Παρουσίαση 1ης Άσκησης

Μέρος 1ο - Παράλληλος προγραμματισμός για αρχιτεκτονικές κατανεμημένης μνήμης με MPI

Συστήματα Παράλληλης Επεξεργασίας
9ο Εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ

Εργ. Υπολογιστικών Συστημάτων
Σχολή ΗΜΜΥ, Ε.Μ.Π.

National Technical University of Athens CSLab

Νοέμβριος 2014

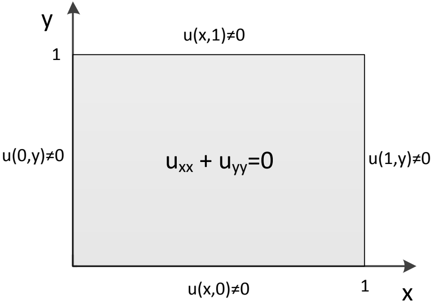
Αναδρομή στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

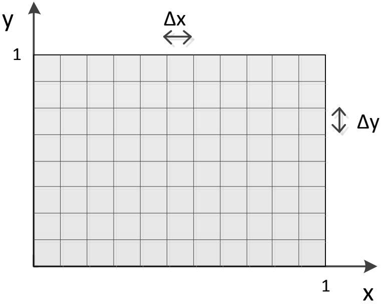
- **Εξίσωση Poisson**: $\bigtriangledown^2 u = f$ σε χωρίο Ω
  - Γνωστή και ως *κυματική εξίσωση*
- **Σε καρτεσιανές συντεταγμένες (2Δ)**: $(\frac{\vartheta^2}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2}{\vartheta y^2})u(x,y) = f(x,y)$
- **Εξίσωση Laplace**: $(\frac{\vartheta^2}{\vartheta x^2} + \frac{\vartheta^2}{\vartheta y^2})u(x,y) = 0$
  - Γνωστή και ως *εξίσωση θερμότητας*
  - Ειδική περίπτωση της Poisson: f=0

Διάδοση θερμότητας σε δύο διαστάσεις

- Απλή εφαρμογή - Διάδοση θερμότητας σε επιφάνεια από το σύνορο στο εσωτερικό

- Επίλυση εξίσωσης θερμότητας με συνοριακές συνθήκες

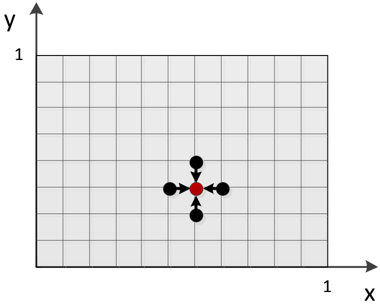




Υπολογιστικές μέθοδοι (I) - Μέθοδος Jacobi

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi

$$u_{x,y}^{t+1} = \frac{u_{x-1,y}^{t} + u_{x,y-1}^{t} + u_{x+1,y}^{t} + u_{x,y+1}^{t}}{4}$$

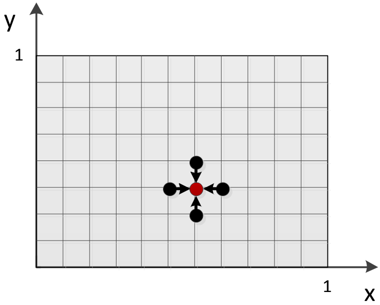


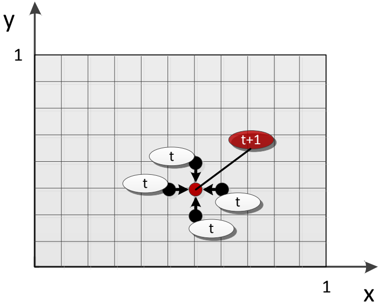
- 5-point stencil
- Κάθε στοιχείο υπολογίζεται από τα γειτονικά του

