Семинары по мат аналу

Октябрь 2025

1 Пределы

1.1 Доказано, что (на зачёте уметь доказать):

$\frac{a^k}{a^n} \to 0$, при $a > 1$

2 Ряды

2.1 Определение сходимости ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Определение.
Если S_n - сходится, при $n \to \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}$ - сходится

2.2 Критерий Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \ \ \forall n, m > n_\varepsilon \ \ |S_n - S_m| < \varepsilon$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \ \ \forall n > n_\varepsilon, \forall p \in \mathbb{N} |\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| < \varepsilon$$

$$a_n = S_n - S_{n-1}, n \to \infty$$
$$S_n \to S, S_{n-1} \to S \Rightarrow a_n \to 0$$

Пример

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon \ \ \forall n > n_\varepsilon \forall p \in \mathbb{N}$$
$$|\sum_{n+1}^{n+p} a - n| < \varepsilon \quad \frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \dots \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p} =^{p=n}= \frac{1}{2}$$

Противоречие:

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \geq \frac{1}{2}$$

Пример

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\exists\varepsilon > 0 \ \ \forall n, p = 3n$$
$$|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k| \geq 1$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+3n}\frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} + \sum_{k=2n+1}^{4n}$$

Ряд геометрической прогресии

$$\sum_{1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-q}$$

$\sum_1^\infty |a_k|$ - сходится $\Rightarrow \sum_1^\infty a_k$ - тоже сходится
$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists n_\varepsilon : \forall n > n_\varepsilon, \forall p | \sum_{n+1}^{n+p} a_k| \leq \sum_{n+1}^{n+p} |a_k| = |\sum_{n+1}^{n+p} |a_k|| < \varepsilon$

Пример. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$$S_{2n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \dots | \frac{1}{(2n-1)2n} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}$$

Тогда $\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2}$ - имеет предел, а значит и $\sum_1^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ имеет предел

Докажем для нечётных

$$S_n \to S$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow{n\to\infty} S_n$$

Тогда $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ имеет предел

$\sum a_k -$ сходится $\sum b_k : \forall k |b_k| \leq a_k \Rightarrow \sum b_k$ - сходится

Доказать, что ряд сходится $\sum \frac{n^3 \cdot cos\ n + 3}{n^5 + 10n^3 \cdot sin\ n}$

Считаем доказаным, что
$\sum \frac{1}{n}$ - расходится
$\sum \frac{1}{n^2}$ - сходится
$\sum q^n, \ \ |q| < 1$ - сходится

$$\sum \frac{n^3 \cdot cos\ n + 3}{n^5 + 10n^3 \cdot sin\ n} = \frac{cos\ n + \dfrac{3}{n^3}}{n^2 + 10 \cdot sin\ n}$$

$$|\frac{cos\ n + \dfrac{3}{n^3}}{n^2 + 10 \cdot sin\ n}| \leq \frac{4}{n^2 - 10}$$

При $n > 3$

$$\frac{4}{n^2 - 10} < \frac{4}{\frac{n^2}{2}}$$

2.3 Признак Аламбера

признак Аламбера

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \forall k \ \ |\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q < 1$$

Значит ряд сходится.

Пример. $\sum_0^\infty \dfrac{a^n}{n!}$ По признаку Аламбера:

$$|\frac{\frac{a^{n+1}}{(k+1)!}}{\frac{a^n}{k!}}| = |\frac{a}{k+1}| \xrightarrow{k \to \infty} 0 < 1 \Rightarrow \sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}$$

Ряд сходится

2.4 Радикальный признак Коши

Признак Коши

$$\sum a_k$$

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$$

2.5 Необходимое условие сходимости ряда

$\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow a_n \to 0$

$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ... \geq 0$

$\sum a_k$ сходится $\Leftrightarrow \sum 2^k a_{2^k}$

3 O малая и O большое

$$g(x) = \overline{\overline{o}}(f(x)),\ x \to a$$

$$g(x) = \alpha(x)f(x),\ \alpha(x) \to 0$$

Такой вопрос: $x \to a\ \overline{\overline{o}}(f(x)) + \overline{\overline{o}}(f(x)) = \overline{\overline{o}}(2f(x))$?
Нет, $x \to a\ \ \overline{\overline{o}}(f(x)) + \overline{\overline{o}}(f(x)) = \overline{\overline{o}}(f(x))$?

$$= \alpha(x)f(x) + \beta(x)f(x) = (\alpha(x) + \beta(x))f(x)$$

$$g(x) = \underline{\underline{O}}(f(x)), x \to a \Leftrightarrow \exists U_a, \exists C > 0:\ \forall x \in \dot{U_a}\ \ |g(x)| \leq C|f(x)|$$

Верно ли, что:

$$\overline{\overline{o}}(f(x)) = \underline{\underline{O}}(f(x))$$

$$\underline{\underline{O}}(f(x)) = \overline{\overline{o}}(f(x))$$

Расспишем.

$$|\overline{\overline{o}}(f(x))| = |\alpha(x)f(x)| \leq 1 \cdot |f(x)|$$

Пусть $C = 1$, тогда $\exists \delta_1 > 0 : \forall x\ 0 < |x - a| < \delta_1\ |\alpha(x)| < 1$
Любое функция удовлетворяющая оценки o удовлетворяет O.
Любое функция удовлетворяющая оценки O не обязана удовлетворять o.

