Complexidade de Algoritmos

Prof. Diego Buchinger
diego.buchinger@outlook.com
diego.buchinger@udesc.br

Prof. Cristiano Damiani Vasconcellos
cristiano.vasconcellos@udesc.br

Algoritmos Eficientes de Ordenação: Merge Sort, Quick Sort e Heap Sort

Dividir e Conquistar

Desmembrar o problema original em vários subproblemas semelhantes, resolver os subproblemas (executando o mesmo processo recursivamente) e combinar as soluções.

Merge Sort

A principal ideia do Merge Sort é ordenar partições do vetor e então reordenar o conjunto através da operação **merge**, uma mesclagem ordenada de dois vetores [$O(n)$].

O algoritmo de Merge Sort necessita de um espaço adicional de memória para trabalhar [$O(n)$].

2	3	7	9	10
1	4	5	6	8

Merge Sort

Algoritmo:

```
mergeSort( vet, ini, fim ){
    se( ini >= fim ) retorna;
    meio = (ini + fim) / 2;
    mergeSort( vet, ini, meio );
    mergeSort( vet, meio+1, fim);
    merge( vet, ini, meio, fim);
}
```

Aplicar Merge Sort sobre o vetor:

[6 – 5 – 3 – 1 – 8 – 7 – 2 – 4]

Merge Sort

Qual a complexidade de tempo do Merge Sort?

Existe um pior caso? Qual seria?

Qual a complexidade de espaço do Merge Sort?

Quick Sort

A principal ideia do Quick Sort é a ordenação com base em um elemento denominado **pivô**.

Deve-se ordenar o vetor mantendo todos os elementos menores do que o pivô a sua esquerda e todos os elementos maiores do que o pivô a sua direita (**pivoteamento**)

Após este processo realiza-se o mesmo procedimento para o grupo a esquerda do pivô e depois para o grupo a direita do pivô – enquanto o número de elementos for maior do que um.

Quick Sort

Algoritmo:

```
quickSort( vet, ini, fim ){
    se( ini >= fim ) retorna;
    meio = pivoteamento( vet, ini, fim );
    quickSort( vet, ini, meio );
    quickSort( vet, meio+1, fim );
}
```

Aplicar Quick Sort sobre o vetor:

[6 – 5 – 3 – 1 – 8 – 7 – 2 – 4]

Quick Sort

Algoritmo de pivoteamento:

```
lomuto( vet, ini, fim ){
   pivo = ini;
   para( j=ini+1; j<=fim; j++ ){
      se( vet[j] < vet[ini] ){
         pivo++;
         troca( vet[pivo], vet[j] );
      }
   }
   troca( vet[ini], vet[pivo] );
   retorne pivo;
}
```

Quick Sort

Algoritmo de pivoteamento:

```
hoare( vet, ini, fim ){
   pivo = vet[ini];
   i = ini;
   j = fim;
   repita{
      enquanto( vet[i] < pivo ) faça i = i+1;
      enquanto( vet[j] > pivo ) faça j = j-1;
      se( i < j )  troca( vet[i] , vet[j] );
      senão retorne j;
   }
}
```

Quick Sort

Perguntas:

