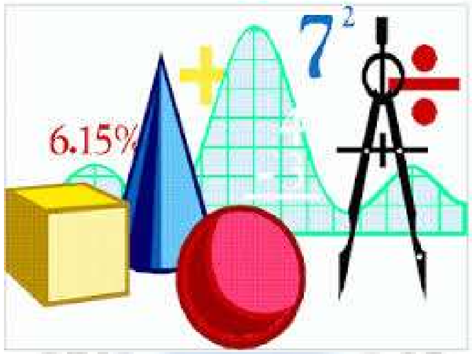
6 SEXTA UNIDAD TEMÁTICA: APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

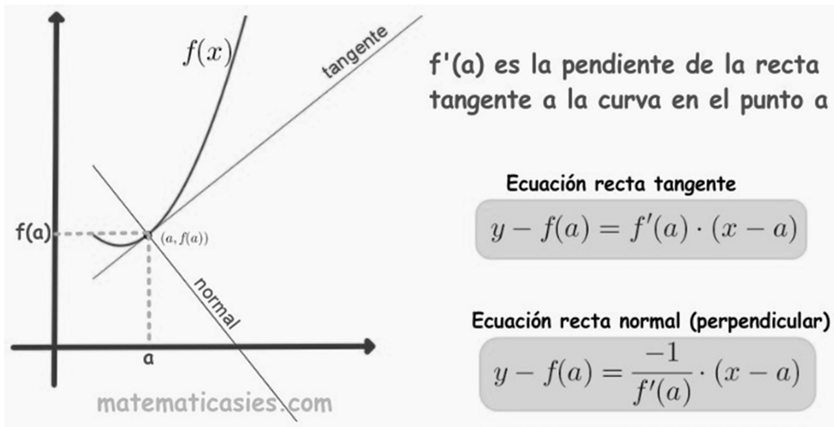


CRITERIO DE DESEMPEÑO

Resuelve problemas referidos a la aplicabilidad de las derivadas; determinando las características de una función de una sola variable; representando la función gráficamente; calculando puntos críticos, máximos, mínimos, intervalos de crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

CONTENIDO ANALÍTICO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

6.1 APLICACIONES A LA GEOMETRÍA



6.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Con frecuencia en la vida, nos enfrentamos con el problema de encontrar la *mejor* manera de hacer algo. Por ejemplo, un granjero necesita elegir la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para producir la mayor ganancia. Un médico desea seleccionar la menor dosis de una droga que curará cierta enfermedad. A un fabricante le gustaría minimizar el costo de distribución de sus productos. Algunas veces, un problema de este tipo puede formularse de modo que implique maximizar o minimizar una función en un conjunto específico. Si es así, los métodos de cálculo proporcionan una herramienta poderosa para resolver el problema.

Entonces suponga que se nos da una función $f(x)$ y un dominio D como en la figura

Ahora planteamos tres preguntas:

1. ¿$f(x)$ tiene un valor máximo o un valor mínimo en D?
2. Si tiene un valor máximo o un valor mínimo, ¿dónde se alcanzan?
3. Si existen, ¿cuáles son los valores máximo y mínimo?

Dar respuesta a estas tres interrogantes es el principal objetivo de esta sección. Empezamos por introducir un vocabulario preciso.

Definición

Suponga que *D*, el dominio de *f*, contiene el punto *c*. Decimos que:

(i) *f* (*c*) es el **valor máximo** de *f* en *D*, si *f* (*c*) ≥ *f* (*x*) para toda *x* en *D*;

(ii) *f* (*c*) es el **valor mínimo** de *f* en *D*, si *f* (*c*) ≤ *f* (*x*) para toda *x* en *S*;

(iii) *f* (*c*) es el **valor extremo** de *f* en *D*, si es un valor máximo o un valor mínimo;

(iv) la función que queremos maximizar o minimizar es la **función objetivo.**

Definición Punto crítico Los puntos críticos de una función son:

- Los extremos del intervalo donde está definida la función, si estas existen.
- Los valores x tales que $f'(x) = 0$
- Los valores x tales que $f'(x)$ no está definida.

Si estamos interesados en encontrar los máximos y los mínimos locales de una función (en el interior de su dominio), debemos buscarlos en los puntos críticos.

6.2.1 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

El **criterio de la primera derivada** es un teorema de cálculo diferencial que permite determinar si un punto crítico de una función de una variable es un máximo o un mínimo relativo según el signo de la derivada de la función en dicho punto.

Teorema Sea *f* una función continua en un intervalo abierto I que contiene al punto *a*. Si *a* es un punto crítico (es decir, *f* (a)*=0*) de *f* y *f* es derivable en el intervalo *I*, excepto posiblemente en *a*, entonces:

- Si el signo de *f'(x)* cambia en a, de positivo a negativo, entonces a es un máximo relativo de *f*.
- Si el signo de *f'(x)* cambia en a, de negativo a positivo, entonces a es un mínimo relativo de *f*.
- Si el signo de *f'(x)* tiene el mismo signo a ambos lados de a, entonces a no es un extremo relativo, es un punto de inflexión.

