Lógica e Álgebra de Boole

Introdução à Ciência da Computação
ICC0001

Prof. Diego Buchinger

Introdução

- Questões de lógica podem envolver múltiplas variáveis que podem assumir dois valores: VERDADEIRO ou FALSO

Exemplo de problema:

Desde há cerca de 100 anos, que, através de expedições periódicas a uma ilha deserta, os cientistas têm estudado cinco grupos de animais bastante curiosos nas relações que estabelecem entre si. Os nomes por que são conhecidos estes grupos pela comunidade científica são blorg, zorg, plorg, torg e maquinilorg. Cada um destes grupos apresenta uma característica dominante em relação aos restantes grupos e das quais podemos referir que os zorg são excelentes corredores, os plorg são exímios voadores e os maquinilorg são exclusivamente animais nocturnos.

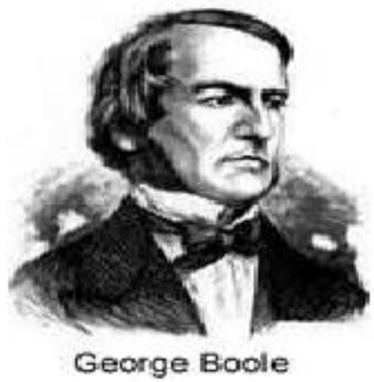
Introdução

Exemplo de problema:

Recentemente foi apresentado um relatório sobre os referidos grupos e eis algumas das conclusões: Alguns dos animais corredores são também saltadores (mas não existe um único destes corredores capaz de nadar) e alguns dos saltadores são torgs, onde se encontram ainda alguns voadores; os voadores incluem ainda alguns animais noctívagos mas nenhum deles é nadador ou saltador. Também ficou esclarecido que nenhum dos voadores é saltador e que apenas três dos grupos estudados, no conjunto total da sua população, podem apresentar mais do que duas das características referidas. Sendo assim, responda "Sim" ou "Não" a cada uma das seguintes questões:

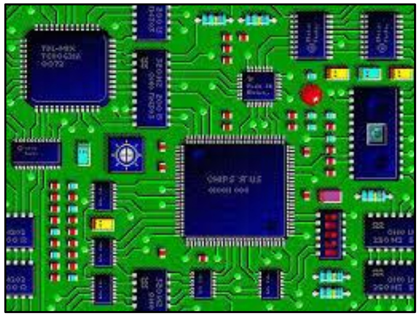
1 - Um zorg poderá ser blorg e torg ?
2 - Um blorg poderá ser torg ou plorg ?
3 - E poderá ser torg ou zorg ?
4 - Um maquinilorg poderá ser também plorg ?
5 - Se um plorg for torg, poderá ser zorg ?
6 - Um torg poderá ser blorg ou maquinilorg ?

Introdução



- Álgebra Booleana ou álgebra de Boole (1854)
  - Homenagem ao matemático inglês George Boole
  - Realizar uma análise matemática da lógica
  - Baseada nos sistemas binários

  - (1938) Percebeu-se que os estudos de matemática lógica poderiam ser aplicados a circuitos lógicos. De fato, qualquer circuito pode ser representado por um sistema de equações booleanas.



Termos utilizados na Álgebra de Boole

- **Variável**:
  - Letra ou símbolo que pode assumir qualquer valor em um conjunto de números, desde que o conjunto tenha mais de um número.
- **Variável lógica**:
  - Variável de um problema que só pode assumir dois valores:

    Verdadeiro (1) ou Falso (0)
  - Os dois valores são mutuamente excludentes:

    $A = 0$ ou 1 $B = 0$ ou 1
- **Complemento**:
  - Indica o inverso de uma variável ($\bar{A}$ ou A' → A negado ou A barrado)
- **Literal**:
  - Referencia uma variável lógica ou seu complemento.

Operações Booleanas

- Operação realizada sobre variáveis lógicas
- Compara valores e gera um novo valor lógico com base em regras bem definidas

- **Operações**:
  - Adição ou Conjunção → Operador AND (E)
  - Multiplicação ou Disjunção → Operador OR (OU)
  - Negação → Operador NOT (NÃO)

Multiplicação / Disjunção Booleana

- Representada por **AND**, **E** ou **.** (ponto)
- Operador Binário (requer dois operandos)
- REGRA: uma sentença é verdadeira somente se ambos os operandos / termos forem verdadeiros
- Sinônimo de **intersecção** na teoria dos conjuntos
- Exemplo
  - A . B

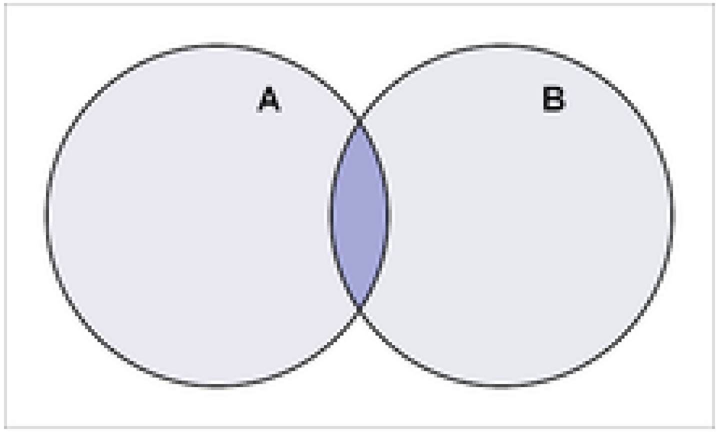
Resultados possíveis:

0 . 0 = **0**

0 . 1 = **0**

1 . 0 = **0**

1 . 1 = **1**



Adição/Conjunção Booleana

- Representada por **OR**, **OU**, **+**
- Operador Binário (requer dois operandos)
- <u>REGRA</u>: uma sentença é verdadeira quando ao menos um dos operandos / termos for verdadeiro
- Sinônimo de **união** na teoria dos conjuntos
- Exemplo
  - A + B

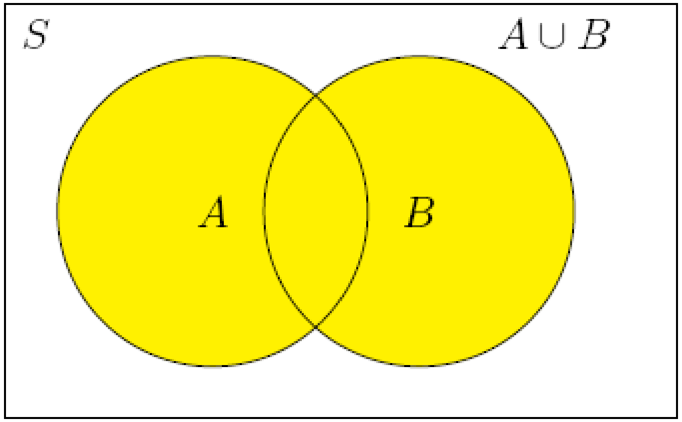
Resultados possíveis:

$0 + 0 = \mathbf{0}$

$0 + 1 = \mathbf{1}$

$1 + 0 = \mathbf{1}$

$1 + 1 = \mathbf{1}$



Negação ou Complemento Booleano

- Representada por **NOT**, **NÃO**, **‘** (apóstrofo) ou $\overline{\quad}$ (barra horizontal sobre o termo)
- Operador Unário (requer um operando)
- REGRA: inverte o valor do literal
- Sinônimo de complemento em teoria dos conjuntos
- Exemplo
  - $\bar{A}$

Resultados possíveis:

$\bar{0} = 1$

$\bar{1} = 0$

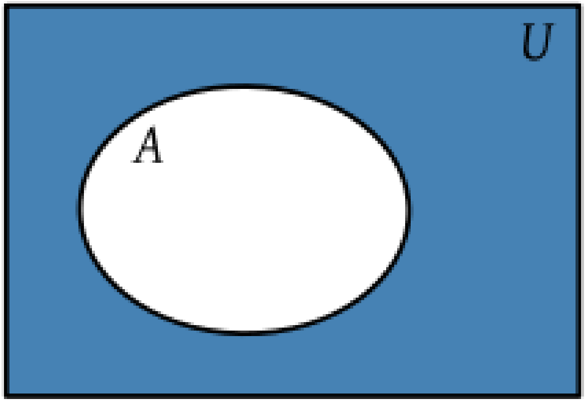


Tabela Verdade

- Conjunto de todas as possibilidades combinatórias entre os valores de diversas variáveis lógicas e um conjunto de operadores lógicos;

- Constrói-se uma tabela verdade com o objetivo de dispor de uma maneira prática os valores lógicos envolvidos em uma expressão lógica;

- Cada operador tem a sua coluna na tabela verdade;

Tabela Verdade

Negação

A	não A
F	V
V	F

Disjunção

A	B	A ou B
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Conjunção

A	B	A e B
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Funções Lógicas

- A composição de variáveis lógicas associadas a um resultado é uma função lógica:
  - $X = A + B$
  - $X = A \,.\, B$

- O valor de X depende da combinação dos valores de A e B
- Poderia ser escrito como:
  - $F(A, B) = A + B$
  - $F(A, B) = A \,.\, B$

Funções Lógicas

Ordem de solução

- Em um dado momento é possível se deparar com mais de uma operação lógica em uma função:

$$F(A,B) = A + B\ .\ \bar{A}$$

- A **prioridade de solução dos operadores** deve ser:

$$\text{NOT} \quad > \quad \text{E} \quad > \quad \text{OU}$$

(i.e. resolver primeiro NOT, depois E, depois OU)

- **<u>Cuidado</u>:** $F(A,B) = \overline{A + B}$
  - Neste caso o operador NOT é aplicado ao resultado da disjunção.

Funções Lógicas

Ordem de solução

$$F(A,B) = A + B\ .\ \bar{A}$$

- Se A for 1 e B for 0, o resultado será?
- E se A for 0 e B for 1?

$$F(A,B) = \overline{A + B}$$

- E neste caso?

Tabela Verdade

- $F(A, B) = A + B\ .\ \bar{A}$

A	B	$\bar{A}$	B . $\bar{A}$	F(A,B)
F	F	V	F	F
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	V	F	F	V

OBS: Pode-se utilizar 1's e 0's ao invés de V's e F's (respectivamente). Ambos estão corretos.

Tabela Verdade

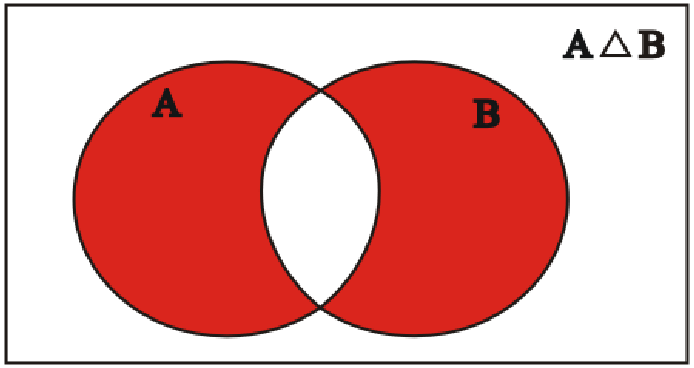
- $F(A,B) = \overline{A + B}$

A	B	$A + B$	F(A,B)
F	F	F	V
F	V	V	F
V	F	V	F
V	V	V	F

Operador OU Exclusivo (XOR)

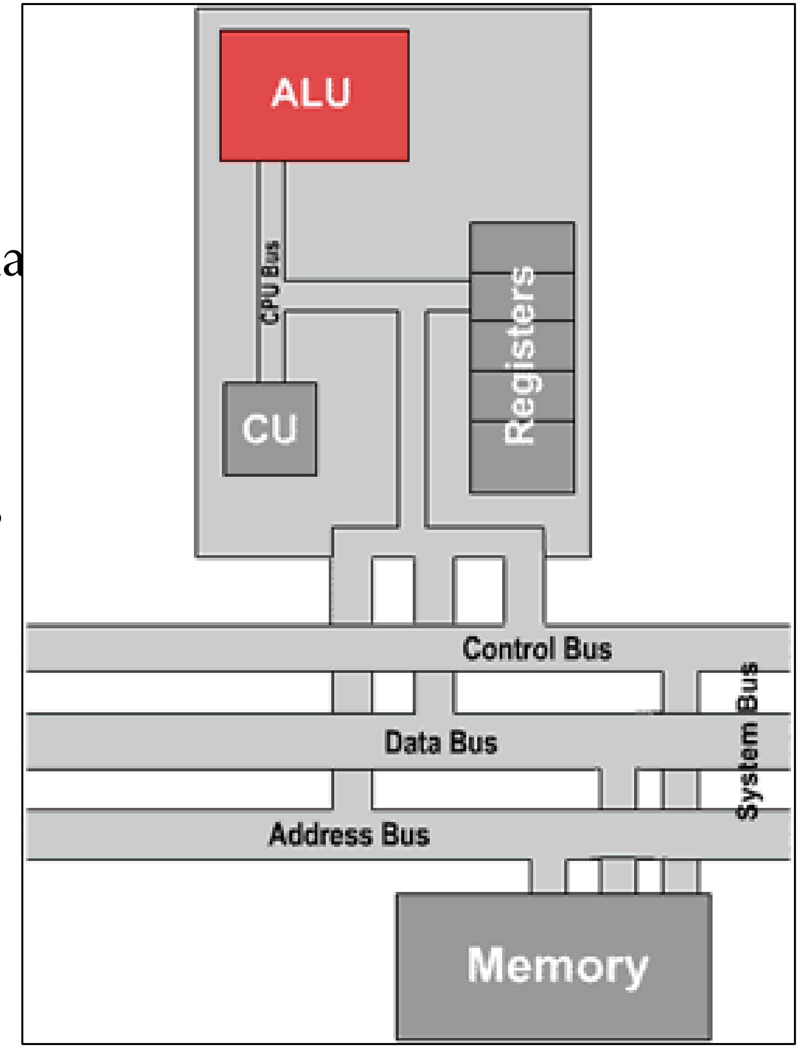
- Representada por **XOR**, $\oplus$ (símbolo da adição circulado)
- Operador Binário (requer dois operandos)
- REGRA: uma sentença é verdadeira quando apenas um dos operandos / termos for verdadeiro
- Sinônimo de diferença simétrica na teoria dos conjuntos
- $F(A,B) = A \oplus B$

