

Escuela Militar de Ingeniería

"Mcal. Antonio José de Sucre"

U. A. Cochabamba



ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA

"Mcal. Antonio José de Sucre"

Prestigio, Disciplina y Mejores Oportunidades

GUÍA DE LABORATORIO DE FÍSICA I

Estudiante :

Código :

Docente :

Carrera :

Semestre :

Gestión 2020

Índice general

1. Mediciones en laboratorio	1
1.1. Introducción	1
1.1.1. Experimentación	1
1.2. Medidas directas	2
1.2.1. Medida única	2
1.2.2. Serie de mediciones	2
1.3. Medidas indirectas	3
1.3.1. Error sistemático:	3
1.3.2. Error aleatorio:	3
1.3.3. Cifras significativas	3
1.3.4. Redondeo:	4
1.4. Exactitud y precisión en las mediciones	5
1.5. Instrumentos de medición	5
1.5.1. Calibrador	5
1.5.2. Tornillo micrométrico	8
1.6. Ejercicios	10
2. Mediciones directas	11
2.1. Competencias	11
2.2. Fundamento teórico	11
2.2.1. Serie de mediciones	11
2.3. Materiales	13
2.4. Procedimiento experimental	14
2.4.1. Péndulo	14
2.4.2. Cilindro	14
2.4.3. Disco	15
2.4.4. Esfera	15
2.5. Resultados	16
2.6. Cuestionario	20
3. Mediciones indirectas y propagación de errores	21
3.1. Competencias	21
3.2. Fundamento teórico	21
3.2.1. Estimación del error de una medida indirecta	21
3.2.2. Proceso inverso: Conocido el valor del error en el resultado, determinar los errores de las variables de la función	23
3.3. Materiales	23

3.4. Procedimiento experimental	23
3.5. Resultados	24
3.5.1. Cilindro	24
3.5.2. Disco	25
3.5.3. Esfera	26
3.6. Cuestionario	27
4. Gráficos y ecuaciones	29
4.1. Competencias	29
4.2. Fundamento teórico	29
4.3. Escalas lineales y no lineales	29
4.3.1. Sugerencias para realizar gráficos	30
4.3.2. Relación lineal	30
4.4. Relación no lineal	32
4.5. Métodos de linealización	32
4.5.1. Cambio de variable	32
4.5.2. Linealización por logaritmos	35
4.5.3. Linealización por cambio de escala	36
4.6. Materiales	38
4.7. Procedimiento experimental	38
4.8. Resultados	39
4.8.1. Cilindro	39
4.8.2. Discos	40
4.8.3. Esferas	44
4.9. Cuestionario	49
5. Método de Mínimos Cuadrados	51
5.1. Competencias	51
5.2. Fundamento teórico	51
5.2.1. Coeficiente de correlación	53
5.3. Materiales	54
5.4. Procedimiento	54
5.5. Resultados	55
5.6. Cuestionario	58
6. Movimiento Rectilíneo Uniforme	59
6.1. Competencias	59
6.2. Fundamento teórico	59
6.3. Materiales	59
6.4. Procedimiento experimental, MRU	60
6.5. Resultados del MRU	60
6.6. Cuestionario	64
7. Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado	67
7.1. Competencias	67
7.2. Fundamento teórico	67
7.3. Materiales	68
7.3.1. Procedimiento experimental, MRUV	69

7.4. Resultados del MRUV	69
7.4.1. Análisis posición – tiempo	69
7.5. Cuestionario	74
8. Dinámica	77
8.1. Competencias	77
8.2. Fundamento teórico	77
8.3. Materiales	78
8.4. Procedimiento experimental, fuerza constante	78
8.5. Resultados, fuerza constante	79
8.6. Procedimiento experimental, fuerza variable	82
8.7. Resultados, fuerza variable	83
8.8. Cuestionario	85
9. Conservación de la energía mecánica	87
9.1. Competencias	87
9.2. Fundamento teórico	87
9.3. Materiales	88
9.4. Procedimiento experimental	89
9.5. Resultados	89
9.6. Cuestionario	91
Bibliografía	92
A. Cálculo de los errores de A y B	95
A.1. Error de A	95
A.2. Error de B	97
A.3. Coeficiente de correlación lineal	98
B. Vernier LabPro	101
B.1. Introducción	101
B.2. Preparar el LoggerPro para adquirir datos	103

Índice de tablas

2.1. Tiempo de diez oscilaciones del péndulo simple	16
2.2. Valor medio, error de la media aritmética y precisión	16
2.3. Resultados de las mediciones, para el tiempo de 10 oscilaciones	16
2.4. Medidas de la longitud y el diámetro del cilindro	17
2.5. Valores medios, errores de la media aritmética, presiciones y errores de las mediciones del cilindro	17
2.6. Resultados de la medición de la altura, el diámetro y la masa del cilindro	17
2.7. Medidas de la longitud y el diámetro del disco	18
2.8. Valores medios, errores de la media aritmética, presiciones y errores de las mediciones del disco	18
2.9. Resultados de la medición de la altura, el diámetro y la masa del disco	18
2.10. Medidas del diámetro de la esfera	19
2.11. Valor medio, error de la media aritmética, precisión y error de la medición de la esfera	19
2.12. Resultados de la medición del diámetro y la masa de la esfera	19
2.13. Valores representativos de las magnitudes física medidas	20
3.1. Resumen de las mediciones	27
4.1. Mediciones del tiempo y la velocidad	31
4.2. Posición y tiempo para el MRUV	33
4.3. Posición y tiempo al cuadrado	33
4.4. Mediciones de la presión y el volumen	34
4.5. Presión y el inverso del volumen	35
4.6. Logaritmos para la posición y el tiempo	36
4.7. Cilindros	38
4.8. Discos	38
4.9. Esferas	38
4.10. Valores de masa y la variable $z = D^2$	40
4.11. Logaritmos de la masa y el diámetro de los discos	42
4.12. Valores de masa y la variable $z = D^2$ para las esferas	44
4.13. Valores de masa y la variable $z = D^3$ para las esferas	45
4.14. Logaritmos de la masa y el diámetro de las esferas	47
4.15. Ecuaciones de los cilindros, discos y esferas	49
5.1. Tabla del Método de Mínimos Cuadrados	53
5.2. Cilindros	54
5.3. Discos	54
5.4. Esferas	54

5.5.	Ecuaciones de los cilindros, discos y esferas con los métodos gráficos y analíticos	58
6.1.	Tiempo y posición para el MRU	61
6.2.	Tiempo, posición y velocidad para el MRU	63
7.1.	Tiempos y posiciones para el MRUV	70
7.2.	Velocidad media para el MRUV	72
7.3.	Velocidad instantánea para los tiempos t'	73
8.1.	Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza constante	79
8.2.	Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza constante	80
8.3.	Valores de masa con sus aceleraciones	80
8.4.	Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza variable	83
8.5.	Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza variable	83
8.6.	Valores de aceleraciones y fuerzas	84
9.1.	Tiempo y posición para un MRUV	89
9.2.	Energías	90

Índice de figuras

1.1. Interrelación en el proceso de medición	1
1.2. Representación gráfica del error sistemático y error aleatorio	3
1.3. Instrumento de medición de longitud, calibrador	6
1.4. Ejemplo de lectura en un calibrador	6
1.5. Ejercicio 1 de medición con el calibrador	7
1.6. Ejercicio 2 de medición con el calibrador	7
1.7. Instrumento de medición de longitud, tornillo micrométrico	8
1.8. Lectura de medición con el tornillo micrométrico	8
1.9. Ejemplo 1 de medición con el tornillo micrométrico	9
1.10. Ejemplo 2 de medición con el tornillo micrométrico	9
2.1. Péndulo simple	14
2.2. Cilindro, disco y esfera	15
3.1. Paralelepípedo de dimensiones a , b y c	22
4.1. Determinación de los parámetros de una recta, método gráfico	30
4.2. Papel logaritmo - logaritmos	37
4.3. Masa en función de la altura para los cilindros	39
4.4. Masa en función del diámetro para los discos	40
4.5. Masa en función de la variable z	41
4.6. $\log(m)$ en función de $\log(D)$ para los discos	42
4.7. Masa en función del diámetro en papel doble logaritmo	43
4.8. Masa en función del diámetro de las esferas	44
4.9. Masa en función de la variable z para las esferas	45
4.10. Masa en función de la variable w para las esferas	46
4.11. $\log(m)$ en función de $\log(D)$ para las esferas	47
4.12. Masa en función del diámetro en papel doble logaritmo	48
5.1. Valores experimentales correspondientes a una relación lineal	51
6.1. Esquema del montaje para el MRU	60
6.2. Posición en función del tiempo para el MRU	61
6.3. Velocidad en función del tiempo para el MRU	63
7.1. Curva del teorema de valor medio de Lagrange	68
7.2. Esquema del montaje para el MRUV	69
7.3. Posición en función del tiempo para el MRUV	70
7.4. Velocidad media en función del tiempo para el MRUV	72

7.5. Velocidad instantánea en función del tiempo	73
8.1. Sistema de dos bloques unidas por una polea ideal	77
8.2. Esquema de montaje para la práctica de dinámica	79
8.3. Aceleración en función a la masa	81
8.4. Fuerza en función de la aceleración	84
9.1. Sistema de dos bloques	88
9.2. Energía cinética, potencial y mecánica en función de la altura	90
B.1. Interfaz LabPro	102
B.2. Ventana del software LabPro	104
B.3. Ventana de sensores conectados a la interfaz Lab Pro	105
B.4. Ventana de adquisición de datos, modo tiempo	105
B.5. Ventana de adquisición de datos, modo disparo	106

Capítulo 1

Mediciones en laboratorio

1.1. Introducción

1.1.1. Experimentación

La experimentación es el proceso controlado de efectuar un fenómeno. Generalmente la experiencia se realiza en un laboratorio para obtener información, interpretación y generar modelos que permitan cuantificar el fenómeno. La experimentación también es un instrumento para verificar la validez de los fenómenos ya establecidos. Entre los elementos básicos de la experimentación esta la medición de magnitudes físicas.

La Física es una ciencia por naturaleza experimental, por lo que existe la necesidad de realizar mediciones de diferentes magnitudes que intervienen en un fenómeno. Los factores que intervienen en la medición son: El experimentador, el sistema físico y la instrumentación, éstos tres están relacionados como se muestra en la Figura 1.1

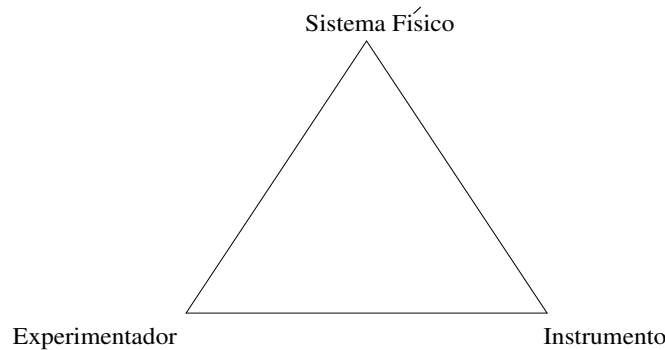


Figura 1.1: Interrelación en el proceso de medición

”Medir es comparar una magnitud física con un patrón o unidad de medida de igual naturaleza.”

El resultado de una medición se obtiene asignándole un número y una unidad a la magnitud, sin embargo el valor de la medición no es el verdadero, esto es debido a las imperfecciones del instrumento, las limitaciones propias de nuestros sentidos y la manera cómo se relacionan las variables. Por tanto, toda medición tiene una incertidumbre o error, y el resultado de la medición de una magnitud x se expresa

como:

$$x = (x_{rep} \pm e_x)[u], \quad (1.1)$$

donde:

x_{rep} es el valor representativo de la magnitud, obtenida por una medición directa o indirecta.

e_x es el error absoluto del valor representativo.

u es la unidad de medida.

La ecuación 1.1 indica que el valor verdadero de la medición, está entre los intervalos de $(x_{rep} - e_x) \leq x_v \leq (x_{rep} + e_x)$.

El error absoluto e_x , es la diferencia entre el valor representativo y el valor verdadero (que no se puede conocer).

$$e_x = x_{rep} - x_v. \quad (1.2)$$

El error de la medición también puede presentarse en forma relativa y porcentual:

$$E = \frac{e_x}{x_{rep}} \quad \text{Error relativo,} \quad (1.3)$$

$$E \% = \frac{e_x}{x_{rep}} \cdot 100 \% \quad \text{Error porcentual.} \quad (1.4)$$

A la ecuación 1.1, puede añadirse el error porcentual:

$$x = (x_{rep} \pm e_x)[u], E \% \quad (1.5)$$

Las mediciones en laboratorio se clasifican en; directas e indirectas:

1.2. Medidas directas

Son las que se obtienen por comparación entre el objeto a medir con la unidad de medida del instrumento, es decir el resultado de la medición se consigue directamente con el instrumento. Para estas mediciones, es válida la definición de: Medir una magnitud es determinar el número de veces que contiene una unidad de medida de igual naturaleza. Las medidas directas se clasifican en medida única y en una serie de mediciones.

1.2.1. Medida única

En estos tipos de mediciones, solo se realiza una lectura, y el error absoluto es igual a la precisión del instrumento (menor división), por ejemplo, si al realizar una medición de la intensidad de corriente, se encontró el valor de 0,64 A con un amperímetro de precisión de 0,01 A, entonces, la medida se expresará:

$$I = (0,64 \pm 0,01)[A]$$

1.2.2. Serie de mediciones

Es cuando se realiza varias mediciones a una misma magnitud física con el mismo instrumento de medición. El valor representativo y su error se determina a través de un proceso estadístico.

1.3. Medidas indirectas

Son las que no se pueden obtener por comparación directa con el instrumento de medición, para conseguir el resultado se utilizan expresiones matemáticas o fórmulas que relacionan magnitudes conseguidas por mediciones directas, por ejemplo determinar el volumen de un paralelepípedo.

Según las causas que producen los errores, ellos se clasifican en dos grupos; errores sistemáticos y errores aleatorios.

1.3.1. Error sistemático:

Se caracteriza porque la desviación del valor representativo respecto al valor verdadero es siempre la misma (Figura 1.2). En experimentos repetitivos de iguales condiciones, las desviaciones tienen las mismas magnitudes e iguales signos. Éstos errores son detectables, es decir es posible conocer su origen, y luego ser corregidos parcial o completamente. Los causantes de los errores sistemáticos son: Instrumentos mal calibrados o en mal estado, montaje experimental, y algunos ejemplos son: el retardo o adelanto de un reloj, una regla de madera que podría reducirse o que esté en mal estado, un tornillo micrométrico que puede tener mal ajuste de cero, etc. Por tanto, se recomienda ver a todos los instrumentos de medición con desconfianza y verificar su calibración siempre que sea posible.

1.3.2. Error aleatorio:

También conocido como error casual, accidental o estadístico, se caracteriza porque la desviación del valor representativo respecto al valor verdadero, cambia en magnitud y signo (Figura 1.2) de forma aleatoria de unas medidas a otras, son difíciles de controlar y de corregir. Estos errores son tratados estadísticamente, y para minimizarlos se aumenta el tamaño de la muestra.

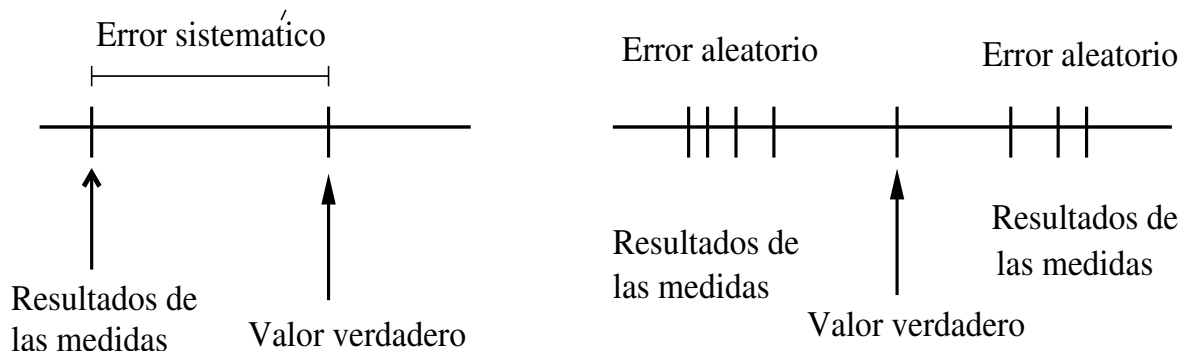


Figura 1.2: Representación gráfica del error sistemático y error aleatorio

1.3.3. Cifras significativas

Son aquellos que tienen un valor práctico con respecto a la precisión del instrumento utilizado en la medición. El número de cifras significativas incluyen todos los dígitos seguros y el primer dígito inseguro.

El dígito más significativo es el dígito distinto de 0 que está más a la izquierda del número, los 0 a la izquierda de este dígito más significativo no se consideran significativos.

Ejemplo 1

Una medida que se exprese como:

$$x = (0,638 \pm 0,002)[mm]$$

El orden del error es de dos milésimas de milímetro, salvo el 8, todas las cifras son seguras, el 8 está sujeto a un error estimado en dos unidades de su orden (milésimos) y es dudoso, por tanto las cifras significativas son 3.

Ejemplo 2

Otra medida que se exprese como:

$$x = (0,0530 \pm 0,0003)[g],$$

el orden del error es de tres diez milésima de gramo, salvo el 0 de la izquierda el 5 y el 3 son cifras seguras y el numero de cifras significativas es 3, siendo el cero de la derecha el dígito inseguro.

Si un objeto es pesado hasta los décimos de miligramo, el valor se registra correctamente expresando hasta la cuarta cifra decimal, por ejemplo: 9,8740 [g] sería incorrecto dar el valor de 9,874 [g], porque esto indicaría que la medición se realizó con un instrumento hasta el miligramo. En cambio, si la pesada se efectúa en una balanza sensible al 0,01 [g], sería incorrecto expresar 9,874 [g], porque el 7 ya es cifra dudosa y por tanto sería la última. En resumen los ceros finales nunca deben omitirse cuando son cifras significativas, ni incluirse cuando no lo son.

Los ceros que únicamente señalan el lugar decimal de la primera cifra distinta de cero, no se consideran cifras significativas, por ejemplo: la cantidad 0,0042 tiene dos cifras significativas, el 4 y el 2.

Con respecto a la no inclusión de ceros cuando no son cifras significativas, veamos otros ejemplos: En 4200, los ceros pueden ser o no, si son cifras significativas, se expresa tal como está, si no lo son debe expresarse como $4,2 \times 10^3$. Es decir se expresan las cifras significativas que son 4 y 2; y luego la potencia de 10 que corresponda.

Los ceros que quedan entre dos cifras significativas cualesquiera, se consideran como significativas. Por ejemplo 0,2033 y 200,3 tienen cuatro cifras significativas.

Cuando se realizan operaciones aritméticas con cantidades de distinto número de cifras significativas, el resultado tendrá tantas cifras significativas como el de menor número de cifras significativas, excepto para el caso de la suma o diferencia

1.3.4. Redondeo:

Después de realizar operaciones aritméticas, aparecen cifras no son significativas, por ello se debe *redondear* para una mejor exactitud, conservando solo el número de cifras significativas originalmente, y tratando las cifras excedentes como una fracción decimal, las reglas de redondeo son las siguientes:

- Si el número después del dígito inseguro es mayor que 0,5, se incrementa la última cifra significativa en una unidad.
- Si el número después del dígito inseguro es menor que 0,5 no se incrementa.
- Si el número después del dígito inseguro es igual a 0,5, incrementar la última cifra significativa solamente si esta es impar.

Ejemplo 1

Por ejemplo, si 474,32701 es el valor obtenido en un proceso de medición y el número de cifras significativas es 5 (474,32), debemos redondear el valor al dígito inseguro, que en este caso es 2, para ello se observa que el valor de la cifra de orden inferior (en este caso las milésimas) es mayor que 5, la última cifra significativa se incrementa en una unidad, en este caso el 2 se cambia por un 3 y el resultado se expresa por 474,33.

Ejemplo 2

El valor de -231,34 con 4 cifras significativas hay que redondearla a las décimas, que en este caso es 3. Para ello, si la cifra de orden inferior (en este caso las centésimas) es menor que 5, la última cifra significativa no se cambia y el resultado se expresaría por -231.3. Esta regla es de sentido común.

Ejemplo 3

Se el resultado de una medición:

$$x = (1,985 \pm 0,06)[mm],$$

habría que redondearlo a las centésimas, sin embargo la cifra de menor orden (milésimas) es igual a 5, como se explicó anteriormente, la última cifra significativa se deja igual si es par y se incrementa en una unidad si es impar. En este caso, como es un 8, se deja igual, entonces el valor representativo es 1,98.

Ejemplo 4

El resultado -45,155 con 4 cifras significativas se expresaría por -45,16.

1.4. Exactitud y precisión en las mediciones

El término de precisión se utiliza para describir la reproducibilidad de los resultados experimentales. Se puede definir como el nivel de similaridad entre los valores numéricos de varias mediciones de la misma propiedad, realizado bajo las mismas condiciones experimentales.

La exactitud denota la cercanía de un resultado experimental al valor que se acepta como correcto para dicho resultado, y se expresa en términos del error.

1.5. Instrumentos de medición

1.5.1. Calibrador

En la Figura 1.3 se muestra un calibrador, también conocido como Vernier o pie de rey, es un instrumento para medición de longitudes, estos instrumentos tienen precisiones de $\frac{1}{50}$ mm, $\frac{1}{20}$ mm, etc.

