Lógica e Álgebra de Boole

Introdução à Ciência da Computação
ICC0001

Prof. Diego Buchinger

Introdução

- Muitos problemas podem ser resolvidos através de lógica:
  - Problema do menor número de jogadas do cavalo
  - Teste de Einstein
  - Inclusive operações matemáticas

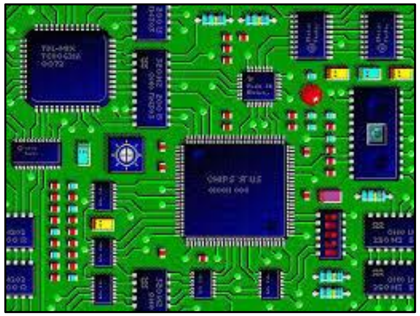
- O que é Álgebra de Boole e o que ela tem a ver com isso?

Introdução

George Boole

- Álgebra Booleana ou álgebra de Boole (1854)
  - Homenagem ao matemático inglês George Boole
  - Realizar uma análise matemática da lógica
  - Baseada nos sistemas binários

  - (1938) Percebeu-se que os estudos de matemática lógica poderiam ser aplicados a circuitos lógicos:
    - Circuitos podem executar operações booleanas
    - Equações booleanas podem representar circuitos



Termos utilizados na Álgebra de Boole

- **Variável**:
  - Letra ou símbolo que pode assumir qualquer valor em um conjunto de números, desde que o conjunto tenha mais de um número.
- **Variável lógica**:
  - Variável de um problema que só pode assumir dois valores:

    Verdadeiro (1) ou Falso (0)
  - Os dois valores são mutuamente excludentes:

    A = 0 ou 1 B = 0 ou 1
- **Complemento**:
  - Indica o inverso de uma variável ($\bar{A}$ ou A' → A negado ou A barrado)
- **Literal**:
  - Referencia uma variável lógica ou seu complemento.

Operações Booleanas

- Operação realizada sobre variáveis lógicas
- Compara valores e gera um novo valor lógico com base em regras bem definidas

- **Operações**:
  - Adição ou Conjunção → Operador AND (E)
  - Multiplicação ou Disjunção → Operador OR (OU)
  - Negação → Operador NOT (NÃO)

Multiplicação / Disjunção Booleana

- Representada por **AND**, **E** ou **.** (ponto)
- Operador Binário (requer dois operandos)
- REGRA: uma sentença é verdadeira somente se ambos os operandos / termos forem verdadeiros
- Sinônimo de **intersecção** na teoria dos conjuntos
- Exemplo
  - A . B

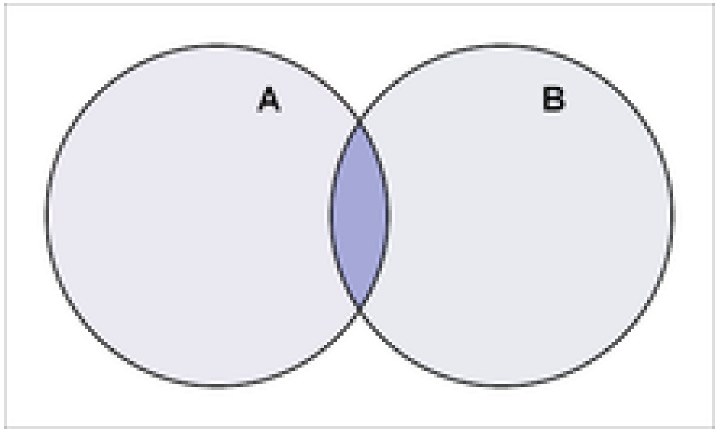
Resultados possíveis:

0 . 0 = **0**

0 . 1 = **0**

1 . 0 = **0**

1 . 1 = **1**



Adição/Conjunção Booleana

- Representada por **OR**, **OU**, **+**
- Operador Binário (requer dois operandos)
- REGRA: uma sentença é verdadeira quando ao menos um dos operandos / termos for verdadeiro
- Sinônimo de **união** na teoria dos conjuntos
- Exemplo
  - A + B

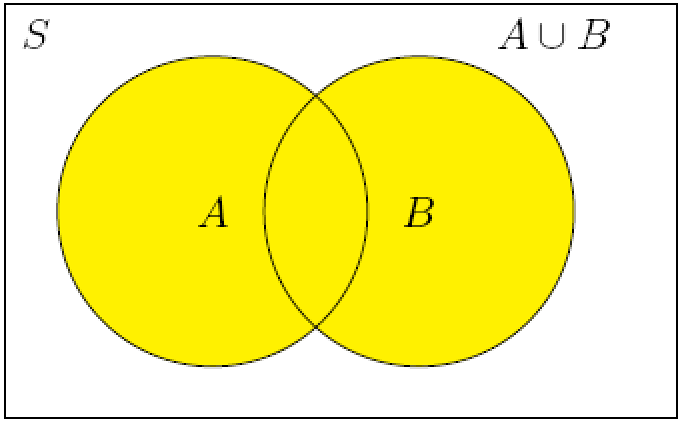
Resultados possíveis:

$0 + 0 = \mathbf{0}$

$0 + 1 = \mathbf{1}$

$1 + 0 = \mathbf{1}$

$1 + 1 = \mathbf{1}$



Negação ou Complemento Booleano

- Representada por **NOT**, **NÃO**, **‘** (apóstrofo) ou $\overline{}$ (barra horizontal sobre o termo)
- Operador Unário (requer um operando)
- <u>REGRA</u>: inverte o valor do literal
- Sinônimo de complemento em teoria dos conjuntos
- Exemplo
  - $\bar{A}$

Resultados possíveis:

$\bar{0} = 1$

$\bar{1} = 0$

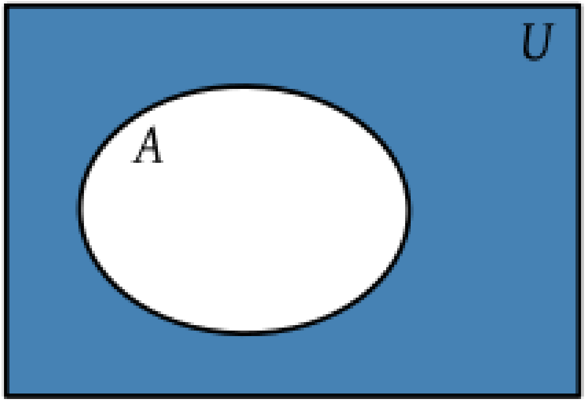


Tabela Verdade

- Conjunto de todas as possibilidades combinatórias entre os valores de diversas variáveis lógicas e um conjunto de operadores lógicos;