A	B	F(A,B)
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F



NOTA Computacional

- Em um **computador** é a unida lógica e aritmética (ALU – *Arithmetic Logic Unit*) que realiza as operações lógicas booleanas e aritméticas sobre os dados digitais

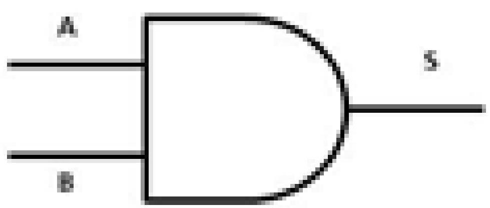


Representação de circuitos

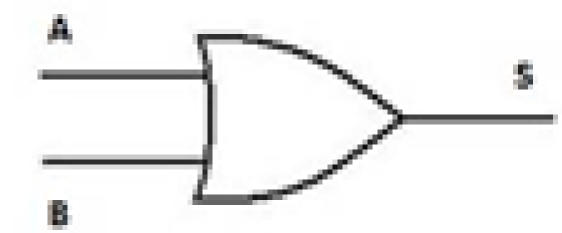
Álgebra de Boole e Circuitos

- Cada variável lógica é representada por uma **trilha**
- Cada operador lógico é representado por um **componente**

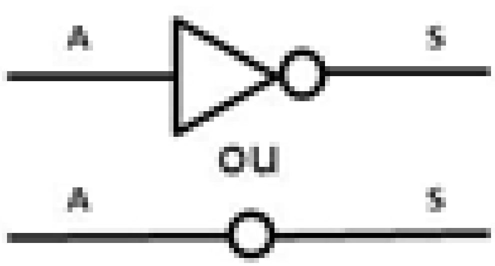
AND



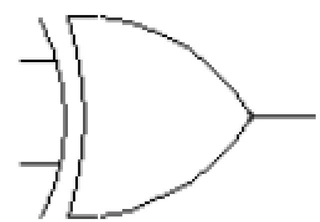
OR



NOT



XOR



Componentes adicionais

- Para simplificar os circuitos existem componentes compostos. Os mais usuais são:

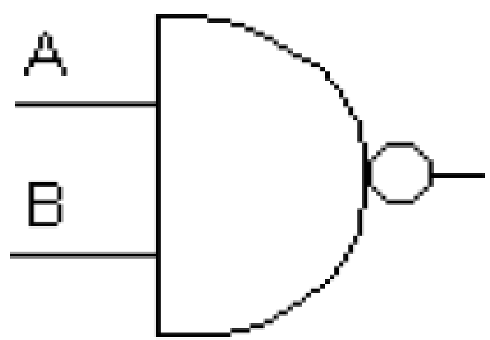
  - NAND ➔ Negação do AND
  - NOR ➔ Negação do OR

Operador NAND

- Representa a negação de AND
- <u>Resultado</u>: inverso do operador AND

- $F(A,B) = \overline{A.B}$

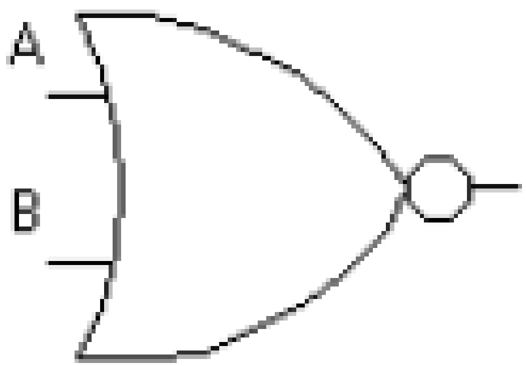
A	B	F(A,B)
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F



