UDESC

Complexidade de Algoritmos

Prof. Diego Buchinger
diego.buchinger@outlook.com
diego.buchinger@udesc.br

Prof. Cristiano Damiani Vasconcellos
cristiano.vasconcellos@udesc.br

UDESC

Estudo da Tratabilidade de Problemas Computacionais

Problemas tratáveis e intratáveis

Problemas tratáveis: resolvidos por algoritmos deterministas que executam em tempo polinomial.

Problemas intratáveis: não se conhece algoritmos deterministas que os resolvam em tempo polinomial.

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$

Problemas tratáveis e intratáveis

Problemas tratáveis: resolvidos por algoritmos deterministas que executam em tempo polinomial.

Problemas intratáveis: não se conhece algoritmos deterministas que os resolvam em tempo polinomial.

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$

UDESC

Categorias de Problemas

Problemas de Otimização: Cada solução possível tem um valor associado e desejamos encontrar a solução com melhor valor.

Problemas de Decisão: Problemas que tem resposta sim ou não.

Problemas de Decisão são possivelmente “mais fáceis” do que problemas de Otimização, mas com certeza “não mais difíceis”!

Exemplo:

- Qual é o menor caminho entre os vértices *a* e *b* de um grafo?
- Existe um caminho de no máximo k arestas entre *a* e *b*?

Algoritmos Não Deterministas

Capaz de escolher uma entre várias alternativas possíveis a cada passo. A alternativa escolhida será sempre a alternativa que leva a conclusão esperada, caso essa alternativa exista.

```
int pesq(Estr *v, int n, int ch){
    int i;
    for (i = 0; i < n; i++)
        if (v[i].chave == ch)
            return i;
    return -1;
}
```

Autômato não determinista

```
int pesq(Estr *v, int n, int ch){
    int i;
    i = magicaND(0, n - 1);
    if (v[i].chave == ch)
        return i;
    return -1;
}
```

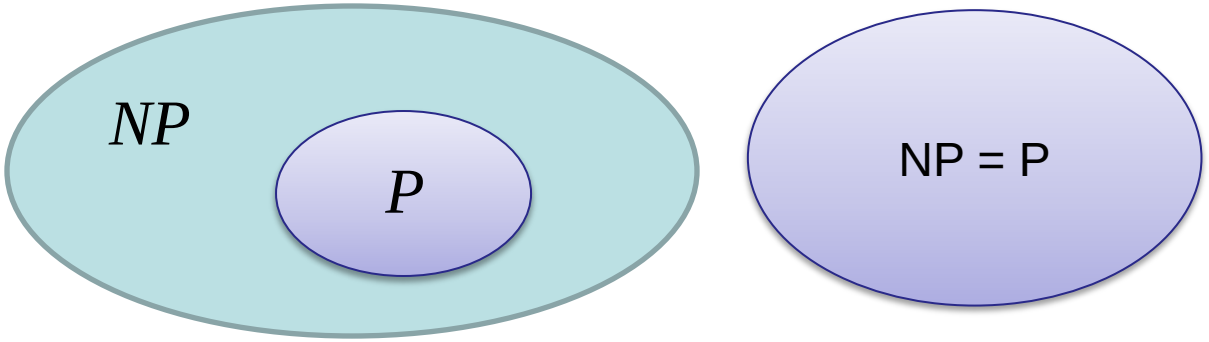
Classes de Problemas *P* e *NP*

Classe de Problemas *P*: Problemas que podem ser resolvido (por algoritmos deterministas) em tempo polinomial.

Classe de Problemas *NP*: Problemas que podem ser resolvidos por algoritmos não deterministas em tempo polinomial (*polinomialmente verificável* ou *certificado*). Ou problemas que a solução pode ser verificada em tempo polinomial.

Pergunta do milhão: P=NP ou P ≠NP?

Possíveis relações entre as classes:



Classes de Problemas *P* e *NP*

O status de muitos problemas NP é desconhecido:

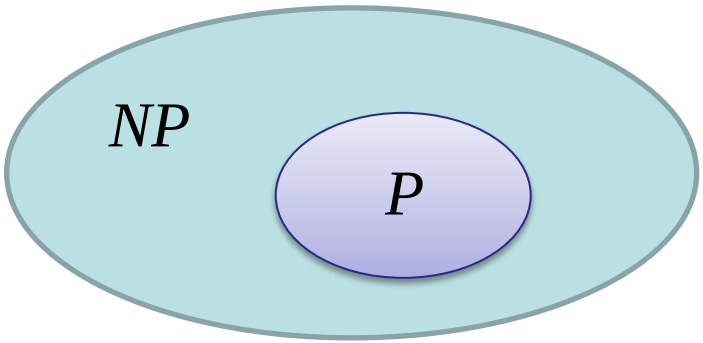
- existe um algoritmo determinista polinomial para o problema?

Investigar a complexidade relativa dos problemas da classe NP:

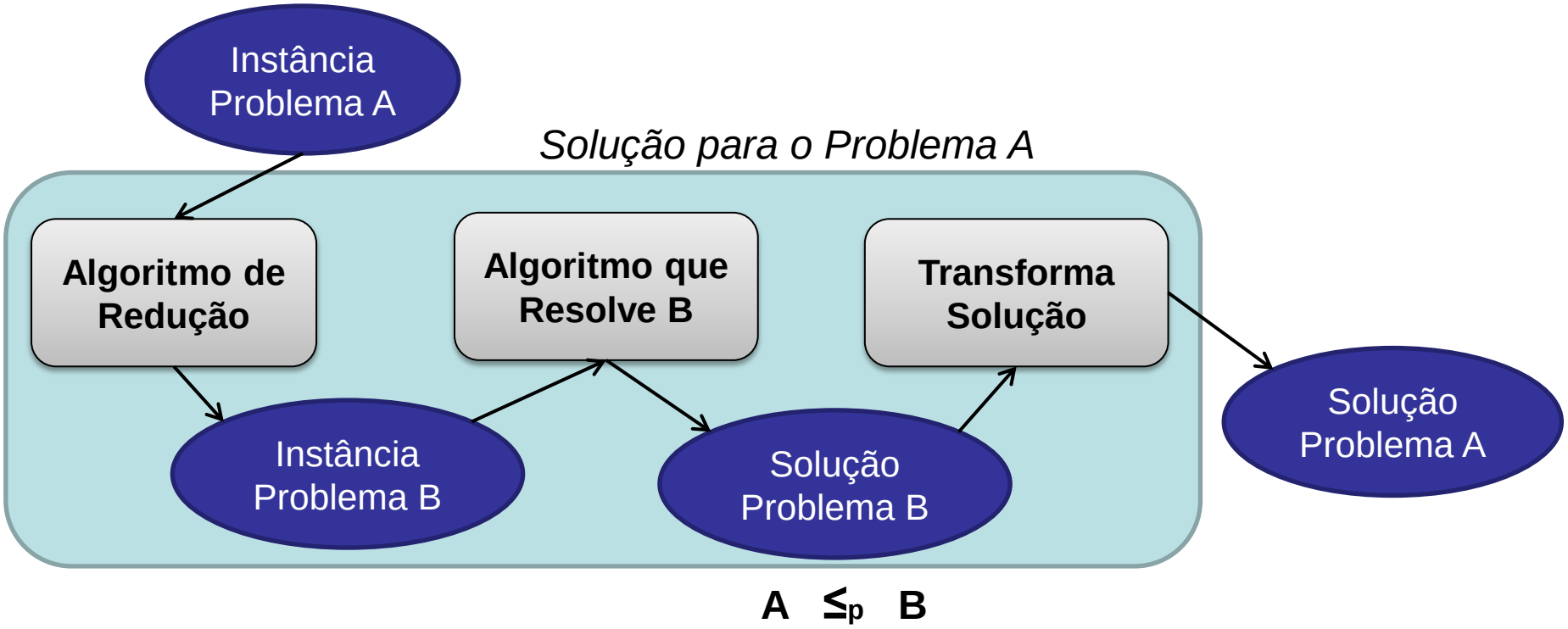
- Problema A é mais fácil ou mais difícil do que B?

Recorremos à ideia de *redução polinomial*:

- Mostra que A não é mais difícil que B ou que A é polinomialmente redutível ao problema B.



Redução de Problemas



Se o "**Algoritmo de Redução**", o "**Algoritmo que Resolve B**" e a "**Transformação de solução**" forem polinomiais, então podemos concluir algo sobre a solução do Problema A?

Redução de Problemas

Conclusões provenientes da redução:

Se Y é polinomialmente redutível a X então Y não é mais difícil do que X.

$$Y \leq_p X$$

Cenário 1: sabe-se que X está na classe P.
Logo, Y também deve estar na classe P.

Cenário 2: não se sabe se X está ou não em P,
mas sabe-se que Y não está em P.
Como Y não é mais difícil que X, então X deve estar fora de P.