- Constrói-se uma tabela verdade com o objetivo de dispor de uma maneira prática os valores lógicos envolvidos em uma expressão lógica;

- Cada operador tem a sua coluna na tabela verdade;

Tabela Verdade

Negação

A	não A
F	V
V	F

Disjunção

A	B	A ou B
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Conjunção

A	B	A e B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Funções Lógicas

- A composição de variáveis lógicas associadas a um resultado é uma função lógica:
  - $X = A + B$
  - $X = A\ .\ B$

- O valor de X depende da combinação dos valores de A e B
- Poderia ser escrito como:
  - $F(A, B) = A + B$
  - $F(A, B) = A\ .\ B$

Funções Lógicas

Ordem de solução

- Em um dado momento é possível se deparar com mais de uma operação lógica em uma função:

$$F(A,B) = A + B\ .\ \bar{A}$$

- A **prioridade de solução dos operadores** deve ser:

NOT > E > OU

(i.e. resolver primeiro NOT, depois E, depois OU)

- **<u>Cuidado</u>:** $F(A,B) = \overline{A+B}$
  - Neste caso o operador NOT é aplicado ao resultado da disjunção.

Funções Lógicas

Ordem de solução

$$F(A,B) = A + B\ .\ \bar{A}$$

- Se A for 1 e B for 0, o resultado será?
- E se A for 0 e B for 1?

$$F(A,B) = \overline{A + B}$$

- E neste caso?

Tabela Verdade

- $F(A,B) = A + B\ .\ \bar{A}$

A	B	$\bar{A}$	B . $\bar{A}$	F(A,B)
F	F	V	F	F
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	V	F	F	V

OBS: Pode-se utilizar 1's e 0's ao invés de V's e F's (respectivamente). Ambos estão corretos.

Tabela Verdade

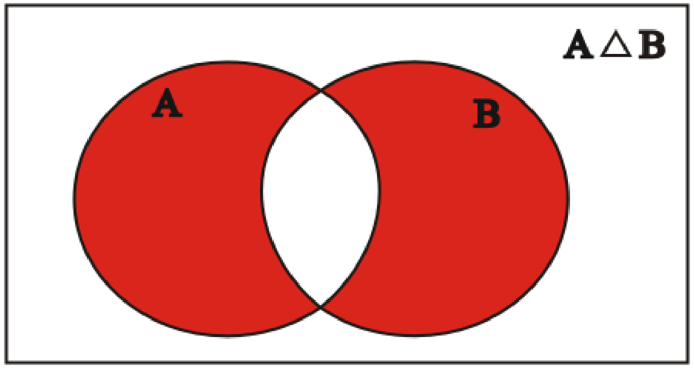
- $F(A,B) = \overline{A + B}$

A	B	$A + B$	F(A,B)
F	F	F	V
F	V	V	F
V	F	V	F
V	V	V	F

Operador OU Exclusivo (XOR)

- Representada por **XOR**, ⊕ (símbolo da adição circulado)
- Operador Binário (requer dois operandos)
- REGRA: uma sentença é verdadeira quando apenas um dos operandos / termos for verdadeiro
- Sinônimo de diferença simétrica na teoria dos conjuntos
- $F(A, B) = A \oplus B$

A	B	F(A,B)
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F



Implicação

- Representada por **Implica em** ou →
- Operador Binário (requer dois operandos)
- $F(A, B) = A \rightarrow B$
- Uma implicação só não é verdadeira quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.
- Pode ser reescrita como: A' ∨ B
- Ex: "Se João esquia, Maria nada"

A	B	F(A,B)
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Bi-implicação

- Representada por **Bi-implica em** ou ⇔
- Operador Binário (requer dois operandos)
- $F(A,B) = A \leftrightarrow B$
- Uma implicação só não é verdadeira quando o antecedente e o consequente são iguais.
- Ex: "João esquia, se e somente se, Maria nada"
- Pode ser reescrita como?

A	B	F(A,B)
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Operador OU Exclusivo (XOR)

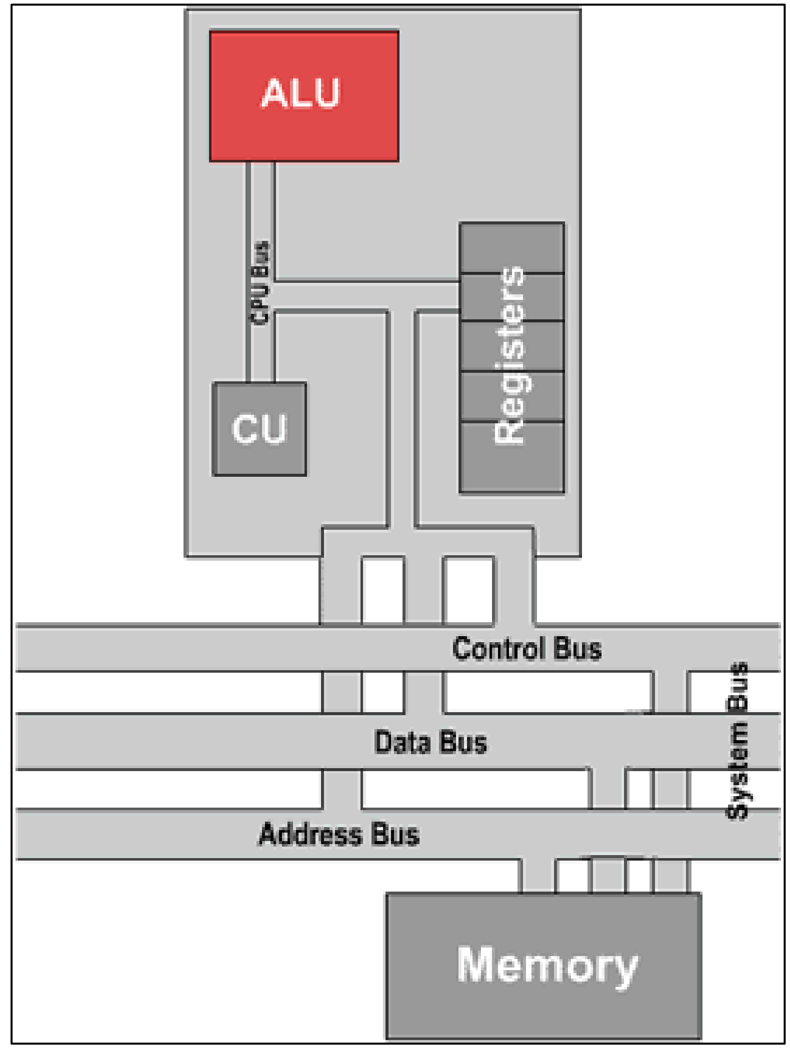
- Tautologia somente verdade
- Contradição somente falsidades
- Contingência demais casos

