UDESC

Complexidade de Algoritmos

Prof. Diego Buchinger
diego.buchinger@outlook.com
diego.buchinger@udesc.br

Prof. Cristiano Damiani Vasconcellos
cristiano.vasconcellos@udesc.br

Algoritmos de Grafos – Complexidade com múltiplas variáveis

Grafos

Grafos possuem dois elementos principais:

- Vértices – Vertex (V)
- Arestas – Edges (E)

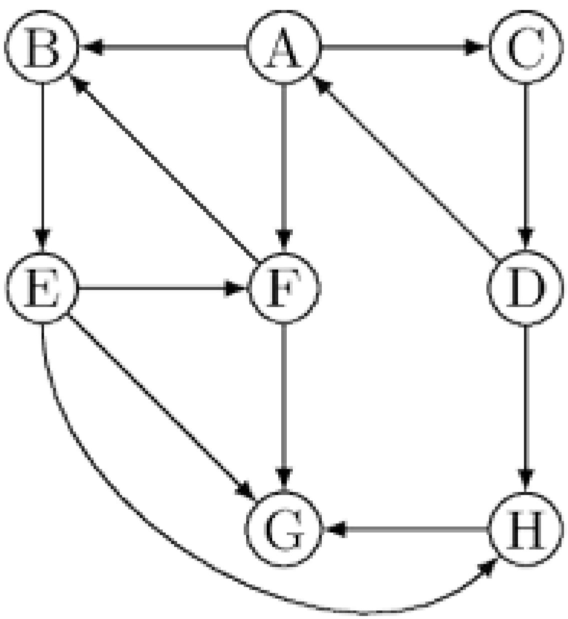
Grafos costumam ser representados de duas formas, que utilizam uma quantidade diferente de **espaço**:

- Matriz de Adjacência $\Theta(V^2)$
- Lista de Adjacência $\Theta(V+E)$

* Considere apenas o espaço criado pelo algoritmo

Depth First-Search
(*Busca em Profundidade*)

O **algoritmo de Busca em Profundidade** realiza uma busca ou travessia em um grafo. É utilizado para verificar quais vértices são acessíveis iniciando um caminho a partir de um vértice específico



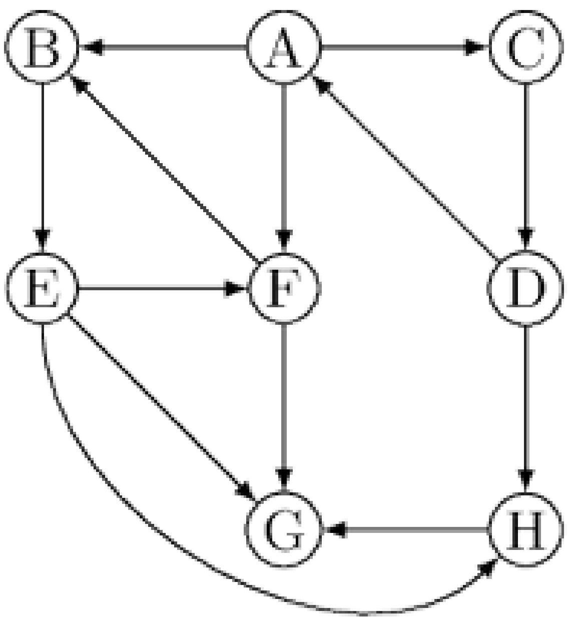
Quais vértices são acessíveis partindo de A?

Quais vértices são acessíveis partindo de E?

Depth First-Search

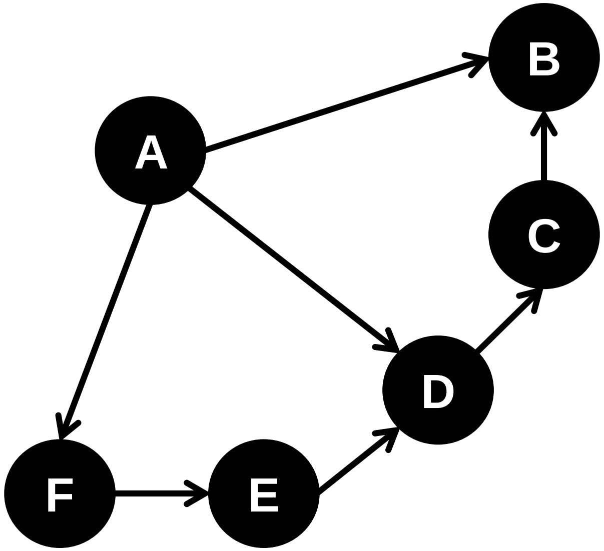
(*Busca em Profundidade*)

