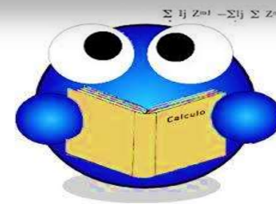
ESQUEMA GENERAL DE LA SECUENCIA DIDACTICA

Cálculo I



LIMITES

1.1.Noción de limite
2.1 Definiciones
1.2.Inexistencia de límites
1.3.Definición de limite
1.4.Limites laterales
1.5.Teoremas sobre limite
1.6.Cálculo de límite

CONTINUIDAD

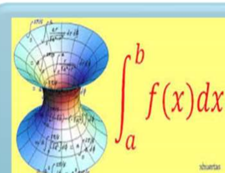
2.2 Discontinuidades
2.3 Operaciones
2.4 Propiedades

DERIVADAS

3.1.Derivada de una función en un punto
3.2. Interpretación geométrica de la Derivada en un punto
3.3. Derivabilidad y continuidad
3.4.Función de derivada y reglas de derivacion
3.5.Diferencial de una función en un punto

APLICACIÓN DE LAS DERIVADAS

4.1. Teoremas de Rollo
4.2. Formula de Taylor
4.3. Máximos y Mínimos
4.4.Aplicaciones a la geometría
4.5. Regla de L´Hopital

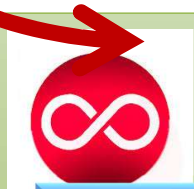


INTEGRALES

5.1. La integral indefinida
5.2. Concepto de primitiva o anti derivada
5.3. Propiedades de las integrales indefinidas
5.4. Integrales inmediatas
5.5. Cálculo de integrales inmediatas.
5.6. La integral definida
5.7. Propiedades de la Integral definida
5.8. Los teoremas fundamentales del cálculo
5.9Cálculo de integrales definidas

APLICACIÓN DE LAS INTEGRALES

6.1.Área de regiones planas
6.2. Longitud de arco
6.3. Volumen de un sólido de revolución



INTEGRALES IMPROPIAS

7.1. Integrales impropias de 1era clase
7.2. Integrales impropias de 2da clase

SUCESIONES Y SERIES

1 PRIMERA UNIDAD TEMÁTICA: NÚMEROS REALES

CRITERIO DE DESEMPEÑO

Describe las propiedades algebraicas y de orden de los números reales; operando con desigualdades y valor absoluto.

CONTENIDO ANALÍTICO DE LA UNIDAD DE APRENDIZAJE

1.1 INTRODUCCIÓN

Se distinguen distintas clases de números aquí clasifican de acuerdo como fueron apareciendo a través de la historia:

- Los números naturales 1; 2; 3; : : : . El conjunto de todos ellos se representa por N.
- Los números enteros: : : ; -2; -1; 0; 1; 2; : : : . cuyo conjunto se representa por Z.
- Los números racionales que son cocientes de la forma $\frac{p}{q}$ donde; $p, q \epsilon$ Z y $q \neq 0$

También se tiene los números como $\sqrt{2}$, π o el número e que no son números racionales y que se llaman, “números irracionales”.

Pues bien, el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de los números reales y se representa por R.

Es claro que $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$. Pues bien, una de las cosas más llamativas de los números es que a partir de un pequeño grupo de propiedades pueden deducirse casi todas las demás. Vamos a destacar estas propiedades básicas que, naturalmente, hacen referencia a las dos operaciones fundamentales que se pueden hacer con los números: la suma y el producto. La suma de dos números reales x, y se escribe $x + y$, y el producto representándose por $x.y$. Las propiedades básicas a que nos referimos son las siguientes.

