Kapitel 3

Zur Harmonie

Akkorde

Zwei gleichzeitig oder kurz nacheinander erklingende Töne, eventuell verschiedener Instrumente, werden als angenehm empfunden, wenn ihre Grundfrequenzen ν_1 bzw. μ_1 in einem (gekürzten) Verhältnis mit kleinem Zähler und mit kleinem Nenner stehen. Es sind dies die **konsonanten** Verhältnisse

$$\begin{array}{ll} 2:1 & \text{(Oktave)}, \\ 3:2 & \text{(Quinte)}, \\ 4:3 & \text{(Quarte)}, \\ 5:3 & \text{(Sexte)}, \\ 5:4 & \text{(gr. Terz)}. \end{array}$$

Die kleine Terz (6:5) wird schon als **dissonant** empfunden, noch stärker die große Sekunde (9:8 oder 10:9) und die kleine Sekunde (16:15).

Nun darf nicht übersehen werden, daß mit den Grundtönen auch ihre Obertöne mit den Frequenzen $\nu_k = k \cdot \nu_1$ und $\mu_l = l \cdot \mu_1$ auftreten. Ihr Verhältnis ist gegeben durch

$$\frac{\nu_k}{\mu_l} = \frac{k}{l} \cdot \frac{\nu_1}{\mu_1}.$$

Für $k = l$ stehen die Obertöne also im gleichen Verhältnis wie die Grundtöne, sie sind also wie sie konsonant oder dissonant. Für $k \neq l$ kann aber Dissonanz selbst dann auftreten, wenn die Grundtöne konsonant sind. Diese Situation tritt nur dann nicht schmerzhaft auf, wenn die Grundtöne besonders *rein* sind, also höchstens Obertöne einer niedrigen Ordnung mit einer nennenswerten Amplitude auftreten.

Ein **Akkord aus mehreren Tönen** klingt angenehm, wenn die beteiligten Töne paarweise konsonant sind – einschließlich ihrer Obertöne niedriger Ordnung. Eine solche Konsonanz ist nur zu erwarten, wenn alle beteiligten Töne der harmonischen Naturtonreihe angehören, also etwa von Saiten- oder Flöteninstrumenten erzeugt werden, zum Beispiel aber nicht von der Pauke.

Bei den **Grundakkorden (Tonika, Subdominante und Dominante)** der Dur-Tonleitern ist das im wesentlichen der Fall. Bei Berücksichtigung der Obertöne 1., 2. und 3. Ordnung beim Grundton, 1. und 2. Ordnung bei der Terz, und der Quinte selber ergibt sich als ungünstigstes auftretendes Frequenzverhältnis das Verhältnis **12:5**. Beim **Septimakkord** *(g,h,d',f')* ermittelt man dagegen unter den Obertönen bis zur Ordnung 4 bei g, 3 bei h, 2 bei d' und 1 bei f' als ungünstigstes Frequenzverhältnis das Verhältnis **135:64**, das von der Oktave um $\frac{7}{64}$ abweicht. Es tritt auf zwischen dem Oberton von h der Ordnung 3 und *f'* selber. Besonders auffällig wird dieser Effekt natürlich dann, wenn das h von einem Instrument mit dominantem Oberton der Ordnung 3 herrührt, etwa von einer Klarinette.

Dieses Beispiel zeigt, daß eine Harmonielehre die Obertöne mit berücksichtigen muß. Tatsächlich ist die barocke Harmonielehre im Laufe des 20. Jahrhunderts allerdings immer mehr zugunsten eines freieren Umgangs mit den Tönen aufgegeben worden, was neue, zuvor unbekannte tonale Möglichkeiten eröffnet hat, allerdings auch ein neues Verhältnis zur Harmonie erforderte.

Tritonus

Dieses Spannungsverhältnis kann besonders festgemacht werden an der ästhetischen Beurteilung des **Tritonus**. Es ist dies das Tonintervall, das aus drei Ganztonschritten besteht, wie zum Beispiel das Intervall (c, fis) oder (fis, c').

In der gleichschwebenden Temperatur gilt

$$H(fis) : H(c) = H(c') : H(fis),$$

woraus sich

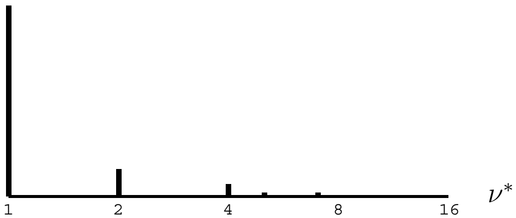
$$H(fis) = \sqrt{H(c) \cdot H(c')} = \sqrt{2} \cdot H(c)$$

ergibt. Der Tritonus führt also der Höhe nach auf das geometrische Mittel, also auf die "mittlere Proportionale" zwischen Grundton und Oktave und teilt damit, musikalisch gesehen, die Oktave hälftig. Was den Mathematiker natürlich begeistert, nicht aber den klassisch orientierten Musiker, für den der Tritonus der häßlichste aller Akkorde überhaupt ist. Daß er als Diabolus in musica verschrieen ist, liegt vielleicht nicht zuletzt daran, daß das irrationale Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ von den Sängern zwischen den konsonanten rationalen Verhältnissen der Quarte und der Quinte nur schwer zu treffen ist.

