Escuela Militar de Ingeniería
Ciencias Básicas

CALCULO I
PRACTICA 1

NÚMEROS REALES
FUNCIONES
LIMITES
CONTINUIDAD

DOCENTES: **Ing. Rosalva Alcocer**

10/02/2021

1. Hallar la solución de las siguientes inecuaciones

a. $5(2x-3)+1+4(3x-5) \le 3(x+10)+4(2x+8)+x,$ Sol: $\left(-\infty, \frac{48}{5}\right]$

b. $\frac{5}{4}+\frac{2}{3}x-8 \ge \frac{2}{5}x-\frac{1}{2}-3x,$ Sol: $\left[\frac{375}{196}, \infty\right)$

c. $\frac{3x+1}{7}-\frac{2-4x}{3} \ge \frac{-5x-4}{14}+\frac{7x}{6},$, Sol $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$

d. $6\left(\frac{x+1}{8}-\frac{2x-3}{16}\right) > 3\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{8}(3x-2),$ Sol: $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$

e. $\frac{x+1}{x^2-4x+3}+\frac{4}{x-3} \ge \frac{x-2}{x-1},$ Sol: $(3,9]$

f. $\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} > 3$, Sol: $\left(-\frac{2}{3}, 0\right) \cup (0,1),$

g. $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2} > 0$, Sol: $(-\infty,0) \cup (0,\infty)$

h. $\frac{x^2+1}{x^2+9} < 0,$ Sol: $\varnothing$

i. $x^8-256 > 0$, Sol:$(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

j. $\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2-9} \le 0,$ Sol: $(-3,-2] \cup [-1,1] \cup [2,3)$

k. $x^5-5x^3+4x > 0,$ Sol: $(-2,-1) \cup (0,1) \cup (2,\infty)$

l. $2\log_4|x-2| < \log_2|2x+3|,$ Sol: $(-\infty,-5) \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

m. $\log_{\frac{1}{2}}x + \log_3 x > 1$Sol:$(0, 0.152882)$

n. $\log_3(x^2 - 5x + 6) < 0$Sol:$(1.38, 2) \cup (3, 3.618)$

o. $\sqrt{x^2 - 3} \geq \sqrt{2x}$ Sol:$(3, \infty)$

p. $\sqrt{x^2 - 4x + 3} < \sqrt{x^2 - 7x + 12}$ Sol:$(-\infty, 1)$

q. $\sqrt{x+2}\sqrt{x-3} > 0$

r. $|3x| > |6 - 3x|$, Sol: $(1, \infty)$

s. $\left|\frac{6-5x}{3+x}\right| \leq \frac{1}{2}$, Sol: $\left[\frac{9}{11}, \frac{5}{3}\right]$

t. $\left|\frac{x+2}{x-3}\right| > \left|\frac{3x-1}{x+4}\right|$, Sol:

u. $\left|\frac{3x-1}{2x+1}\right| < 4x - 2$: , Sol:

v. $|2x+3| + 1 > |x-5|$, Sol: $(-\infty, -7) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$

w. $|x+2| + |x-2| + x - 5 \geq 0$, Sol: $(-\infty, -5] \cup [1, \infty)$

x. $|2x-1| + |4x-5| - 8 \geq 0$, Sol: $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$

y. $|x^2 - 9| - 2|x| + x < 10$, Sol: $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{85} - \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{77} + \frac{1}{2}\right)$

z. $|2x-5| - |x-5| \leq 2$, Sol: $[-2, 4]$

aa. $\frac{|x(x+3)|}{|x+1|} \geq 2$, Sol: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{5}{2}\right] \cup [-2, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{5}{2}\right] \cup [1, \infty)$

bb. $\frac{|2x| - 5|x+2| + x^2 - x}{|x| + x} > x$, Sol:$\varnothing$

cc. $2x|x| - |x^2 - 1| - 3x + 1 \geq 0$, Sol: $\{1\} \cup \left[-\frac{1}{6}\sqrt{33} - \frac{1}{2}, 0\right] \cup [2, \infty)$

dd. $\frac{|x|}{|x^2+1|} + \frac{1}{2|x|} - 1 \geq 0$, , Sol: $(0, 1] \cup [-1, 0)$

2. Determinar si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o proporcionar un ejemplo que lo demuestre.

a. Si $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$

b. Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función una vez como máximo.

c. Si $f(x) = f(-x)$ para todo x perteneciente al dominio de f, entonces la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y.

d. Si f es una función, entonces $f(ax) = af(x)$.