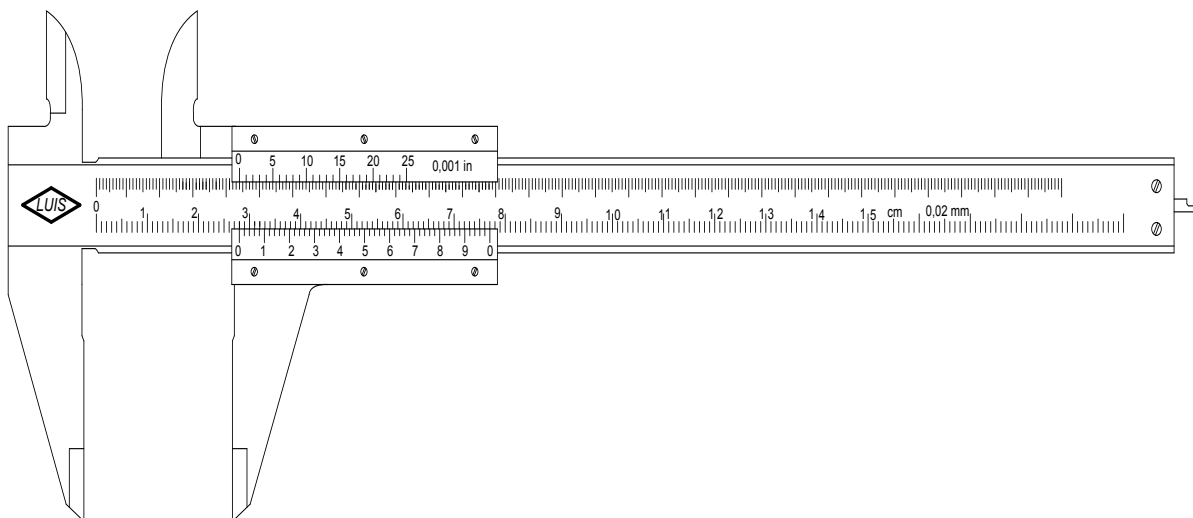


Figura 1.3: Instrumento de medición de longitud, calibrador

En la Figura 1.4 se muestra un ejemplo de lectura con el calibrador

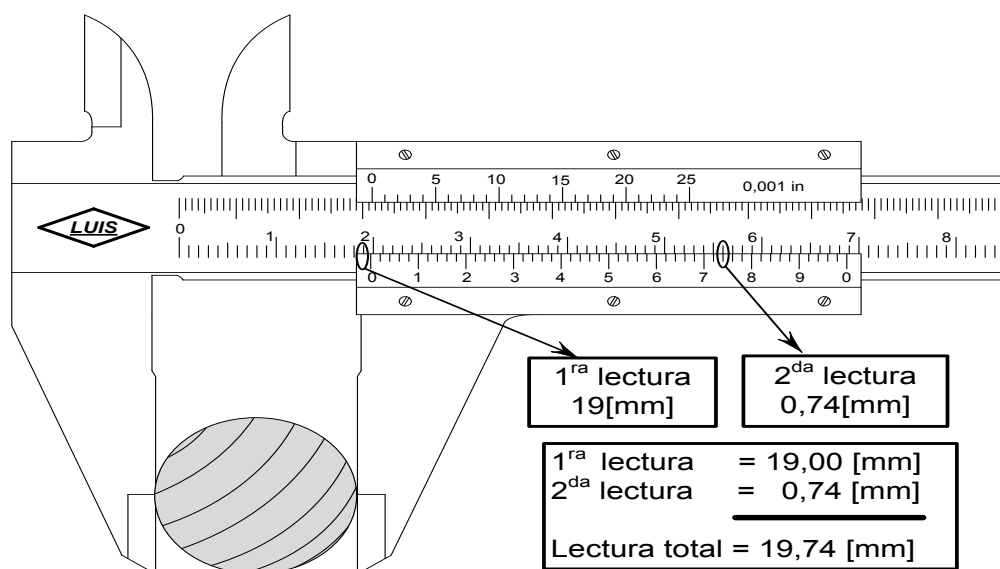


Figura 1.4: Ejemplo de lectura en un calibrador

Ejercicio 1

Observar cuidadosamente la Figura 1.5, y en el cuadro correspondiente, escribir el resultado de la medición:

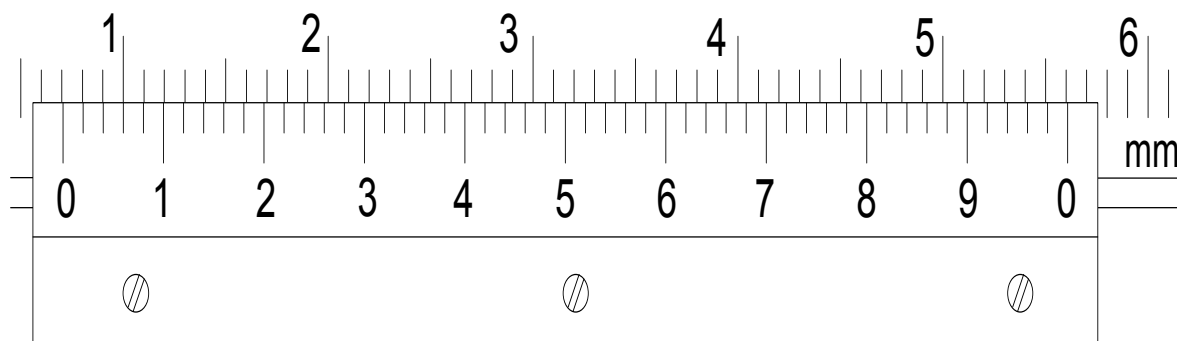


Figura 1.5: Ejercicio 1 de medición con el calibrador

La medición de la Figura 1.5 es:

Ejercicio 2

Observar cuidadosamente la Figura 1.6, y en el cuadro correspondiente, escribir el resultado de la medición:

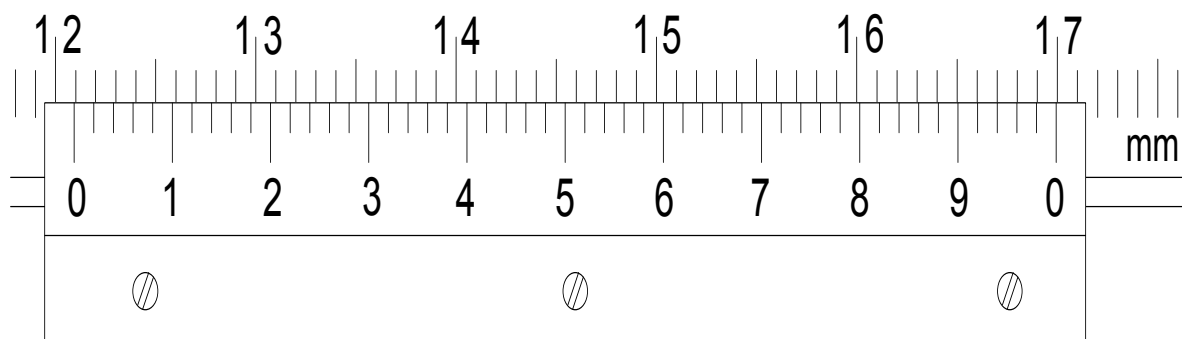


Figura 1.6: Ejercicio 2 de medición con el calibrador

La medición de la Figura 1.6 es:

1.5.2. Tornillo micrométrico

En la Figura 1.7 se muestra un tornillo micrométrico, se observa que su mango es de forma cilíndrica, y su funcionamiento es como un tornillo o rosca, éstos instrumentos permiten realizar mediciones de longitud con alta precisión, por ejemplo de $1/100$ mm.

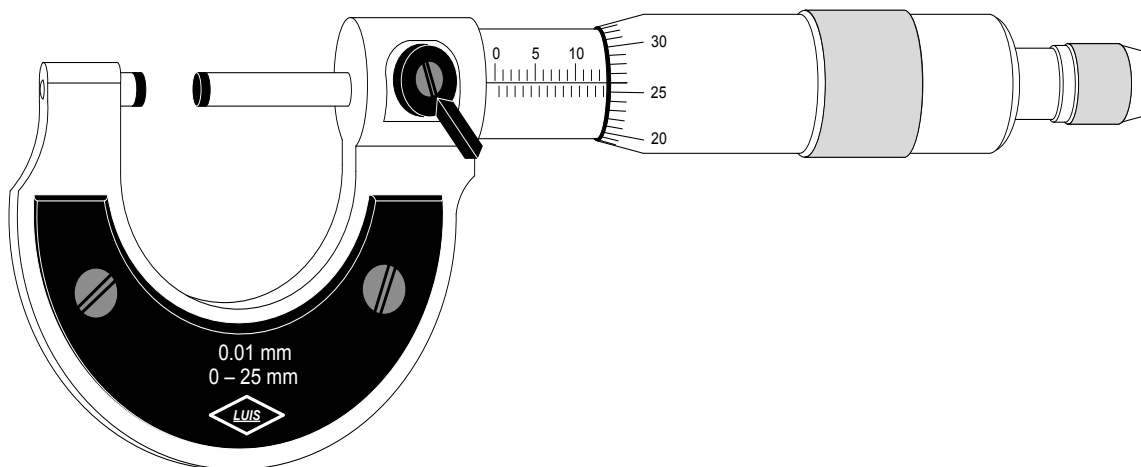


Figura 1.7: Instrumento de medición de longitud, tornillo micrométrico

En la Figura 1.8 se muestra un ejemplo de lectura con el tornillo micrométrico

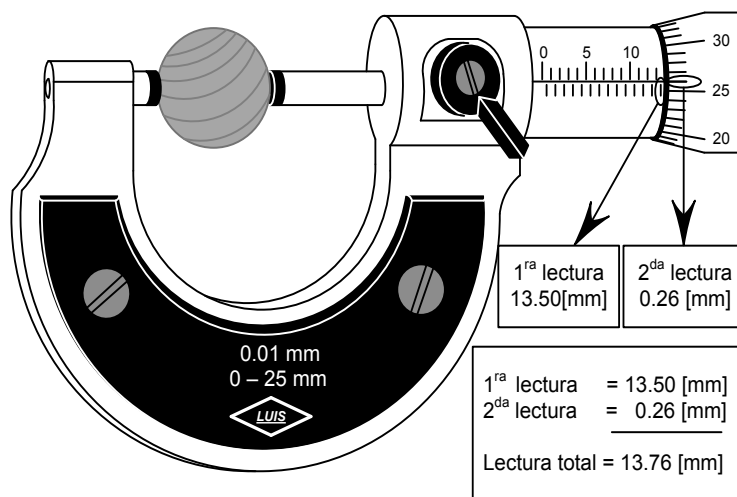


Figura 1.8: Lectura de medición con el tornillo micrométrico

Ejercicio 1

Observar cuidadosamente la Figura 1.9, y en el cuadro correspondiente, escribir el resultado de la medición:

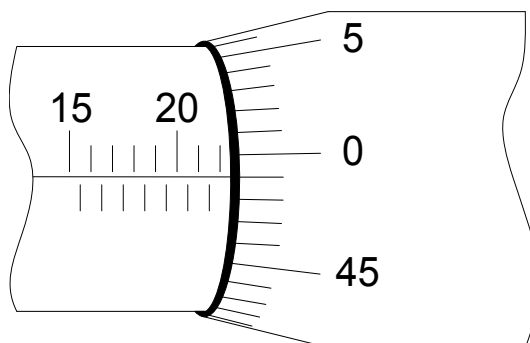


Figura 1.9: Ejemplo 1 de medición con el tornillo micrométrico

La medición de la Figura 1.9 es:

Ejercicio 1

Observar cuidadosamente la Figura 1.10, y en el cuadro correspondiente, escribir el resultado de la medición:

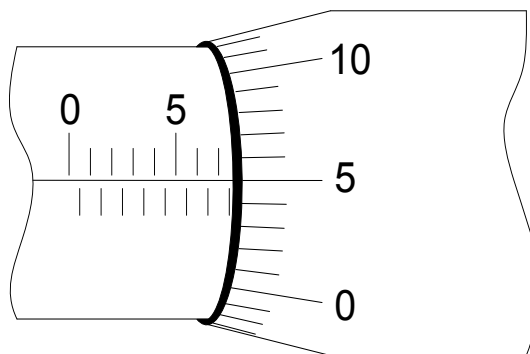


Figura 1.10: Ejemplo 2 de medición con el tornillo micrométrico

La medición de la Figura 1.10 es:

1.6. Ejercicios

Expresar el resultado de las siguientes mediciones:

1. Con el uso de una regla graduada en [mm], fue medida la longitud de una barra $L = 86,5$ cm.
2. Si en la anterior medida es posible apreciar la mitad de la mínima división de la regla.
3. La altura de un cono recto mide $6,77$ [cm], medido con un calibrador cuya precisión es: a) $\frac{1}{100}$ cm y b) $\frac{1}{40}$ mm.
4. Un péndulo simple realiza 25 oscilaciones en un tiempo de $0,799$ min, medido con un cronómetro digital de error porcentual del 0.75% .
5. Con un balanza, cuya mínima división representa $0,001$ g fue medida la masa de un cubo, obteniéndose $m = 678,026$ g, expresar en: a) [kg] b) [g] c) [cg].
6. El diámetro de un cilindro es aproximadamente $20,65$ cm, medido con un tornillo micrométrico de precisión $\frac{1}{200}$ mm.
7. Con una balanza graduada a centígramos, se determino la masa de un objeto, siendo la lectura aproximadamente $35,6 \times 10^{-3}$ kg.
8. La medida aproximada del diámetro de un cilindro es de $4,5 \times 10^{-2}$ [m], para tal medición se ha utilizado un vernier de precisión 1×10^{-1} [mm].
9. Un manómetro con variación de escala 0 a 100 kg/cm², dividida en intervalos de 1 kg/cm². Si la posición de la aguja puede determinarse hasta la mitad del intervalo más cercano.
10. ¿Cuál sería la incertidumbre asociada con el manómetro cuando se emplea esta escala?.
11. Si la aguja llegara a colocarse en medio camino entre las divisiones 25 y 26 kg/cm², ¿qué lectura de presión tendrá que registrarse, si la incertidumbre en la medición debe limitarse a la última cifra significativa?.

Capítulo 2

Mediciones directas

2.1. Competencias

- Medir diferentes magnitudes físicas: una medición y una serie de mediciones.
- Escribir los resultados de las mediciones

2.2. Fundamento teórico

Las mediciones directas son aquellos valores que se consiguen directamente con la escala de un instrumento. Se pueden realizar una sola medición o una serie de mediciones.

2.2.1. Serie de mediciones

Si se realizan n mediciones directas de una magnitud física, denotadas por:

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots x_i, \dots x_n\}, \quad (2.1)$$

las preguntas a responder para esta serie de medición son:

- 1.- ¿Cómo determinar el valor representativo?
- 2.- ¿Cómo determinar el error de la medición?

Para la primera pregunta: Si la serie de mediciones responde a un comportamiento gaussiano, entonces el valor representativo o más probable es la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (2.2)$$

Para la segunda pregunta recurrimos a herramientas estadísticas, que a continuación se describen: Conocido el valor de la media aritmética, la discrepancia o desviación de cada uno de los valores medidos con respecto a la media aritmética es:

$$d_i = x_i - \bar{x}, \quad (2.3)$$

lo que significa que existirá tantas discrepancias como lecturas o medidas realizadas. El promedio de los

cuadrados de las discrepancias se conoce como varianza s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i^2, \quad (2.4)$$

y la raíz cuadrada de la varianza se llama desviación estándar, o desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{s^2}. \quad (2.5)$$

La ecuación 2.5 es válida para un número grande de datos, sin embargo en laboratorio el número de datos o mediciones realizadas es pequeña, es decir solo se consigue una muestra $n \leq 20$, para este caso la desviación estándar de la muestra es:

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{(n-1)}}. \quad (2.6)$$

El error de la media aritmética o error mediano de la media aritmética, es igual a la desviación estándar dividida por la raíz cuadrada del número de mediciones.

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}. \quad (2.7)$$

El valor σ_x puede representar el error de la medición, por tanto σ_x se interpreta como límite inferior $(\bar{x} - \sigma_x)$, y límite superior $(\bar{x} + \sigma_x)$, y es dentro de este intervalo que el valor verdadero puede encontrarse con una determinada probabilidad:

$$(\bar{x} - \sigma_x) \leq x_v \leq (\bar{x} + \sigma_x). \quad (2.8)$$

Este intervalo puede ampliarse o reducirse multiplicando σ_x por algún factor, por ejemplo: 1/2, 2/3; 1, 2, etc. Estos intervalos se denominan *intervalos de confianza*, y al porcentaje de certidumbre para que el valor verdadero se encuentre en este intervalo se denomina porcentaje de confianza. Para el caso de la media aritmética (curva gaussiana) el factor es la unidad, y le corresponde un porcentaje de confianza de 68,3% de que el valor verdadero se encuentre dentro del intervalo y de un 31,7% de que no se encuentre dentro de ella.

Para escribir el error e_x de la medición en una serie de mediciones, es recomendable colocar el mayor entre el error de la media aritmética y la precisión del instrumento de medida:

$$e_x = \begin{cases} \sigma_x, & \text{si } \sigma_x > P; \\ P, & \text{si } \sigma_x < P. \end{cases}$$

Finalmente, el resultado de la serie de mediciones será:

$$x = (\bar{x} \pm e_x)[u], E\%. \quad (2.9)$$

Nota: Las calculadoras científicas tienen incorporadas funciones estadísticas, que permiten encontrar los valores de la media aritmética, desviación estándar, etc.

Ejemplos

1. Se realizaron mediciones de un determinado tiempo t cuatro veces, con un cronómetro que permite conocer hasta las décimas de segundo. Los resultados fueron: {6,3; 6,2; 6,4 y 6,2} [s]. De acuerdo a

lo explicado, el valor representativo es el valor de la media aritmética:

$$\bar{t} = \frac{6,3 + 6,2 + 6,4 + 6,2}{4} = 6,275[s], \quad (2.10)$$

el error de la media aritmética es:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{(6,3 - 6,275)^2 + (6,2 - 6,275)^2 + (6,4 - 6,275)^2 + (6,2 - 6,275)^2}{4(4 - 1)}} = 0,04787. \quad (2.11)$$

El error se expresa con una sola cifra significativa $\sigma_t = 0,05$ [s], pero éste valor es menor que la precisión del instrumento 0.1 [s]. Por tanto, se debe elegir éste último como error de la medida, y redondear el valor de la media aritmética, entonces el resultado de la medición es:

$$t = (6,3 \pm 0,1)[s], 1,6 \%. \quad (2.12)$$

2. Se dispone de una serie de datos de tiempos de: 5,5; 5,7; 6,2; 6,5 [s]. Con ayuda de una calculadora, se encuentra que el valor de la media aritmética es 5,975 s, asimismo su error que es de 0,2286737. Para este caso, el error de la media aritmética es mayor que la precisión del instrumento, por lo que se debe elegir éste como el error de la medida, por tanto el resultado es:

$$t = (6,0 \pm 0,2)[s], 3,3 \%. \quad (2.13)$$

2.3. Materiales

- Seis cilindros de diferentes longitudes
- Seis discos con diferentes diámetros
- Seis esferas con diferentes diámetros
- Calibradores con precisión de 0.002 cm o 0.005 cm
- Tornillos micrométricos con precisión de 0.001 cm
- Balanza con precisión de 0.01 g
- Cronómetros con precisión de 0.01 s
- Péndulos
- Reglas milimétricas

2.4. Procedimiento experimental

2.4.1. Péndulo

1. Armar el equipo como se muestra en la Figura 2.1. Si es necesario, nivelar el equipo
2. Fijar una longitud para el péndulo y medir esa longitud
3. En la Tabla 2.1 registrar los valores del tiempo de diez oscilaciones para un ángulo menor o igual a diez grados
4. Con las ecuaciones 2.6 y 2.7 calcular el error de la media aritmética, para esto a manera de practicar manualmente el cálculo del error, completar las discrepancias de la Tabla 2.1
5. En la Tabla 2.2 escribir los resultados de los cálculos, donde \bar{t} es el valor medio, σ_t es el error de la media aritmética, P es la precisión del instrumento y e_t es el error de la medición. Finalmente en la Tabla 2.3 escribir los resultados de la medición de la longitud (medida directa única) y el tiempo de 10 oscilaciones.

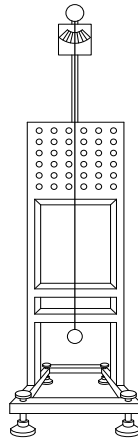


Figura 2.1: Péndulo simple

Cada grupo debe elegir tres objetos; un cilindro, un disco y una esfera y medir las magnitudes físicas que se observan en la Figura 2.2 (seguir las instrucciones del docente).

2.4.2. Cilindro

1. Con el *calibrador*, medir seis veces la altura H del cilindro, y con el *tornillo micrométrico* medir seis veces su diámetro D (completar la Tabla 2.4)
2. Con la balanza medir una sola vez la masa m del cilindro
3. A partir de la Tabla 2.4, determinar los valores representativos, los errores y escribir el resultado de la medición para cada una de ellas

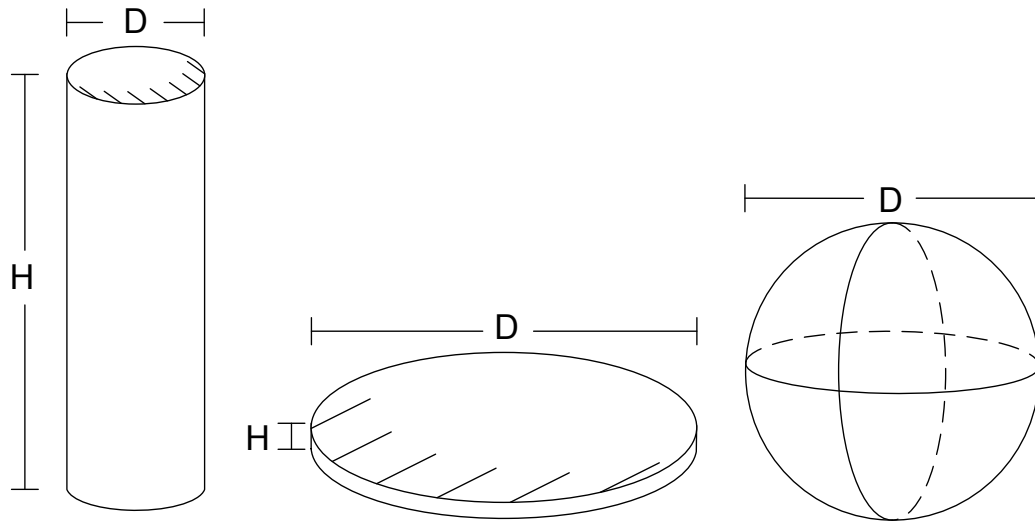


Figura 2.2: Cilindro, disco y esfera

2.4.3. Disco

1. Con el *calibrador*, medir seis veces el diámetro D del disco, y con el *tornillo micrométrico* medir seis veces su altura H (completar la Tabla 2.7)
2. Con la balanza medir una sola vez la masa m del disco
3. A partir de la Tabla 2.7, determinar los valores representativos, los errores y escribir el resultado de la medición para cada una de ellas

2.4.4. Esfera

1. Con el *tornillo micrométrico* medir seis veces el diámetro D de la esfera (completar la Tabla 2.10)
2. Con la balanza medir una sola vez la masa m de la esfera
3. A partir de la Tabla 2.10, determinar los valores representativos, los errores y escribir el resultado de la medición para cada una de ellas.

