Kapitel 1

Die Geometrie der Töne

Die von Monochorden ausgehenden Geräusche werden von uns Menschen (wie auch von vielen Tieren) als angenehm empfunden. Wir nennen sie Töne und unterscheiden Töne nach ihrer 'Höhe'.

Der von der Saite eines Monochords ausgehende Ton klingt anders, wenn die Saite in ihrer Länge verkürzt wird. Wir nennen ihn dann 'höher', den ursprünglichen 'tiefer'. Und erklingen zwei Saiten gleicher physikalischer Beschaffenheit zugleich, so empfinden wir einen Wohlklang, wenn ihre Längen l und m in einem einfachen rationalen Verhältnis stehen. Man kann diese Empfindungen in einem gewissen Umfang ordnen. Besonders angenehm sind die Verhältnisse $l : m = 2 : 1$ und $3 : 2$.

In der Mathematik ist es üblich, statt 3:2 auch 3/2, oder $\frac{3}{2}$ zu schreiben. Davon werden wir nach Belieben Gebrauch machen. Außerdem ist es gelegentlich hilfreich, die natürlichen Zahlen in der Menge $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$ zusammenzufassen. $n \in \mathbb{N}$ bedeutet also: n ist eine natürliche Zahl. Allgemein wird dann ein Wohlklang durch einen Bruch $\frac{p}{q}$ natürlicher Zahlen $p \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit kleinem Zähler p und kleinem Nenner q beschrieben.

Das Tonsystem des griechischen Altertums

Wer unser heutiges Tonsystem verstehen will, kommt nicht umhin, sich das System der Alten Griechen anzuschauen, das auf **Tetrachorden** aufbaute. Seine Beschreibung mit Hilfe unserer heutigen Begriffe ist nur näherungsweise möglich, wobei die Vertauschung von *hoch/tief* das geringste der Probleme darstellt. Wir versuchen, das System ganz aus dem Denken des Altertums heraus zu entwickeln, also möglichst ohne Antizipation der Neuzeit, insbesondere ohne Antizipation des Begriffs der Frequenz.

Schon

Pythagoras von Samos

(ca. 580 bis ca. 500 v.Chr.)

experimentierte mit dem **Monochord**, einem Versuchsinstrument zur Darstellung einzelner Töne und zur Erforschung des Zusammenhanges zwischen den **Saitenlängen** und dem Wohlklang zweier zugleich erklingender Saiten gleicher Beschaffenheit. Ein besonderer **Wohlklang** ergibt sich, wenn die Saiten in einem einfachen Längenverhältnis stehen, besonders in einem der Verhältnisse

$$\begin{array}{ll} 1:2 & \text{(Oktave)}, \\ 2:3 & \text{(Quinte)}, \\ 3:4 & \text{(Quarte)}, \\ 4:5 & \text{(Terz)}. \end{array}$$

Da der Ton bei längerer Saite '*tiefer*', bei kürzerer Saite '*höher*' genannt wird, kann die *Höhe* $H(t)$ des Tones t mit der Saitenlänge $S(t)$ [in einer beliebigen Längeneinheit] durch die Größe

$$H(t) := \frac{const}{S(t)}$$

gemessen werden, und zwar mit einer beliebigen Konstanten *const*, die der Eichung dienen kann. Ist der Ton v höher als der Ton u, so stehen ihre Tonhöhen in den folgenden Verhältnissen:

$$\begin{aligned} \tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{2}{1} \quad \text{im Falle der Oktave,} \\ \tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{3}{2} \quad \text{im Falle der Quinte,} \\ \tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{4}{3} \quad \text{im Falle der Quarte,} \\ \tfrac{H(v)}{H(u)} &= \tfrac{5}{4} \quad \text{im Falle der Terz.} \end{aligned}$$

Theoretisch erhält man Töne beliebiger Höhe und beliebiger Tiefe, wenn man die Saitenlänge nur klein genug oder groß genug macht. Da das aber praktisch unmöglich ist, realisiert man die Tonskala mithilfe verschiedener Saiten unterschiedlicher Beschaffenheit, wie Durchmesser und Dichte, eventuell aber gleicher Länge. Auf diesem Prinzip basieren schon im Altertum Instrumente wie Kithara und Harfe.

Das Pythagoräische System

Pythagoras versuchte, die Oktave mit Hilfe der Quinte in 6 gleichgroße Tonschritte zu unterteilen. Durch Reduktion der 2-ten Quinte um eine Oktave gewann er das Verhältnis

$$q = \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{3}{2})^2 = \tfrac{9}{8},$$

mit dem er aus einem Grundton u_0 der Höhe $H(u_0) = 1$ die Töne $u_1, u_2, \ldots, u_6$ mit den Tonhöhen

$$H(u_j) = q^j \cdot H(u_0) = q^j, \quad j = (0), 1, 2, \ldots, 6$$

konstruierte. Der j-te Ton entsteht also aus der $(2j)$-ten Quinte durch Erniedigung um j Oktaven. Wie schon Pythagoras bemerkte, verfehlt der letzte Ton wegen

$$\left(\tfrac{9}{8}\right)^6 = 2 + \tfrac{7153}{262144}$$

leider die Oktave um das später nach ihm benannte sogenannte **pythagoräische Komma**. Auch verfehlt das (dissonante) Verhältnis

$$\tfrac{H(u_2)}{H(u_0)} = \tfrac{81}{64} = \tfrac{5}{4} + \tfrac{1}{64}$$

ein wenig die (reine) Terz. Man nennt es die **pythagoräische Terz**.

Dennoch ist die Idee von Pythagoras, die Oktave gleichmäßig zu teilen, fundamental. Sie wird aber erst in der Neuzeit, nach der Erfindung der Potenzen und der Logarithmen, in gültiger Form verwirklicht werden, nämlich in der gleichschwebenden Temperatur.

Das Größere Vollkommene System

Das pythagoräische System hat also – trotz eines überzeugenden Ansatzes – einstweilen seine Tücken. Schon in der Antike wurde ihm deshalb durch

Aristoxenos von Tarent

(354 bis ca. 300 v.Chr.)

ein theoretisch begründetes Tonsystem gegenübergestellt, das zwei verschiedene Tonschritte (mit $q = \frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$) kannte, die wegen

$$\tfrac{9}{8} \cdot \tfrac{10}{9} = \tfrac{5}{4}$$

zusammen eine reine (harmonische) Terz ergeben. Die Festlegung auf zwei solche Tonschritte wurde aber erst nach Aufkommen der Tasteninstrumente (Claviere) im späten Mittelalter verbindlich.

Bei

Archytas von Tarent

(4. Jh. v. Chr.)

spielte stattdessen wohl auch noch der Tonschritt mit $q = \frac{8}{7}$ eine Rolle.

Bevor wir das griechische Tonsystem erklären, bemerken wir, daß man mit den Tonhöhen rechnen kann. Dabei sind folgende Regeln wichtig:

A1. Sind u und v zwei Töne, so sind sie gleich, oder einer von ihnen ist der höhere. Führen wir ein Paar (u, v) von Tönen auf, so gilt als vereinbart, daß v höher ist als u. Entsprechendes gilt für Tripel (u, v, w), Quadrupel (u, v, w, x), usw.

A2. Bilden (u,v) eine Quinte und (v,w) eine Quarte, oder umgekehrt, so bilden (u,w) stets eine Oktave. Denn es gilt

$$\frac{H(w)}{H(u)} = \frac{H(w)}{H(v)} \cdot \frac{H(v)}{H(u)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2.$$

Bei Vertauschung von Quinte und Quarte erhält man aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation dasselbe Ergebnis.

A3. Bilden (u,v) eine Quarte und (u,w) eine Quinte, so gilt

$$\frac{H(w)}{H(v)} = \frac{H(w)}{H(u)} \cdot \frac{H(u)}{H(v)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8} \quad \textit{(Sekunde)}.$$

Wir sagen, (v,w) bilden eine *Sekunde*.

Im Prinzip reichen also Quinte und Quarte aus, um die Oktave und die Sekunde zu definieren. Das reizt den Mathematiker, das griechische Tonsystem unter Benutzung von **A1–A3** allein aus diesen beiden Begriffen **axiomatisch** abzuleiten, und zwar ohne weiteren Bezug auf die Geometrie der Saiten, die diesen Begriffen zugrundeliegt.

Auf die Natur der Töne kommen wir erst im 2. Kapitel wieder zu sprechen, wenn uns die mathematischen und naturwissenschaftlichen Begriffe der Neuzeit zur Verfügung stehen.

Struktur des griechischen Tonsystems

Um uns einen späteren Übergang zur Neuzeit zu erleichtern, werden wir einzelne Töne mit den uns heute geläufigen Bezeichnungen benennen, wie *e, a, h,* e', usw., ohne daß damit zunächst irgendeine Bedeutung antizipiert wird.

Tetrachorde

bestehen aus vier Tönen

$$(uxxv),$$

von denen (u, v) eine Quarte bilden. Die mit x bezeichneten Töne bleiben dabei zunächst undefiniert. Jedenfalls gilt

$$\frac{H(v)}{H(u)} = \frac{4}{3} \quad (\textit{Quarte}).$$

Vielleicht konnten die vier Töne eines Tetrachords auf einer Saite gegriffen werden. Ob die Zahl *vier* hier ins Spiel kommt, weil der Daumen zum Halten des Instruments gebraucht wurde, sei dahingestellt. Jedenfalls ist der Ton v durch den Ton u bereits eindeutig bestimmt, und umgekehrt.

Zentrale Tetrachorde

sind zwei Tetrachorde

$$(exxa) \text{ und } (hxxe'),$$

bei denen (e, h) eine Quinte bilden. Es gilt also

$$\frac{H(a)}{H(e)} = \frac{4}{3} = \frac{H(e')}{H(h)} \quad (\textit{Quarten}) \tag{1}$$

und

$$\frac{H(h)}{H(e)} = \frac{3}{2} \quad (\textit{Quinte}). \tag{2}$$

Da (e, h) eine Quinte ist und (h, e') eine Quarte, so gilt nach unserer Überlegung von oben, **A2**, daß (e, e') eine Oktave ist,

$$\frac{H(e')}{H(e)} = 2 \quad (\textit{Oktave}). \tag{3}$$

Damit stehen alle bereits ausgezeichneten Töne (e,a,h und e') in einem wohl definierten Verhältnis zu e, aber auch zu jedem anderen von ihnen, so daß die Tonhöhe eines jeden von ihnen die Tonhöhe der übrigen bereits eindeutig bestimmt.

Da nunmehr die Quarte (e, a) und das Paar (a, e') sich zu einer Oktave ergänzen, bilden (a, e'), wieder nach **A2**, eine Quinte,

$$\frac{H(e')}{H(a)} = \frac{3}{2} \quad (\textit{Quinte}). \tag{4}$$

Auch ergänzen sich die Quarte (e, a) und das Paar (a, h) zu einer Quinte. Daraus folgt nach **A3**, daß (a, h) eine Sekunde ist,

$$\frac{H(h)}{H(a)} = \frac{9}{8} \quad (\textit{Sekunde}). \tag{5}$$

Struktur-Diagramm

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in einem Diagramm, welches die Faktoren zeigt mit welchen sich die Töne erhöhen:

$$\begin{array}{ccc} e\ .\ .\ a & & h\ .\ .\ e' \\ \hline \frac{4}{3} & \frac{9}{8} & \frac{4}{3} \\ \hline & \frac{2}{1} & \end{array} \tag{6}$$

Über die mit x markierten Töne ist noch nichts gesagt. Wir bezeichnen sie mit *f,g* bzw. mit *c',d'*, so daß die zentralen Tetrachorde die Form

$$(efga) \text{ und } (hc'd'e')$$

annehmen. Dabei wird zunächst nur verlangt, daß (*f,c'*) und (*g,d'*) wie (*e,h*) im Quintenverhältnis stehen, daß also

$$H(c') := \tfrac{3}{2}H(f), \quad \textit{und} \quad H(d') := \tfrac{3}{2}H(g) \tag{7}$$

gilt. Geometrisch gesehen bedeutet das: Wenn die beiden Tetrachorde durch zwei gleichlange Saiten realisiert werden, dann können die beiden Tonpaare je mit einem **Doppelgriff** erzeugt werden.