Υπολογιστικές μέθοδοι (Ι) - Μέθοδος Jacobi

Επαναληπτική μέθοδος Jacobi

$$u_{x,y}^{t+1} = \frac{u_{x-1,y}^{t} + u_{x,y-1}^{t} + u_{x+1,y}^{t} + u_{x,y+1}^{t}}{4}$$





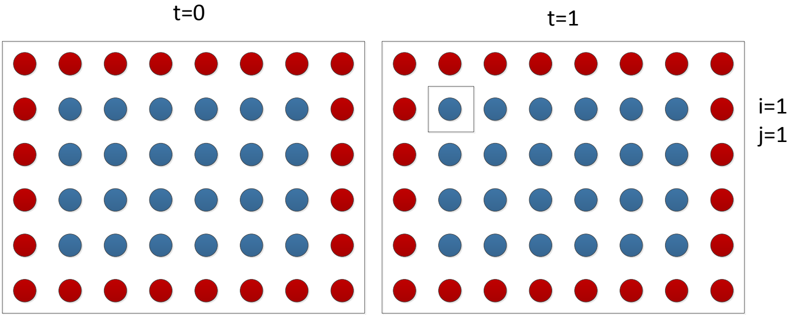
Υπολογιστικές μέθοδοι (Ι) - Μέθοδος Jacobi

Αλγόριθμος Jacobi

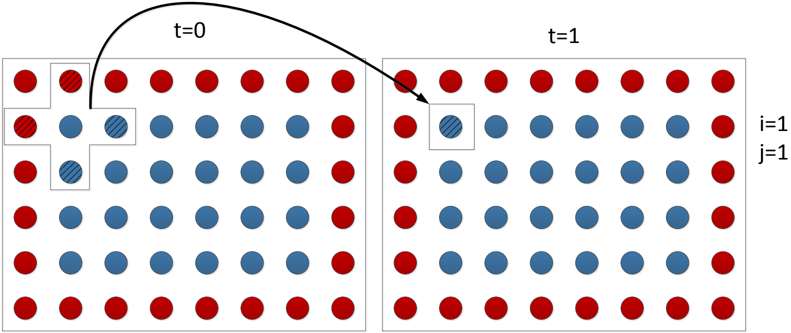
for $t = 0; t < T \,\&\&\, !converged; t{+}{+}$ **do**
  for $i = 1; i < X - 1; i{+}{+}$ **do**
    for $j = 1; j < Y - 1; j{+}{+}$ **do**
      $u[t{+}1][i][j] = (u[t][i{-}1][j] + u[t][i][j{-}1] + u[t][i{+}1][j] + u[t][i][j{+}1])/4$
    end
  end
  $converged = checkConvergence(u[t], u[t+1])$
end

- Για τον υπολογισμό των τιμών της χρονικής στιγμής t+1, χρησιμοποιούνται οι τιμές της χρονικής στιγμής t
  - Απαιτούνται τουλάχιστον δύο πίνακες, ένας για την τρέχουσα (t+1) κι ένας για την προηγούμενη (t) χρονική στιγμή
- Στο τέλος κάθε βήματος, πραγματοποιείται *έλεγχος σύγκλισης*

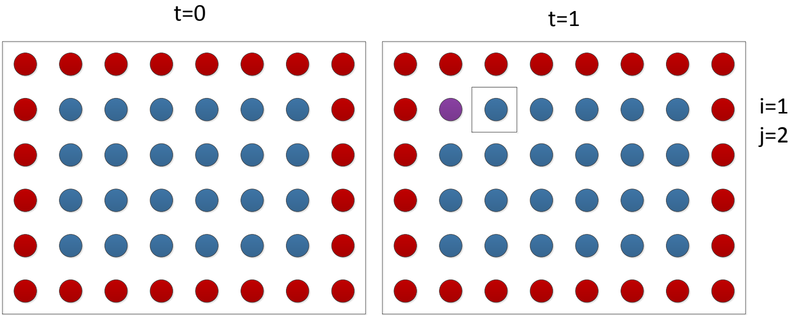
Εκτέλεση Jacobi (I)