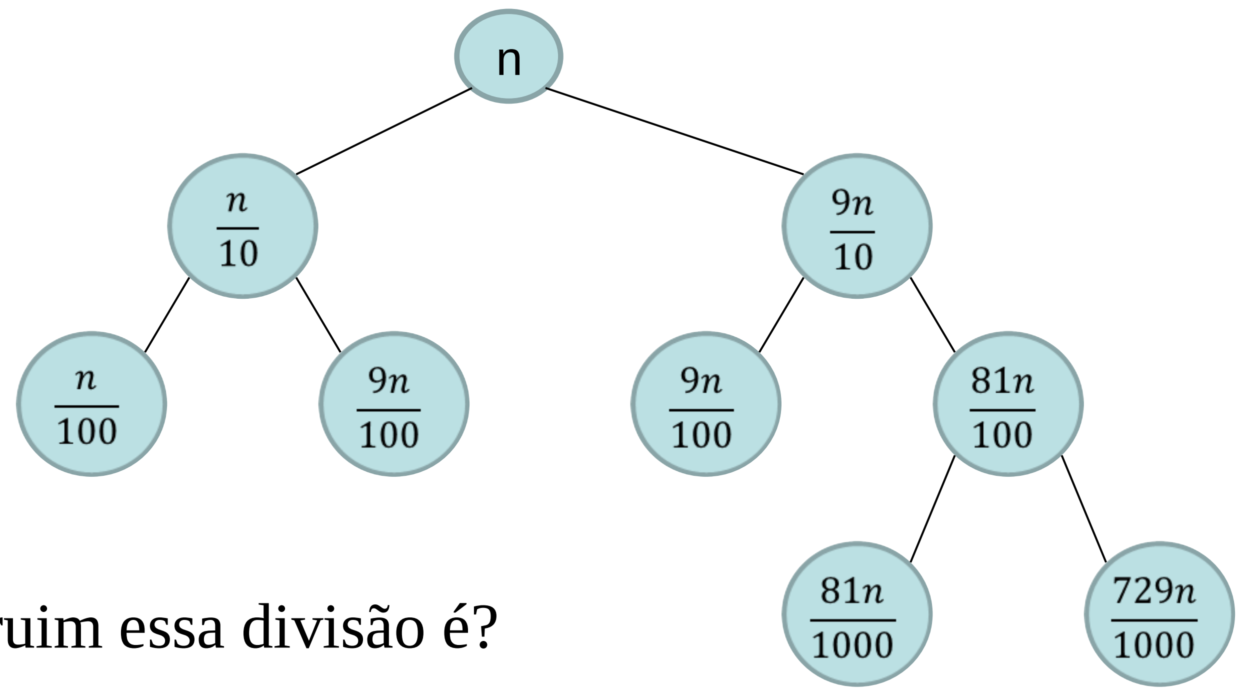
- Qualquer pivô serve?
- Existe um pivô ruim ou bom?

- Como escolher um pivô adequado?

- Qual o melhor caso para o Quick Sort? (complexidade)
- Qual o pior caso para o Quick Sort? (complexidade)
- Qual a complexidade de espaço do Quick Sort?

Quick Sort

Considere o seguinte cenário onde ocorre uma divisão desbalanceada de proporção constante 1:9



Quão ruim essa divisão é?

Quick Sort

Quão ruim essa divisão é?

$$T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + n$$

$$T(1) = 1$$

(resolva a recursão com alguns valores arbitrários
para **n** e compare o crescimento com as funções n^2 e $n \log n$)

Heap Binário

É um arranjo, onde os dados estão organizados de forma que podem ser acessados como se estivessem armazenados em uma árvore binária.

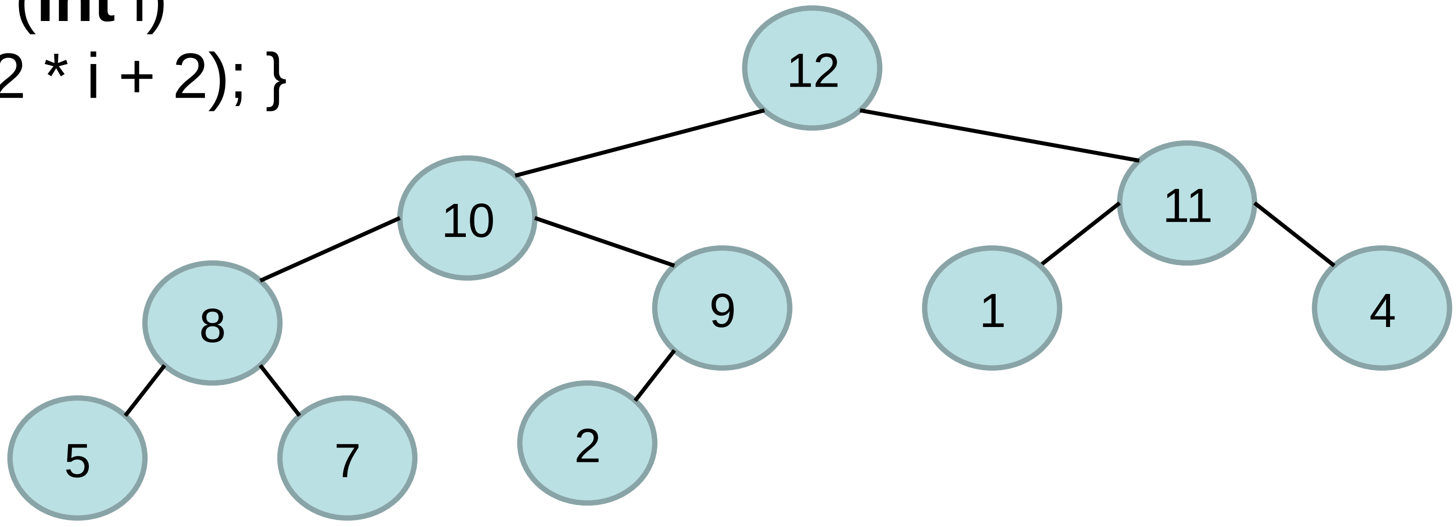
No caso de um ***heap máximo***, os elementos armazenado em uma sub-árvore serão sempre menores que o elemento armazenado na raiz. Essa árvore é completa todos seus níveis, com a possível exceção do nível mais baixo.

