UDESC

Complexidade de Algoritmos

Prof. Diego Buchinger
diego.buchinger@outlook.com
diego.buchinger@udesc.br

Prof. Cristiano Damiani Vasconcellos
cristiano.vasconcellos@udesc.br

Estudo da Tratabilidade de Problemas Computacionais

Problemas tratáveis e intratáveis

Problemas tratáveis: resolvidos por algoritmos deterministas que executam em tempo polinomial.

Problemas intratáveis: não se conhece algoritmos deterministas que os resolvam em tempo polinomial.

$$1 < \log\log n < \log n < n^{\varepsilon} < n^{c} < n^{\log n} < c^{n}$$

Problemas tratáveis e intratáveis

Problemas tratáveis: resolvidos por algoritmos deterministas que executam em tempo polinomial.

Problemas intratáveis: não se conhece algoritmos deterministas que os resolvam em tempo polinomial.

$$\boxed{1 < \log\log n < \log n < n^{\varepsilon} < n^{c}} < \boxed{n^{\log n} < c^{n}}$$

Categorias de Problemas

Problemas de Otimização: Cada solução possível tem um valor associado e desejamos encontrar a solução com melhor valor.

Problemas de Decisão: Problemas que tem resposta sim ou não.

Problemas de Decisão são possivelmente “mais fáceis” do que problemas de Otimização, mas com certeza “não mais difíceis”!

Exemplo:

- Qual é o menor caminho entre os vértices *a* e *b* de um grafo?
- Existe um caminho de no máximo k arestas entre *a* e *b*?

Algoritmos Não Deterministas

Capaz de escolher uma entre várias alternativas possíveis a cada passo. A alternativa escolhida será sempre a alternativa que leva a conclusão esperada, caso essa alternativa exista.

```
int pesq(Estr *v, int n, int ch){
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
        if (v[i].chave == ch)
            return i;
    return -1;
}
```

Autômato não determinista

```
int pesq(Estr *v, int n, int ch){
    int i;
    i = magicaND(0, n - 1);
    if (v[i].chave == ch)
        return i;
    return -1;
}
```

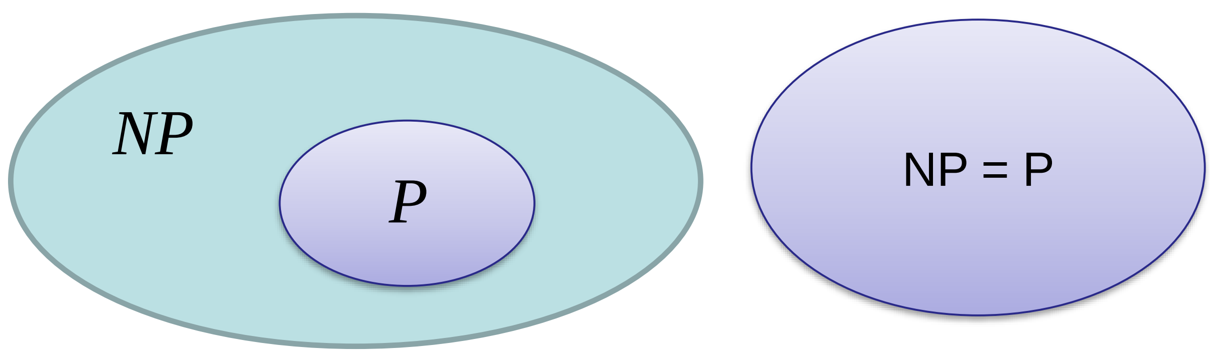
Classes de Problemas *P* e *NP*

Classe de Problemas *P*: Problemas que podem ser resolvido (por algoritmos deterministas) em tempo polinomial.

Classe de Problemas *NP*: Problemas que podem ser resolvidos por algoritmos não deterministas em tempo polinomial (*polinomialmente verificável* ou *certificado*). Ou problemas que a solução pode ser verificada em tempo polinomial.

Pergunta do milhão: P=NP ou P ≠NP?

