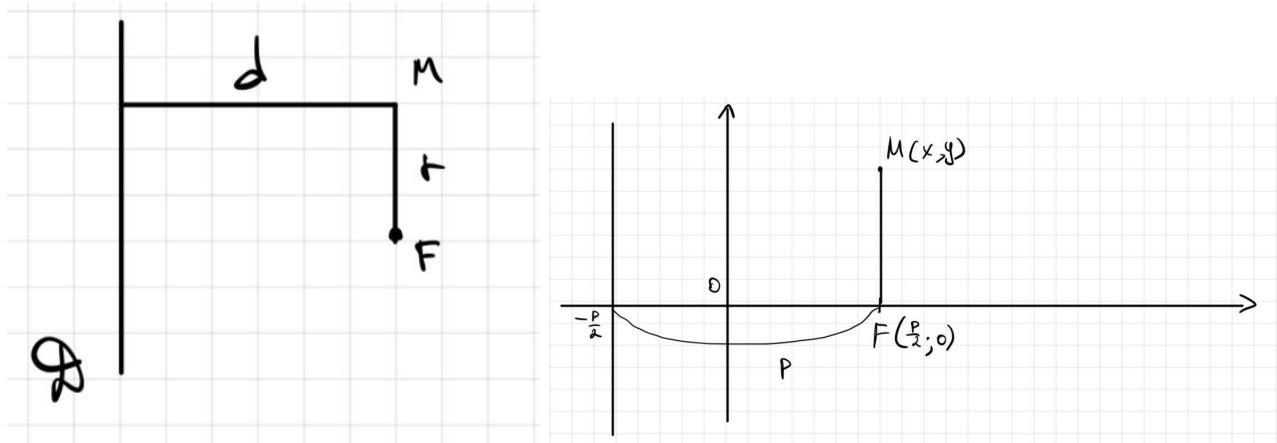
$$d_2 = \left| x - \frac{a}{e} \right| = x - \frac{a}{e} = \frac{ex - a}{e}$$

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

Доказали для гиперболы.

2.5 Парабола. Вывод канонического уравнения. Свойства параболы.

Парабола - множество точек плоскости таких что расстояние от которых до фиксированной точки плоскости (фокуса) равно расстоянию до фиксированной прямой (директрисы).
Фокус на директрисе не лежит.



$$r = d \quad (1)$$

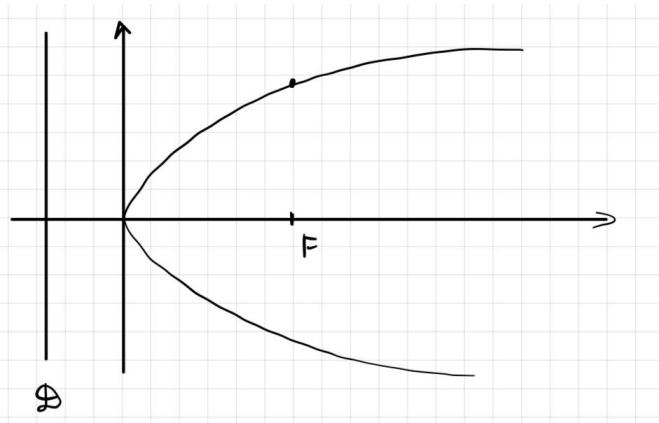
Факальный параметр параболы: $P = \rho(F, D)$ $D : -x - \frac{P}{2} = 0$

$$\sqrt{(x - \frac{P}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{P}{2}| \quad (2)$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px \quad (3)$$



Свойства параболы:

- Симметрично относительно Ох
- Расположено в правой полуплоскости ($x > 0$)

2.6 Упрощение алгебраического уравнения второго порядка на плоскости. Преобразование коэффициентов уравнений второго порядка при ортогональных преобразованиях.

2.6.1 Сдвиг.

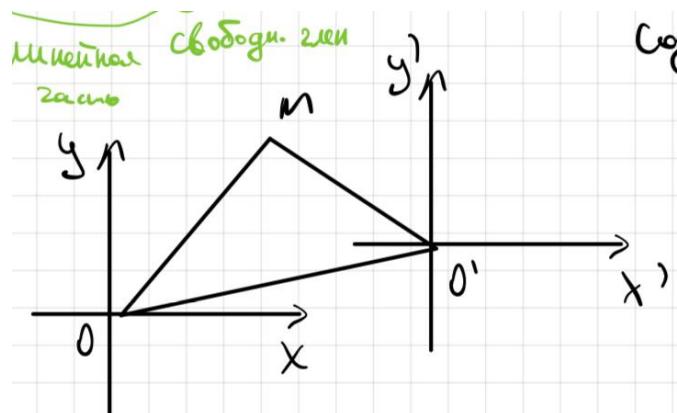
У нас есть ДПСК. $OXY \rightarrow O'X'Y'$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ - квадратная часть. ($A^2 + B^2 + C^2 > 0$)

$2Dx + 2Ey$ - линейная часть

F - свободный член.