2.5. Resultados

Péndulo

n	t [s]	d_i [s]	d_i^2 [s ²]
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
			$\sum d_i^2 =$

Tabla 2.1: Tiempo de diez oscilaciones del péndulo simple

Tiempo
$\bar{t} =$
$\sigma_t =$
P =
$e_t =$

Tabla 2.2: Valor medio, error de la media aritmética y precisión

Resultados de la medición
L =
t =

Tabla 2.3: Resultados de las mediciones, para el tiempo de 10 oscilaciones

Cilindro

En la Tabla 2.4 escribir las mediciones de la altura H y el diámetro D del cilindro.

n	L [cm]	D [cm]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 2.4: Medidas de la longitud y el diámetro del cilindro

Longitud	Diámetro
$\overline{L} =$	$\overline{D} =$
$\sigma_l =$	$\sigma_D =$
P =	P =
$e_l =$	$e_D =$

Tabla 2.5: Valores medios, errores de la media aritmética, presiciones y errores de las mediciones del cilindro

Resultados de la medición
L =
D =
m =

Tabla 2.6: Resultados de la medición de la altura, el diámetro y la masa del cilindro

Disco

En la Tabla 2.7 escribir las mediciones de la altura y el diámetro del disco.

n	H [cm]	D [cm]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 2.7: Medidas de la longitud y el diámetro del disco

Longitud	Diámetro
$\overline{H} =$	$\overline{D} =$
$\sigma_H =$	$\sigma_D =$
P =	P =
$e_H =$	$e_D =$

Tabla 2.8: Valores medios, errores de la media aritmética, presiciones y errores de las mediciones del disco

Resultados de la medición
H =
D =
m =

Tabla 2.9: Resultados de la medición de la altura, el diámetro y la masa del disco

Esfera

En la Tabla 2.10 escribir las mediciones del diámetro de la esfera.

n	D [cm]
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Tabla 2.10: Medidas del diámetro de la esfera

Diámetro
$\overline{D} =$
$\sigma_D =$
P =
$e_D =$

Tabla 2.11: Valor medio, error de la media aritmética, precisión y error de la medición de la esfera

Resultados de la medición
D =
m =

Tabla 2.12: Resultados de la medición del diámetro y la masa de la esfera

En la Tabla 2.13 escribir los valores representativos de las magnitudes físicas de la altura, diámetro y masa de los objetos utilizados en la práctica.

Objeto	H [cm]	D [cm]	m [g]
Cilindro			
Disco			
Esfera			

Tabla 2.13: Valores representativos de las magnitudes física medidas

2.6. Cuestionario

1. ¿Qué es la precisión de un instrumento?
2. ¿Qué errores sistemáticos detectó en el proceso de medición?
3. ¿Qué criterio utilizó para estimar el error de una medida única?
4. ¿Qué criterio utilizó para estimar el error de una serie de medidas?
5. En una serie de medidas, ¿para qué tipo de distribución el valor representativo está dado por la media aritmética?
6. ¿Qué mide el parámetro σ_{n-1} ?
7. ¿Qué mide el parámetro σ_x ?

Capítulo 3

Mediciones indirectas y propagación de errores

3.1. Competencias

- Ejercitar al alumno en el campo de las mediciones indirectas y su correcta comunicación de resultados

3.2. Fundamento teórico

Las mediciones indirectas son mediciones donde no es posible obtener su valor directamente con el instrumento de medición. Para determinar el valor de la medición es necesario una función matemática (ecuación matemática) que relaciona una o más magnitudes, éstas magnitudes son generalmente obtenidos por mediciones directas.

Para determinar el error de las mediciones indirectas, se utiliza el método de propagación de errores, es decir la propagación o efecto que producen los errores de las mediciones directas al error de la función. La propagación de errores está fundamentada en el cálculo diferencial.

3.2.1. Estimación del error de una medida indirecta

Consideremos una función de n variables

$$f = f(x, y, z, \dots), \quad (3.1)$$

donde x, y, z , etc. son los resultados de mediciones directas, ellas son conocidas como variables independientes:

$$x = (x_{rep} \pm e_x)[u], \quad (3.2)$$

$$y = (y_{rep} \pm e_y)[u], \quad (3.3)$$

$$z = (z_{rep} \pm e_z)[u]. \quad (3.4)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad (3.5)$$

La propagación de errores permite estimar el error de f conocidos los errores de las variables independientes, y como se dijo anteriormente, está fundamentada en el cálculo diferencial:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \dots \quad (3.6)$$

La estimación del error de la función f podría realizarse por distintos criterios, por ejemplo asumir que el error en f es la suma de los errores de cada variable independiente. Otro criterio podría ser el criterio de Pitágoras¹.

Si en la ecuación 3.6 se utiliza $e_x = dx$, asimismo para las otras variables, y $df = e_f$, entonces es el error de la función con el criterio de Pitágoras es:

$$e_f = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 + \dots}, \quad (3.7)$$

donde Δx , Δy , Δz , \dots se conocen como las contribuciones de las variables independientes al error de la función:

$$\begin{aligned} \Delta x &= \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| e_x, \\ \Delta y &= \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| e_y, \\ \Delta z &= \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| e_z, \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad, \end{aligned} \quad (3.8)$$

finalmente, el resultado de la medición indirecta es:

$$f = (f_{rep} \pm e_f)[u], E\%, \quad (3.9)$$

Ejemplo, cálculo del volumen de un paralelepípedo

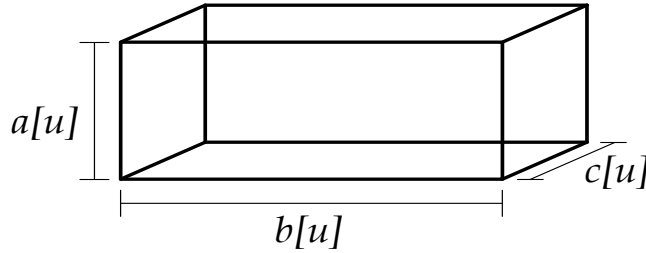


Figura 3.1: Paralelepípedo de dimensiones a , b y c

done a , b , c son resultados de mediciones directas:

$$\begin{aligned} a &= (a \pm e_a)[u], \\ b &= (b \pm e_b)[u], \\ c &= (c \pm e_c)[u]. \end{aligned}$$

¹Generalmente se utiliza este criterio cuando se tiene una serie de mediciones

El volumen para el paralelepípedo de la Figura 3.1 es:

$$V = abc \text{ [} u^3 \text{]},$$

y las contribuciones son:

$$\Delta a = \left| \frac{\partial V}{\partial a} \right| e_a = (bc)e_a, \quad \Delta b = \left| \frac{\partial V}{\partial b} \right| e_b = (ac)e_b, \quad \Delta c = \left| \frac{\partial V}{\partial c} \right| e_c = (ab)e_c,$$

entonces el resultado de la medición indirecta es:

$$V = (V \pm e_f)[u^3]; E \%$$

3.2.2. Proceso inverso: Conocido el valor del error en el resultado, determinar los errores de las variables de la función

Si se conoce el error de la función e_f o su error porcentual $E \%$. ¿Cuáles deben ser los valores de los errores e_x, e_y, e_z , para que combinados las contribuciones no excedan el error determinado de la función?. Existe un infinito número de soluciones posibles, sin embargo la solución más práctica es asumir que cada nuevo componente puede producir un igual efecto en el resultado final, es decir:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = \dots, \quad (3.10)$$

por lo que, la ecuación 3.7 se reduce a:

$$e_f = \sqrt{N \Delta x^2}, \quad (3.11)$$

despejando se obtiene:

$$\Delta x = \frac{e_f}{\sqrt{N}}, \quad (3.12)$$

donde N es el número de variables de la función f

3.3. Materiales

En esta práctica no se realizan mediciones. Sin embargo es necesario una calculadora científica como herramienta de trabajo

3.4. Procedimiento experimental

1. Copiar los resultados de las mediciones (valor representativo, su error y su unidad) de la práctica 1, es decir valores de: diámetros, alturas y masas del cilindro, disco y esfera utilizados.
2. Realizar las medidas indirectas del volumen y la densidad para el cilindro, disco y esfera.
3. Comunicar correctamente los resultados de las mediciones indirectas.

3.5. Resultados

3.5.1. Cilindro

Datos

$H =$

$D =$

$m =$

Cálculo del volumen y su error:

$$V = \frac{\pi D^2 H}{4}$$

Cálculo de la densidad y su error:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Resultado de la medición del volumen

$V =$

Resultado de la medición de la densidad

$\rho =$

3.5.2. Disco

Datos

$H =$

$D =$

$m =$

Cálculo del volumen y su error:

$$V = \frac{\pi D^2 H}{4}$$

Cálculo de la densidad y su error:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Resultado de la medición del volumen

$V =$

Resultado de la medición de la densidad

$\rho =$

3.5.3. Esfera

Datos

$D =$

$m =$

Cálculo del volumen y su error:

$$V = \frac{\pi D^3}{6}$$

Cálculo de la densidad y su error:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Resultado de la medición del volumen

$V =$

Resultado de la medición de la densidad

$\rho =$

En la Tabla 5.5 escribir los valores representativos de las diferentes magnitudes medidas:

Objeto	H [cm]	D [cm]	m [g]	V [cm ³]	ρ [g/cm ³]
Cilindro					
Disco					
Esfera					

Tabla 3.1: Resumen de las mediciones

3.6. Cuestionario

1. ¿Qué criterio utilizó para obtener el error del volumen y de la densidad a partir de las contribuciones de los errores involucrados en cada una de ellas?
2. En la estimación del error del volumen de un cilindro se tiene la contribución del error de su longitud y del error de su diámetro, ¿Cuál de ellos contribuye más al error del volumen?
3. A partir del resultado de la pregunta 2, la longitud o el diámetro debería medirse con mayor precisión?
4. En la estimación del error del volumen de un disco se tiene la contribución del error de su espesor (altura H) y de su diámetro, ¿Cuál de ellos contribuye mas al error del volumen?
5. A partir del resultado de la pregunta 4, el espesor o el diámetro debería medirse con mayor precisión?
6. En la estimación del error de la densidad se tiene la contribución del error del volumen y de la masa, ¿Cuál de ellos contribuye más al error de la densidad?
7. A partir del resultado de la pregunta 6, la masa o el volumen debería medirse con mayor precisión?
8. De la tabla resumen obtenga el valor medio (media aritmética) de la densidad de los cilindros, discos, y esferas. Compare estos valores medios de la densidad con valores publicados en la literatura y diga aproximadamente de que material están hechos.
9. ¿La diferencia entre el valor estándar de g (980 [cm/s²]) y el valor que se consiguió, se debe a un error grande en el proceso de medición o a factores naturales que modifican el valor de g ?

Capítulo 4

Gráficos y ecuaciones

4.1. Competencias

- Desarrollar la destreza en graficar datos experimentales
- Obtener ecuaciones de ajuste de curvas lineales y no lineales
- Interpretar parámetros de la curva y la obtención de las ecuaciones de las curvas de ajustes por el método gráfico.

4.2. Fundamento teórico

En física experimental generalmente se trabaja con dos variables; independiente (que se puede controlar o variar libremente) y dependiente (que cambia a consecuencia del cambio de la variable independiente). En el sistema cartesiano, la variable independiente se localiza en el eje de la abscisa o eje x , y la variable dependiente se localiza en el eje de la ordenada o eje y .

Un gráfico es una adecuada representación visual de los datos experimentales, para ello se debe identificar correctamente las variables, asimismo definir las escalas adecuadas para la buena elaboración de la gráfica en un sistema cartesiano.

Una gráfica puede describirse a través de una ecuación y es conocida como relación funcional entre las variables, esta relación puede representar una ley física o una relación que permite obtener medidas indirectas.

Los gráficos tienen tres aplicaciones principales:

- Sirven de ayuda visual. Una representación de los datos en un gráfico muestra más claramente las variaciones que se presentan de forma tabular.
- Se usan para determinar el valor de alguna magnitud, por lo general la pendiente, o la intersección de una línea recta con el eje de las ordenadas.
- Facilita la obtención de la ecuación empírica o relación entre las variables y, la interpolación y extrapolación de datos.

4.3. Escalas lineales y no lineales

Las escalas lineales son aquellas en las que distancias iguales representan cantidades iguales. Las escalas no lineales son aquellas que se construyen en base a un patrón de comportamiento que hace que distancias iguales no representan cantidades iguales, por ejemplo las escalas logarítmicas.

El papel milimetrado utiliza escalas lineales en ambos ejes, el papel semilogarítmico tiene uno de sus ejes con escala lineal y el otro con escala logarítmica y el papel logaritmo-logaritmo o doble logaritmo tiene en ambos ejes escala logarítmica.

4.3.1. Sugerencias para realizar gráficos

Con el propósito de dar una mejor interpretación visual de los datos experimentales, se debe construir una gráfica de la forma más clara posible, algunas sugerencias para graficar en papel milimetrado son:

- Los puntos experimentales no deben estar muy juntos. Se debe seleccionar una escala para que los puntos ocupen razonablemente el espacio que dispone para el gráfico.
- La escala debe ser sencilla, por ejemplo un centímetro del papel representa una unidad (0.1, 10, 100, etc.) de la magnitud medida.
- Los ejes deben estar claramente identificados con las magnitudes y sus respectivas unidades.

Al representar los datos en un papel milimetrado se obtiene una “nube de puntos” por los cuales se debe trazar la curva de ajuste que mejor los represente, esta curva puede ser lineal o no lineal. Se denomina relación lineal a la serie de datos que son representados por una recta y relación no lineal a los datos cuya representación es una curva no lineal, por ejemplo una parábola, hipérbola, etc. Las ecuaciones matemáticas que representan las relaciones entre las variables en general se denominan relaciones funcionales, y se pueden determinar a través de métodos gráficos o métodos analíticos.

4.3.2. Relación lineal

En una tendencia lineal, la recta de ajuste debe ser trazada de manera que pase por la mayoría de los puntos. La curva de ajuste se traza a simple vista.

El modelo matemático para un comportamiento lineal es la ecuación de la recta y la forma general es:

$$y = A + Bx, \quad (4.1)$$

donde el parámetro A es la ordenada al origen y representa el valor del eje y cuando $x = 0$, su valor se lee en el punto de intersección de la recta con el eje de ordenadas (Figura 4.1). El parámetro B es la

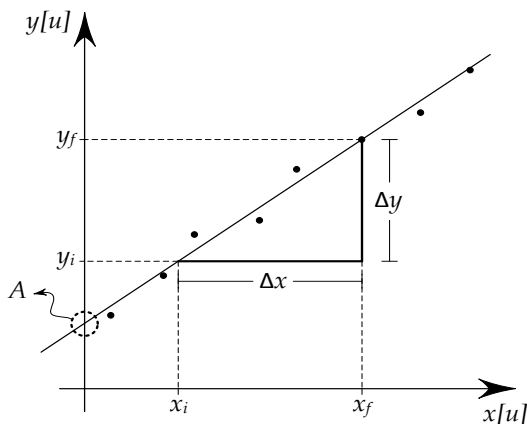


Figura 4.1: Determinación de los parámetros de una recta, método gráfico

pendiente de la recta, se calcula mediante el cociente:

$$B = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (4.2)$$

donde $\Delta y = y_f - y_i$ y $\Delta x = x_f - x_i$, es decir para calcular B se debe conocer dos puntos cualesquiera que están sobre la recta.

La Tabla 4.1 es un registro de datos experimentales de la velocidad y del tiempo de un cuerpo en caída libre, $v = f(t)$. Representando los datos en un papel milimetrado como en la Figura 4.2, se observa una tendencia lineal y la recta se ha trazado según el criterio de ajuste a simple vista. Para escribir la ecuación de la recta es necesario determinar los parámetros A y B.

n	t [s]	v [m/s]
1	0,0	15,0
2	1,1	27,0
3	2,0	33,0
4	3,0	44,4
5	4,0	55,0
6	5,0	66,0

Tabla 4.1: Mediciones del tiempo y la velocidad

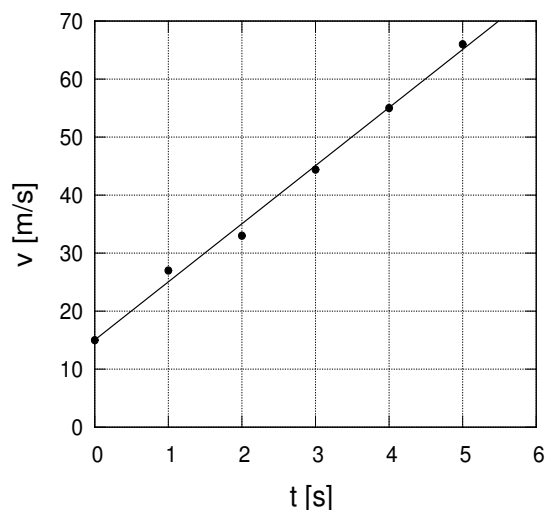


Figura 4.2: Velocidad en función del tiempo

En la Figura 4.2 se puede observar que el gráfico no presenta una relación lineal perfecta, porque los puntos están dispersos alrededor de la recta, esto significa que no toda la variación de la velocidad puede ser explicada por la variación del tiempo. Si entre estas variables existiera una relación lineal perfecta, entonces todos los puntos caerían a lo largo de la recta de regresión que ha sido trazada. En la práctica se observa que la mayoría de los puntos no caen directamente sobre la recta, sino que están “dispersos” en torno a ella, esta dispersión representa la variación en y que no puede atribuirse a la variación en x .

La ecuación de ajuste para la recta de la Figura 4.2 es:

$$v = A + Bt,$$

y a partir del gráfico de la Figura 4.2 se determinan los parámetros de la recta:

$$A = 15,$$

la pendiente es

$$B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{44,4 - 15,0}{3,0 - 0,0} = 9,66 \approx 9,7$$

entonces la ecuación de la recta es:

$$v = 15,0 + 9,7t$$

4.4. Relación no lineal

Las relaciones no lineales más frecuentes y sus modelos matemático son:

Relación no lineal	Modelo matemático
Relación potencial simple	$y = ax^b$
Relación exponencial directa	$y = ae^{bx}$

Entre las relaciones potenciales simples, las más conocidas son:

Curva	Valor de b	Modelo matemático
Parábola	$b = 2$	$y = ax^2$
Hipérbola	$b = -1$	$y = ax^{-1}$
Cúbica	$b = 3$	$y = ax^3$
Recta	$b = 1$	$y = ax$

Si en la representación de los datos experimentales en coordenadas rectangulares no se obtienen tendencias lineales, entonces no es posible encontrar directamente del gráfico la ecuación de la relación no lineal. Por tanto se busca un método para linealizar, y luego encontrar los parámetros de la curva linealizada y a partir de sus valores determinar la ecuación de la curva original, o la relación funcional con las variables originales.

4.5. Métodos de linealización

Algunos métodos de linealización para las relaciones no lineales son:

- Cambio de variable
- Logaritmos
- Cambio de escala, papel semilogarítmico o papel log-log

4.5.1. Cambio de variable

Este método consiste en asumir un modelo para el comportamiento de los datos, es decir estimar o adivinar el valor del parámetro b de la relación no lineal, seguidamente realizar el cambio de variable. Si el valor de b es el adecuado, la nueva gráfica será lineal, caso contrario la gráfica no será lineal. La experiencia y el buen sentido son las únicas armas para identificar a las curvas originales, que podrían ser; potenciales (parábolas, hipérbolas, etc.) o exponenciales.