6.2.2 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea *f* una función con su primera derivada definida, al menos, en un intervalo abierto conteniendo al número a. Si *f''* está definida entonces podemos considerar los siguientes aspectos:

a). Si $f'(a)=0$ y $f''(a)< 0$ entonces se dice que *f* tiene un **máximo local** en a.

b). Si $f'(a)=0$ y $f'(a)>0$ entonces se dice que *f* tiene un **mínimo local** en a.

6.2.3 FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE

Cuando hablamos de **monotonía**, nos estamos refiriendo al comportamiento de una función respecto a su crecimiento o decrecimiento.
Sea f una función derivable en un intervalo (a, b), entonces es:

- **Creciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x) \geq 0$ en todo x el intervalo (a,b)
- **Decreciente** en el intervalo (a,b) si $f'(x) \leq 0$ en todo x el intervalo (a,b)

6.3 LA REGLA DE L'HOPITAL

En matemáticas la regla de L`HOPITAL es una regla que usa derivadas para ayudar a evaluar límites de funciones que estén de las siguientes formas indeterminadas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Sin embargo, puede ampliarse su uso a otras indeterminaciones si estas se cambian a las formas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Sean f y g dos funciones definidas en el intervalo [a,b],

Y sean f(c)=g(c)=0, con c perteneciente a (a,b) y g'(x)≠0 si x≠ c

Si f y g son derivables en (a,b), entonces si existe el límite $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ en c, existe el límite de f/g (en c) y es igual a:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6.4 EJERCICIOS RESUELTOS

1.Hallar la recta tangente y normal a la $curva\, \boldsymbol{y=x+sin\,x}$ ***en el punto*** $\boldsymbol{x=\pi/4}$

Derivando la función $y' = 1 + \cos x$ y reemplazando el punto dado en ecuación de la recta tangente

$$y-y_0=y'(x-x_0)\rightarrow y-\left(\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right)=\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{2}=x-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{8}\sqrt{2}\,\pi+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x$$

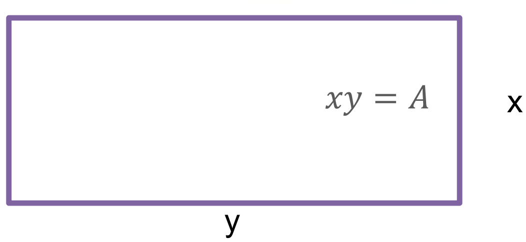
Y la recta normal se tiene $y-y_0=-\frac{1}{y`}(x-x_0)$ se tiene

$$y-\left(\frac{\pi}{4}+sin\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{1+cos\frac{\pi}{4}}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y-\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}-\frac{x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}+1}$$

2.Probar que todos los rectángulos de área dada, el cuadrado es de menor perímetro.

Sea x, y los lados del rectángulo de área dada A, es decir xy = A



El perímetro está dado por $P=2(x+y)$ a partir de $xy=A$ se encuentra $y=\frac{A}{x}$

Por tanto, el perímetro se puede escribir como:

$$P=2\left(x+\frac{A}{x}\right)\qquad [0,\infty]$$

Derivando se obtiene

$$P' = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right)$$

Resolviendo $P' = 0$ se encuentra $x = \sqrt{a}$

La segunda derivada es

$$P'' = \frac{4A}{x^3}$$

Luego $P''(\sqrt{A}) = \frac{4A}{(\sqrt{A})^3} \quad > 0$ luego en $x = \sqrt{A}$ se tiene un mínimo

3. Por la regla del L`Hopital hallar el limite

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{\mathbf{x} - \tan \mathbf{x}}{\mathbf{x} - \sin \mathbf{x}}$$

Se tiene una indeterminación de $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Aplicando la regla de L`Hopital se obtiene

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{1 - \cos x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2\sec x(\sec x \tan x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} - 2sec^3 x = -2$$

6.5 EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Hallar la ecuación de la recta tangente y la normal a la curva $f(x) = x^2 + 1$

Cuando $x = 1$

2) Hallar la ecuación de la recta tangente y la normal a la curva $f(x) = ln(x - 1)$en el punto de intersección con la recta $y = 1$

3) Hallar la ecuación de la recta tangente y la normal a la curva $f(x) = x^3 + x^2$

en el punto de intersección con la recta $y = -x + 3$

4) Hallar la ecuación de la recta tangente y la normal a la curva $f(x)$ en su intersección con $g(x)$

Nombre de archivo: CALCULO I RON.docx
Directorio: C:\Users\ROSALVA\Documents
Plantilla:
C:\Users\ROSALVA\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal.dotm
Título:
Asunto:
Autor: jose
Palabras clave:
Comentarios:
Fecha de creación: 24/9/2020 20:59:00
Cambio número: 54
Guardado el: 23/4/2021 19:57:00
Guardado por: Agustin Arnez
Tiempo de edición: 4,610 minutos
Impreso el: 27/4/2021 16:21:00
Última impresión completa
Número de páginas: 227 (aprox.)
Número de palabras: 32,161 (aprox.)
Número de caracteres: 176,890 (aprox.)