Absolut sind die Tonhöhen damit noch nicht festgelegt. Auch blieb es zunächst dem Spieler überlassen, die Töne f und g einzufügen, z.B. f als Sekunde über der Prime e und g als Terz – was diese Begriffe, wie auch Quarte, Quinte und Oktave, zunächst einmal aus der Stellung des zweiten Tones innerhalb der zentralen Tetrachorde als Ordinalzahlen erklärt.

Allerdings war aus rein musikalischen Gründen noch eine gewisse Regel zu beachten. Um sie herzuleiten betrachten wir noch einmal das Diagramm (6). Es fällt auf, daß eine dreimalige Erhöhung von e um den dort auftretenden Faktor $\frac{9}{8}$ wegen

$$\left(\tfrac{9}{8}\right)^3 = 1{,}42\ldots > 1{,}33\ldots = \tfrac{4}{3}$$

deutlich über den Ton a hinwegschießen würde. In anderen Worten, im (geometrischen) Mittel sind die drei Abstände zwischen den Tönen e, f, g, a deutlich kleiner als der Abstand von a und h. Genauer treffen würde man mit dem Faktor

$$\left(\tfrac{9}{8}\right)^{\frac{5}{2}} = 1{,}34\ldots > 1{,}33\ldots = \tfrac{4}{3},$$

also bei "zweieinhalb-maliger" Anwendung des Faktors $\frac{9}{8}$.

Ganzton- und Halbtonschritte

Nennt man nun eine Erhöhung um (etwa) den Faktor $\frac{9}{8}$ einen **Ganztonschritt**, die Erhöhung um (etwa) den Faktor $(\frac{9}{8})^{\frac{1}{2}}$ einen **Halbtonschritt**, so war die Regel, daß f und g im Tetrachord $(e..a)$ so einzufügen sind, daß 2 Ganztonschritte und 1 Halbtonschritt entstehen, und zwar nach dem Schema

$$e_{\vee} f_{\vee\vee} g_{\vee\vee} a,$$

wobei $_{\vee}$ jeweils einem Halbtonschritt, $_{\vee\vee}$ einem Ganztonschritt entspricht. Die zentralen Tetrachorde nehmen damit die folgende Struktur an:

$$e_{\vee} f_{\vee\vee} g_{\vee\vee} a_{\,\vee\vee}\, h_{\vee} c'_{\vee\vee} d'_{\vee\vee} e', \tag{8}$$

wobei (7) berücksichtigt wurde.

Es gab im Altertum eine Fülle an Realisierungsvorschlägen, auf die wir nicht im einzelnen eingehen können. Platon sah nur eine Art von Ganztonschritten im Verhältnis 9:8 vor, was aber für die Halbtonschritte zwingend das viel zu komplizierte Verhältnis

$$\frac{4}{3} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{243}$$

nach sich zieht. Durchgesetzt haben sich später die Verhältnisse

9:8 (großer Ganztonschritt)

10:9 (kleiner Ganztonschritt)

des Aristoxenos, nicht jedoch das Verhältnis

$$8{:}7 \quad \text{(übergroßer Ganztonschritt)}$$

des Archytas. Wir kommen darauf zurück, und fassen einstweilen zusammen:

> Die Töne der zentralen Tetrachorde erfüllen in Bezug auf ihre Abstände das Schema (8). Jeder der Töne *e, a, h, e'* bestimmt die übrigen drei auf eindeutige Weise. f und g werden durch den Spieler festgelegt. Sie bestimmen danach c' und d' auf eindeutige Weise.

Die Alten Griechen begnügten sich nicht mit den zwei zentralen Tetrachorden (II und III). Durch ein **verschränktes Anfügen** je eines weiteren Tetrachords nach unten (I) und nach oben (IV) erweiterten sie das System und erhielten

Das Größere Vollkommene System (GVS)
($\sigma\acute{\upsilon}\sigma\tau\eta\mu\alpha$ $\tau\acute{\epsilon}\lambda\epsilon\iota o\nu$ $\mu\epsilon\tilde{\iota}\zeta o\nu$)

Es hat die Struktur

Quinten

A H c d e f g a h c'd' e'f'g'a'

II III

I IV

Quarten

Die neuen Tetrachorde (*Hcde*) und (*e'f'g'a'*) sind verschränkt über die bereits vorhandenen Töne e und e'. Da (H,e) eine Quarte ist und (e,h) eine Quinte, so ist (H,h) eine Oktave. Entsprechend stellt man fest, daß (a,a') eine Oktave ist. Danach wird der das System nach unten abschließende Ton A so definiert, daß auch noch (A,a) zur Oktave wird.

Es sind noch die inneren Töne der neuen Tetrachorde zu definieren. Das geschieht dadurch, daß man den Tetrachord I im Verhältnis von II, den Tetrachord IV im Verhältnis von III teilt. Dann sind auch

$$(c,c'),\ (d,d'),\ (f,f'),\ (g,g')$$

Oktaven. Wir zeigen das exemplarisch für (c,c').

Nach Voraussetzung gilt $\frac{H(c)}{H(e)} = \frac{H(f)}{H(a)}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{H(c')}{H(c)} &= \frac{H(c')}{H(f)} \cdot \frac{H(f)}{H(a)} \cdot \frac{H(a)}{H(c)} \\
&= \frac{H(c')}{H(f)} \cdot \frac{H(c)}{H(e)} \cdot \frac{H(a)}{H(c)} \\
&= \frac{H(c')}{H(f)} \cdot \frac{H(a)}{H(e)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2\,, \qquad (9)
\end{aligned}$$

wie behauptet, wobei wir zuletzt (7) benutzt haben.

Durch ein Zusammenfassen aller bisherigen Ergebnisse ergeben sich zuletzt die Tonhöhen von Tabelle 1.

Ton t	$\frac{H(t)}{H(a')}$
a'	1
e'	$\frac{3}{4}$
h	$\frac{9}{16}$
a	$\frac{1}{2}$
e	$\frac{3}{8}$
H	$\frac{9}{32}$
A	$\frac{1}{4}$

Tabelle 1.

Aus den Tönen des GVS konnten 7 aus Doppeltetrachorden bestehende **Tonleitern** gebildet werden. Es sind dies:

a - a'	hyperdorisch
g - g'	hyperphrygisch
f - f'	hyperlydisch
e - e'	dorisch
d - d'	phrygisch
c - c'	lydisch
H - h	mixolydisch.

Sie unterscheiden sich durch die Stellung der Halbtonschritte. Der Spieler legte die noch nicht endgültig definierten Töne f und g in Abhängigkeit von der Tonart selbständig fest. Damit beenden wir unseren Ausflug in den Aufbau des Tonsystems des Altertums.

Literaturhinweis

Wer über die Musik des griechischen Altertums mehr wissen möchte, der schaue in den "Kleinen Pauly", das profunde Vermächtnis der Altphilologen in 5 Bänden.

Das Tonsystem der Renaissance

Wie schon sein Name besagt, betrachteten die Alten Griechen das Größere Vollkommene System zunächst als abgeschlossen. Spätestens aber im ausgehenden Mittelalter verfügten neue Instrumente, wie Clavichord, Cembalo, Orgel, über einen so großen Tonumfang, daß das GVS erweitert werden mußte.

Eine solche Erweiterung hätte zum Beipiel dadurch bewirkt werden können, daß weitere Tetrachorde an die Tetrachorde I bis IV verschränkt angehängt wurden. Das hätte zu vielen neuen Quarten geführt, jedoch nur auf wenige neue Quinten.

Indes kann man das GVS ganz neu auffassen, indem man die 7 Töne der

Grundperiode
c d e f g a h

zur Tonbasis erklärt, und die anderen, schon benannten Töne aus diesen über die Oktave ableitet. Das liefert dann sofort die Möglichkeit, das System **konsistent** mit dem GVS mit der Oktave als Periode fortzusetzen. Man erhält so zum Beispiel die Töne der 1. Periode

c'd'e'f'g'a'h'

als Oktaven über den Tönen der Grundperiode, das heißt als Töne mit doppelter Tonhöhe. Der letzte von ihnen ist neu. Halbiert man die Tonhöhen der Töne der Grundperiode, so erhält man entsprechend die Töne der Periode

$$C\ D\ E\ F\ G\ A\ H,$$

von denen alle außer A und H neu sind. So kann man beliebig fortfahren und erhält das Oktav-periodische

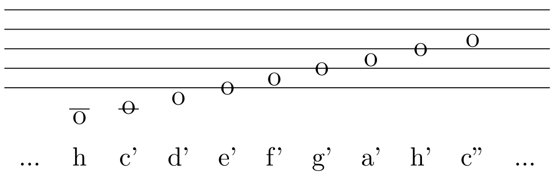
7-Ton-System

$\ldots\ A\ H\ \ c\ d\ e\ f\ g\ a\ h\ \ c'd'\ \ldots$

mit noch beliebigen Tönen f und g, welche aber der Struktur

$$e_\vee f_{\vee\vee} g_{\vee\vee} a \tag{10}$$

genügen müssen. Im *Violinschlüssel* werden die Töne wie folgt notiert:



Durch die Periodisierung mit der Oktave erhält man nicht nur einen beliebig großen Vorrat an Tönen, sondern überträgt auf sie zugleich auch die Struktur des GVS. Bilden nämlich (u, u') und (v, v') je eine Oktave, so gilt

$$\frac{H(u')}{H(v')} = \frac{2H(u)}{2H(v)} = \frac{H(u)}{H(v)}.$$

Das heißt, bilden (u, v) eine Oktave, Quinte oder Quarte, usw., so bilden auch (u', v') eine Oktave, Quinte oder Quarte, usw.

Claviere

Eine wesentliche Neuerung zu Beginn der Renaissance war die Einführung der *Claviere.* Das sind Instrumente mit einer festen *Klaviatur* (von *lat. clavis*, der Schlüssel, die Taste), wie Clavichord, Cembalo, Orgel, usw. Sie überließen die Festlegung der Töne f und g nicht mehr dem Spieler, und damit kein Chaos beim Zusammenspiel mit anderen Instrumenten ausbrach, war es nun erforderlich, über f und g, und damit über alle von ihnen abhängenden Töne verbindlich zu entscheiden.

Es war naheliegend, mindestens eines der Intervalle (f,g) und (g,a) als Sekunde (9:8) festzulegen. Hätte man aber beide über die Sekunde definiert, so hätte sich für (f,a) das Verhältnis 81:64 ergeben, also die dissonante pythagoräische Terz. Warum sollte man sich aber nicht für das Verhältnis 80:64 entscheiden, das genau der Terz (5:4) entspricht? Tatsächlich erfolgte die Definition von f und g jetzt über die Verhältnisse

A4 $$\frac{H(a)}{H(f)} = \frac{5}{4} \qquad \textit{(Terz)} \tag{11}$$

und

A5 $$\frac{H(g)}{H(f)} = \frac{9}{8} \qquad \textit{(Sekunde),} \tag{12}$$

was

$$\frac{H(a)}{H(g)} = \frac{10}{9} \tag{13}$$

nach sich zieht, also einer Tonstufe des Aristoxenos entspricht. Wegen

$$\frac{9}{8} - \frac{10}{9} = \frac{1}{72}$$

ergeben sich dabei zwei als Ganztonschritte akzeptable Intervalle (f,g)

und (g,a). Daneben folgt aus

$$\frac{H(f)}{H(e)} = \frac{H(f)}{H(a)} \cdot \frac{H(a)}{H(e)} = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{3}$$

das Verhältnis

$$\frac{H(f)}{H(e)} = \frac{16}{15} \qquad (\textit{kl. Sekunde}),$$

das man eine kleine Sekunde nennt. Wegen

$$\left(\frac{16}{15}\right)^2 - \frac{9}{8} = \frac{23}{1800} < \frac{1}{78}$$

ist sie als Halbtonschritt akzeptabel, unsere Definitionen stehen also im Einklang mit der Forderung (10), und die Definition des **7-Ton-Systems** ist abgeschlossen. Mit den Definitionen A4 und A5 nennt man es die

Reine Stimmung.