Classes de Problemas *NP-Hard*

Se podemos determinar que um problema não é mais difícil do que outro, podemos separar os problemas mais difíceis dos mais fáceis em NP!

Assim surge a classe dos problemas mais difíceis

A classe de problemas **NP-*Hard*** ou **NP-Difícil**!

“Um problema A é NP-Difícil se todos os problemas em NP não são mais difíceis do que A”

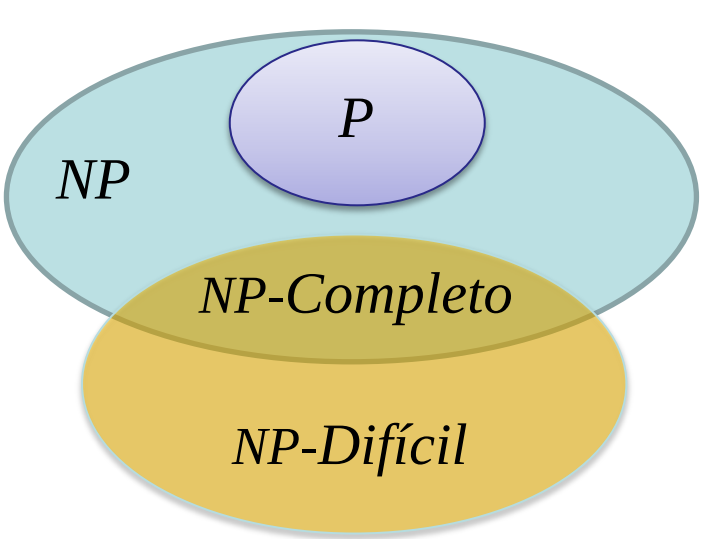
“Um problema NP-Difícil é tão difícil quanto qualquer problema em NP”

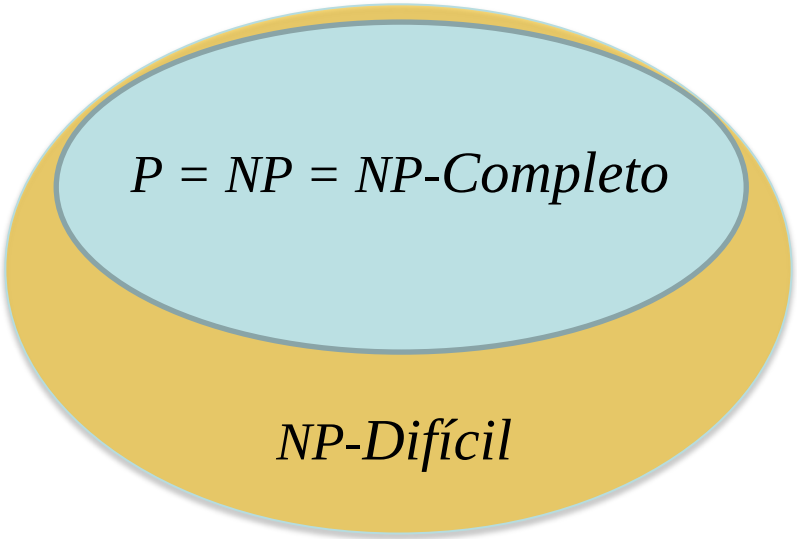
Classes de Problemas *NP-Hard*

Na classe NP-Difícil podemos encontrar problemas intratáveis e:

- Indecidíveis: ex. problema da parada e equações diofantinas;
- Decidíveis: podem ser resolvidos por um algoritmo não determinista – um problema NP-Difícil que está em NP é dito **NP-Completo**.

Duas possíveis relações considerando P vs. NP





Redução de Problemas

Relação entre Redução e Problemas NP-Completos:

Uma vez conhecido um problema NP-Completo, podemos usar *reduções polinomiais* para provar que algum problema X também é NP-Completo.

"se *Y* é um problema NP-completo e *Y* não é mais difícil que um problema *X* (redução) então *X* também é NP-completo"

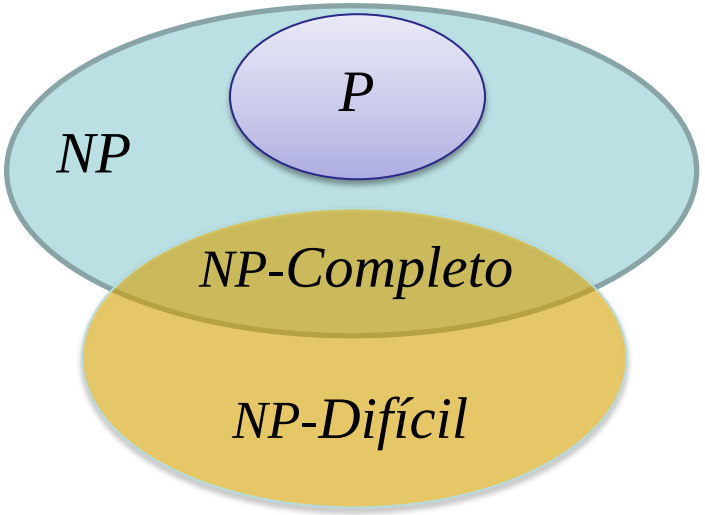
$$Y \leq_p X$$

Classes de Problemas *NP-Completo*

Se um problema NP-Completo pode ser resolvido em tempo polinomial, então todo problema NP-Completo pode ser resolvido em tempo polinomial e, portanto, P = NP

Acredita-se que a relação correta seja P ≠ NP

Por quê?



UDESC

NP-Completo

Um problema X é ***NP-Completo*** se:

1. O problema deve ser NP: $X \in NP$

   a) Conseguir um algoritmo não determinista que resolva o problema em tempo polinomial

   *b) Conseguir um algoritmo determinista que verifica em tempo polinomial se uma resposta é verdadeira ou não (**certificado**)*

2. Fazer a redução de um problema NP-Completo (Y) conhecido para o problema X: $Y \leq_p X$ para todo $Y \in NP$

(SAT) Satisfazibilidade de Fórmulas Booleanas

O problema da ***Satisfazibilidade de fórmulas booleanas*** consiste em determinar se existe uma atribuição de valores booleanos, para as variáveis que ocorrem na fórmula, de tal forma que o resultado seja ***verdadeiro***.

Um ***literal*** é uma variável proposicional ou sua negação.

Exemplo:

$$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Problema de Decisão: existe uma combinação de valores para x_1 e x_2 que satisfazem esta equação?

Complexidade algoritmo trivial: (2^n)

(SAT) Satisfazibilidade de Fórmulas Booleanas

Classificando SAT como NP-Completo:

Passo 1: Algoritmo de certificado (determinista e polinomial)

Passo 2: MTND $\leq_p$ SAT

```
bool certificado( bool *sol ){
   return sol[1] &&
          (sol[2] || !sol[1]) &&
          (!sol[2] || !sol[3]) &&
          (!sol[1] || sol[2] || sol[3]);
}
```

$$x_1 \wedge (x_2 \vee \neg x_1) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

!! Um algoritmo de certificado genérico usaria uma repetição para iterar sobre **cada** literal ou operador da expressão !!

Neste caso qual seria a complexidade do algoritmo?

UDESC

NP-Completo

Teorema de Cook(-Levin): SAT é um problema NP-Completo

SAT está em P se, e somente se, P = NP

qualquer problema em NP pode ser reduzido em tempo polinomial por uma máquina de Turing não determinista a um problema SAT.

$$\text{MTND} \leq_p \text{SAT}$$

Não vamos fazer essa redução pois ela é mais longa

http://www.inf.ufrgs.br/~prestes/Courses/Complexity/aula27.pdf

https://en.wikipedia.org/wiki/Cook%E2%80%93Levin_theorem

UDESC

(SAT) Satisfazibilidade de Fórmulas Booleanas

Classificando SAT como NP-Completo:

Passo 1: Algoritmo de certificado (*passed*)

Passo 2: MTND $\leq_p$ SAT (*passed*)

Logo, provamos que SAT pertence ao conjunto de problemas NP-Completo!

Forma Normal Conjuntiva

Uma formula booleana está na ***Forma Normal Conjuntiva*** (***CNF***) se é expressa por um grupo cláusulas AND, cada uma das quais formada por OR entre literais.

Uma fórmula booleana esta na ***k-CNF*** se cada cláusula possui exatamente *k* literais:

Exemplo 2-CNF:

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee \neg x_2)$$

Não é NP-Completo!

UDESC

3-CNF-SAT

Problema: verificar se uma fórmula booleana na 3-CNF é satisfazível.

3-CNF-SAT é *NP-Completo*?