Possíveis relações entre as classes:



Classes de Problemas *P* e *NP*

O status de muitos problemas NP é desconhecido:

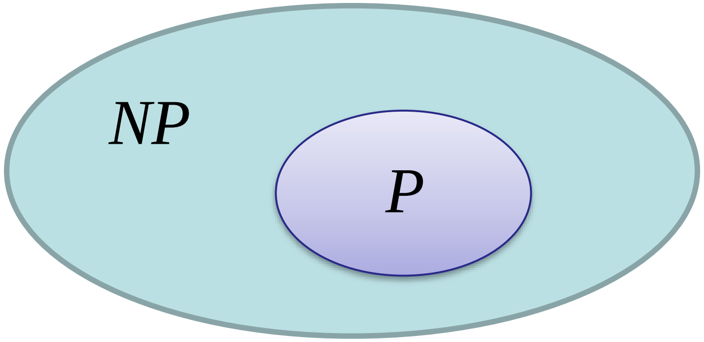
- existe um algoritmo determinista polinomial para o problema?

Investigar a complexidade relativa dos problemas da classe NP:

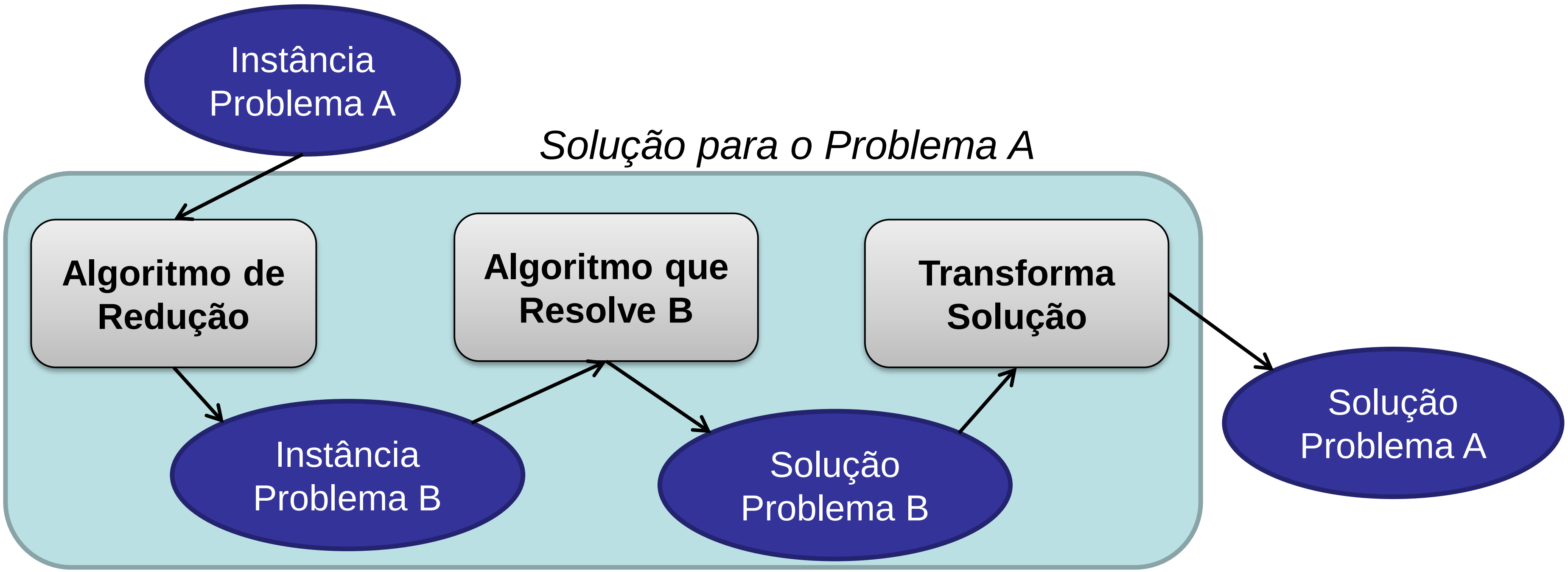
- Problema A é mais fácil ou mais difícil do que B?

Recorremos à ideia de *redução polinomial*:

- Mostra que A <u>não é mais difícil que</u> B ou que A é <u>polinomialmente redutível</u> ao problema B.