A	B	F(A,B)
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	V

A	B	F(A,B)
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	F

NOTA Computacional

- Em um **computador** é a unidade lógica e aritmética (ALU – *Arithmetic Logic Unit*) que realiza as operações lógicas booleanas e aritméticas sobre os dados digitais

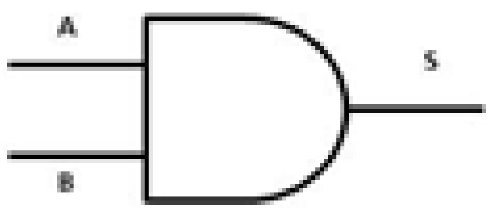


Representação de circuitos

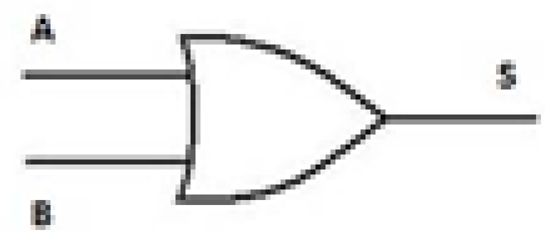
Álgebra de Boole e Circuitos

- Cada variável lógica é representada por uma **trilha**
- Cada operador lógico é representado por um **componente**

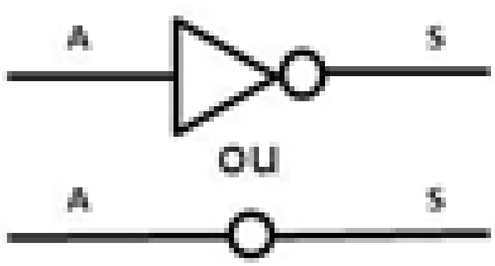
AND



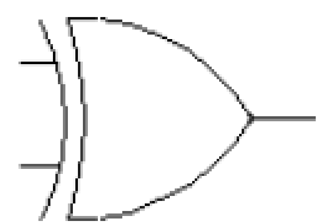
OR



NOT



XOR



Componentes adicionais

- Para simplificar os circuitos existem componentes compostos. Os mais usuais são:

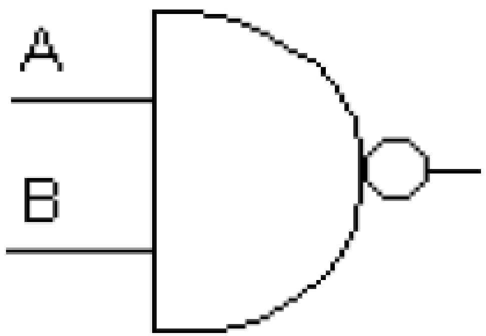
  - NAND → Negação do AND
  - NOR → Negação do OR

Operador NAND

- Representa a negação de AND
- <u>Resultado</u>: inverso do operador AND

- $F(A,B) = \overline{A.B}$

A	B	F(A,B)
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

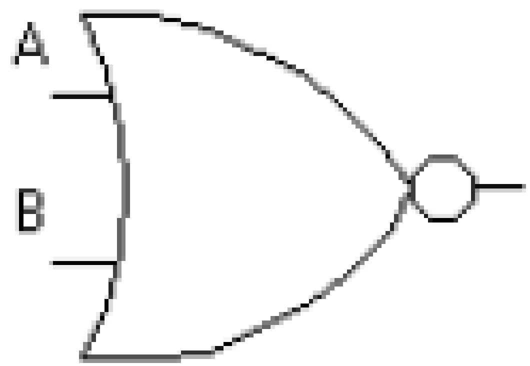


Operador NOR

- Representa a negação de OR
- <u>Resultado</u>: inverso do operador OR

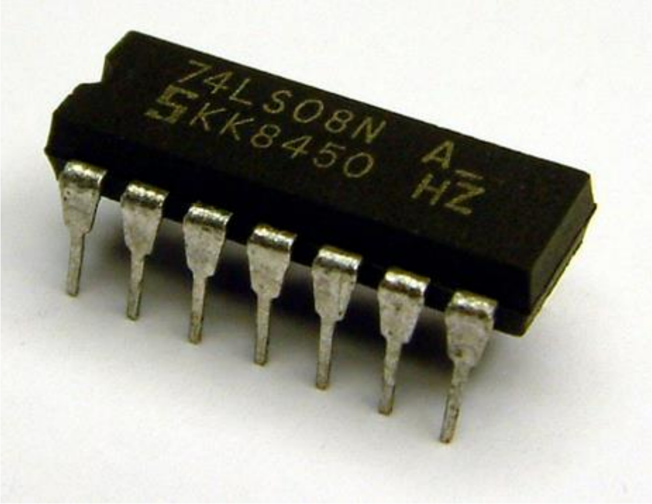
- $F(A, B) = \overline{A + B}$

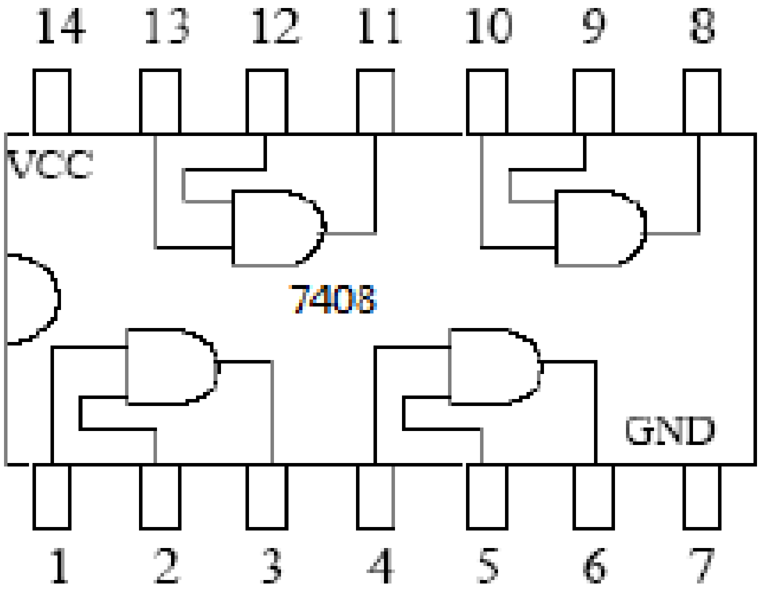
A	B	F(A,B)
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	F



