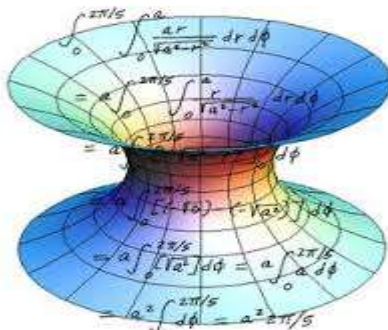


7

# SÉPTIMA UNIDAD TEMÁTICA: INTEGRALES



## CRITERIO DE DESEMPEÑO

Calcula la integral de funciones continuas de una sola variable; aplicando métodos y fórmulas de integración: cambio de variable, integración por partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales.

## . CONTENIDO ANALÍTICO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

7.1	La integral indefinida .....
7.2	Primitiva o anti derivada .....
7.3	Propiedades .....
7.4	Formulas elementales de integración .....
7.5	Métodos de integración .....
7.6	Integral definida.....
7.7	Propiedades de la integral definida .....
7.8	Ejercicios propuestos

## 7.1 LA INTEGRAL INDEFINIDA

La integral indefinida de  $f(x)$  denota la familia de primitivas de  $f(x)$ .

Es decir, si  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$ , entonces:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Donde  $f(x)$  se llama integrando y  $C$  constante de integración, dicha constante hace que la integral sea indefinida.

## 7.2 PRIMITIVA O ANTI DERIVADA

La diferencial  $dx$  en la integral indefinida identifica la variable de integración. Es decir, el símbolo  $\int f(x)dx$  denota la **primitiva de  $f$  respecto a  $x$** , de modo similar a cómo  $\frac{dy}{dx}$  denota la **derivada de  $y$  respecto a  $x$** .

**Ejemplo** Sea  $f(x) = \cos x + \sin x$ . Una primitiva es  $F(x) = \sin x - \cos x$

La naturaleza inversa de las operaciones de integración y derivación puede simbolizarse del siguiente modo: La derivación es la inversa de la integración:

$$\frac{d}{dx} \left( \int f(x)dx \right) = f(x)$$

La integración es la inversa de la derivación:

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

## 7.3 PROPIEDADES

Sea  $f, g$  funciones integrables entonces

a)  $cf$  es integrable y

$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

b)  $f + g$  es integrable y

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

#### 7.4 FORMULAS ELEMENTALES DE INTEGRACIÓN

1. -  $\int a dx = a \int dx = ax + C.$

2. -  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1.$

3. -  $\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{si } n \neq -1.$

4. -  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln[f(x)] + C.$

5. -  $\int e^x dx = e^x + C.$

6. -  $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C.$

7. -  $\int a^{f(x)} f'(x) dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C, \quad \text{si } a > 0, \quad a \neq 1.$

8. -  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

9. -  $\int \sin[f(x)] f'(x) dx = -\cos[f(x)] + C.$

$$10. - \int \cos x \, dx = \operatorname{sen} x + C.$$

$$11. - \int \cos[f(x)] f'(x) \, dx = \operatorname{sen}[f(x)] + C.$$

$$12. - \int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} \, dx = \tan[f(x)] + C.$$

$$13. - \int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]} \, dx = -\cot[f(x)] + C.$$

$$14. - \int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \, dx = \operatorname{arcsen}[f(x)] + C.$$

$$15. - \int \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} \, dx = \operatorname{arccos}[f(x)] + C.$$

$$16. - \int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} \, dx = \operatorname{arctg}[f(x)] + C.$$

$$17. - \int \operatorname{tg} x \, dx = -L(\cos x) + C.$$

$$18. - \int \cot g x \, dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C.$$

$$19. - \int \sec x \, dx = \begin{cases} \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C. \\ \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C. \end{cases}$$

$$20.- \int \operatorname{csec} x dx = \begin{cases} \ln(\operatorname{csec} x - \cot x) + C. \\ \ln\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + C. \end{cases}$$

$$21.- \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$22.- \int \cos e^{cx} dx = -\cot x + C.$$

$$23.- \int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x + C.$$

$$24.- \int \cos e^{cx} \cot x dx = -\cos e^{cx} + C.$$

$$25.- \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \sec x + C.$$

$$26.- \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\cos e^{cx} + C.$$

$$27.- \int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} = L[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 - a^2}] + C.$$

$$28.- \int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{[f(x)]^2 + a^2}} = L[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 + a^2}] + C.$$

$$29.- \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc} \sec x + C.$$

$$30. - \int \frac{f'(x)dx}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arc sec} \frac{f(x)}{a} + C.$$

$$31. - \int \frac{-d}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccos} e cx + C.$$

$$32. - \int \sqrt{a^2 - [f(x)]^2} dx = \frac{f(x)\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}}{2} + \frac{a^2 \operatorname{arcsen} \frac{f(x)}{a}}{2} + C.$$

$$33. - \int \sqrt{[f(x)]^2 - a^2} dx = \frac{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2 L[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 - a^2}]}{2} + C.$$

$$34. - \int \sqrt{[f(x)]^2 + a^2} dx = \frac{f(x)\sqrt{[f(x)]^2 + a^2}}{2} + \frac{a^2 L[f(x) + \sqrt{[f(x)]^2 + a^2}]}{2} + C.$$

### Ejemplos

**Resolver las siguientes integrales utilizando tablas**

$$1. \int (2x + 5) dx$$

$$\int (2x + 5) dx = \int 2x dx + \int 5 dx = x^2 + 5x + c$$

$$2. \int (\sin x + 7x - 1) dx$$

$$\int (\sin x + 7x - 1) dx = \int \sin x dx + \int 7x dx + \int -1 dx =$$

$$- \cos x + \frac{7}{2}x^2 - x + c$$

$$3. \int \sqrt[3]{x} dx$$

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + c$$

$$4. \int \frac{1}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt[5]{x^2}} dx = \int x^{-2} x^{\frac{-2}{5}} dx = \int x^{\frac{-12}{5}+1} + c$$

$$5. \int (3x^3 - 5x^2 + 3x + 4) dx$$

$$\int (3x^3 - 5x^2 + 3x + 4) dx = \int 3x^3 dx + \int -5x^2 dx + \int 3x dx + \int 4 dx =$$

$$\frac{3}{4} x^4 - \frac{5}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 4x + c$$

$$6. \int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int \frac{x^2 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx = \int \left( \frac{x^2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \left( x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{6}} \right) dx =$$

$$\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + c = \frac{2x^2 \sqrt{x}}{5} + \frac{6x^{\frac{6}{6}} \sqrt{x}}{7} + c$$

$$7. \int \frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}} dx$$

$$\int \frac{x-1}{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{(x-1)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})}{(\sqrt{2x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})} dx =$$

$$\frac{2x}{3} \sqrt{2x} + \frac{2(x+1)}{3} \sqrt{x+1} + c$$

$$8. \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{2} - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}$$

$$9. \int \frac{x-3}{x^2+49} dx$$

$$\int \frac{x-3}{x^2+49} dx = \int \left( \frac{x}{x^2+49} - \frac{3}{x^2+49} \right) dx = \int \frac{1}{2u} du + \int -\frac{3}{x^2+49} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du + \int -\frac{3}{x^2+49} dx = \frac{1}{2} \ln u + \int -\frac{3}{x^2+49} dx =$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+49) - 3 \int \frac{1}{x^2+49} dx =$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2+49) - \frac{3}{7} \arctan\left(\frac{1}{7}x\right) + c$$

La integración no es tan directa como la derivación. No hay reglas que garanticen absolutamente la obtención de una integral indefinida de una función. Por consiguiente, es necesario desarrollar técnicas para usar las fórmulas de integración básicas con el fin de obtener integrales indefinidas de funciones más complejas.

## 7.5 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

### 7.5.1 INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Consiste en sustituir  $x$  por una cierta función de una nueva variable  $t$ ,  $u$ ,  $z$ , de tal forma que resulte otra integral más sencilla de resolver.



Así, supuesto  $f(x)$  continua en  $[a, b]$ , sustituiremos en  $\int f(x)dx$ , la expresión adecuada,  $x = g(t)$ , siendo  $g(t)$  derivable con derivadas continuas en  $[a_1, b_1]$  y  $g[a_1, b_1] \subset [a, b]$ . quedará

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt = \int H(t)dt = \int F(t) + c.$$

Para expresar la primitiva en función de la variable  $x$ , sustituiremos  $t = g^{-1}(x)$  (inversa de  $g(x)$  que debe existir).