Ejemplo 1: Caso parábola

La Tabla 4.2 son datos de posición y tiempo de un objeto en caída libre. La Figura 4.3 muestra su representación gráfica en un papel milimetrado, la experiencia permite estimar que el comportamiento de los datos sigue la ecuación de una parábola, entonces asumiremos el modelo de $x = at^2$

n	t [s]	x [m]
1	0,0	0,0
2	0,5	1,2
3	1,0	4,9
4	1,5	11,0
5	2,0	19,6
6	2,5	30,6
7	3,0	44,0
8	3,5	60,0
9	4,0	78,4
10	4,5	99,2
11	5,0	122,5

Tabla 4.2: Posición y tiempo para el MRUV

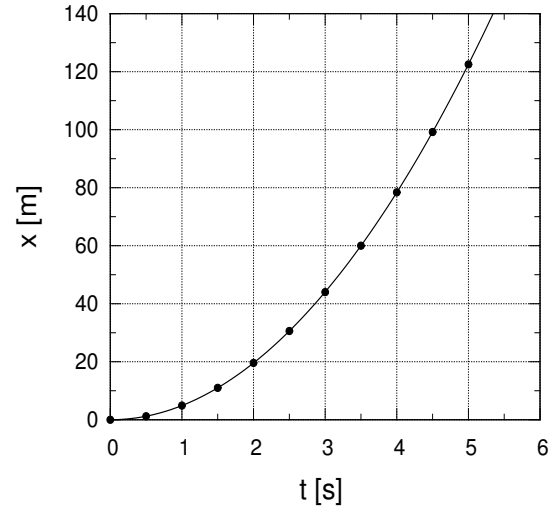


Figura 4.3: Posición en función del tiempo para el MRUV

Para determinar la relación funcional entre el tiempo y la posición, es necesario encontrar el valor del parámetro a que no es posible directamente, para ello recurrimos a la linealización aplicando el cambio de variable de $z = t^2$. Con esta nueva variable se construye una nueva tabla (Tabla 4.3), luego, si se representa gráficamente las variables z y x , se obtiene una recta (Figura 4.4), esto significa que el modelo asumido ha sido el adecuado.

n	$z = t^2$	x [m]
1	0,0	0,0
2	0,25	1,2
3	1,0	4,9
4	2,25	11,0
5	4,0	19,6
6	6,25	30,6
7	9,0	44,0
8	12,25	60,0
9	16,0	78,4
10	20,25	99,2
11	25,0	122,5

Tabla 4.3: Posición y tiempo al cuadrado

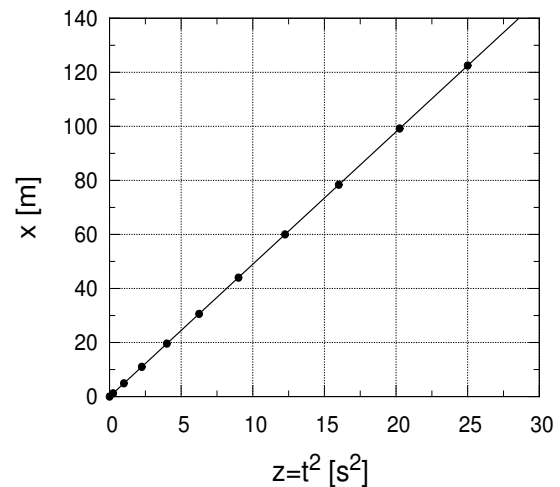


Figura 4.4: Posición en función de la variable z

El modelo matemático para Figura 4.4 es la ecuación de una recta:

$$x = A + Bz,$$

A partir de la Figura 4.4, se observa que $A = 0$, y para calcular la pendiente se consideran dos puntos que están sobre la recta:

$$B = \frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{x_2 - x_1}{z_2 - z_1} = \frac{78,4 - 30,6}{16,0 - 6,25} = 4,9,$$

la pendiente B es igual al parámetro a del modelo asumido, entonces la ecuación de la curva original será:

$$x = 4,9t^2$$

Ejemplo 2: Caso de la hipérbola rectangular

La Tabla 4.4 corresponde a datos de presión y volumen de una cierta masa de gas a temperatura constante, y en la Figura 4.5 se los representa gráficamente. Observando detenidamente, la curva podría tratarse de una hipérbola equilátera cuya ecuación es:

$$P = \frac{a}{V} \quad (4.3)$$

n	$V \text{ [m}^3\text{]}$	$P \text{ [N/m}^2\text{]}$
1	0,75	1,20
2	0,66	1,33
3	0,50	1,77
4	0,33	2,73
5	0,25	3,56

Tabla 4.4: Mediciones de la presión y el volumen

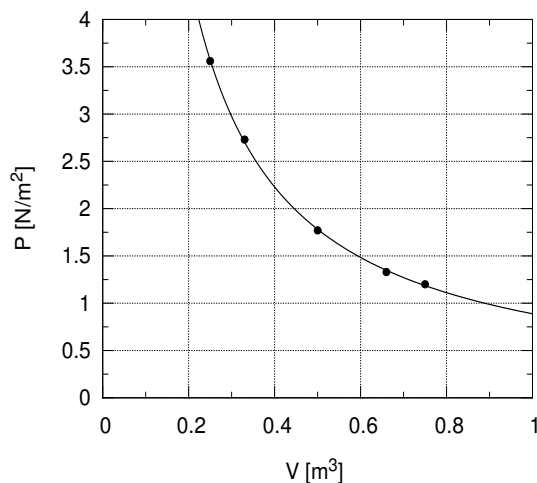


Figura 4.5: Presión en función del volumen

Para determinar la relación funcional de la ecuación 4.3, es necesario conocer el valor de a , que no es posible directamente, para ello recurrimos a la linealización con el cambio de variable de $z = \frac{1}{V}$. Con la nueva variable, se elabora una nueva Tabla (Tabla 4.5). Representando gráficamente la nueva Tabla, se observa que la gráfica tiene un comportamiento lineal (Figura 4.6), esto significa que el modelo asumido ha sido el adecuado.

Por tanto, la ecuación de ajuste o modelo matemático es:

$$P = A + Bz,$$

Con ayuda del gráfico de la Figura 4.6, se consigue que $A = 0$, y la pendiente es:

$$B = \frac{\Delta P}{\Delta z} = \frac{3,65 - 1,77}{4,0 - 2,0} = 0,9$$

n	$Z [V^{-1}]$	$P [N/m^3]$
1	1,33	1,20
2	1,52	1,33
3	2,0	1,77
4	3,03	2,73
5	4,0	3,56

Tabla 4.5: Presión y el inverso del volumen

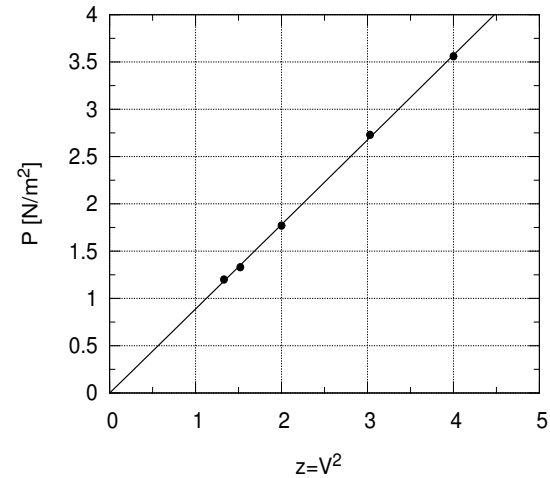


Figura 4.6: Presión en función de la variable z

entonces la ecuación es:

$$P = 0,9z.$$

Sustituyendo la variable Z por $1/V$, podemos escribir la ecuación original:

$$P = \frac{0,9}{V}$$

4.5.2. Linealización por logaritmos

La ecuación de una potencial simple es:

$$y = ax^b, \quad (4.4)$$

El método para linealizar esta función consiste en aplicar logaritmos a ambos miembros de la ecuación, y aplicando las propiedades de logaritmos, la ecuación 4.4 tiene la forma de:

$$\log(y) = \log(a) + b \log(x). \quad (4.5)$$

La ecuación 4.5 representa la ecuación de una recta con las nuevas variables de $\log(x)$ y $\log(y)$, escribiendo de otra forma, se tiene:

$$y' = A + Bx',$$

donde

$$\begin{aligned} y' &= \log(y), & x' &= \log(x), \\ A &= \log(a), & B &= b, \end{aligned}$$

Determinación de los parámetros

Para explicar la forma de encontrar los parámetros de una potencial simple, consideremos la Tabla 4.2 que corresponde a una relación no lineal. Para linealizar se elabora una nueva Tabla (Tabla 4.6) calculando los logaritmos de los datos de la Tabla 4.2 (sin considerar el primer par de datos).

En la Figura 4.7 se representa gráficamente $\log(x)$ en función de $\log(t)$, si la gráfica es lineal, entonces los parámetros A y B representan la intersección con el eje de la ordenada y la pendiente respectivamente,

n	$\log(t)$	$\log(x)$
1	-0,30	0,09
2	0,0	0,69
3	0,18	1,04
4	0,30	1,29
5	0,40	1,49
6	0,48	1,64
7	0,54	1,78
8	0,60	1,89
9	0,65	2,0
10	0,70	2,09

Tabla 4.6: Logaritmos para la posición y el tiempo

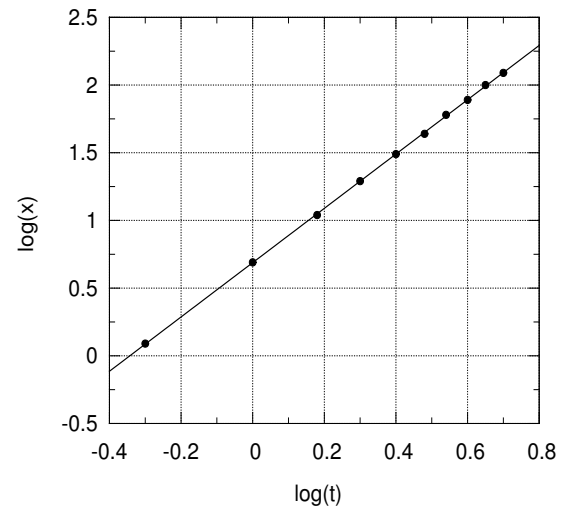


Figura 4.7: Curva para el MRUV con logaritmos

y se pueden encontrar a partir de la Figura 4.7.

Para escribir la ecuación de la curva original, determinamos los valores de a y b mediante las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} a &= 10^A \\ b &= B, \end{aligned}$$

de la Figura 4.7 se puede estimar el valor de $A = 0,69$, y el valor de la pendiente:

$$B = \frac{\Delta \log(x)}{\Delta \log(t)} = \frac{\log(x_2) - \log(x_1)}{\log(t_2) - \log(t_1)} = \frac{1,84 - 1,04}{0,6 - 0,18} = 2,02,$$

entonces, la ecuación la recta es:

$$\ln(x) = 0,69 + 2,02 \ln(t).$$

A partir de los parámetros de la recta A y B , calculamos los parámetros a y b de la curva original:

$$\begin{aligned} a &= 10^A = e^{0,69} = 4,9 \\ b &= B = 2,02 \approx 2, \end{aligned}$$

finalmente la relación funcional entre la posición y el tiempo es:

$$x = 4,9t^2$$

4.5.3. Linealización por cambio de escala

En este método se utiliza un papel doble logaritmo, es decir eje de abscisas y el eje de ordenadas con escalas logarítmicas, en este papel se considera la ecuación:

$$\log(y) = \log(a) + B \log(x),$$

para $x = 1$, la ecuación se reduce a:

$$\log(y) = \log(a),$$

lo que significa que $a = y$, como los valores de y se han representado en el eje vertical, el valor de a se obtiene directamente de la gráfica buscando la ordenada y correspondiente a la abscisa $x = 1$.

El valor de b se obtiene formando un triángulo con dos puntos que están sobre la recta (puntos separados) y con la siguiente operación:

$$b = \frac{\frac{l_y}{L_y}}{\frac{l_x}{L_x}},$$

donde l_y y l_x son las longitudes de los catetos del triángulo formado por los dos puntos escogidos, y L_y y L_x son las longitudes de los ciclos vertical y horizontal, donde para el papel logarítmico son iguales, entonces la expresión anterior se reduce a:

$$b = \frac{l_y}{l_x}.$$

A continuación se muestra la forma de obtener los parámetros a y b en un papel doble logaritmo:

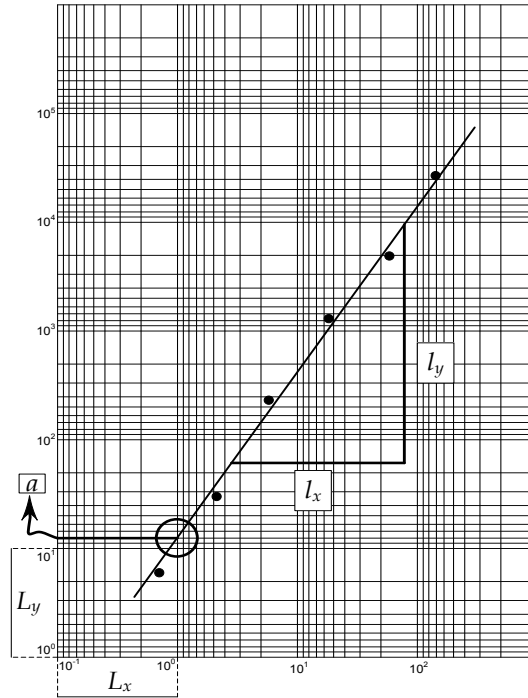


Figura 4.2: Papel logaritmo - logaritmos

donde l_x , l_y , L_x y L_y se miden con una regla, y el parámetro a se determina directamente del gráfico

4.6. Materiales

En esta práctica no se realizan mediciones, sin embargo las herramientas para elaborar el informe son:

- Papel milimetrado
- Papel doble logaritmo (log - log)
- Regla graduada

4.7. Procedimiento experimental

1. Completar las Tablas 4.7, 4.8 y 4.9 con los resultados (solo valores representativos) de los diferentes grupos
2. Representar gráficamente todas las Tablas del paso anterior, donde las masas están en los ejes de las ordenadas
3. Determinar los parámetros de la curva de ajuste de las Tablas 4.7, 4.8 y 4.9, donde se debe aplicar los diferentes métodos de linealización si corresponden
4. Escribir las ecuaciones de ajuste para cada gráfica

n	H [cm]	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.7: Cilindros

n	D [cm]	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.8: Discos

n	D [cm]	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.9: Esferas

4.8. Resultados

4.8.1. Cilindro

En la Figura 4.3 graficar los datos de la Tabla 4.7; masa en función de la altura

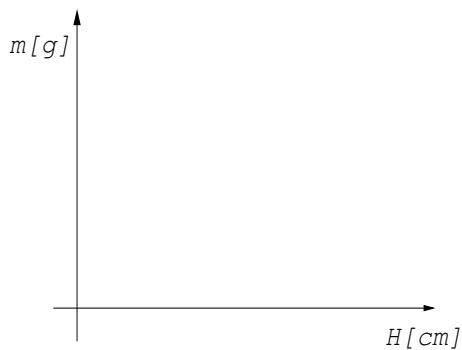


Figura 4.3: Masa en función de la altura para los cilindros

Según la curva de la Figura 4.3, el modelo de ajuste es:

A partir de la Figura 4.3, determinar los parámetros de la curva de ajuste:

Con los valores de los parámetros encontrados, escribir la relación funcional entre la masa y la altura

Despreciando el valor de A , la ecuación de ajuste es:

4.8.2. Discos

En la Figura 4.3 graficar los datos de la Tabla 4.8; masa en función del diámetro

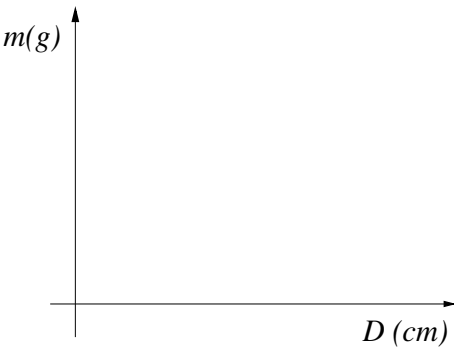


Figura 4.4: Masa en función del diámetro para los discos

Según la curva de ajuste de la Figura 4.4, el modelo de ajuste es:

Linealización por el método de cambio de variable

Asumiendo que la curva de la Figura 4.4 es una parábola $b = 2$, entonces el cambio de variable será $z = D^2$. Con este cambio completar la Tabla 4.10.

n	$z[cm^2]$	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.10: Valores de masa y la variable $z = D^2$

En la Figura 4.5 graficar la masa m en función de la nueva variable z .

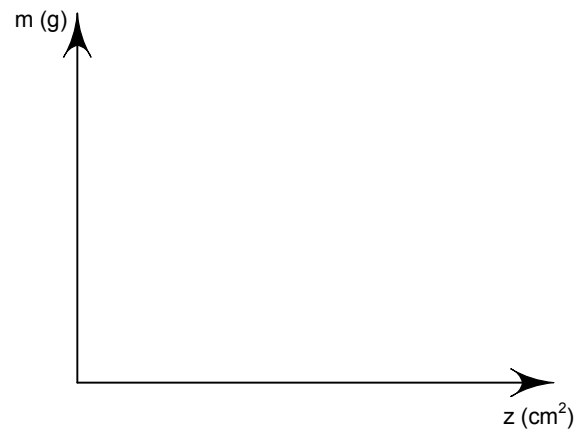


Figura 4.5: Masa en función de la variable z

La Figura 4.5, sugiere como modelo de ajuste:

A partir de la Figura 4.5, determinar los parámetros del modelo de ajuste:

Con los valores de los parámetros, escribir la relación funcional entre la masa y la variable z

Despreciando el valor de A , la ecuación con la variable original es:

Linealización por el método de logaritmos

A partir de la Tabla 4.8, completar la Tabla 4.11.

n	$x \log(D)$	$y = \log(m)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.11: Logaritmos de la masa y el diámetro de los discos

En la Figura 4.6 graficar los datos de la Tabla 4.11.

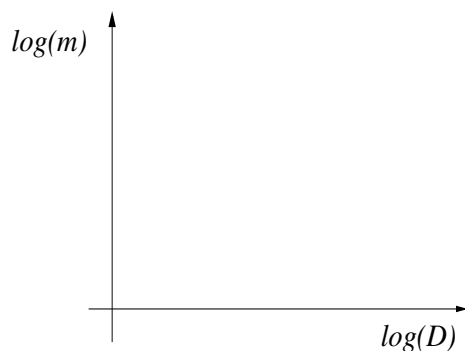


Figura 4.6: $\log(m)$ en función de $\log(D)$ para los discos

A partir de la Figura 4.6, determinar los parámetros A y B de la recta, y con ellas determinar los parámetros a y b del modelo potencial:

Finalmente, la relación funcional entre la masa y el diámetro para los discos es:

linealización por cambio de escala, papel log - log

En la Figura 4.7 graficar en un papel logaritmo - logaritmo los datos de la Tabla 4.8.

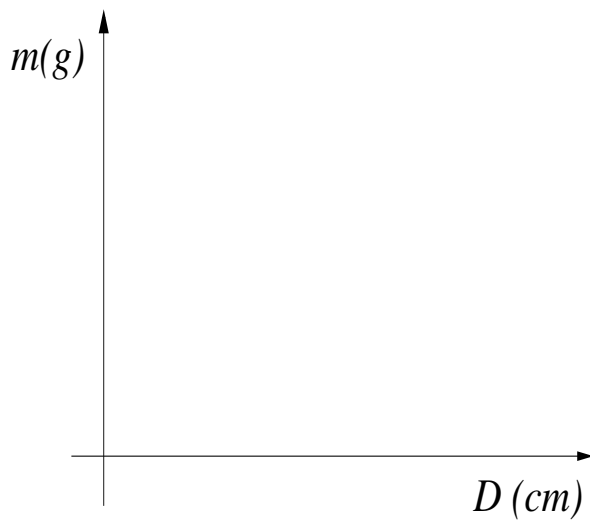


Figura 4.7: Masa en función del diámetro en papel doble logaritmo

A partir de la Figura 4.7, determinar los parámetros de ajuste a y b del modelo no lineal

Con los parámetros encontrados, la relación funcional $m = m(D)$ para los discos es:

4.8.3. Esferas

En la Figura 4.8 graficar los datos de la Tabla 4.9; masa en función del diámetro.

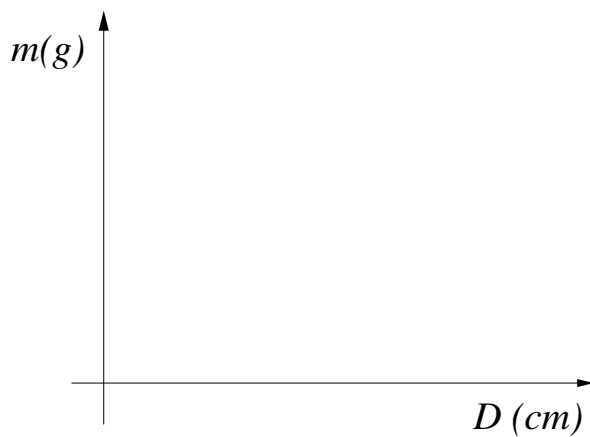


Figura 4.8: Masa en función del diámetro de las esferas

Según la curva de la Figura 4.8, el modelo de ajuste es:

Linealización por el método de cambio de variable

Asumiendo que la curva tiene una potencia de $b = 2$, entonces el cambio de variable es $z = D^2$. Con este cambio completar la Tabla 4.12.

n	$z[cm^2]$	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.12: Valores de masa y la variable $z = D^2$ para las esferas

En la Figura 4.9 graficar la masa m en función de la nueva variable z :

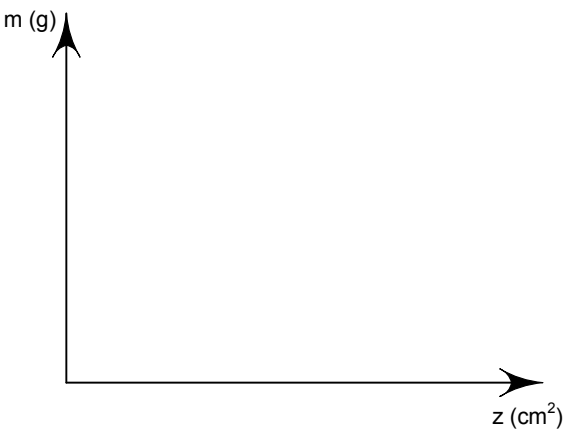


Figura 4.9: Masa en función de la variable z para las esferas

De acuerdo a la Figura 4.9, ¿Por qué $b = 2$, no es el modelo adecuado?, justificar la respuesta:

Si ahora se asume $b = 3$, el cambio de variable será $w = D^3$. Con este cambio, completar la Tabla 4.13

n	$w[cm^3]$	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.13: Valores de masa y la variable $z = D^3$ para las esferas

En la Figura 4.10 graficar los datos de la Tabla 4.13; masa m en función de la nueva variable w .

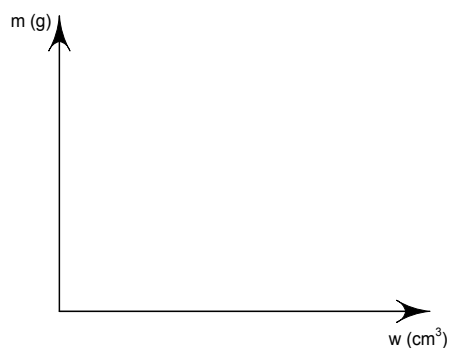


Figura 4.10: Masa en función de la variable w para las esferas

Según la Figura 4.10, ¿por qué $b = 3$, es el modelo adecuado?, justificar la respuesta.

La Figura 4.10, sugiere como modelo de ajuste:

A partir de la Figura 4.10 determinar los parámetros de la curva de ajuste

Entonces la ecuación $m = m(w)$, con los valores de los parámetro es:

Despreciando el valor de A , y retornando a la variable original, la relación funcional entre la masa y el diámetro es:

Linealización por el método de logaritmos, esferas

A partir de la Tabla 4.9, completar la Tabla 4.14.

n	$x = \log(D)$	$y = \log(m)$
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 4.14: Logaritmos de la masa y el diámetro de las esferas

En la Figura 4.11 graficar los valores de la Tabla 4.14.