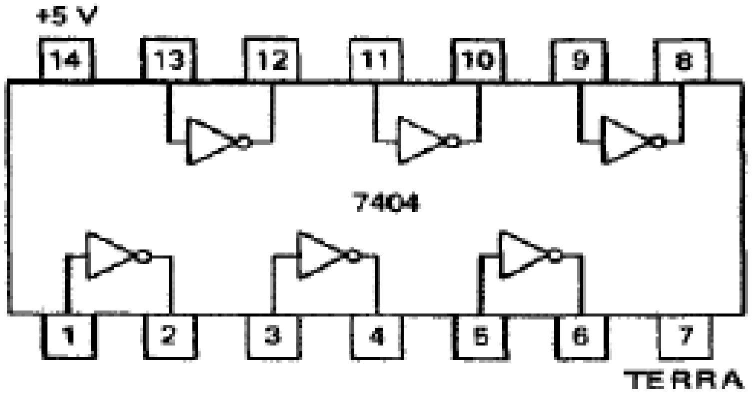
Uso dos Componentes

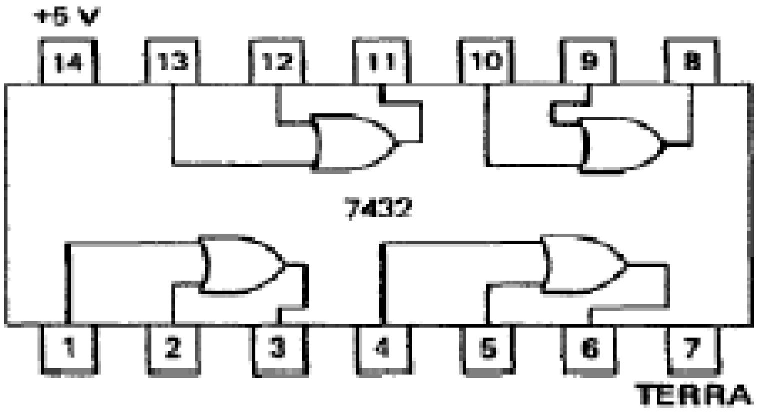
- **Circuitos integrados**





Uso dos Componentes





Representação

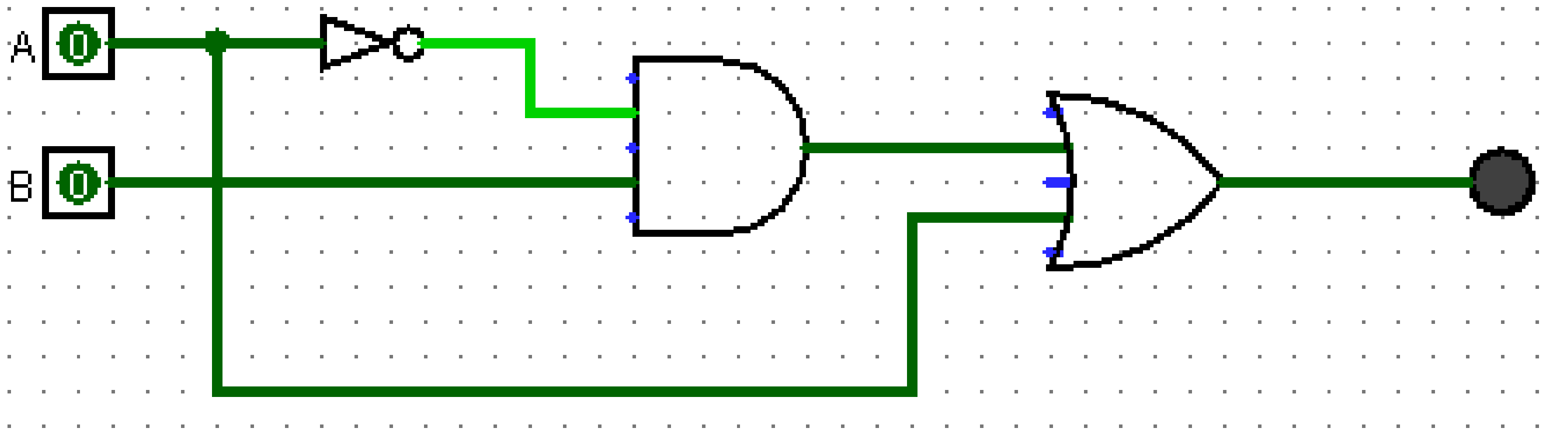
Transformar expressão lógica → circuito:

$$\boldsymbol{F(A,B) = A + B\ .\ \overline{A}}$$

Representação

Transformar expressão lógica → circuito:

$$F(A, B) = A + B\ .\ \bar{A}$$

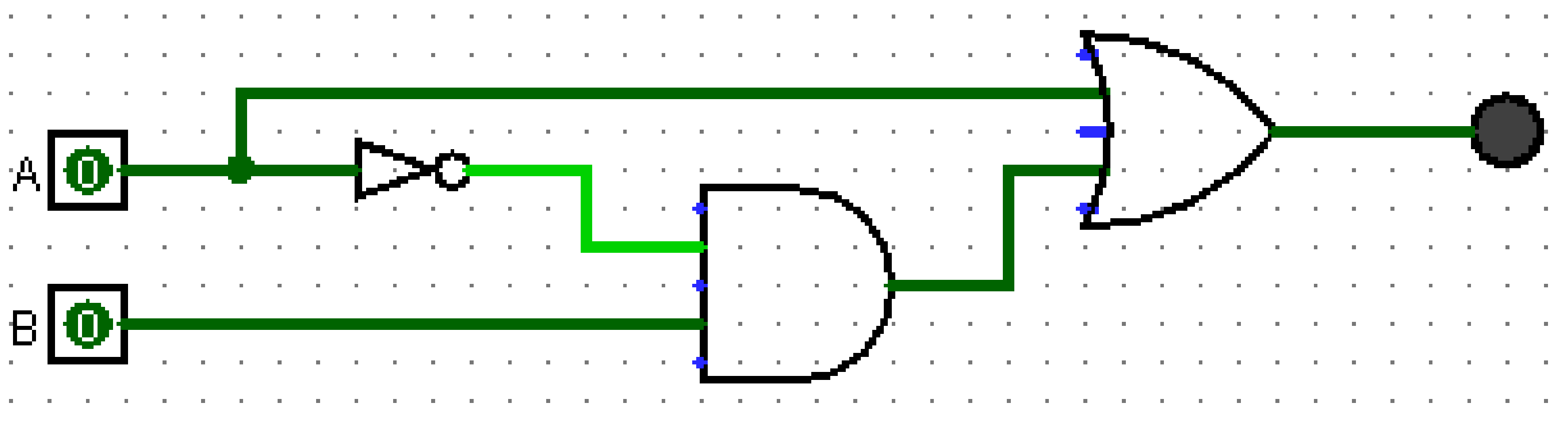


Representação

Transformar expressão lógica → circuito:

OBS: As trilhas podem passar "por cima" de outras trilhas, mas procurar evitar para facilitar o entendimento

$$F(A,B) = A + B\ .\ \bar{A}$$



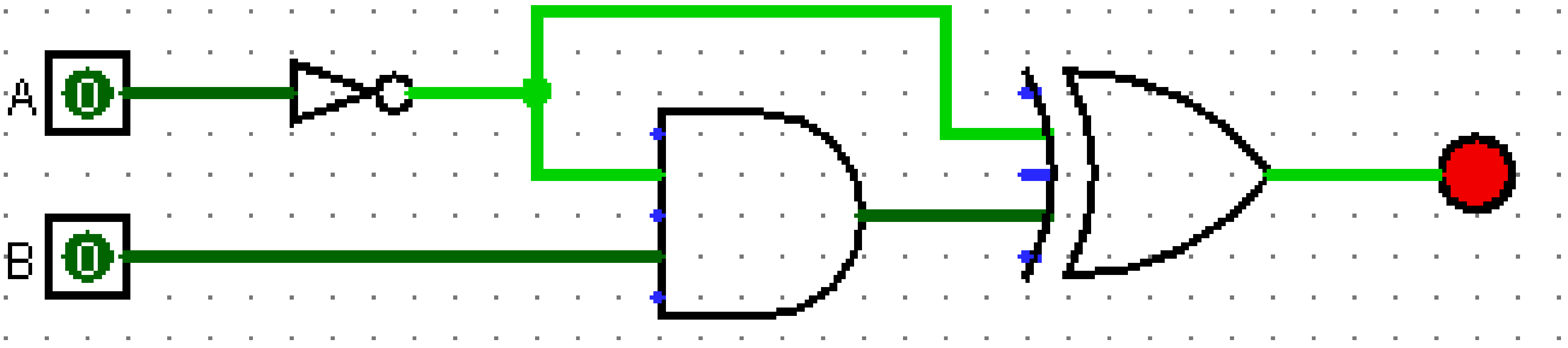
Representação

Transformar expressão lógica → circuito:

$$\boldsymbol{F(A, B) = \overline{A + B}}$$

Representação

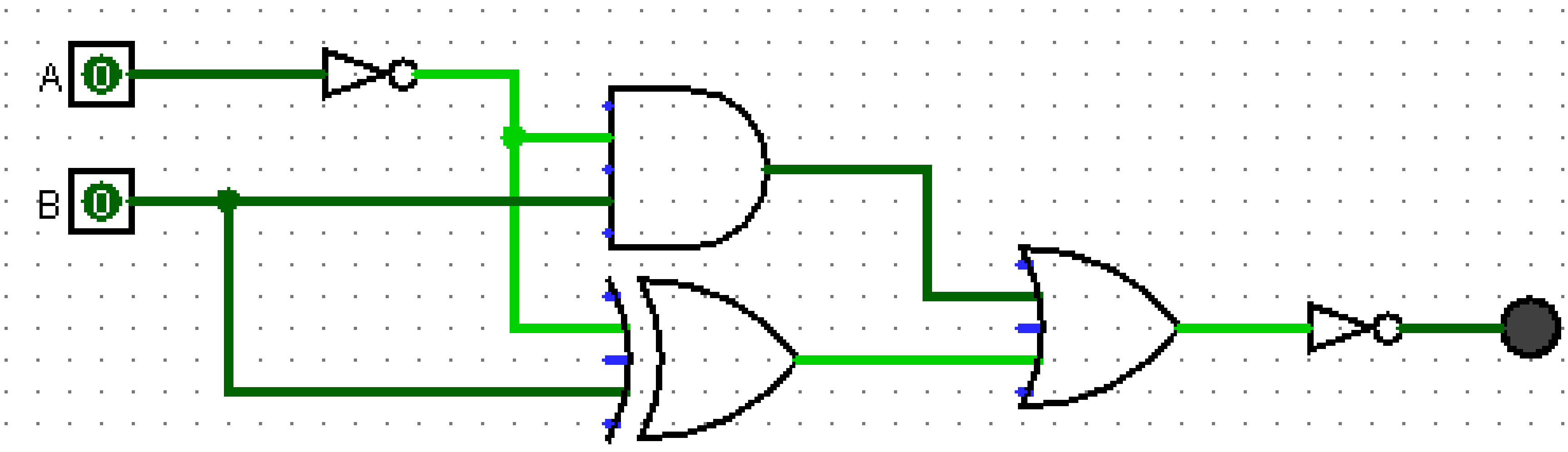
Transformar circuito → expressão lógica:



$$F(A,B) = (\bar{A} \,.\, B) \oplus \bar{A}$$

Representação

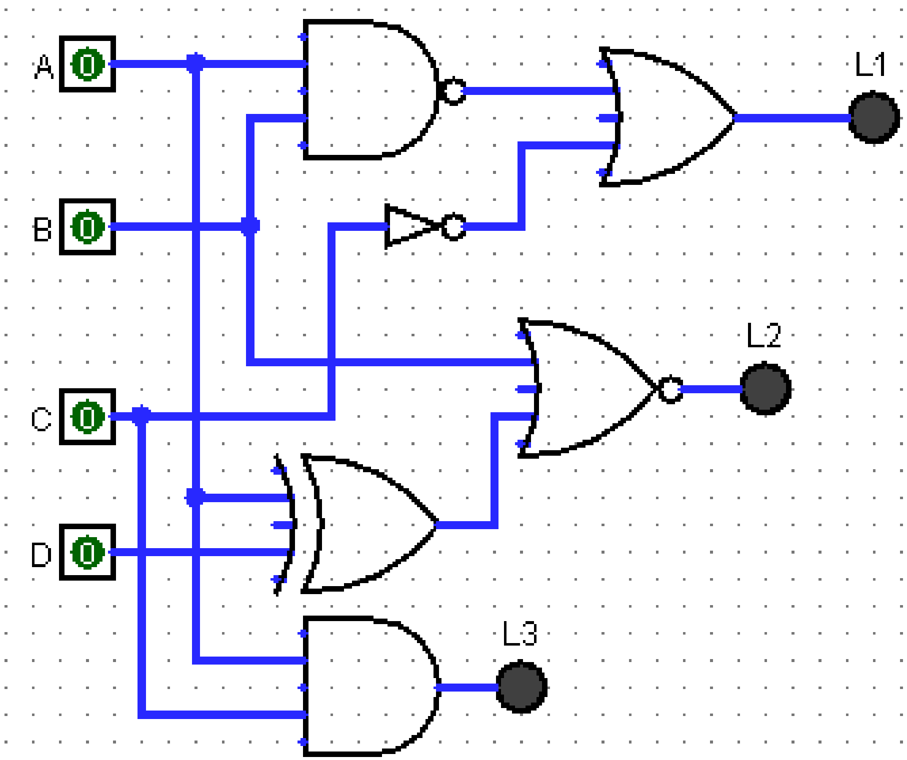
Transformar circuito → expressão lógica:



$$F(A, B) = ?$$

Representação

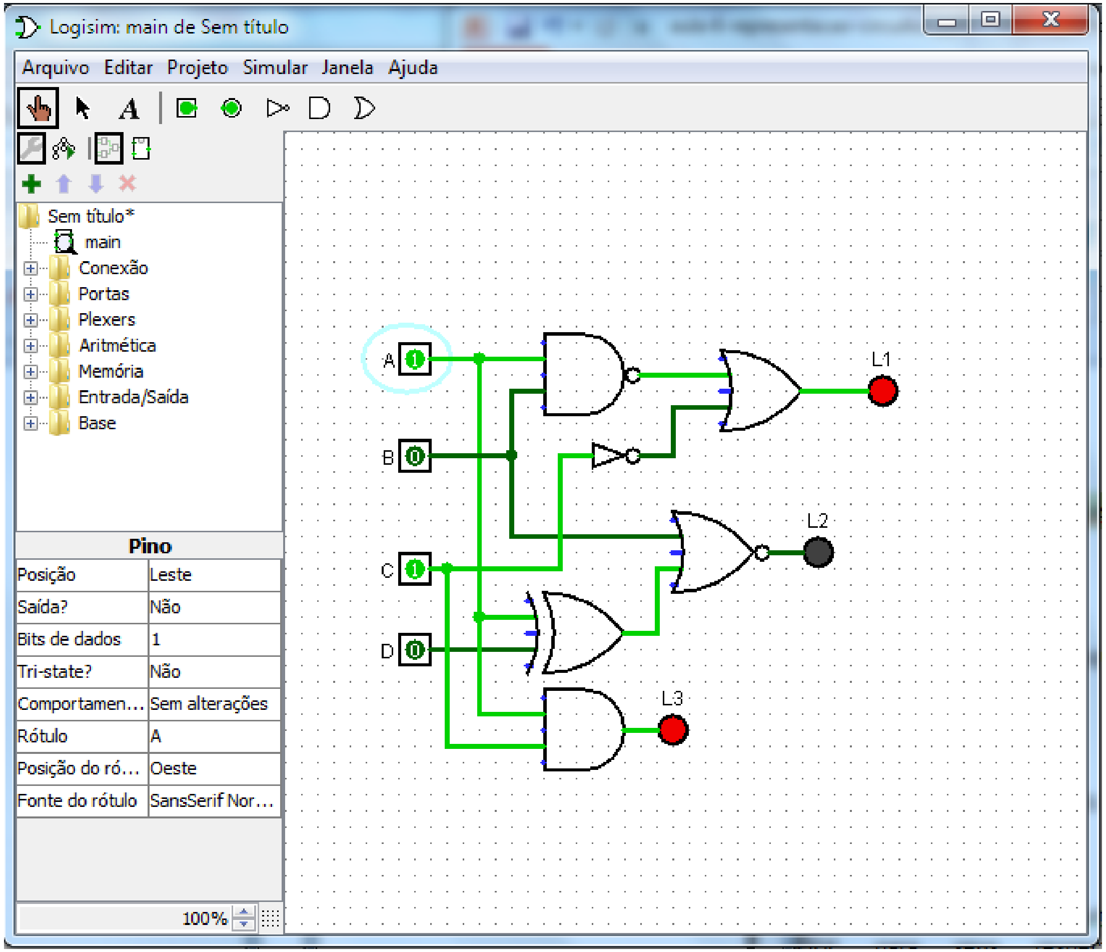
OBS: um circuito pode contar múltiplas saídas



L1 $=$?   ***L2*** $=$?   ***L3*** $=$?

Representação via Software

Logisim



Teoremas e Simplificações

Introdução

- Álgebra de Boole:
  - Variáveis lógicas
  - Representação de sentenças lógicas
  - Representação de circuitos como sentenças lógicas (vice-versa)

- Existe alguma motivação para simplificar expressões lógicas?

Introdução

- Existe alguma motivação para simplificar expressões lógicas?
  - Sim!!
  - Expressões com muitos operadores lógicos → circuitos com mais componentes → circuitos **mais caros**
  - Expressões com menos operadores lógicos → circuitos com menos componentes → circuitos **mais baratos**

Teoremas e Simplificações

- Algumas expressões lógicas podem ser simplificadas
- Fazemos simplificações mais sofisticadas & complexas com base em teoremas (simplificações) básicos

- Relembrando: em expressões lógicas podemos ter
  - <u>Variáveis lógicas</u>: que podem assumir os valores 1 ou 0
  - <u>Constantes lógicas</u>: que sempre assumem o valor 1 ou o valor 0

Teorema 1

$$\mathbf{A + 0 = A}$$

A	**0**	**T(1) = A + 0**
0	0	**0**
1	0	**1**

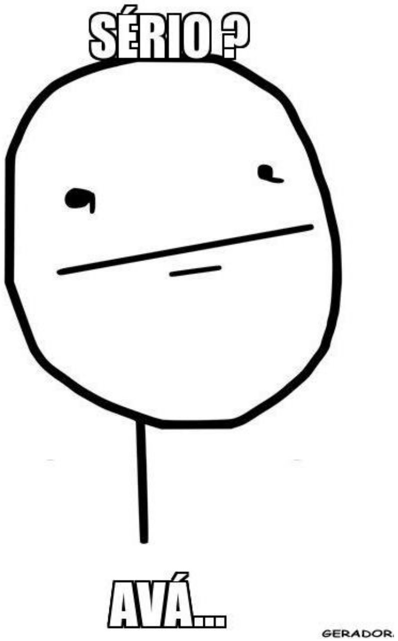
Teorema 2

$$A + 1 = 1$$

A	1	T(2) = A + 1
0	1	0
1	1	1

Teorema 3

$$A + A = A$$



A	T(3) = A + A
0	0
1	1

Teorema 4

$$A + \bar{A} = 1$$

A	$\bar{A}$	T(4) = $A + \bar{A}$
0	1	**1**
1	0	**1**

Teorema 5

$$A . 1 = A$$

A	1	T(5) = A . 1
0	1	0
1	1	1

Teorema 6

$$\mathbf{A \cdot 0 = 0}$$

A	**0**	**T(6) = A . 0**
0	0	**0**
1	0	**0**

Teorema 7

$$A \cdot A = A$$

A	T(7) = A . A
0	0
1	1

Teorema 8

$$\mathbf{A} \cdot \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{A}$	$\overline{\mathbf{A}}$	$\mathbf{T(8) = A \cdot \overline{A}}$
0	1	**0**
1	0	**0**