1.2 PROPIEDADES

P1 Propiedades asociativas. Para todos x; y; z en R:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (xy)z = x(yz)$$

P2 Propiedades conmutativas. Para todo x; y en R:

$$x + y = y + x \qquad xy = yx$$

P3 Elementos neutros. Hay dos números reales distintos que representamos por 0 y 1 tales que para todo $x \in R$ se verifica que:

$$0 + x = x \qquad 1x = x$$

P4 Elementos opuesto e inverso. Para cada número real x hay un número real llamado opuesto de x, que representamos por -x, tal que

$$x + (-x) = 0$$

Para cada número real x distinto de 0,$x \neq 0$, hay un número real llamado inverso de x, que representamos por x^{-1} , tal que

$$xx^{-1} = 1$$

P5 Propiedad distributiva

para todos x; y; z en R

$$(x+y)z = xz + yz$$

Las propiedades anteriores son de tipo algebraico y, aunque son muy sencillas, a partir de ellas pueden probarse cosas tan familiares como que $0x = 0$, o que. $(-x)y = -(xy)$.

Proposición. Se verifican las siguientes igualdades

a) $0x = 0$
b) $(-x)y = -(xy)$
c) $(-x)(-y) = xy$

Demostración.

a) Para $0x = 0$.
   Por P5 $(0+0)x = 0x + 0x$.
   Como consecuencia de P3 se tiene $0 + 0 = 0$.
   Obtenemos así que $0x = 0x + 0x$.
   Usando P4, sumamos el opuesto de $0x$ a ambos lados de la igualdad $0x = 0x + 0x$ y, usando también P1 (la propiedad asociativa), obtenemos que $0x = 0$.
b) Para $(-x)y = -(xy)$. Se tiene que $xy + (-x)y = (x—x)y = 0 \quad y = 0$. Donde hemos usado P4, P5 y el apartado anterior. La igualdad $xy + (-x)y = 0$ nos dice, por P4, que. $(-x)y$ es el opuesto de xy . Eso es justamente lo que queríamos probar.

Finalmente, la igualdad. $(-x)(-y) = xy$ es consecuencia inmediata de la anterior.

El símbolo -x debe leerse siempre “el opuesto de x” y no “menos x”. La razón es que la palabra “menos” remite a una idea de orden (si hay “menos” es porque hay “más”) y el significado de x es puramente algebraico y nada tiene que ver con la idea de orden de la que ni siquiera hemos hablado aún.

Notación. Suele escribirse $x-y$ en vez de $x+(-y)$. También, supuesto $y \neq 0$,se escribe $\frac{x}{y}$ en vez de xy^{-1}.

1.3 AXIOMAS DE ORDEN

Los números tienen, además de las propiedades algebraicas, tienen otras propiedades que suelen llamarse *propiedades de orden*. Los números suelen representarse como puntos de una recta en la que se fija un origen, el 0, de forma arbitraria. Los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por R^{+} . Las propiedades básicas del orden son las siguientes.

P6 Ley de tricotomía Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones:

$$\begin{cases} x=0 \\ x \text{ es positivo} \\ -x \text{ es positivo} \end{cases}$$

P7 Estabilidad de R^{+}. La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

1.3.1 RELACIÓN DE ORDEN

Observa que en P6 se dice, en particular, que el 0 no es positivo. Por otra parte, si x es un número positivo, entonces como $x+(-x)=0$ y el 0 no es positivo, concluimos, por P7, que -x no es positivo. Los elementos del conjunto $R^{-}=\{-x : x \in R^{+}\}$es decir, los opuestos de los números positivos se llama números negativos. Notar que si $z \in R^{-}$ entonces $-z \in R^{+}$.

Definición. Para $x, y \in R$ escribimos

x < y (léase x es menor que y)

para indicar que $y-x \in R^{+}$, y escribimos

$x \leq y$ para indicar que $y-x \in R^{+} \cup \{0\}$.

1.3.2 DESIGUALDADES

Las propiedades del orden de los números reales son las que nos permiten trabajar con desigualdades. Es muy fácil equivocarse al trabajar con desigualdades. Fíjate que algunos de los conceptos más importantes del Cálculo se definen mediante desigualdades (por ejemplo, la definición de sucesión convergente o de límite de una función en un punto). Por ello, tan importante como saber realizar cálculos más o menos complicados, es aprender a manejar correctamente desigualdades, y la única manera de hacerlo es con la práctica mediante numerosos ejemplos concretos. Por supuesto, siempre deben respetarse cuidadosamente las reglas generales que gobiernan las desigualdades entre números y asegurarse de que se usan correctamente. Aparte de tales reglas no hay otros métodos generales que nos digan cómo tenemos que proceder en cada caso particular.