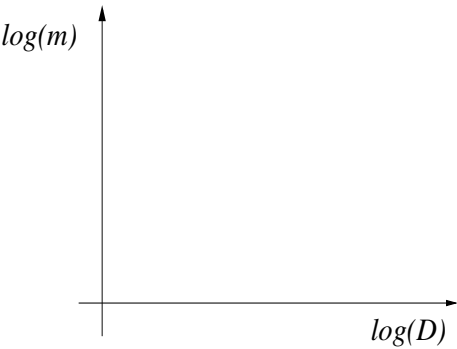


Figura 4.11: $\log(m)$ en función de $\log(D)$ para las esferas

A partir de la Figura 4.11, determinar los parámetros A y B de la recta, y con ellas determinar los parámetros a y b del modelo potencial:

Finalmente, la relación funcional entre la masa y el diámetro para las esferas es:

Linealización por el método de cambio de escala

En la Figura 4.12 graficar en un papel logaritmo - logaritmo los datos de la Tabla 4.9.

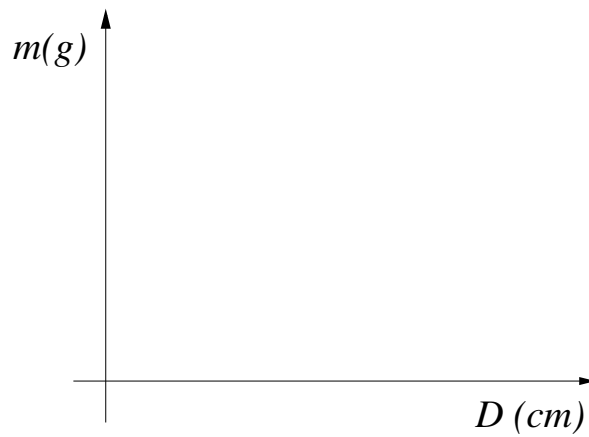


Figura 4.12: Masa en función del diámetro en papel doble logaritmo

A partir de la Figura 4.12, determinar los parámetros de ajuste a y b del modelo no lineal

Con los parámetros encontrados, la relación funcional $m = m(D)$ del modelo no lineal para las esferas es:

Resumen

En la Tabla 4.15 escribir las ecuaciones encontradas para los cilindros, discos y esferas con los diferentes métodos:

Objeto \ Método	Cambio de variable	Logaritmo	Papel log log
Cilindro			
Discos			
Esferas			

Tabla 4.15: Ecuaciones de los cilindros, discos y esferas

4.9. Cuestionario

1. Cuando en una gráfica no lineal el cambio de variable para linealizar es adecuado ¿qué tipo es la gráfica que se obtiene?
2. ¿Qué tipos de modelos podría usted señalar, para las distintas gráficas?
3. Indique brevemente como se determina los parámetros A y B en el método por logaritmización cuando se usa papel milimetrado, y cómo se determinan los parámetros a y b .
4. Indique brevemente como se determina los parámetros A y B en el método por logaritmización cuando se usa papel log-log, y como se determinan los parámetros a y b .
5. Los resultados que se obtienen por los diferentes métodos gráficos que se muestran en la Tabla 4.15 presenta diferencias ¿podría indicar a que se deben esas diferencias?
6. Indicar brevemente como se construye una escala logarítmica
7. ¿Cuál será la masa aproximada para un cilindro de longitud 10 cm, para un disco de diámetro de 8 cm y para una esfera de diámetro 2 cm? (utilizar las ecuaciones de ajuste)
8. ¿Cuál es el significado físico de los parámetros A y B en la ecuación de los cilindros?
9. ¿Cuál es el significado físico del coeficiente a en los modelos no lineales de los discos y esferas?

Capítulo 5

Método de Mínimos Cuadrados

5.1. Competencias

- Determinar relaciones funcionales a partir de datos experimentales utilizando el Método de Mínimos Cuadrados

5.2. Fundamento teórico

El Método de Mínimos Cuadrados es un método analítico que permite obtener la ecuación de la *mejor recta* a partir de los pares ordenados (x, y) , es decir de los datos experimentales.

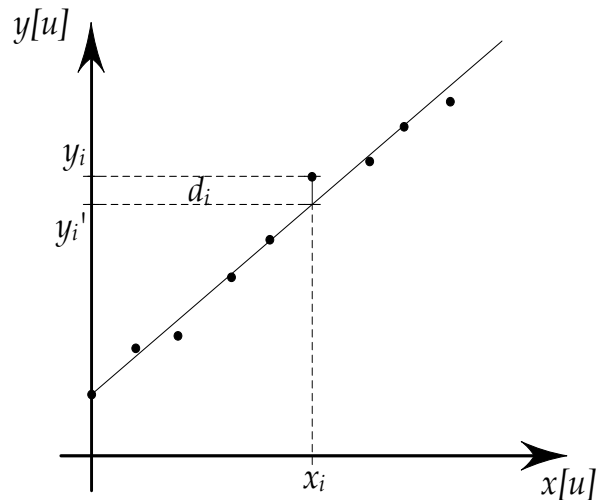


Figura 5.1: Valores experimentales correspondientes a una relación lineal

La Figura 5.1 muestra un comportamiento lineal entre las variables experimentales (x, y) , entonces la ecuación de la recta es:

$$y' = A + Bx \quad (5.1)$$

Asumiendo que la variable independiente no tiene errores, porque se elige libremente, entonces los errores son producidos únicamente por la variable dependiente. La diferencia entre el valor experimental

y_i y el valor y'_i de la recta de ajuste (ver Figura 5.1), se conoce como la discrepancia:

$$d_i = y_i - y'_i \quad (5.2)$$

Las discrepancias indican la separación de los datos experimentales con respecto a la recta de ajuste. El caso ideal es que todos los puntos estén sobre la recta, esto conduce a obtener una discrepancia igual a cero, pero esto no es posible en la experimentación, porque todo resultado experimental está sujeto a error.

El criterio para encontrar la ecuación de la mejor recta es que la sumatoria de las discrepancias al cuadrado sea mínima:

$$\sum d_i^2 \longrightarrow \text{mínima} \quad (5.3)$$

Con las ecuaciones 5.1 y 5.2, la sumatoria de las discrepancias al cuadrado es:

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (A + Bx_i))^2. \quad (5.4)$$

Desarrollando la ecuación 5.4:

$$\sum d^2 = \sum y^2 - 2A \sum y - 2B \sum xy + nA^2 + 2AB \sum x + B^2 \sum x^2. \quad (5.5)$$

Luego para determinar los parámetros A y B se deriva la ecuación 5.5 respecto de A y B , seguidamente se igualan a cero (condición de mínimo), y se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \sum y_i &= An + B \sum x_i \\ \sum x_i y_i &= A \sum x_i + B \sum x_i^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones, se determinan las expresiones para A y B :

$$A = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i y_i \sum x_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5.7)$$

$$B = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (5.8)$$

definimos:

$$\Delta = n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \quad (5.9)$$

Los errores estimados para A y B están dadas por las ecuaciones:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{\Delta}}, \quad (5.10)$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma^2 n}{\Delta}}, \quad (5.11)$$

donde,

$$\sigma^2 = \frac{\sum d_i^2}{n - 2}. \quad (5.12)$$

En la siguiente Tabla se muestra la forma de ordenar los datos y valores necesarios para determinar los parámetros y sus errores:

i	x	y [s]	xy	x^2	y^2 [s]	y'	d_i	d_i^2
1								
2								
3								
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n								
	$\sum x$	$\sum y$	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$			$\sum d_i^2$

Tabla 5.1: Tabla del Método de Mínimos Cuadrados

Sin embargo, en la actualidad no es necesario utilizar la Tabla 5.1 porque las calculadoras científicas tienen incorporadas las funciones estadísticas que permiten determinar los parámetros A , B , el coeficiente de correlación lineal r y las sumatorias de las variables.

En el caso de las relaciones no lineales, se debe previamente linealizar por medio de una transformación matemática y luego aplicar el Método de Mínimos Cuadrados. Por ejemplo, si la función es del tipo $y = ax^b$, linealizando por el método de logaritmos naturales, se tiene:

$$\ln(y) = \ln(a) + b \ln(x). \quad (5.13)$$

La ecuación 5.13 corresponde a una recta por lo que se puede aplicar el Método de Mínimos Cuadrados a los pares ordenados $\log(x_i), \log(y_i)$, y partir de los parámetros de la recta se calculan los valores de a y b , con sus respectivos errores:

$$b = B \rightarrow \sigma_b = \sigma_B, \quad (5.14)$$

$$a = e^A \rightarrow \sigma_a \neq \sigma_A, \quad (5.15)$$

donde el error de a se calcula por el método de propagación de errores.

5.2.1. Coeficiente de correlación

El coeficiente de correlación establece una medida del grado de asociación lineal entre la variable dependiente y la variable independiente. Se define, a partir de los n pares de observaciones, mediante:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (5.16)$$

donde los valores de r se encuentran en el intervalo de $-1 \leq r \leq 1$. El cuadrado de r se denomina coeficiente de determinación múltiple, y está relacionado con la suma de los cuadrados de residuos SSE mediante:

$$1 - r^2 = \frac{SSE}{\sum (y_i - \bar{y}_i)^2}. \quad (5.17)$$

Cuando todos los puntos se encuentran sobre la recta de regresión estimada, es decir, el ajuste es perfecto, la suma de cuadrados de residuos, SSE, toma el valor de cero, por tanto $r^2 = 1$. El denominador de la última expresión es una medida de la variabilidad total de las n observaciones de la variable dependiente.

5.3. Materiales

En esta práctica no se realizan mediciones, sin embargo como herramienta es necesario una calculadora científica

5.4. Procedimiento

1. En las Tablas 5.2, 5.3 y 5.4 copiar las Tablas 4.7, 4.8 y 4.9 de la práctica de gráficos y ecuaciones
2. Conociendo el comportamiento de las gráficas de los cilindros, discos y esferas, determinar los parámetros de ajuste de las diferentes curvas con sus respectivos errores
3. Determinar las ecuaciones de ajuste para las diferentes curvas

n	H [cm]	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 5.2: Cilindros

n	D [cm]	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 5.3: Discos

n	D [cm]	m [g]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 5.4: Esferas

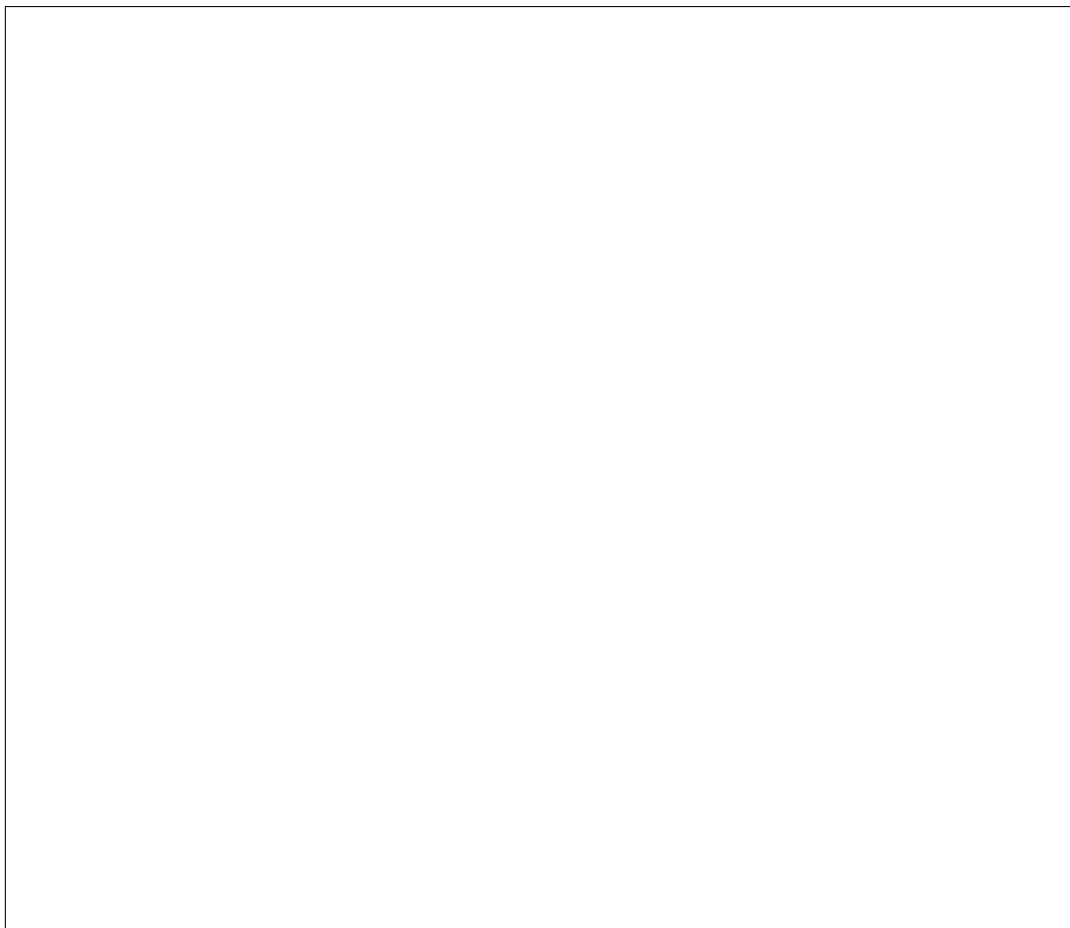
5.5. Resultados

Cilindros

Como se verificó en la práctica de gráficos y ecuaciones para los cilindros, la relación funcional de la masa y la altura es lineal:

$$m = A + BH, \quad (5.18)$$

Con el Método de Mínimos Cuadrados, determinar los parámetros A y B de la ecuación 5.18 con sus respectivos errores, asimismo el coeficiente de correlación:



Con los parámetros calculados, la relación funcional entre la masa y la altura de los cilindros es:

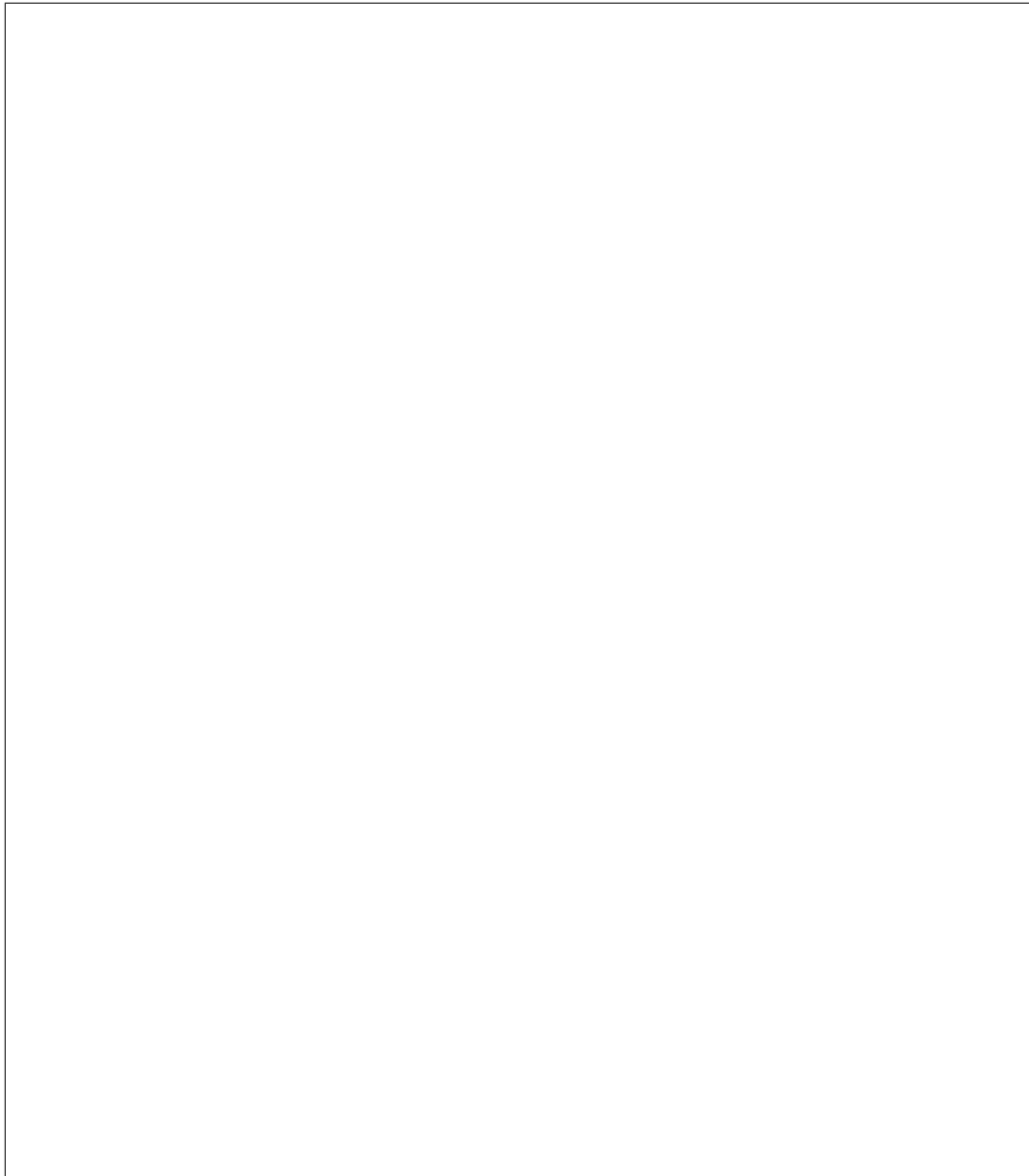
Despreciando el valor de A , la relación funcional es:

Discos

En la práctica de gráficos y ecuaciones se observó que la masa y el diámetro de los discos tiene una relación potencial simple:

$$m = aD^b. \quad (5.19)$$

Aplicar un método de linealización, y después con el Método de Mínimos Cuadrados, determinar los parámetros de la curva con sus respectivos errores.



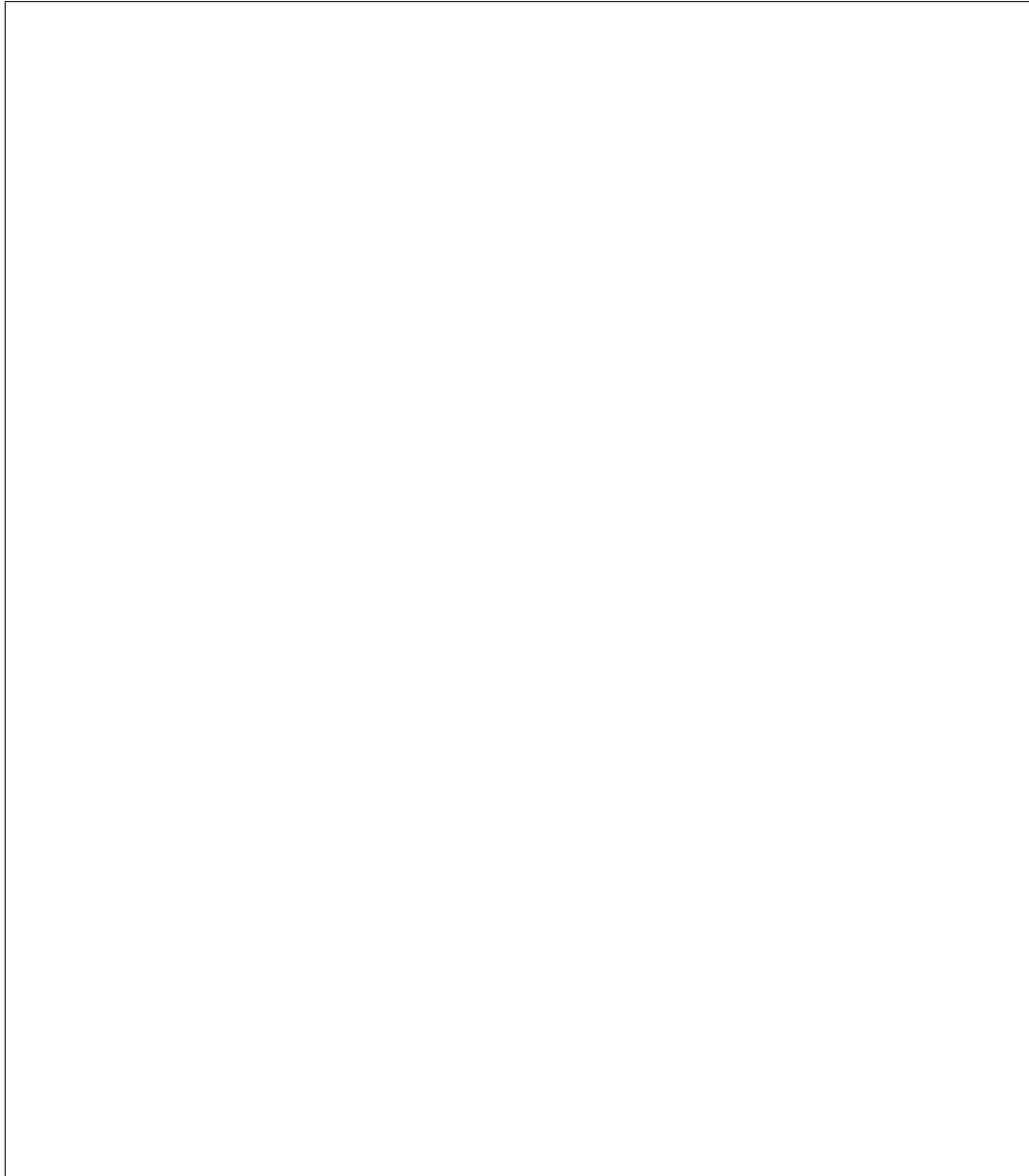
Con los parámetros de la curva no lineal, la ecuación 5.19 es:

Esferas

Al igual que los discos, las esferas tienen una relación potencial simple entre la masa y el diámetro:

$$m = aD^b. \quad (5.20)$$

Aplicar un método de linealización, y después con el Método de Mínimos Cuadrados, determinar los parámetros de la curva con sus respectivos errores.