- **Passo 1**: 3-CNF-SAT $\in$ *NP*.
- **Passo 2**: SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

3-CNF-SAT

Passo 1: 3-CNF-SAT $\in$ *NP*.

```
bool certificado( bool *sol ){
   return ( sol[1] ||  sol[2] ||  sol[3] )
        && (!sol[1] || !sol[2] || !sol[3] )
        && ( sol[1] ||  sol[2] || !sol[3] );
}
```

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

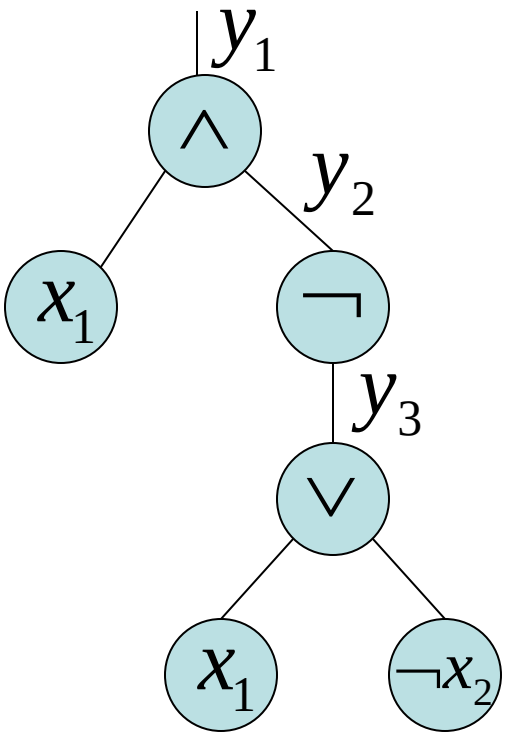
!! Um algoritmo de certificado genérico usaria uma repetição para iterar sobre **cada** literal ou operador da expressão !!

Neste caso qual seria a complexidade do algoritmo?

$SAT \leq_p$ 3-CNF-SAT

Dada uma fórmula booleana: $\phi = x_1 \wedge \neg(x_1 \vee \neg x_2)$

SAT

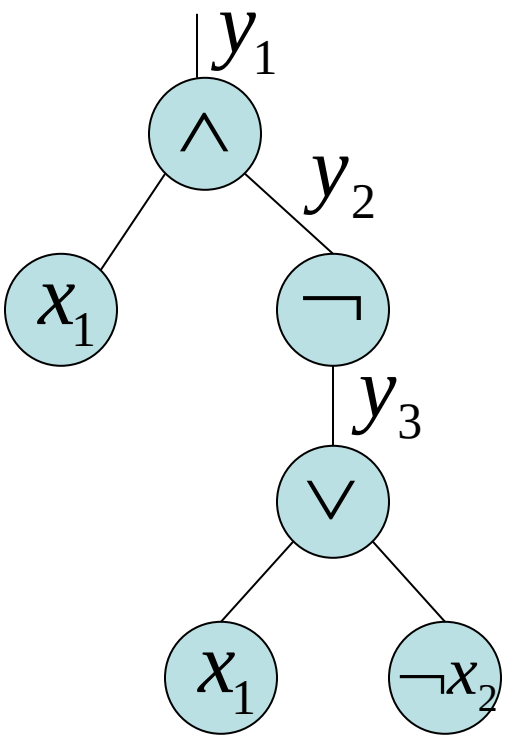


REDUÇÃO

1. Construir uma árvore que represente à fórmula.
2. Introduzir uma variável y_i para a raiz e a saída de cada no interno.

$SAT \leq_p$ 3-CNF-SAT

$$\phi' = y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (x_1 \wedge y_2)) \wedge (y_2 \leftrightarrow \neg y_3) \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \vee \neg x_2))$$



3. Reescrevemos a fórmula original como conjunções entre a variável raiz e as cláusulas que descrevem as operações de cada nó.

Introduz **uma** variável e **uma** cláusula para cada operador.

UDESC

$SAT \leq_p$ 3-CNF-SAT

$$\phi' = y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (x_1 \wedge y_2)) \wedge (y_2 \leftrightarrow \neg y_3) \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \vee \neg x_2))$$

4. Para cada ϕ'_i construir uma tabela verdade, usando as entradas que tornam $\neg \phi'_i$ verdade, construir uma forma normal disjuntiva (DNF) para cada ϕ'_i

SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT

$$\phi' = y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (x_1 \wedge y_2)) \wedge (y_2 \leftrightarrow \neg y_3) \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \vee \neg x_2))$$

y_1	x_1	y_2	$y_1 \leftrightarrow (x_1 \wedge y_2)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

$$\neg\phi_2'' = (y_1 \wedge x_1 \wedge \neg y_2) \vee (y_1 \wedge \neg x_1 \wedge y_2) \vee (y_1 \wedge \neg x_1 \wedge \neg y_2) \vee (\neg y_1 \wedge x_1 \wedge y_2)$$

Cada cláusula de ϕ' introduz no máximo 8 cláusulas em ϕ'', pois cada cláusula de ϕ' possui no máximo 3 variáveis.

UDESC

SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT

$$\neg\phi_2'' = (y_1 \wedge x_1 \wedge \neg y_2) \vee (y_1 \wedge \neg x_1 \wedge y_2) \vee$$
$$(y_1 \wedge \neg x_1 \wedge \neg y_2) \vee (\neg y_1 \wedge x_1 \wedge y_2)$$

Converter a fórmula para a CNF usando as leis de De Morgan:

$$\phi_2'' = (\neg y_1 \vee \neg x_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg y_2) \wedge$$
$$(\neg y_1 \vee x_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_1 \vee \neg y_2)$$

UDESC

SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT

O último passo faz com que cada cláusula tenha exatamente 3 literais, para isso usamos duas novas variáveis p e q. Para cada cláusula C_i em ϕ'' :

1. Se C_i tem 3 literais, simplesmente inclua C_i.
2. Se C_i tem 2 literais, $C_i = (l_1 \vee l_2)$, inclua:

$$(l_1 \vee l_2 \vee p) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \neg p)$$

3. Se C_i tem 1 literal, l_1, inclua:

$$(l_1 \vee p \vee q) \wedge (l_1 \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (l_1 \vee p \vee \neg q) \wedge (l_1 \vee \neg p \vee q)$$

Introduz no máximo **4** cláusulas por cláusula em ϕ''.

UDESC

$SAT \leq_p$ 3-CNF-SAT

$$\phi' = y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (x_1 \wedge y_2)) \wedge (y_2 \leftrightarrow \neg y_3) \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \vee \neg x_2))$$

$$\phi_1''' = (y_1 \vee p \vee q) \wedge (y_1 \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (y_1 \vee p \vee \neg q) \wedge (y_1 \vee \neg p \vee q)$$

$$\phi' = y_1 \wedge (y_1 \leftrightarrow (x_1 \wedge y_2)) \wedge (y_2 \leftrightarrow \neg y_3) \wedge (y_3 \leftrightarrow (x_1 \vee \neg x_2))$$

$$(y_1 \vee p \vee q) \wedge (y_1 \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (y_1 \vee p \vee \neg q) \wedge (y_1 \vee \neg p \vee q) \wedge$$

$$(\neg y_1 \vee \neg x_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg y_2) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_1 \vee \neg y_2)$$

3-CNF-SAT

Problema: verificar se uma fórmula booleana na 3-CNF é satisfazível.

3-CNF-SAT é *NP-Completo*? SIM

- **Passo 1**: 3-CNF-SAT $\in$ *NP*.
- **Passo 2**: SAT $\leq_p$ 3-CNF-SAT.

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3)$$

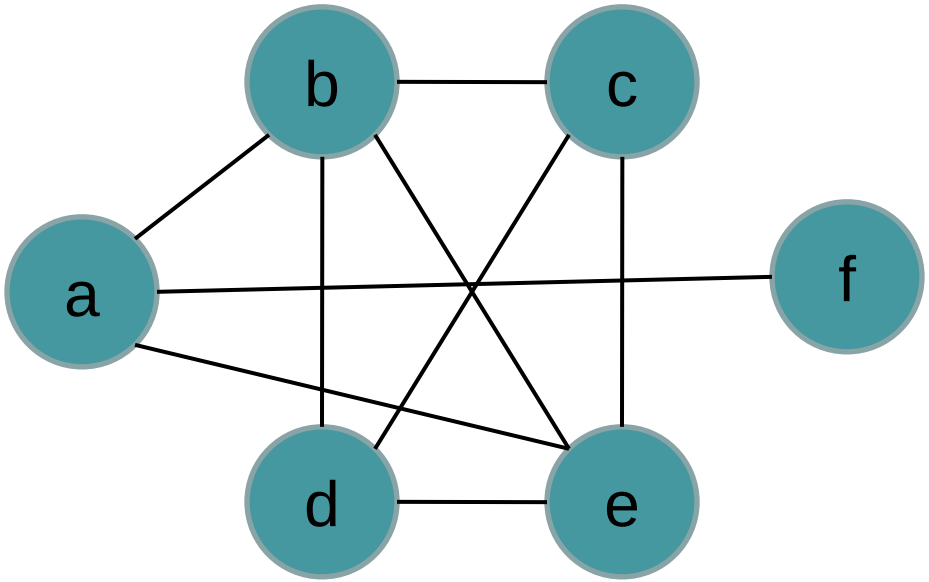
$$(y_1 \vee p \vee q) \wedge (y_1 \vee \neg p \vee \neg q) \wedge (y_1 \vee p \vee \neg q) \wedge (y_1 \vee \neg p \vee q) \wedge$$
$$(\neg y_1 \vee \neg x_1 \vee y_2) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee \neg y_2) \wedge (\neg y_1 \vee x_1 \vee y_2) \wedge (y_1 \vee \neg x_1 \vee \neg y_2) \wedge \ldots$$

CLIQUE

Um *Clique* em um grafo não direcionado $G = (V, A)$ é um subconjunto de vértices $V' \subseteq V$, onde cada vértice está conectado por uma aresta. Ou seja, um subgrafo completo.

