UDESC

Complexidade de Algoritmos

Prof. Diego Buchinger
diego.buchinger@outlook.com
diego.buchinger@udesc.br

Prof. Cristiano Damiani Vasconcellos
cristiano.vasconcellos@udesc.br

UDESC

Análise de Complexidade de Tempo de Algoritmos Recursivos

UDESC

Algoritmos Recursivos

Geralmente a análise de complexidade de algoritmos recursivos é um pouco mais complexa pois é preciso entender bem a recursividade do algoritmo.

- Quantas vezes um algoritmo chama a si mesmo?
- Existe um pior caso? Quantas chamadas recursivas são feitas?
- Devemos considerar o tempo gasto na chamada de função? E o espaço utilizado na memória?

UDESC

Exemplo (Fatorial)

```
int fatorial( int n ){
   if (n == 0)
       return 1;
   return n * fatorial( n-1 );
}
```

UDESC

Exemplo (Fatorial)

```
int fatorial( int n ){
   if (n == 0)
       return 1;
   return n * fatorial( n-1 );
}
```

Relação de Recorrência:

$T(n) = T(n\text{-}1) + O(1)$

$T(0) = O(1)$

UDESC

Exemplo (Pesquisa Binária)

```
int pesqbin(int *v, int p, int r, int e){
   int q;
   if ( r < p )
       return -1;
   q = (p + r)/2;
   if (e == v[q])
       return q;
   if (e < v[q])
       return pesqbin(v, p, q-1, e);
   return pesqbin(v, q+1, r, e);
}
```

* *Lembrete: o vetor deve estar ordenado!!*

Exemplo (Pesquisa Binária)

```
int pesqbin(int *v, int p, int r, int e){
   int q;
   if ( r < p )
        return -1;
   q = (p + r)/2;
   if (e == v[q])
        return q;
   if (e < v[q])
        return pesqbin(v, p, q-1, e);
   return pesqbin(v, q+1, r, e);
}
```

Relação de Recorrência:

$T(n) = T(n/2) + O(1)$

$T(1) = O(1)$

A relação abaixo descreve de forma mais precisa a execução, mas a simplificação acima não altera a complexidade:

$T(n) = T(n/2 - 1) + O(1)$

$T(1) = O(1)$

UDESC

Relação de Recorrência

$$
\begin{aligned}
T(n) &= T(n/2) + 1 \\
T(n/2) &= T(n/2^2) + 1 \\
T(n/2^2) &= T(n/2^3) + 1 \\
\ldots &\quad\ldots \\
T(n/2^{h-1}) &= T(n/2^h) + 1
\end{aligned}
$$

Relação de Recorrência:

$T(n) = T(n/2) + O(1)$

$T(1) = O(1)$

Relação de Recorrência

$T(n) = T(n/2) + 1$

$T(n/2) = T(n/2^2) + 1$

$T(n/2^2) = T(n/2^3) + 1$

...

$T(n/2^{h-1}) = T(n/2^h) + 1$

Relação de Recorrência:

$T(n) = T(n/2) + O(1)$

$T(1) = O(1)$

$$T(n) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{h \text{ vezes}} + T(1)$$

h vezes => ops... Mas quanto vale h??

UDESC

Relação de Recorrência

$T(n) = T(n/2) + 1$

$T(n/2) = T(n/2^2) + 1$

$T(n/2^2) = T(n/2^3) + 1$

...

$T(n/2^{h-1}) = T(n/2^h) + 1$

$$\frac{n}{2^h} = 1$$

$$n = 2^h$$

$$h = \log_2 n$$

$$T(n) = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{h \text{ vezes, ou seja, } \log_2 n \text{ vezes}} + T(1)$$

O(log n)

Mudança de base:

$$\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}$$

UDESC

Exemplo (Pesquisa Binária)

```
int pesqbin2 (int *v, int n, int e) {
    int p, q, r;

    p = 0; r = n-1;
    do {
        q = (p + r) / 2;
        if (e == v[q])
            return q;
        if (e < v[q])
            r = q -1;
        else
            p = q + 1;
    } while (p<= r);
    return -1;
}
```

UDESC

Recursividade de cauda

Uma função apresenta recursividade de cauda se nenhuma operação é executada após o retorno da chamada recursiva, exceto retornar seu valor.