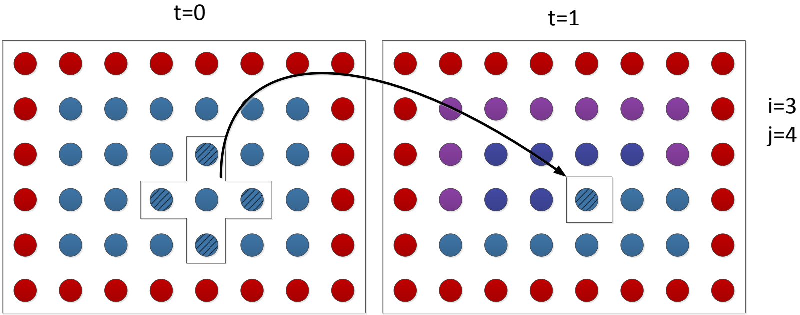
Εκτέλεση Jacobi (II)



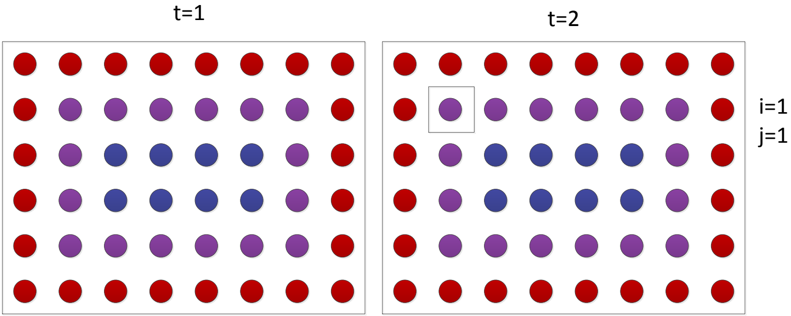
Εκτέλεση Jacobi (III)



Εκτέλεση Jacobi (IV)

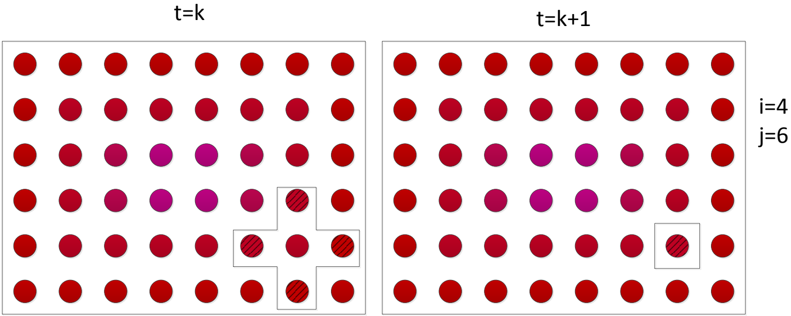


Εκτέλεση Jacobi (V)



Εκτέλεση Jacobi (VI)

Σύγκλιση

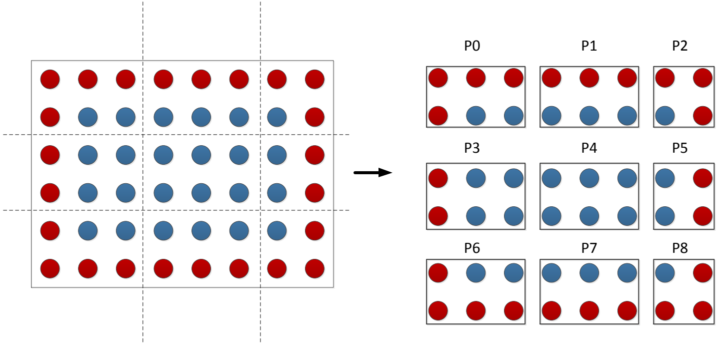


- Τα στοιχεία του πίνακα δε διαφέρουν (*ή διαφέρουν ελάχιστα*) στις χρονικές στιγμές t και t+1
- Ο αλγόριθμος έχει συγκλίνει

Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Διαμοιρασμός πίνακα

- Θεωρούμε δισδιάστατο πλέγμα επεξεργαστών



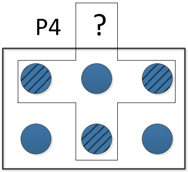
Στην ενδιάμεση αναφορά:

- Πώς διαμοιράζουμε τον πίνακα στο MPI; Ποιες συναρτήσεις χρησιμοποιούμε;

Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

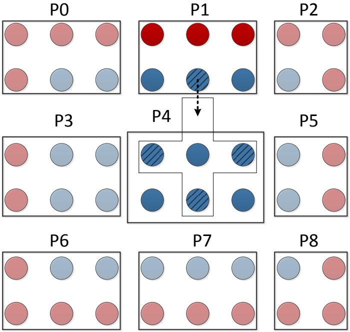
Υπολογιστικός πυρήνας

- Έχει κάθε διεργασία τα στοιχεία που χρειάζεται;



Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Υπολογιστικός πυρήνας



Στην ενδιάμεση αναφορά:

- Ποια στοιχεία πρέπει να ανταλλάσουν οι επεξεργαστές;
- Πότε γίνεται η ανταλλαγή δεδομένων;
- Ποιες συναρτήσεις MPI χρησιμοποιούμε για την επικοινωνία;
- Πού αποθηκεύονται τα δεδομένα αυτά;

Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Έλεγχος σύγκλισης

Έλεγχος σύγκλισης

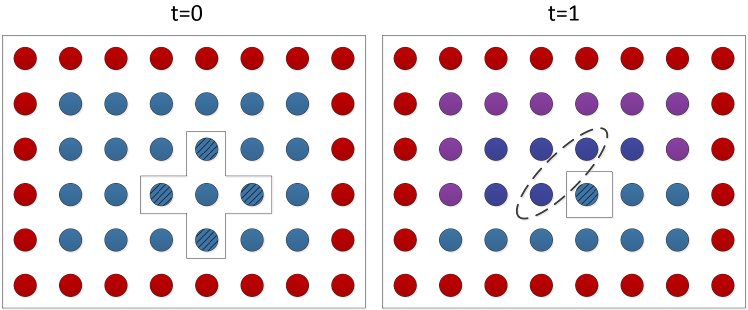
for $i = 1; i < X - 1; i{+}{+}$ **do**
  for $j = 1; j < Y - 1; j{+}{+}$ **do**
    if $|u[t+1][i][j] - u[t][i][j]| > \varepsilon$ **then**
      return 0
    end
  end
end
return 1;

Στην ενδιάμεση αναφορά:

- Ο έλεγχος σύγκλισης γίνεται τοπικά σε κάθε διεργασία.
- Πώς θα ελέγξουμε τη σύγκλιση σε όλο το χωρίο;

Υπολογιστικές μέθοδοι (II) - Μέθοδος Gauss-Seidel

- Η μέθοδος Jacobi λύνει το πρόβλημα, αλλά έχει πολύ αργό ρυθμό σύγκλισης
- **Παρατήρηση 1:** Όταν υπολογίζω το σημείο *u[t+1][i][j]*, έχω ήδη υπολογίσει τα σημεία *u[t+1][i-1][j]*, *u[t+1][i][j-1]*

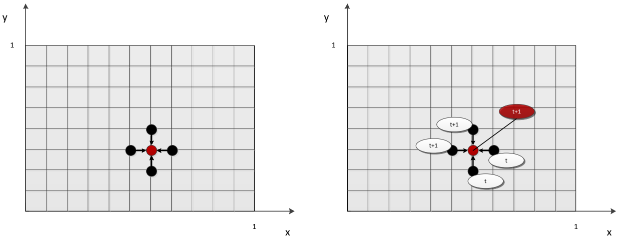


Υπολογιστικές μέθοδοι (ΙΙ) - Μέθοδος Gauss-Seidel

- Η μέθοδος Jacobi λύνει το πρόβλημα, αλλά έχει πολύ αργό ρυθμό σύγκλισης
- **Παρατήρηση 2:** Τα σημεία *u[t+1][i-1][j]*, *u[t+1][i][j-1]* έχουν updated τιμές σε σχέση με τα *u[t][i-1][j]*, *u[t][i][j-1]*

Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel

$$u_{x,y}^{t+1} = \frac{u_{x-1,y}^{t+1} + u_{x,y-1}^{t+1} + u_{x+1,y}^{t} + u_{x,y+1}^{t}}{4}$$



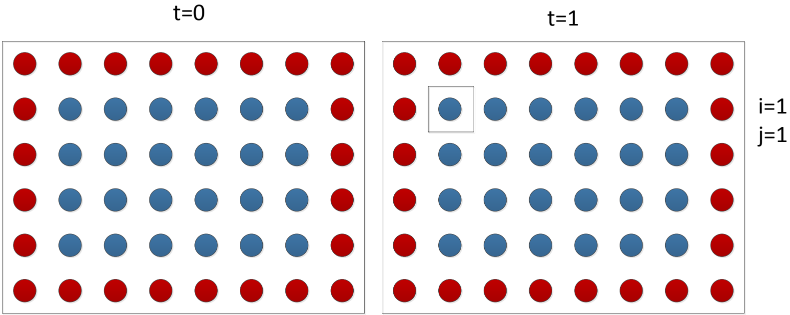
Υπολογιστικές μέθοδοι (II) - Μέθοδος Gauss-Seidel με SOR

- Successive Over-Relaxation (SOR): Ένας τρόπος για ταχύτερη σύγκλιση
- Αρχική επαναληπτική μέθοδος: $u^{t+1} = f(u^t)$
- Επαναληπτική μέθοδος με SOR: $u^{t+1} = (1-\omega)u^t + \omega f(u^t)$

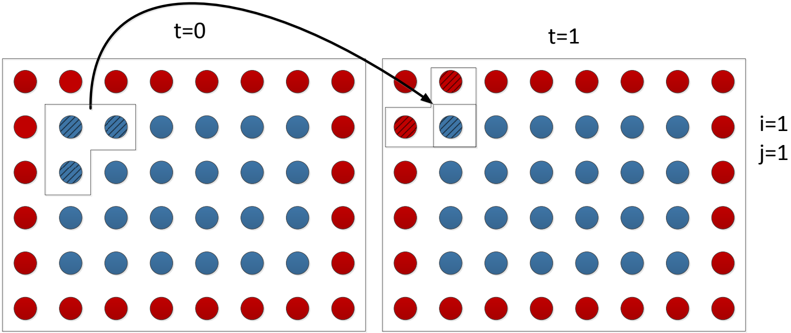
Επαναληπτική μέθοδος Gauss-Seidel-SOR

$$u_{x,y}^{t+1} = u_{x,y}^{t} + \omega \frac{u_{x-1,y}^{t+1} + u_{x,y-1}^{t+1} + u_{x+1,y}^{t} + u_{x,y+1}^{t} - 4u_{x,y}^{t}}{4}, \omega \in (0,2)$$

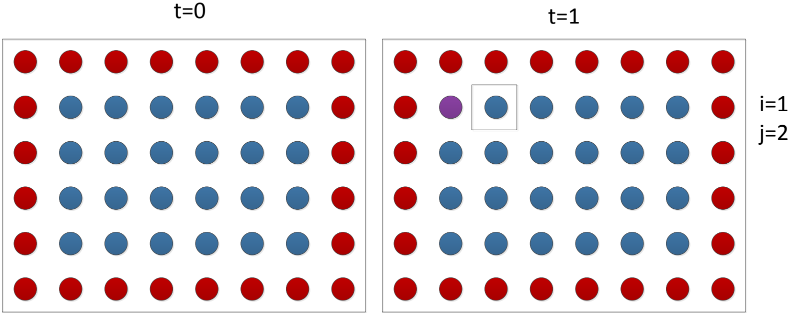
Εκτέλεση Gauss-Seidel-SOR (I)