Es benutzt, wie schon Aristoxenos, zwei verschiedene Ganztonschritte ($\frac{9}{8}$ und $\frac{10}{9}$), die zusammen eine Terz ergeben.

Unter Benutzung aller unserer Definitionen und der Oktav-Periodizität ergibt sich für die Grundperiode die Tabelle 2.

Hier korrespondieren die Intervall-Bezeichnungen mit den entsprechenden Ordinalzahlen. Das gilt nicht mehr im vollen Sinne für die Tabelle 2a, welche sich auf die zentralen Tetrachorde bezieht.

Nr.	*Ton* t	$\frac{H(t)}{H(c)}$	*Anstieg (Faktor)*	*Ganzton–Schritte*	(c,t)
1	c	1	$\frac{9}{8}$	1	Prime
2	d	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	1	Sekunde
3	e	$\frac{5}{4}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{1}{2}$	Terz
4	f	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	1	Quarte
5	g	$\frac{3}{2}$	$\frac{10}{9}$	1	Quinte
6	a	$\frac{5}{3}$	$\frac{9}{8}$	1	Sexte
7	h	$\frac{15}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{1}{2}$	Septime
8	c’	2			Oktave

Tabelle 2
(Grundperiode des 7-Ton-Systems in reiner Stimmung)

Nr.	*Ton* t	$\frac{H(t)}{H(e)}$	*Anstieg (Faktor)*	*Ganzton–Schritte*	(e,t)
1	e	1	$\frac{16}{15}$	$\frac{1}{2}$	Prime
2	f	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	1	kl. Sekunde
3	g	$\frac{6}{5}$	$\frac{10}{9}$	1	kl. Terz
4	a	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{8}$	1	Quarte
5	h	$\frac{3}{2}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{1}{2}$	Quinte
6	c’	$\frac{8}{5}$	$\frac{9}{8}$	1	kl. Sexte
7	d’	$\frac{9}{5}$	$\frac{10}{9}$	1	Septime
8	e’	2			Oktave

Tabelle 2a
(Zentrale Tetrachorde)

Und wir haben für die Bezeichnung des Intervalls (e,t) weitere neue Begriffe einführen müssen, wie *kleine Terz* (6:5) und *kleine Sexte* (8:5).

Eigenschaften des 7-Ton-Systems und anderer Systeme

Das periodische 7-Ton-System enthält mit jedem Ton u auch die Oktave u' dazu, und jeder Ton ist auch die Oktave eines anderen Tones. Wir sagen, das System sei

Oktaven-vollständig .

Entsprechend kann man sich *Quinten-* und *Quarten-vollständige Systeme* vorstellen, bei denen beliebig Quinten bzw. Quarten gebildet werden können, nach oben wie nach unten. Musikalisch besonders interessant wäre es dann, wenn ein Tonsystem mehrere dieser Eigenschaften hätte. Damit kommen wir zum

Quinten-Problem .

Es zeigt sich indes, daß man die Oktave (e,e') auf keine Weise so teilen kann, mit wievielen Tönen auch immer, daß das entstehende System sowohl Quinten- als auch Oktaven-vollständig ist. Dies ist mathematisch zu beweisen.

Betrachten wir dazu ein Oktaven-vollständiges Tonsystem mit den Tönen x und x', zwischen denen nur eine endliche Anzahl von Tönen des Systems liegt, und nehmen an, es sei auch Quinten-vollständig. Ausgehend von $u_0 := x$ bilden wir iterativ die Töne u_1, u_2,...,u_j,... im Quinten-Abstand. Der j-te Ton hat dann die Tonhöhe

$$H(u_j) = \left(\frac{3}{2}\right)^j \cdot H(u_0).$$

Im Oktavabstand hat er Vorgänger v_1, v_2,...,v_m,..., von denen genau einer garantiert zwischen x und x' liegt oder mit x übereinstimmt. Der Ton hängt nur von j ab, es sei der Ton $r_j = v_m$. Seine Tonhöhe ist

$$H(r_j) = \frac{1}{2^m}\left(\frac{3}{2}\right)^j \cdot H(u_0).$$

Diese Konstruktion führen wir für $j = 1$, $j = 2$, usw. durch, und erhalten die Töne r_1, r_2,..., die sämtlich zwischen x (eingeschlossen) und x' liegen. Von diesen Tönen gibt es aber nur eine endliche Anzahl. Also müssen zwei von ihnen übereinstimmen, sagen wir r_j und r_k, mit $k \neq j$ und

$$H(r_k) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{2}\right)^k \cdot H(u_0).$$

Wegen $H(r_k) = H(r_j)$ gilt dann

$$\frac{1}{2^n}\left(\frac{3}{2}\right)^k = \frac{1}{2^m}\left(\frac{3}{2}\right)^j,$$

und hieraus erhält man

$$2^{m+j} \cdot 3^k = 2^{n+k} \cdot 3^j.$$

Hier sind alle auftretenden Exponenten natürliche Zahlen. Eine solche Beziehung kann indes zwischen den Primzahlen 2 und 3 wegen $j \neq k$ nicht bestehen. Das folgt aus dem Satz von

Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo
(1871 – 1953, Berlin – Freiburg)

über die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen:

Satz *(Zermelo)*
Jede natürliche Zahl $z \geq 2$ besitzt eine eindeutig bestimmte Faktorisierung

$$z = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots \cdot p_r^{n_r}$$

mit einer natürlichen Zahl r, Primzahlen

$$p_1 < p_2 < \dots < p_r$$

und natürlichen Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_r$.

Man kann sich fragen, wieso ein so einleuchtender Satz erst so spät seinen Beweis gefunden hat. Tatsächlich liegt er keinesfalls an der Oberfläche. Das sieht man schon daran, daß der Beweis in ziemlich raffinierter Weise das *Wohlordnungs-Axiom* der natürlichen Zahlen benutzt, welches besagt, daß jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element enthält. Wir können den Beweis hier nur andeuten.

Zunächst ist es recht einfach zu erkennen, daß jede natürliche Zahl $z \geq 2$ eine Faktorisierung, wie angegeben, überhaupt besitzt. Angenommen aber nun, der Satz sei falsch. Dann betrachtet man die Menge aller $z \geq 2$, die mehr als eine solche Faktorisierung besitzen. Unter diesen z gibt es ein kleinstes (!), und für dieses kleinste z wird ein Widerspruch konstruiert. Was dann zeigt, daß die Annahme, der Satz sei falsch, selber falsch gewesen sein muß. Also ziemlich kompliziert!

Wir merken uns:

Kein Tonsystem ist sowohl Oktaven- als auch Quinten-vollständig.

Da sich Quinte und Quarte zur Oktave ergänzen (**A2**), folgt hieraus unmittelbar:

Kein Tonsystem ist sowohl Quinten- als auch Quarten-vollständig.

Entsprechendes beweist man für die Sekunde. Hier ist daran zu erinnern, daß schon Pythagoras sich darüber geärgert hat, daß die Sekunde nicht in der Oktave aufgeht, und vielmehr das nach ihm benannte

pythagoräische Komma

auftritt. Nach diesem etwas ernüchternden Ergebnis wenden wir uns noch einmal den Basistönen

c d e f g a h (c')

zu, deren Tonhöhen der Tabelle 2 zu entnehmen sind und deren Oktaven

c'd'e'f'g'a'h'(c")

gerade die doppelte Tonhöhe haben.

Wir wissen bereits, daß nicht zu allen Tönen die Quinte gebildet werden kann. Tatsächlich gibt es nach Konstruktion die Quinten

(e,h), (f,c'), (g,d'), (a,e') und (c,g) .

Dagegen ist es unmöglich die Quinte zu d und zu h zu bilden.

Denn wäre zum Beispiel (d, x) eine Quinte, so müßte x die Tonhöhe

$$H(x) = \tfrac{3}{2} \cdot H(d) = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{9}{8} \cdot H(c) = \tfrac{27}{16} \cdot H(c)$$

haben, einen solchen Ton gibt es aber nicht, vgl. Tabelle 2. Wegen

$$\frac{27}{16} - \frac{5}{3} = \frac{1}{48}$$

wäre aber der Abstand zu a sehr klein. Tatsächlich gilt mit sehr großer Genauigkeit

$$\frac{H(a)}{H(d)} = \frac{40}{27} \approx \frac{3}{2},$$

man könnte also geneigt sein, (d, a) als Quinte *anzusehen*, was aber begrifflich zu Problemen führen müßte. Vernünftiger ist eine

Änderung der Begriffe

Um möglichst vielen Tönen zu einer Quinte (bzw. Quarte usw.) zu verhelfen, definieren wir diese Begriffe im weiteren nicht mehr über die Tonhöhe, sondern mithilfe der Anzahl der zwischen zwei Tönen liegenden Ganzton- und Halbtonschritte, wobei zwei Halbtonschritte wie ein Ganztonschritt zu zählen sind. Dadurch wird die Struktur natürlich vergröbert. Einen Teil der möglichen Definitionen zeigt die Tabelle 3.

(u, v)	*Ganzton–Schritte*	*Halbton–Schritte*	$H(v)/H(u)$
Prime	0	0	1
kl. Sekunde	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{16}{15}$
(gr.) Sekunde	1	2	$\frac{9}{8}$ oder $\frac{10}{9}$
kl. Terz	$1\frac{1}{2}$	3	$\frac{6}{5}$ oder $\frac{32}{27}$
(gr.) Terz	2	4	$\frac{5}{4}$
Quarte	$2\frac{1}{2}$	5	$\frac{4}{3}$ oder $\frac{27}{20}$
Quinte	$3\frac{1}{2}$	7	$\frac{3}{2}$ oder $\frac{40}{27}$
Oktave	6	12	2

Tabelle 3
(Neue Definitionen)

Es gibt jetzt also unter anderem Quinten zweierlei Art. Um sie zu unterscheiden, nennen wir die Quinten mit dem Verhältnis 3:2 *rein*, die mit dem Verhältnis 40:27 *nichtrein*. Dazu folgende Beispiele:

reine Quinten:	(c,g), (e,h), (f,c’), (g,d’), (a,e’),
nichtreine Quinten:	(d,a).

Das Verhältnis von reiner Quinte zu nichtreiner Quinte ist

$$\tfrac{3}{2} : \tfrac{40}{27} = \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{27}{40} = \tfrac{81}{80} = 1 + \tfrac{1}{80},$$

weicht also nur um $\frac{1}{80}$ von 1 ab, was kaum zu hören ist.

Erweiterung des 7-Ton-Systems

Während jetzt auch zu d die Quinte gebildet werden kann, wenn auch nur die nichtreine, bleibt h, und damit auch H, ganz unversorgt. Führt man nämlich das Schema (8) nach unten fort, so erkennt man, daß dem Intervall (H, f) drei Ganztonschritte entsprechen, dem Intervall (H, g) vier. Die Quinte hat aber $3\frac{1}{2}$. Es fehlt also ein Ton zwischen f und g. Wie soll man ihn definieren?