### Ejemplos

$$1. \int \sqrt{1-4y} dy$$

$$u = 1 - 4y \Rightarrow du = -4dy$$

$$dy = -\frac{1}{4}du$$

$$\int \sqrt{1-4y} dy = \int u^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}du = -\frac{1}{4} \int u^{\frac{1}{2}} du =$$

$$-\frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c_1 \right) = -\frac{1}{6} u^{\frac{3}{2}} + c$$

$$-\frac{1}{6} (1-4y)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$2. \int x^2(x^3-1)^{10}dx$$

$$u = x^3 - 1 \Rightarrow 3x^2dx$$

$$\int x^2(x^3-1)^{10}dx = \frac{1}{3} \int (x^3-1)^{10} 3x^2 dx =$$

$$\int x^2(x^3-1)^{10}dx = \frac{1}{3} \int u^{10}du =$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{11} u^{11} + c \right) = \frac{1}{33} (x^3-1)^{11} + c$$

$$3. \int (x^2 - 4x + 4)^{\frac{4}{3}} dx$$

$$u = x - 2 \Rightarrow du = dx$$

$$\int (x^2 - 4x + 4)^{\frac{4}{3}} dx = \int (x - 2)^{\frac{8}{3}} dx = \int 3u^{\frac{8}{3}} du =$$

$$\frac{3}{11} u^{\frac{11}{3}} = \frac{3}{11} (x - 2)^{\frac{11}{3}} + c$$

$$4. \int x\sqrt{x+1} dx$$

$$u = x + 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \int (-2u^2 + 2u^4) du = -\frac{2}{3} u^3 + \frac{2}{5} u^5 =$$

$$\frac{2}{5} (x + 1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} (x + 1)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$5. \int (\sqrt{3-2x}) x^2 dx$$

$$u^2 = 3 - 2x$$

$$2u du = -2 dx$$

$$dx = -u du$$

$$x = \frac{3 - u^2}{2}$$

$$\int (\sqrt{3-2x}) x^2 dx = \int \left( -\frac{9}{4} u^2 + \frac{3}{2} u^4 - \frac{1}{4} u^6 \right) du =$$

$$-\frac{3}{4} u^3 + \frac{3}{10} u^5 - \frac{1}{28} u^7 = -\frac{3}{4} (3 - 2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{28} (3 - 2x)^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{10} (3 - 2x)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$6. \int \cos 4\theta d\theta$$

$$u = 4\theta \Rightarrow du = 4d\theta$$

$$\int \cos 4\theta d\theta = \int \frac{1}{4} \cos u du = \frac{1}{4} \sin u = \frac{1}{4} \sin(4\theta) + c$$

$$7. \int \frac{1}{2} t \sin 4t^2 dt$$

$$u = t^2 \Rightarrow du = 2t dt$$

$$\int \frac{1}{2} t \sin 4t^2 dt = \frac{1}{2} \int t \sin 4t^2 dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} \sin(4u) du =$$

$$\frac{1}{4} \int \sin(4u) du = \frac{1}{4} \int \frac{1}{4} \sin(4u) du = -\frac{1}{16} \cos(4u) + c = -\frac{1}{16} \cos(4t^2) + c =$$

$$8. \int \cos x (2 + \sin x)^5 dx$$

$$u = 2 + \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$\int \cos x (2 + \sin x)^5 dx = \int u^5 du = \frac{1}{6} u^6 + c = \frac{1}{6} (2 + \sin x)^6 + c$$

$$9. \int 2 \sin x \sqrt[3]{1 + \cos x} dx$$

$$u^3 = 1 + \cos x$$

$$3u^2 du = -\sin x dx$$

$$\int 2 \sin x \sqrt[3]{1 + \cos x} dx = -2 \int 3u^2 \sqrt[3]{(u)^3} du =$$

$$-6 \int u^2 u du = -\frac{6}{4} u^4 + c = -\frac{3}{2} (\sqrt[3]{1 + \cos x})^4 + c$$

$$10. \int \frac{\sec^2 x \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}} dt$$

$$u = 3\sqrt{t} \Rightarrow du = \frac{3dt}{2\sqrt{t}}$$

$$\int \frac{\sec^2 x \, 3\sqrt{t} \, dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, 3\sqrt{t} \left( \frac{3dt}{2\sqrt{t}} \right) =$$

$$\frac{2}{3} \tan u + c = \frac{2}{3} \tan 3\sqrt{t} + c$$

$$11. \int \frac{(y+3)}{(3-y)^{\frac{2}{3}}} dy$$

$$u = 3 - y \Rightarrow du = -dy$$

$$y + 3 = 6 - u$$

$$\int \frac{(y+3)}{(3-y)^{\frac{2}{3}}} dy = \int (-18 + 3u^3) du = -18u + \frac{3}{4}u^4 =$$

$$\frac{3}{4}(3-y)^{\frac{4}{3}} - 18\sqrt[3]{(3-y)} + c$$

$$12. \int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}} dx$$

$$u^2 = 1 - 2x \Rightarrow 2u du = -4x dx$$

$$x^2 = \frac{1-u^2}{2}$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-2x^2}} dx = \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}u^2 \right) du = -\frac{1}{4}u + \frac{1}{12}u^3 =$$

$$-\frac{1}{4}\sqrt{(1-2x^2)} + \frac{1}{12}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$13. \int \sec x dx$$

*Multiplicar y dividir el integrando por  $\sec x + \tan x$*

$$u = \sec x + \tan x \Rightarrow du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln u + c =$$

$$\ln(\sec x + \tan x) + c$$

$$14. \int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5} dy$$

$$u = 1 - 2y^2 \Rightarrow du = -8y^3 dy$$

$$\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5} dy = -\frac{1}{8} \int \frac{du}{u^5} = -\frac{1}{8} \left( -\frac{1}{4u^4} \right) = \frac{1}{32u^4} + c =$$

$$\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5} dy = \frac{1}{32(1-2y^4)^4} + c$$

$$15. \int \frac{2r}{(1-r)^{\frac{2}{3}}} dr$$

$$u = 1 - r \Rightarrow du = -dr$$

$$du = -dr$$

$$\int \frac{2r}{(1-r)^{\frac{2}{3}}} dr = 2 \int \frac{r}{(1-r)^{\frac{2}{3}}} dr = 2 \int (-3 + 3u^3) du =$$

$$-6u + \frac{3}{2}u^4 + c = \frac{3}{2}(1-r)^{\frac{4}{3}} - 6\sqrt[3]{1-r}$$

$$16. \int \left( t + \frac{1}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2} \right) dt$$

$$u = t + t^{-1} \Rightarrow du = (1 - t^{-2}) dt$$

$$\int \left( t + \frac{1}{t} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{t^2 - 1}{t^2} \right) dt = \int (t + t^{-1})^{\frac{3}{2}} (1 - t^{-2}) dt =$$

$$\int \left(t + \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{t^2 - 1}{t^2}\right) dt = \int u^{\frac{3}{2}} du = \frac{2}{5} u^{\frac{5}{2}} + c =$$

$$\frac{2}{5} (t + t^{-1})^{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} \left(t + \frac{1}{t}\right)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$17. \int \frac{s}{2s+3} ds$$

$$u = 2s + 3 \Rightarrow du = 2ds$$

$$s = \frac{u-3}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{s}{2s+3} ds &= \int \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{1}{2s+3} ds = \frac{1}{2} s - \frac{3}{2} \int \frac{1}{2s+3} = \\ &= \frac{1}{2} s - \frac{3}{2} \int \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} s - \frac{3}{4} \ln u = \frac{1}{2} s - \frac{3}{4 \ln} (2s+3) + c \end{aligned}$$

$$18. \int x^2 \sin(x^3 + 4) dx$$

$$u = x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$$

$$\int x^2 \sin(x^3 + 4) dx = \int \frac{1}{3} \sin(u + 4) du =$$

$$u + 4 = v \Rightarrow du = dv$$

$$\frac{1}{3} \int \sin v dv = -\frac{1}{3} \cos v + c = -\frac{1}{3} \cos(u + 4) + c = -\frac{1}{3} \cos(x^3 + 4) + c$$

$$19. \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$$

$$x = u^6 \Rightarrow dx = 6u^5 du, \quad u = x^{\frac{1}{6}}$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{u^3}{u^3 - u^2} 6u^5 = 6 \int \frac{u^6}{u - 1}$$

$$6 \int (u^5 + u^4 + u^3 + u^2 + u + 1) du + 6 \int \frac{1}{u - 1} du =$$

$$u^6 + \frac{6}{5}u^5 + \frac{3}{2}u^4 + 2u^3 + 3u^2 + 6u + \ln(u - 1) + c =$$

$$\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + x + 6\sqrt[6]{x} + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\ln(\sqrt[6]{x} - 1) + c$$

$$20. \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx$$

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx = \int \frac{x^{2n-1} x^{n-1}}{((x^n)^2 + 1)^2} dx$$

$$x^n = \tan \theta \Rightarrow nx^{n-1} dx = \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow x^{n-1} dx = \frac{\sec^2 \theta d\theta}{n}, x^{2n} = \tan^2 \theta$$

$$\int \frac{x^{2n} x^{n-1} dx}{((x^n)^2 + 1)^2} = \frac{1}{n} \int \frac{\tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta}{(1 + \tan^2 \theta)^2} =$$

$$\frac{1}{n} \int \frac{\tan^2 \theta \sec^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta \sec^2 \theta} = \frac{1}{n} \int \frac{\tan^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta} =$$

$$\frac{1}{n} \int \frac{(\sec^2 \theta - 1) d\theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1}{n} \left( \int d\theta - \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \right) = \frac{1}{n} \left( \theta - \int \cos^2 \theta d\theta \right) =$$

$$\frac{1}{n} \left( \theta - \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \right) = \frac{1}{2n} \theta - \frac{1}{4n} \sin 2\theta + c =$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + x^{2n}}}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{x^n}{\sqrt{1 + x^{2n}}} \Rightarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2x^n}{1 + x^{2n}} =$$

$$\frac{1}{2n} \left( \arctan x^n - \frac{x^n}{1+x^{2n}} \right) + c$$

### 7.5.2 MÉTODO DE EXPRESIONES CUADRÁTICAS

El método de expresiones cuadráticas consiste en la aplicación de las siguientes formulas generales de integración, donde la primera es una integral en la que el numerador puede transformarse en la derivada del denominador:

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln|g(x)|$$

Resolver:

$$1. \int \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx$$

$$\int \frac{x-1}{3x^2-6x+5} dx = \frac{1}{6} \int \frac{6x-6}{3x^2-6x+5} dx = \frac{1}{6} \ln|3x^2-6x+5| + C$$

### 7.5.3 MÉTODO DE COMPLETAR EL CUADRADO

Toda expresión de la forma:  $x^2 + bx + c$  puede siempre completarse para formar un cuadrado perfecto de la siguiente manera:

$$x^2 + bx + c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4}$$

$$2. \int \frac{8}{x^2-2x+3} dx$$



Las raíces del denominador son imaginarias. En este caso se procede de la siguiente manera:

$$x^2 - 2x + 3 = (x - \alpha)^2 + \beta; \text{ es decir, } x^2 - 2x + 3 = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

Identificando coeficientes se obtiene:  $\alpha=1$ ;  $\beta=2$ .

Entonces resulta:

$$\begin{aligned} \int \frac{8}{x^2 - 2x + 3} dx \\ = \int \frac{8}{(x-1)^2 + 2} dx = \int \frac{8/2}{\frac{(x-1)^2}{2} + 1} dx = \int \frac{4}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Si hacemos el cambio  $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = t$  se obtiene que  $dx = \sqrt{2}dt$  y llevándolo a la integral planteada,

$$\int \frac{8}{x^2 - 2x + 3} dx = \int \frac{4}{t^2 + 1} \sqrt{2} dt = 4\sqrt{2} \arctg t = 4\sqrt{2} \arctg \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$$

$$3. \int \frac{5x + 3}{3x^2 + 4x + 2} dx$$

$$\int \frac{5x + 3}{3x^2 + 4x + 2} dx = \left( \frac{5}{6} \frac{6x + 4}{3x^2 + 4x + 2} - \frac{1}{9x^2 + 12x + 6} \right) =$$

$$\frac{5}{6} \int \frac{1}{u} du + \int -\frac{1}{9x^2 + 12x + 6} dx = \frac{5}{6} \ln u + \int -\frac{1}{9x^2 + 12x + 6} dx =$$

$$\frac{5}{6} \ln(3x^2 + 4x + 2) - \frac{1}{3} \int \frac{1}{3x^2 + 4x + 2} dx =$$

$$\frac{5}{6} \ln(3x^2 + 4x + 2) - \frac{1}{3} \int \frac{3}{2 + 9u^2} du =$$

$$\frac{5}{6} \ln(3x^2 + 4x + 2) - \frac{1}{6} \sqrt{2} du = \frac{5}{6} \ln(3x^2 + 4x + 2) - \frac{1}{6} \sqrt{2} u =$$

$$\frac{5}{6} \ln(3x^2 + 4x + 2) - \frac{1}{6} \sqrt{2} \arctan\left(\frac{3}{2} u \sqrt{2}\right) + c$$

#### 7.5.4 INTEGRACIÓN POR PARTES

$$\int u dv = uv - \int v du$$

El método es recomendable cuando se presentan productos de funciones, es conveniente tomar en cuenta lo siguiente;

- a. Tómese como  $v'$  la porción más complicada del integrando que puede integrarse fácilmente.
- b. Tómese como  $u$  la porción más simple del integrando que tiene por derivada  $u'$  una expresión más simple que la propia  $u$
- c. Es posible que el método exija ser aplicado más de una vez, en cuyo caso se debe cuidar de no conmutar las elecciones iniciales de  $u$  y  $v$ , además de vigilar la aparición de un múltiplo de la integral original que resolvería el problema.

Es útil en múltiples casos. Enumeraremos algunos de ellos:

**Ejemplo** Resolver las siguientes integrales por el método por partes

$$1. \int (x - 1)e^x dx$$

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int (x - 1)e^x dx = (x - 1)e^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x - e^x + c$$

$$2. \int \ln(x) dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

$$3. \int x e^{3x} dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} e^{3x}$$

$$= x \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx$$

$$= x \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + c$$

$$4. \int x e^{-x} dx$$

$$u = x, \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$-x e^{-x} + \int e^{-x} dx =$$

$$-x e^{-x} - e^{-x} + c$$

$$5. \int x^2 \sin x dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos x$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x - \int -2x \cos x dx =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x - \int -2x \sin x dx =$$

$$-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

**6.  $\int x \sec x \tan x dx$**

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sec x \tan x dx \Rightarrow v = \sec x$$

$$\int x \sec x \tan x dx = x \sec x - \int \sec x dx =$$

$$x \sec x - \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} = x \sec x - \int \frac{1}{u} du =$$

$$x \sec x - \ln u = x \sec x - \ln(\sec x) + \tan x + c$$

**7.  $\int (\ln x)^2 dx$**

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \ln x dx \Rightarrow v = x \ln x - x$$

$$\int (\ln x)^2 dx = \ln x (x \ln x - x) - \int (\ln x - 1) dx =$$

$$\ln x (x \ln x - x) - x \ln x + 2x + c$$

**8.  $\int x^2 \ln x dx$**

$$u = \ln x, \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x^2 dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} x^3$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx =$$

$$\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

**9.  $\int e^x \cos x dx$**

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int -e^x \sin x dx =$$

$$e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx =$$

$$\frac{1}{2} e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x \sin x + c$$

**10.  $\int \cos^2 x dx$**

$$u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x$$

$$\int \cos^2 x dx = \cos x \sin x - \int -\sin^2 x dx$$

$$\cos x \sin x + \int \sin^2 x dx = \cos x \sin x + \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) dx =$$

$$\cos x \sin x + \int \frac{1}{2} dx + \int -\frac{1}{2} \cos(2x) dx =$$

$$\cos x \sin x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin u = \cos x \sin x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + c$$

$$11. \int x^2 e^x dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx$$

$$\int 2x e^x dx$$

Hacemos nuevamente

$$u = 2x \Rightarrow du = 2 dx$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int 2x e^x dx = 2x e^x - 2 \int e^x dx = 2x e^x - 2e^x$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - (2x e^x - 2e^x) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$$

$$12. \int x^2 \cos 3x dx$$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

$$dv = \cos 3x dx \Rightarrow v = \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x$$

Aplicamos nuevamente el método de integración por partes:

$$u = \frac{2}{3} x \Rightarrow du = \frac{2}{3} dx$$

$$dv = \sin 3x dx \Rightarrow -\frac{1}{3} \cos 3x$$

$$\int \frac{2}{3} x \sin 3x dx = -\frac{2}{9} x \cos 3x + \int \frac{2}{9} \cos 3x dx =$$

$$-\frac{2}{9} x \cos 3x + \frac{2}{27} \int 3 \cos 3x dx =$$

$$-\frac{2}{9} x \cos 3x + \frac{2}{27} \sin 3x$$

$$\int x^2 \cos 3x dx = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x + \frac{2}{9} x \cos 3x + \frac{2}{27} \sin 3x + c$$

$$13. \int \cos \sqrt{x} dx$$

$$w = \sqrt{x} \Rightarrow dw = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$\int \cos \sqrt{x} dx = 2 \int \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \right) = 2 \int w \cos w dw =$$

$$2w \sin w - 2 \int \sin w dw = 2w \sin w + 2 \cos w + c =$$

$$2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + c$$

$$14. \int x \arctg \sqrt{x} dx$$

$$u = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int x \arctg \sqrt{x} dx = \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x}) x^2 - \int \frac{1}{4} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x+1} dx$$

$$\frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})x^2 - \frac{1}{4} \int \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x+1} dx =$$

$$\frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})x^2 - \frac{1}{4} \int -2 + 2u^2 + \frac{2}{1+u^2} du =$$

$$\frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})x^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} \int u^2 du - \frac{1}{4} \int \frac{2}{1+u^2} du =$$

$$\frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})x^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{4} \int \frac{2}{1+u^2} du =$$

$$\frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})x^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{6}u^3 - \frac{1}{2} \arctan u =$$

$$\frac{1}{2} \arctan(\sqrt{x})x^2 - \frac{1}{2} \arctan \sqrt{x} - \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + c$$

$$15. \int x^2 \operatorname{arcsec} \sqrt{x} dx$$

$$u = \operatorname{arcsec} \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2x\sqrt{x}-1}$$

$$dv = x^2 \Rightarrow v = \frac{1}{3}x^3$$

$$\int x^2 \operatorname{arcsec} \sqrt{x} dx = \frac{1}{3}x^3 \operatorname{arcsec} \sqrt{x} - \frac{1}{6} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x}-1}$$

$$u = x - 1 \Rightarrow du = dx$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x}-1} = \int \frac{(u+1)^2 du}{\sqrt{u}} = \int \left( u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}} \right) du =$$

$$\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + 2u^{\frac{1}{2}} + c = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + c =$$

$$\frac{1}{3}x^3 \operatorname{arcsec} \sqrt{x} - \frac{1}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{9}(x-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(x-1)^{\frac{1}{2}} + c$$



$$16. \int \sec^3 x \, dx$$

$$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x \, dx$$

$$dv = \sec^2 x \, dx \Rightarrow v = \tan x$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx = \sec x \tan x - \int \sec x \sec^2 x \, dx =$$

$$\sec x \tan x - \int \sec x (\sec^2 - 1) \, dx =$$

$$\sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx =$$

$$\sec x \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$2 \int \sec^3 x \, dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + c =$$

$$\frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln|\sec x + \tan x| + c$$