Heap Binário

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	10	11	8	9	1	4	5	7	2

int esquerda (**int** i)
{ **return** (2 * i + 1); }

int direita (**int** i)
{ **return** (2 * i + 2); }

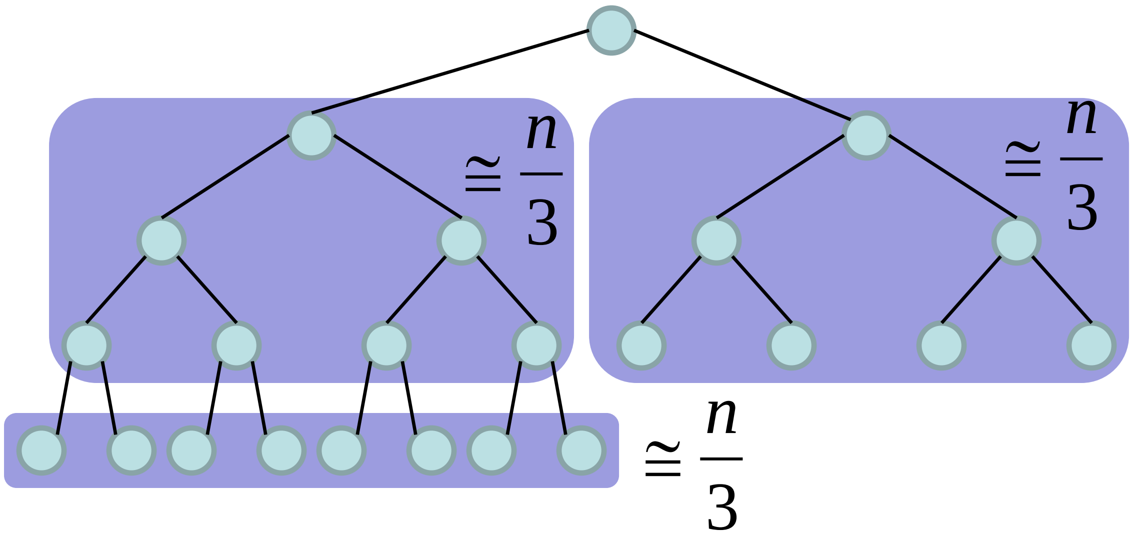


Heap Binário

```
// n = tamanho // i = índice
void heapify (int *a, int n, int i) {
        e = esquerda( i );
        d = direita( i );
        if (e < n  &&  a[e] > a[i])
                maior = e;
        else    maior = i;

        if (d < n  &&  a[d] > a[maior])
                maior = d;
        if ( maior != i ) {
                swap (&a[i], &a[maior]);
                heapify(a, n, maior);
        }
}
```

