Complexidade de Algoritmos

Prof. Diego Buchinger
diego.buchinger@outlook.com
diego.buchinger@udesc.br

Prof. Cristiano Damiani Vasconcellos
cristiano.vasconcellos@udesc.br

Um pouco de Teoria dos Números e seu uso na Criptografia

Teoria dos Números

Notação: d | a ➔ d "divide" a

sendo que d $\geq$ 1 e d $\leq |a|$

- Todo inteiro a é divisível pelos **divisores triviais** 1 e *a*
- <u>Número primo</u>: únicos divisores são 1 e *a*
- Todo número composto pode representado pela multiplicação de seus fatores primos (42 = 2*3*7)
- Qual a complexidade de tempo para descobrir se um número *a* qualquer (**int**) é primo?

Divisores Comuns

Um número é dito divisor comum se ele divide dois números:

$d \mid a$ e $d \mid b$ => d é divisor comum de a e b

Propriedade dos divisores comuns:

$a \mid b$ implica em $|a| \leq |b|$

$a \mid b$ e $b \mid a$ implica em $a = b$

$d \mid a$ e $d \mid b$ implica em $d \mid (ax + by)$

O máximo divisor comum entre dois números a e b é denotado por: $mdc\ (a\ , b)$

$d \mid a$ e $d \mid b$ então $d \mid mdc\ (a\ , b)$

Divisores Comuns

Primos relativos ou **Primos entre si:**

Dois inteiros são chamados de primos relativos se o único inteiro positivo que divide os dois é 1: $mdc\ (a\ ,\ b) = 1$.

Por exemplo, 49 e 15 são primos relativos:

49 → 1,7,49

15 → 1,3,5,15

Propriedade

se $mdc\ (a\ ,\ p) = 1$ e $mdc\ (b\ ,\ p) = 1$ então $mdc\ (ab\ ,\ p) = 1$

Testar: a=49, b=15, p=7

UDESC

Fatoração

Fatoração Única

Um inteiro pode ser escrito como um produto da forma:

$$a = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \times \ldots \times p_r^{e_r}$$

Exemplo

$$6.000 \quad = \quad 2^4 \times 3^1 \times 5^3 \quad = \quad 16 \times 3 \times 125$$

Teste de primalidade: Dado um número *n*, determinar se *n* é primo ("fácil")

Fatoração de inteiros: Dado um número *n*, representar *n* através de seus fatores primos (difícil – até o momento)

Divisores Comuns

Algoritmo de Euclides

EUCLID (a , b)

se b = 0

então retorne a

senão retorne EUCLID(*b* , *a mod b*)

Calcular:

EUCLID(2 , 0)

EUCLID(99 ,78)

Complexidade:

Números pequenos: O (log b)

Números grandes (k bits): O (k) (**mod*)

Divisores Comuns

Algoritmo de Euclides Extendido

Adaptar o algoritmo anterior para calcular x e y em:

$$d = mdc\,(a,b) = ax + by$$

EXT-EUCLID (a , b)

se b = 0

então retorne (a , 1 , 0)

(d’, x’, y’) = EXT-EUCLID(*b* , *a mod b*)

(d , x , y) = (d’, y’, x’ – a / b * y’)

retorne (d , x , y)

Divisão inteira

Calcular:

EXT-EUCLID(4 , 0)

EXT-EUCLID(99 ,78)

Aritmética Modular

É um sistema para manipular faixas restritas de números inteiros.

Relação de congruência:

$a \equiv b \ (mod\ n)$ se e somente se $a \bmod n = b \bmod n$.

$a \equiv b \ (mod\ n) \Leftrightarrow n\ divide\ (a - b)$.

Exemplos:

$38 \equiv 14 \ (mod\ 12)$, $38 \bmod 12 = 14 \bmod 12$

$-10 \equiv 38 \ (mod\ 12)$, $-10 \bmod 12 = 38 \bmod 12$

Aritmética Modular

Soluções para a equação $ax \equiv b \pmod{n}$

Só há solução se: $mdc(a, n) \mid b$

$ax \equiv b \ (mod\ n)$ tem ***d*** soluções distintas

onde $d = mdc(a, n)$

MOD-LIN-SOLVER(a , b , n)