### 7.5.5 INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Para evaluar las integrales es recomendable usar las identidades

$$a) \int \sin(mx) \cos(nx) \, dx$$

$$a) \sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$b) \int \sin(mx) \sin(nx) \, dx$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$c) \int \cos(mx) \cos(nx) \, dx$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

### 7.5.6 POTENCIAS DE SEÑO Y COSENO

1.- Si la potencia del seno es impar y positiva, reservar un factor seno y convertir los demás en cosenos, luego desarrollar e integrar.

$$\begin{aligned}\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx &= \int \sin^{2k} x \cos^n x (\sin x) dx = \\ &= \int (\sin^2 x)^k \cos^n x (\sin x) dx = \int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x (\sin x) dx\end{aligned}$$

2.- Si la potencia del coseno es impar y positiva, reservar un factor coseno y convertir los demás en senos a continuación desarrollar e integrar.

$$\begin{aligned}\int \cos^{2k+1} x \sin^n x dx &= \int \cos^{2k} x \sin^n x (\cos x) dx = \\ &= \int (\cos^2 x)^k \sin^n x (\cos x) dx = \int (1 - \sin^2 x)^k \sin^n x (\cos x) dx\end{aligned}$$

3.- Si las potencias de ambos, seno y coseno, son pares y positivas, usar repetidamente las identidades

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

### 7.5.7 POTENCIAS DE SECANTE TANGENTE

1.- Si la potencia de la secante es par y positiva, reservar un factor secante<sup>2</sup> y pasar las demás a tangentes, luego desarrollar e integrar.

$$\begin{aligned}\int \sec^{2k} x \tan^n x dx &= \int \sec^{2k-2} x \tan^n x (\sec^2 x) dx = \\ &= \int (\sec^2 x)^{k-1} \tan^n x (\sec^2 x) dx = (1 + \tan^2 x)^{k-1} \tan^n x (\sec^2 x) dx\end{aligned}$$

2.- Si la potencia de la tangente es impar y positiva, reservar un factor secante tangente y pasar los demás a secantes, luego desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \tan^{2k+1} x dx = \int \sec^{m-1} x \tan^{2k} x (\sec x \tan x) dx$$

$$\int \sec^{m-1} x (\tan^2)^k x (\sec x \tan x) dx = \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k (\sec x \tan x) dx$$

3.- Si no hay factores secantes y la potencia de la tangente es par y positiva, convertir un factor  $\tan^2 x$  en secantes. Después desarrollar y repetir el proceso si fuera necesario.

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x (\tan^2 x) dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx =$$

$$\int \tan^{n-2} x (\sec^2 x) dx - \int \tan^{n-2} x dx =$$

Integrales de la forma

$$\int \sin ax \sin bx dx, \int \sin ax \cos bx dx, \int \cos ax \cos bx dx.$$

Se resuelven transformando el producto en sumas o diferencias mediante identidades trigonométricas. Así, por ejemplo, utilizando las igualdades:

$$\sin(ax + bx) = \sin ax \cos bx + \cos ax \sin bx$$

$$\sin(ax - bx) = \sin ax \cos bx - \cos ax \sin bx$$

Sumando y despejando,

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin(ax + bx) + \sin(ax - bx)]$$

Integrando,

$$\int \sin ax \cos bx dx = \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(ax + bx)}{a + b} - \frac{\cos(ax - bx)}{a - b} \right] + C$$

Ejemplos

$$1. \int \sin^2 x dx$$

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C$$

$$2. \int \cos^3 x dx$$

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx$$

$$\int (\cos x - \sin^2 x \cos x) dx = \sin x - \int \sin^2 x \cos x \, dx =$$

$$\sin x - \int u^2 \, du = \frac{1}{3}u^3 = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x$$

$$3. \int \frac{\cos x}{1 - \cos x} dx$$

$$I = \int \frac{\cos x}{1 - \cos x} dx = \int \frac{\cos x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} dx$$

$$\int \frac{\cos x(1 + \cos x)}{(1 - \cos^2 x)} dx = \int \frac{\cos x + \cos^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx =$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx + \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx - \cot x - x + c$$

Resolvemos ahora la integral  $I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$  haciendo el cambio

$$\sin x = t, \cos x dx = dt$$

$$I_1 = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin x}$$

$$\int \frac{\cos x}{1 - \cos x} dx = -\cot x - x - \frac{1}{\sin x} + c$$

$$4. \int \text{sen}^5 x dx$$

$$\int \text{sen}^5 x dx = \text{sen}^4 x \sin x dx = \text{sen}^2 x \text{sen}^2 x \sin x dx =$$

$$\int (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int (1 - t^2)^2 (-dt) =$$

$$- \int (1 - t^2 + t^4) dt = - \left( t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right) + c = -t + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + c =$$

$$- \cos x + \frac{2 \cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} + c$$

$$5. \int \frac{\sin x + \tan x}{\cos x} dx$$

$$I = \int \frac{\sin x + \tan x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = I_1 + I_2$$

La primera la ponemos de forma que el numerador sea la derivada del denominador:

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = \ln |\cos x|$$

Para la segunda hacemos un cambio de variable:

$$I_2 = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx =$$

$$\cos x = t, -\sin x dx = dt$$

$$I_2 = \int \frac{-dt}{t^2} = - \int t^{-2} dt = \left( \frac{t^{-1}}{-1} \right) = \frac{1}{t} = \frac{1}{\cos x}$$

$$I = \ln |\cos x| + \frac{1}{\cos x}$$

$$6. \int \operatorname{sen}^3 3x \cos^5 3x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^3 3x \cos^5 3x \, dx = \int \operatorname{sen}^3 3x (1 - \operatorname{sen}^2 3x)^2 \cos 3x \, dx =$$

$$\int \operatorname{sen}^3 3x \cos 3x \, dx - 2 \int \operatorname{sen}^5 3x \cos 3x \, dx + \int \operatorname{sen}^7 3x \cos 3x \, dx =$$

$$\frac{1}{12} \operatorname{sen}^4 3x - \frac{1}{9} \operatorname{sen}^6 3x + \frac{1}{24} \operatorname{sen}^8 3x + C$$

$$7. \int \tan^3 3x \sec^4 3x \, dx$$

$$\int \tan^3 3x \sec^4 3x \, dx = \int \tan^3 3x (1 - \tan^2 3x) \sec^2 3x \, dx =$$

$$\int \tan^3 3x \sec^2 3x \, dx + \int \tan^5 3x \sec^2 3x \, dx =$$

$$\frac{1}{12} \tan^4 3x + \frac{1}{18} \tan^6 3x + C$$

$$8. \int \operatorname{sen}^4 x \, dx$$

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx = \int \left( \frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx =$$

$$\frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx =$$

$$\frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx =$$

$$\frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + c =$$

$$\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c$$

$$9. \int \sin^5 x \cos^2 x dx$$

$$\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \sin x \sin^4 x \cos^2 x dx$$

$$\int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \cos^2 x dx = \int (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \cos^2 x dx$$

$$\int (\sin x \cos^2 x - 2 \cos^4 x \sin x + \cos^6 x \sin x) dx =$$

$$-\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + c$$

$$10. \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx$$

$$\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin x \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

$$-\ln(\cos x) + \ln(\sin x) + c = \ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) + c = \ln(\tan x) + c$$

$$11. \int \sin^2 4x dx$$

$$\int \sin^2 4x dx = \int \frac{1 - \cos 8x}{2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{16} \sin 8x + c$$

$$12. \int \cos^5 x dx$$

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx =$$

$$\int \cos x dx - 2 \int \sin^2 x \cos x dx + \int \sin^4 x \cos x dx =$$

$$\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} = 2 \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx = 2 \tan \sqrt{x} + c$$

$$14. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \tan^2 x \frac{1}{\cos^2 x} dx =$$

$$\frac{1}{3} \tan^3 x + c$$

$$15. \int \frac{\sin x + \tan x}{\cos x} dx$$

$$\int \frac{\sin x + \tan x}{\cos x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \frac{\tan x}{\cos x} dx =$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \tan x \sec x dx = -\ln(\cos x) + \sec x + c$$

$$16. \int \sin^2 x \cos^5 x dx$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx =$$

$$\int \sin^2 x (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) \cos x dx =$$

$$\int (\sin^2 x \cos x - 2\sin^4 x \cos x + \sin^6 x \cos x) dx =$$

$$\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + \frac{\sin^7 x}{7} + c$$