Nehmen wir an, x ist der fehlende Ton. Unter Benutzung von Tabelle 2 erhält man

$$\frac{H(x)}{H(f)} = \frac{H(x)}{H(H)} \cdot \frac{\frac{1}{2}H(h)}{H(c)} \cdot \frac{H(c)}{H(f)} = \frac{H(x)}{H(H)} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{3}{4},$$

also

$$\frac{H(x)}{H(f)} = \frac{45}{64} \cdot \frac{H(x)}{H(H)}.$$

Ist also (H, x) eine reine Quinte, so gilt

$$\frac{H(x)}{H(f)} = \frac{45}{64} \cdot \frac{3}{2} = \frac{135}{128}.$$

Ist aber (H, x) eine nichtreine Quinte, so ergibt sich

$$\frac{H(x)}{H(f)} = \frac{45}{64} \cdot \frac{40}{27} = \frac{25}{24}.$$

Es ist nun naheliegend, zur Definition des neuen Tones das einfachere, und der Naturton-Reihe (s. Kap. 2) entsprechende Verhältnis heranzuziehen, also x=*fis* über

$$H(fis) = \tfrac{25}{24} \cdot H(f)$$

zu definieren, so daß (H,*fis*) zu einer nichtreinen Quinte wird.

Unter Benutzung von Tabelle 2 erhält man noch

$$\frac{H(g)}{H(fis)} = \frac{H(g)}{H(f)} \cdot \frac{H(f)}{H(fis)} = \frac{9}{8} \cdot \frac{24}{25},$$

also

$$H(g) = \tfrac{27}{25} \cdot H(fis).$$

Wegen

$$\left(\tfrac{25}{24}\right)^2 = \left(1 - \tfrac{23}{648}\right) \cdot \tfrac{9}{8}$$

und

$$\left(\tfrac{27}{25}\right)^2 = \left(1 + \tfrac{23}{625}\right) \cdot \tfrac{9}{8}$$

sind die Intervalle (*f*,*fis*) und (*fis*,g) als Halbtonschritte akzeptabel. Das Schema (8) kann also erweitert werden durch Einfügen von

$$\ldots\, f_{\vee} fis_{\vee} g \,\ldots$$

Man erkennt nun sogleich, daß auf fis wiederum keine Quinte errichtet werden kann. Es fehlt ein Ton zwischen c und d, der mit cis bezeichnet und durch

$$H(cis) = \tfrac{25}{24} \cdot H(c)$$

definiert wird. So können alle Ganztonschritte in (8) aufgelöst werden durch Einfügen der Töne

fis, cis, gis, dis, ais

im Halbtonschritt-Abstand unter jeweiliger **Erhöhung** im Verhältnis 25:24, also nach dem Schema

$$H(x\text{-}is) = \tfrac{25}{24} \cdot H(x), \tag{14}$$

$x = f,\ c,\ g,\ d,\ a.$

Ein neues Problem entsteht indes, wenn man das Fehlen der Quinten nach unten zu einer entsprechenden Definition neuer Töne unter einer jeweiligen **Erniedrigung** im Verhältnis 24:25 benutzt, was wieder nicht-reinen Quinten entspricht und die Töne

ges, des, as, es, b (=hes)

ergibt. Diese Töne werden also nach dem Schema

$$H(x\text{-}es) = \tfrac{24}{25} \cdot H(x), \tag{15}$$

$x = g,\ d,\ a,\ e,\ h$ eingefügt. Sie stimmen mit den zuvor gebildeten neuen Tönen jedoch nicht überein, denn man erhält

$$\frac{H(ges)}{H(fis)} = \frac{H(des)}{H(cis)} = \frac{H(b)}{H(ais)} = \left(\frac{24}{25}\right)^2 \cdot \frac{9}{8} = 1 + \frac{23}{625},$$

$$\frac{H(as)}{H(gis)} = \frac{H(es)}{H(dis)} = \left(\frac{24}{25}\right)^2 \cdot \frac{10}{9} = 1 + \frac{3}{125}.$$

In allen fünf Fällen ist das Verhältnis aber größer als Eins. Die eingefügten Töne liegen also in der Reihenfolge von, zum Beispiel,

… f, fis, ges, g, …

In der Grundperiode erhalten wir so 10 neue Töne, so daß sich ihre Anzahl auf insgesamt 17 erhöht. Durch Periodisierung mit der Oktave ergibt sich daraus das

17-Ton-System.

Das bereits angedeutete Problem besteht nun darin, daß in jeder Periode 10 neue Töne erscheinen. Auf einer Violine, einem Cello oder Kontrabaß kann man diese Töne auf den schon vorhandenen Saiten greifen. Aber auf einem *Clavier* muß jeder Ton neu eingerichtet und mit einer eigenen Taste versehen werden, was den Umfang des Instruments erheblich vergrößert und seine Spielbarkeit erschwert, wenn nicht unmöglich macht. Um den Aufwand zu reduzieren, erfand man daher die

mitteltönige Temperatur,

bei welcher *fis* und *ges*, usw., jeweils durch einen gemeinsamen mittleren Ton

fis=ges, cis=des, gis=as, dis=es, ais=b

ersetzt wurden, freilich unter Verfälschung der entsprechenden Quinten, aber doch so, daß die mittleren Töne im Halbtonschritt-Abstand eingefügt bleiben. Dabei stellte sich für den Musiker der wichtige Nebeneffekt ein, daß er fortan, zum Beispiel, ein *fis* als *ges* auffassen und auf diese Weise in eine andere Tonart wechseln kann (**enharmonische Verwechselung**).

Das neue, mitteltönige

12-Ton-System

hat also zuletzt eine Grundperiode mit 12 Tönen im Abstand von Halbtonschritten. Es hat den außerordentlichen Vorteil, daß jedes auf Halbtonschritten aufgebaute Tonintervall von jedem Ton aus nach oben wie nach unten gebildet werden kann. *In diesem Sinne ist es sowohl Oktaven- als auch Quinten-vollständig.* Das steht nicht im Widerspruch zu dem oben Bewiesenen, da der Begriff der Quinte jetzt eine allgemeinere Bedeutung hat.

Mathematische Beschreibung des 12-Ton-Systems

Da das 12-Ton-System nur aus Halbtonschritten zusammengesetzt ist, können wir seine Töne mit den ganzen Zahlen identifizieren:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{B} & \text{H} & \text{c} & \text{cis} & \text{d} & \ldots & \text{b} & \text{h} & \text{c'} & \ldots & \text{u}\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow\ldots \\ \text{-2} & \text{-1} & 0 & 1 & 2 & \ldots & 10 & 11 & 12 & \ldots & \phi(u)\ldots \end{array}$$

Dann ist das Tonpaar (u, v) z.B. genau dann eine Oktave, wenn

$$\phi(v) - \phi(u) = 12,$$

genau dann eine Quinte, wenn

$$\phi(v) - \phi(u) = 7$$

gilt, und v ist das *erhöhte* oder das *erniedrigte* u, wenn

$$\phi(v) = \phi(u) + 1 \quad \text{bzw.} \quad \phi(v) = \phi(u) - 1$$

gilt. Man kann also mit den Tönen rechnen wie mit den ganzen Zahlen, die wir in der Menge

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$$

zusammenfassen. Sie enthält die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Damit unterliegen die Töne der Struktur nach den Gesetzen der Zahlentheorie.

Division mit Rest

Ist eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gegeben und ist $m \in \mathbb{N}$, $m \neq 1$, eine weitere Zahl, der *Divisor*, so kann man n durch m *mit Rest* dividieren. Das heißt, es gibt eine Zahl $k \in \mathbb{Z}$ und einen *Rest* r, $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, so daß

$$n = k \cdot m + r$$

gilt. Zum Beispiel erhält man für $n = 14$ (bzw. $n = -14$) und $m = 5$:

$$14 = 2 \cdot 5 + 4 \quad \text{mit} \quad 4 \in \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

und

$$-14 = (-3) \cdot 5 + 1 \quad \text{mit} \quad 1 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Wir schreiben dafür auch

$$n \equiv r \mod (m)$$

mit mod gesprochen wie *modulo*. Alle Töne v der Oktavfolge $\{\ldots, c, c',$ $\ldots\}$ führen auf

$$\phi(v) = k \cdot 12 + 0,$$

alle Töne der Oktavfolge $\{\ldots, cis, cis', \ldots\}$ auf

$$\phi(v) = k \cdot 12 + 1,$$

alle Töne der Oktavfolge $\{\ldots, d, d', \ldots\}$ auf

$$\phi(v) = k \cdot 12 + 2,$$

usw., und alle Töne der Tonfolge $\{\ldots, h, h', \ldots\}$ auf

$$\phi(v) = k \cdot 12 + 11.$$

Wir können also die Oktavfolgen durch den jeweiligen *Divisionsrest bei Division durch 12* beschreiben, andererseits aber auch durch die Nennung eines einzigen darin vorkommenden Tones, etwa c oder d, usw. Indentifizieren wir die Oktavfolge sogar mit diesem Ton, so können wir von *dem* Ton c oder *dem* Ton d usw. sprechen, und erhalten die folgende Zuordnung:

Ton	Oktav-folge	Rest r
c	$\{c\}$	0
cis	$\{cis\}$	1
d	$\{d\}$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	$\{a\}$	9
ais	$\{ais\}$	10
h	$\{h\}$	11

Tabelle 4

Allgemein wird also *der Ton* u, das heißt die Oktavfolge $\{u\}$, durch den (kleinsten nichtnegativen) Divisionsrest r bei Division durch 12 gekennzeichnet, also durch die für alle Töne der Folge mit einem $r \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ gemeinsam geltende Kongruenz

$$\phi(u) \equiv r \mod (12).$$

Im weiteren betrachten wir die *iterierten Quinten* auf dem Ton c. Es sind all diejenigen Töne u, für welche $\phi(u) = j \cdot 7$ mit $j = (0), 1, 2, \ldots$ gilt, also Töne welche die Kongruenz

$$\phi(u) \equiv 0 \mod (7)$$

lösen. Für $j = 0, 1, 2 \ldots$ erhalten wir der Reihe nach die folgenden Entsprechungen:

$$\begin{array}{llllcc}
0 \cdot 7 & \equiv & 0 & \mod (12) & \text{entspricht} & \{c\} \\
1 \cdot 7 & \equiv & 7 & \mod (12) & " & \{g\} \\
2 \cdot 7 & \equiv & 2 & \mod (12) & " & \{d\} \\
3 \cdot 7 & \equiv & 9 & \mod (12) & " & \{a\} \\
4 \cdot 7 & \equiv & 4 & \mod (12) & " & \{e\}
\end{array}$$

$5 \cdot 7$	$\equiv$	11	mod (12)	”	$\{h\}$
$6 \cdot 7$	$\equiv$	6	mod (12)	”	$\{fis\}$
$7 \cdot 7$	$\equiv$	1	mod (12)	”	$\{cis\}$
$8 \cdot 7$	$\equiv$	8	mod (12)	”	$\{gis\}$
$9 \cdot 7$	$\equiv$	3	mod (12)	”	$\{dis\}$
$10 \cdot 7$	$\equiv$	10	mod (12)	”	$\{ais\}$
$11 \cdot 7$	$\equiv$	5	mod (12)	”	$\{f\}$
$12 \cdot 7$	$\equiv$	0	mod (12)	entspricht wieder	$\{c\}$

Wir sehen, daß alle Reste mod (12) genau einmal auftreten, wenn j die Werte 0,1,...,11 durchläuft, während $j = 12$ wieder auf den Rest 0 zurückführt. In Tönen ausgedrückt: Erhöht man c um 0, 1, 2,..., 11 Quinten, so erhält man - bis auf die Reihenfolge - alle *Töne*, das heißt Oktavfolgen $\{c\}$, $\{cis\}$, $\{d\}$, $\{dis\}$, usw. bis $\{h\}$. In der Reihenfolge der Reste bilden sie den bekannten **Quintenzirkel**:

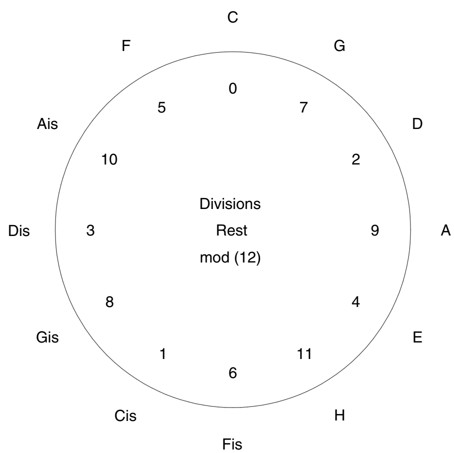


Abbildung 1: Quintenzirkel

Aus mathematischer Sicht steht hinter dem Quintenzirkel folgender Satz aus der Zahlentheorie, der sogenannte Chinesische Restesatz:

Satz *(Über die Lösbarkeit simultaner Kongruenzen)*
Gegeben seien s paarweise teilerfremde ganze Zahlen $m_1, \ldots, m_s > 1$ und ganze Zahlen $r_1, \ldots, r_s$. Dann gibt es genau eine ganze Zahl $x \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mit $m := m_1 \cdot m_2 \cdots m_s$, welche die Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv r_1 \mod (m_1), \\ x &\equiv r_2 \mod (m_2), \\ &\ldots \\ x &\equiv r_s \mod (m_s) \end{aligned}$$

simultan erfüllt.