Operador NOR

- Represента a negação de OR
- <u>Resultado</u>: inverso do operador OR

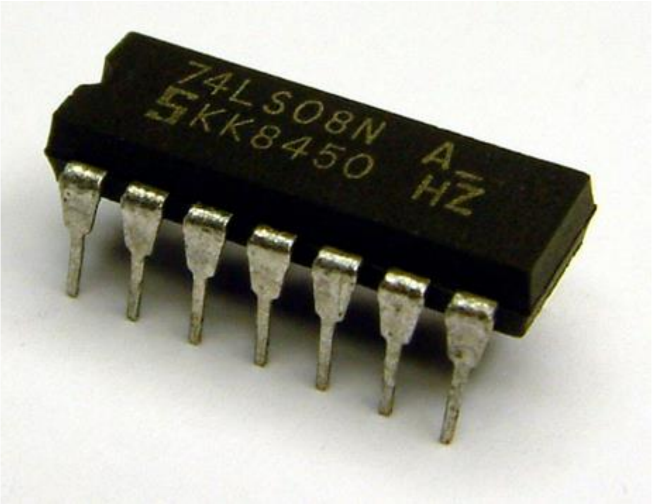
- $F(A,B) = \overline{A + B}$

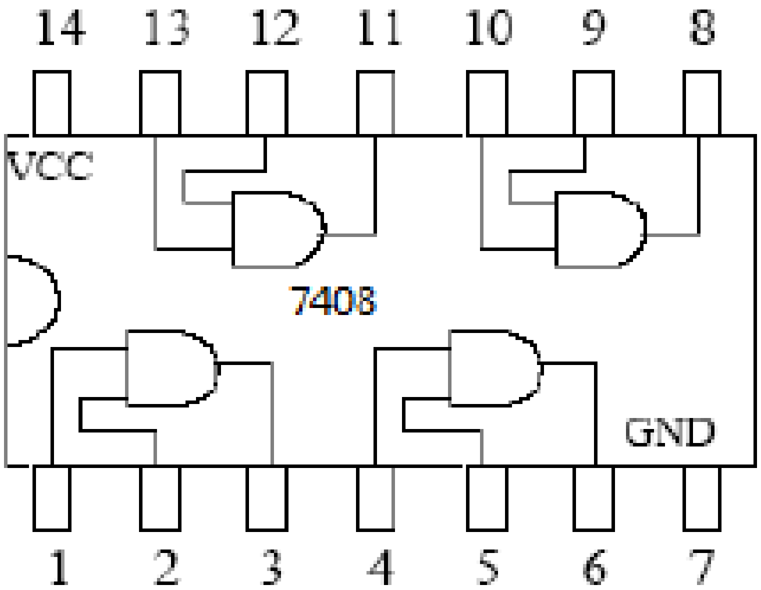


A	B	F(A,B)
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	F

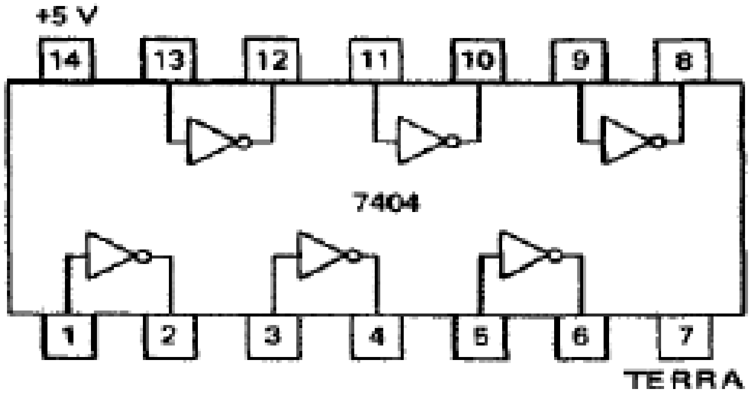
Uso dos Componentes

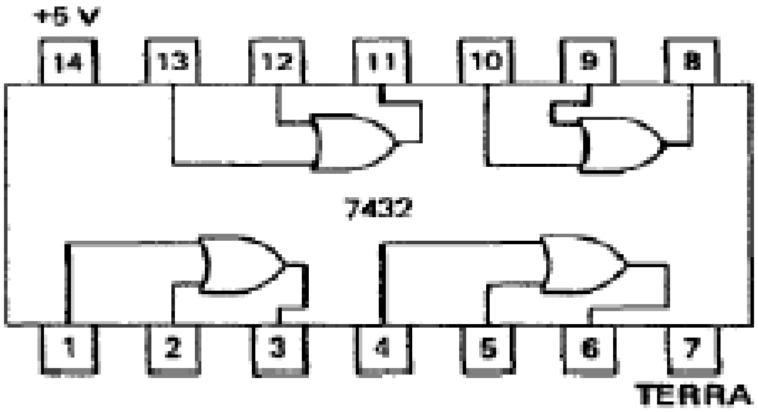
- **Circuitos integrados**





Uso dos Componentes





Representação

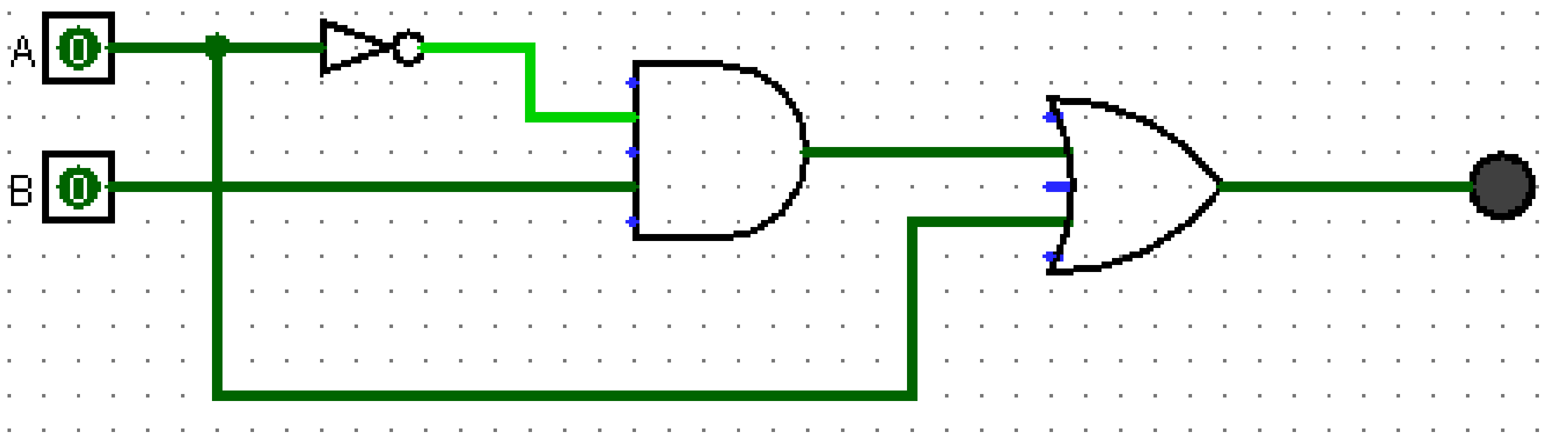
Transformar expressão lógica → circuito:

$$\boldsymbol{F(A,B) = A + B\ .\ \overline{A}}$$

Representação

Transformar expressão lógica → circuito:

$$F(A, B) = A + B \, . \, \overline{A}$$

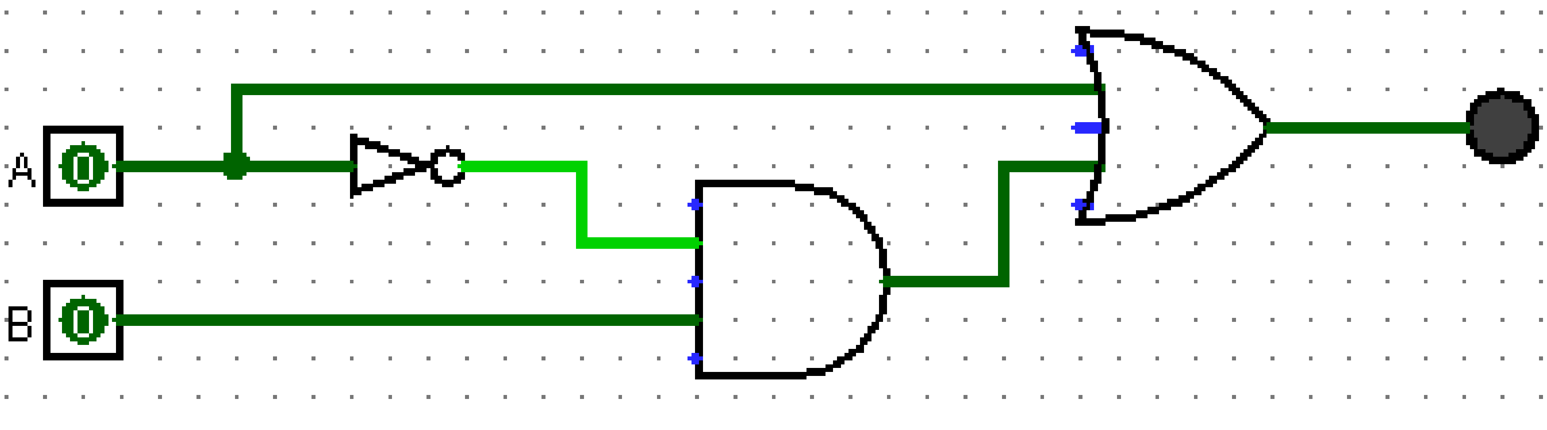


Representação

Transformar expressão lógica → circuito:

OBS: As trilhas podem passar "por cima" de outras trilhas, mas procurar evitar para facilitar o entendimento

$$\boldsymbol{F(A,B) = A + B\ .\ \overline{A}}$$



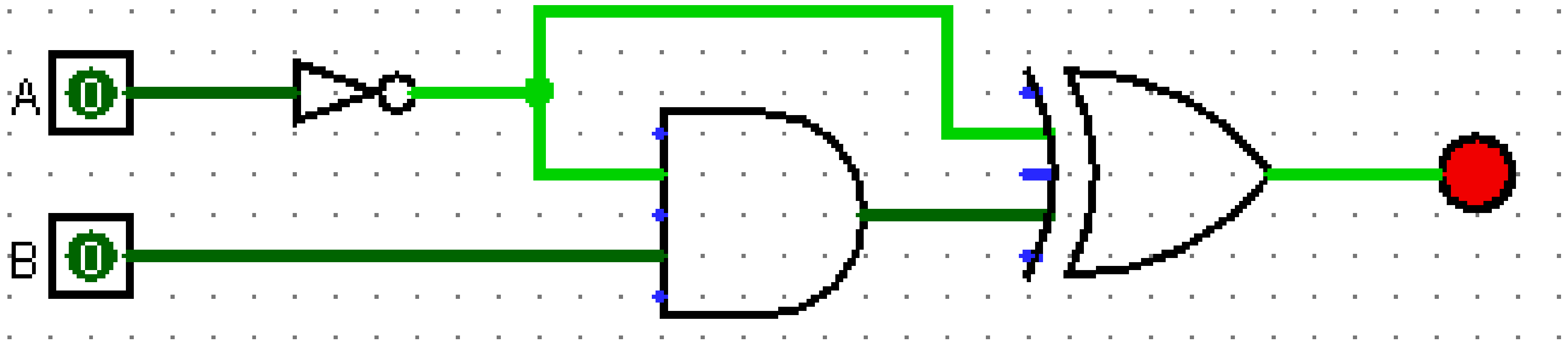
Representação

Transformar expressão lógica → circuito:

$$\boldsymbol{F(A, B) = \overline{A + B}}$$

Representação

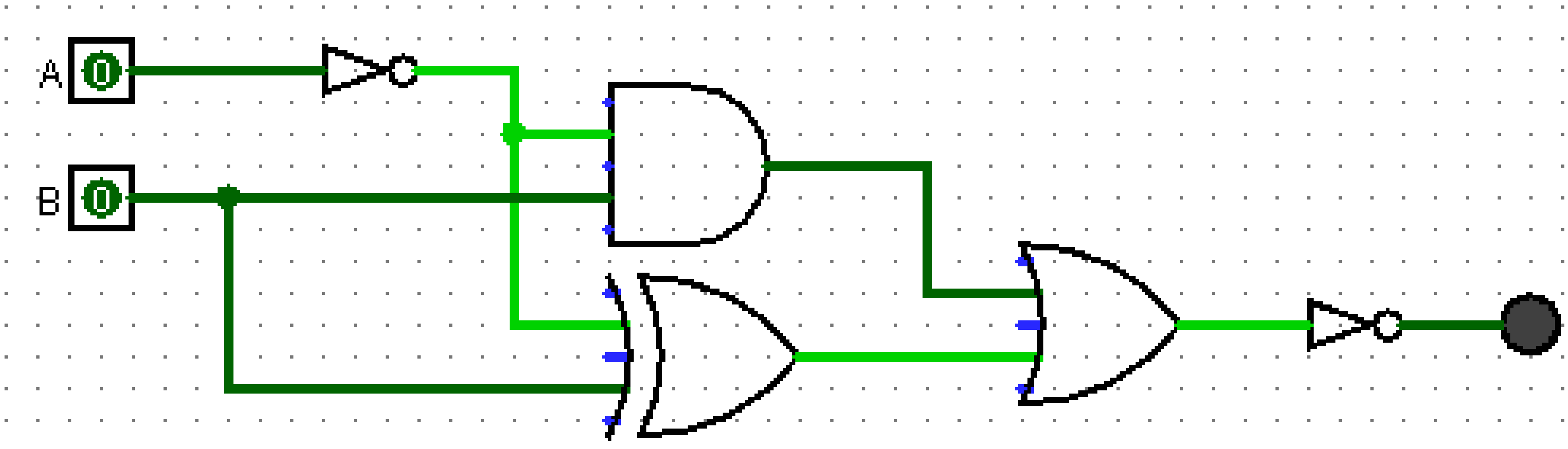
Transformar circuito → expressão lógica:



$$\boldsymbol{F(A,B) = (\bar{A}\,.\,B) \oplus \bar{A}}$$

Representação

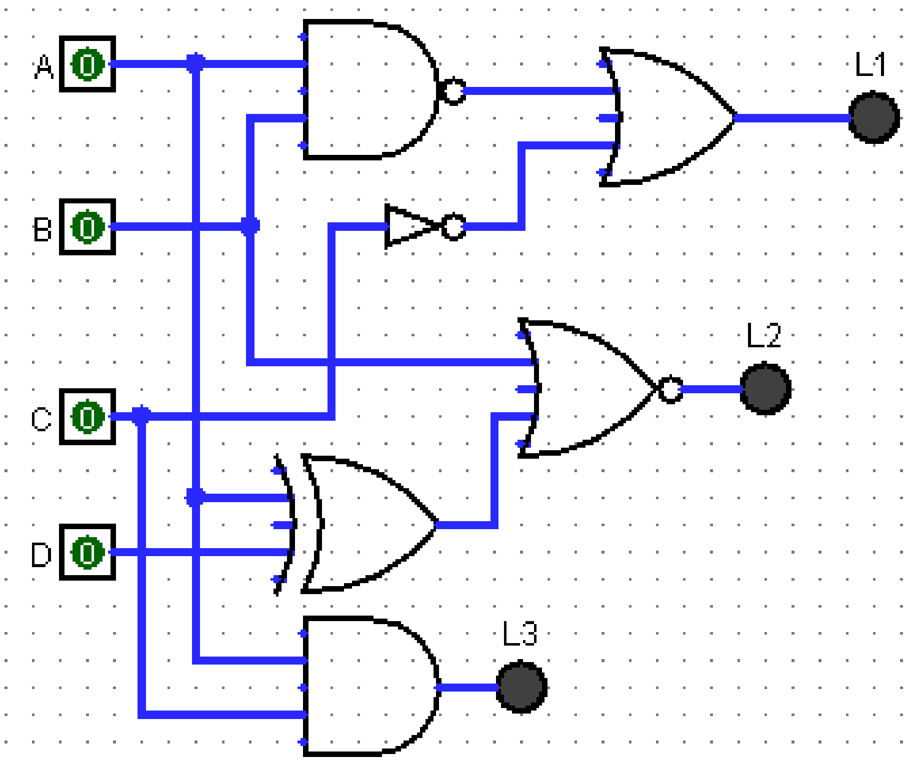
Transformar circuito → expressão lógica:



$$\boldsymbol{F(A,B) = ?}$$

Representação

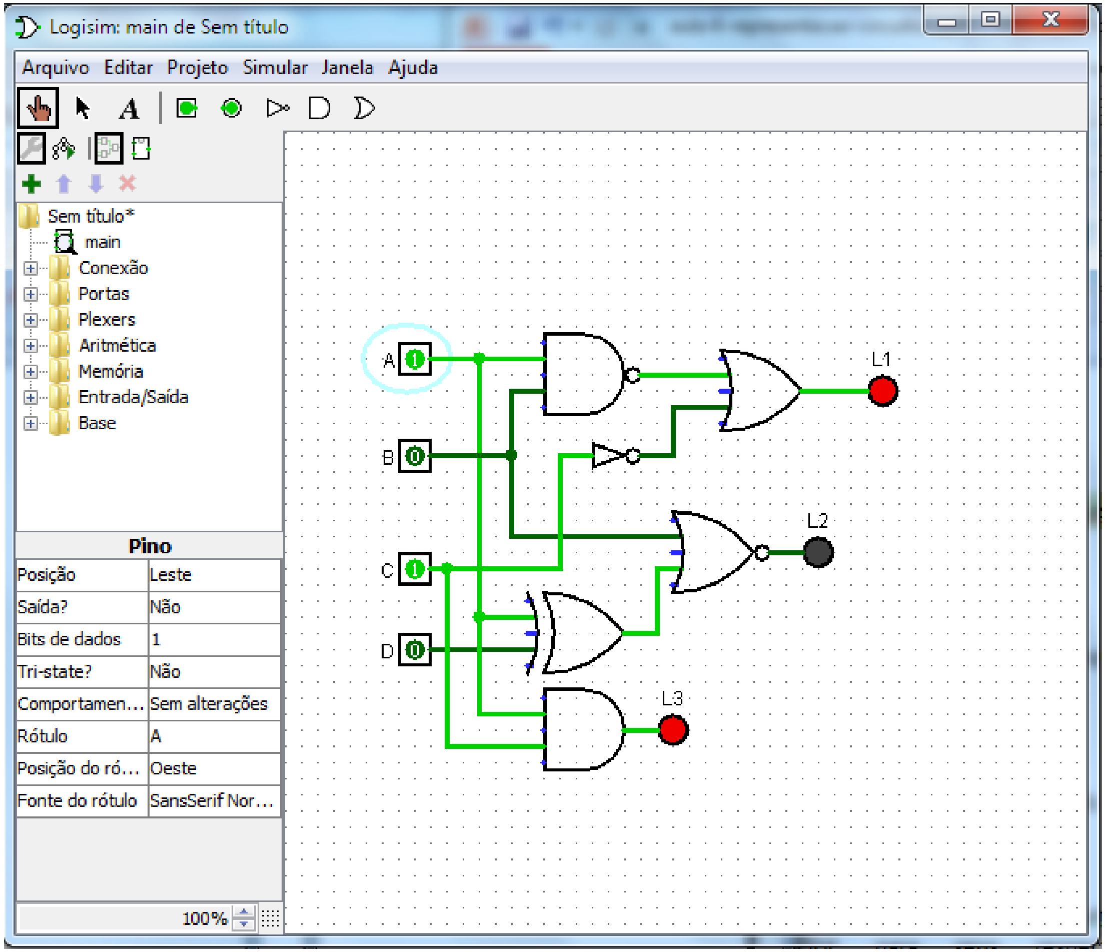
OBS: um circuito pode contar múltiplas saídas



L1 $=$? ***L2*** $=$? ***L3*** $=$?

Representação via Software

Logisim



Teoremas e Simplificações

Introdução

- Álgebra de Boole:
  - Variáveis lógicas
  - Representação de sentenças lógicas
  - Representação de circuitos como sentenças lógicas (vice-versa)

- Existe alguma motivação para simplificar expressões lógicas?

Introdução

- Existe alguma motivação para simplificar expressões lógicas?
  - Sim!!
  - Expressões com muitos operadores lógicos → circuitos com mais componentes → circuitos **mais caros**
  - Expressões com menos operadores lógicos → circuitos com menos componentes → circuitos **mais baratos**

Teoremas e Simplificações

- Algumas expressões lógicas podem ser simplificadas
- Fazemos simplificações mais sofisticadas & complexas com base em teoremas (simplificações) básicos

- Relembrando: em expressões lógicas podemos ter
  - Variáveis lógicas: que podem assumir os valores 1 ou 0
  - Constantes lógicas: que sempre assumem o valor 1 ou o valor 0

Teorema 1

$$\mathbf{A + 0 = A}$$

A	0	T(1) = A + 0
0	0	**0**
1	0	**1**

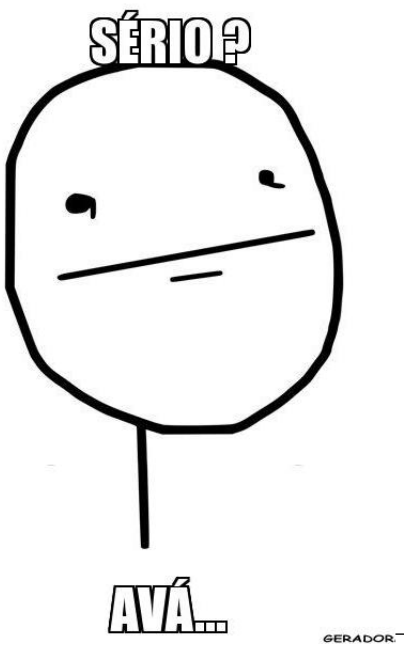
Teorema 2

$$A + 1 = 1$$

A	1	T(2) = A + 1
0	1	0
1	1	1

Teorema 3

$$A + A = A$$



A	T(3) = A + A
0	0
1	1

Teorema 4

$$A + \bar{A} = 1$$

A	$\bar{A}$	$T(4) = A + \bar{A}$
0	1	**1**
1	0	**1**

Teorema 5

$$A . 1 = A$$

A	1	T(5) = A . 1
0	1	0
1	1	1

Teorema 6

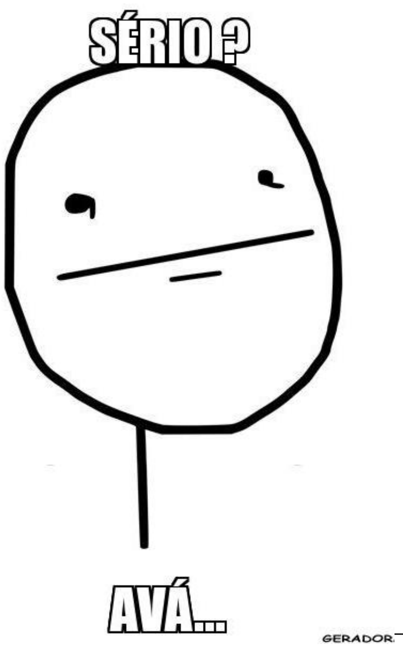
$$A \cdot 0 = 0$$

A	0	T(6) = A + 0
0	0	**0**
1	0	**0**

Teorema 7

$$A \cdot A = A$$

A	T(7) = A . A
0	0
1	1



Teorema 8

$$A \, . \, \bar{A} = 0$$

A	$\bar{A}$	$T(8) = A \, . \, \bar{A}$
0	1	**0**
1	0	**0**

Teorema da dupla negação

$$\bar{\bar{A}} = \mathrm{A}$$

A	$\bar{A}$	$\bar{\bar{A}}$
0	1	**0**
1	0	**1**

Obs: parecido com
"não encontrei ninguém"