Teorema da dupla negação

$$\bar{\bar{A}} = \text{A}$$

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$
0	1	**0**
1	0	**1**

Obs: parecido com
"não encontrei ninguém"

Teorema de De Morgan

$$\overline{\mathbf{A+B}} = \overline{\mathbf{A}}\,.\,\overline{\mathbf{B}}$$

$$\overline{\mathbf{A\,.\,B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$$

A	B	$\overline{\mathbf{A}}$	$\overline{\mathbf{B}}$	$\overline{A+B}$	$\overline{A.B}$	$\overline{\mathbf{A}}\,.\,\overline{B}$	$\overline{\mathbf{A}}+\overline{B}$
0	0	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	**0**	**1**	**0**	**1**
1	0	0	1	**0**	**1**	**0**	**1**
1	1	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**

Pausa para o café

Leis da Álgebra Booleana

- Lei Comutativa

$$A + B = B + A$$

$$A \,.\, B = B \,.\, A$$

Cuidado!!!

$$A + B.C \neq B + A.C$$

Pausa para o café

Leis da Álgebra Booleana

- Lei Associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \,.\, (B \,.\, C) = (A \,.\, B) \,.\, C$$

- Lei Distributiva

$$A.(B + C) = (A.B) + (A.C)$$

$$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$$

Nota: o caminho reverso também é possível

Teorema 9

$$\mathbf{A + A\,.\,B\;=\;A}$$

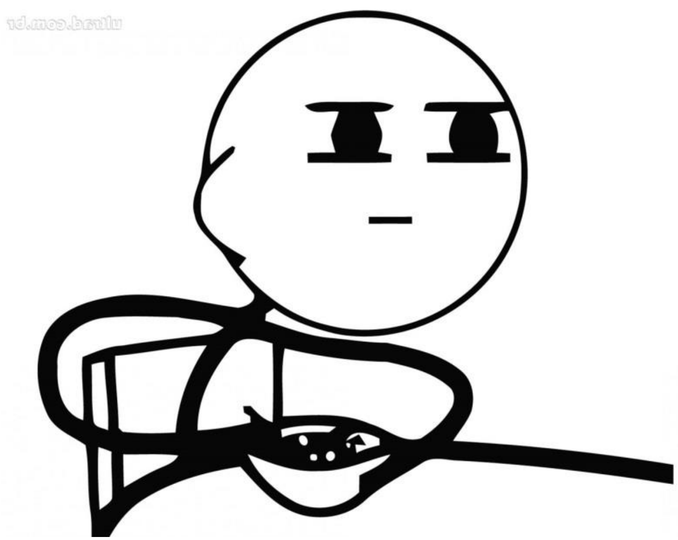
A	B	A . B	T(9) = A + A . B
0	0	0	**0**
0	1	0	**0**
1	0	0	**1**
1	1	1	**1**

Teorema 9

$$\mathbf{A + A \cdot B = A}$$

Pensando algebricamente:

$A + A \cdot B$	
$A \cdot (1 + B)$	[fatorando]
$A \cdot (1)$	[teorema 2]
$\mathbf{A}$	[teorema 5]



Teorema 10

$$A \cdot (A + B) = A$$

A	B	A + B	T(10) = A . (A + B)
0	0	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	1	**1**
1	1	1	**1**

Teorema 10

$$\mathbf{A \, . \, (A + B) \;=\; A}$$

Pensando algebricamente:

$A \, . \, (A + B)$

$(A + 0) \, . \, (A + B)$ [teorema 1]

$A + (0 \, . \, B)$ [fatorando]

$A + (0)$ [teorema 1]

$\mathbf{A}$

Teorema 11

$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$$

A	B	$\overline{B}$	A.B	A.$\overline{B}$	T(11) = A.B + A.$\overline{B}$
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	0	0	**0**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	1	0	**1**

Teorema 11

$$\mathbf{A \cdot B \; + \; A \cdot \overline{B} \; = \; A}$$

Pensando algebricamente:

$A.B + A.\overline{B}$	
$A \cdot (B + \overline{B})$	[fatorando]
$A \cdot (1)$	[teorema 4]
A	[teorema 5]

Teorema 12

$$(A + B) \; . \; (A + \overline{B}) \; = \; A$$

A	B	$\overline{B}$	A+B	A+$\overline{B}$	T(12) = (A+B) . (A.$\overline{B}$)
0	0	1	0	1	**0**
0	1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	**1**

Teorema 12

$$\mathbf{(A + B) \;.\; (A + \overline{B}) \;=\; A}$$

Pensando algebricamente:

$(A + B)\ .\ (A + \overline{B})$

$A + (B\ .\ \overline{B})$ [fatorando]

$A + (0)$ [teorema 7]

A [teorema 1]

Teorema 13

$$A + \bar{A}.B = A + B$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}.B$	$T(13) = A + \bar{A}.B$	$A + B$
0	0	1	0	**0**	**0**
0	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	**1**	**1**
1	1	0	1	**1**	**1**

Teorema 13

$$\mathbf{A + \overline{A}.B = A + B}$$

Pensando algebricamente:

$A + \overline{A}.B$

$(A + \overline{A}) \,.\, (A + B)$ [distributiva]

$(1) \,.\, (A + B)$ [teorema 4]

$A + B$ [teorema 5]

Teorema 14

$$A \;.\; (\bar{A} + B) \;=\; A \,.\, B$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A} + B$	$T(14) = A \,.\, (\bar{A} + B)$	$A \,.\, B$
0	0	1	1	**0**	**0**
0	1	1	1	**0**	**0**
1	0	0	0	**0**	**0**
1	1	0	1	**1**	**1**

Teorema 14

$$\mathbf{A \;.\; (\bar{A} + B) \;=\; A \,.\, B}$$

Pensando algebricamente:

$$A \;.\; (\bar{A} + B)$$

$$(A \,.\, \bar{A}) + (A \,.\, B) \qquad \text{[distributiva]}$$

$$(0) + (A \,.\, B) \qquad \text{[teorema 8]}$$

$$A \,.\, B \qquad \text{[teorema 1]}$$

Teorema 15

$$\mathbf{A + B.C \ = \ (A + B) . (A + C)}$$

(Aplicação da distributiva)