Em geral, compiladores, que executam otimizações de código, substituem as funções que apresentam recursividade de cauda por uma versão não recursiva dessa função.

UDESC

Exemplo (Fibonacci)

```
/* Implementação ruim */
int fib( int n ){
    if( n == 0 || n == 1 )
        return 1;
    return fib( n-1 ) + fib( n-2 );
}
```

Exemplo (Fibonacci)

```
/* Implementação ruim */
int fib( int n ){
    if( n == 0 || n == 1 )
        return 1;
    return fib( n-1 ) + fib( n-2 );
}
```

Relação de Recorrência:

$T(n) = T(n\text{-}1) + T(n\text{-}2) + O(1)$

$T(1) = O(1)$

$T(0) = O(1)$

UDESC

Exemplo (Fibonacci)

```
/* Implementação ruim */
int fib( int n ){
    if( n == 0 || n == 1 )
        return 1;
    return fib( n-1 ) + fib( n-2 );
}
```

Relação de Recorrência simplificada:

$T(n) = 2T(n\text{-}1) + O(1)$

$T(0) = O(1)$

Relação de Recorrência

$T(n) = 2T(n\text{-}1) + O(1)$

$2T(n\text{-}1) = 2^2T(n\text{-}2) + 2O(1)$

$2^2T(n\text{-}2) = 2^3T(n\text{-}3) + 2^2O(1)$

... ...

$2^{n-1}T(1) = 2^nT(n\text{-}n) + 2^{n-1}O(1)$

$2^nT(0) = 2^n\,O(1)$

Relação de Recorrência:

$T(n) = 2T(n\text{-}1) + O(1)$

$T(0) = O(1)$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

$$\boldsymbol{O(2^n)}$$

Exemplo (Fibonacci)

Ao usar a relação de recorrência correta chegaríamos em uma resposta parecida:

Relação de Recorrência:

T(*n*) = T(*n*-1) + T(n-2) + *O*(1)

T(1) = *O*(1)

T(0) = *O*(1)

$$O(\varphi^n)$$

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\varphi \cong 1{,}6180$$

Propriedades dos Somatórios

$$\sum_{i=0}^{n} ca_i = c\sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{(Distributiva)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i \quad \text{(Associativa)}$$

$$\sum_{i=n}^{0} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i \quad \text{(Comutativa)}$$

UDESC

Propriedades dos Somatórios

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$$\sum_{i=1}^{\log n} i = n \log n$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