Con los parámetros de la curva no lineal, la ecuación 5.20 es:

$$\boxed{}$$

En la siguiente Tabla, escribir las ecuaciones para los cilindros, discos y esferas encontradas por los diferentes métodos

Método Objeto	Cambio de variable	Logaritmo	Papel log log	Método de Mínimos Cuadrados
Cilindro				
Discos				
Esferas				

Tabla 5.5: Ecuaciones de los cilindros, discos y esferas con los métodos gráficos y analíticos

5.6. Cuestionario

1. ¿Para qué sirve el Método de Mínimos Cuadrados?
2. Cuáles son los significados físicos de los parámetros A y B de la ecuación 5.18
3. Cuáles son los significados físicos de los parámetros a y b de la ecuación 5.19
4. Cuáles son los significados físicos de los parámetros a y b de la ecuación 5.20
5. ¿Qué ventajas tiene el MMC sobre los métodos gráficos?
6. ¿Qué criterio central utiliza el MMC?
7. Cuando la relación de los datos experimentales no son lineales ¿Qué se debe hacer antes de aplicar el MMC?
8. ¿Qué representa el coeficiente de correlación lineal?

Capítulo 6

Movimiento Rectilíneo Uniforme

6.1. Competencias

- Encontrar la relación funcional entre la posición y el tiempo
- Determinar la velocidad de movimiento

6.2. Fundamento teórico

La cinemática es el estudio del movimiento de los objetos sin considerar sus causas. Los movimientos rectilíneos más simples son: Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU) y Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado (MRUV).

La ecuación de posición para el MRU es:

$$x = x_0 + vt, \quad (6.1)$$

donde x_0 es la posición inicial, y v es la velocidad del objeto:

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{constante}, \quad (6.2)$$

lo que significa que la aceleración en este movimiento es cero.

6.3. Materiales

- Carril con colchón de aire
- Móvil
- Bomba de aire
- Sensor de movimiento
- Interfaz
- Soporte universal
- Computadora

6.4. Procedimiento experimental, MRU

1. Armar el esquema de montaje que se muestra en la Figura 6.1
2. Nivelar el carril con el nivel de burbuja y con los anillos de nivelación del carril
3. Con el móvil sobre el carril, y la bomba de aire encendida, realizar el ajuste fino de nivelación
4. Situar el detector de movimiento en la línea horizontal de movimiento del móvil
5. Preparar el programa LoggerPro¹ para la adquisición de los datos (seguir las instrucciones del docente)
6. Dar un empujón inicial al móvil para conseguir un MRU
7. Adquirir los datos de tiempos y posiciones. Repetir las veces que sea necesario hasta conseguir una buena relación lineal entre la posición y el tiempo

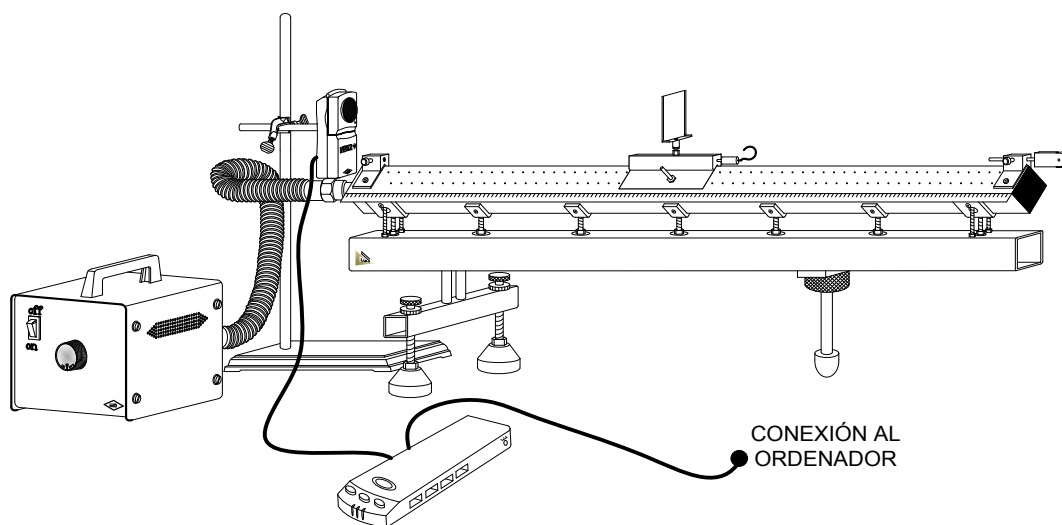


Figura 6.1: Esquema del montaje para el MRU

6.5. Resultados del MRU

Análisis posición – tiempo

En la Tabla 6.1 registrar las posiciones y los tiempo para el MRU.

¹En el apéndice B se encuentra un breve manual del programa LoggerPro, y ejemplos de medición

n	t [s]	x [cm]
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 6.1: Tiempo y posición para el MRU

En la Figura 6.2 graficar la posición en función del tiempo de la Tabla 6.1

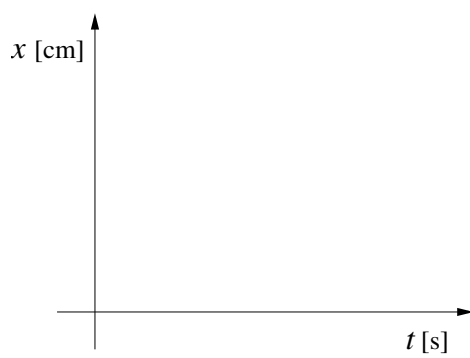


Figura 6.2: Posición en función del tiempo para el MRU

Según la curva de ajuste de la Figura 6.2, la ecuación de ajuste es:

Por el Método de Mínimos cuadrados, determinar los parámetros de ajuste con sus respectivos errores.

Con los valores de los parámetros, la ecuación de ajuste es:

Explique el significado físico de los parámetros de ajuste:

Análisis velocidad - tiempo

En la Tabla 6.2 copiar los datos de tiempo y posición de la Tabla 6.1, y calcular la velocidad a partir de Δx y Δt

n	t [s]	x [cm]	Δt [s]	Δx [cm]	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} [\frac{cm}{s}]$
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Tabla 6.2: Tiempo, posición y velocidad para el MRU

En la Figura 6.3 graficar la velocidad en función del tiempo de la Tabla 6.2

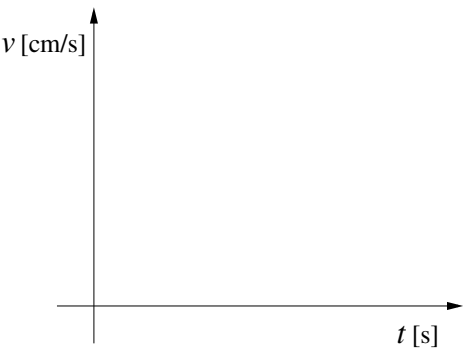
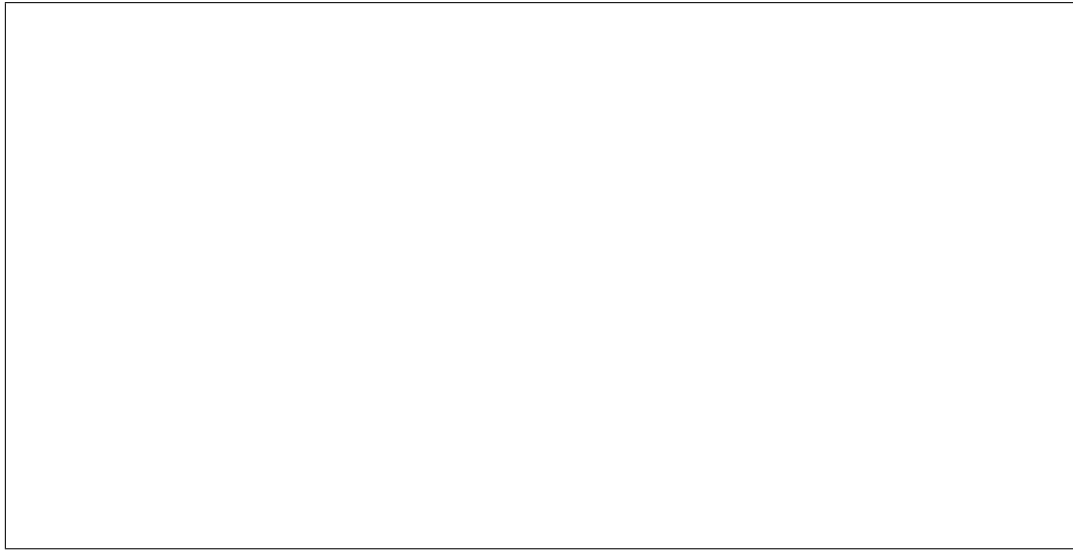


Figura 6.3: Velocidad en función del tiempo para el MRU

Según la curva de ajuste de la Figura 6.3, la ecuación de ajuste es:

Por el Método de Mínimos cuadrados, determinar los parámetros de ajuste con sus respectivos errores.



Con los valores de los parámetros, la ecuación de ajuste es:



Explique el significado físico de los parámetros de ajuste:



6.6. Cuestionario

Movimiento Rectilíneo

1. ¿Qué cuidados se debe tener en cuenta respecto al carril, para realizar este experimento?
2. ¿Cuál es la relación $x = x(t)$ obtenida por método analítico?
3. ¿Cuál es la relación $v = v(t)$ obtenida por método analítico?
4. ¿Qué tipo de comportamiento presentan los desplazamientos para intervalos iguales y sucesivos?
5. ¿Cómo es la velocidad en este tipo de movimiento?
6. ¿Cuáles son los valores de la velocidad obtenidos en los análisis posición - tiempo y velocidad - tiempo?
7. ¿A qué se atribuye la diferencia? Si la hay en la pregunta 6?

8. ¿Comparar los valores de la aceleración obtenidos en los análisis posición - tiempo y velocidad - tiempo?
9. ¿A qué se atribuye la diferencia? Si la hay en la pregunta 8
10. ¿Se verifica la relación teórica entre la posición y el tiempo para el MRU?
11. ¿Se verifica la relación teórica entre la velocidad y el tiempo para el MRU?

Capítulo 7

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado

7.1. Competencias

- Encontrar la relación funcional entre la posición y el tiempo
- Encontrar la relación funcional entre la velocidad y el tiempo
- Determinar la aceleración de movimiento

7.2. Fundamento teórico

Las ecuaciones de posición y velocidad para el MRUV son:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (7.1)$$

$$v = v_0 + a t, \quad (7.2)$$

donde x_0 es la posición inicial, v_0 la velocidad inicial y a la aceleración del movimiento:

$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \text{constante}, \quad (7.3)$$

Si el objeto parte del reposo y del origen ($x_0 = 0$ y $v_0 = 0$), entonces las ecuaciones 7.1 y 7.2 se reducen a:

$$x = \frac{1}{2} a t^2, \quad (7.4)$$

$$v = a t. \quad (7.5)$$

Velocidad media

La velocidad media se define como el cociente entre el cambio en la posición y el cambio en el tiempo:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (7.6)$$

donde $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta t = t_i - t_{i-1}$

Velocidad instantánea

La velocidad instantánea se define como la derivada de la función posición con respecto al tiempo:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (7.7)$$

Si la aceleración es constante, el valor de la velocidad media dentro un intervalo de tiempo es igual al valor de la velocidad instantánea en el punto medio de dicho intervalo Δt , geométricamente la recta tangente es igual a la recta secante como se observa en la Figura 7.1. Se puede demostrar que el punto medio está dado por:

$$t'_i = t_{i-1} + \frac{\Delta t_i}{2} = \frac{t_i + t_{i-1}}{2}, \quad (7.8)$$

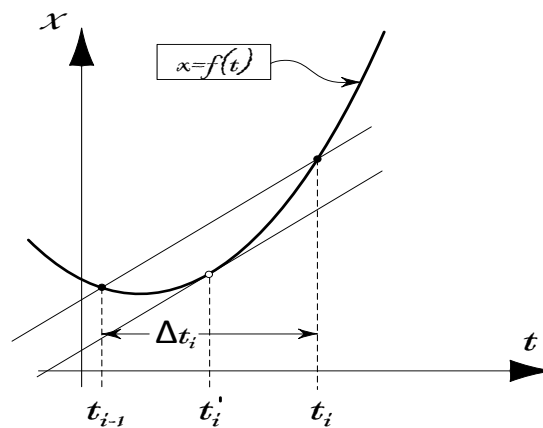


Figura 7.1: Curva del teorema de valor medio de Lagrange

7.3. Materiales

- Carril con colchón de aire
- Móvil
- Bomba de aire
- Sensor de movimiento
- Interfaz
- Polea
- Portamasas
- Masa adicional en gramos
- Soporte universal
- Computadora
- Hilo

7.3.1. Procedimiento experimental, MRUV

1. Armar el esquema de montaje de la Figura 7.2
2. Nivelar el carril con el nivel de burbuja y con los anillos de nivelación del carril
3. Con el móvil sobre el carril, y la bomba de aire encendida, realizar el ajuste fino de nivelación
4. Situar el detector de movimiento en la línea horizontal de movimiento del móvil
5. Con el hilo, unir el portamasas (con la masa adicional) con el móvil, como se muestra en la Figura 7.2
6. Preparar el programa LoggerPro para la adquisición de los datos (seguir las instrucciones del docente)
7. Para conseguir que la velocidad inicial sea cero, se recomienda producir un movimiento contrario a la fuerza de tensión del sistema (cambio de dirección del movimiento)
8. Adquirir los datos de tiempos y posiciones. Repetir las veces que sea necesario hasta conseguir una buena relación potencial entre la posición y el tiempo
9. Para completar la Tabla 7.1, a los datos adquiridos en el paso anterior, restar las coordenadas del punto mínimo de la posición y del tiempo para que el movimiento inicie desde el reposo y del origen

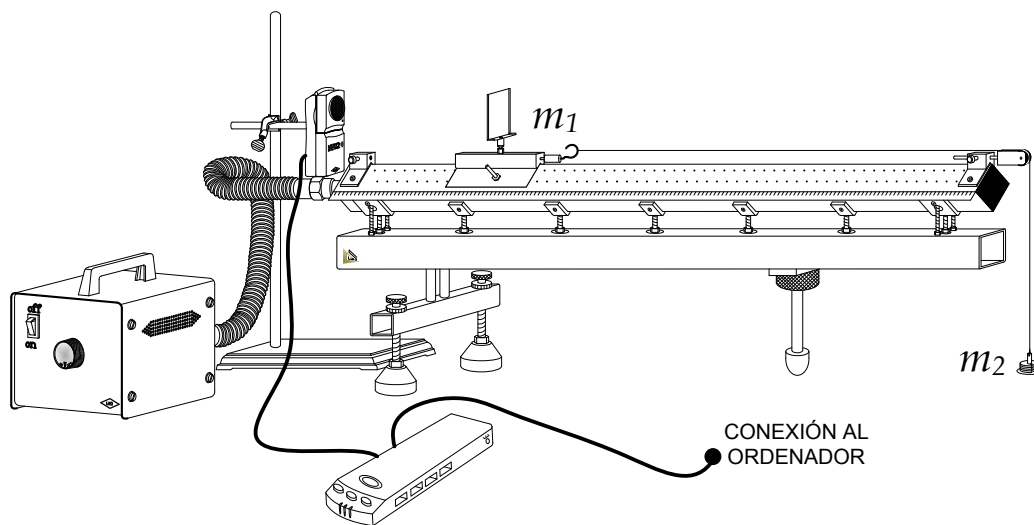


Figura 7.2: Esquema del montaje para el MRUV

7.4. Resultados del MRUV

7.4.1. Análisis posición – tiempo

La Tabla 7.1 corresponde a los datos de posición y tiempo para el MRUV, con condiciones iniciales de $x_0 = 0$ para $t_0 = 0$,

n	t [s]	x [cm]
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 7.1: Tiempos y posiciones para el MRUV

En la Figura 7.3 graficar la velocidad en función del tiempo de la Tabla 7.1

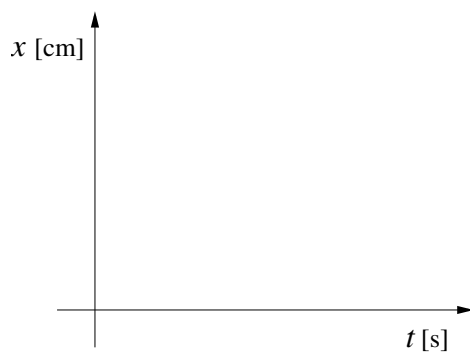


Figura 7.3: Posición en función del tiempo para el MRUV

Según la curva de ajuste de la Figura 7.3, la ecuación de ajuste es:

Por el Método de Mínimos cuadrados, determinar los parámetros de ajuste con sus respectivos errores (linealizar si corresponde).



Con los valores de los parámetros, la ecuación de ajuste es:



Comparando la ecuación de ajuste con la ecuación 7.4, explicar el significado físico de los parámetros de ajuste de la curva no lineal y determinar el valor de la aceleración del móvil con su respectivo error.



Análisis velocidad - tiempo

En la Tabla 7.2 copiar los datos de tiempo y posición de la Tabla 7.1, y calcular la velocidad media a partir de Δx y Δt

n	t [s]	x [cm]	Δt [s]	Δx [cm]	$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} [\frac{cm}{s}]$
1			---	---	---
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Tabla 7.2: Velocidad media para el MRUV

En la Figura 7.4 graficar los valores de velocidad media en función del tiempo de la Tabla 7.2

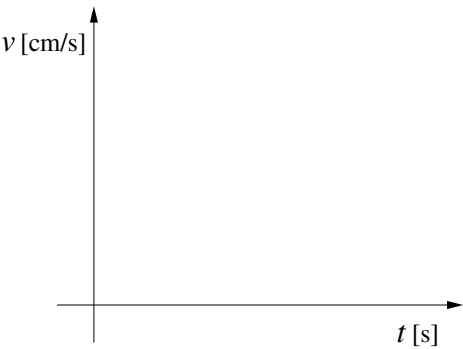


Figura 7.4: Velocidad media en función del tiempo para el MRUV

En la Tabla 7.3, los tiempos son calculados con la ecuación 7.8, y las velocidades medias corresponden a las velocidades instantáneas para esos tiempos.

n	t' [s]	v [$\frac{cm}{s}$]
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Tabla 7.3: Velocidad instantánea para los tiempos t'

En la Figura 7.5 graficar los valores de la Tabla 7.3

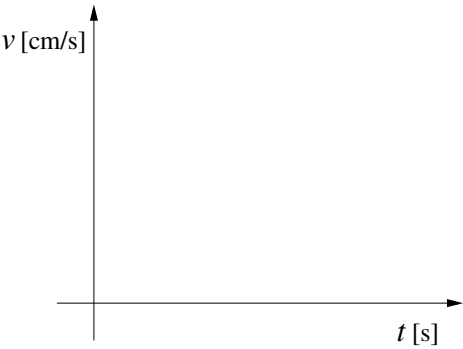
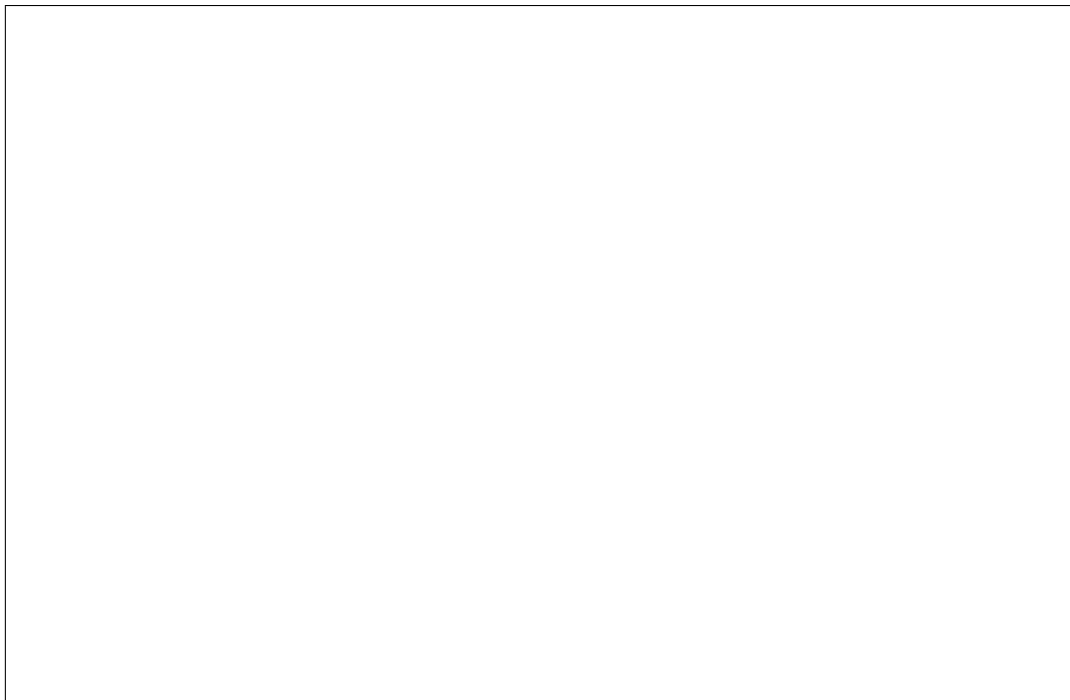


Figura 7.5: Velocidad instantánea en función del tiempo

Según la curva de ajuste de la Figura 7.5, la ecuación de ajuste es:

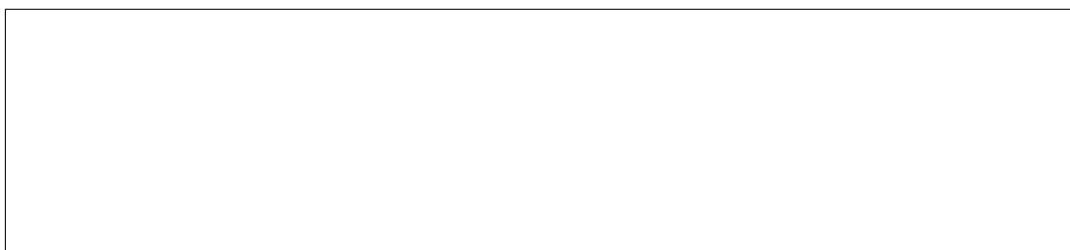
Por el Método de Mínimos cuadrados, determinar los parámetros de ajuste con sus respectivos errores.



Con los valores de los parámetros, la ecuación de ajuste es:



Comparando la ecuación de ajuste con la ecuación 7.5, explicar el significado físico de los parámetros de ajuste de la curva y determinar el valor de la aceleración del móvil con su respectivo error.