Para confirmar a igualdade

construa a tabela verdade ;)

Teorema 16

$$\mathbf{A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)}$$

(Aplicação da distributiva)

Para confirmar a igualdade
construa a tabela verdade ;)

Teorema 17

$$A . B + \overline{A} . C = (A + C) . (\overline{A} + B)$$

A princípio não há simplificação / redução,
mas será útil mais para frente devido a mudança
dos operadores lógicos

Teorema 17

$$A . B + \bar{A} . C = (A + C) . (\bar{A} + B)$$

A	B	C	AB	$\bar{A}C$	AB+$\bar{A}$C	(A+C)	($\bar{A}$+B)	(A+C) .($\bar{A}$+B)
0	0	0	0	0	**0**	0	1	**0**
0	0	1	0	1	**1**	1	1	**1**
0	1	0	0	0	**0**	0	1	**0**
0	1	1	0	1	**1**	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**0**	1	0	**0**
1	0	1	0	0	**0**	1	0	**0**
1	1	0	1	0	**1**	1	1	**1**
1	1	1	1	0	**1**	1	1	**1**

Teorema 17

$$(\mathbf{A + C}) \mathbf{\,.\,} (\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B}) = \mathbf{A \,.\, B} + \overline{\mathbf{A}} \mathbf{\,.\, C}$$ [invertido]

Fazendo $X = A+C$

$$X \,.\, (\overline{A} + B)$$

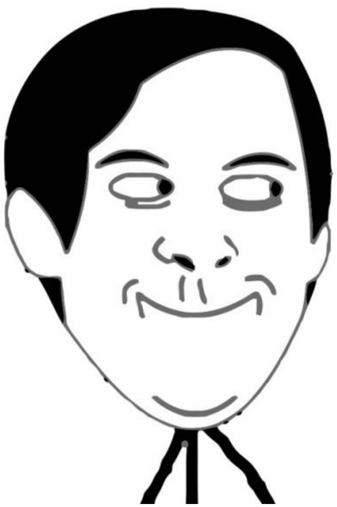
$$(X \,.\, \overline{A}) + (X.B)$$

$$((A+C).\overline{A}) + ((A+C).B)$$

$$(A.\,\overline{A} + C.\,\overline{A}) + (AB+BC)$$

$$0 + \overline{A}C + AB + BC$$

$$AB + \overline{A}C + BC$$



(... continua no próximo episódio...err.. .Teorema.)

Teorema 18

$$(A.B) + (\bar{A}.C) + (B.C) = (A.B) + (\bar{A}.C)$$

A	B	C	$\bar{A}$	AB	$\bar{A}C$	BC	T(19)	AB + $\bar{A}C$
0	0	0	1	0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	1	0	**1**	**1**
0	1	0	1	0	0	0	**0**	**0**
0	1	1	1	0	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	0	0	0	**0**	**0**
1	1	0	0	1	0	0	**1**	**1**
1	1	1	0	1	0	1	**1**	**1**

Teorema 18

$$\mathbf{(A.B) + (\overline{A}.C) + (B.C) = (A.B) + (\overline{A}.C)}$$

Pensando algebricamente:

$(A.B) + (\overline{A}.C) + (B.C)(1)$ [ident.]

$(A.B) + (\overline{A}.C) + (B.C)(A+\overline{A})$ [ident. compl.]

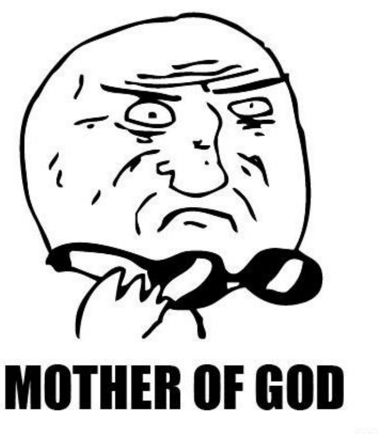
$(A.B) + (\overline{A}.C) + (B.C.A)+(B.C.\overline{A})$ [distrib.]

$(A.B + A.B.C) + (\overline{A}.C + \overline{A}.C.B)$

fazendo $X = A.B$ e $Y = \overline{A}.C$

$(X+XC) + (Y+YB)$

$X + Y = \mathbf{A.B + \overline{A}.C}$



Teorema 19

$$(A+B) \;.\; (\bar{A}+C) \;.\; (B+C) \;=\; (A + B) \;.\; (\bar{A} + C)$$

A	B	C	$\bar{A}$	A+B	$\bar{A}$+C	B+C	T(20)	(A+B) . ($\bar{A}$+C)
0	0	0	1	0	1	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	1	1	**0**	**0**
0	1	0	1	1	1	1	**1**	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	1	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	1	1	1	**1**	**1**
1	1	0	0	1	0	1	**0**	**0**
1	1	1	0	1	1	1	**1**	**1**

Teorema 19

$$(A+B)\ .\ (\bar{A}+C)\ .\ (B+C)\ =\ (A+B)\ .\ (\bar{A}+C)$$

Pensando algebricamente:

Mesma ideia do teorema 19

Fica como exercício

(ou quem sabe para a prova)

Tabelão

Ordem	Teorema	Ordem	Teorema
1	$A + 0 = A$	**11**	$A.B + A.\overline{B} = A$
2	$A + 1 = 1$	**12**	$(A+B) . (A+\overline{B}) = A$
3	$A + A = A$	**13**	$A + (\overline{A} . B) = A + B$
4	$A + \overline{A} = 1$	**14**	$A . (\overline{A} + B) = A . B$
5	$A . 1 = A$	**15**	$A + B.C = (A+B).(A+C)$
6	$A . 0 = 0$	**16**	$A . (B+C) = AB + AC$
7	$A . A = A$	**17**	$A.B + \overline{A}.C = (A+C).(\overline{A} + B)$
8	$A . \overline{A} = 0$	**18**	$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$
9	$A + A.B = A$	**19**	$(A+B).(\overline{A} + C).(B+C) = (A+B).(\overline{A} + C)$
10	$A . (A + B) = A$		

Exemplo

$$(1)\quad F = A + \overline{ABC}$$

$$(2)\quad F = AB + C + B\overline{C}$$

$$(3)\quad F = AB\,.\,\overline{(AC + \overline{A}B + CB)}$$

Lógica e Álgebra de Boole

Introdução à Ciência da Computação
ICC0001

Prof. Diego Buchinger