Teorema Sean x, y, z números reales

$1. x \leq y \; e \; y \; \leq z \;\; implican \; que \; x \leq z$

$2. x \leq y \; e \; y \leq x \;\; implican \; x = y$

$3. Se \; verifican \; exactamente \; una \; de \; las \; tres \; relaciones \; x < y, x = y \; o \; y < x$

$4. x < y \; implica \; que \; x + z < y + z$

$5. x < y \; , z > 0 \;\; implican \; que \; xz < yz$

$6. x < y, z < 0 \; implican \; que \; xz > yz$

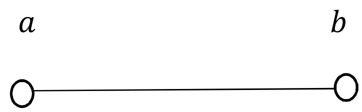
1.3.3 INTERVALOS

En calculo, los conjuntos de uso más frecuente son los intervalos, estos se definen como conjuntos que satisfacen ciertas desigualdades.

Definición. - (Intervalo abierto) Dados dos números a, b tales que $a < b$. El conjunto $\{x \in R: a < x < b\}$ se llama intervalo abierto y se denota con (a, b), esto es,

$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$

Su representación gráfica es



Observemos que los números a y b no perteneen al conjunto (a, b) también notemos que si $a = b$, se tiene $(a, b) = \emptyset$.

Definición. - (Intervalo cerrado) Dados dos números a, b tales que $a \leq b$. El conjunto $\{x \in R: a \leq x \leq b\}$ se llama intervalo cerrado y se denota con $[a, b]$, esto es,

$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$

Su representación gráfica es

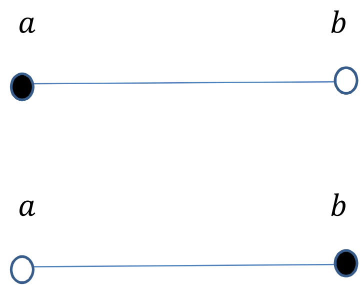
Observemos que los números a y b pertenecen al conjunto $[a, b]$

Definición. - (Intervalo semi-abierto o semi-cerrado) Dados dos números a, b tales que $a \leq b$. Los conjuntos

$[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$ y

$(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$

Se llama intervalo semi-abierto o semi-cerrado, gráficamente se representan por



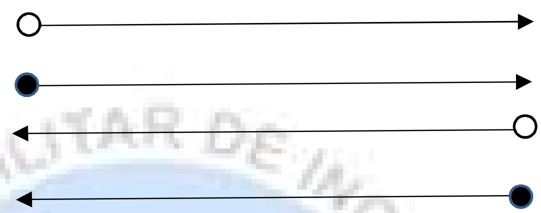
De manera similar definimos los intervalos infinitos

$(a, \infty) = \{x \in R: x > a\}$

$[a, \infty) = \{x \in R: x \geq a\}$

$(-\infty, b) = \{x \in R: x < b\}$

$(-\infty, b] = \{x \in R: x \leq b\}$



Ejemplo. Resolver las siguientes desigualdades

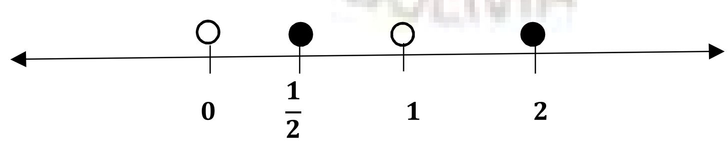
$$\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} - 2 \leq 0$$

Solución:

$$\frac{x + 2(x-1) - 2x(x-1)}{x(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{(2x-1)(x-2)}{x(x-1)} \leq 0$$

$$x = 0 \quad x = 1 \quad x = \frac{1}{2} \quad x = 2$$



Verificando los intervalos el conjunto solución es

$$C_s: x \in (-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup [2, \infty)$$