$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$$

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

$$\begin{aligned}
A(x^2 + 2x'x_0 + x_0^2) + 2B(x' + x_0)(y' + y_0) + C(y'^2 + 2y\psi_0 + y_0^2) + 2D(x' + x_0) + 2E(y' + y_0) + F = 0 \\
A' = A \\
B' = B \\
C' = C \\
D' = Ax_0 + By_0 + D \\
E' = Bx_0 + Cy_0 + E \\
F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F
\end{aligned}$$

2.6.2 Поворот.

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + C(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha)^2 + \\
+ 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0 \\
A(x'^2 \cos^2 \alpha - 2x'y' \sin \alpha \cos \alpha + y'^2 \sin^2 \alpha) + 2B(x'^2 \cos \alpha \sin \alpha - x'y' \sin^2 \alpha + x'y' \cos^2 \alpha - y'^2 \sin \alpha \cos \alpha) + \\
+ C(x'^2 \sin^2 \alpha + 2x'y' \sin \alpha \cos \alpha + y'^2 \cos^2 \alpha) + 2D(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha) + 2E(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) + F = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A' = A \cos^2 \alpha + 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha = \frac{A}{2}(1 + \cos 2\alpha) + B \sin 2\alpha + \frac{C}{2}(1 - \cos 2\alpha) = \frac{A+C}{2} + B \sin 2\alpha + \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha \\
B' = -A \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + C \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{A}{2} \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha + \frac{C}{2} \sin 2\alpha = -\frac{A-C}{2} \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha \\
C' = A \cos^2 \alpha - 2B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha = \frac{A}{2}(1 - \cos 2\alpha) - B \sin 2\alpha + \frac{C}{2}(1 + \cos 2\alpha) = \frac{A+C}{2} - B \sin 2\alpha - \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{A+C}{2} + B \sin 2\alpha + \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha \\
B' &= -\frac{A-C}{2} \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha \\
C' &= \frac{A+C}{2} - B \sin 2\alpha - \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha \\
D' &= D \cos \alpha + E \sin \alpha \\
E' &= -D \sin \alpha + E \cos \alpha \\
F' &= F
\end{aligned}$$

2.7 Инварианта кривых второго порядка.

$$J_1 = A + C$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

Теорема. J_1, J_2, J_3 - ортогональны инвариантной кривой 2²⁰ порядка.

Доказательство

Для J_1 и J_2

1. $A' = A, B' = B, C' = C // J_1' = J_1, J_2' = J_2$ - см формулы пересчёта для сдвига.

2. $J_1' = A' + C' = \frac{A+C}{2} + B \sin 2\alpha + \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha + \frac{A+C}{2} - B \sin 2\alpha - \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha = A + C$

$$J_2' = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = A'C' - B'^2 = \left(\frac{A+C}{2} + B \sin 2\alpha + \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha\right) \left(\frac{A+C}{2} - B \sin 2\alpha - \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha\right) - \left(-\frac{A-C}{2} \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha\right)^2 = \frac{(A+C)^2}{4} - (B \sin 2\alpha + \frac{A-C}{2} \cos 2\alpha)^2 - \left(-\frac{A-C}{2} \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha\right)^2 = \left(\frac{A+C}{4}\right)^2 - B^2 \sin^2 2\alpha - B(A-C) \sin 2\alpha \cos 2\alpha - \left(\frac{A-C}{2}\right)^2 \sin^2 2\alpha + B(A-C) \sin 2\alpha \cos 2\alpha - B^2 \cos^2 2\alpha = \left(\frac{A+C}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-C}{2}\right)^2 - B^2 = AC - B^2$$

Кривая называется **центральной** если у неё есть единственный центр симметрии.

Кривая **не центральная** если у неё нет центров симметрий, или их больше 1.

Теорема 2.

Кривая второго порядка центральная $\Leftrightarrow J_2 \neq 0$

Кривая второго порядка нецентральная $\Leftrightarrow J_2 = 0$

Эллипс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2 b^2} > 0$$

Гипербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$J_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0$$

Парабола: $y^2 = 2px$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.8 Приведение кривой второго порядка к каноническому виду ортогональными преобразованиями.