7.5. Cuestionario

1. ¿Qué tipo de curva consiguió para la gráfica posición - tiempo?
2. ¿Cuáles es la relación funcional de posición - tiempo?
3. ¿Qué valores obtuvo para la aceleración en los análisis posición - tiempo y velocidad - tiempo?
4. Con relación a la pregunta anterior ¿cuál de los valores de la aceleración es el mejor y por qué?
5. ¿Qué entiende por velocidad media?

6. ¿Qué tendencia tiene la gráfica de la velocidad media en función del tiempo?
7. ¿Qué tipo de curva obtuvo en la gráfica velocidad instantánea - tiempo?
8. ¿Cuál es la relación funcional entre velocidad instantánea y tiempo?

Capítulo 8

Dinámica

8.1. Competencias

- Verificar la segunda ley de Newton

8.2. Fundamento teórico

La segunda ley de Newton explica que la aceleración que adquiere un objeto de masa m es producto de la fuerza que se le aplica:

$$F = ma, \quad (8.1)$$

siendo a :

$$a = \frac{d^2r}{dt^2}. \quad (8.2)$$

Para un sistema formado por una masa m_1 sobre una superficie sin rozamiento unida por una cuerda a otra masa m_2 que cuelga (Figura 8.1), la fuerza que produce el movimiento es:

$$F = m_2g, \quad (8.3)$$

y la aceleración del sistema es:

$$a = \frac{1}{m_1 + m_2}m_2g, \quad (8.4)$$

y $m_1 + m_2 = M$ es la masa del sistema

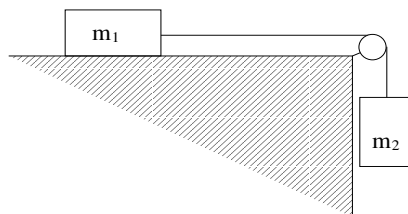


Figura 8.1: Sistema de dos bloques unidas por una polea ideal

A partir de la ecuación 8.2 en una dimensión, la posición de un objeto para una fuerza constante, y con las condiciones iniciales $v_0 = 0$ y $x_0 = 0$ para $t_0 = 0$ es:

$$x = \frac{1}{2}at^2. \quad (8.5)$$

8.3. Materiales

- Carril con colchón de aire
- Móvil
- Bomba de aire
- Sensor de movimiento
- Interfaz
- Masas de $\{1, 5, 10, 20\}$ g
- Portamasas
- Polea
- Hilo
- Soporte universal
- Computadora

8.4. Procedimiento experimental, fuerza constante

1. Armar el esquema de montaje de la Figura 8.2
2. Medir las masas; m_1 = masa del móvil y m_2 = portamasas con masa añadida (m_2 es constante).
3. Nivelar el carril con el nivel de burbujas y con los anillos de nivelación del carril
4. Con el móvil sobre el carril, y la bomba de aire encendida, realizar el ajuste fino de nivelación
5. Situar el detector de movimiento en la línea horizontal de movimiento del móvil
6. Con el hilo, unir el portamasas (con la masa adicional) con el móvil, como se muestra en la Figura 8.2
7. Preparar el programa LoggerPro para la adquisición de los datos (seguir las instrucciones del docente)
8. Para conseguir que la velocidad inicial sea cero, se recomienda producir un movimiento contrario a la fuerza de tensión del sistema (cambio de dirección del movimiento)
9. Adquirir los datos de tiempos y posiciones para las masas m_1 y m_2 del paso 2. Repetir las veces que sea necesario hasta conseguir una curva adecuada para un MRUV. Para completar la primera Tabla de 8.1, a los datos adquiridos por la computadora, restar las coordenadas del punto mínimo de la posición y del tiempo para que el movimiento inicie desde el reposo y del origen
10. Repetir el paso anterior añadiendo masas iguales en los laterales del móvil (m_1) hasta completar todas las Tablas de 8.1 y 8.2 (seguir las instrucciones del docente)
11. Para todas las Tablas de 8.1 y 8.2, determinar las aceleraciones como en la práctica de cinemática

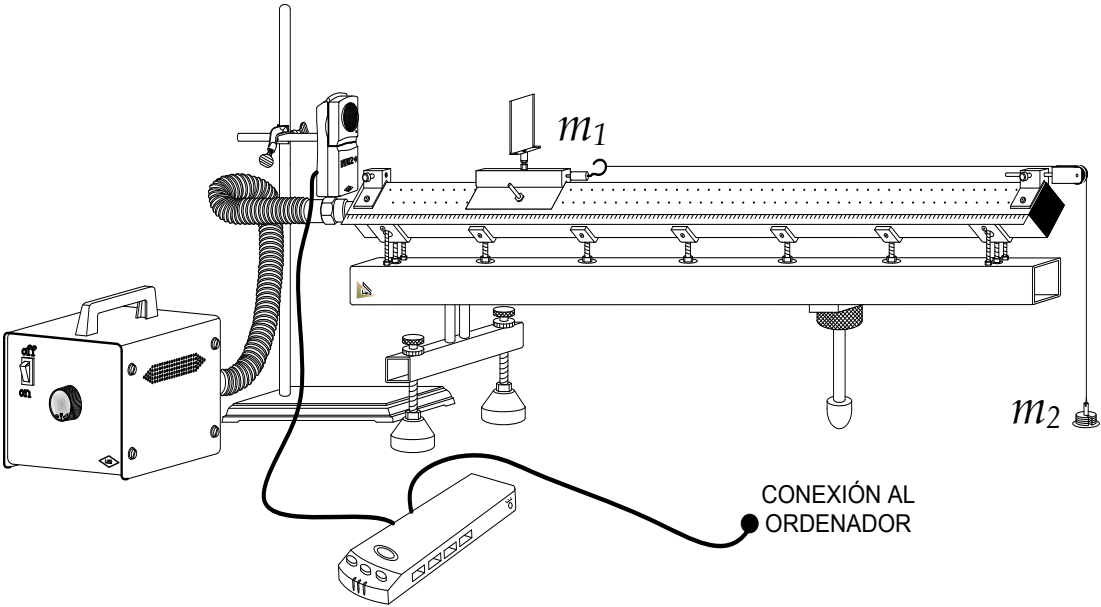


Figura 8.2: Esquema de montaje para la práctica de dinámica

8.5. Resultados, fuerza constante

Las Tablas 8.1 y 8.2 corresponden a movimientos con diferentes aceleraciones.

$m_1 = m_{\text{móvil}}$			$m_1 = m_{\text{móvil}} + 20 \text{ g}$			$m_1 = m_{\text{móvil}} + 40 \text{ g}$		
n	$t \text{ [s]}$	$x \text{ [cm]}$	n	$t \text{ [s]}$	$x \text{ [cm]}$	n	$t \text{ [s]}$	$x \text{ [cm]}$
1			1			1		
2			2			2		
3			3			3		
4			4			4		
5			5			5		
6			6			6		
7			7			7		

Tabla 8.1: Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza constante

$m_1 = m_{\text{móvil}} + 60 \text{ g}$			$m_1 = m_{\text{móvil}} + 80 \text{ g}$			$m_1 = m_{\text{móvil}} + 100 \text{ g}$		
n	$t \text{ [s]}$	$x \text{ [cm]}$	n	$t \text{ [s]}$	$x \text{ [cm]}$	n	$t \text{ [s]}$	$x \text{ [cm]}$
1			1			1		
2			2			2		
3			3			3		
4			4			4		
5			5			5		
6			6			6		
7			7			7		

Tabla 8.2: Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza constante

Con las aceleraciones encontradas de las Tablas 8.1 y 8.2, completar la Tabla 8.3, donde M es la masa total del sistema, es decir $M = m_1 + m_2$

n	$M \text{ [g]}$	$a \text{ [cm/s}^2\text{]}$	$Ma \text{ [din]}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Tabla 8.3: Valores de masa con sus aceleraciones

Una forma para determinar la fuerza que produce el movimiento, es calculando el valor medio de $F = \overline{Ma}$ de la Tabla 8.3

$F =$

Teóricamente, la fuerza constante que produce el movimiento es debido a m_2 de la Figura 8.1, su valor es $F_2 = m_2g$

$F_2 =$

En la Figura 8.3 graficar los valores de la aceleración en función de la masa de la Tabla 8.3

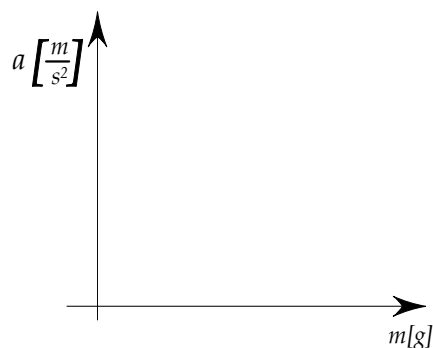


Figura 8.3: Aceleración en función a la masa

El modelo matemático para la curva de ajuste de la Figura 8.3 es:

Si el modelo escogido no corresponde a una relación lineal, entonces se debe linealizar la curva. Luego, con el Método de Mínimos Cuadrados determinar los parámetros de la curva linealizada:

A =
B =
r =

Posteriormente encontrar los parámetros del modelo escogido con sus respectivos errores

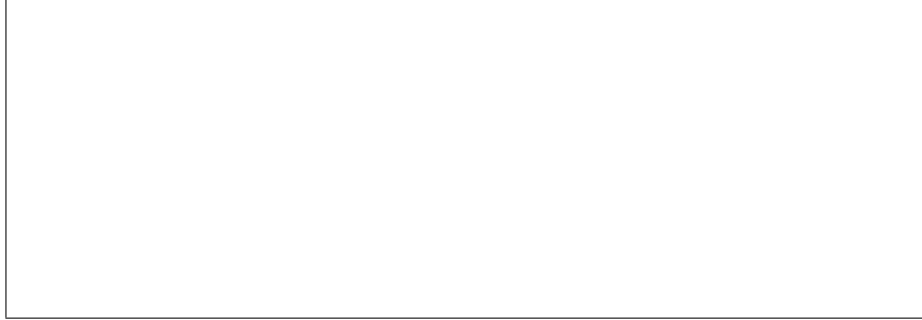
a =
b =

Por lo que, la ecuación de ajuste escogida es:

Comparando la ecuación 8.4 con el modelo de ajuste escogido, determinar el valor de la fuerza experimental con su respectivo error.

$F_{exp} =$

Determinar las diferencias porcentuales entre F , F_2 y la F_{exp}



8.6. Procedimiento experimental, fuerza variable

1. Armar el esquema de montaje de la Figura 8.2
2. Medir las masas; m_1 = masa del móvil y m_2 = portamasas más las masas añadidas. La fuerza que produce el movimiento es m_2g , donde m_2 comenzara con un valor máximo (seguir las instrucciones del docente)
3. Nivelar el carril con el nivel de burbujas y con los anillos de nivelación del carril
4. Con el móvil sobre el carril, y la bomba de aire encendida, realizar el ajuste fino de nivelación
5. Situar el detector de movimiento en la linea horizontal de movimiento del móvil
6. Con el hilo, unir el portamasas (con la masa adicional) con el móvil, como se muestra en la Figura 8.2
7. Preparar el programa LoggerPro para la adquisición de los datos (seguir las instrucciones del docente)
8. Para conseguir que la velocidad inicial sea cero, se recomienda producir un movimiento contrario a la fuerza de tensión del sistema (cambio de dirección del movimiento)
9. Adquirir los datos de tiempos y posiciones para las masas m_1 y m_2 del paso 2. Repetir las veces que sea necesario hasta conseguir una curva adecuada para un MRUV. Para completar la primera Tabla de 8.4, a los datos adquiridos por la computadora, restar las coordenadas del punto mínimo de la posición y del tiempo para que el movimiento inicie desde el reposo y del origen
10. Repetir el paso anterior retirando uniformemente las masas de m_2 y situarlos sobre m_1 (masa total del sistema constante) hasta completar todas las Tablas de 8.4 y 8.5
11. Para todas las Tablas de 8.4 y 8.5, determinar las aceleraciones como en la práctica de cinemática

8.7. Resultados, fuerza variable

Las Tablas 8.4 y 8.5 corresponden a movimientos con diferentes aceleraciones.

$m'_2 = m_2 - m_i$			$m'_2 = m_2 - m_{i+1}$			$m'_2 = m_2 - m_{i+2}$		
n	t [s]	x [cm]	n	t [s]	x [cm]	n	t [s]	x [cm]
1			1			1		
2			2			2		
3			3			3		
4			4			4		
5			5			5		
6			6			6		
7			7			7		

Tabla 8.4: Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza variable

$m'_2 = m_2 - m_{i+3}$			$m'_2 = m_2 - m_{i+4}$			$m'_2 = m_2 - m_{i+5}$		
n	t [s]	x [cm]	n	t [s]	x [cm]	n	t [s]	x [cm]
1			1			1		
2			2			2		
3			3			3		
4			4			4		
5			5			5		
6			6			6		
7			7			7		

Tabla 8.5: Tiempos y posiciones para MRUV, fuerza variable

Con las aceleraciones encontradas de las Tablas 8.4 y 8.5, completar la Tabla 8.6, donde F es la fuerza aceleradora del sistema, es decir $F = m_2g$.

n	a [cm/s ²]	F [N]
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tabla 8.6: Valores de aceleraciones y fuerzas

En la Figura 8.4 graficar los valores de la aceleración en función de la fuerza de la Tabla 8.6

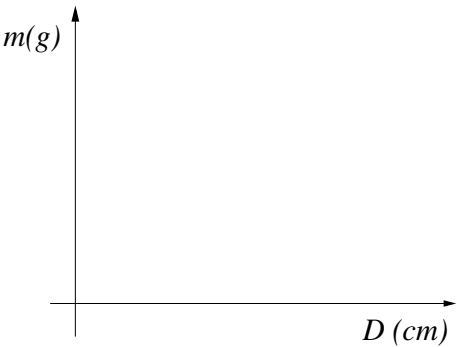


Figura 8.4: Fuerza en función de la aceleración

El modelo matemático para la curva de ajuste de la Figura 8.4 es:

Con el Método de Mínimos Cuadrados determinar los parámetros y sus errores de la curva de ajuste:

A =
B =
r =

Por tanto, la ecuación de ajuste escogida es:

Comparando la ecuación 8.4 con el modelo de ajuste escogido, determinar el valor de la masa del sistema con su respectivo error.

$M =$

8.8. Cuestionario

1. ¿Existen diferencias entre F , F_2 y F_{exp} ?, si existen, explicar sus causas
2. En los procedimientos de fuerza constante y fuerza variable, ¿Se verifica la segunda ley de Newton?
3. Calcular el valor del coeficiente de fricción.
4. Considera usted que la fuerza de fricción varía para cada una de las aceleraciones.
5. De ser afirmativa la respuesta anterior ¿en cuál de las aceleraciones considera usted que influye más la fuerza de fricción?

Capítulo 9

Conservación de la energía mecánica

9.1. Competencias

- Verificar dentro del marco experimental la conservación de la energía mecánica

9.2. Fundamento teórico

La energía potencial gravitacional está relacionada con la altura con respecto a un nivel de referencia, matemáticamente se tiene:

$$E_p = mgh \quad (9.1)$$

y la energía cinética está relacionada con el movimiento:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2, \quad (9.2)$$

donde v es la velocidad, y para el MRUV se puede obtener mediante:

$$v = v_0 + at. \quad (9.3)$$

La energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial $E = E_c + E_p$. Para fuerzas conservativas, la energía mecánica se mantiene constante con el tiempo.

La Figura 9.1 muestra un sistema de dos bloques m_1 y m_2 unidos por un hilo, si se considera el rozamiento de m_1 , la expresión de la conservación de la energía es:

$$E_i = E_f + Q, \quad (9.4)$$

donde E_i es la energía mecánica inicial, E_f la energía mecánica final y Q es el calor producido por la fuerza de fricción. Si el sistema parte del reposo, las expresiones de las energías E_i , E_f y Q son:

$$E_i = m_1gh_{1i} + m_2gh_{2i}, \quad (9.5)$$

$$E_f = m_1gh_{1f} + m_2gh_{2f} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2, \quad (9.6)$$

$$Q = |\mu m_2 g \Delta x|, \quad (9.7)$$

donde Δx es el desplazamiento de m_1

En la Figura 9.1 se observa que cuando el bloque m_1 recorre una distancia x , el bloque m_2 desciende la misma distancia, esto permite relacionar la altura h del bloque m_2 con las posiciones del bloque m_1 .

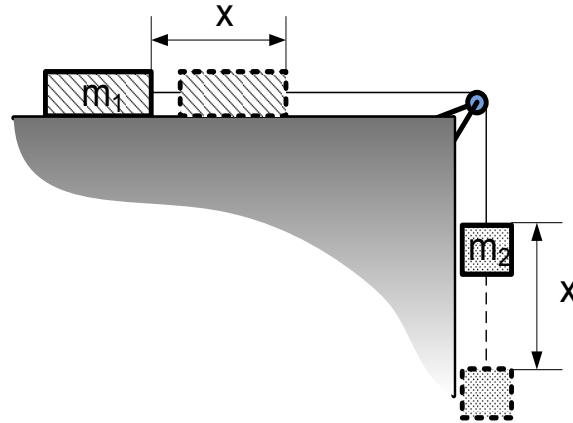


Figura 9.1: Sistema de dos bloques

Si consideramos que la posición final x_n del bloque m_1 como el nivel de referencia de m_2 , entonces la altura más baja de m_2 será x_n . Por tanto, para una posición cualquiera, la altura h_i de m_2 es:

$$h_i = x_n - x_i. \quad (9.8)$$

La contribución de la energía potencial gravitacional a la conservación de la energía, es únicamente por m_2 ;

$$E_p = m_2 gh. \quad (9.9)$$

La velocidad de m_1 es igual que de m_2 , por tanto, la energía cinética del sistema es:

$$E_c = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2. \quad (9.10)$$

9.3. Materiales

- Carril con colchón de aire
- Móvil
- Bomba de aire
- Sensor de movimiento
- Interfaz
- Polea
- Portamasas
- Masa adicional en gramos
- Soporte universal
- Computadora
- Hilo

9.4. Procedimiento experimental

- 1. Armar el esquema de montaje de la Figura 7.2, correspondiente a la práctica de cinemática
- 2. Medir las masas m_1 y m_2 de la Figura 7.2
- 3. Para completar la Tabla 9.1, seguir los pasos del procedimiento de la práctica del MRUV, recuerde que el bloque m_1 parte del reposo y del origen
- 4. Con los datos de la Tabla 9.1, determinar la aceleración del sistema
- 5. Para completar la Tabla 9.2, calcular las alturas h_i (ecuación 9.8), las velocidades (ecuación 9.3), las energías potenciales (ecuación 9.9), las energías cinéticas (ecuación 9.10) y las energías mecánicas $E = E_p + E_c$

9.5. Resultados

Los datos de la Tabla 9.1, corresponden a un MRUV

n	t [s]	x [cm]
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

m_1 =

m_2 =

$M_T = m_1 + m_2$ =

Tabla 9.1: Tiempo y posición para un MRUV

La Tabla 9.2 corresponde a cálculos de alturas, velocidades, energías cinéticas, potencial y mecánica.

n	h [cm]	v [cm/s]	E_p [erg]	E_c [erg]	E [erg]
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Tabla 9.2: Energías

En la Figura 9.2, graficar la energía cinética, potencial y mecánica en función de la altura.

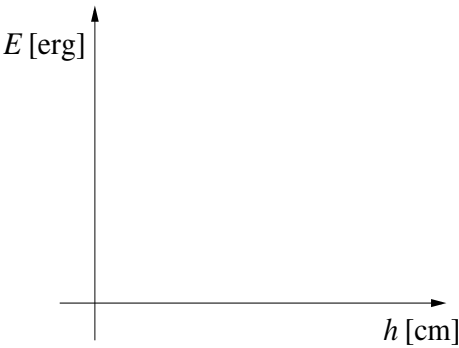


Figura 9.2: Energía cinética, potencial y mecánica en función de la altura

Para la curva de la energía mecánica, la ecuación de ajuste es:

Con el Método de Mínimos Cuadrados, determinar los parámetros de la ecuación de ajuste

A =
B =
r =

Entonces, la ecuación de ajuste escogida es:

¿Cuáles son las interpretaciones físicas de los parámetros encontrados?

9.6. Cuestionario

1. Cuál es la diferencia porcentual entre la energía mecánica inicial y la energía mecánica final.
2. Cuánta energía mecánica por unidad de longitud se pierde en el sistema (longitud recorrida por la masa m_1)
3. Estimar el valor promedio de la fuerza de rozamiento que actuó durante el experimento.
4. Calcular el valor del coeficiente de rozamiento cinético entre la masa m_1 y el carril de aire.
5. ¿Se podría afirmar que la energía mecánica se conserva? Explicar.

Bibliografía

- [1] Guía de Laboratorio de Física Básica I
- [2] <http://www.vernier.com/>
- [3] <http://www.vernier.com/support/manuals/>

Apéndice A

Cálculo de los errores de A y B

Los parámetros de la recta A y B se calculan a partir de ecuaciones matemáticas en las cuales existen constantes y variables. El primer paso es determinar las variables que existen en dichas ecuaciones, luego proceder al cálculo de los errores por propagación.

Los parámetros A y B dependen de $(x_1, x_2, x_3 \cdots x_n)$ y $(y_1, y_2, y_3 \cdots y_n)$ y de n que es el número de datos. La variable x es la variable independiente, entonces consideramos no están afectadas de ningún tipo de error y por tanto no aportan al error de A y B , lo mismo que n . Lo que nos deja como únicas variables $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n$. Supondremos que el error de cada y_i está dado por:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum d_i^2}{n-2}, \quad (\text{A.1})$$

y

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \sigma_{y_3} = \cdots = \sigma_{y_n} = \sigma_y. \quad (\text{A.2})$$

Ahora podemos proceder al cálculo de los errores usando la fórmula de propagación de errores.