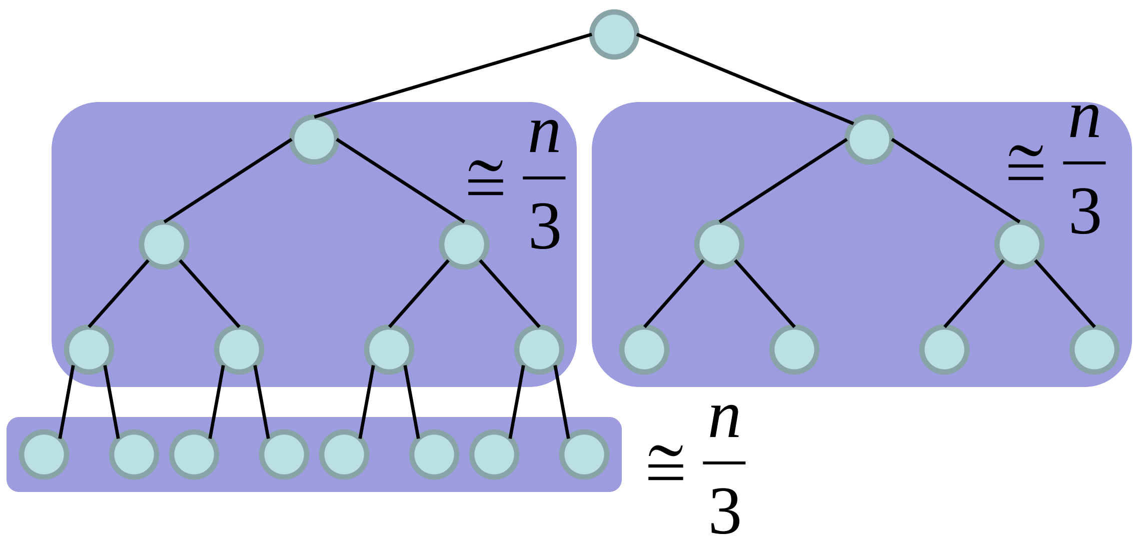
Heap Binário



$$T(n) = T(2n/3) + O(1)$$

$$T(1) = O(1)$$

Heap Binário



Note ainda que existem no máximo: $\left\lceil \frac{n}{2^{h+1}} \right\rceil$ nós de altura h

n=23 => h=0 : 12 (folha)

h=1 : 6

h=2 : 3

h=3 : 2

Obs: altura de baixo p/ cima devido ao heapify que também é de baixo p/ cima

Heap Binário

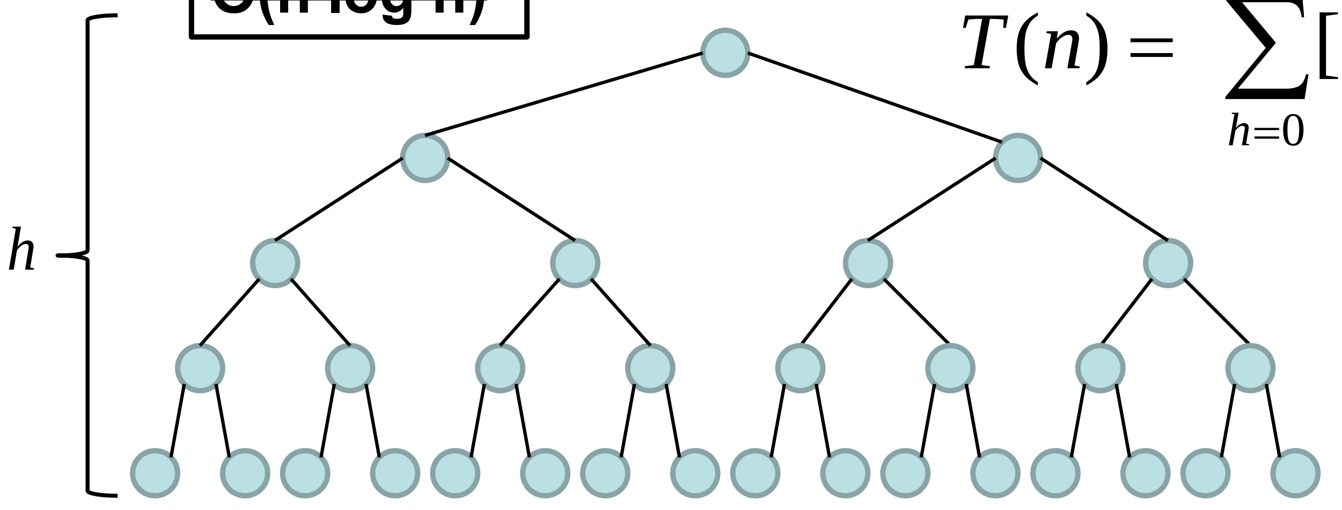
```
void  buildHeap ( int *a, int n ) {
   int i;
   for (i = n/2; i >= 0; i--)      //O(n)
      heapify(a, n, i);            //O(log n)
}
```

O(n log n)

~~Θ(n log n)~~

heapify varia com a altura do nó!

$$T(n) = \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} [(n/2^{h+1})O(h)]$$