(d, x', y') = EXT-EUCLID(a, n)

se $d \mid b$

então $x_0 = x'(b / d) \bmod n$

para $i=0$ *a* d - 1 faça

imprimir($x_0 + i(n / d)$) $\bmod n$

senão imprimir “nenhuma solução”

Calcular:

$14x \equiv 30 \pmod{100}$

MOD-LIN-SOLVER (14 , 30 , 100)

Aritmética Modular

Inverso multiplicativo modular:

O inverso multiplicativo modular de um inteiro $\boldsymbol{a}$ no módulo $\boldsymbol{m}$ é um inteiro $\boldsymbol{x}$ tal que:

$$ax \equiv 1 \ (mod\ m)$$

* Existe se e somente se $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{m}$ são primos relativos.

$$17\mathrm{x} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 120)$$

MOD-LIN-SOLVER (17 , 1 , 120)

Teoria dos Números

Teorema de Fermat:

Se p é primo então:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

Contudo, a^{p-1} pode ser um número relativamente grande, e realizar a operação de módulo pode ser um problema.

Calcular:

a=2 / p=5

a=5 / p=3

a=4 / p=7

Exponenciação Modular:

Realizar a operação de elevação ao quadrado repetida e realizar o módulo sempre possível.

Exemplo: $2^{53} \ mod \ 101$

O Caráter Primo

Densidade de números primos

Distribuição dos primos: $\pi(n) \rightarrow n^o \; de \; primos \leq n$

$Exemplo$: $\pi(10) = 4 \rightarrow \{2,3,5,7\}$

Teorema dos números primos: $\lim_{n \to \infty} \frac{\pi(n)}{n / \ln n} = 1$

Para n grande, $n / \ln n$ é uma boa aproximação para $\pi(n)$!

O Caráter Primo

Densidade de números primos

Com base no teorema apresentado podemos fazer uma estimativa de probabilidade para verificar se um número escolhido ao acaso é primo ou não como: $1 / \ln(n)$

Quantos números de 512 bits precisamos testar, em média, até encontrar um número primo?

$\ln(2^{512}) \approx 355$ números

$1 / 355 \approx 0{,}28\%$ (chance de encontrar um primo de 1ª)

O Caráter Primo

Densidade de números primos

Para testarmos o caráter primo de um número pequeno *n*, podemos testar verificando a divisibilidade por todos os números entre 2 e $\sqrt{n}$

Para inteiros pequenos: $\Theta(\sqrt{n})$

Para inteiros grandes com *k* bits: $\Theta(2^k)$

O crivo de eratóstenes (algoritmo) é um dos mais conhecidos para criar uma lista de primos até um dado *n*

(ver gif: https://pt.wikipedia.org/wiki/Crivo_de_Erat%C3%B3stenes)

Teste do caráter pseudoprimo

Considerando novamente a equação modular:

$$a^{n-1} \equiv 1 \ (mod\ n)$$

O teorema de Fermat nos diz que se *n* é primo, então *n* satisfaz esta equação para qualquer escolha de *a* ($a \in Z^{+}{}_{n}$)

Se encontrarmos um *a* que não satisfaça a equação, então certamente *n* não é primo

Teste do caráter pseudoprimo

Ao testarmos se: $2^{n-1} \equiv 1 \ (mod\ n)$

caso falso: *n* certamente não é primo

caso verdade: ou *n* é primo, ou *n* é pseudoprimo de base 2

Mas, com que frequência há um falso positivo?

Raramente! Existem apenas 22 valores menores que 10.000: {341, 561, 645, 1105, ...}

Usando 512 bits a chance é de 1 / 10^{20}

Usando 1024 bits a chance é de 1 / 10^{41}

Teste do caráter pseudoprimo

Teste Aleatório do Caráter primo de Miller-Rabin

- Experimentar diversos valores como base:

  Melhora a confiabilidade, mas existem números "traiçoeiros" e extremamente raros que dão falso positivo para diferentes bases (números de Carmichael)

- Observar raiz quadrada não trivial de 1 módulo n:

  $x^2 \equiv 1 \ (mod\ n)$ e x não é 1 ou -1 (ex: x=6, n=35)

MILLER-RABIN(n, s)
  para j=1 a s
    a = RANDOM( )
    se (WITNESS(a, n))
    então retorne falso [número composto, certamente]
  retorne verdade [número <u>quase</u> certamente primo]

Criptografia RSA

Ideia: Permitir que comunicação entre dois participantes sem que um intruso possa entender as mensagens trocadas.