Εκτέλεση Gauss-Seidel-SOR (II)



Εκτέλεση Gauss-Seidel-SOR (III)



Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Υπολογιστικός πυρήνας

Στην ενδιάμεση αναφορά:

- Τι αλλάζει στην επικοινωνία της Gauss-Seidel σε σχέση με τη Jacobi;
- Πότε γίνεται η ανταλλαγή των δεδομένων μεταξύ των διεργασιών;
  - Για τον υπολογισμό κάθε στοιχείου, απαιτούνται στοιχεία από την προηγούμενη και την τρέχουσα χρονική στιγμή
- Ποιος υπολογιστικός πυρήνας θα είναι πιο γρήγορος, αυτός της Jacobi ή αυτός της Gauss-Seidel; Γιατί;

Υπολογιστικές μέθοδοι (ΙΙΙ) - Μέθοδος Red-Black SOR

- Το Red-Black ordering επιτυγχάνει καλύτερο ρυθμό σύγκλισης
- Red-Black ordering:
  1. Στοιχεία σε άρτιες θέσεις $(i + j)\%2 = 0 \rightarrow$ **Red**
  2. Στοιχεία σε περιττές θέσεις $(i + j)\%2 = 1 \rightarrow$ **Black**
- Υπολογισμός σε δύο φάσεις

Υπολογιστικές μέθοδοι (III) - Μέθοδος Red-Black SOR

Red-Black SOR - Φάση 1η - Update Red

$$u_{x,y}^{t+1} = u_{x,y}^{t} + \omega \frac{u_{x-1,y}^{t} + u_{x,y-1}^{t} + u_{x+1,y}^{t} + u_{x,y+1}^{t} - 4u_{x,y}^{t}}{4}, \text{ when } (x+y)\%2 == 0$$

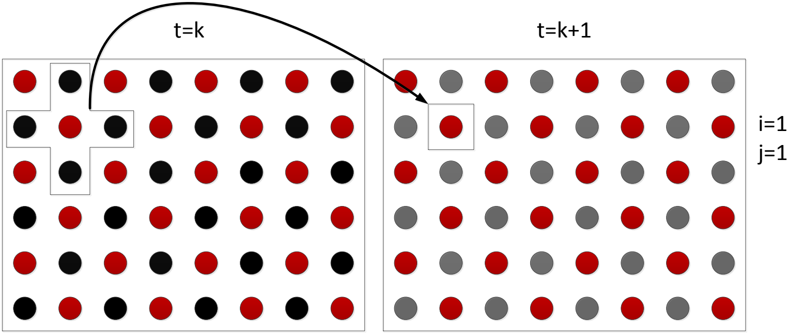
- Στη red φάση υπολογίζονται τα *red* στοιχεία από τα *black*

Red-Black SOR - Φάση 2η - Update Black

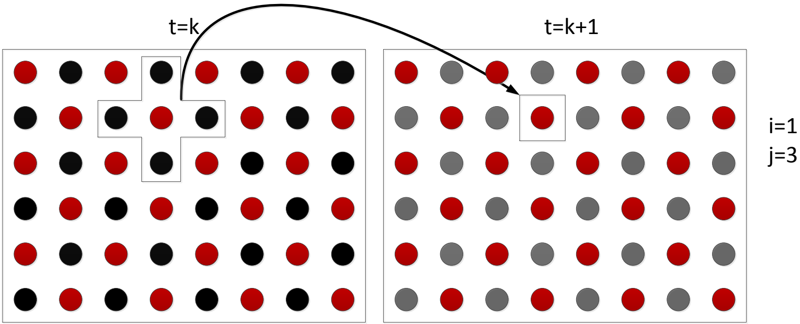
$$u_{x,y}^{t+1} = u_{x,y}^{t} + \omega \frac{u_{x-1,y}^{t+1} + u_{x,y-1}^{t+1} + u_{x+1,y}^{t+1} + u_{x,y+1}^{t+1} - 4u_{x,y}^{t}}{4}, \text{ when } (x+y)\%2 == 1$$

