



Der Klang als Formel

Ein mathematisch-musikalischer
Streifzug

von

Prof. em. Dr. Manfred Reimer

2., verbesserte Auflage

Oldenbourg Verlag München

Manfred Reimer arbeitete – nach der Promotion an der Universität Tübingen – zunächst als Wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut Tübingen. 1966 folgt die Habilitation, ebenfalls in Tübingen. 1967/68 war er als Research Assistant Professor an der University of Maryland tätig. 1969 wechselte er als ordentlicher Professor an die Universität Dortmund, wo er an der Gründung und dem Aufbau des Mathematischen Instituts mitwirkte, forschte und lehrte. Seit 1999 ist er emeritiert, aber weiterhin wissenschaftlich tätig.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2011 Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH
Rosenheimer Straße 145, D-81671 München
Telefon: (089) 45051-0
www.oldenbourg-verlag.de

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen.

Lektorat: Kathrin Mönch
Herstellung: Constanze Müller
Titelbild: © Markus Wegner/PIXELIO
Einbandgestaltung: hauser lacour
Gesamtherstellung: Grafik + Druck GmbH, München

Dieses Papier ist alterungsbeständig nach DIN/ISO 9706.

ISBN 978-3-486-70542-3

C'est le ton qui fait la musique

Die Erschaffung der Töne

Geräusche kommen auf vielerlei Art zustande, ohne daß man sie als Töne bezeichnen würde. Töne sind eine Erfindung des Menschen. Ohne sein Zutun gibt es sie nicht. Darin gleichen sich Töne und Zahlen.

Inhaltsverzeichnis

1 Die Geometrie der Töne	1
Das Tonsystem des griechischen Altertums	2
Das Pythagoräische System	3
Das Größere Vollkommene System	4
Struktur des griechischen Tonsystems	6
Das Tonsystem der Renaissance	13
Claviere	15
Eigenschaften des 7-Ton-Systems und anderer Systeme .	18
Änderung der Begriffe	22
Erweiterung des 7-Ton-Systems	23
Mathematische Beschreibung des 12-Ton-Systems	27
Division mit Rest	28
Tonleitern im 12-Ton-System	32
Gleichschwebende Temperatur	35
Das pythagoräische Komma	41
Kettenbrüche	41
Das Problem der Tonarten-Charakteristik beim Wohltemperierten Klavier	47
Mehr Glanz!	50
Warum keine 13-Ton-Musik?	52
Nachtrag	57

2 Die Natur der Töne	59
Transversale Schwingungen	61
Die schwingende Saite	61
Ton und Frequenz	69
Longitudinalschwingungen	80
Der schwingende Stab	80
Die schwingende Luftsäule	84
Die schwingende Membran/Die Pauke, Wellengleichung	100
Lösung der Wellengleichung durch Produktansatz	104
Lösung der Zeitgleichung	105
Lösung der Ortsgleichung	106
Bessel-Funktionen	106
Konzentrische Schwingungen	128
Zirkulante Schwingungen	133
Anfangswerte und Klangfarbe	149
Nachtrag: Herleitung der Wellengleichung für die schwingende Membran (fakultativ)	169
3 Zur Harmonie	175
Akkorde	176
Harmonices Mundi	181
Literatur (Eine Auswahl)	185
Index	187

Vorwort

Mathematik und Musik stehen in einer engen Wechselbeziehung. Sie sprechen jedoch je eine – wenn auch weltweit verstandene – eigene Sprache, was die Verständigung zwischen ihnen durchaus erschwert. Ein Brückenschlag ist also erforderlich, wobei wir die Bringschuld der Mathematik zuweisen.

Die besondere Stärke der Mathematik liegt in ihrem hohen Grad der Abstraktion und Allgemeinheit. Diese Stärke birgt in sich zugleich die Gefahr, daß die Deutung der Ergebnisse hinter den Erkenntnissen zurückbleibt. So lernt wohl jeder Mathematikstudent recht früh die Wellengleichung kennen und ahnt sicher auch, daß sie etwas mit Musik zutun hat. Aber diese erscheint oft ohne weitere Begründung, und die musikalische Deutung unterbleibt aus Zeitmangel. Ähnliches gilt für die Kettenbrüche, die wegen ihrer Approximationseigenschaften zu Anwendungen im Bereich der Wohlklänge geradezu herausfordern. Wie bedauerlich für die beiden Verwandten, für die Mathematik wie auch für die Musik.

Unser "Streifzug" soll also eine Brücke schlagen und dem wechselseitigen Interesse und Verständnis dienen. Sollen unsere Fundamente tragen, können wir bei der Darstellung allerdings nicht auf die Sprache der Mathematik verzichten. Aber wir können sie in unserem Zusammenhang etwas lockerer handhaben, brauchen nicht alle Begriffe neu zu definieren, und brauchen auch nicht immer gleich das stärkste Geschütz aufzufah-

ren, wenn dies der Verständlichkeit und der Verständigung dient. Auch brauchen wir nicht immer die genauen Voraussetzungen zu benennen. Der Fachmann kennt sie ohnehin, und der Laie hat kaum Nutzen von ihnen. Auch ich bin Laie – in der Musik! Darin liegt für mich ein gewisses Wagnis, das ich jedoch eingehen muß. Allerdings werde ich den eigentlichen künstlerischen Bereich wohlbedacht nicht betreten.

Unser Streifzug nimmt sich die Zeit, auch auf allgemeine kulturelle Zusammenhänge hinzuweisen, durch welche Mathematik und Musik seit Jahrhunderten verbunden sind. Um den Formeln aufzuhelfen, haben wir ihn mit vielen in Maple erstellten Tabellen und Abbildungen versehen. Sie könnten gerade dem Laien oft eingängiger sein als der reine mathematische Text.

Aus systematischen Gründen kommt im ersten Kapitel der Begriff der Frequenz – von einer Anmerkung abgesehen – nicht vor. Erst im zweiten Kapitel wird er zusammen mit der Wellenlänge eingeführt und dazu benutzt, Eigenschwingungen mit Tönen zu identifizieren.

Zwei Abschnitte sind als "fakultativ" gekennzeichnet. Man kann sie ohne Verlust im Gesamtverständnis jedenfalls zunächst einmal überspringen.

Dem Oldenbourg Verlag danke ich für die Aufnahme meines Streifzugs in sein Mathematik-Programm. Frau Kathrin Mönch, der Lektorin, danke ich für ihre wertvollen Vorschläge zum Erscheinungsbild.

Manfred Reimer