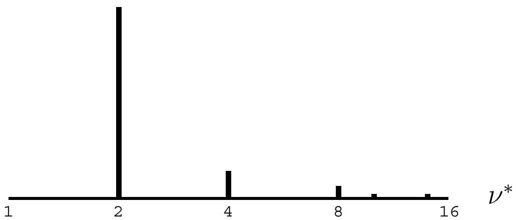
Gleichwohl wirkt der Tritonus wohl auf manche Komponisten der Gegenwart mit einer unwiderstehlichen Anziehungskraft. So auf **Pierre Boulez**, der ihn zur Grundlage seiner "Notations" für Klavier machte. Vielleicht kein Wunder, denn Pierre Boulez ist studierter Mathematiker. Das Ergebnis ist verblüffend: eine schwebende, vielleicht etwas esoterisch klingende Komposition mit einem starken musikalischen Reiz.

Parallele Oktaven

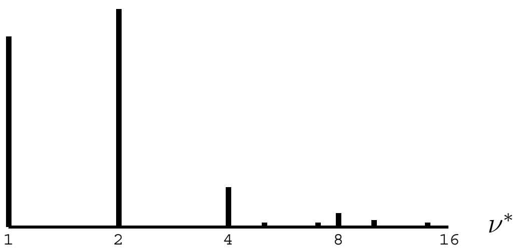
Auch fortschreitende Oktav-Parallelen führen manchmal zu einem ästhetischen Unbehagen. So beanstandete *Robert Schumann* ihr häufiges Auftreten bei *Richard Wagner*. Der Grund liegt wohl in ihrer Ziellosigkeit, mathematisch gesehen jedoch vielleicht auch in der bei Oktav-Parallelen auftretenden Überbetonung der Obertöne. Dazu folgendes Modell.



Amplituden-Diagramm,



... um eine Oktave nach oben verschoben,



... und beide zusammen, überlagert.

Abbildung 18

Abbildung 18 zeigt an erster Stelle das Amplituden-Diagramm einer schwingenden Saite, das der Situation der Abbildungen 6a und 6b entspricht. Erhöht man den angesprochenen Grundton um eine Oktave, so verschiebt sich das Diagramm (bei gleicher Energieverteilung bei den Obertönen) um eine (logarithmische) Einheit nach rechts, und wir erhalten das mittlere Amplituden-Diagramm. Sind schließlich die Obertöne von Grundton und Oktave auch noch phasengleich, so ergibt sich das Amplituden-Diagramm des aus ihnen gebildeten Akkords durch Addition der jeweiligen Amplituden, und wir erhalten das Diagramm an der letzten Stelle. Nimmt man dieses nun für sich, ohne nach seiner Herkunft zu fragen, so kann man Zweifel hegen, welches der Grundton ist, was möglicherweise die Ursache für eine gewisse Irritation des Gehörs verantwortlich ist.

Die Oktave ist natürlich das einzige Tonintervall, das in strengem Sinne zu diesem Effekt führt. Nur bei ihr liegt das Oberton-Spektum des oberen Tones ganz in dem des Grundtones.

Harmonices Mundi

Nach der Entdeckung der Bedeutung von Zahlenverhältnissen für die Musik war *Pythagoras* von der Idee durchdrungen, daß überhaupt alles Wahre und Göttliche sich in Zahlen ausdrücken müsse. Von hier aus nahm die Zahlen-Mystik der Pythagoräischen Schule ihren Lauf, die, in vielem übertrieben, ganz ohne Zweifel die mathematische Phantasie beflügelte und zu bedeutenden kosmologischen Entwürfen führte. So versuchte man zum Beispiel, die vor- und rückläufigen Planeten-Bewegungen mit Hilfe von überlagerten Kreisbewegungen zu erklären, das heißt mit Hilfe von Epi- und Hyperzykloiden zu beschreiben. Überhaupt mußte sich alles kreisförmig bewegen – bis in die Neuzeit, bis hin zu *Descartes*, der sich Bewegung nur im Medium vorstellen konnte und zum Beweis ihrer Möglichkeit die Kreisbewegungen heranzog, die ja ohne Verdrängung einer Substanz erfolgen. Man muß solche metaphysischen Nöte und Erklärungsversuche zu verstehen suchen. So auch die Vorstellung einer aus Sphären aufgebauten und daher begreiflichen Welt, einschließlich einer Sphärenmusik als Ausdruck ihrer Vollkommenheit. Solche phantastischen Fiktionen, wie sie auch *Dantes* Göttlicher Komödie zu eigen waren, blieben nicht unproduktiv. Sie regten nämlich zu einem *Glauben an Naturgesetze* an, der die Voraussetzung einer jeden naturwissenschaftlichen Forschung ist. Jedenfalls können wir wohl sicher sein, daß *Johannes Kepler* einem solchen Glauben unterlag, denn wie sonst hätte er die drei wunderbaren Planeten-Gesetze finden können, die schließlich alles andere als phantastisch sind, da sie sich – später – als aus dem Newtonschen Gravitations-Gesetz mathematisch ableitbar herausstellten, also den vollen Charakter von Naturgesetzen tragen. Und warum sonst nannte wohl Kepler eines seiner Hauptwerke die

Harmonices Mundi.