- Στη black φάση υπολογίζονται τα *black* στοιχεία από τα *red*

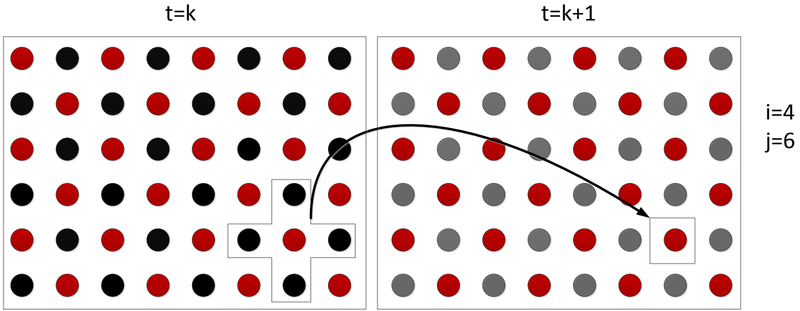
Εκτέλεση Red-Black-SOR - 1η φάση (I)



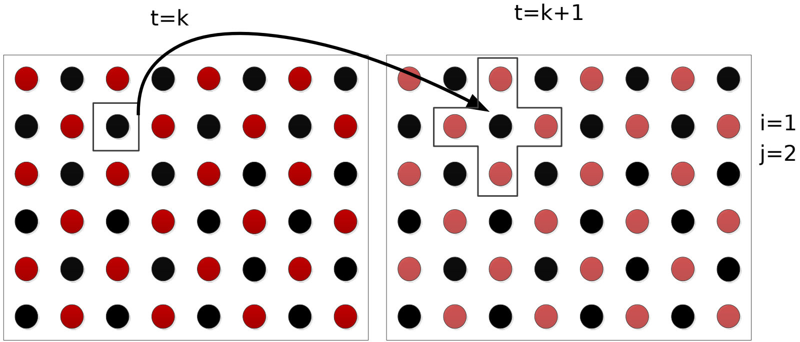
Εκτέλεση Red-Black-SOR - 1η φάση (II)



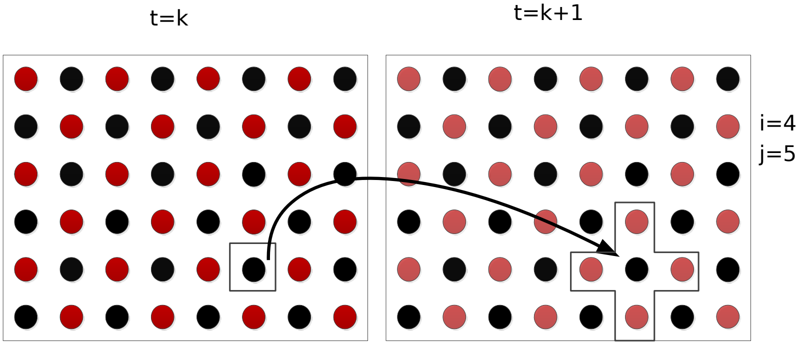
Εκτέλεση Red-Black-SOR - 1η φάση (III)



Εκτέλεση Red-Black-SOR - 2η φάση (Ι)



Εκτέλεση Red-Black-SOR - 2η φάση (II)



Ζητήματα Υλοποίησης - MPI

Υπολογιστικός πυρήνας

Στην ενδιάμεση αναφορά:

- Ο υπολογιστικός πυρήνας της Red-Black SOR περιλαμβάνει δύο φάσεις. Πώς αλλάζει αυτό την επικοινωνία; Τι όφελος/κόστος μπορεί να έχει;