Конспект по математическому анализу

Голубов Владислав

Сентябрь 2025

Содержание

$$Ax + by + Cz + D = 0$$

Я всё проебал, надо написать хз что это.
Определение. Отклонение точки от плоскости

$$M_0(x_{0,0}, z_0)$$

$$\delta(M_0, \pi) = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta z_0 \cos\gamma$$

1 §8. Прямая в пространстве.

OXYZ - ДПСК
Определение. Направленный вектор L.

$$\overline{p} \neq 0, \quad \overline{q}||L$$

$$M_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\overline{q} = l, m, n$$

$$M = (x, y, z)$$

$$M \in L \Leftrightarrow \overline{M_0M}||\overline{q}$$

1. $$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

   Канонические уравнения L.

2. $$\overline{M_0M} = t\overline{q}$$

   $$\begin{cases} x = x_0 + lt, t \in (-\infty, +\infty) \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

2. $\begin{cases} 1 : \mathrm{A}_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ 2 : \mathrm{A}_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \overline{q} = [\overline{N_1}, \overline{N_2}]$

Определение. Угол между прямой и плоскость - это угол между прямой и её проекцией на эту плоскость.

$$\overline{q} = l, m, n$$

$$\overline{N} = A, B, C$$

$$\cos\psi = \sin\phi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

2 Алгебраические линии и кривые 2 порядка

2.1 Элипс. Вывод канонического уравнения. Свойства элипса.

Элипс - множество точек плоскости таких, что сумма расстояний от них до фиксированных точек той же плоскость постоянна и равна 2a. $r_1 + r_2 = 2a$
Фиксированные точки F1, F2 - фокусы.
Длинны r1, r2 - факальные радиусы.
Расстояние между F1, F2 - фокусное расстояние = 2c. c может быть равен 0, тогда будет окружность.
Окружность частный случай элипса с фокусным растоянием 0.
По неравенству треугольника: $a > c$

2.2 Вывод уравнения элипса

Пусть фокусное расстояние не равно 0.
!!! INSERT IMAGE.

$$r_1 + r_2 = 2a \tag{1}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \tag{2}$$

$$x^2 + 2cy + c^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 + 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)}$$

$$2(x^2 + y^2 + c^2) + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2} = 4a^2$$

$$x^2 + y^2 + c^2 = t^2$$

$$\sqrt{t^4 - 4c^2x^2} = 2a^2 - t^2 \Rightarrow t^4 - 4c^2x^2 = 4a^4 - 4a^2t^2 + t^4 - c^2x^2 = a^4 - a^2(x^2 + y^2 + c^2)$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2(a^2 - c^2) =$$

$$(a^2 - c^2) > 0$$

$$= \underline{a^2 - c^2 = b^2} \qquad \underline{a \geq b}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3}$$

(3) $\Rightarrow$ (2)–?

$$y^2 = (1 - \frac{x^2}{a^2})b^2$$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + a^2 - c^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2} =$$

$$\sqrt{a^2 + 2cx + (\frac{c}{a}x)^2} = \sqrt{(a + \frac{c}{a}x)^2} = |a + \frac{c}{a}x|$$

$$r_1 = |a + \frac{c}{a}x| \qquad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = |a - \frac{c}{a}x|$$

1. $r_1 = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x$
   $|x| \leq a, \ c < a$

2. $r_2 = |a - \frac{c}{a}x| = a - \frac{c}{a}x$

Т.о. мы доказали равносильность преобразования и вывода формулы (3).
a - большая полуось
b - малая полуось
Прямоугольник со сторонами a, b - основной прямоугольник для элипса.

$$\begin{cases} r_2 = a + \frac{c}{a}x \\ r_2 = a - \frac{c}{a}x \end{cases} \tag{4}$$