Versão de otimização: Encontrar o maior *Clique* possível.

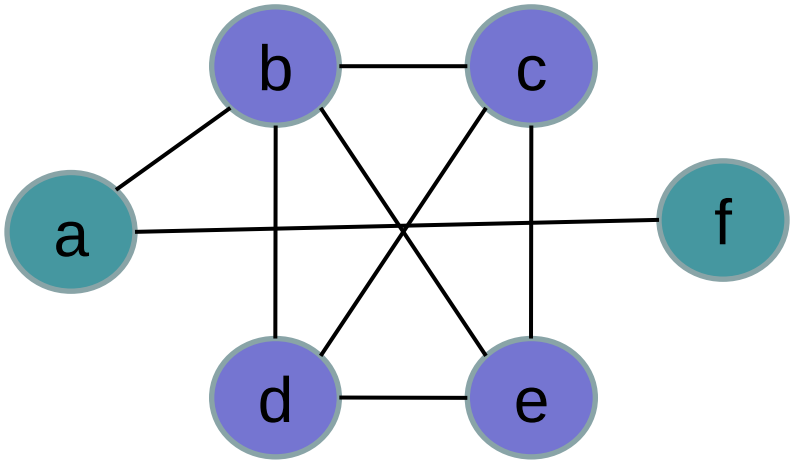
Versão de decisão: Existe um *Clique* de tamanho $\geq k$?



CLIQUE

CLIQUE é *NP-Completo*?

- **Passo 1**: CLIQUE $\in$ *NP*.
- **Passo 2**: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.



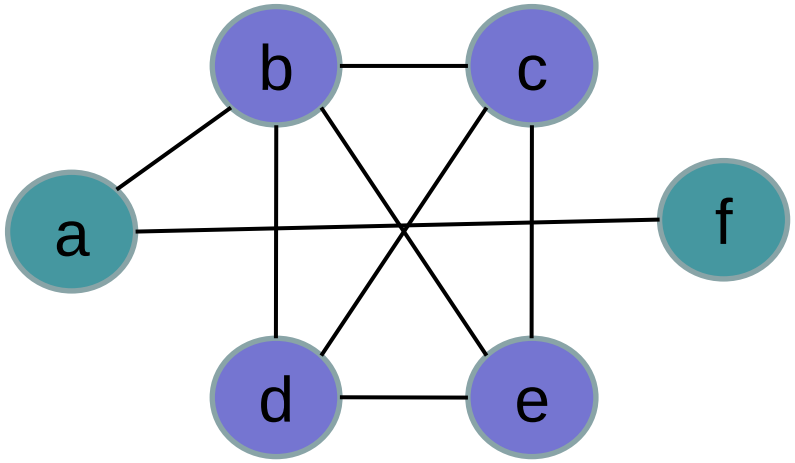
CLIQUE

Passo 1: Clique $\in NP$

V = { a, b, c, d, e, f }

A = { (a,b), (a,f), (b,c), (b,d), (b,e),
(c,d), (c,e), (d,e) }

V' = { b, c, d, e }



Dado um grafo $G = (V, A)$, a solução (**certificado**) V' e k, verificar se V' é válido e se $|V'| \geq k$ em tempo polinomial

Se $|V'| < k$ **então retorne** *Falso*
Para cada $u \in V'$
Para cada $v \in V'$
Se $u \neq v$ **então** verificar se $(u, v) \in A$

Complexidade?

3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE

- **Passo 2**: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.

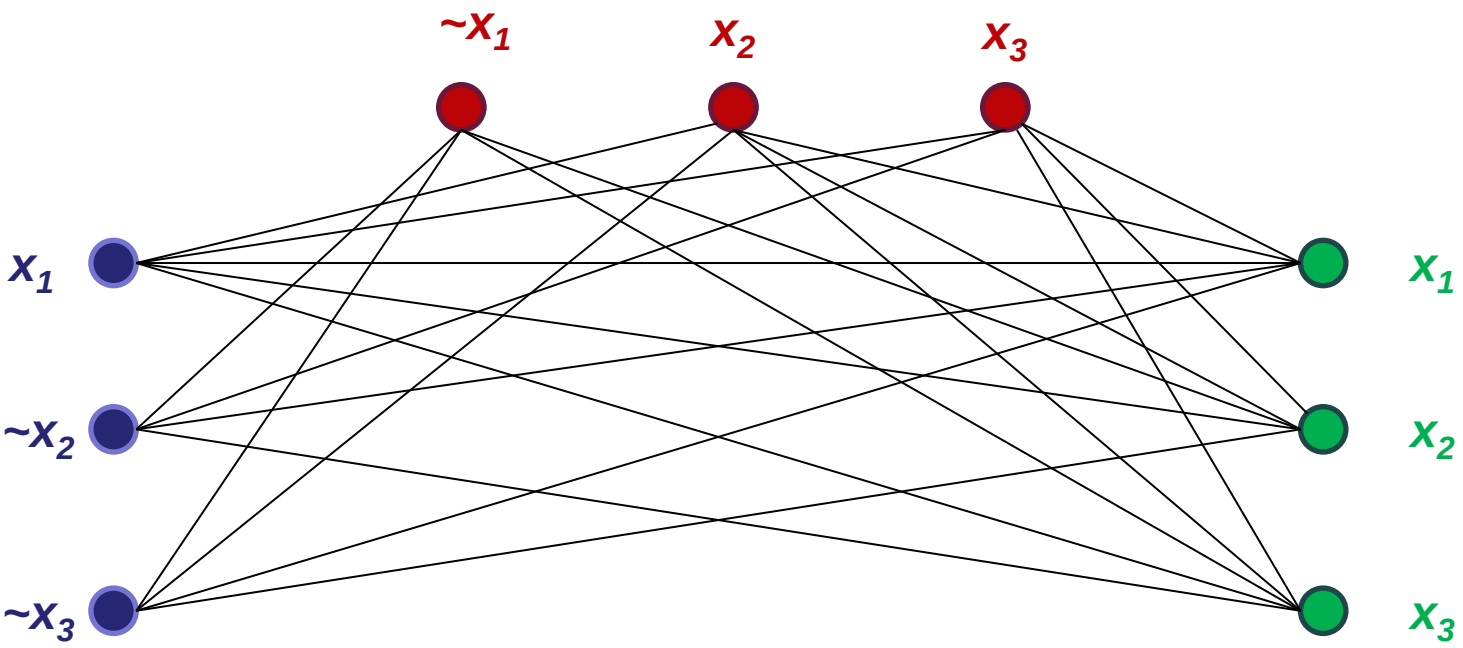
Dada uma instancia ϕ do problema 3-CNF-SAT converteremos esta para um grafo G que terá 3k vértices, onde k é o número de cláusulas de ϕ.