2.8.1 Центральная кривая

1. Сдвиг. Цель - убрать линейные слагаемые (найти O' (x_0, y_0) решить систему)

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} *$$

Её доказывать не будем:

Теорема Крамера. (*) имеет единственное решение $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$ Найдём $O'(x_0, y_0)$

$$A\xi^2 + 2B\xi\psi + C\psi^2 + F = 0$$

$$A' = A, B' = B, C' = C$$

2. Поворот. Цель - убрать B' угол $\alpha : -\frac{A'-C'}{2} \sin 2\alpha + B' \cos 2\alpha = 0$

Если $B' = 0$ то ничего делать не надо

$$B' \neq \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A'-C'}{2B'}$$

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \alpha - y'' \sin \alpha \\ y' = x'' \sin \alpha + y'' \cos \alpha \end{cases}$$

$$A''x''^2 + C''y''^2 + F'' = 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} A'' & 0 \\ 0 & C'' \end{vmatrix} = A''C'' \neq 0 \Rightarrow A'' \neq 0 \text{ and } C'' \neq 0$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} A'' & 0 & 0 \\ 0 & C'' & 0 \\ 0 & 0 & F'' \end{vmatrix} = A''C''F'' = J_2F'' \Rightarrow F'' = \frac{J_3}{J_2}$$

$$A''x''^2 + C''y''^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0$$

$$A''x'' + C''y'' = -\frac{J_3}{J_2}$$

1. Эллипс

$$J_2 > 0, J_2 = A''C'' > 0$$

$$A'' = C''$$

$$A'' > 0, C'' > 0$$

$$J_1 > 0$$

(a) $J_3 < 0, J_2 > 0$

$$-\frac{J_3}{J_2} > 0$$

$$\frac{x''^2}{-\frac{J_3}{J_2 A''}} + \frac{y''^2}{-\frac{J_3}{J_2 C''}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

(b) $J_3 = 0$

$$A''x''^2 + C''y''^2 = 0$$

Выражденый эллипс.

$$(c) \ J_3 > 0$$

$$\frac{x^{\prime\prime 2}}{-\frac{J_3}{J_2 A''}} + \frac{y^{\prime\prime 2}}{-\frac{J_3}{J_2 C''}} = -1$$

$$\frac{x^{\prime\prime 2}}{\frac{1}{A''}} + \frac{y^{\prime\prime 2}}{\frac{1}{C''}} = 0$$

$$\frac{x^{\prime 2}}{a^2} + \frac{y^{\prime 2}}{b^2} = 0$$

$$\frac{x^{\prime 2}}{a^2} + \frac{y^{\prime 2}}{b^2} = -1$$

- ЭТО МНИМЫЙ ЭЛИПС

2. Гипербола

$$J_2 < 0, J_2 = A''C'' < 0$$

$$A'' = -C''$$

$$A'' > 0, C'' < 0$$

$$J_1 > 0$$

$$(a) \ J_3 = 0, J_2 < 0$$

$$A''x^{\prime\prime 2} - (-C'')y^{\prime\prime 2} = -\frac{J_3}{J_2}$$

$$\frac{x^{\prime\prime 2}}{-\frac{J_3}{J_2 A''}} - \frac{y^{\prime\prime 2}}{-\frac{J_3}{J_2 C''}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^{\prime\prime 2}}{a^2} - \frac{y^{\prime\prime 2}}{b^2} = 1$$

$$\text{либо } -\frac{x^{\prime\prime 2}}{a^2} + \frac{y^{\prime\prime 2}}{b^2} = 1$$

$$(b) \ J_3 = 0$$

$$A''x^{\prime\prime 2} + C''y^{\prime\prime 2} = 0$$

$$A'' > 0, C'' < 0$$

$$(\sqrt{A''}x'')^2 - (\sqrt{-C''}y'')^2 = 0$$

- Это 2 пересекающиеся прямые.

Замечание к сдвигу. После сдвига начало координат - центр кривой (и он единственный).

2.9 Приведение уравнения второго порядка к каноническому виду в случае нецентральной прямой.

$$J_2 = 0$$

Поворот сдвиг. Цель - убрать В.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}$$

$$A'x^{\prime 2} + C'y^{\prime 2} + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{vmatrix} = A'C' = 0 \Rightarrow A' = 0, C' = 0$$

$$C^{\alpha}y^{\alpha 2} + 2D^{\alpha}x^{\alpha} + 2E^{\alpha}y^{\alpha} + F^{\alpha} = 0, C^{\alpha} \neq 0$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & D^{\alpha} \\ 0 & C^{\alpha} & E^{\alpha} \\ D^{\alpha} & E^{\alpha} & F^{\alpha} \end{vmatrix} = -C^{\alpha}D^{\alpha 2}$$

2.1. $J_3 \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0$

$$C^{\alpha}y^{\alpha 2} + 2E^{\alpha}y^{\alpha} = -D^{\alpha}x^{\alpha} - F^{\alpha}$$

$$(y^{\alpha} + b) = -\frac{2D^{\alpha}}{C^{\alpha}}(x^{\alpha} + a)$$

Сдвиг

$$\begin{cases} x^{\alpha} = x^{\alpha} + a \\ y^{\alpha} = y^{\alpha} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\alpha} = x^{\alpha} - a \\ y^{\alpha} = y^{\alpha} - b \end{cases} O^{\alpha}(a, b)$$

Парабола

$$y^{\alpha 2} = -\frac{2D^{\alpha}}{C^{\alpha}}x^{\alpha}$$