Die Entwicklung ist fortgeschritten. Die Menschen denken heute nüchterner, sollten aber nie vergessen, daß es gerade die Phantasie ist, welche unsere Welt reicher und schöner macht. Wenn wir Heutigen vielleicht auch keine Sphären-Klänge wahrzunehmen wissen: sich zu wundern gibt es allemal Anlaß. Wer will, darf sich über die

Wellengleichung

wundern, denn sie ist offenbar ein fundamentales Naturgesetz.

Es wäre noch viel zu sagen zur Mathematik in der Musik, zum Beispiel auch im Rhythmus. Eingegangen werden soll hier nur noch auf das Thema Symmetrie.

Symmetrie ist immer ein Indiz der Vollkommenheit. Sie begegnet uns in der Geometrie, zum Beispiel der gotischen Kirchenfenster oder der barocken Gärten, wo sie etwas versteckt, damit es gesucht werden kann. Sie tritt in der Sprachmelodie auf, musikalisch im Krebsgang und in den Tempi der dreisätzigen Sonate (*schnell - langsam - schnell*), um nur die einfachsten zu nennen. Insbesondere zeigt das Größere Vollkommene System eine starke Symmetrie, wenn man die Spiegelung der Quinten und der Quarten an der Mittelachse betrachtet.

Eine besonders vollkommene Symmetrie enthält der Zauberflöten-Text *Mann und Weib und Weib und Mann reichen an die Gottheit ran.* Sie zeigt sich zunächst in der zentralen Symmetrie des Diagramms

Mann **und** **Weib**	**und**	**Weib** **und** **Mann**

durch welche die beiden auftretenden Begriffspaare aufeinander abgebildet werden. Dadurch wird zugleich auf deren eigene Symmetrie verwiesen.

Sie ginge verloren, wollte man die Begriffspaare durch (Mann,Frau) bzw. (Weib,Herr) ersetzen. Das Diagramm ist also nur auf die authorisierte Weise so vollkommen, wie es die Schlußformel zum Ausdruck bringt.

Zahlen verführen auch zur Spielerei oder gar zur Spekulation. Zum Beispiel kommen wohl im Werk von Béla Bartók die Tonintervalle gr. Sekunde, kl. Terz, reine Quarte, kl. Sexte und kl. None besonders häufig vor. In Halbtonschritten ausgedrückt entsprechen sie gerade den ersten Fibonacci-Zahlen, also den Zahlen (1,) 2, 3, 5, 8, 13,.... Die Summe zweier Fibonacci-Zahlen ergibt immer die nächste. Asymptotisch stehen zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen im Verhältnis des goldenen Schnitts. Das ist die Zahl

$$\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})$$

mit der ganz besonders merkenswerten, periodischen, Kettenbruch-Entwicklung

$$\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = [1,1,1,...].$$

Der goldene Schnitt spielte schon in der Architektur und in der bildenden Kunst des Altertums eine große Rolle. Im Verhältnis des goldenen Schnitts steht auch die Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks zu dessen Seiten, was *Leonardo da Vinci* zur Spekulation über die Proportionen des menschlichen Körpers veranlaßte.

Spielerisch wollen wir auch unseren Streifzug beenden, indem wir die Fibonacci-Zahlen in der Musik mit folgendem Kalauer nachweisen: Angenommen, ein Wesen von einem anderen Stern erblickt in seinem endlichen oder ewigen Leben zum ersten Male einen auf einer Kuhwiese des Ruhrgebietes stehenden geöffneten Flügel. So etwas gibt es tatsächlich, zum Beispiel in der Werbung zum Klavier-Festival Ruhr. Was sieht es? Nun, vielleicht erkennt es die Periodizität, mit welcher die Tasten angeordnet sind, und betrachtet die Grundperiode c–c'. Und wenn es zählen kann, so zählt es wie folgt:

1	Grundperiode,
2	schwarze Tasten links,
3	schwarze Tasten rechts,
5	schwarze Tasten also insgesamt,
8	weiße Tasten, zusammen also
13	Tasten insgesamt.

Nachdem es so die ersten 6 Fibonacci-Zahlen entdeckt hat, kann es natürlich mit einigem Recht an seinen Stern zurückmelden, daß die Klaviere, zumindest im Ruhrgebiet, nach dem Fibonacci-Prinzip gebaut sind, und daß die Menschen hier wohl an Fibonacci glauben.