Teorema de De Morgan

$$\overline{\mathbf{A} + \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \,.\, \overline{\mathbf{B}}$$

$$\overline{\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{B}}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A + B}$	$\overline{A . B}$	$\overline{A} . \overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	**0**	**1**	**0**	**1**
1	0	0	1	**0**	**1**	**0**	**1**
1	1	0	0	**0**	**0**	**0**	**0**

Pausa para o café

Leis da Álgebra Booleana

- Lei Comutativa

$$A + B = B + A$$

$$A \; . \; B = B \; . \; A$$

Cuidado!!!

$$A + B.C \neq B + A.C$$

Pausa para o café

Leis da Álgebra Booleana

- Lei Associativa

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A \,.\, (B \,.\, C) = (A \,.\, B) \,.\, C$$

- Lei Distributiva

$$A.(B + C) = (A.B) + (A.C)$$

$$A + (B.C) = (A + B).(A + C)$$

Nota: o caminho reverso também é possível

Teorema 9

$$A + A \cdot B = A$$

A	B	A . B	T(9) = A + A . B
0	0	0	**0**
0	1	0	**0**
1	0	0	**1**
1	1	1	**1**

Teorema 9

$$\mathbf{A + A \cdot B \;=\; A}$$

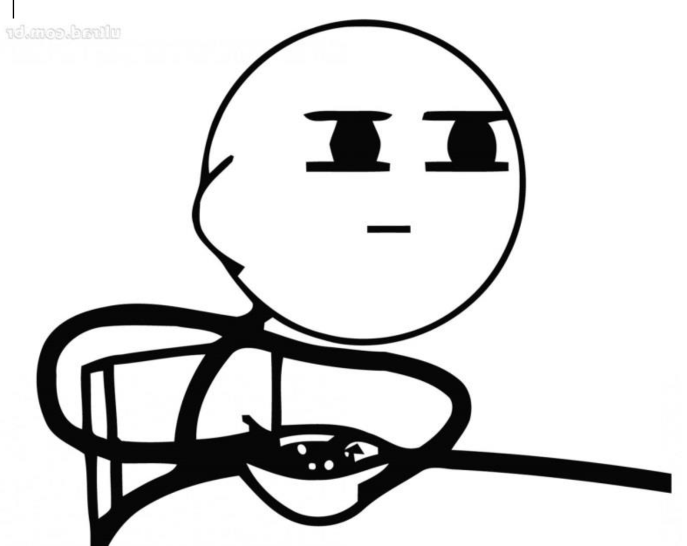
Pensando algebricamente:

$A + A \cdot B$

$A \cdot (1 + B)$ [fatorando]

$A \cdot (1)$ [teorema 2]

$\mathbf{A}$ [teorema 5]



Teorema 10

$$A \,.\, (A + B) \;=\; A$$

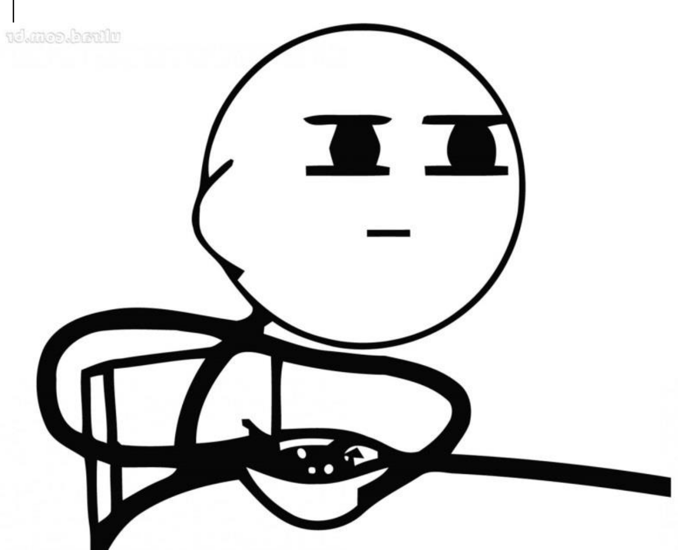
A	B	A + B	T(10) = A . (A + B)
0	0	0	**0**
0	1	1	**0**
1	0	1	**1**
1	1	1	**1**

Teorema 10

$$\mathbf{A \cdot (A + B) = A}$$

Pensando algebricamente:

$$
\begin{array}{ll}
A \,.\, (A + B) & \\
(A + 0) \,.\, (A + B) & [\text{teorema } 1] \\
A + (0 \,.\, B) & [\text{fatorando}] \\
A + (0) & [\text{teorema } 1] \\
\mathbf{A} &
\end{array}
$$



Teorema 11

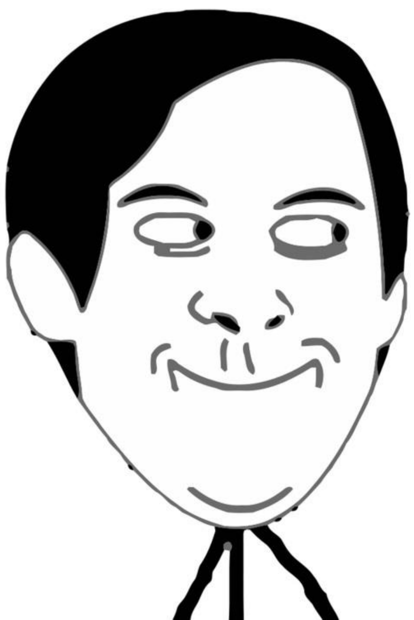
$$A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$$

A	B	$\overline{B}$	A.B	A.$\overline{B}$	T(11) = A.B + A.$\overline{B}$
0	0	1	0	0	**0**
0	1	0	0	0	**0**
1	0	1	0	1	**1**
1	1	0	1	0	**1**

Teorema 11

$$\mathbf{A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A}$$

Pensando algebricamente:



Teorema 11

$$\mathbf{A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A}$$

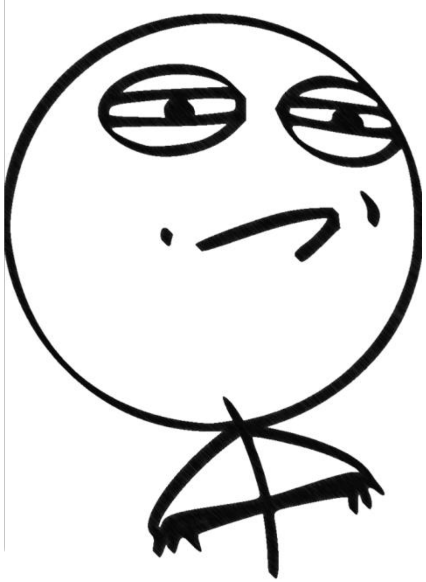
Pensando algebricamente:

$A.B + A.\overline{B}$

$A \cdot (B + \overline{B})$ [fatorando]

$A \cdot (1)$ [teorema 4]

A [teorema 5]