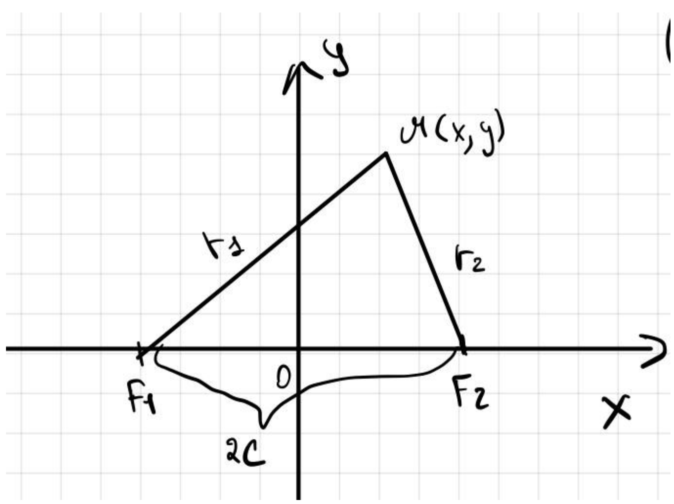
2.3 Гипербола

Гипербола - Множество точек плоскости таких, что модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости величина постоянная и равная 2a.
Фиксированные точки F1, F2 - фокусы.
Длинны r1, r2 - факальные радиусы.
Расстояние между F1, F2 - фокусное расстояние = 2c.

$$c > a \qquad c > 0$$

Вводим каноническую систему координат.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$|r_1 - r_2| = 2a \tag{1}$$

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a \tag{2}$$

$$x^2 + 2cy + c^2 + y^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 2\sqrt{(x^2 + 2cx + c^2 + y^2)(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)} = 4a^2$$

$$2(x^2+c^2+y^2)-2\sqrt{(x^2+c^2+y^2)^2-4c^2x^2}=4a^2$$
$$(x^2+c^2+y^2)=t^2$$
$$t^2-2a^2=\sqrt{t^4-4c^2x^2}\Rightarrow 4c^2x^2-4a^2(x^2+c^2+y^2)=-4a^4$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4=a^2(c^2-a^2)$$
$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (3)}$$

Проверим (3) $\Rightarrow$ (1), (2)

$$y^2=(\frac{x^2}{a^2}-1)b^2$$
$$r_1=\sqrt{(x^2+c^2)+y^2}=\sqrt{x^2+2cx+c^2+\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}=$$
$$b^2=c^2-a^2$$
$$\sqrt{x^2+2cx+c^2+\frac{c^2}{a^2}x-\frac{a^2}{a^2}x^2-c^2+a^2}=\sqrt{a^2+2\frac{cx}{a}a+(\frac{cx}{a})^2}=\sqrt{(a+\frac{cx}{a})^2}=|a+\frac{cx}{a}|$$

$$\boxed{\begin{aligned} r_1&=|a+\frac{cx}{a}| \\ r_2&=|a-\frac{cx}{a}|\end{aligned}}$$

1. $x>a$

$$r_1=|a+\frac{cx}{a}|=a+\frac{cx}{a}$$
$$r_2=|a-\frac{cx}{a}|=-a+\frac{cx}{a}$$
$$|r_1-r_2|=|a+\frac{cx}{a}+a-\frac{cx}{a}|=|2a|$$

2. $x<-a$

$$|r_1-r_2|$$
$$r_1=|a+\frac{x}{a}c|=-a-\frac{x}{a}c$$
$$|\frac{x}{a}|>0,\ c>x\ \frac{x}{a}<0$$
$$r_2=|a-\frac{c}{a}x|=a+\frac{c}{a}x$$
$$|r_1-r_2|=|-a-\frac{x}{a}c-a+\frac{c}{a}x|$$

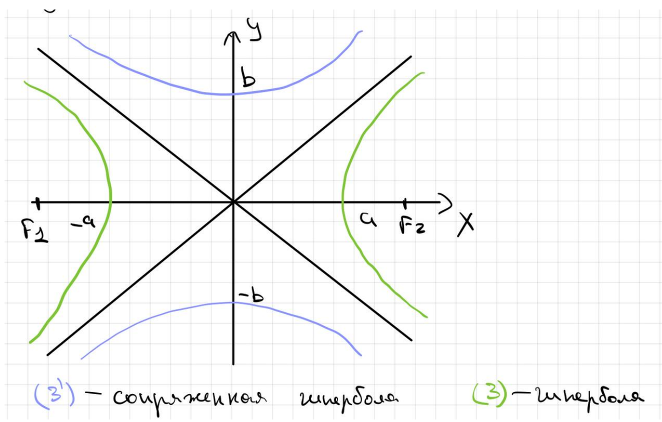
Введём $\hat{y_1} = \frac{b}{a}x$
Введём $\hat{y_2} = -\frac{b}{a}x$
Это будут уравнения диагоналей прямоугольника (асимптоты)

$$y > 0, x \to +\infty$$

$$y = \sqrt{(\frac{b^2}{a^2} - 1)b^2}$$

$$y(x) - \hat{y_1}(x) = \sqrt{(\frac{x^2}{a^2}b^2)} - \frac{b}{a}x = \frac{\frac{x^2b^2}{a^2} - b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}{\sqrt{\frac{x^2b^2}{a^2} - b^2} + \frac{b}{a}x} = \frac{-b^2}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - b^2}\frac{b}{a}x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$$

a - действительная полуось
b - мнимая полуось



Свойства гиперболы:

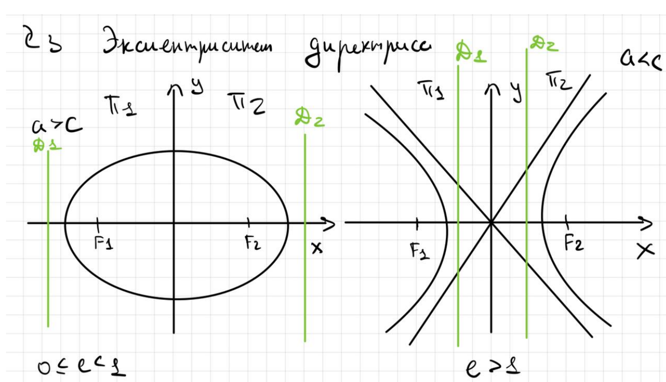
1. Симметрична относительно центра (начала координат)

2. Фоуксы вне прямоугольника

3. b и a никак не свДиректриса и екс/Директриса и екс.

2.4 Эксиетристет и директриса элипса и гиперболы.

Определение. Эксиетристет это $e = \frac{c}{a}$



Для элипса: $0 \leq e < 1$ Для окружности: $e = 1$
Для гиперболы: $e > 1$

$$1 - e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

Элипс: $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$
Гипербола: $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$
Определение. Директрисы - это прямые ... в проебал

$$\rho(D_i, 0) = \frac{a}{e}(or\frac{\pi}{e})$$

$$D_1 : -x = \frac{a}{e}$$

$$D_2 : x = \frac{a}{e}$$

$$-x - \frac{a}{e} = 0$$

$$x - \frac{a}{e} = 0$$

Теорема. $M(x, y)$
r_i - ... радиусы $= \rho(M, F_1)$
$d_1 =, D_i$

$$\frac{r_i}{d_i} = e, \quad i = 1, 2$$

Доказательство

1. Элипс

$$r_1 = |a + \frac{c}{a}x| = a + \frac{c}{a}x = a + cx$$

$$d_1 = |-x - \frac{a}{e}| = |x + \frac{a}{e}| = x + \frac{a}{e} = \frac{ex + a}{e}$$

$$\frac{r_1}{d_1} = e$$

$$r_2 = |a - \frac{c}{a}x| = a - \frac{c}{a}x = a - cx$$

$$d_1 = |x - \frac{a}{e}| = -x + \frac{a}{e} = \frac{-ex + a}{e}$$

$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

Для элипса доказали.

2. Гипербола. Рассмотрим 1 случай, остальное по аналогии.

$$x \geq a, i = 2$$

$$r_2 = |a - \frac{c}{a}x| = -a + \frac{c}{a}x = -a + cx$$

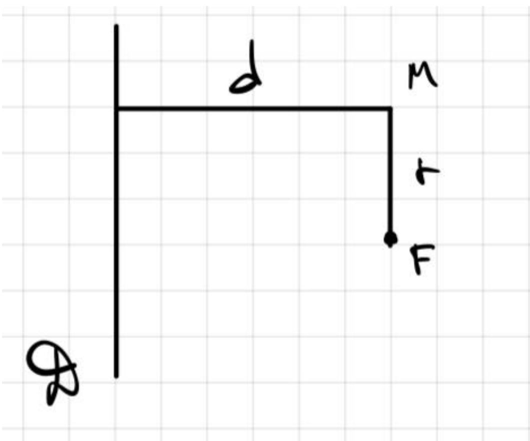
$$d_2 = |x - \frac{a}{e}| = x - \frac{a}{e} = \frac{ex - a}{e}$$