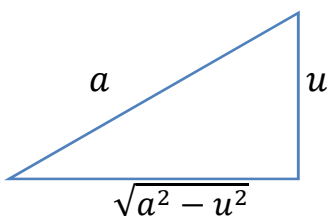


### 7.5.8 SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Este método es aplicable a expresiones que contienen radicales, que pueden ser la hipotenusa o los catetos de un triángulo rectángulo, se debe considerar:

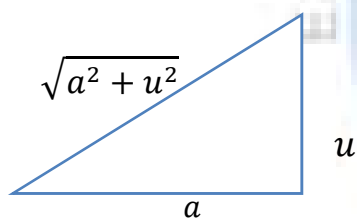
1.- Para integrales que contienen

$$\sqrt{a^2 - u^2}$$



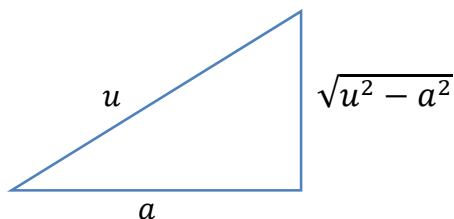
Donde  $u = a \sin \theta \Rightarrow \sqrt{a^2 - u^2} = a \cos \theta$

2.- Para integrales que contienen  $\sqrt{a^2 + u^2}$



Donde  $u = a \tan \theta \Rightarrow \sqrt{a^2 + u^2} = a \sec \theta$

3.- Para integrales que contienen  $\sqrt{u^2 - a^2}$



Donde  $u = a \sec \theta \Rightarrow \sqrt{u^2 - a^2} = a \tan \theta$

En la siguiente tabla se muestra cuál debe ser la sustitución:

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$\tan^2 \theta = \sec^2 \theta - 1$

Veamos algunos ejemplos

$$1. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}}$$

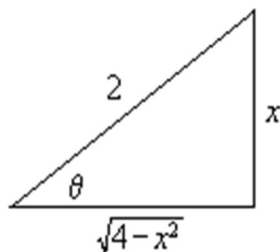
$$x = 2 \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{2 \cos \theta d\theta}{(2 \sin \theta)^2 \sqrt{4 - (2 \sin \theta)^2}} = \int \frac{2 \cos \theta d\theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{4 - 4 \sin^2 \theta}} =$$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{2 \sin^2 \theta \sqrt{4(1 - \sin^2 \theta)}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{2 \sin^2 \theta 2 \sqrt{\cos^2 \theta}} =$$

$$\int \frac{\cos \theta d\theta}{4 \sin^2 \theta \cos \theta} = \frac{1}{4} \int \csc^2 \theta d\theta = -\frac{1}{4} \cot \theta + c$$

$$\text{Como } x = 2 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{x}{2}$$



$$\cot \theta = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}} = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + c$$

$$2. \int \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz$$

$$\int \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz = \int \frac{1}{(z^2 - 2z + 1 + 4)^2} dz = \int \frac{1}{((z-1)^2 + 4)^2} dz$$

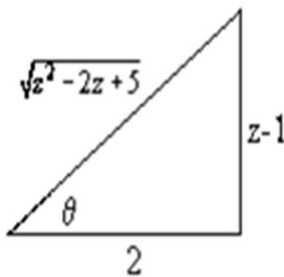
$$z - 1 = 2 \tan \theta \Rightarrow dz = 2 \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{((z-1)^2 + 4)^2} dz = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{(4 \tan^2 \theta + 4)^2} = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{(4 \sec^2 \theta)^2} = \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{(4 \sec^2 \theta)^2}$$

$$\int \frac{d\theta}{8 \sec^2 \theta} = \frac{1}{16} \int (\cos 2\theta + 1) d\theta = \frac{1}{16} \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{16} \theta + c =$$

$$\frac{1}{16} (\sin \theta \cos \theta) + \frac{1}{16} \theta + c$$

$$z - 1 = 2 \tan \theta$$



$$\tan \theta = \frac{z-1}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{z-1}{\sqrt{z^2 - 2z + 5}}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{z^2 - 2z + 5}}$$

$$\int \frac{1}{(z^2 - 2z + 5)^2} dz = \frac{1}{16} \frac{z-1}{\sqrt{z^2 - 2z + 5}} \frac{2}{\sqrt{z^2 - 2z + 5}} + \frac{1}{16} \tan^{-1} \frac{z-1}{2} + c$$

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$x = \sin \theta \Rightarrow dx = \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = \int d\theta = \theta + c$$

$$x = \sin \theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1} x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$4. \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx$$

$$x = 5 \sin \theta \Rightarrow dx = 5 \cos \theta d\theta$$

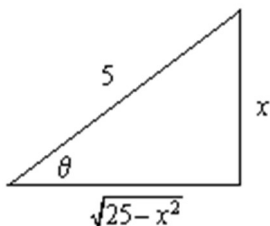
$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = \int \frac{\sqrt{25-25\sin^2 \theta}}{5 \sin \theta} \cos \theta d\theta =$$

$$\int \frac{\sqrt{25(1-\sin^2 \theta)}}{5 \sin \theta} \cos \theta d\theta =$$

$$\int \frac{5 \cos^2 \theta d\theta}{\sin \theta} = 5 \int \frac{(1-\sin^2 \theta)}{\sin \theta} d\theta = 5 \left( \int \cos \theta d\theta - \int \sin \theta d\theta \right) =$$

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx = 5(\ln|\csc \theta - \cot \theta| + \cos \theta) + c$$

$$\sin \theta = \frac{x}{5}$$



$$\cos \theta = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{5}$$

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x}$$

$$\csc \theta = \frac{5}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x} dx = 5 \ln \left| \frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x} \right| + \sqrt{25 - x^2} + c$$

$$5. \int \sqrt{x^2 + 4} dx$$

$$x = 2 \tan \theta \Rightarrow dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$$

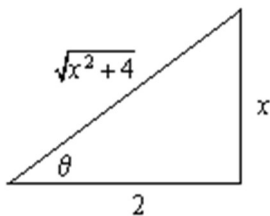
$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx = \int \sqrt{(2 \tan \theta)^2 + 4} 2 \sec^2 \theta d\theta =$$

$$\int \sqrt{4 (\tan^2 \theta + 1)} 2 \sec^2 \theta d\theta = \int 2 \sqrt{\sec^2 \theta} 2 \sec^2 \theta d\theta =$$

$$2 \int \sec \theta \sec^2 \theta d\theta = 4 \left( \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta + \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c \right)$$

$$x = 2 \tan \theta$$

$$\tan \theta = \frac{x}{2}$$



$$\sec \theta = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

$$\int \sqrt{x^2 + 4} dx = 2 \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} \cdot \frac{x}{2} + \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} + \frac{x}{2} \right)^2 + c$$

$$6. \int \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$x^2 = \tan \theta \Rightarrow x dx = \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1}{2} \int d\theta = \frac{1}{2} \theta + c$$

$$\theta = \tan^{-1} x^2$$

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \tan^{-1} x^2 + c$$

$$7. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

$$x = \sec \theta \Rightarrow dx = \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\sec^2 \theta - 1} = \int \frac{\sec \theta \tan \theta d\theta}{\tan^2 \theta} =$$

$$\int \frac{\sec \theta}{\tan \theta} = \int \csc \theta d\theta =$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln | \csc \theta - \cot \theta | + c$$

$$x = \sec \theta \Rightarrow \csc \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \cot \theta = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \right| + c$$

$$8. \int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}}$$

$$x = \frac{5}{2} \sin \theta \Rightarrow dx = \frac{5}{2} \cos \theta d\theta$$

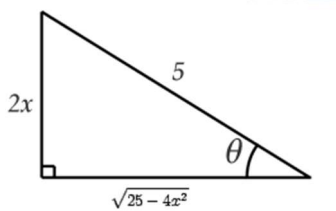
$$25 - x^2 = 25(1 - \sin^2 \theta) = 25 \cos^2 \theta$$

$$\sqrt{25 - 4x^2} = 5 \cos \theta$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \int \frac{\frac{5}{2} \cos \theta d\theta}{\frac{5}{2} \sin \theta \cdot 5 \cos \theta} = \frac{1}{5} \int \frac{d\theta}{\sin \theta} =$$

$$\frac{1}{5} \int \csc \theta d\theta = \frac{1}{5} \ln |\csc \theta - \cot \theta| + c$$

$$x = \frac{5}{2} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{2}{5} x$$



$$\csc \theta = \frac{5}{2x}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{5}{2x} - \frac{\sqrt{25-4x^2}}{2x} \right| + c$$

$$9. \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$x = 2 \sin \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$4 - x^2 = 4 - 4 \sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta$$

$$\sqrt{4-x^2} = 2 \cos \theta$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{(2 \sin \theta)^2 2 \cos \theta d\theta}{2 \cos \theta} = 4 \int \sin^2 \theta d\theta =$$

$$4 \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = 2 \int (1 - \cos 2\theta) d\theta = 2 \left( \theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) + c$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = 2 \arcsen \left( \frac{x}{2} \right) - 2 \frac{x(4-x^2)}{2} + c$$