– ***u*** e ***v*** são vértices que correspondem a literais em diferentes cláusulas;
– Todos os vértices são ligados por arestas, com exceção:
  - se ***u*** e ***v*** pertencem a mesma cláusula, então não há ligação;
  - se ***u*** corresponde a um literal ***x***, e ***v*** corresponde ao literal ***~x,*** então não há ligação entre esses dois vértices;

3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE

- **Passo 2**: 3-CNF-SAT $\leq_p$ CLIQUE.

$$\phi = (x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3) \wedge (\sim x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

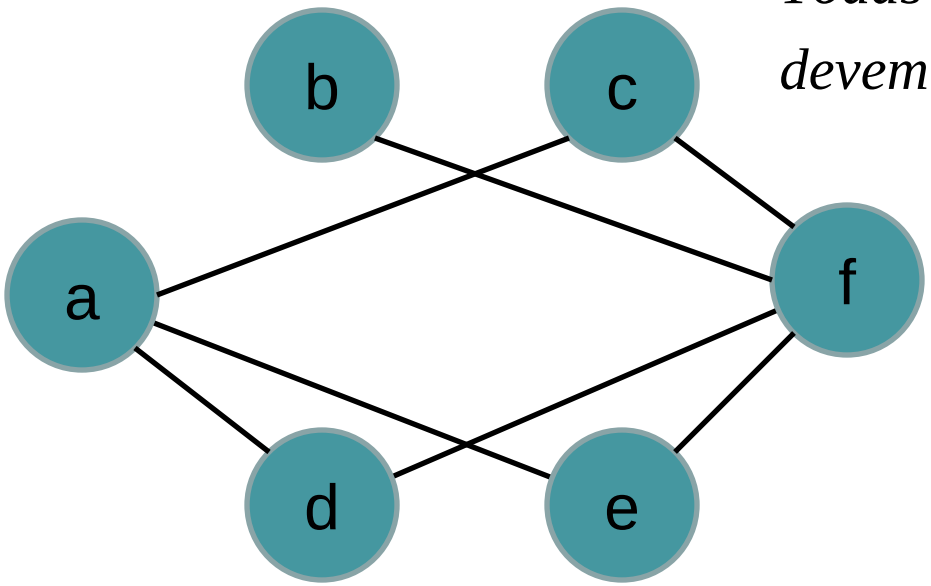


ϕ é satisfazível $\leftrightarrow$ G possui um clique $\geq$ k

Cobertura de Vértices
(VERTEX-COVER)

Uma *Cobertura de Vértices* de um grafo não orientado $G = (V, A)$ é um subconjunto $V' \subseteq V$ tal que se $(u, v) \in A$, então $u \in V'$ ou $v \in V'$.

Todas as arestas devem ser observadas!

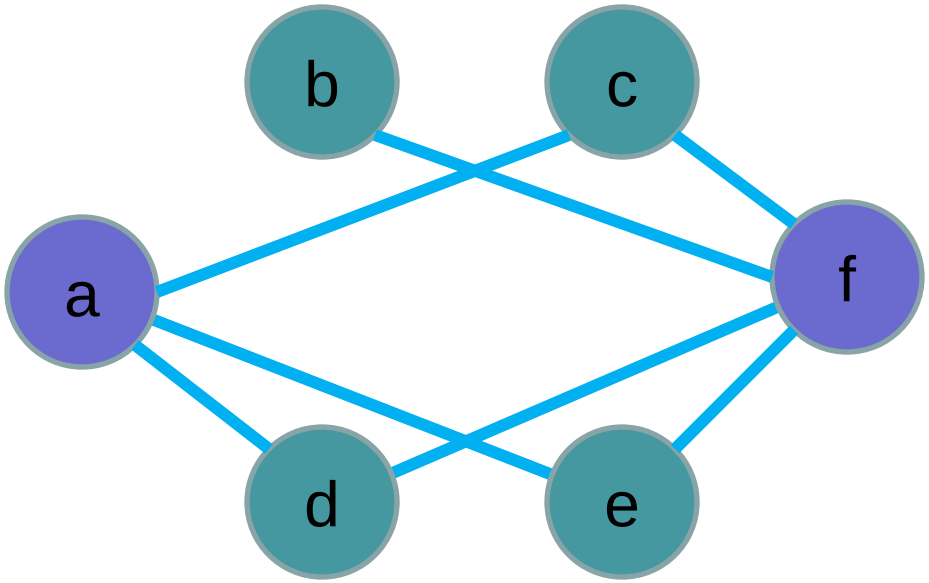


UDESC

Cobertura de Vértices
(VERTEX-COVER)

Versão de otimização: Encontrar menor Cobertura de Vértices.

Versão de decisão: Existe uma cobertura de tamanho *k*?



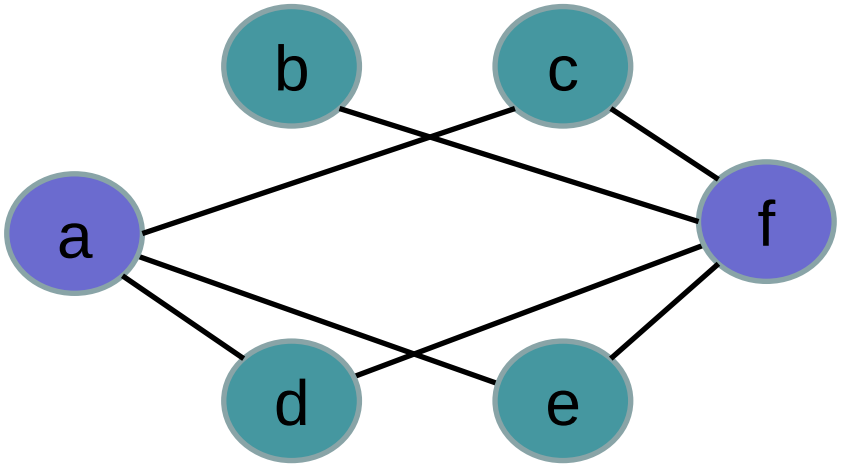
Cobertura de Vértices
(VERTEX-COVER)

Passo 1: Cobertura de Vértices $\in$ NP.

V = { a, b, c, d, e, f }

A = { (a,c), (a,d), (b,f), (c,f), (f,e) }

V' = { a, f }



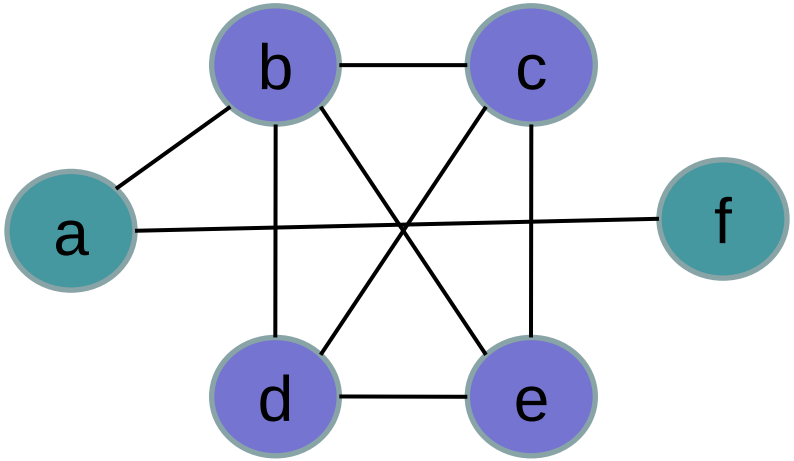
Dado um grafo $G = (V, A)$ e a solução (**certificado**) V' verificar se V' é válido e se $|V'| \leq k$ em tempo polinomial

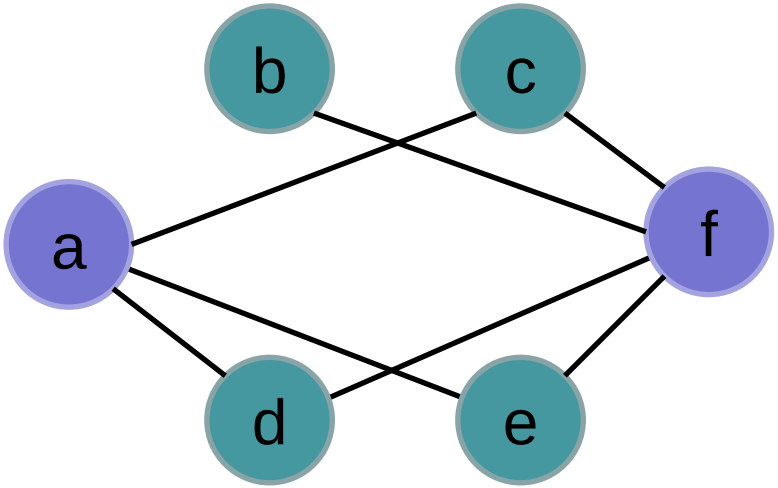
Se $|V'| > k$ **então retorne** *Falso*
Para cada $(u, v) \in A$
  Verificar se $u \in V'$ ou $v \in V'$

Complexidade?

CLIQUE $\leq_p$ VERTEX-COVER

- **Passo 2**: CLIQUE $\leq_p$ VERTEX-COVER





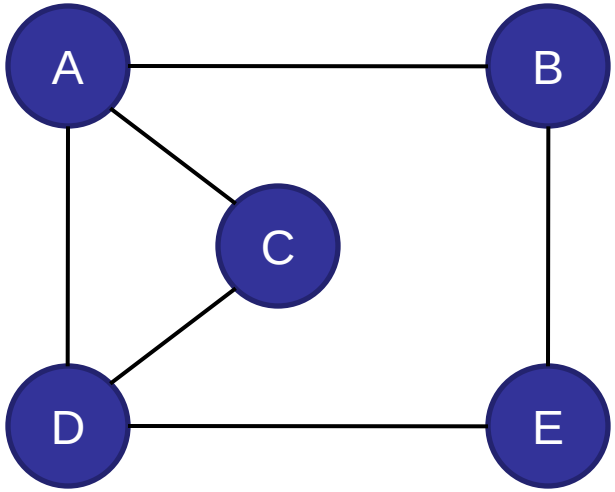
CLIQUE
Entrada (G, k), onde $G = (V, A)$

VERTEX-COVER
Entrada $(\overline{G}\ , |V| - k)$

Ciclo Hamiltoniano

Um ***Ciclo Hamiltoniano*** em um grafo não orientado é um caminho que passa por cada vértice do grafo exatamente uma vez e retorna ao vértice inicial.