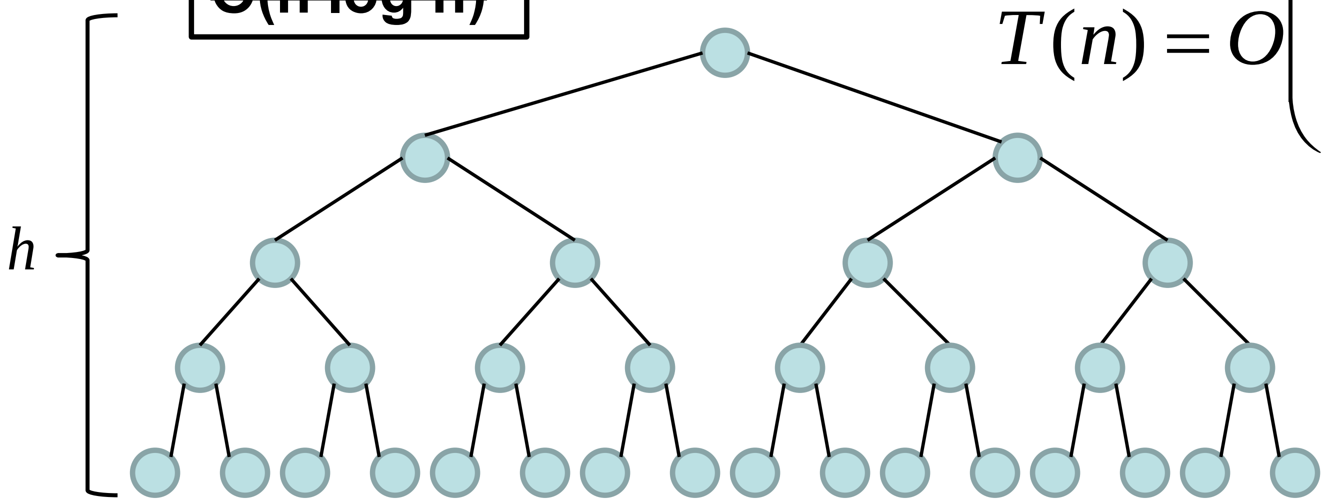
Heap Binário

```c
void  buildHeap ( int *a, int n ) {
   int i;
   for (i = n/2; i >= 0; i--)      //O(n)
      heapify(a, n, i);            //O(log n)
}
```

O(n log n)
~~Θ(n log n)~~

heapify varia com a altura do nó!

$$T(n) = O\left(n \sum_{h=0}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} (h/2^h) \right)$$



Θ(n)

Heap Sort

```
void heapSort( int *a, int n) {
    buildHeap( a , n );                 // O(n)
    for (i=n-1; i>0; i--) {             // O(n)
        swap(&a[0], &a[i]);             // O(1)
        heapify(a, i, 0);               // O(log n)
    }
}
```

O(n log n)

Ordenação em tempo Linear
Counting Sort + Bucket Sort

Ordenações Lineares

Métodos de ordenação por comparação:

$$\Omega(n \log n)$$

Ordenações lineares [$\Omega(n)$] só são possíveis em **determinadas** condições.

Counting Sort

Pressupõe valores inteiros no intervalo 1 a k.

Algoritmo:

- contar o nº de elementos menores que ‘x’;
- usar esta informação para alocar o elemento na sua posição correta no vetor final;

Exemplos:

Caso bom	2	5	3	0	2	3	0	5	3	0

Caso ruim	2	25	13	100	250	300.000	1	5	3	0

Bucket Sort

Pressupõe que a entrada consiste de elementos com distribuição de valores uniforme.

Algoritmo:

- separar os elementos em grupos / baldes;
- ordenar os elementos nos seus baldes;

Exemplos:

Caso bom	20	16	43	0	22	13	33	40	31	7
Caso ruim	2	43	3	5	0	7	8	1	6	4

Trabalho 1

Escreva os algoritmo **Bubble Sort**, **Insert Sort**, **Merge Sort, Quick Sort**, **Heap Sort, Counting Sort** e **Bucket Sort**. O algoritmo Quick Sort deve ser implementado de duas maneiras: (1) usando o primeiro elemento como pivô, (2) selecionando um elemento qualquer como pivô.

Teste os algoritmos com vetores de 25.000, 50.000, 75.000, 100.000 e 1.000.000 números entre 0 e o tamanho do vetor: (1) em ordem crescente, (2) em ordem decrescente, (3) em ordem aleatória e (4) em ordem aleatória mas com um elemento 100.000.000 (em qualquer posição).

Escreva um relatório comparativo apresentando os tempos de execuções de cada algoritmo para cada tipo de entrada. Não é necessário apresentar os algoritmos, apenas um comparativo do tempo de execução em forma de tabela ou gráfico.

Referências

Algoritmos. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Cliford Stein. Campus.

Algorithms. Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou, Umesh Vazirani. McGraw Hill.

Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition).
Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik. Addison Wesley.

M. R. Garey and D. S. Johnson. 1978. *"Strong" NP-Completeness Results: Motivation, Examples, and Implications*. J. ACM 25, 3 (July 1978)