

Construtivismo Matemático e suas aplicações na computação

Rafael Castro G. Silva

rafaelcgs10@gmail.com

Departamento de Ciência da Computação
Centro de Ciências e Tecnológicas
Universidade do Estado de Santa Catarina

August 31, 2017

Motivação



Uma pequena revisão de lógica clássica

O que significa afirmar que $P \vee Q$ é verdade?

O que significa afirmar que $P \vee \neg P$ é verdade?

Para toda afirmação P , ou P ou $\neg P$ é verdade.
(*Law of excluded middle*)

Uma pequena revisão de lógica clássica

O que significa afirmar que $P \vee Q$ é verdade?

O que significa afirmar que $P \vee \neg P$ é verdade?

Para toda afirmação P , ou P ou $\neg P$ é verdade.
(*Law of excluded middle*)

E quando não há prova de P ou de $\neg P$?

Todo inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos. (*Goldach Conjecture*)



A interpretação clássica dos conectivos lógicos

Tabela verdade!

A interpretação clássica dos conectivos lógicos

Tabela verdade!

$P \vee Q$ é interpretado como $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$:
é uma contradição P e Q serem falsos.

O que leva a interpretação idealizada (platônica) da existência:
 $\exists x P(x)$ significa $\neg \forall x \neg P(x)$:
é uma contradição $P(x)$ ser falso para todo x .

A interpretação clássica dos conectivos lógicos

Tabela verdade!

$P \vee Q$ é interpretado como $\neg(\neg P \wedge \neg Q)$:
é uma contradição P e Q serem falsos.

O que leva a interpretação idealizada (platônica) da existência:
 $\exists x P(x)$ significa $\neg \forall x \neg P(x)$:
é uma contradição $P(x)$ ser falso para todo x .

e assim se fez toda a matemática.

Sistema Formal

- Conjunto de símbolos.
- Uma gramática, que define termos bem definidos a partir dos símbolos.
- Aparato de dedução: regras que determinam algum tipo de consequência entre os termos bem formados.
- Semântica para os termos.

Aritmética de Peano

- 0 0 é um número natural
- 1 definição da relação de igualdade (reflexiva, transitiva simétrica, fechada)...
- 5 Se n é um número natural, então $S(n)$ é um número natural.
- 6 $S(n) = 0$ é falso para todo n .
- 7 Para todo n, m naturais, se $S(m) = S(n)$, então $n = m$ (S é injetora).

Adição:

plus 0 $m = m$

plus $S(n)$ $m = S(\textit{plus } n \ m)$

Programa de Hilbert

- Formalizar a matemática: escrever toda a matemática como um sistema formal.
- Completude: Provar que todas as afirmações (e negações) verdadeiras matemáticas podem ser provadas nesse sistema formal.
- Consistência: Provar que uma verdade jamais deriva uma falsidade.
- Decibilidade: Um algoritmo que seja capaz provar todas as verdades e falsidades.

Primeiro Teorema da Incompletude

- A Aritmética de Peano é incompleta, ou seja, existe um fórmula φ indecidível tal que:
 $PA \not\vdash \varphi$ e $PA \not\vdash \neg\varphi$
- A ideia da prova consiste na construção de uma frase com auto-referência, como paradoxo do mentiroso:
“Esta frase é falsa”
- Em analogia, objetiva-se construir uma frase (ou proposição) em PA que diga:
“Esta proposição e sua negação não podem ser provadas”

Isomorfismo de Curry-Howard

- Existe um isomorfismo entre Cálculo Lambda Simplesmente Tipado e Dedução Natural Intuicionista.
- Proposições são tipos e provas são programas.

Exemplo curry-howard

$$\frac{\sigma \vdash \sigma}{\vdash \sigma \rightarrow \sigma} (\rightarrow_I)$$

$$\frac{x : a \vdash x : a}{\vdash (\lambda x. x) : a \rightarrow a} (abs)$$

Construtivismo



Lógica clássica VS Lógica construtivista

Law of Excluded Middle: $\forall P, P \vee \neg P$ (LEM)

E quando não há prova de P e não há prova de $\neg P$ o que podemos dizer sobre $P \vee \neg P$?

- Clássica: Verdade
- Construtivista: Não provável

Na lógica clássica dizemos que proposições são verdadeiras ou falsas. Na construtivista dizemos que proposições são prováveis ou não prováveis.

Construtivismo é sobre não aceitar LEM.

Intuicionismo

Vertente do construtivismo: não aceita LEM.

Matemática é uma criação da mente humana e um objeto existe se, e somente se, pode ser construído.

Lógica e matemática não revelam verdades objetivas sobre objetos matemáticos.

A interpretação intuicionista dos conectivos lógicos

Interpretação BHK (Brouwer, Heyting e Kolmogorov):

- \vee - para provar $P \vee Q$ é necessário ter uma prova de P ou uma prova de Q .
- \wedge - para provar $P \wedge Q$ é necessário ter uma prova de P e uma prova de Q .
- \rightarrow - para provar $P \rightarrow Q$ é necessário ter um algoritmo que converte uma prova de P em uma prova de Q .
- \neg - para provar $\neg P$ é necessário mostrar que P implica numa contradição ($0 = 1$).
- \exists - para provar $\exists x P(x)$ é necessário ter uma construção de um objeto x e provar que $P(x)$ é verdade.
- \forall - para provar $\forall x \in S P(x)$ é necessário ter um algoritmo que aplicado a qualquer objeto x e a prova de que $x \in S$, prova que $P(x)$ é verdade.

Prova por contradição no construtivismo

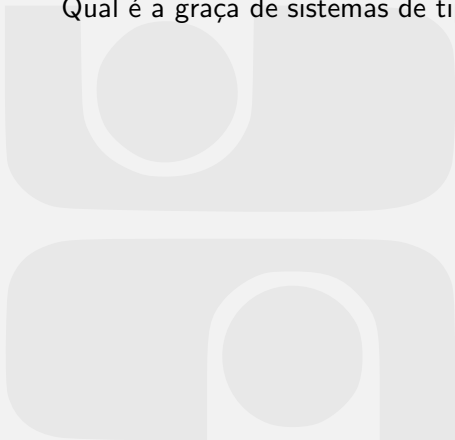
Matemáticos chamam duas coisas de “prova por contradição”:

- 1 Assume que P é falso... blah blah blah, contradição.
Portanto, P é verdade. $((\forall P. \neg \neg P \rightarrow P) \equiv (\text{LEM}))$
- 2 Assume que P é verdade... blah blah blah, contradição.
Portanto, P é falso. $(P \rightarrow \perp \equiv \neg P)$



Sistemas de Tipos

Qual é a graça de sistemas de tipos?



Sistemas de Tipos

Qual é a graça de sistemas de tipos?

- GRAÇA 1: polimorfismo.

```
len :: [a] -> Int
len [] = 0
len (x:xs) = 1 + len xs
```

Sistemas de Tipos

Qual é a graça de sistemas de tipos?

- GRAÇA 1: polimorfismo.

```
len :: [a] -> Int
len [] = 0
len (x:xs) = 1 + len xs
```

- GRAÇA 2: *Lightweight Formal Methods*.

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f [] = []
map f (x:xs) = f x : map f xs

map (+1) ['a', 'b']
```

Coq

- Ferramentas que auxiliam o desenvolvimento de provas formais.
- Verificam a consistência lógica de uma prova matemática.

Referências

Constructive Mathematics (Stanford Encyclopedia of Philosophy)
"Five Stages of Accepting Constructive Mathematics" by Andrej Bauer.
Propositions as types by Philip Wadler.