Auf das Verhältnis von Quinten und Oktaven bezogen, besagt der Satz, daß die Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv r \mod (12), \\ x &\equiv 0 \mod (7) \end{aligned}$$

für jedes $r \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ genau eine Lösung $x \in \{0, 1, \ldots, 83\}$ besitzen, also eine Lösung der Gestalt

$$x = k \cdot 7 \quad \text{mit} \quad k \in \{0, 1, \ldots, 11\}.$$

Jeder Ton $\{r\}$ ist also eine höchstens 11-fache Quinte über c. Über die Reihenfolge ist damit nichts ausgesagt. Man vergleiche dazu den **Quintenzirkel**.

Da auch 12 und 5 teilerfremd sind, gilt entsprechend: Für jedes $r \in \{0, 1, \ldots, 11\}$ haben die Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv r \mod (12), \\ x &\equiv 0 \mod (5) \end{aligned}$$

genau eine Lösung der Gestalt

$$x = k \cdot 5 \quad \text{mit} \quad k \in \{0, 1, \ldots, 11\}.$$

Jeder Ton $\{r\}$ ist also auch eine höchstens 11-fache Quarte über c, und es gibt auch so etwas wie einen **Quartenzirkel**, der allerdings wegen $5 \equiv -7 \mod (12)$ nichts anderes ist als der rückwärts genommene Quintenzirkel.

Neben 7 und 5 taugen auch 11 und 1 für einen solchen "Zirkel", da sie ebenfalls zu 12 teilerfremd sind. Alle übrigen Zahlen zwischen 1 und 11 haben aber mit 12 einen gemeinsamen Teiler, und die Tonarten zerfallen in mindestens zwei verschiedene Zirkel.

Der Satz läßt noch viele andere Interpretationen zu. Zum Beispiel können wir auch die Frage stellen, ob es zu gegeben Tönen u_1, u_2, u_3 einen Ton v gibt, der sowohl eine k_1-fache Oktave über u_1 als auch eine k_2-fache Quinte über u_2 als auch eine k_3-fache Quarte über u_3 ist. Die Frage lautet in mathematischer Sprache, ob die Kongruenzen

$$\begin{aligned} \phi(v) &\equiv \phi(u_1) \quad \mod (12) \\ \phi(v) &\equiv \phi(u_2) \quad \mod (7) \\ \phi(v) &\equiv \phi(u_3) \quad \mod (5) \end{aligned}$$

eine gemeinsame Lösung $x = \phi(v)$ haben, und das ist immer der Fall, da die Zahlen 5, 7, 12 paarweise teilerfremd sind.

Tonleitern im 12-Ton-System

Diatonische Tonleitern (Dur und moll)

Kennzeichnet man mit $_=$ einen Ganztonschritt, und, wie bisher, mit $_\vee$ einen Halbtonschritt, so hat die *lydische Tonleiter* die Struktur

$$c_= d_= e_\vee f_= g_= a_= h_\vee (c')$$

mit c als Grundton. Aufgrund seiner Reichhaltigkeit an Tönen, kann man diese Struktur jedem anderen Ton des 12-Ton-Systems als Grundton aufprägen. Zum Beispiel erhält man so

$$d_= e_= fis_\vee g_= a_= h_= cis'_\vee (d')$$

mit d als Grundton. Man nennt die entsprechenden Tonleitern **Dur-Tonleitern**. Sie werden beschrieben durch ihren Grundton (z.B. C-Dur, D-Dur, ...).

Geht man ganz ähnlich von der Struktur

$$a_= h_\vee c_= d_= e_\vee f_= g_= (a')$$

der *hyperdorischen*, auch *äolisch* genannten Tonleiter aus, so erhält man die **moll-Tonleitern** (wie a-moll, h-moll, ...), die aber noch gewissen Unterscheidungen unterliegen (natürlich, harmonisch, melodisch, u.a., je nach Behandlung des Leittones).

Hiernach gibt es je 12 Dur- und 12 moll-Tonleitern, die man zusammenfassend als die diatonischen Tonleitern bezeichnet. Sie unterscheiden sich untereinander nicht nur in der Tonhöhe und der Lage der Halbtonschritte, sondern auch in ihrer Feinstruktur infolge recht unterschiedlicher Verhältnisse, in denen die Töne einander folgen.

Chromatische Tonleiter

Die chromatische Tonleiter benutzt alle Töne des 12-Ton-Systems. Es hat kaum Sinn, sie nach einem Grundton zu unterscheiden.

Ganzton-Leiter

Die Ganzton-Leiter teilt die Oktave in sechs Ganzton-Schritte ein, sie besteht also etwa aus den Tönen

c d e fis gis ais (c').

Das gelingt nur, weil nicht alle Ganztonschritte gleich groß sind. Zu erinnern ist in diesem Zusammenhang an den Versuch des Pythagoras, die Oktave mit sechs Tonschritten im Verhältnis 9:8 aufzubauen. Der Versuch scheiterte an der Zahlentheorie (pythagoräisches Komma).

Die Ganzton-Leiter wird erst seit dem 19. Jahrhundert verwendet, etwa von M. Glinka, M. Mussorgski, G. Debussy und G. Puccini.

Pentatonische Tonleiter

Die Pentatonische Tonleiter besteht aus den 5 Tönen der (reduzierten) Quintenfolge

c, g, d, a, e

Sie wurde schon im Altertum im Sinne reiner Quinten benutzt und durch Einfügen von "Ziertönen" (f und h) zur Verfeinerung der übergroßen Tonschritte e–g bzw. a–c' zu einem 7-Stufen-System ausgebaut. Eine Parallelentwicklung hierzu gab es z.B. in China. Heute wird sie noch in Kinderliedern benutzt.

Gleichschwebende Temperatur

Beim Transponieren von einer Dur-Tonart in eine andere, oder einer moll-Tonart in eine andere, entsteht das Problem, daß manche Akkorde nicht in ganz gleichwertige Akkorde transformiert werden, das heißt in Akkorde mit exakt den gleichen Tonhöhen-Verhältnissen. Man erkennt das schon an den Quinten: Eine reine Quinte mit dem Verhältnis $\frac{3}{2}$ kann durchaus in eine nichtreine mit dem Verhältnis $\frac{40}{27}$ übergehen. Das kann den Charakter einer Komposition verfälschen und ist deshalb unerwünscht. Dieses Phänomen hat eine rein mathematische Ursache: die **rationale Teilung** der Periode, das heißt der Oktave.

Die Griechen kannten keine anderen Zahlen als die rationalen. Das war auch der Grund für das berühmte Paradoxon von Achill und der Schildkröte, wonach Achill den einmal der Schildkröte gewährten Vorsprung nie einholen kann. Es bedurfte daher erst eines mathematischen Fortschrittes, der in der Erweiterung des rationalen Zahlensystems mithilfe algebraischer oder gar transzendenter Zahlen bestand, ehe das entsprechende musikalische Problem gelöst werden konnte.

Die Entwicklung zur Mathematik der Neuzeit wurde in Europa durch italienische Kaufleute eingeleitet. So brachte *Leonardo von Pisa*, bekannter unter dem Namen

Fibonacci, der Sohn des Bonacci,
(1170(?) – 1250, Pisa – Pisa)

von seinen Orientreisen unter anderem die indischen Zahlzeichen und die **Dezimalzahlen** mit nach Hause. Auch trug er selber Bedeutendes zur Rechentechnik und zur Zahlentheorie bei. Teilweise gingen seine Kenntnisse allerdings vorübergehend wieder verloren. Durch

Nicolas Chuquet
(1445(?) – 1488(?), Paris – ?).

erfuhren die kaufmännischen Soll-Zahlen die Bedeutung für sich existierender negativer Zahlen, die er, wie die Null, bei der Formulierung der Regeln für das Rechnen mit Potenzen benötigte. Hierauf aufbauend erkannte

Michael Stifel
(1487(?) – 1567, Eßlingen – Jena)

die Bedeutung der Logarithmen. Aber erst die Erfindung der **Dezimalbrüche** ermöglichte es dem Uhrmacher und Instrumentenbauer

Jobst Bürgi
(1552 – 1632, Lichtensteig – Kassel)

in den Jahren 1603 – 1611 die erste Logarithmentafel wirklich zu berechnen. Dies geschah auf Anraten von

Johannes Kepler
(1571 – 1630, Weil der Stadt – Regensburg)

der sie dann erstmals bei der Berechnung der Planetenbahnen einsetzte. Unabhängig hiervon berechnete

John Napier
(1550 – 1617, Merchiston-Castle, Schottland)

seine Logarithmen. Er veröffentlichte sie schließlich 1614, ohne daß die Ergebnisse von Bürgi bis dahin allgemein bekannt geworden waren.

Nach diesem kulturgeschichtlichen Ausflug in den mathematischen Hintergrund der Neuzeit wenden wir uns wieder der Musik zu. Heute erkennt der Mathematiker sofort, daß eine Invarianz der Akkorde gegenüber beliebigen Transpositionen durch eine **äquidistante logarithmische Teilung** der Periode erreicht werden kann, wobei es auf die Basis des Logarithmus' nicht ankommt. Wir wollen das genauer erläutern.

Die Forderung an die gesuchte Tonskala lautet, daß ihr j-ter Ton v_j mit den noch zu bestimmenden Konstanten a und b die Bedingung

$$\log H(v_j) = a \cdot j + b \quad \text{für} \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

erfüllen soll (äquidistante logarithmische Skala). Die Skala soll im übrigen so geeicht sein, daß der *Grundton* v_0 die Tonhöhe $H(v_0)$ hat und der 12-te Halbtonschritt auf die Oktave führt, d.h. so daß $H(v_{12}) = 2 \cdot H(v_0)$ gilt. Um diese Eichbedingungen zu erfüllen, hat man $b = H(v_0)$ und $a = \frac{1}{12} \log 2 = \log 2^{\frac{1}{12}}$ zu wählen. Nach dieser Wahl sind alle Töne der Tonskala eindeutig festgelegt, wobei

$$\log H(v_j) = \log 2^{\frac{j}{12}} + \log H(v_0)$$

gilt. Setzt man noch

$$q := \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}},$$

so erhält man die

Gleichschwebend temperierte Tonskala

$$H(v_j) = q^j \cdot H(v_0)\,,\ j = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Die Welt verdankt sie dem Halberstädter Organisten

Andreas Werckmeister

(1645 – 1706 Benneckenstein/Harz – Halberstadt).