Teorema 12

$$(A + B) \;.\; (A + \overline{B}) \;=\; A$$

A	B	$\overline{B}$	A+B	A+$\overline{B}$	T(12) = (A+B) . (A.$\overline{B}$)
0	0	1	0	1	**0**
0	1	0	1	0	**0**
1	0	1	1	1	**1**
1	1	0	1	1	**1**

Teorema 12

$$\mathbf{(A + B)\ .\ (A + \overline{B})\ =\ A}$$

Pensando algebricamente:

$$(A + B)\ .\ (A + \overline{B})$$

$A + (B\ .\ \overline{B})$ [fatorando]

$A + (0)$ [teorema 7]

A [teorema 1]

Teorema 13

$$A + \bar{A}.B = A + B$$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{A}.B$	$T(13) = A + \bar{A}.B$	$A + B$
0	0	1	0	**0**	**0**
0	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	**1**	**1**
1	1	0	1	**1**	**1**

Teorema 13

$$\mathbf{A + \overline{A}.B = A + B}$$

Pensando algebricamente:

$$A + \overline{A}.B$$

$$(A + \overline{A}) . (A + B) \quad \text{[distributiva]}$$

$$(1) . (A + B) \quad \text{[teorema 4]}$$

$$A + B \quad \text{[teorema 5]}$$

Teorema 14

$$\mathbf{A\ .\ (\overline{A} + B)\ =\ A\ .\ B}$$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A}$ +B	T(14) = A . ($\overline{A}$ +B)	A . B
0	0	1	1	**0**	**0**
0	1	1	1	**0**	**0**
1	0	0	0	**0**	**0**
1	1	0	1	**1**	**1**

Teorema 14

$$\mathbf{A \;.\; (\overline{A} + B) \;=\; A \,.\, B}$$

Pensando algebricamente:

$$A \;.\; (\overline{A} + B)$$

$$(A \,.\, \overline{A}) + (A \,.\, B) \qquad [\text{distributiva}]$$

$$(0) + (A \,.\, B) \qquad [\text{teorema } 8]$$

$$A \,.\, B \qquad [\text{teorema } 1]$$

Teorema 15

$$\mathbf{A + B.C \;=\; (A + B)\,.\,(A + C)}$$

(Aplicação da distributiva)

Para confirmar a igualdade

construa a tabela verdade ;)

Teorema 16

$$\mathbf{A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)}$$

(Aplicação da distributiva)

Para confirmar a igualdade
construa a tabela verdade ;)

Teorema 17

$$\mathbf{A \cdot B + \overline{A} \cdot C = (A + C) \cdot (\overline{A} + B)}$$

A princípio não há simplificação / redução,
mas será útil mais para frente devido a mudança
dos operadores lógicos

Teorema 18

$$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) = (A \cdot C) + (\overline{A} \cdot B)$$

A princípio não há simplificação / redução,
mas será útil mais para frente devido a mudança
dos operadores lógicos

Teorema 19

$$(A.B) + (\bar{A}.C) + (B.C) = (A.B) + (\bar{A}.C)$$

A	B	C	$\bar{A}$	AB	$\bar{A}C$	BC	T(19)	AB + $\bar{A}C$
0	0	0	1	0	0	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	1	0	**1**	**1**
0	1	0	1	0	0	0	**0**	**0**
0	1	1	1	0	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	0	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	0	0	0	**0**	**0**
1	1	0	0	1	0	0	**1**	**1**
1	1	1	0	1	0	1	**1**	**1**

Teorema 19

$$\mathbf{(A.B) + (\bar{A}.C) + (B.C) = (A.B) + (\bar{A}.C)}$$

Pensando algebricamente:

$(A.B) + \underline{(\bar{A}.C) + (B.C)}$

$\underline{(A.B)} + [C.(\bar{A}+B)]$ [fatorando]

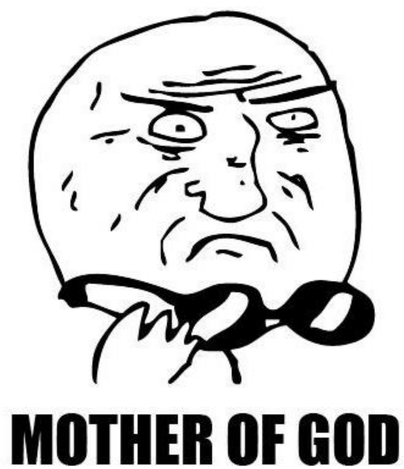
$[A.(\bar{A}+B)] + [C.(\bar{A}+B)]$ [teorema 14]

$A.X + C.X$ [substituição]

$X . (A+C)$ [fatorando]

$(\bar{A}+B) . (A+C)$ [substituição]

$(A.B) + (\bar{A}.C)$ [teorema 17]



Teorema 20

$$(A+B)\ .\ (\bar{A}+C)\ .\ (B+C) = (A + B)\ .\ (\bar{A} + C)$$

A	B	C	$\bar{A}$	A+B	$\bar{A}$+C	B+C	T(20)	(A+B) . ($\bar{A}$+C)
0	0	0	1	0	1	0	**0**	**0**
0	0	1	1	0	1	1	**0**	**0**
0	1	0	1	1	1	1	**1**	**1**
0	1	1	1	1	1	1	**1**	**1**
1	0	0	0	1	0	0	**0**	**0**
1	0	1	0	1	1	1	**1**	**1**
1	1	0	0	1	0	1	**0**	**0**
1	1	1	0	1	1	1	**1**	**1**

Teorema 20

$$(A+B)\ .\ (\bar{A}+C)\ .\ (B+C)\ =\ (A+B)\ .\ (\bar{A}+C)$$

Pensando algebricamente:

Mesma ideia do teorema 19

Fica como exercício

(ou quem sabe para a prova)

Tabelão

Ordem	Teorema	Ordem	Teorema
1	$A + 0 = A$	**11**	$A.B + A.\overline{B} = A$
2	$A + 1 = 1$	**12**	$(A+B) . (A+\overline{B}) = A$
3	$A + A = A$	**13**	$A + (\overline{A} . B) = A + B$
4	$A + \overline{A} = 1$	**14**	$A . (\overline{A} + B) = A . B$
5	$A . 1 = A$	**15**	$A + B.C = (A+B).(A+C)$
6	$A . 0 = 0$	**16**	$A . (B+C) = AB + AC$
7	$A . A = A$	**17**	$A.B + \overline{A}.C = (A+C).(\overline{A} + B)$
8	$A . \overline{A} = 0$	**18**	$(A+B).(\overline{A} + C) = A.C + \overline{A}.B$
9	$A + A.B = A$	**19**	$AB + \overline{A}C + BC = AB + \overline{A}C$
10	$A . (A + B) = A$	**20**	$(A+B).(\overline{A} + C).(B+C) = (A+B).(\overline{A} + C)$

Exemplo

$$(1) \quad F = A + \overline{ABC}$$

$$(2) \quad F = AB + C + B\overline{C}$$

$$(3) \quad F = AB \,.\, \overline{(AC + \overline{A}B + CB)}$$

Lógica e Álgebra de Boole

Introdução à Ciência da Computação
ICC0001

Prof. Diego Buchinger