O **algoritmo de Busca em Profundidade** realiza uma busca ou travessia em um grafo. É utilizado para verificar quais vértices são acessíveis iniciando um caminho a partir de um vértice específico




```
// G = grafo, s = vértice inicial,
// v = vetor de visitação de vértices
DFS( G, s, v )
  v[s] = true
  para cada u ϵ G.adj[s]
    if( v[u] == false )
      DFS( G, u, v )
```

Depth First-Search
(*Busca em Profundidade*)



<u>Complexidade de tempo</u>:

Matriz

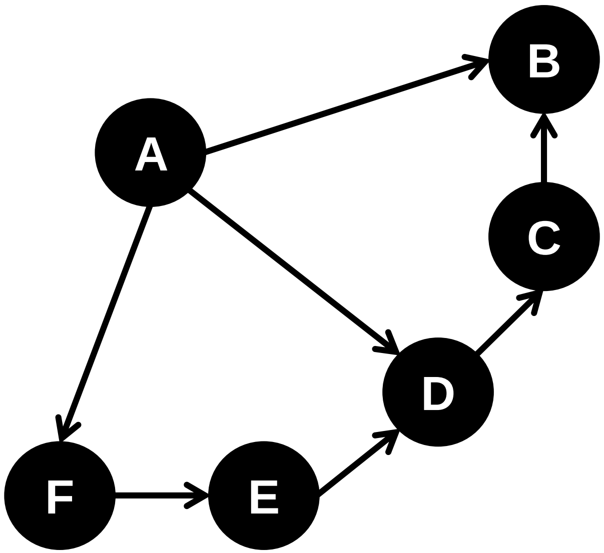
Melhor caso:

Pior caso:

<u>Complexidade de espaço</u>:

Depth First-Search

(*Busca em Profundidade*)



Complexidade de tempo:

Matriz

Melhor caso: Ω **(V)**

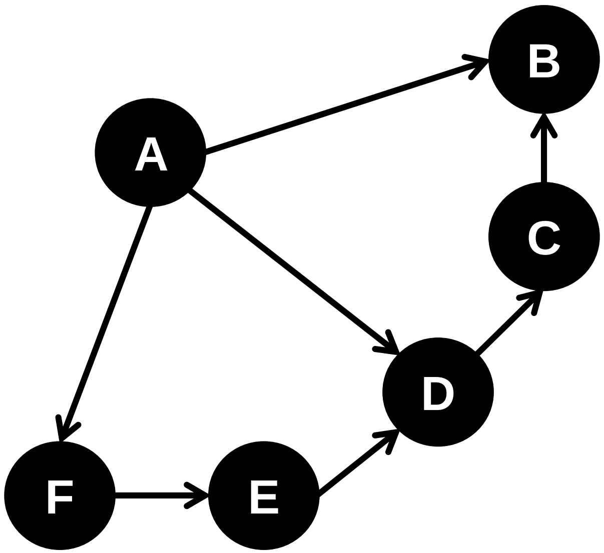
Nenhum nó está acessível a partir de um determinado nó

Pior caso: **O (V^2)**

Todos os outros nós estão acessíveis a partir de um nó

Complexidade de espaço: precisamos manter o vetor de nós visitados Θ **(V)**

Depth First-Search
(*Busca em Profundidade*)



<u>Complexidade de tempo</u>:

Lista

Melhor caso: Ω (V)

Necessidade de inicializar vértices como não visitados

Pior caso: O (V + E)