Versão de decisão: um grafo *G* possui um ciclo Hamiltoniano?



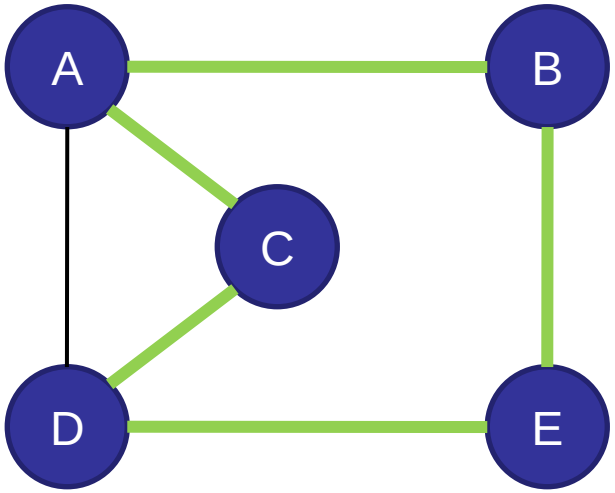
Ciclo Hamiltoniano

Passo 1: Ciclo Hamiltoniano $\in NP$

V = { a, b, c, d, e }

A = { (a,b), (a,c), (a,d), (b,e), (c,e), (d,e) }

V' = { a, b, e, d, c }



Dado um grafo $G = (V, A)$ e a solução (**certificado**) V'
verificar se V' é um ciclo Hamiltoniano em tempo polinomial

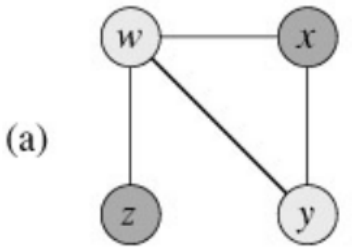
```
Para cada v ∈ V: viz[v] = não marcado
Para cada v' ∈ V':
     Se viz[v']==marcado: retorne falso
     Senão: viz[v'] = marcado
Para cada x ∈ viz:
     Se x não está marcado: retorne falso
retorne verdadeiro
```

Complexidade?

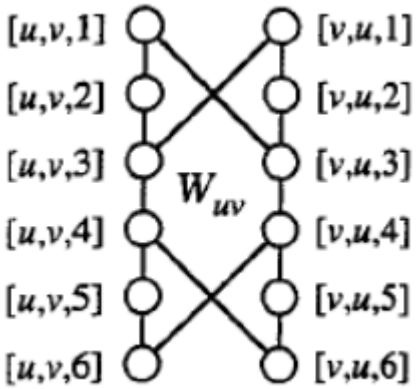
Ciclo Hamiltoniano

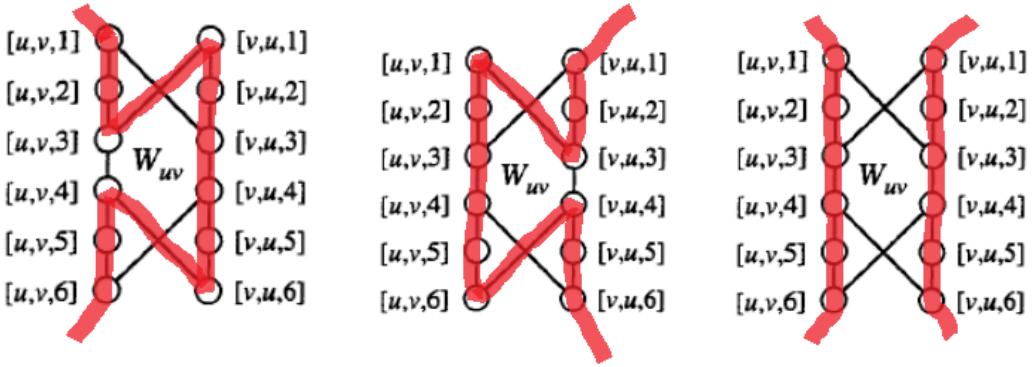
- **Passo 2**: VERTEX-COVER $\leq_p$ CICLO HAMILTONIANO

Dado um grafo instância do problema de Cobertura de vértices G = (V , E), devemos:



- criar ***k*** vértices seletores, onde ***k*** é o número de vértices que pertencem a solução da cobertura;
- criar ***E*** dispositivos, totalizando ***E* * 12*** novos vértices e ***E * 14*** arestas;





Ciclo Hamiltoniano

- **Passo 2**: VERTEX-COVER $\leq_p$ CICLO HAMILTONIANO

- criar uma lista com as adjacências de cada nó (para formar um caminho entre todas as coberturas de um vértices):

  u: $u_1, u_2, \ldots u_{grau(u)}$

  v: $v_1, v_2, \ldots v_{grau(v)}$

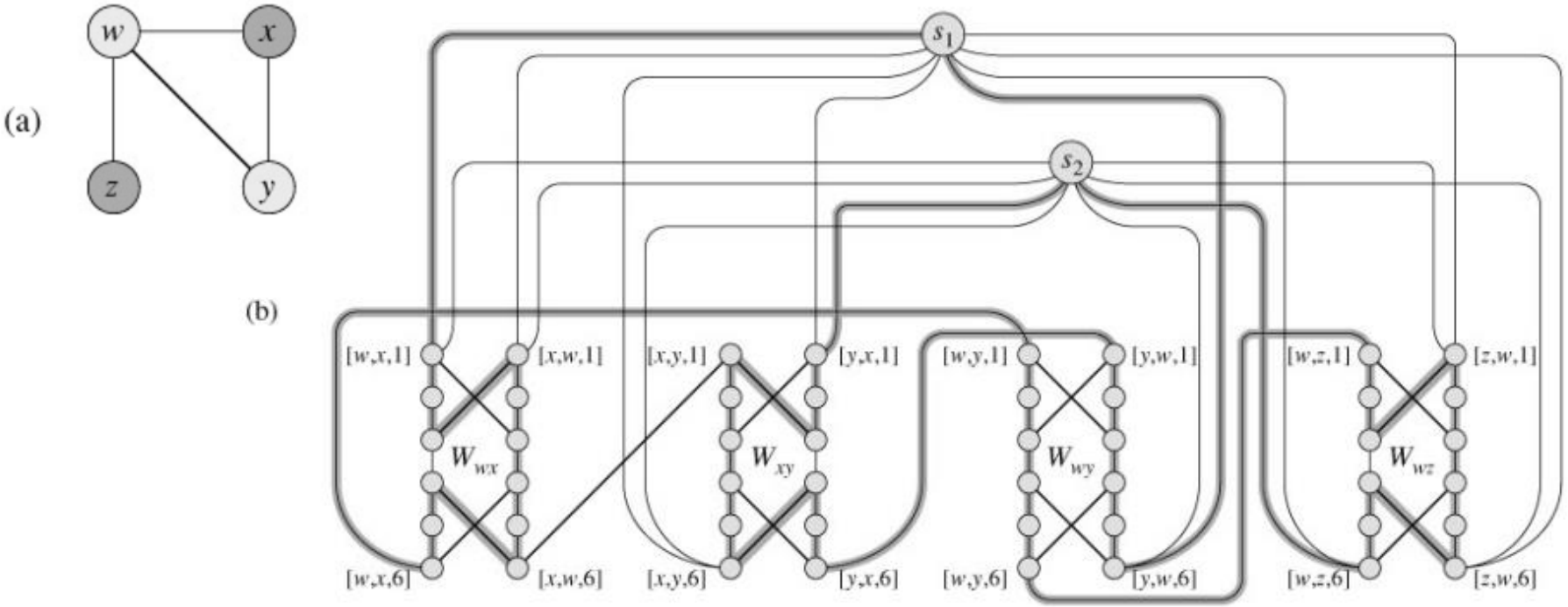
  - adicionar arestas para unir pares de dispositivos: $\{([u,u_i,6],[u,u_{i+1},1]), \ldots \}$
  - criar arestas para unir o primeiro $[u, u_1, 1]$ e o último vértice $[u, u_{grau(u)}, 6]$ de cada um desses caminhos a cada vértice seletor.

