

# Revisão Sobre Inferência de Tipos em Recursão Polimórfica

Rafael Castro

`rafaelcgs10@gmail.com`

Departamento de Ciência da Computação  
Centro de Ciências e Tecnológicas  
Universidade do Estado de Santa Catarina

4 de Dezembro de 2017

# Sistema Milner-Mycroft

- A recursão polimórfica em linguagens de programação foi proposta por (Mycroft 1984) como uma extensão do sistema Damas-Milner (Damas e Milner 1982).
- A modificação permite que o identificador da definição tenha um tipo polimórfico  $\sigma$ .
- Foi mostrado que a inferência no sistema Milner-Mycroft é redutível (em tempo polinomial) ao problema da semi-unificação, de maneira independente, por (Fritz Henglein 1988) e (Kfoury, J. Tiuryn e Urzyczyn 1988)

$$\text{let} \frac{\Gamma \vdash e' : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } x = e' \text{ in } e) : \tau}$$

$$\text{letrec} \frac{\Gamma, x : \tau' \vdash e' : \tau' \quad \Gamma, x : \tau' \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } x = e' \text{ in } e) : \tau}$$

$$\text{letrec}^+ \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash e' : \sigma \quad \Gamma, x : \sigma \vdash e : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } x = e' \text{ in } e) : \tau}$$

## Semi-unificação

- A semi-unificação é uma generalização da unificação: uma substituição  $S$  que satisfaça a sequência de inequações

$$S(\tau^1) \leq S(\tau^2), \dots, S(\tau^{n-1}) \leq S(\tau^n),$$

onde  $\leq$  é a relação de instância entre tipos:  $\tau' \leq \tau$  se, e somente se, existe uma substituição  $S'$  tal que  $S'(\tau') = \tau$ .

- O caso geral do problema foi mostrado indecidível (Kfoury, J. Tiuryn e Urzyczyn 1990).
- Isso implica que não há algoritmo para decidir a tipabilidade (*typability*) de um termo no sistema Milner-Mycroft, ou seja, o sistema também é indecidível.
- Alguns casos decidíveis da semi-unificação foram encontrados: para uma inequação (Kapur et al. 1988), para duas variáveis (Leiß 1990) e semi-unificação acíclica (KFOURY, TIURYN e URZYCZYN 1994).

# Outros Sistemas com Recursão Polimórfica I

- Tentou-se extensões da linguagem ML que permitem recursão polimórfica, porém (Kfoury, J. Tiuryn e Urzyczyn 1993) demonstrou que a inferência nessas também é indecidível.
- A primeira forma de recursão polimórfica decidível foi proposta por (Friedrich Henglein 1989), que utilizaria o fato da semi-unificação com uma única inequação ser decidível para representar recursões polimórficas com apenas uma chamada recursiva e não aninhadas.
- O primeiro sistema de tipos a permitir recursão polimórfica, na realidade, é o Sistema-F (Girard 1972). Em (Jerzy Tiuryn 1990) mostra-se que é possível simular a recursão polimórfica com o uso de tipos Rank 3 ou superior.

## Outros Sistemas com Recursão Polimórfica II

- (Jim 1995) apresenta uma combinação de Rank 2 com *intersection types*, que é capaz de tipar algumas expressões recursivas e é decidível.
- Uma outra abordagem com Rank foi proposta por meio de *Principal Typings*, por (Jim 1996), capaz de tipar alguns casos de recursão polimórfica.

## Outros Sistemas com Recursão Polimórfica III

- (Damiani 2007) propõem, com base no sistema com Rank 2 *intersection type*, o sistema  $\vdash_2^P$  capaz de tipar, de maneira decidível, exemplos mais interessantes de recursão polimórfica.
- Em (Comini, Damiani e Vrech 2008) apresenta-se a relação direta entre recursão polimórfica em sistemas de tipos e em *Abstract Interpretation*, o que resultou num sistema de tipos com recursão polimórfica decidível.
- (Tatsuta e Damiani 2011) apresenta a recursão bimórfica, que permite associar um tipo para a chamada recursiva e outro para as chamadas externas da função. Além disso, é possível utilizar chamadas recursivas aninhadas. Mostrou-se que a inferência de tipos nesse sistema é decidível.

## Semi-algoritmo $W+$

- Em (Fritz Henglein 1993) é apresentado um semi-algoritmo para encontrar o semiunificador mais geral de um sistema de equações e inequações (SEI).
- Na prática programas têm *small types* e esse casos são tratáveis:  
Teorema 1: Tipabilidade com *small types* no sistema Milner-Mycroft é decidível em tempo polinomial. Prova em (Fritz Henglein 1993).
- O semi-algoritmo para resolver SEI de (Fritz Henglein 1993) foi utilizado na construção do semi-algoritmo  $W+$  em (Emms e Leil 1999), o qual foi provado ser consistente (*Soundness*) e ter uma completude fraca (*weak completeness*) com as regras do sistema Milner-Mycroft

## Semi-algoritmo *MMo*

- Foi proposto por (Vasconcellos e Camarão 2003) um (semi-)algoritmo chamado *MMo*, o qual foi testado numa boa gama de programas e nunca foi encontrado um caso que entra em *loop* ou que rejeita um programa correto.
- Apensar dos testes, o grau de incompletude do *MMo* não é conhecido e não se sabe o conjunto de casos que consegue tipar.



# Revisão Sobre Inferência de Tipos em Recursão Polimórfica

Rafael Castro

`rafaelcgs10@gmail.com`

Departamento de Ciência da Computação  
Centro de Ciências e Tecnológicas  
Universidade do Estado de Santa Catarina

4 de Dezembro de 2017