In ihm vereinigten sich in glücklicher Weise musikalische und mathematische Interessen, was sich schon direkt am Titel seines Hauptwerkes ablesen läßt:

> *Andreas Werckmeister (1691):*
> *Musikalische Temperatur und wahrer mathematischer Unterricht, wie man ... ein Clavier ... wohltemperiert stimmen könne.*

Der Grundton v_0 kann noch beliebig gewählt werden. Die Tabelle 3 ist zu ersetzen durch

(u,v)	*Ganzton–Schritte*	*Halbton–Schritte*	H(v)/H(u)
Prime	0	0	$q^0 = 1.$
kl. Sekunde	$\frac{1}{2}$	1	$q^1 = 1,0594\ldots$
Sekunde	1	2	$q^2 = 1,1224\ldots$
kl.Terz	$1\frac{1}{2}$	3	$q^3 = 1,1892\ldots$
Terz	2	4	$q^4 = 1,2599\ldots$
Quarte	$2\frac{1}{2}$	5	$q^5 = 1,3579\ldots$
Quinte	$3\frac{1}{2}$	7	$q^7 = 1,4983\ldots$
Oktave	6	12	$q^{12} = 2$

Tabelle 6

Die Zahl q ist nun zwar nicht transzendent, sondern "nur" algebraisch, nämlich Lösung der algebraischen Gleichung

$$x^{12} - 2 = 0,$$

aber der Grundgedanke, welcher auf die neue Tonskala führte, bleibt die logarithmische Teilung, also die Abbildung der multiplikativen Gruppe auf die additive.

Das Entscheidende an der neuen Tonskala ist nun, daß ein Akkord, der, sagen wir in der Tonart mit dem Grundton v_j, aus den Tönen v_{j+n} und v_{j+m} besteht, auf ein Tonhöhenverhältnis

$$H(v_{j+m}) : H(v_{j+n}) = q^{j+m} : q^{j+n} = q^{m-n}$$

führt, welches nur von m und n, also nur von dem entsprechenden Akkord abhängt, nicht aber von j, das heißt nicht von der Tonart. Verallgemeinernd fassen wir das in folgendem Satz zusammen:

Satz (*Über die Invarianz transponierter Akkorde*)
Wird in der gleichschwebend temperierten Tonskala ein Akkord aus den Tönen

$$v_{j+m}, v_{j+n}, \ldots, v_{j+p}$$

gebildet, so sind deren Tonhöhen-Verhältnisse

$$H(v_{j+m}) : H(v_{j+n}) : \ldots : H(v_{j+p})$$

nicht von j, d.h. nicht von der Tonart abhängig.

Die neue **Temperatur**, wie wir die neue Stimmung auch kurz nennen, hatte in der mitteltönigen Temperatur natürlich schon einen Vorgänger. Sie unterscheidet sich, wie diese, endgültig wesentlich von der griechischen Stimmung, die ganz auf rationalen Tonhöhen-Verhältnissen aufgebaut war. Sie bringt bei allen Instrumenten mit fester Tastatur, wie z.B. dem Cembalo, dem Klavier, der Flöte und der Orgel, bei der Transposition von einer in eine andere Tonart einen außerordentlichen Vorteil. Sie bringt aber gleichzeitig auch Unstimmigkeiten in das Zusammenspiel mit den Streichern. Zwar führt jetzt jede Quinte in jeder Tonart auf das gleiche Verhältnis

$$H(v_{j+7}) : H(v_j) = q^7,$$

doch ist

$$q^7 = 2^{\frac{7}{12}} = 1,498307077\ldots,$$

eine **irrationale Zahl**, welche die **rationale Zahl** $\frac{3}{2}$ nur annähernd wiedergibt, die im griechischen System die reinen Quinten kennzeichnet. Das stört natürlich die Streicher, die reine Quinten zu greifen gewöhnt sind, unter anderem mit Doppelgriffen, beim Zusammenspiel mit einem Tasteninstrument. Vielleicht mit Ausnahme gewisser Bläser, die ihren Ton den Reinheitsbedürfnissen der Streicher technisch etwas anpassen können.

Wenn viele Musiker dem neuen, **gleichschwebend temperierten Klavier** zunächst durchaus mit Skepsis begegneten, so bestätigten doch sehr bald viele musikalische Experimente, wie praktisch die neue Temperatur ist, indem man auf ihm doch ohne größere Verletzungen des Wohlklanggefühls nach Herzenslust modulieren und ganze Stücke in eine andre Tonart transponieren konnte. Besonders bestätigt wurde dies nur 24 Jahre nach Werckmeisters Erfindung durch ein Werk von

Joh. Kaspar Ferdinand Fischer,
(– 1746, Rastatt)
Ariadne musica, Neo-Organoedum 1715,

das Präludien und Fugen in 20 verschiedenen diatonischen Tonarten enthält. Seinem Vorbild folgte

Johann Sebastian Bach
(1686 – 1750, Eisenach – Leipzig)

mit seinem genialen, Epoche machenden Werk

Das Wohltemperierte Klavier in 2 Bänden (1722 und 1744),

die je 24 Präludien und Fugen in allen Dur- und allen moll-Tonarten enthalten und zeigen, daß das neue, von der Tradition abweichende, streng gleichschwebend temperierte Tonsystem nicht nur in systematischer Hinsicht dem alten überlegen ist, sondern eben auch der musikalischen Phantasie keine Grenzen setzt. Aus gutem Grund also nannte H. v. Bülow später das Wohltemperierte Klavier das

Alte Testament der Klavier-Literatur.

Offiziell erschienen ist das Werk übrigens erst 1801. Bis dahin wurde es allerdings schon vielfach kopiert und unter Künstlern von Hand zu Hand gereicht. Erst in neuerer Zeit wurde die Frage gestellt, ob Johann Sebastian Bach denn überhaupt ein Klavier in strenger gleichschwebender Stimmung zur Verfügung stand. Auf diese Frage kommen wir noch zurück, und schließen dieses Kapitel mit zwei Bemerkungen.

Das pythagoräische Komma

war im griechischen Tonsystem ein Defekt, der sich daraus ergibt, daß 6 Ganztonschritte im Verhältnis 9:8 aus zahlentheoretischen Gründen niemals exakt eine Oktave ergeben. In der temperierten Tonskala ist das anders: Jeder Ganztonschritt besteht aus 2 Halbtonschritten und führt daher zu einer Erhöhung um den Faktor q^2. Daher führen 6 Ganztonschritte zu einer Erhöhung um den Faktor $(q^2)^6 = q^{12} = 2$, also exakt auf die Oktave. **Es gibt also kein Komma mehr**. Da q eine irrationale Zahl ist, steht das nicht im Widerspruch zu dem zuvor Gesagten.

Kettenbrüche

In die Lebensspanne von Andreas Werckmeister fällt auch das Leben von

Pierre de Fermat
(1601 – 1665, Beaumont-de Lomagne – Castre)

und das von

Christiaan Huygens
(1629 – 1695, Den Haag – Den Haag)

die sich als erste mit den Kettenbrüchen beschäftigten. Huygens ist vor allem durch die Erkenntnis der Wellennatur des Lichtes bekannt, durch die er fürs Erste die Korpuskular-Theorie von Newton zu Fall brachte. Er ist aber auch bekannt durch seine Beiträge zur **Konstruktion von Planetarien**. Hier hatte er mit dem Problem zu tun, daß die Umlaufzeiten der Planeten, die aufgrund der Kepler-schen Gesetze an sich in komplizierten Verhältnissen zueinander stehen, auf mechanisch einfache Weise, aber zugleich mit hoher Genauigkeit wiedergegeben werden sollten. Um dieses Problem zu lösen, bediente er sich der Kettenbruch-Approximation. Was bedeutet das?

Sei $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen. Jede (reelle) Zahl $x \geq 0$ läßt sich darstellen in der Form

$$x = a_0 + r_0 \quad \text{mit} \quad a_0 \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq r_0 < 1.$$

Beispiel:

$$\pi = 3,1415\ldots = \mathbf{3} \; + \; 0,1415\ldots.$$

Man nennt a_0 das größte Ganze, r_0 den Rest von x.

Ist $r_0 > 0$, so ist $\frac{1}{r_0} > 1$. Daher kann $\frac{1}{r_0}$ ganz entsprechend dargestellt werden:

$$\tfrac{1}{r_0} = a_1 + r_1 \quad \text{mit} \quad a_1 \in \mathbb{N},\ 0 \leq r_1 < 1,$$

und wir erhalten

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + r_1}.$$

Beispiel:

$$\frac{1}{0,1415\ldots} = \mathbf{7} + 0,0625\ldots,$$

also

$$\pi = \mathbf{3} + \frac{1}{\mathbf{7} + 0,0625\ldots}.$$

Ist $r_1 = 0$, so ist $a_1 > 0$ und

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Ist aber $r_1 > 0$, so gilt

$$\tfrac{1}{r_1} = a_2 + r_2 \quad \text{mit} \quad a_2 \in \mathbb{N},\ 0 \leq r_2 < 1,$$

und wir erhalten

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + r_2}},$$

und so weiter. Während auch $a_0 = 0$ gelten kann, sind a_1, a_2, …, a_k stets natürliche Zahlen. Die Ausdrücke

$$\begin{aligned} q_0 &:= [a_0] := a_0, \\ q_1 &:= [a_0, a_1] := a_0 + \frac{1}{a_1}, \\ q_2 &:= [a_0, a_1, a_2] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \\ & \quad usw. \end{aligned}$$

nennt man die **Kettenbrüche** von x. Sie sind mit einem einfachen Taschenrechner sehr leicht zu ermitteln.
Beispiel:

$$\pi = [3, 7, 15, 1, 292, 1, \ldots].$$

Dabei gilt folgende

Alternative:

Entweder brechen die Kettenbrüche mit $r_k = 0$ ab, also mit $x = q_k$. Das ist genau dann der Fall, wenn x eine **rationale Zahl** ist. Ist aber x irrational, so kann die Kettenbruchentwicklung **periodich** sein (mit $a_{n+k} = a_n$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ab einem gewissen $n \in \mathbb{N}_0$). Das ist genau dann der Fall, wenn x die reelle Lösung einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit ganzen Zahlen a, b, c und $a \neq 0$, also insbesondere eine **algebraische Zahl** ist. Die **transzendenten Zahlen** wie etwa π haben also keine periodische Kettenbruchentwicklung.

Ist also x rational, so gilt $x = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$. Ist aber x irrational, so schreibt man

$$x = [a_0, a_1, a_2, \ldots],$$

und nennt man dies einen unendlichen Kettenbruch. In allen Fällen gilt

$$q_0 < q_2 < \cdots \leq x \leq \cdots < q_3 < q_1,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur im rationalen Fall vorkommt.

Beispiel:

$$\sqrt[6]{2} \;=\; 1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{31 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}},$$

oder

$$\sqrt[6]{2} \;=\; [1, 8, 6, 31, 1, 2, \ldots].$$

Die Kettenbrüche haben viele interessante Eigenschaften. Zum Beispiel die folgende, an der Huygens besonders interessiert war:

Ist $k \in \mathbb{N}_0$ eine gerade Zahl, so gilt

$$q_0 < q_2 < \cdots < q_k \leq x \leq q_{k+1} < \cdots < q_3 < q_1.$$

Hat ferner q_k die (ausgekürzte) Darstellung

$$q_k = \tfrac{Z}{N}, \quad Z \in \mathbb{N}_0, N \in \mathbb{N},$$

mit dem Zähler Z und dem Nenner N, und ist $0 < n \leq N$, so gilt für alle ganzen Zahlen z

$$|x - \frac{z}{n}| \geq |x - \frac{Z}{N}|.$$

Mit anderen Worten: Es gibt keine rationale Zahl mit einem Nenner, der N nicht übertrifft, die x besser approximiert als q_k. Im Planetarium erzielt man so bei entsprechenden Übersetzungsverhältnissen mit kleinen Zahnrädern eine größtmögliche Genauigkeit in der Darstellung der Planetenbahnen.