    $\{(sj, [u, u_1, 1]) : u \in V \text{ e } 1 \leq j \leq k\}$

    $\{(sj, [u, u_{grau(u)}, 6]) : u \in V \text{ e } 1 \leq j \leq k\}$

Ciclo Hamiltoniano

- **Passo 2**: VERTEX-COVER $\leq_p$ CICLO HAMILTONIANO



s1 → W_{wx} → W_{wy}* → W_{wz} → s2 → W_{yx} → W_{yw}* → s1

O caminho 3 entre dispositivos (*) só ocorre em arestas compartilhadas por vértices que fazem parte da solução da cobertura de vértices

Ciclo Hamiltoniano

- **Passo 2**: VERTEX-COVER $\leq_p$ CICLO HAMILTONIANO

Importante: note que o novo grafo G' = (V', E')

$| V' | = 12 |E| + k$

$| V' | \leq 12 |E| + |V|$

Instância cresceu apenas em tamanho polinomial

$| E' | = 14 |E| + (2|E| - |V|) + (2k |V|)$

$| E' | = 16 |E| + (2k - 1) |V|$

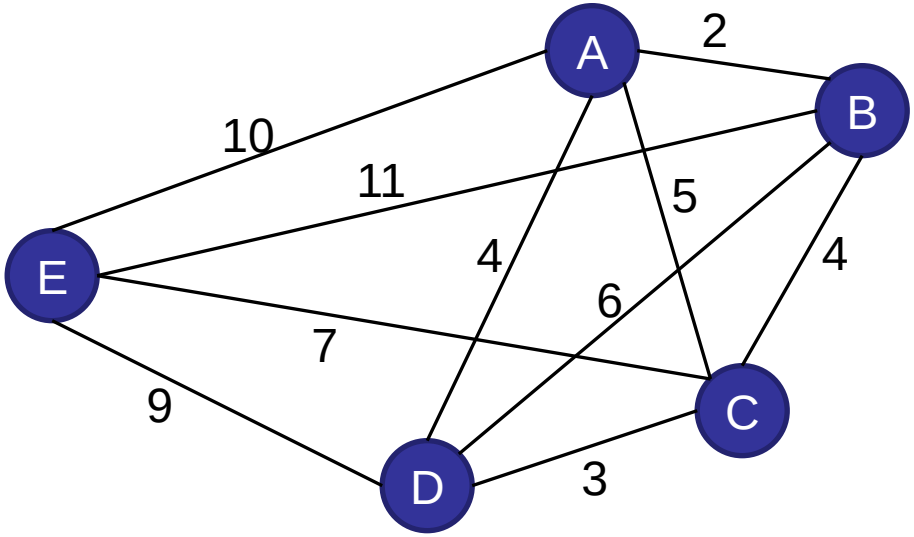
$| E' | \leq 16 |E| + (2|V| - 1) |V|$

Problema do Caixeiro Viajante

Um vendedor deseja visitar *n* cidades e retornar a cidade de origem. Dado um grafo não orientado completo com *n* vértices, onde existe um custo *c*(*i*, *j*) (associado a cada aresta) para viajar da cidade *i* a cidade *j*.

Otimização: Qual é o menor caminho para o vendedor?

Decisão: Existe um caminho para o vendedor com custo máximo igual a *k*?



Problema do Caixeiro Viajante

Passo 1: Caixeiro Viajante $\in NP$

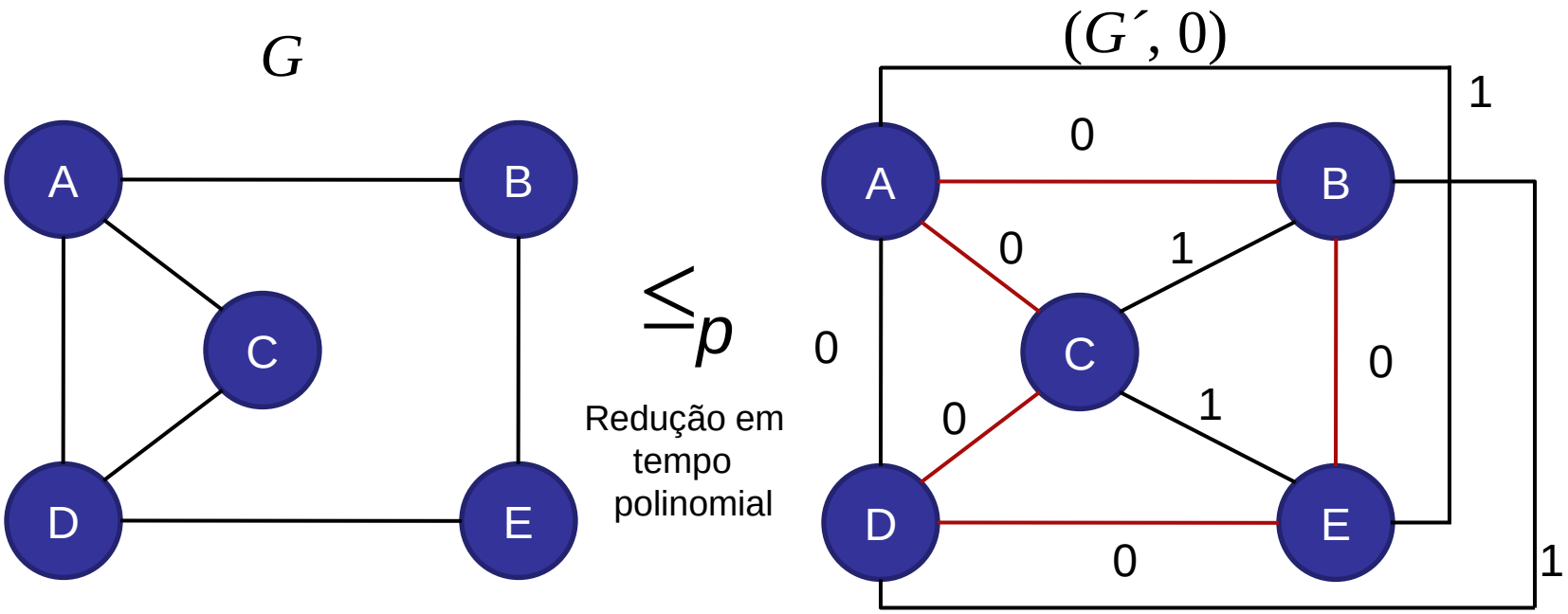
Dado um grafo $G = (V, A)$, a solução (**certificado**) V' e o custo máximo k, verificar se V' é um caminho válido do Caixeiro com custo menor ou igual a k em tempo polinomial

```
Para cada v ∈ V: viz[v] = não marcado
custo = 0, n = |V'|
Se V'[0] ≠ V'[n-1]: retorne falso
Para i=0 até n-2:
     Se viz[ V'[i] ]==marcado: retorne falso
     Senão: viz[ V'[i] ] = marcado
            custo = custo + G[ V'[i] ][ V'[i+1] ].custo
Se custo > k: retorne falso
Para i=0 até n-1:
     Se viz[ i ] == não marcado: retorne falso
retorne verdadeiro
```

Complexidade?

Redução do Problema do Ciclo Hamiltoniano ao Problema do Caixeiro Viajante

- **Passo 2**: CICLO HAMILTON $\leq_p$ CAIXEIRO



para cada vértice i
  para cada vértice j
    se $(i, j) \in H$ então $c(i, j) \leftarrow 0$
    senão $c(i, j) \leftarrow 1$

UDESC

SUBSET-SUM

Dado um conjunto finito de inteiros positivos S e um inteiro $t > 0$, determinar se existe um subconjunto $S' \subseteq S$ onde o somatório dos elementos de S' é igual a t.

$$\sum_{i=1}^{n} s'_i = t$$

Exemplo: S = {1, 2, 7, 14, 49, 98, 343, 686, 2.409, 2.793, 16.808, 17.206, 17.705, 117.993 }

t = 138.457

UDESC

SUBSET-SUM

Exemplo:

S = {1, 2, 7, 14, 49, 98, 343, 686, 2.409, 2.793,
16.808, 17.206, 17.705, 117.993 }

t = 138.457

S’ = { 1, 2 , 7, 98, 343, 686, 2.409, 17.206, 117.705 }

SUBSET-SUM

Passo 1: Subset-Sum $\in$ *NP*

Dado um conjunto de números inteiros S, o valor t objetivo e a solução (**certificado**) *S´*, verificar se *S´* é uma solução do problema em tempo polinomial.

```
soma = 0
Para cada s' ∈ S':
      Se s' ∉ S: retorne falso
      soma = soma + s'
Se soma != t: retorne falso
Senão: retorne verdadeiro
```

Complexidade?

UDESC

SUBSET-SUM

Passo 2: 3-CNF-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM

Dada uma fórmula ϕ instância de 3-CNF-SAT, devemos:

- Criar dois números para cada variável x_i em ϕ: v_i e v'_i
- Criar dois números para cada cláusula C_j em ϕ: s_j e s'_j

Cada número criado terá **n + k** dígitos, onde **n** é o número de variáveis e **k** é o número de cláusulas.