3. Hallar dominio y rango de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}}$$

4. Hallar dominio y rango de la función

$$f(x) = \sqrt{\frac{(x-3)^2}{2}} + 2$$

5. Si $f(x) = \frac{1}{2}(q^x + q^{-x})$ demostrar que $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

6. Expresar la función en forma explicita $xy^5 = \sqrt{e^{3x}y^x}$

7. Expresar la función en forma explicita $x^3y^2 = \sqrt{e^{5x}y^{x-2}}$

8. Graficar la función definida por secciones

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -2 \\ \ln(x+2) & \text{si } x \in (-2, 3] \\ |x+4| & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

9. Graficar la función definida por secciones y hallar dominio y rango

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \ \ si \ \ -2 \leq x < 0 \\ x - 1 \ \ si \ \ 0 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{x} \ \ si \ \ 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

10. Hallar el dominio, rango y graficar

$$f(x) = |x - 3| - 4$$

11. Hallar

$f \circ g \quad g \circ f \quad f \circ f \circ f \quad g \circ g \circ g$

Si

a. $f(x) = \sqrt{x-1} \quad g(x) = 4x - 3$

b. $f(x) = \frac{2-x}{x} \qquad g(x) = x^2 - \sqrt{2}$

c. $f(x) = 4x^3 \quad g(x) = 2$

12. Determinar si la función es par, impar o ninguna de las dos. Utilizar una herramienta de graficación paraverificar su resultado

a. $f(x) = x^2(4 - x^2)$

b. $f(x) = x\cos x$

c. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

d. $f(x) = \sin^2 x$

13. Demostrar que el producto de dos funciones pares (o impares) es una función par.

14. Demostrar que el producto de una función impar y una par es una función impar.

15. Hallar la función inversa y verificar

a. $f(x) = \frac{x}{2}$

b. $f(x) = \frac{1}{x+2}$

c. $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$

d. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

16. Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado y el material para los lados, cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

17. Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados.

18. Una compañía productora de cereal fabrica cajas para empacar su producto. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: su amplitud es tres veces su profundidad y su altura es cinco veces su profundidad.

a. Halle una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.

b. Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulgadas.

c. ¿Para qué profundidad el volumen es 90 pulg^3?

d. ¿Para qué profundidad el volumen es mayor que 60 pulg^3?

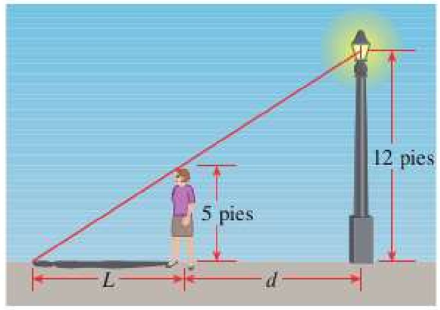
19. Un jardinero tiene 140 pies de cerca para un jardín de legumbres rectangular.

a. Encuentre una función de modele el área del jardín que puede cercar.

b. ¿Para qué intervalo de amplitudes el área es mayor o igual que 825 pies^2?

c. ¿Puede cercar un jardín con área de 1250 pies2?

20. Una mujer de 5 pies de estatura está parada cerca de una lámpara del alumbrado público que tiene 12 pies de altura, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele la longitud L de su sombra en términos de su distancia d desde la base de la lámpara.



21. Se pide hallar una función que modela una situación de la vida real.

a. La longitud de un lote de edificación rectangular es tres veces su ancho. Encuentre una función que modela su área en términos de su ancho.

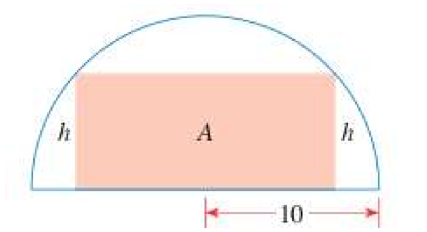
b. Un cartel es 10 pulgadas más largo que su ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho.

c. Una caja rectangular tiene una base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen V en términos de su ancho.

d. La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen V del cilindro en términos de su radio r.

e. Un rectángulo tiene un perímetro de 20 pies.Encuentre una función que modele el área A en términos de la longitud x de uno de sus lados.

22. Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele el área A del rectángulo en términos de su altura h.