Jetzt zurück zur Musik. In Tabelle 7a stellen wir die Töne der reinen Tonskala den entsprechenden der gleichschwebend temperierten Skala gegenüber. Dabei benutzen wir u. a. die Daten der Tabelle 2 (C-Dur-Struktur).

k	Ton	Tonhöhe rein	Tonhöhe temperiert
0	c	$1 = [1]$	$q^0 = [\underline{1}]$
2	d	$\frac{9}{8} = [1, 8]$	$q^2 = [\underline{1, 8}, 6, 31, \ldots]$
4	e	$\frac{5}{4} = [1, 3, 1]$	$q^4 = [\underline{1, 3, 1}, 5, \ldots]$
5	f	$\frac{4}{3} = [1, 2, 1]$	$q^5 = [\underline{1, 2, 1}, 73, \ldots]$
7	g	$\frac{3}{2} = [1, 2]$	$q^7 = [\underline{1, 2}, 147, 5, \ldots]$
9	a	$\frac{5}{3} = [1, 1, 2]$	$q^9 = [\underline{1, 1, 2}, 7, \ldots]$
11	h	$\frac{15}{8} = [1, 1, 7]$	$q^{11} = [\underline{1, 1, 7}, 1, \ldots]$
12	c'	$2 = [2]$	$q^{12} = [\underline{2}]$.

Tabelle 7a

Wir erkennen, daß die reine Tonskala sich aus der rein mathematisch begründeten gleichschwebend temperierten Tonskala abermals nach einem rein mathematischen Prinzip, der Kettenbruch-Approximation, ableiten läßt.

Diese Idee könnte man weiter verfolgen um zu einer gut motivierten Definition der Zwischentöne *fis, cis, gis, dis, ais* beziehungsweise *ges, des, as, es, b* zu gelangen, die in der temperierten Tonskala mit dem 6., 1., 8., 3. bzw. 10. Ton übereinstimmen. Die ersteren dieser Töne müßte man von unten, die anderen von oben approximieren. Als Ergebnis erhielten wir so die Tabelle 7b:

k	Ton	Tonhöhe temperiert	Approximation von unten	Approximation von oben
1	cis=des	$q^1 = [1, 16, 1, 4, \ldots]$	$[1, 16, 1] = \frac{18}{17}$ (cis)	$[1, 16] = \frac{17}{16}$ (des)
3	dis=es	$q^3 = [1, 5, 3, 1, \ldots]$	$[1, 5, 3] = \frac{19}{16}$ (dis)	$[1, 5, 3, 1] = \frac{25}{21}$ (es)
6	fis=ges	$q^6 = [1, 2, 2, 2, \ldots]$	$[1, 2, 2] = \frac{7}{5}$ (fis)	$[1, 2, 2, 2] = \frac{17}{12}$ (ges)
8	gis=as	$q^8 = [1, 1, 1, 2, 2, \ldots]$	$[1, 1, 1, 2, 2] = \frac{19}{12}$ (gis)	$[1, 1, 1, 2] = \frac{8}{5}$ (as)
10	ais=b	$q^{10} = [1, 1, 3, 1, 1, \ldots]$	$[1, 1, 3, 1, 1] = \frac{16}{9}$ (ais)	$[1, 1, 3, 1] = \frac{9}{5}$ (b)

Tabelle 7b

(Kettenbruch-Approximierende für die Zwischentöne)

Man beachte, daß man nach der $\frac{25}{24}$-Regel z.B. für das erhöhte reine f, also für fis, den Wert

$$H(\sharp f) = \frac{25}{24} \cdot H(f) = \frac{25}{24} \cdot \frac{4}{3} = \frac{25}{18} < \frac{7}{5} < q^6$$

nehmen müßte, der q^6 schlechter approximiert als $\frac{7}{5}$. Entsprechend erhielte man für ges den Wert

$$H(\flat g) = \frac{24}{25} \cdot H(g) = \frac{24}{25} \cdot \frac{3}{2} = \frac{36}{25} > \frac{17}{12} > q^6,$$

der größer ist als $\frac{17}{12}$ und daher ebenfalls q^6 schlechter approximiert als $\frac{17}{12}$. Mit anderen Worten, die $\frac{25}{24}$-Regel liefert für das temperierte $fis = ges$ nicht so gute rationale Approximationen, wie es die Kettenbrüche von Tabelle 7b tun. Tatsächlich wird das Verhältnis 7:5 als Approximation an $\sqrt{2}$ von unten, also an fis, wohl schon lange verwendet. Allerdings liefert die obere Schranke $\frac{17}{12} = 1,41\underline{6}$ offenbar eine sehr viel bessere rationale Approximation an $\sqrt{2} = 1,414\ldots$.

Entsprechendes gilt für die anderen Töne, mit Ausnahme von as und b, bei denen die $\frac{25}{24}$-Regel dasselbe Ergebnis liefert wie der Kettenbruch.

Das Problem der Tonarten-Charakteristik beim Wohltemperierten Klavier

Wie schon angedeutet, wird in der neueren Musikwissenschaft die Frage diskutiert, ob Johann Sebastian Bach denn überhaupt ein streng gleichschwebend temperiertes Klavier zur Verfügung stand, mit anderen Worten, ob **wohltemperiert** und **gleichschwebend** Synonyma sind. Als Grund für diese Fragestellung wird angegeben, daß die Präludien und Fugen des Wohltemperierten Klaviers doch je nach der verwendeten Tonart einen eigenen Klang hätten, was nicht sein könnte, wenn Bach strikt die gleichschwebende Temperatur verwendet hätte.

Wir wollen rein mathematisch begründen, daß dieses Argument als solches nicht richtig ist, das heißt, daß sich auch in der gleichschwebenden Temperatur bei den unterschiedlichen Tonarten **subjektiv** auch unterschiedliche Klangfarben wahrnehmen lassen müssen, es also eine **Tonarten-Charakteristik** gibt, und zwar dann, wenn traditionelle Kompositions-Formen und traditionelle Hörgewohnheiten zusammentreffen.

Dabei ist vorab daran zu erinnern, daß man auch noch zu Johann Sebastian Bachs Zeiten unter einem *Clavier* ein beliebiges Tasteninstrument verstand, das also auch ein *Clavichord*, ein *Cembalo* oder eine *Orgel* sein konnte.

Das Entscheidende ist, daß die temperierte Stimmung von der traditionellen reinen Stimmung nicht in allen Tönen gleichermaßen abweicht. Man entnimmt das zum Beispiel der Tabelle 8, in der wir die logarithmierten Tonhöhen gegenüberstellen und deren Differenz ermitteln. Dabei ist $\log_2$ der Logarithmus zur Basis 2.

Die Tabelle bezieht sich auf c als Eichton. Die größte Abweichung hat den Wert **0,01303**. Dabei fällt auf, daß sich die Töne a und e in den beiden Stimmungen am stärksten unterscheiden, gefolgt von h. Mit dieser Erkenntnis allein kann man noch nicht unterschiedliche Klangfarben in den Tonarten begründen, wäre die Häufigkeit des Auftretens dieser Töne in ihnen gleich – wie etwa in einer sehr strikt verstandenen 12-Ton-Musik. In einer klassischen Komposition ist das indessen nicht der Fall, wie wir am Beispiel der drei Hauptdreiklänge zeigen.

Ton t	$\log_2 H(t)/H(c)$ temperiert	$\log_2 H(t)/H(c)$ rein	Differenz (gerundet)
c	0	$\log_2 1 = 0$	0
d	$\frac{2}{12} = 0,16666\ldots$	$\log_2 \frac{9}{8} = 0,16992\ldots$	$-0,0\underline{0326}$
e	$\frac{4}{12} = 0,33333\ldots$	$\log_2 \frac{5}{4} = 0,32192\ldots$	$+0,0\underline{1141}$
f	$\frac{5}{12} = 0,41666\ldots$	$\log_2 \frac{4}{3} = 0,41503\ldots$	$+0,0\underline{0163}$
g	$\frac{7}{12} = 0,58333\ldots$	$\log_2 \frac{3}{2} = 0,58496\ldots$	$-0,0\underline{0163}$
a	$\frac{9}{12} = 0,75$	$\log_2 \frac{5}{3} = 0,73696\ldots$	$+0,0\underline{1303}$
h	$\frac{11}{12} = 0,91666\ldots$	$\log_2 \frac{15}{8} = 0,90689\ldots$	$+0,0\underline{0978}$
c'	1	$\log_2 2 = 1$	0

Tabelle 8

Nehmen wir an, in einer (sehr simplen) Komposition treten Tonika, Subdominante und Dominante recht häufig auf, und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit, und vergleichen wir einmal die Häufigkeit des Erscheinens der einzelnen Töne in der Kombination der Hauptdreiklänge in Abhängigkeit von der Tonart, wobei uns die Tabelle 9 behilflich ist (in der wir *ais* statt *b* schreiben).

	C-Dur	D-Dur	E-Dur	F-Dur	G-Dur	A-Dur	H-Dur
Tonika	c e g	d fis a	e gis h	f a c	g h d	a cis e	h dis fis
Subdominante	f a c	g h d	a cis e	ais d f	c e g	d fis a	e gis h
Dominante	g h d	a cis e	h dis fis	c e g	d fis a	e gis h	fis ais cis
$(\#e, \#a)$	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,1)	(1,1)	(2,2)	(1,0)

Tabelle 9

In der letzten Zeile haben wir dazu die Anzahl der Auftritte von e und a in der jeweiligen Tonart aufgeführt. Wir erkennen, daß e in den Tonarten E-Dur und A-Dur, a in den Tonarten D-Dur und A-Dur doppelt so häufig vorkommt, wie in den übrigen Dur-Tonarten. Die beiden Töne mit den größten Abweichungen, also e und a, treten bei A-Dur sogar zusammen 4-mal so oft auf wie bei H-Dur.

Verwendet man im übrigen a (oder a') statt c als Eichton (wobei man beachte, daß a' zu Bachs Zeiten noch nicht die ausgezeichnete Bedeutung des "Kammertons" hatte), so ergeben sich die Verhältnisse von Tabelle 8a.

Ton t	$\log_2 H(t)/H(a)$ temperiert	$\log_2 H(t)/H(a)$ rein	Differenz (gerundet)
a	0	$\log_2 1 = 0$	0
h	$\frac{2}{12} = 0,16666\ldots$	$\log_2 \frac{9}{8} = 0,16992\ldots$	$-0,0\underline{0326}$
c'	$\frac{3}{12} = 0,25$	$\log_2 \frac{6}{5} = 0,26303\ldots$	$-0,0\underline{1303}$
d'	$\frac{5}{12} = 0,41666\ldots$	$\log_2 \frac{27}{20} = 0,43295\ldots$	$-0,0\underline{1629}$
e'	$\frac{7}{12} = 0,58333\ldots$	$\log_2 \frac{3}{2} = 0,58496\ldots$	$-0,0\underline{0163}$
f'	$\frac{8}{12} = 0,66666\ldots$	$\log_2 \frac{8}{5} = 0,67807\ldots$	$-0,0\underline{1141}$
g'	$\frac{10}{12} = 0,83333\ldots$	$\log_2 \frac{9}{5} = 0,84799\ldots$	$-0,0\underline{1464}$
a'	1	$\log_2 2 = 1$	0

Tabelle 8a

Die reine Tonskala liegt dann durchweg über der gleichschwebend temperierten, die größte Abweichung hat den Wert **0,01629**. Das entspricht etwa einem fünftel Halbton. Die Töne mit den größten Abweichungen sind d, g und c.

In beiden Fällen gilt: Während sich die Dur- (wie auch die moll-) Tonarten im gleichschwebend temperierten Tonsystem untereinander strukturell auf keine Weise unterscheiden, gibt es doch Hörgewohnheiten, aufgrund derer der erfahrene Musiker einfach "weiß", wie sie im reinen Tonsystem klingen müßten. Entsprechend nimmt er **unterschiedliche Abweichungen vom Gewohnten** wahr und ordnet diese Abweichung der Tonart selbst als **virtuelle Charakteristik** zu. Insofern gibt es also eine (wenn auch nur) subjektive Wahrnehmung von Tonarten-Unterschieden auch im gleichschwebend temperierten Tonsystem. Warum also sollte Johann Sebastian Bach nicht über ein entsprechend gestimmtes 'Klavier' verfügt haben, wo sich unterschiedliche Klangfarben in den verschiedenen Tonarten doch schon mathematisch sehr einfach erklären lassen?