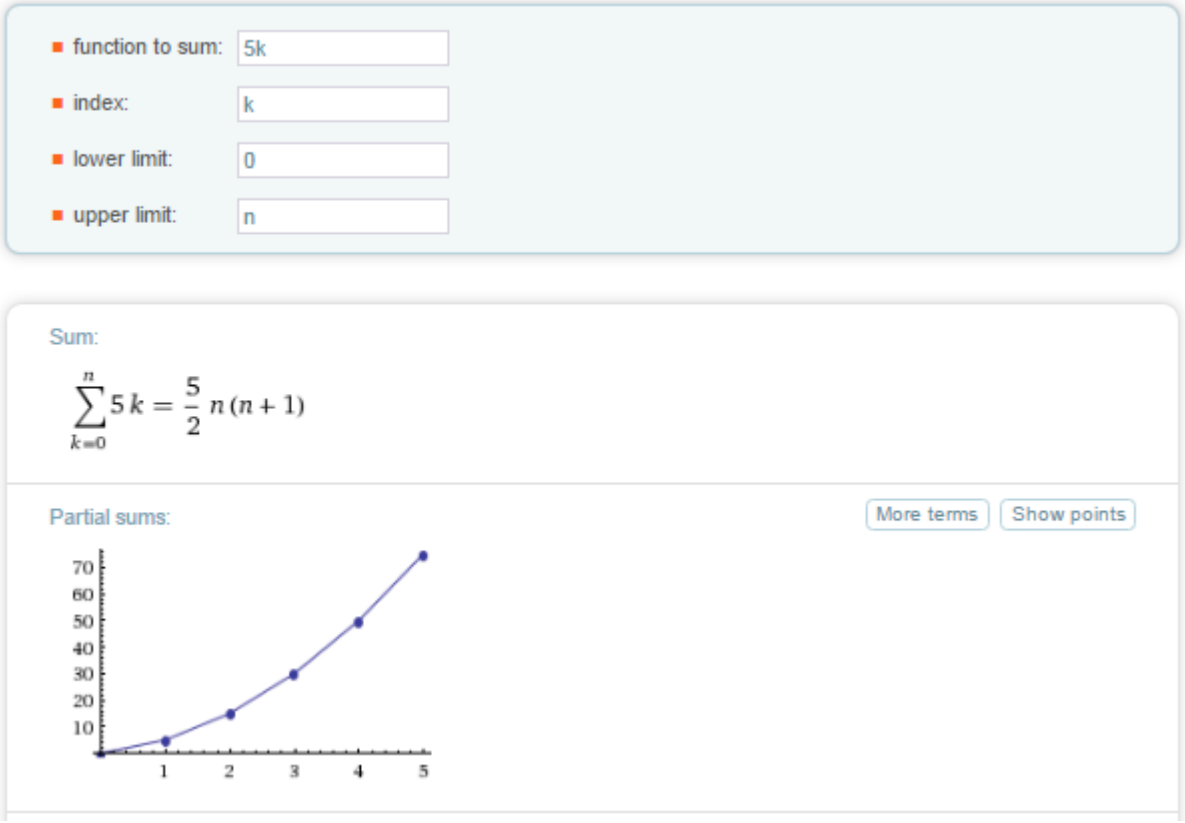
$$\sum_{i=0}^{\log n} 2^i = 2n - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log i = \log(n!)$$

$$\frac{1}{2} n \log n \leq \log(n!) \leq n \log n \quad \therefore \quad \log(n!) = \Theta(n \log n)$$

Somatórios

Existem algumas ferramentas que calculam as fórmulas dos somatórios e até mesmo geram gráficos.



Ex: https://www.wolframalpha.com/input/?i=sum

Propriedades das Potências

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{nm}$$

Propriedades dos Logaritmos

$$a^b = c \Leftrightarrow \log_a c = b$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_b a^c = c \log_b a$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

UDESC

Atividade

Escreva duas versões do algoritmo de fibonacci: a versão “ruim” apresentada e uma versão “boa” usando vetores. Faça uma comparação de tempo de execução com valores entre 25 e 60.

Qual a complexidade da versão “boa” do algoritmo?

UDESC

Atividade

Elabore um algoritmo recursivo para calcular a raiz quadrada de um número real (positivo) qualquer. Após implementar o algoritmo escreva a relação de recorrência e a respectiva complexidade do algoritmo para o pior caso.

*Lembrete: comparação de números reais através de aproximação => |x - 3.2| <= 0.00001

*OBS: $r = \sqrt{n}$ quando n >= 1, $1 \leq r \leq n$

quando n < 1, $n \leq r \leq 1$

UDESC

Referências

Algoritmos. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Cliford Stein. Campus.

Algorithms. Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou, Umesh Vazirani. McGraw Hill.

Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition). Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik. Addison Wesley.

M. R. Garey and D. S. Johnson. 1978. *"Strong" NP-Completeness Results: Motivation, Examples, and Implications.* J. ACM 25, 3 (July 1978)