4 1 замечательный предел

$$\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$$

$$\sin x = x + \alpha(x)x = x + \overline{\overline{o}}(x)$$

$$e^x = 1 + x + \overline{\overline{o}}(x), x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2), x \to 0$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \overline{\overline{o}}(x), x \to 0$$

$$log(1 + x) = x + \overline{\overline{o}}(x), x \to 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x + \overline{\overline{o}}(x)}{1 - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)} = (x + \overline{\overline{o}}(x))(1 - \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2))^-1 =$$

$$= (x + \overline{\overline{o}}(x))[\ 1 + (-1)(-\frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)) + \overline{\overline{o}}(-\frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2))\ ] = (x + \overline{\overline{o}}(x))[\ 1 + \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2) + \overline{\overline{o}}(x^2)\ ] =$$

$$(x + \overline{\overline{o}}(x))[\ 1 + \frac{x^2}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)\ ]\ = x + \frac{x^3}{2} + \overline{\overline{o}}(x^2)x + \overline{\overline{o}}(x) + \frac{x^2}{2}\overline{\overline{o}}(x) + \overline{\overline{o}}(x) + \overline{\overline{o}}(x^2)$$

$$\frac{x^3}{2} = \frac{x^2}{2}x = \bar{\bar{o}}(x)$$
$$\bar{\bar{o}}(x^2) = (\beta(x)x^2)x = \bar{\bar{o}}(x)$$

Пример

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}} = \sqrt{x}(1+\bar{\bar{o}}(1)) = \sqrt{x}+\bar{\bar{o}}(\sqrt{x}), x\to+\infty$$

А при $x \to +0$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \sqrt{x+x^{1/4}\sqrt{\sqrt{x}+1}} = x^{1/8}\sqrt{x^{3/4}+\sqrt{\sqrt{x}+1}} = x^{1/8}(1+\bar{\bar{o}}(1)) = x^{1/8}+\bar{\bar{o}}(x^{1/8}), x\to+0$$

Классная формулка (при $x \to 0$):

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha\cdot x+\bar{\bar{o}}(x)$$

При $x \to 0$

$$\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1-2x} = 1+\frac{1}{2}(-3x)+\bar{\bar{o}}(x)-(1+\frac{1}{3}\cdot(-2x)+\bar{\bar{o}}(x)) = -\frac{5}{6}x+\bar{\bar{o}}(x)$$

При $x \to +\infty$

$$\sqrt{x^4+x^3+2x^2+1}-x^2 = (x^4+x^3+2x^2+1)^{\frac{1}{2}}-x^2 = x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})^{1/2}-x^2 =$$

Всё по той же классной формулке

$$= x^2(1+\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})+\bar{\bar{o}}(\frac{1}{x}))-x^2 = x^2(\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4})+\bar{\bar{o}}(\frac{1}{x})) = \frac{x}{2}+1+\frac{1}{2x^2}+\bar{\bar{o}}(x) = \frac{x}{2}+\bar{\bar{o}}(x)$$

Пояснение:
$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x}\frac{1}{x} = \bar{\bar{o}}(\frac{1}{x})$
$\frac{1}{x^4} = \frac{1}{x^3}\frac{1}{x}$, где произведение числа стремящегося к бесконечности и бесконечно малой $= \bar{\bar{o}}(\frac{1}{x})$
При $x \to 0$‘

$$\operatorname{tg}x-\sin x = \frac{\sin x}{\cos x}-\sin x = \sin x(\frac{1}{\cos x}-1)$$
$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\bar{\bar{o}}(x^2)} = (1-\frac{x^2}{2}+\bar{\bar{o}}(x^2))^{-1} = x+\frac{x^2}{2}+\bar{\bar{o}}(x^2).$$
$$\sin x(\frac{1}{\cos x}-1) = (x+\bar{\bar{o}}(x))(\frac{x^2}{2}+\bar{\bar{o}}(x^2)) = \frac{x^3}{2}+\bar{\bar{o}}(x^3)$$

При $x \to 1$:

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$$

Пусть $x = t+1$, тогда $t \to 0$

$$\sqrt[3]{1-\sqrt{t+1}} = \sqrt[3]{1-(1+\frac{1}{2}t+\bar{\bar{o}}(t))} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}t+\bar{\bar{o}}(t)} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\sqrt[3]{t}(1+\bar{\bar{o}}(1))^{1/3} = -\frac{1}{2^{1/3}}(x-1)^{1/3}+\bar{\bar{o}}((x-1)^{1/3})$$

При $x \to +\infty$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x}(1+\frac{1}{x})^{1/2} - \sqrt{x}\sqrt{x}((1+\frac{1}{x})^{1/2} - 1)$$

$$(1+\frac{1}{x})^{1/2} = 1 + \frac{1}{2x} + \overline{\overline{o}}(\frac{1}{x})...$$

в) $\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{x}(1+\frac{2}{x})^{1/2} - 2\sqrt{x}(1+\frac{1}{x})^{1/2} + \sqrt{x} =$

$$= \sqrt{x}(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{x} + \overline{\overline{o}}(\frac{1}{x}) - 2(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x} + \overline{\overline{o}}(\frac{1}{x})) + 1) = \sqrt{x}(1 + \frac{1}{x} + \overline{\overline{o}}(\frac{1}{x}))...$$