1.3.4 VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número $x \in R$ se define como el número:

$$|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x < 0 \end{cases}$$

Teorema (propiedades del valor absoluto). Para $x, y \in R$ se verifica que:

$i) \; si \; y > 0 \, , |x| \leq y \; es \; equivalente \; a - y \leq x \leq y$

$ii) \; si \; y > 0 \; |x| \; \geq y \; \; es \; equivalente \; x \geq y \text{ ó } x \leq -y$

$iii) \; |xy| = |x||y|$

$iv) \; |x + y| \leq |x||y| \; y \; la \; la \; igualdad \; se \; da \; si, y \; sólo \; si \; xy \geq 0$ desigualdad triangular

$v) \; |x|^n = x^n \; si \; n \; es \; par$

¿Sabes por qué no se puede dividir por 0?

Si se pudiera dividir por 0, es decir, si hubiera un número que fuera el inverso del 0, su producto por 0 habría de ser igual a 1, pero ya sabemos que al multiplicar por 0 el resultado es siempre 0. Conclusión: si se pudiera dividir por cero habría de ser 1=0, lo cual es falso.

Ejemplo: Resolver las igualdades:

1. $|x - 3| = 5$

   $x - 3 = 5 \quad o \quad x - 3 = -5$

   $x = 8 \quad o \quad x = -2$:

   $C_s = \{8, -2\}$

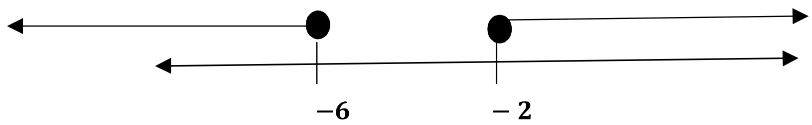
2. $\left|\frac{3x}{2} + 3\right| = 3$

3. $|2x + 8| \geq 4$

   $2x + 8 \geq 4 \quad o \quad 2x + 8 \leq -4$

   $x \geq -2 \qquad x \leq -6$

Interceptando las soluciones gráficamente



$$C_s: x \in (-\infty, -6] \cup [-2, \infty)$$

Ejemplo El diámetro (en pulgadas) de una pieza esférica, producido por una empresa de partes, satisface la desigualdad$|x - 0.1| \leq 0.01$ ¿Cuáles son los diámetros mínimo y máximo que debe tener una de estas piezas?

Ejemplo.-Demostrar $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc \quad \forall a, b, c \in R$

Solución:

Se sabe que cualquier número al cuadrado es mayor o igual a cero por ello

$$(a - b)^2 \geq 0 \ \rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(a - c)^2 \geq 0 \ \rightarrow a^2 - 2ac + c^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + c^2 \geq 2ac$$

$$(b - c)^2 \geq 0 \ \rightarrow b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \rightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$$

Sumando las desigualdades adecuadas se obtiene

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2ac + 2bc$$

$$\rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

Ejercicios

1. Demostrar $: a^2 + b^2 = 1 \quad c^2 + d^2 = 1 \quad \rightarrow ac + bd \leq 1$
2. Demostrar $: (a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$ Siendo a, b, c números positivos todos distintos.

1.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. $(6x-2)\frac{5}{8}-\left(1-\frac{2x}{3}\right)\frac{7}{3}<4x+\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{12}\right)\frac{2}{3}$ $\quad Sol.\ \ x<\frac{17}{5}$

2. $\left(x-\frac{5}{2}\right)\frac{3}{2}+\frac{2x}{3}-\frac{4}{5}<\frac{x}{2}-(2x-1)\frac{5}{6}$

3. $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}>\frac{5x+1}{3}$

4. $\frac{2x+1}{5}-\frac{2x}{3}>1$

5. $\sqrt{\frac{5x+1}{2}}<\sqrt{9\,\frac{3(x+1)}{5}}$

6. $\frac{3x}{5}-\frac{7}{10}-\frac{x}{20}>\frac{1}{5}+\frac{7x}{20}$ $\quad Sol.\ x>9/2$

7. Un matrimonio dispone de 320 Bs. Para ir al cine con sus hijos. Si toman entradas de 50 Bs. Les falta dinero y si toman de 40 Bs, les sobra dinero. ¿Cuántos son los hijos?