### 7.5.9 RACIONALES TRIGONOMÉTRICAS

$$x = \tan \left( \frac{t}{2} \right) \text{ y } x = z^n.$$

Hacer una sustitución  $u = \tan \left( \frac{x}{2} \right)$  para resolver la siguiente integral

$$1. \int \frac{dx}{2 + 2 \sin x + \cos x}$$

$$u = \tan \left( \frac{x}{2} \right) \Rightarrow du = \frac{1}{2} \sec^2 x \left( \frac{x}{2} \right) dx \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{2 + 2 \sin x + \cos x} =$$

$$2 \int \frac{du}{u^2 + 4u + 3} = 2 \int \frac{du}{(u+1)(u+3)} =$$

$$2 \left[ \int \frac{\frac{1}{2} du}{(u+1)} - \int \frac{\frac{1}{2} du}{(u+3)} \right] = \ln(u+1) - \ln(u+3) + c =$$



$$\ln \frac{(u+1)}{(u+3)} + c = \ln \left( \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 3} \right) + c$$

$$2. \int \frac{dx}{2 + \sin x}$$

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{2} \sec^2 x \cdot \frac{x}{2} dx \Rightarrow$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{2 + \sin x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{2 + \frac{2u}{1+u^2}} du = \int \frac{du}{u^2 + u + 1} = \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} =$$

$$u + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} (2u + 1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right)$$

$$\theta = \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right) \right)$$

$$\int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \sec^2 \theta d\theta}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan \theta\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \int d\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \theta$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \left( 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right) + c$$

$$3. \int \frac{dx}{1 + \cos x}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{2} \sec^2 x \left(\frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{1-\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{du}{u^2} =$$

$$-\frac{1}{u} + c = -\frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + c = -\cot\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

4.  $\int \frac{dx}{\sin x + \tan x}$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow du = \frac{1}{2} \sec^2 x \left(\frac{x}{2}\right) dx \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}$$

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{2u}{1-u^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{(1-u^2)}{u} du = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{u} - u\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \ln|u| - \frac{1}{2}u^2 \right\} + c = \frac{1}{2} \left\{ \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| - \frac{1}{2}\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \right\} + c$$

#### 7.5.10 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES MEDIANTE FRACCIONES PARCIALES

Las fracciones parciales se utilizan para ayudar a descomponer expresiones racionales y obtener sumas de expresiones más simples.

Son las integrales del tipo  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$  donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son polinomios en  $x$ .

Si el grado de  $P(x)$  es mayor o igual que el de  $Q(x)$  se efectúa la división,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Quedando reducida la integral inicial a la de un polinomio más una integral racional donde el grado del numerador,  $R(x)$ , es menor que el grado del denominador  $Q(x)$ . Sólo consideraremos, entonces, integrales de este último tipo.

Para resolver esta, descompondremos  $\frac{R(x)}{Q(x)}$  en fracciones simples lo que equivaldrá a sustituir la integral inicial por una suma de integrales más elementales.

**Caso 1:** El denominador  $Q(x)$  es un producto de factores lineales distintos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

**Caso 2:** El denominador  $Q(x)$  es un producto de factores lineales, algunos de los cuales están repetidos.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \dots + \frac{A_k}{(a_1x + b_1)^k}$$

**Caso 3:** El denominador  $Q(x)$  contiene factores cuadráticos irreducibles.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

**Caso 4:** El denominador  $Q(x)$  contiene un factor cuadrático irreducible repetido.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Determinar la descomposición en fracciones parciales de:

$$1. \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

**Primero** observar que el numerador tiene grado 2 y el denominador grado 3 por lo tanto no se tiene que hacer una división larga.

**Segundo:** factorizar el denominador

$$x^3 + 2x^2 - 3x = x(x^2 + 2x - 3) = x(x + 3)(x - 1)$$

**Tercero:** colocar cada factor obtenido de la siguiente forma

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1}$$

Obtener el mínimo común denominador

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x + 3)(x - 1) + B(x)(x - 1) + C(x)(x + 3)$$

Operar los paréntesis

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x)$$

Ahora formar la primera ecuación con los términos al cuadrado así

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x^2 + 2x - 3) + B(x^2 - x) + C(x^2 + 3x)$$

$$4x^2 + 13x - 9 = (Ax^2 + 2Ax - 3A) + (Bx^2 - Bx) + (Cx^2 + 3Cx)$$

$$4x^2 + 13x - 9 = Ax^2 + 2Ax - 3A + Bx^2 - Bx + Cx^2 + 3Cx$$

$$4x^2 + 13x - 9 = Ax^2 + Bx^2 + Cx^2 + 2Ax - Bx + 3Cx - 3A$$

$$4x^2 + 13x - 9 = x^2(A + B + C) + x(2A - B + 3C) - 3A$$

Las tres ecuaciones son:

$$+1A \quad +1B \quad +1C \quad = 4$$

$$2A \quad -1B \quad +3C \quad = +13$$

$$-9 \quad = -3A$$

Tomar la tercera ecuación y encontrar el valor de A

$$-9 \quad = -3A$$

$$\frac{-9}{-3} = A$$

$$3 = A$$

Sustituir los valores de A en las otras dos ecuaciones

$$+1A +1B +1C = 4$$

$$(3)(1) + B + C = 4$$

$$3 + B + C = 4$$

$$B + C = 4 - 3$$

$$B + C = 1$$

$$2A -1B +3C = +13$$

$$(2)(3) - B + 3C = 13$$

$$6 - B + 3C = 13$$

$$-B + 3C = 13 - 6$$

$$-B + 3C = 7$$

Resolver las dos ecuaciones obteniendo así los valores de B y C

$$B + C = 1$$

$$-B + 3C = 7$$

$$4C = 8$$

$$C = 2$$

$$B + C = 1$$

$$B + 2 = 1$$

$$B = 1 - 2$$

$$B = -1$$

Colocar las respuestas en la letra correspondiente

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-1}$$

Hay otro sistema que se puede usar **únicamente** cuando los términos son lineales y no repetidos

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-1}$$

Obtener el mínimo común denominador, operar e igualar al numerador.

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3)$$

Igualar a cero cada uno de los factores del denominador de la fracción parcial

$$\begin{array}{ll} x = 0 & x + 3 = 0 \\ x = -3 & x - 1 = 0 \end{array}$$

$$x = 1$$

Sustituir los valores de x

$$\mathbf{x = 0}$$

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3)$$

$$4(0)^2 + 13(0) - 9 = A(0+3)(0-1) + B(0)(0-1) + C(0)(0+3)$$

$$0 + 0 - 9 = A(3)(-1) + 0B + 0C$$

$$-9 = -3A$$

$$3 = A$$

$$\mathbf{x = -3}$$

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x+3)(x-1) + B(x)(x-1) + C(x)(x+3)$$

$$4(-3)^2 + 13(-3) - 9 = A(-3+3)(-3-1) + B(-3)(-3-1) + C(-3)(-3+3)$$

$$36 - 39 - 9 = A(0)(-4) + B(-3)(-4) + C(-3)(0)$$

$$-12 = 12B$$

$$-1 = B$$

$$\mathbf{x = 1}$$

$$4x^2 + 13x - 9 = A(x + 3)(x - 1) + B(x)(x - 1) + C(x)(x + 3)$$

$$4(1)^2 + 13(1) - 9 = A(1 + 3)(1 - 1) + B(1)(1 - 1) + C(1)(1 + 3)$$

$$4 + 13 - 9 = A(4)(0) + B(1)(0) + C(1)(4)$$

$$8 = 4C$$

$$2 = C$$

$$\frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} + \frac{C}{x - 1} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x + 3} + \frac{2}{x - 1}$$

**Descomposición en fracciones parciales con un factor lineal repetido.**

$$2. \frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2}$$

Notamos en el ejercicio que hay un término lineal repetido que es  $(x - 3)^2$

Entonces:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

Si fuera al cubo el término repetido  $(x - 3)^3$  lo pondríamos:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3}$$

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x - 3)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2}$$

$$x^2 + 10x - 36 = A(x - 3)^2 + B(x)(x - 3) + C(x)$$

Operamos los paréntesis

$$x^2 + 10x - 36 = A(x^2 - 6x + 9) + B(x^2 - 3x) + C(x)$$

$$x^2 + 10x - 36 = (Ax^2 - 6Ax + 9A) + (Bx^2 - 3Bx) + (Cx)$$

$$x^2 + 10x - 36 = Ax^2 - 6Ax + 9A + Bx^2 - 3Bx + Cx$$

$$x^2 + 10x - 36 = Ax^2 + Bx^2 - 6Ax - 3Bx + Cx + 9A$$

$$x^2 + 10x - 36 = x^2(A + B) + x(-6A - 3B + C) + 9A$$

Formo 3 ecuaciones

$$A + B = 1$$

$$-6A - 3B + C = 10$$

$$9A = -36$$

Resolviendo queda:

$$9A = -36$$

$$A = -4$$

Sustituir valores en la primera ecuación:

$$A + B = 1$$

$$-4 + B = 1$$

$$B = 4 + 1$$

$$B = 5$$

Sustituyo valores en la segunda ecuación

$$-6A - 3B + C = 10$$

$$24 - 15 + C = 10$$

$$9 + C = 10$$

$$C = 10 - 9$$

$$C = 1$$

$$\frac{x^2 + 10x - 36}{x(x-3)^2} = \frac{-4}{x} + \frac{5}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

**Descomposición de una fracción parcial que contiene un factor cuadrático irreducible.**

$$3. \frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$



Primero observar que el grado del numerador y denominador son iguales por lo que se tiene que realizar una división larga.