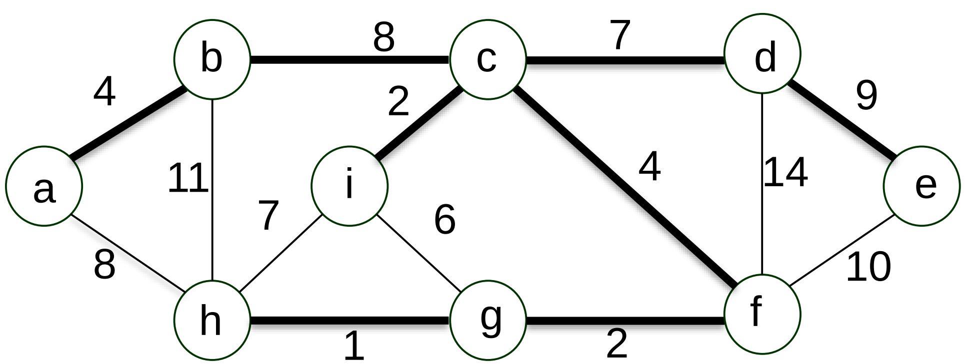
Todos os outros nós estão acessíveis a partir de um nó

<u>Complexidade de espaço</u>: precisamos manter o vetor de nós visitados **Θ (V)**

Prim

(*Árvore Geradora Mínima*)

Uma **árvore geradora** para um grafo conexo é uma árvore que conecta todos os vértices do grafo e que o conjunto de arestas é um subconjunto das arestas desse grafo. A árvore geradora é mínima se o somatório dos custos associados cada arestas for o menor possível.

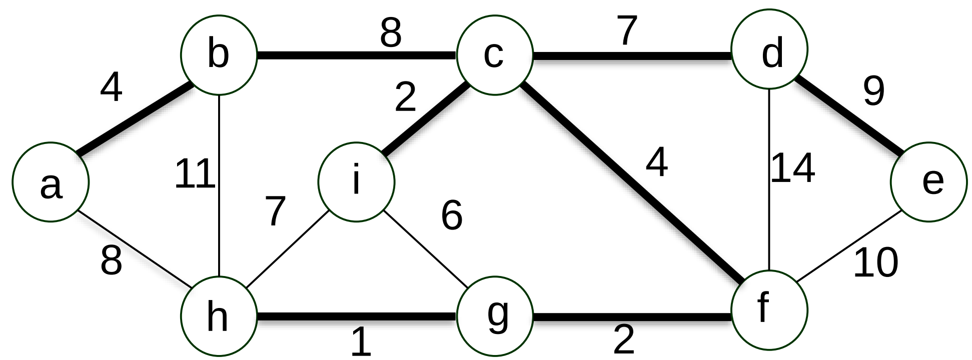


Prim

(Árvore Geradora Mínima)

```
// G = grafo, s = vértice inicial, w = vetor de custo
MST-PRIM( G, s, w )
 para cada u ∊ G.V
   w[u] = ∞
   u.pai = null
 w[s] = 0
 q.add( {0,s} )

 enquanto q ≠ ∅                 // |V| vezes
   u = extrai-minimo( q )      // Qual a estrutura usada??
   para cada z ∊ G.adj[u]      // Qual a estrutura usada??
     se z.custo < w[z.dest]
       q.add( {z.custo, z.dest} )  // Qual a estrutura??
       w[z.dest] = z.custo
       z.dest.pai = u
```



Prim

(Árvore Geradora Mínima)

```
// G = grafo, s = vértice inicial, w = vetor de custo
MST-PRIM( G, s, w )
 para cada u ∈ G.V
   w[u] = ∞
   u.pai = null
 w[s] = 0
 q.add( {0,s} )

 enquanto q ≠ Ø                   // |V| vezes
   u = extrai-minimo( q )         // |V| verificações
   para cada z ∈ G.adj[u]         // |V| vezes
     se z.custo < w[z.dest]
       q.add( {z.custo, z.dest} )  // O(1)
       w[z.dest] = z.custo
       z.dest.pai = u
```

Usando G=>Matriz e q=>Lista

<u>Tempo</u>:

$O(|V^2| + |V^2|)$

$O(|V^2|)$

Prim

(*Árvore Geradora Mínima*)

```
// G = grafo, s = vértice inicial, w = vetor de custo
MST-PRIM( G, s, w )
 para cada u ∈ G.V
   w[u] = ∞
   u.pai = null
 w[s] = 0
 q.add( {0,s} )

 enquanto q ≠ ∅                    // * { O(V) }
   u = extrai-minimo( q )          // * => O(V²) verificações
   para cada z ∈ G.adj[u]          // * => O(E)
     se z.custo < w[z.dest]
       q.add( {z.custo, z.dest} )  // O(1)
       w[z.dest] = z.custo
       z.dest.pai = u
```