8. Un comerciante adquirió un cierto número de especies de las que vendió 70 y le quedaron más de la mitad. Al día siguiente le devolvieron seis, pero logró vender 36, después de lo cual le quedan menos de 42. ¿Cuántas especies formaban el lote?

9. Hallar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

   a. $5(2x-3)+1+4(3x-5)\leq 3(x+10)+4(2x+8)+x$
   $Sol\!:\left(-\infty,\frac{48}{5}\right)$

   b. $\frac{x}{x-1}>0$ $\quad$ Sol: $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

c. $\frac{x+6}{3-x} < 0$ $(3, \infty) \cup (-\infty, -6)$

d. $\frac{x}{x-5} - 2 \geq 0$ $(5,10]$

e. $\frac{2x-1}{x+5} > 2\mathrm{R}$ $]-\infty, -5[$

f. $\frac{x-1}{x+5} > 2$ $]-11, -5[$

g. $\frac{1}{x-3} \leq 0$ $]-\infty, 3[$

h. $\frac{x-1}{x+1} \geq 0$ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

i. $\frac{x}{x-3} \leq \frac{x}{x+1}$ $(-\infty, -1) \cup [0.5)$

j. $\frac{x^2+2}{x+3} > x$ $(-3, (2/3))$

k. $\frac{x^2}{x-3} \geq x+1$ $(-\infty, -(3/2)] \cup (3, \infty)$

l. $\frac{x^2-4}{x+6} \geq 0$ $]-6, -2] \cup [2, +\infty[$

m. $\frac{(x+1)(x-7)}{(x-1)(x-6)(x+3)} > 0$ $(-3, -1) \cup (1, 6) \cup (7, \infty)$

n. $x^4 - 5x^2 + 4x > 0 \cdot$ $(-2, -1) \cup (0,1) \cup (2, \infty)$

o. $2log_c(x-2) < log_c(2x+3)$

$$(-\infty, -5) \cup \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

p. $\sqrt{x^2-3} \geq \sqrt{2x}$ $(3,\infty)$

q. $\sqrt{x^2-4x+3} < \sqrt{x^2-7x+12}$ $(-\infty,1)$

10. Resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto

a. $|2x-1| > 3$ $(-\infty,-1) \cup (2,\infty)$

b. $\left|3-\frac{x}{2}\right| \leq 2$ $[\,2\,,10\,]$

c. $\left|\frac{x}{5}-\frac{1}{2}\right| \geq 5$ $(-\infty,-(45/2)] \cup [(55)/2),\infty)$

d. $\left|1-\frac{x}{3}\right| < 1$ $]\,0\,,6\,[$

e. $\left|\frac{2x-1}{x+3}\right| \leq 1$ $[\,-2/3\,,4\,]$

11. Resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto

a. $|x|-|x+5| \leq 3$ $[-4,\infty)$

b. $|7x+2| < |5x-3|+|1-2x|$ $\emptyset$

c. $\left|\frac{x-4}{1-x}\right| + \left|\frac{x}{x+3}\right| \geq 1$

Nombre de archivo: CALCULO I RON.docx
Directorio: C:\Users\ROSALVA\Documents
Plantilla:
C:\Users\ROSALVA\AppData\Roaming\Microsoft\Templates\Normal
.dotm
Título:
Asunto:
Autor: jose
Palabras clave:
Comentarios:
Fecha de creación: 24/9/2020 20:59:00
Cambio número: 9
Guardado el: 9/2/2021 16:42:00
Guardado por: Agustin Arnez
Tiempo de edición: 57 minutos
Impreso el: 9/2/2021 16:44:00
Última impresión completa
Número de páginas: 225 (aprox.)
Número de palabras: 31,966 (aprox.)
Número de caracteres: 175,815 (aprox.)