O valor **t** terá um valor 1 para cada dígito identificado por variável e 4 em cada dígito identificado por uma cláusula

UDESC

SUBSET-SUM

Passo 2: 3-CNF-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM

- Para cada variável v_i *e* v'_i colocamos o valor 1 no dígito identificado por x_i e 0 nos outros dígitos;
- Se o literal x_i aparece na cláusula C_j, então o dígito identificado por C_j em v_i contém valor 1;
- Se o literal $\sim x_i$ aparece na cláusula C_j, então o dígito identificado por C_j em v_i contém valor 0;
- Para cada s_j e s'_j colocamos valor 0 em todos os dígitos, com duas exceções:

  em s_j colocamos 1 no dígito C_j

  em s'_j colocamos 2 no dígito C_j

3-CNF-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM

$$(\sim x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \sim x_3)$$

S = { 1, 2, 10, 20, 100, 111,
1.000, 1.011, 10.001,10.010 }

t = 11144

S' = { 10001, 1011, 111, 20, 1 }
{ $v_1, v_2, v'_3, s'_1, s_2$ }

X_1 = V, X_2 = V, X_3 = F

	x_1	x_2	x_3	C_1	C_2
v_1	1	0	0	0	1
v'_1	1	0	0	1	0
v_2	0	1	0	1	1
v'_2	0	1	0	0	0
v_3	0	0	1	0	0
v'_3	0	0	1	1	1
s_1	0	0	0	1	0
s'_1	0	0	0	2	0
s_2	0	0	0	0	1
s'_2	0	0	0	0	2
t	1	1	1	4	4

UDESC

3-CNF-SAT $\leq_p$ SUBSET-SUM

Note que a maior soma de cada coluna (dígito) é no máximo 6.

Assim, para esta conversão devemos usar uma base ≥ 7.

A redução de 3-CNF-SAT para SUBSET-SUM acontece em tempo polinomial.

UDESC

Algoritmos que Executam em Tempo Pseudo-Polinomial

Usando programação dinâmica podemos implementar um algoritmo pseudo-polinomial com complexidade $O(nt)$, onde ***n*** é o número de elementos no conjunto e ***t*** o valor do somatório que se deseja alcançar!!

Como assim **pseudo-polinomial**?

Se o valor de ***t*** é limitado por um polinômio existe uma solução eficiente. Mas, se o valor de **t** for muito grande (e.g. $t = 2^n$), a solução deixa de ser eficiente, se tornando exponencial ou pior.

(Números pequenos [64 bits] vs. BigInt [n bits])

UDESC

Programação Dinâmica (*Subset-Sum*)

Dado um conjunto de inteiros positivos, representados como um arranjo $S[1..n]$, e um inteiro t, existe algum subconjunto de S tal que a soma de seus elementos seja t.

$$SubsetS(i,t) = \begin{cases} Verdade & \text{se } t = 0 \\ Falsidade & \text{se } t < 0 \vee i > n \\ SubsetS(i+1,t) \vee SubsetS(i+1,t-x[i]) \end{cases}$$

Exemplo: $x = \{2, 3, 5\}$ e $t = 8$.

UDESC

Programação Dinâmica (*Subset-Sum*)

SubsetSum ($x[1..n]$, t)

S[n + 1, 0] ← Verdade

para j ← 1 até t

S[n + 1, j] ← Falso

para i ← n até 1

S[i, 0] ← Verdade

para j ← 1 até $x[i] - 1$

S[i, j] ← S[i + 1, j]

para j ← $x[i]$ até t

S[i, j] ← S[i + 1, j] v S[i + 1, $j - x[i]$]

retorne S[1,t]

Programação Dinâmica (*Subset-Sum*)

Exemplo: $x = \{1, 3, 5, 7\}$ e $t = 9$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
2	V	F	F	V	F	V	F	V	V	F
3	V	F	F	F	F	V	F	V	F	F
4	V	F	F	F	F	F	F	V	F	F
5	V	F	F	F	F	F	F	F	F	F

UDESC

Algoritmos que Executam em Tempo Pseudo-Polinomial

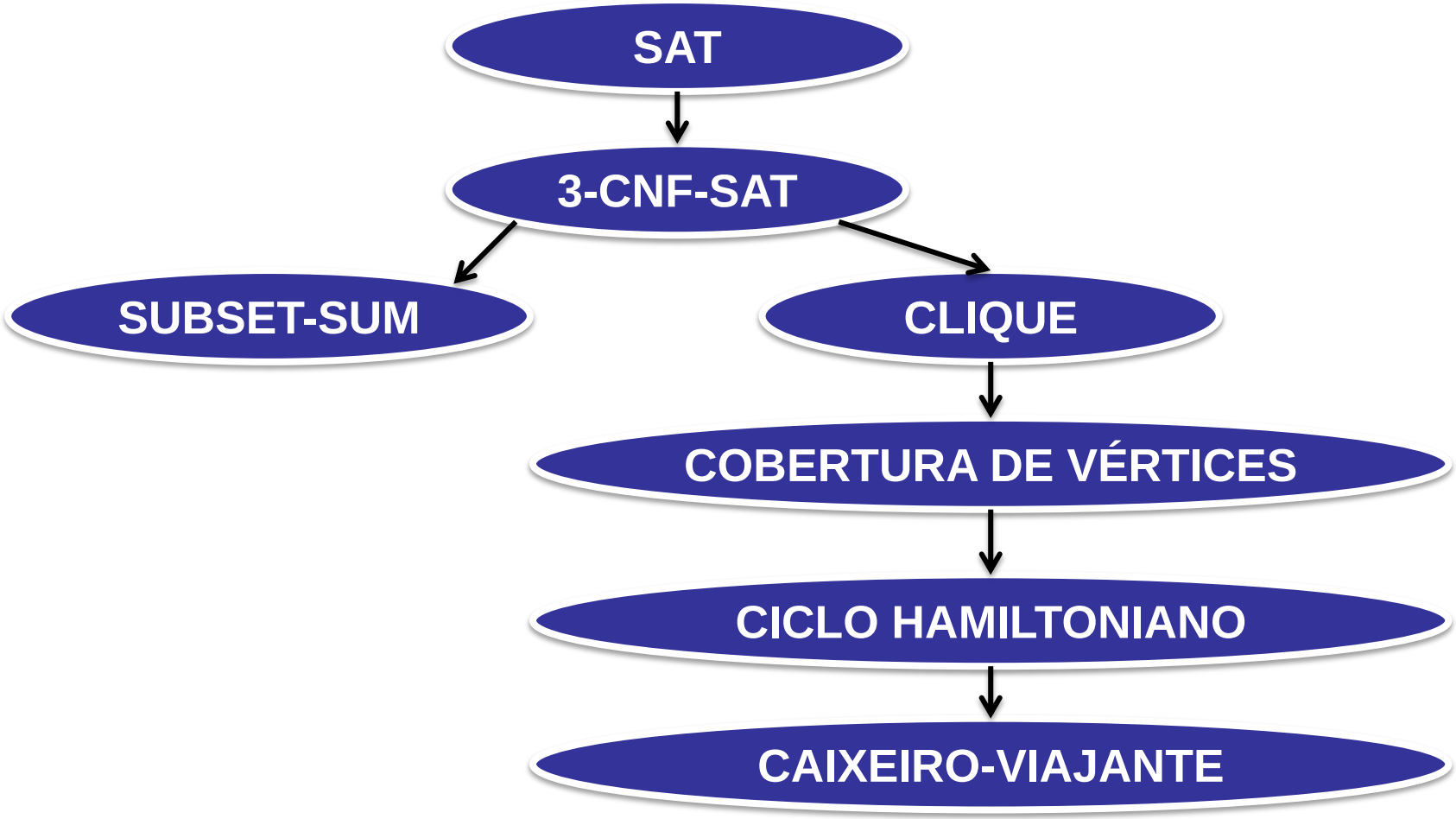
A restrição de ***t*** pequeno pode ser bastante razoável na prática:

- Problemas onde é impossível a ocorrência de números muito grandes (*e.g.* problemas de escalonamento);
- Problemas onde o tamanho do número possa ser restrito ao tamanho da palavra do processador.

Note contudo que esse não é o caso da redução do 3-CNF-SAT ao SUBSET-SUM, onde o valor de ***t*** *cresce exponencialmente em relação ao número de variáveis e cláusulas presentes na fórmula booleana.*

Reduções

Resumindo, quais reduções de problemas foram feitas:



UDESC

Referências

Algoritmos. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Cliford Stein. Campus.

Algorithms. Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou, Umesh Vazirani. McGraw Hill.

Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition). Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik. Addison Wesley.

M. R. Garey and D. S. Johnson. 1978. *"Strong" NP-Completeness Results: Motivation, Examples, and Implications*. J. ACM 25, 3 (July 1978)