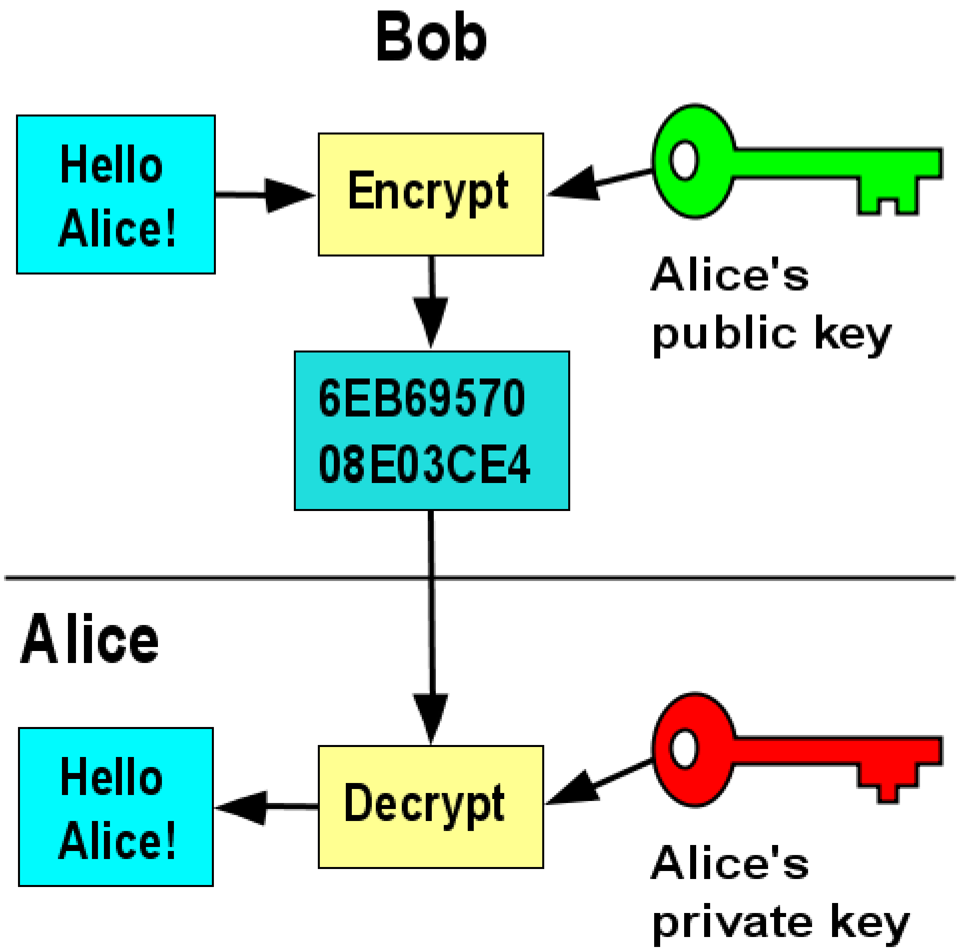
Baseia-se na facilidade em se encontrar números primos grandes e na dificuldade em fatorar o produto entre dois números primos grandes.

Em um sistema de criptografia de chave pública, cada participante possui:

+ uma **chave pública** (pública);

+ uma **chave privada** (secreta);

Criptografia RSA



Como funciona:

- Bob obtém a chave pública de Alice;

- Bob usa a chave para codificar a mensagem M: $C = P_A(M)$ e envia C;

- Alice recebe C e utiliza sua chave privada para recuperar a mensagem original M: $M = S_A(C)$

Criptografia RSA

Algoritmo:

- Selecionar dois números primos grandes ***p*** e ***q***, (512 bits, cada por exemplo) sendo $p \neq q$
- Calcular: $\boldsymbol{n = p * q}$
- Selecionar um inteiro ímpar "pequeno" ***e*** tal que ***e*** seja primo relativo de $(p - 1)(q - 1)$ [número primo]:

$$mdc\,(e, (p - 1)(q - 1)) = 1$$

Chave pública = (*e*, *n*)

Criptografia RSA

Algoritmo:

- Calcular ***d*** como o inverso modular de ***e***:

$$e*d \equiv 1 \bmod ((p-1)(q-1))$$

Chave privada = (*d*, *n*)

Criptografia RSA

Transforma um inteiro M (que representa um bloco de dados da mensagem) em um inteiro C (que representa um bloco da mensagem criptografada), usando a seguinte função:

$$C = M^e \bmod n$$

Criptografia RSA

A transformação da mensagem criptografada C na mensagem original é executada através da formula:

$$M = C^d \bmod n$$

Cuidado!!

n deve ser maior do que M!