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 2x^3 - x^2 + 8x - 4 \overline{) 4x^3 - x^2 + 15x - 29} \\
 \underline{-4x^3 + 2x^2 - 16x + 8} \phantom{-} \\
 x^2 - x - 21
 \end{array}$$

$$\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4}$$

Factorizar el denominador:

$$2x^3 - x^2 + 8x - 4 = x^2(2x - 1) + 4(2x - 1) = (x^2 + 4)(2x - 1)$$

$x^2 + 4$  es un término **cuadrático irreducible** por lo que se opera

$$\frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1}$$

Operar el mínimo común denominador

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 21 &= (Ax + B)(2x - 1) + C(x^2 + 4) \\
 x^2 - x - 21 &= 2Ax^2 - Ax + 2Bx - B + Cx^2 + 4C \\
 x^2 - x - 21 &= 2Ax^2 + Cx^2 - Ax + 2Bx - B + 4C \\
 x^2 - x - 21 &= x^2(2A + C) + x(-A + 2B) + (-B + 4C)
 \end{aligned}$$

Formar las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 2A + C &= 1 \\
 -A + 2B &= -1 \\
 -B + 4C &= -21
 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A = 3 \quad B = 1 \quad C = -5$$

$$\begin{aligned}\frac{4x^3 - x^2 + 15x - 29}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} &= 2 + \frac{x^2 - x - 21}{2x^3 - x^2 + 8x - 4} = 2 + \frac{Ax + B}{x^2 + 4} + \frac{C}{2x - 1} \\ &= 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 4} + \frac{-5}{2x - 1}\end{aligned}$$

4.  $\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}$

$$x^3 + 2x^2 + x = x(x^2 + 2x + 1) = x(x + 1)^2$$

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x(x + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x + 1)^2 + Bx(x + 1) + xC$$

$$5x^2 + 20x + 6 = Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx$$

$$5x^2 + 20x + 6 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A$$

$$5 = A + B$$

$$20 = 2A + B + C$$

$$6 = A$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A = 6 \quad B = -1 \quad C = 9$$

### **RESOLUCION DE INTEGRALES POR FRACCIONES PARCIALES**

1.  $\int \frac{dx}{x(x - 1)^2}$

Estamos en el caso en que el denominador tiene raíces múltiples. Las descomposiciones tenemos que hacerla de la siguiente forma:

$$\frac{1}{x(x - 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2}$$

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx.$$

Para calcular los valores de A, B y C damos a x los valores de 0, 1 y otro valor cualquiera, por ejemplo, 2.

De ese modo obtenemos A=1, B=-1 y C=1.

Entonces:

$$\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{(x-1)^2} dx =$$

$$\ln|x| - \ln|x-1| + \int (x-1)^{-2} dx =$$

$$\ln|x| - \ln|x-1| + \frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1} + c = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$$

$$2. \int \frac{x+7}{x^2-x-6} dx$$

$$x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) =$$

$$\frac{x+7}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+2)}$$

$$x+7 = \frac{A(x-3)(x+2)}{(x-3)} + \frac{B(x-3)(x+2)}{(x+2)}$$

$$x+7 = A(x+2) + B(x-3)$$

$$x+7 = Ax + 2A + Bx - 3B$$

$$x+7 = (A+B)x + (2A-3B)$$

$$1 = A+B$$

$$7 = 2A - 3B$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A = 2 \quad B = -1$$

$$\int \frac{x+7}{x^2-x-6} dx = \int \left( \frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

$$= 2\ln(x+3) - \ln(x+2) + c$$

$$3. \int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx$$

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x-1)(x^2 + 4)$$

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)}$$

$$2x^3 - 4x - 8 = A(x-1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)x(x-1)$$

$$2x^3 - 4x - 8 =$$

$$Ax^3 + 4Ax - Ax^2 - 4A + Bx^3 + 4Bx + Cx^3 - Cx^2 + Dx - Dx$$

$$2x^3 - 4x - 8 = x^3(A + B + C) + x(4A + 4B - D) - 4A$$

$$2 = A + B + C$$

$$0 = -A - C + D$$

$$-4 = 4A + 4B - D$$

$$-8 = -4A$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$A = 2 \quad B = -2 \quad C = 2 \quad D = 4$$

$$\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} dx = \int \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{x-1} + \frac{2x+4}{x^2+4} \right) dx =$$

$$2\ln x - 2\ln(x-1) + \int \frac{2x+4}{x^2+4} dx$$

$$2\ln x - 2\ln(x-1) + \int \left( 2\frac{x}{x^2+4} + \frac{4}{x^2+4} \right) dx =$$

$$2\ln x - 2\ln(x-1) + 2 \int \frac{1}{2u} du + \int \frac{4}{x^2+4} dx =$$

$$2\ln x - 2\ln(x-1) + \ln u + \int \frac{4}{x^2+4} dx =$$

$$2\ln x - 2\ln(x-1) + \ln(x^2+4) + 2\arctan\left(\frac{1}{2}x\right) + c$$

$$4. \int \frac{3x+1}{x^2+4x+3} dx$$

$$\frac{3x+1}{x^2+4x+3} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{x+3}$$

$$3x+1 = Ax + A + Bx + 3B$$

$$A+B=3$$

$$A+3B=1$$

$$A=4$$

$$B=-1$$

$$\int \frac{3x+1}{x^2+4x+3} dx = \int \frac{4}{x+3} dx - \int \frac{1}{x-1} dx$$

$$= 4\ln(x+3) - \ln(x-1) + c$$

$$5. \int \frac{5x^2+3}{x^2(x^2+2)} dx$$

$$\frac{5x^2+3}{x^2(x^2+2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

$$\frac{5x^2 + 3}{x^2(x^2 + 2)} = \frac{Ax^2 + 2A + Bx^3 + 2Bx + Cx^2 + Dx^2}{x^2(x^2 + 2)} =$$

$$5x^2 + 3 = (B + C)x^3 + (A + D)x^2 + 2A + 2Bx$$

$$B + C = 0$$

$$A + D = 5$$

$$2B = 0$$

$$2A = 3$$

$$A = \frac{3}{2} \quad B = 0 \quad C = 0 \quad D = \frac{7}{2}$$

$$\int \frac{5x^2 + 3}{x^2(x^2 + 2)} dx = \int \left[ \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} \right] dx = \int \left( \frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{7}{2}}{x^2 + 2} \right) dx =$$

$$\frac{3}{2} \int x^{-2} dx + \frac{7}{2} \int \frac{1}{x^2 + 2} dx = \frac{3}{2x} + \frac{7}{2\sqrt{2}} \arctg\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + c$$

#### 7.5.11 ESTRATEGIA DE INTEGRACIÓN

La integración es más desafiante que la derivación. Al encontrar la derivada de una función es obvio cual fórmula de derivación se debe aplicar, pero puede no resultar obvio que técnica se debe emplear para integrar una función dada.

Veamos ahora una colección de diversas integrales en orden aleatorio y el principal reto consiste en identificar cuál técnica o fórmula se debe usar. No existen reglas rígidas y rápidas con respecto a cuál método se aplica en una situación dada, pero se propondrá algunas sugerencias acerca de la estrategia que puede ser útil.

Un prerrequisito para ello es el conocimiento de las fórmulas de integración básicas. La mayoría de ellas deben ser memorizadas.

Una vez proporcionadas estas fórmulas de integración básicas, si no se ve inmediatamente cómo proceder a calcular una integral dada, se podrá intentar la siguiente estrategia de cuatro pasos:

1. Simplificar el integrando siempre que sea posible. Algunas veces el manejo algebraico o las identidades trigonométricas simplificarán el integrando y harán obvio el método de integración. Los siguientes son algunos ejemplos:

$$\int \sqrt{x} (1 + \sqrt{x}) dx = \int (\sqrt{x} + x) dx$$

$$\int \frac{\tan \theta}{\sec^2 \theta} d\theta = \int \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos^2 \theta d\theta = \int \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} \int \sin 2\theta d\theta$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx = \int (\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x) dx = \int (1 + 2\sin x \cos x) dx$$

2. Buscar una sustitución obvia. Trate de encontrar alguna función  $u = g(x)$  en el integrando y que, su diferencial  $du = g'(x)dx$  también esté presente, excepto por un factor constante. Por ejemplo:

$$\int \frac{x}{x^2 - 1} dx$$

En la integral se observa que si  $u = x^2 - 1$ , entonces  $du = 2x dx$ . Por lo tanto se emplea la sustitución  $u = x^2 - 1$  en vez del método de fracciones parciales.