A.1. Error de A

De acuerdo a la teoría de Mínimos cuadrados, el parámetro A es:

$$A = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i \right), \quad (\text{A.3})$$

Con la fórmula de propagación de errores, el error de A es:

$$\sigma_A = \sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 + \cdots + (\Delta y_n)^2} \quad (\text{A.4})$$

con:

$$\Delta y_1 = \frac{\partial A}{\partial y_1} \sigma_{y_1}, \quad \Delta y_2 = \frac{\partial A}{\partial y_2} \sigma_{y_2}, \quad \cdots, \quad \Delta y_n = \frac{\partial A}{\partial y_n} \sigma_{y_n} \quad (\text{A.5})$$

Derivando se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A}{\partial y_1} &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_1 \sum_{i=1}^n x_i \right) \rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial y_1} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 - 2x_1 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_1^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \\
\frac{\partial A}{\partial y_2} &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_2 \sum_{i=1}^n x_i \right) \rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial y_2} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 - 2x_2 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_2^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \quad (\text{A.6}) \\
\frac{\partial A}{\partial y_3} &= \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_3 \sum_{i=1}^n x_i \right) \rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial y_3} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 - 2x_3 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_3^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y_n} = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - x_n \sum_{i=1}^n x_i \right) \rightarrow \left(\frac{\partial A}{\partial y_n} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 - 2x_n \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + x_n^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

Continuando con el desarrollo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(n \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\Delta^2} \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \quad (\text{A.7}) \\
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\Delta^2} (\Delta) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\Delta}
\end{aligned}$$

Por tanto:

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial y_1} \sigma_{y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y_2} \sigma_{y_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y_3} \sigma_{y_3} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial A}{\partial y_n} \sigma_{y_n} \right)^2}$$

como:

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_1} = \cdots \sigma_{y_1} = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n d_i^2} = \sigma_y,$$

entonces:

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\left(\frac{\partial A}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y_1} \right)^2 \cdots + \left(\frac{\partial A}{\partial y_1} \right)^2 \right) \sigma_y^2}$$

$$\sigma_A = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial y_i}\right)^2\right)} \sigma_y = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{\Delta} \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

donde;

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n d_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum y^2 - 2A \sum y - 2B \sum xy + nA^2 + 2AB \sum x + B^2 \sum x^2$$

A.2. Error de B

El parámetro B es:

$$B = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

El parámetro B depende de $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ y $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ y de n , entonces el procedimiento para encontrar el error de B , es análogo al del parámetro A

$$\sigma_B = \sqrt{(\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + \dots + (\Delta y_n)^2}$$

donde;

$$\Delta y_i = \frac{\partial B}{\partial y_i} \sigma_{y_i}, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

entonces;

$$\sigma_B = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial y_1} \sigma_{y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y_2} \sigma_{y_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial B}{\partial y_n} \sigma_{y_n}\right)^2},$$

donde:

$$\sigma_{y_1} = \sigma_{y_2} = \dots = \sigma_{y_n} = \sqrt{\frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n d_i^2} = \sigma_y$$

derivando, se tienen:

$$\frac{\partial B}{\partial y_1} = \frac{1}{\Delta} \left(nx_1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \rightarrow \left(\frac{\partial B}{\partial y_1} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left((nx_1)^2 - 2nx_1 \sum_{i=1}^n x_i + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial y_2} = \frac{1}{\Delta} \left(nx_2 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \rightarrow \left(\frac{\partial B}{\partial y_2} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left((nx_2)^2 - 2nx_2 \sum_{i=1}^n x_i + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)$$

\vdots

\vdots

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial y_n} &= \frac{1}{\Delta} \left(nx_n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \rightarrow \left(\frac{\partial B}{\partial y_n} \right)^2 = \frac{1}{\Delta^2} \left((nx_n)^2 - 2nx_n \sum_{i=1}^n x_i + \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \\
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial B}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(n^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i + n \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \\
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial B}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{1}{\Delta^2} \left(n^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + n \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \\
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial B}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{n}{\Delta^2} \left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \\
\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial B}{\partial y_i} \right)^2 &= \frac{n}{\Delta^2} \Delta = \frac{n}{\Delta}
\end{aligned}$$

entonces;

$$\begin{aligned}
\sigma_B &= \sqrt{\left(\left(\frac{\partial B}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y_2} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial B}{\partial y_n} \right)^2 \right) \sigma_y^2}, \\
\sigma_B &= \sqrt{\left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial B}{\partial y_i} \right)^2 \right) \sigma_y^2} = \sqrt{\sigma_y^2 \frac{n}{\Delta}}
\end{aligned}$$

donde

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{(n-2)} \sum_{i=1}^n d_i^2$$

A.3. Coeficiente de correlación lineal

Asumamos que se realizaron medidas de pares de cantidades x_i y y_i , sabemos como emplear el método de mínimos cuadrados para ajustar estos datos a una relación lineal. Pero también tenemos que preguntarnos si el procedimiento de ajuste esta justificada, si de hecho existe una relación física entre las variables x e y . Lo que estamos preguntando aquí es si las variaciones en los valores observados de una cantidad y están correlacionadas con las variaciones en los valores medidos de la otra cantidad x .

Por ejemplo si tuviéramos que medir la longitud de una barra de metal como función de la temperatura encontraríamos una correlación definida y reproducible entre las dos cantidades. Pero si tuviéramos que medir o si fuéramos a medir la longitud de la barra como función del tiempo aunque podrían haber fluctuaciones en las observaciones, no encontraríamos ninguna relación reproducible a largo plazo entre los dos conjuntos de medidas.

Basados en el método de mínimos cuadrados podemos desarrollar una medida cuantitativa del grado de correlación lineal o de la probabilidad de que exista una relación lineal entre dos cantidades observadas. Podemos construir un coeficiente de correlación lineal r que indique cuantitativamente la correspondencia lineal entre las dos cantidades.

Si consideramos la cantidad y como variable dependiente entonces queremos saber si los datos corresponden a una línea recta de la forma.

$$y = A + Bx,$$

ya hemos desarrollado la solución analítica para el coeficiente B que representa la pendiente de la recta ajustada. Si no existe correlación entre las cantidades x e y , entonces no habrá una tendencia para los valores de y de aumentar o disminuir con el aumento de x , entonces el ajuste por el método de mínimos cuadrados debe dar como resultado una línea recta horizontal con pendiente $B = 0$. Sin embargo, el valor de B por si mismo no puede ser buena medida del grado de correlación ya que puede existir una relación que incluye una pendiente muy pequeña.

Ya que estamos discutiendo la interrelación entre las variables x e y , podemos igualmente considerar x en función de y y preguntar si los datos corresponden a una línea recta de la forma:

$$x = A' + B'y.$$

Los valores de los coeficientes A' y B' serán diferentes de los coeficientes A y B , pero están relacionadas si las variables x e y están correlacionadas.

La solución analítica para la inversa de la pendiente B' es similar a la de B y está dada por:

$$B' = \frac{1}{\Delta} \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

Si no hay correlación entre las cantidades x e y , entonces el ajuste por el método de mínimos cuadrados debe dar como resultado una línea recta horizontal con una pendiente $B' = 0$ de manera equivalente como lo fue B . Si hay una correlación completa entre x e y , entonces existe una correlación entre los coeficientes A y B y los coeficientes A' y B' . Para ver cual es esta relación volvemos a escribir la ecuación en que x es la variable independiente como:

$$y = -\frac{a'}{b'} + \frac{1}{b'}x = a + bx$$

e igualando los coeficientes:

$$a = -\frac{a'}{b'}$$

$$b = \frac{1}{b'}$$

Si hay correlación completa, se ve claramente que $bb' = 1$. Si no hay correlación b y b' son ambos 0, entonces definimos el coeficiente de correlación lineal experimental $r = \sqrt{bb'}$ como una medida del grado de correlación:

$$r = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{\left(n \sum x^2 - (\sum x)^2 \right)^{1/2} \left(n \sum y^2 - (\sum y)^2 \right)^{1/2}}$$

El valor de b varía de 0 cuando no hay correlación y a ± 1 cuando hay correlación completa. El signo de r es el mismo que el de b y el de b' solo la magnitud absoluta es importante.

Apéndice B

Vernier LabPro

En la mayoría de los experimentos de la presente guía de laboratorio, se proponen dos procedimientos, el tradicional, y la adquisición de datos con sensores. Aquí se da una información resumida del Vernier LabPro y del software LoggerPro. Sin embargo, para conseguir una información más detallada y amplia, se debe consultar con manuales de usuarios que están disponibles, o visitar la página web del Vernier LabPro [2].

B.1. Introducción

El Vernier LabPro es una interfaz de recopilación de datos versátil, que puede utilizarse para adquirir datos en aula o en el campo, puede ser utilizada con una computadora, una calculadora graficadora TI, o como data logger. Más de cuarenta y cinco sensores están disponibles, incluyendo un sensor de oxígeno de gas, sensor de humedad relativa, sensor de pH, detector de movimiento, acelerómetros, etc.

Componentes del LabPro

El paquete LabPro contiene las partes necesarias para conectar a un ordenador o calculadora gráfica. Para las prácticas de la presente guía, se tienen:

- LabPro interfaz
- Manual del usuario
- Cable serial PC
- Cable USB
- Fuente de alimentación de 6 V

La interfaz LabPro tiene tres botones (comenzar/detener, transferir, configurar), tres LEDs, cuatro canales analógicos y dos canales digitales, una conexión serial al ordenador, una conexión USB al ordenador, y un puerto de entrada y salida de calculadora (Figura B.1)

Botones

Los tres botones de la parte superior del LabPro, son utilizados para los siguientes propósitos:

TRANSFER: Comienza la transferencia entre LabPro y la calculadora de datos y programas.

QUICK SET-UP: Borra los datos almacenados en la memoria del LabPro, prepara los canales de

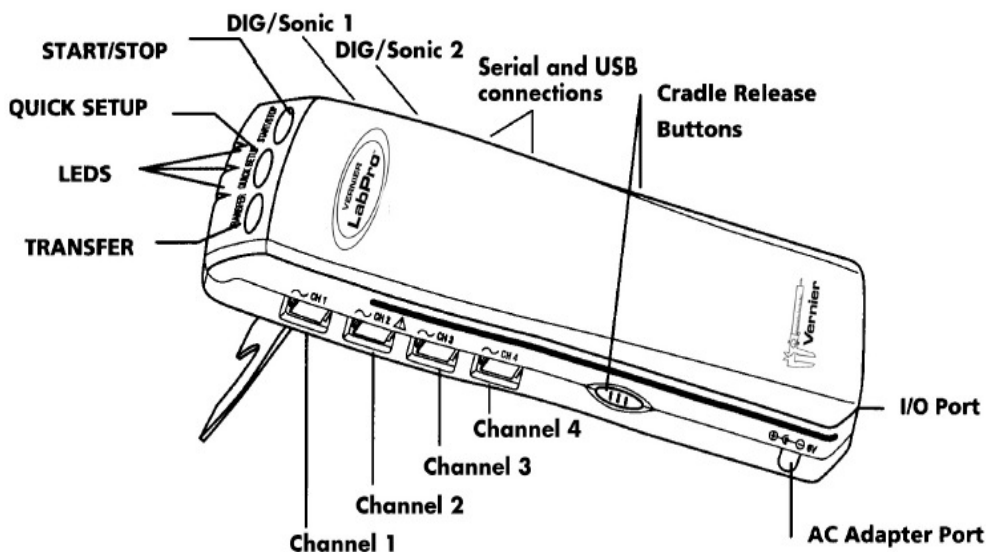


Figura B.1: Interfaz LabPro

entrada para sensores **auto-ID**, y los habilita para adquirir los datos.

START/STOP: Comienza a tomar muestras con la configuración Quick Set-Up. las muestras continúan hasta que termine la experiencia o pulsemos otra vez Start/Stop. Este botón también funciona como un disparador para ciertos tipos de adquisición de datos.

Luces

LabPro dispone de tres luces que indican su estado:

ROJO: Indica una condición de error.

AMARILLO: Indica que el LabPro está listo para adquirir datos.

VERDE: Indica que el LabPro está adquiriendo datos

Fuente de alimentación para LabPro

El LabPro puede ser alimentado con batería o con un alimentador AC. Para usar LabPro con baterías retire la cubierta de baterías situada en la parte de abajo de la interfaz, luego insertar cuatro baterías tipo AA y vuelva a poner la tapa. Para usar el LabPro con un alimentador AC (red eléctrica), enchufe el conector sobre la fuente de alimentación de 6 V en el lateral de la interfaz. Después de alimentar, la interfaz pasará a modo de autoprueba. Se oirá una serie de sonidos cortos y agudos y unas luces que pasan de rojo a amarillo y después a verde, indicando una buena alimentación. Si no es así, compruebe que las baterías están colocadas correctamente.

Conexión de sensores

Los sensores pueden ser divididos en dos grupos: analógicos y digitales. Algunos de los ejemplos de los sensores analógicos son: las sondas de temperatura, sensores de pH, sensores de fuerza, de gas oxígeno, etc., y pueden ser conectados hasta cuatro sensores analógicos simultáneamente al LabPro (CH1-CH2).

Con respecto a los sensores digitales, algunos de los ejemplos son: detectores de movimiento, monitores de radiación, fotopuertas, sensores de movimiento angular, etc. Asimismo, es posible colocar dos sensores digitales simultáneamente al LabPro (DIG/SONIC).

Una característica importante del LabPro es su capacidad de detección automática de los sensores para realizar los experimentos. Sin embargo también existen sensores que no tienen habilitados el Auto-ID, los cuales deben ser reconocidos manualmente.

Usar LabPro con un ordenador

Primero se debe instalar el software LoggerPro, luego conectar el LabPro, unir uno o más sensores, abrir el programa LoggerPro, y estará listo para la adquisición de datos

B.2. Preparar el LoggerPro para adquirir datos

Localizar el ícono del LoggerPro en la computadora e ingresar. Una característica importante de LoggerPro es la capacidad de autodetectar sensores. Si LoggerPro no detecta su LabPro o algún sensor conectado al mismo, se deshabilitará el botón de adquirir los datos. Asegúrese de que el LabPro esté unido a la computadora y que disponga de alimentación.

En la Figura B.2 se muestra la ventana que aparece al abrir el LabPro, donde se observan las variables de fuerza y el tiempo que es el modo de adquisición por defecto. El programa identificó automáticamente el sensor de fuerza conectado (sensor de fuerza). Asimismo, se observa el ícono de preparación para adquisición de datos (**reloj**) y el ícono de iniciar la adquisición de datos (**Adquirir**)

El ícono LabPro nos permite observar todos los sensores analógicos y digitales conectados a la interfaz (Figura B.3), también nos indica el canal o entrada digital utilizada.

En la Figura B.4 se muestra la ventana de preparación para la adquisición de datos, y como se mencionó anteriormente, por defecto está basado en el tiempo. Aquí se puede programar la duración de la toma de datos, número de muestra por segundo, etc. Sin embargo, también se puede cambiar la variable de tiempo por otra de interés.

Con el LabPro, también es posible adquirir datos a partir de un suceso, es decir, iniciar la adquisición de datos después de superar (en aumento o disminución) un valor de referencia. La Figura B.5 muestra la ventana de disparo

Finalmente, para la utilización de los diferentes sensores que interactúan con el Vernier LabPro, se puede descargar el manual de usuario para los sensores [3]

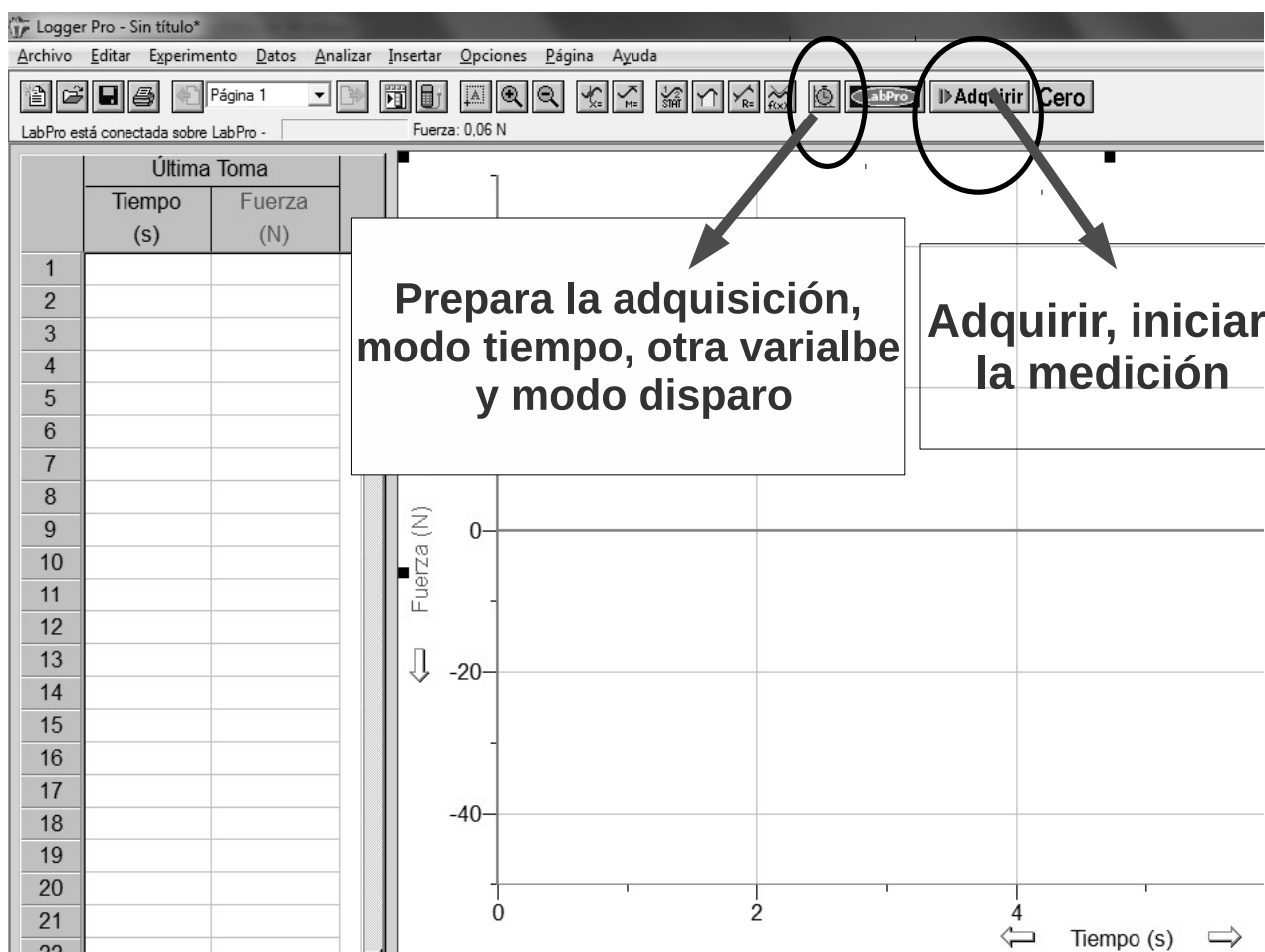


Figura B.2: Ventana del software LabPro



Figura B.3: Ventana de sensores conectados a la interfaz Lab Pro

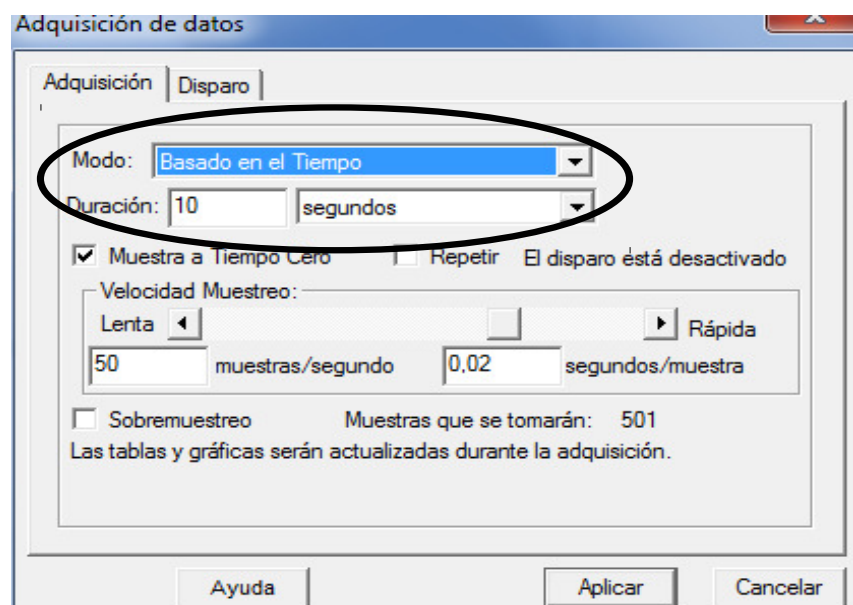


Figura B.4: Ventana de adquisición de datos, modo tiempo

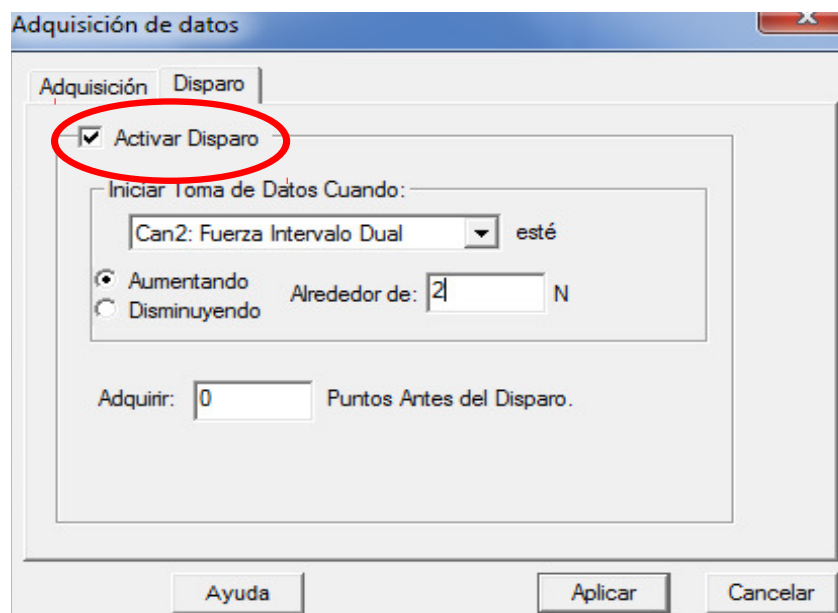


Figura B.5: Ventana de adquisición de datos, modo disparo