Caso contrário existem múltiplas interpretações para a mensagem codificada.
Se M for maior do que n, deve-se dividir a mensagem em blocos

Criptografia RSA (Exemplo)

Mensagem: "ola" => 111 105 97 => 01101111 01101001 01100001

A princípio nossa mensagem M teria o valor decimal: 7.301.473

Vamos utilizar **p = 521** e **q = 383**,

logo n = p*q = 199.543 e (p-1) * (q-1) = 198.640

Como M > n, devemos dividir a mensagem M em blocos.

Vamos usar blocos de dois caracteres!

Escolher arbitrariamente um valor para e [primo relativo a (p-1)(q-1), ou simplesmente um número primo] → *e* = 227 [primo "pequeno"]

note que: mdc (227, 198.640) = 1 ***Chave pública* = (227, 199.543)**

Criptografia RSA (Exemplo)

p = 521 e **q = 383** | n = 199.543 | e = 227

Para gerar a chave privada precisamos calcular ***d*** como o inverso modular de ***e***:

$e*d \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$ = $227 * d \equiv 1 \pmod{198.640}$

Usamos Euclides Estendido (227, 198.640) => mdc =1 / x =*-92.757* / y = *106*

E assim a única solução válida para a equação modular é:

$d = x\ (1 / d)\ mod\ n = -92.757 \quad mod \quad 198.640 = 105.883$

Chave privada **= (105.883, 199.543)**.

Mensagem M: 01101111 01101001 01100001 00000000

$M_1 = 57.193$ / $M_2 = 24832$

Codificando	Decodificando
$C_1 = 57.193^{227} \bmod 199.543 = 34.997$	$M_1 = 34.997^{105883} \bmod 199.543 = 57.193$
$C_2 = 24.832^{227} \bmod 199.543 = 61.019$	$M_2 = 61.019^{105883} \bmod 199.543 = 24.832$

Ataque Força Bruta ao RSA

Considerando que as mensagens criptografadas forem capturadas por terceiros, um ataque de **força bruta** é um ataque em que testa-se uma a uma todas as combinações possíveis para se quebrar (descobrir) uma chave privada.

No caso do RSA o "atacante" irá usar o valor n da chave pública para fatorar os valores de p e q.
Uma vez descoberto p e q basta calcular a chave privada e transformar a mensagem criptografada.

Trabalho RSA

- Escreva um programa que realize:
  - codificação (criptografia RSA) de uma mensagem (String) em blocos de 4 caracteres (32 bits) => *n > 4.294.967.295*;
  - decodificação de mensagem criptografada com chave privada
  - decodificação de mensagem criptografada através de um ataque de força bruta usando a chave pública;

- Quantificar o tempo para criar uma mensagem codificada
- Quantificar e comparar o tempo para decodificar uma mensagem usando a chave privada e força bruta com diferentes tamanhos para os números primos (começando com **p** e **q** de 32 bits)
- Pode-se usar as bibliotecas (importadas ou da linguagem) para manipular números grandes (BigInt) – JAVA ou C/C++

Trabalho RSA

- Funções a serem implementadas:

  geraPrimoPequeno( ) : int

    crivoEratóstenes ( )

  primoProvavel(bits : int) : BigInt

    testePrimalidade(n : BigInt) : boolean

  inversoModular(a : BigInt , b : BigInt) : BigInt

    gcdExt (a : BigInt , b : BigInt) : Trio

  expModular(num : BigInt, exp : int, n : BigInt) : BigInt

  ataqueForcaBruta(msg : String, e : int, n : BigInt) : String

Referências

Algoritmos. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Cliford Stein. Campus.

Algorithms. Sanjoy Dasgupta, Christos Papadimitriou, Umesh Vazirani. McGraw Hill.

Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition).

Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik. Addison Wesley.

M. R. Garey and D. S. Johnson. 1978. *“Strong” NP-Completeness Results: Motivation, Examples, and Implications*. J. ACM 25, 3 (July 1978)