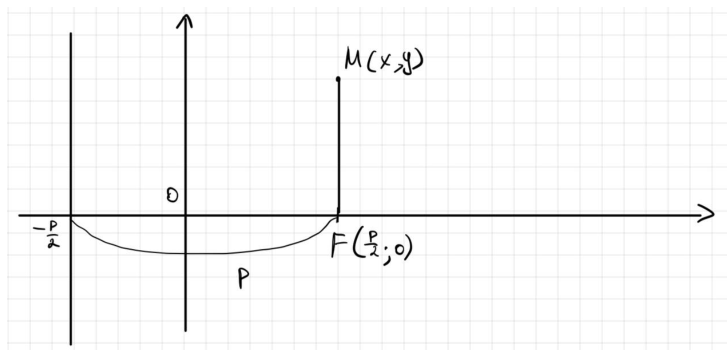
$$\frac{r_2}{d_2} = e$$

Доказали для гиперболы.

2.5 Парабола. Вывод канонического уравнения. Свойства параболы.

Парабола - множество точек плоскости таких что расстояние от которых до фиксированной точки плоскости (фокуса) равно расстоянию до фиксированной прямой (директрисы). Фоукус на директрисе не лежит.





$$r = d \tag{1}$$

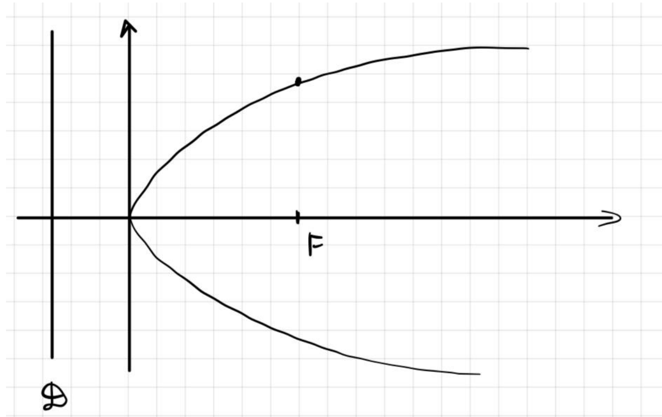
Факальный параметр параболы: $P = \rho(F, D)$ $D : -x - \frac{P}{2} = 0$

$$\sqrt{(x - \frac{P}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{P}{2}| \tag{2}$$

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px \tag{3}$$



Свойства параболы:

- Симметрично относително Ox
- Расположено в правой полуплоскости (x $>$ 0)

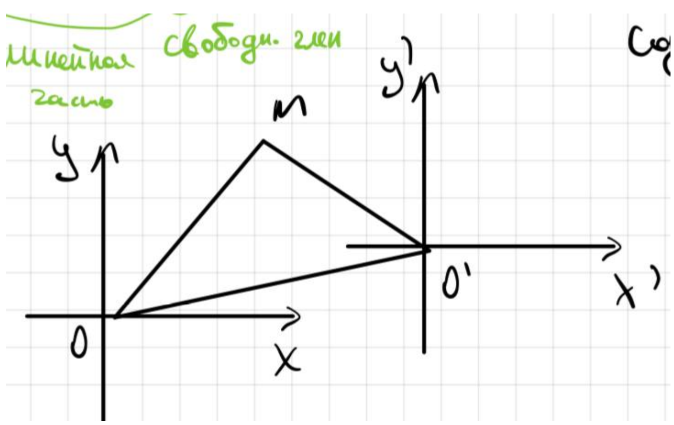
2.6 Упрощение алгебраического уравнения второго порядка на плоскости. Преобразование коэфициентов уравнений второго порядка при ортогональных преобразованиях.

2.6.1 Сдвиг.

У нас есть ДПСК. $OXY \to O`X`Y`$

$$A^2x^2 + 2B^2xy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$A^2 + 2B^2xy + Cy^2$ - квадратная часть. $(A^2 + B^2 + C^2 > 0)$
$2Dx + 2Ey$ - линейная часть
F - свободный член.



$$\begin{cases} x = x` + x_0 \\ y = y` + y_0 \end{cases}$$

$$A`^2x`^2 + 2B^2`x`y` + C`y^2` + 2D`x` + 2E`y` + F` = 0$$

$A(x^21 + 2x`x_0 + x_0`) + 2B(x` + x_0)(y` + y_0) + C(y`^2 + 2y\psi_0 + y_0^2) + 2D(x` + x_0) + 2E(y` + y_0) + F = 0$

$A` = A$, $D` = Ax_0 + By_0 + D$
$B`B$, $C` = C$
$F` = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F$