3. Clasificar el integrando de acuerdo a su forma. Si los pasos 1 y 2 no han llevado a la solución, entonces se observa la forma del integrando  $f(x)$ .
  - a) Funciones Trigonómicas. Si  $f(x)$  es un producto de potencias de  $\sin x$  y  $\cos x$  o  $\tan x$  y  $\sec x$  o  $\cot x$  y  $\csc x$ , entonces se usan las sustituciones recomendadas. Si  $f$  es una función trigonométrica que no es de dichos tipos pero no obstante es una función racional de  $\sin x$  y  $\cos x$ , entonces se emplea la sustitución  $t = \tan \frac{x}{2}$ .
  - b) Funciones Racionales. Si  $f$  es una función racional, se utiliza el procedimiento utilizado para las fracciones parciales.

- c) Integración por partes. Si  $f(x)$  es un producto de una potencia de  $x$  (o un polinomio) y una función trascendente (tal como una función trigonométrica, exponencial o logarítmica), entonces se prueba la integración por partes, eligiendo  $u$  y  $dv$  según los lineamientos dados anteriormente.
  - d) Radicales. Cuando aparecen ciertos radicales se recomiendan tipos particulares de sustituciones
  - e) Si está presente la expresión  $\sqrt{\pm x^2 \pm a^2}$ , se usa la sustitución trigonométrica adecuada según la tabla dada.
  - f) Si aparece la expresión  $\sqrt{ax + b}$ , se usa la sustitución de racionalización  $u = \sqrt{ax + b}$ . De manera más general, este procedimiento es efectivo algunas veces en que aparecen  $\sqrt{g(x)}$ .
4. Intentar de nuevo. Si los tres primeros pasos no han producido la respuesta, recuerde que existen básicamente solamente dos métodos de integración: por sustitución y por partes.
- (a) Intentar la sustitución. Aun cuando no haya una sustitución obvia (Paso 2), un poco de inspiración o de ingenio (incluso de desesperación) podría sugerir una sustitución apropiada.
  - (b) Intentar Integración por partes. Aunque la integración por partes se usa la mayoría de las veces en el caso de productos de la forma descrita en el Paso 3(c), a veces es efectiva en el caso de una sola función.
  - (c) Manipular el integrando. Las manipulaciones algebraicas (tal vez la racionalización del denominador o el uso de identidades trigonométricas) pueden ser útiles para transformar la integral en una forma más sencilla. Estas manipulaciones pueden ser más sustanciales que en el Paso 1 y pueden implicar un poco de ingenio. El siguiente es un ejemplo:

$$\int \frac{dx}{1 - \cos x} = \int \frac{dx}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \int \frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} dx$$



$$= \int \frac{1 + \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left( \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx$$

- (d) Relacionar el problema con problemas anteriores. Cuando se ha adquirido cierta experiencia con la integración, se puede emplear un método en una integral dada que sea semejante a uno ya utilizado con una integral anterior. O se podría incluso expresar la integral dada en términos de un anterior. Por ejemplo,  $\int \tan^2 x \sec x dx$  es una integral de apariencia difícil, pero si se hace uso de la identidad  $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ , se puede escribir:

$$\int \tan^2 x \sec x dx = \int \sec^3 x dx - \int \sec x dx$$

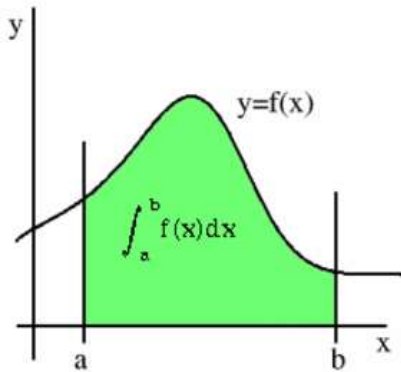
y si  $\int \sec^3 x dx$  ha sido calculada previamente, entonces se puede utilizar en el problema presente.

- (e) Usar varios métodos. Algunas veces se requieren dos o tres métodos para calcular una integral. El cálculo podría implicar varias sustituciones sucesivas de tipos diferentes o bien combinar la integración por partes con una o más sustituciones.

## 7.6 INTEGRAL DEFINIDA

Dada una función  $f(x)$  y un intervalo  $[a,b]$ , la **integral definida** es igual al área limitada entre la gráfica de  $f(x)$ , el eje de abscisas, y las rectas verticales

$$x = a \text{ y } x = b$$



La integral definida se representa por

$$\int_a^b f(x)dx$$

$\int$  : El signo de integración.

$a$ : Límite inferior de la integración.

$b$ : Límite superior de la integración.

$f(x)$  : Es el integrando o función a integrar.

$dx$  : El diferencial de  $x$ , e indica cuál es la variable de la función que se integra.

## 7.7 PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

1. El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

2. Si los límites que integración coinciden, la **integral definida vale cero**.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

3. Si  $c$  es un punto interior del intervalo  $[a, b]$ , la **integral definida** se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos  $[a, c]$  y  $[c, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales.

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

5. La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^a k f(x) dx = k \int_a^a f(x) dx = 0$$

### **LA REGLA DE BARROW**

La **regla de Barrow** dice que la integral definida de una función continua  $f(x)$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$  es igual a la diferencia entre los valores que toma una función primitiva  $G(x)$  de  $f(x)$ , en los extremos de dicho intervalo.

$$\int_a^b f(x) dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a)$$

### **Ejemplos**

1.  $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3}$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \left[ \frac{-1}{2(x-1)^2} \right]_{-2}^{-1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(-2)^2} - \frac{1}{(-3)^2} \right] = -\frac{5}{72}$$

$$2. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = [2\sqrt{1+x}]_0^3 = 2(2-1) = 2$$

$$3. \int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx$$

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 2x\sqrt{x^2+9} dx = \left[ \frac{1}{3} (x^2+9)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{1}{3} \left[ (25)^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9} dx = \frac{98}{3}$$

$$4. \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 2x(x^2-1)^{\frac{1}{2}} dx = \left[ \sqrt{x^2-1} \right]_2^3 = \sqrt{8} - \sqrt{3}$$

$$5. \int_{-3}^5 (y^3 - 4y) dy$$

$$\int_{-3}^5 (y^3 - 4y) dy = \int_{-3}^5 y^3 dy + \int_{-3}^5 -4y dy =$$

$$\left[ \frac{y^4}{4} - 2y^2 \right]_{-3}^5 = 136 - 32 = 104$$

$$6. \int_1^2 \frac{z}{(z^2+1)^3} dz$$

$$\int_1^2 \frac{z}{(z^2 + 1)^3} dz = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{4} \left[ \frac{1}{u^2} \right]_1^2 = \frac{3}{16}$$

$$7. \int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx$$

$$\int_1^4 \sqrt{x}(2+x)dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}(2+x)dx = \int_1^4 \left( 2x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) dx =$$

$$\left[ \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_1^4 = \frac{3}{4} (4)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (4)^{\frac{5}{2}} - \left( \frac{4}{3} (41)^{\frac{53}{2}} \right) =$$

$$\frac{32}{3} + \frac{64}{5} - \left( \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{326}{15}$$

$$8. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x (1 - \cos^2 x) \cos^4 x dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x \sin x - \cos^6 x \sin x) dx = \left[ -\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$$

$$9. \int_2^4 \log x dx$$

$$u = \log x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \log e dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\int_2^4 \log x dx = [x \log x]_2^4 - \int_2^4 \log e dx = [x \log x - x \log e]_2^4 =$$

$$4 \log 2^2 - 4 \log e - 2 \log 2 + 2 \log e$$

$$8 \log 2 - 4 \log e - 2 \log 2 + 2 \log e = 6 \log 2 - 2 \log e$$

$$10 \int_0^{\pi} \sin \sqrt{x} dx$$

Calculamos la integral definida por cambio de variable

$$\int \sin \sqrt{x} dx$$

$$x = t^2 \Rightarrow 2t dt$$

Hallamos los nuevos limites de integracion

$$x = 0 \quad t^2 = 0 \quad t = 0$$

$$x = \pi \quad t^2 = \pi^2 \quad t = \pi$$

Integramos por partes

$$\int \sin t \, 2t dt = 2 \int t \sin t dt$$

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = \sin t \Rightarrow v = -\cos t$$

$$2 \int t \sin t dt = 2 \left( -t \cos t - \int \cos t dt \right) = 2(-t \cos t + \sin t) + c$$

$$2 \int_0^{\pi} t \sin t dt = [2[-t \cos t + \sin t]]_0^{\pi} = 2\pi$$

Nombre de archivo: CALCULO I RON.docx  
Directorio: C:\Users\ROSALVA\Documents  
Plantilla: C:\Users\ROSALVA\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal  
.dotm  
Título:  
Asunto:  
Autor: jose  
Palabras clave:  
Comentarios:  
Fecha de creación: 24/9/2020 20:59:00  
Cambio número: 57  
Guardado el: 17/5/2021 19:53:00  
Guardado por: Agustin Arnez  
Tiempo de edición: 4,838 minutos  
Impreso el: 17/5/2021 19:59:00  
Última impresión completa  
Número de páginas: 227 (aprox.)  
Número de palabras: 32,162 (aprox.)  
Número de caracteres: 176,895 (aprox.)