23. Calcular los siguientes limites

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^2 - x}$

b. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\dfrac{1}{3+x} - \dfrac{1}{3}}{x}$

24. Calcular los siguientes limites

a. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 8} - 3}$ Sol : 3

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$ Sol: 0

c. $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$ Sol: 27

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(3+x)^n - 3^n}{x}$ Sol: $n3^{n-1}$

e. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$ Sol:12

f. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{-x^3+2x}-2}{\sqrt{x^2+5}-\sqrt{3x+15}}$ Sol:$\dfrac{15}{7}$

25. Calcular los

a. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-\cos x}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$,Sol: $\sqrt{3}$

b. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\tan x - x^2 + \pi^2}{x-\pi}$ Sol: $1-2\pi$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi - x}$ Sol:$\dfrac{1}{\pi}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 2mx - \cos 3nx}{x^2}$ Sol: $-2m^2 + \dfrac{9}{2}n^2$

e. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ Sol: 0

f. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{1-\sin x}-\sqrt{1+\sin x}}{x-\pi}$ Sol: 1

g. $\lim\limits_{x\to 2} (4-x^2)\tan\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$ Sol: $\dfrac{16}{\pi}$

h. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$ Sol:$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

26. Calcular los siguientes limites

a. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$ $Sol:\ 72$

b. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$ Sol:$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{30}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ Sol: 1

d. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x+7^{x+1}}{3^x+7^x}$ Sol: 7

e. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6^x+9^{x+1}}{4^x+9^x}$ Sol: 9

f. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+5}{\sqrt[4]{x^8+x+3}+6x}$, Sol: 2

g. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$ Sol: $-\frac{1}{2}$

h. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ Sol: $\frac{1}{2}$

i. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-2x+3}\right)$ Sol: 2

j. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{5^{x-1}-5^x}{5^{x+2}-2^x}\right)$ Sol: $-\dfrac{4}{125}$

k. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-3x+3}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$ Sol: $\frac{5}{3}$

l. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)^x$ Sol e^{-1}

m. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ Sol: e^x

n. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ Sol: 1

o. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$ Sol. e

p. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2^x-1}{3^x+1}$ Sol: 0

q. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^x+6^{x+5}}{2^x+6^{x+3}}$ Sol: 36

r. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$ Sol: 1

s. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$ Sol: $\frac{3}{2}$

t. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$ $\left(\text{sug}; \cos x = t \quad x\to\frac{\pi}{2} \Rightarrow t\to 0\right)$

u. $\lim_{x\to b}\frac{a^x-a^b}{x-b}$ Sol: $a^b\ln a$

v. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ Sol: 1

w. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-9}}\right)^{5\sqrt{x+3}}$ Sol: e^5

x. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\tan x}$ Sol: 1

y. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x}$ Sol: 2

z. $\lim_{x\to\infty}\{\ln(2x+1)-\ln(x-1)\}$ Sol: $\ln 2$

aa. $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$ Sol: 1

bb. $\lim_{x\to 3}\{\ln|x^2-9|-\ln|x-3|\}$ Sol: $\ln 6$

cc. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x-1}{x^2}+\frac{2x-3x^2}{4+x^2}}{\frac{3-4x-3x^3}{4x^2-3x^3-2}}\right)$ Sol: $-\frac{9}{7}$

27. Verificar las siguientes igualdades

a. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

b. $\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{(x-a)(x-b)}\right) = \frac{a+b}{2}$

c. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3}{x^3}-\frac{1}{x} = \infty$

28. Graficar la función f, identifica los puntos de discontinuidad

$$f(x) = \begin{cases} -3x+1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

29. Hallar los valores de a y b para que la función f sea continua sobre todos los reales

a. $f(x) = \begin{cases} a - 2bx & \text{si } x < -4 \\ 4x^2 + 1 & \text{si } -4 \leq x < -1 \\ x + b & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

b. $f(x) = \begin{cases} 3a + 2 & \text{si } x < 1 \\ 5x - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 5 - 2b & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c. $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 4b & \text{si } x < -2 \\ bx^2 + 8 & \text{si } -2 \leq x \leq -1 \\ 2 + bx & \text{si } x > -1 \end{cases}$

d. $f(x) = \begin{cases} 5x - a & \text{si } x \leq -1 \\ 3x^2 + 2x - 5n & \text{si } -1 < x < 3 \\ 5 + 3x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

30. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ A & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

Para que valores de A esta función es continua en todo su dominio? $sol : A = 6$

31. Sea

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ A + 2 & \text{si } x \in \left[0, \frac{5}{2}\right) \\ 4 - B & \text{si } x \in \left[\frac{5}{2}, 10\right) \end{cases}$$

¿Para que valores de A y B la función dada es continua? sol: $A = 3,\ B = 5$

32. ¿Para que valores de T la siguiente función es continua en todo su dominio?

$$f(x) = \begin{cases} T^2 x^2 + x - 1 & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ x - 5 & \text{si } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

Sol: no existe