Natürlich hängt die Häufigkeit des Auftretens der einzelnen Töne sehr stark von der Art der Komposition ab. In einer exzessiven 12-Ton-Musik könnten zum Beispiel alle Töne statistisch gesehen gleich häufig vorkommen. Das würde dann allerdings eine Unterscheidung nach Tonarten völlig unmöglich machen. Mathematisch gesehen hängt also der wahrgenommene Klangcharakter vom Maße der inneren Ordnung einer Komposition ab. Ordnung ist aber etwas Unwahrscheinliches, Unordnung, die mit dem Begriff der **Entropie** beschrieben werden kann, etwas viel Wahrscheinlicheres. Tatsächlich hat man schon sehr früh (etwa ab 1960) Kompositionen, wie auch Werke der Literatur oder der Bildenden Kunst, auf ihre Entropie hin untersucht. Es ist dabei immer schön, wenn die Wissenschaft etwas herausfindet, was man ohnehin schon weiß: Gerade bei Johann Sebastian Bach ist die innere Ordnung sehr groß, die Entropie also sehr klein, und so nimmt es kein Wunder, daß gerade bei den Präludien und Fugen des Wohltemperierten Klaviers Tonarten-Unterschiede wahrgenommen werden können – trotz gleichschwebender Temperatur.

Mehr Glanz!

Wählt man a (oder a') als Eichton, so weicht die reine Stimmung von der temperierten am stärksten ab. Das zeichnet diesen Ton aus. Man kann nun auf die Idee kommen, für die beiden Stimmungen verschiedene Eichtöne zu verwenden, etwa für die reine Stimmung den (späteren Kammer-) Ton a' oder a, und für die temperierte einen Ton der um den Faktor $\epsilon > 1$ darüber liegt. In der temperierten Skala ist dann $H(t)$ durch $\epsilon \cdot H(t)$ zu ersetzen, und in der 2. Spalte der Tabelle 8a sind die Werte von

$$\log_2 \frac{\epsilon H(t)}{H(a)} = \log_2 \frac{H(t)}{H(a)} + \log_2 \epsilon$$

aufzuführen. Entsprechend erhöhen sich die Differenzen der 4. Spalte um den Wert $\log_2 \epsilon$. Man kann diesen Effekt dazu nutzen, um die Fehler so auszugleichen, daß ihr **Betragsmaximum** zum **Minimum** wird. Das gilt gerade für

$$\log_2 \epsilon = \frac{1}{2} \cdot 0,01629 \approx 0,00815,$$

das heißt für

$$\epsilon = 1,0057 \quad (gerundet).$$

Das entspricht einer Erhöhung um etwa einen zehntel Halbton, genauer (und Ergebnisse von Kapitel 2 vorwegnehmend), einer Erhöhung des Kammertones a' von 435 Hz auf 437,5 Hz. Tatsächlich sind viele Orchester längst dazu übergegangen, die temperierte Stimmung etwas zu erhöhen, um **mehr Glanz** zu erzeugen. Wir haben den mathematischen Grund dafür gefunden:

Bei Erhöhung der temperierten Stimmung um den Faktor ϵ erhält man die bestmögliche Approximation an die reine Stimmung und den größtmöglichen "Glanz".

Die größten logarithmischen Abweichungen haben dann übrigens den Wert $\pm$**0,00814** und treten bei a und a' bzw. bei d' auf.

Mit der Erhöhung der Stimmung darf man es allerdings auch nicht übertreiben: Geht man über den Faktor ϵ hinaus, so wird die Approximation an die reine Stimmung nämlich wieder schlechter!

Die erhöhte temperierte Stimmung entspricht übrigens, logarithmiert, einer Ausgleichsgeraden an die reine Stimmung im Sinne der Maximumsnorm.

Warum keine 13-Ton-Musik?

Die vor allem von

Arnold Schönberg
(1874 – 1957, Wien – Los Angeles)

propagierte 12-Ton-Musik stellt ganz bewußt die traditionelle Tonalität infrage. Sie ist also bewußt revolutionär, wenn auch und gerade Schönberg sich im klaren war, daß ein Abgleiten ins Chaos nur durch die Erfindung neuer Kompositionsregeln verhindert werden konnte, die er u.a. in seiner *Zwölftonmethode* fand, deren Ordnungsprinzip die *Reihe*, d.h. eine Festlegung einer Sequenz aus 12 verschiedenen Tönen der temperierten Halbtonskala ist.

Als Mathematiker fragt man sich indessen, was die Schönbergianer wohl veranlaßte, an der Zahl 12 festzuhalten.

Die gleichschwebende Temperatur entsteht bei einer Teilung der Oktave im Verhältnis

$$1 : q^1 : q^2 : \cdots : q^{12} = 2$$

mit $q := \sqrt[12]{2}$. Der 7-te Ton entspricht dabei annähernd der reinen Quinte. Entschließt man sich nun aber erst einmal aus rein mathematischen

Gründen zu solch einer Teilung, so ist nicht einzusehen, warum man nicht zu einem beliebigen $n \in \{2, 3, \ldots\}$

$$q := \sqrt[n]{2}$$

wählt und die Oktave im Verhältnis

$$1 \,:\, q^1 \,:\, q^2 \,:\, \cdots \,:\, q^n = 2$$

teilt, um so zu einer gleichschwebend temperierten

n-Ton-Musik

zu gelangen?

Will man dabei nicht auf die Quinte verzichten, so müßte irgendein Ton, sagen wir der $k-te$, sie gut approximieren, das heißt es müßte mit großer Genauigkeit $q^k \approx \frac{3}{2}$ oder

$$2^{\frac{k}{n}} \approx 2^x \quad mit \;\; x = \log_2 \tfrac{3}{2}$$

gelten. Dies ist äquivalent zu

$$\tfrac{k}{n} \approx x = 0,58496250\ldots.$$

Wenn der Mathematiker diese Approximations-Aufgabe sieht, fällt ihm natürlich sogleich wieder die Kettenbruch-Approximation ein. Tatsächlich gilt, wie man auf jedem einfachen Taschenrechner leicht nachrechnen kann,

$$x = [0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 5, 2, \ldots].$$

Hieraus ergeben sich die ersten Kettenbruch-Approximationen

$$0 < \tfrac{1}{2} < \tfrac{7}{12} < \cdots < x < \cdots < \tfrac{24}{41} < \tfrac{3}{5} < 1,$$

was wie folgt zu interpretieren ist:

Lassen wir das 2-Ton- und das 5-Ton-System wegen zu großer Magerkeit außer acht, so ist **das erste interessante** n der Wert $n = 12$. Dabei gibt es keinen Bruch $\frac{k}{m}$ mit einem Nenner $m \leq 12$ (sogar $m \leq 28$, wie man experimentell bestätigt), der x besser approximiert als der Bruch $\frac{7}{12}$. Unter allen m-Ton-Systemen mit $2 \leq m \leq n = 12$ (sogar $n = 28$) gibt es also keines, in welchem die Quinte besser approximiert wird als durch den 7-ten Ton des 12-Ton-Systems. Dabei gilt

$$\tfrac{3}{2} - 2^{\frac{7}{12}} = 0,0016929\ldots.$$

Nehmen wir Ergebnisse des nächsten Kapitels vorweg, so ergibt sich dabei für ihn (bei einer Höhe des Kammertons a' von 435 *Hz*) die Frequenz von 651,76 *Hz*. Die reine Quinte e'' auf a' hat dagegen die Frequenz von 652,5 *Hz*. Sie wird vom 7-ten Ton des 12-Ton-Systems nur um *–0,74 Hz* verfehlt, was kaum zu hören ist.

Das nächste interessante n ist der Wert $n = 41$. Der 24-te Ton des 41-Ton-Systems liefert

$$\tfrac{3}{2} - 2^{\frac{24}{41}} = -0,0004194\ldots\ldots.$$

Er hat die Frequenz von 652,68 *Hz* und weicht von e'' immerhin noch um *0,18 Hz* ab. Das ist noch weniger zu hören und lohnt den Aufwand nicht. Es bleibt aus mathematischer Sicht interessant, daß die Quinte e'' auf a' von keinem Ton eines beliebigen m-Ton-Systems mit einem $m \leq n = 41$ besser wiedergegeben wird, als vom 24-ten Ton des 41-Ton-Systems.

Die Kettenbrüche einer noch höheren Ordnung liefern zwar noch bessere Approximationen an die Quinte, doch liegen bei ihnen allen die Abweichungen unter der Wahrnehmungsgrenze, so daß wir zu dem Schluß kommen:

Unter allen möglichen n-Ton-Systemen wird die Quinte im 12-Ton-System im Rahmen der Hörbarkeit bei geringster Anzahl von Tönen am besten approximiert.

Man kann übrigens die von uns eben gestellte Frage auch bezüglich der Quarten stellen. Dies führt auf die Approximationsaufgabe

$$2^{\frac{j}{n}} \approx 2^x \quad mit \;\; x = \log_2 \tfrac{4}{3}$$

bzw.

$$\tfrac{j}{n} \approx x = 0,41503749\ldots,$$

mit

$$x = [0, 2, 2, 2, 3, 1, \ldots]$$

und den ersten Kettenbruchapproximationen

$$0 < \tfrac{1}{2} < \tfrac{5}{12} < \cdots < x < \cdots < \tfrac{17}{41} < \tfrac{2}{5}.$$

Als Folgerung ergibt sich, daß auch die Quarte bei einem Vergleich aller n-Ton-Systeme mit einem $n \leq 12$ im 12-Ton-Systems am besten wiedergegeben wird, und zwar vom 5-ten Ton. Unter der Bedingung $n \leq 41$ gilt entsprechendes für den 17-ten Ton des 41-Ton-Systems – in völliger Analogie zur Situation bei der Quinte.

Unter allen möglichen n-Ton-Systemen wird die Quarte im 12-Ton-System im Rahmen der Hörbarkeit bei geringster Anzahl von Tönen am besten approximiert.

Die Ergebnisse zeigen, daß das gleichschwebend temperierte 12-Ton-System das dem griechischen Denken und der abendländischen Tradition am besten angepaßte n-Ton-System ist, was auf die besondere Bedeutung des Quinten- und des Quarten-Verhältnisses (3:2 bzw. 4:3) für unsere Tonalität zurückzuführen ist. Man vergleiche hierzu noch einmal **A2** und **A3**. Haben wir also vielleicht auch nicht die beste aller Welten, wie Leibniz in seiner Theodizee vermutet, so haben wir doch

die beste aller Musiken.

Nachtrag

Wir haben die Bezeichnungen der Töne so gewählt, daß sie unserem heutigen System entsprechen. Wir hätten die Randtöne der zentralen Tetrachorde aber auch mit

$$a - d \text{ und } e - a'$$

bezeichnen und zu

$$a_{\vee} b_{\vee\vee} c_{\vee\vee} d_{\vee\vee} e_{\vee} f_{\vee\vee} g_{\vee\vee} a'$$

ergänzen können. Zwischen b und c fehlte dann ein Halbton "*b-is*", der nach dem 10. Jahrhundert zur Unterscheidung von b, dem *"b-rotundum"*, als ♮, das heißt als *"b-durum"*, geschrieben wurde. Dieses mutierte später zu ♮ bzw. h, was im Deutschen die heutige Abweichung im Alphabet erklärt. Noch heute wird unser $h - moll$ im Englischen als *B minor* bezeichnet, unser *b-moll* als *B flat minor*, wobei sich das B vom b-durum herleitet.