Usando G=>Lista e q=>Lista

Tempo:

$O(|V^2| + |E|)$

* lembrando que $E = O(V^2)$

Prim

(Árvore Geradora Mínima)

```
// G = grafo, s = vértice inicial, w = vetor de custo
MST-PRIM( G, s, w )
 para cada u ∊ G.V
   w[u] = ∞
   u.pai = null
 w[s] = 0
 q.add( {0,s} )

 enquanto q ≠ ∅                    // * { O(V) }
   u = extrai-minimo( q )          // * => O( V log V )
   para cada z ∊ G.adj[u]          // * => O( E )
     se z.custo < w[z.dest]
       q.add( {z.custo, z.dest} )  // (log V) [Se não
       w[z.dest] = z.custo               manter duplicatas]
       z.dest.pai = u
```

Usando G=>Lista e q=>Árvore

Tempo:

O(|V log V + E log V|)

O((V+E) log V)

Prim

(Árvore Geradora Mínima)

```
// G = grafo, s = vértice inicial, w = vetor de custo
MST-PRIM( G, s, w )
 para cada u ∊ G.V
   w[u] = ∞
   u.pai = null
 w[s] = 0
 q.add( {0,s} )

 enquanto q ≠ ∅                // * { O(V) }
   u = extrai-minimo( q )      // * => O( V log V )
   para cada z ∊ G.adj[u]      // * => O( E )
     se z.custo < w[z.dest]
       q.add( {z.custo, z.dest} )  // (1)
       w[z.dest] = z.custo
       z.dest.pai = u
```

Usando G=>Lista e q=>Fib. Heap

Tempo:
$O(E + V \log V)$

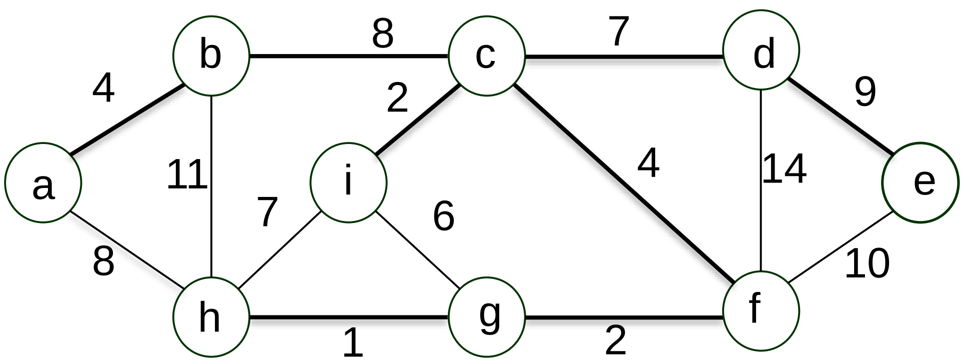
Dijkstra

(*menor caminho entre dois nós*)

Dado um grafo ponderado – sem arestas com peso negativo – e dois nós, o algoritmo de Dijkstra encontra o menor caminho entre estes dois nós.

Muito semelhante ao algoritmo de Prim

Menor Caminho entre b | g



Dijkstra
(*menor caminho entre dois nós*)

```
// G = grafo, s = vértice inicial, w = vetor de custo
DIJKSTRA( G, s, w )
 para cada u ∊ G.V
   w[u] = ∞
   u.pai = null
 w[s] = 0
 q.add( {0,s} )

 enquanto q ≠ ∅                    // * { O(V) }
   u = extrai-minimo( q )          // * => O( V log V )
   para cada z ∊ G.adj[u]          // * => O( E )
      se w[u] + z.custo < w[z.dest]
         q.add( {w[u] + z.custo, z.dest} )  // (1)
         w[z.dest] = w[u] + z.custo
         z.dest.pai = u
```

Usando G=>Lista e q=>Fib. Heap

Tempo:

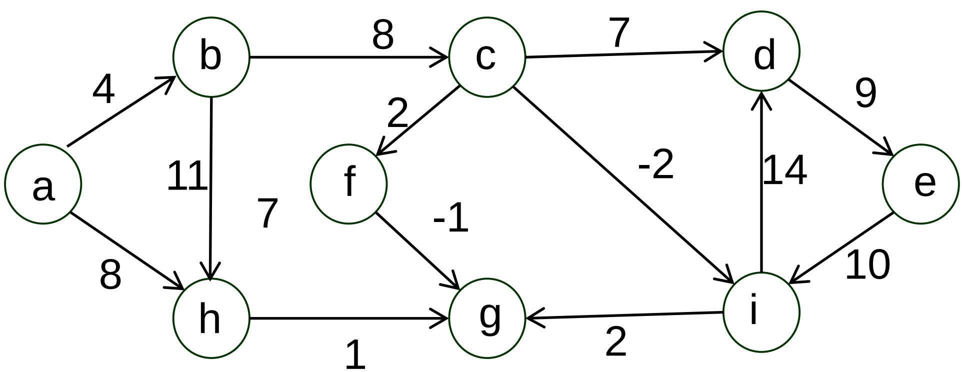
O(E + V log V)

Bellman Ford

(*menor caminho entre dois nós*)

Dado um grafo ponderado – possivelmente com arestas de peso negativo, mas sem ciclo – e dois nós, o algoritmo de Belmann Ford encontra o menor caminho entre os dois nós.

Menor Caminho entre b | g



Bellman Ford

(menor caminho entre dois nós)

```
// G = grafo, s = vértice inicial, w = vetor de custo
BELLMAN( G, s, w )
  para cada u ∊ G.V
    w[u] = ∞
    u.pai = null
  w[s] = 0;

  para i de 0 a size(vertices):
    para cada u ∊ G.V:
        para cada a ∊ G.adj[u]:
           se ( w[u] + a.custo < w[a.dest] )
              w[a.dest] = w[u] + a.custo
              a.dest.pai = u
```

Repete E vezes

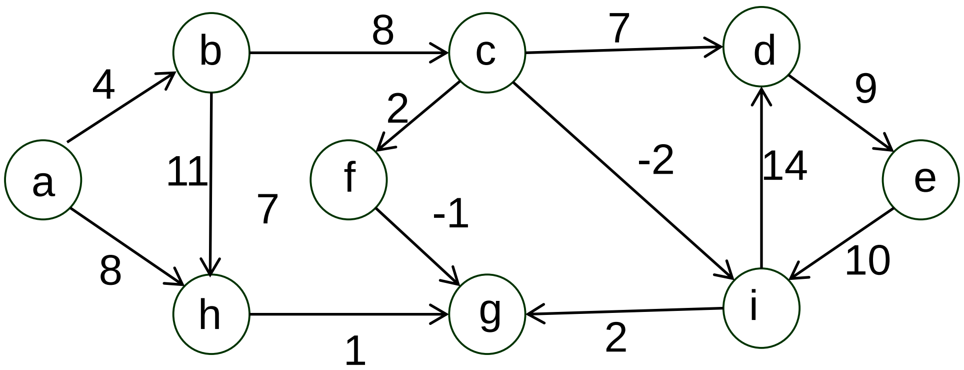
Usando G=>Lista

Tempo:
O(V + V*E)
O(VE)

Floyd Warshall

(*menor caminho entre todos os nós*)

Dado um grafo ponderado – possivelmente com arestas de peso negativo, mas sem ciclo – o algoritmo de Floyd Warshall encontra o menor caminho entre todos os nós (de todos para todos).



Floyd Warshall

(menor caminho entre todos os nós)

```
// G = grafo
FLOYD( G )
  dist[G.v][G.v]
  para cada u ∈ G.V
    dist[u][u] = 0
  para cada z(u,v) ∈ G.E
    dist[u][v] = z.custo

  para k de 0 a G.v:
    para i de 0 a G.v:
      para j de 0 a G.v:
        se ( dist[i][j] > dist[i][k] + dist[k][j] )
          dist[i][j] = dist[i][k] + dist[k][j]
```

Usando G=>Lista / Matriz

Tempo:
$\Theta(V^3)$

Uso de programação dinâmica