Redução de Problemas



$A \leq_p B$

Se o "**Algoritmo de Redução**", o "**Algoritmo que Resolve B**" e a "**Transformação de solução**" forem polinomiais, então podemos concluir algo sobre a solução do Problema A?

Redução de Problemas

Conclusões provenientes da redução:

Se Y é polinomialmente redutível a X então Y não é mais difícil do que X.

$$Y \leq_p X$$

Cenário 1: sabe-se que X está na classe P.
Logo, Y também deve estar na classe P.

Cenário 2: não se sabe se X está ou não em P,
mas sabe-se que Y não está em P.
Como Y não é mais difícil que X, então X deve estar fora de P.

Classes de Problemas *NP-Hard*

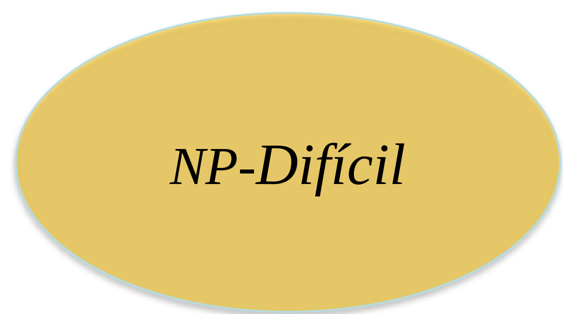
Se podemos determinar que um problema não é mais difícil do que outro, podemos separar os problemas mais difíceis dos mais fáceis em NP!

Assim surge a classe dos problemas mais difíceis

A classe de problemas **NP-*Hard*** ou **NP-Difícil**!

“Um problema A é NP-Difícil se todos os problemas em NP não são mais difíceis do que A”

“Um problema NP-Difícil é tão difícil quanto qualquer problema em NP”

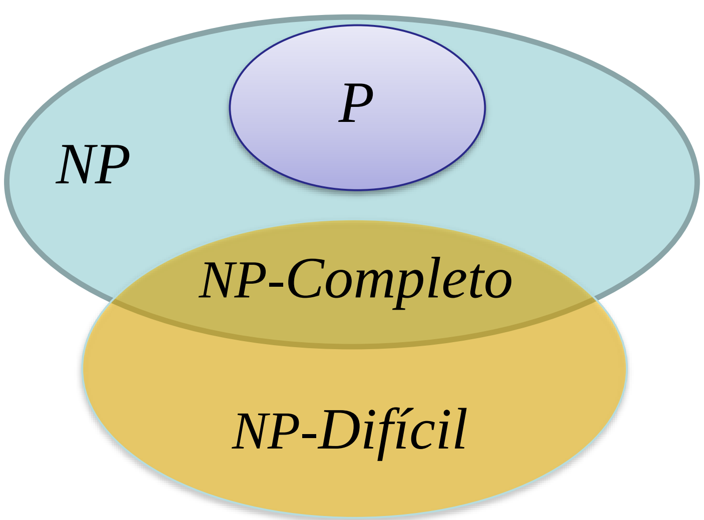


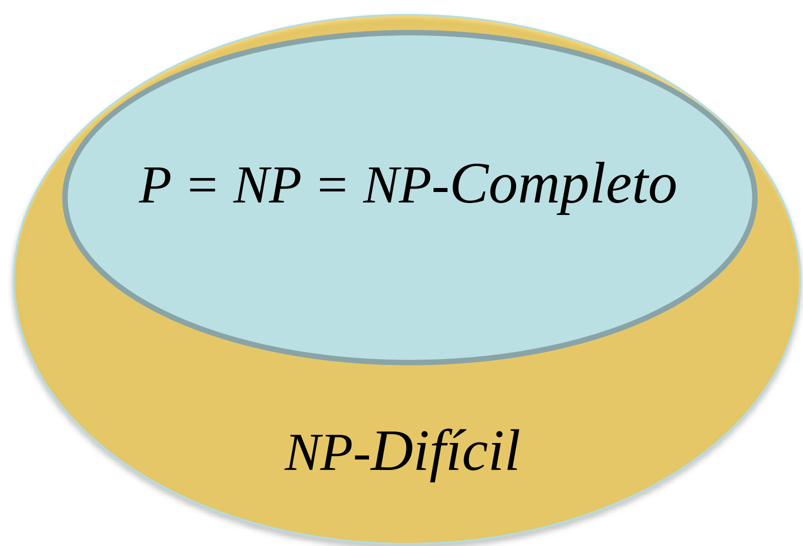
Classes de Problemas *NP-Hard*

Na classe NP-Difícil podemos encontrar problemas:

- Indecidíveis: ex. problema da parada e equações diofantinas;
- Decidíveis: podem ser resolvidos por um algoritmo não determinista – um problema NP-Difícil que está em NP é dito **NP-Completo**.

Duas possíveis relações considerando P vs. NP





Redução de Problemas

Relação entre Redução e Problemas NP-Completos:

Uma vez conhecido um problema NP-Completo, podemos usar *reduções polinomiais* para provar que algum problema X também é NP-Completo.

"se *Y* é um problema NP-completo e *Y* não é mais difícil que um problema *X* (redução) então *X* também é NP-completo"

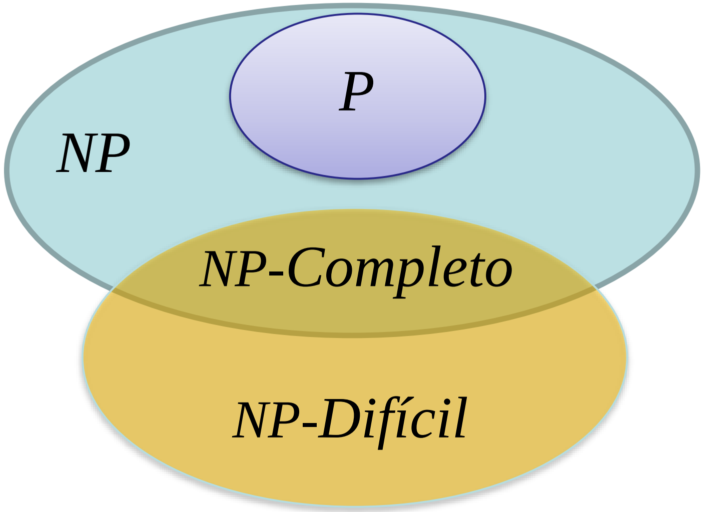
$$Y \leq_p X$$

Classes de Problemas *NP-Completo*

Se um problema NP-Completo pode ser resolvido em tempo polinomial, então todo problema NP-Completo pode ser resolvido em tempo polinomial e, portanto, P = NP

Acredita-se que a relação correta seja P ≠ NP

Por quê?



NP-Completo

Um problema X é ***NP-Completo*** se:

1. O problema deve ser NP: $X \in NP$

   a) *Conseguir um algoritmo não determinista que resolva o problema em tempo polinomial*

   b) *Conseguir um algoritmo determinista que verifica em tempo polinomial se uma resposta é verdadeira ou não (**certificado**)*

2. Fazer a redução de um problema NP-Completo (Y) conhecido para o problema X: $Y \leq_p X$ para todo $Y \in NP$

UDESC

Exercícios

Verifique se as afirmações abaixo são **verdadeiras** ou **falsas**, justificando as **falsas**:

a) Se um problema NP for resolvido em tempo polinomial então P = NP.
b) Se um problema NP-Difícil (ou NP-Hard) for resolvido em tempo polinomial então P = NP.
c) Se P = NP então todos os problemas considerados NP-Difícil (ou NP-Hard) podem ser resolvidos em tempo polinomial.
d) Podemos afirmar que os problemas NP-Completo possuem apenas soluções em tempo exponencial ou maior.
e) Considerando um problema P1 que tem uma solução em tempo polinomial conhecida, e um problema P2 que é NP-Completo, apresentando uma redução que pode ser executada em tempo polinomial de P1 a P2 ($P1 \leq_p P2$) estamos provando que P = NP.
f) Se $P \cap \text{NP-Completo} \neq \emptyset$ então P = NP.