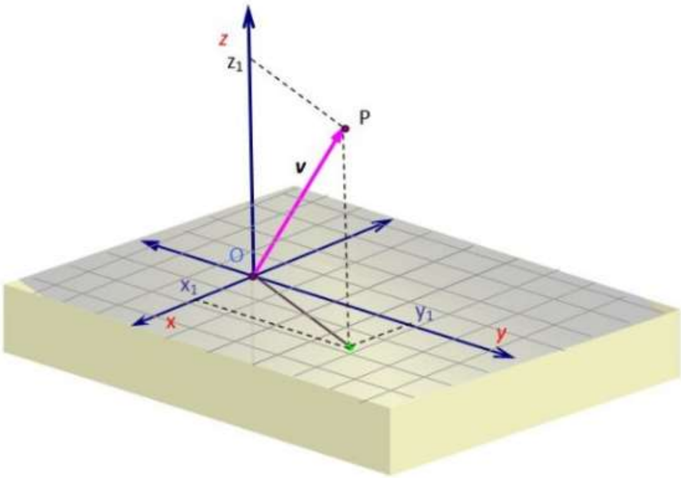
VECTORES



Criterio de desempeño

Analizar, y aplicar el concepto de vectores y su representacion geométrica, para su cálculo y su posterior estudio en la geometria analitica en el espacio utilizando sus propiedades de y las diferentes estrategias algebraicas, mostrando habilidades en la resolución de problemas de la vida cotidiana todo dentro de un margen de respeto y cordialidad.

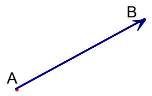
Contenido analitico

1. Vectores
2. representación Geométrica de los Vectores.
3. Modulo de un Vector
4. Paralelismo y Ortogonalidad de Vectores
5. Producto Escalar y Vectorial .Angulo entre Vectores
6.Proyecciones y vectores componentes

Introducción

Los científicos emplean el término vector para indicar una cantidad (por. ej., un desplazamiento, velocidad o fuerza) que tiene magnitud y dirección. Un vector se representa por lo común mediante una flecha o un segmento de recta dirigido. La longitud de la flecha representa la magnitud del vector y la flecha apunta en la dirección del vector.

Un vector se denota por medio de una letra con una flecha sobre la letra $\vec{v}$. Por ejemplo, suponga que una partícula se mueve a lo largo de un segmento de recta del punto A al punto B. El vector de desplazamiento $\vec{v}$, correspondiente, mostrado en la figura tiene punto inicial A (la cola) y el punto terminal B (la punta) y esto se indica escribiendo $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

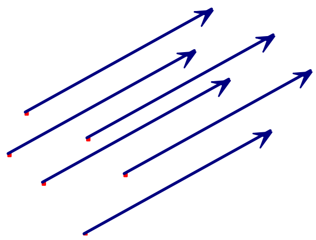


Para evitar confusión con la notación para intervalos abiertos o puntos, se usaran simbolos como $\langle a_1, a_2 \rangle$ para vectores en el plano, y para vectores en el espacio $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$

Definition *El vector $\overrightarrow{PQ}$ entre dos puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$*
$\overrightarrow{PQ} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$

Definition *Si $\vec{v}$ es un vector en el plano cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es (v_1, v_2, v_3) entonces el vector $\vec{v}$ queda dado mediante sus componentes de la siguiente manera*
$v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$
Las coordenadas v_1, v_2 y v_3 son las componentes de $\vec{v}$. Si el punto inicial y el punto final están en el origen, entonces $\vec{v}$ es el vector cero (o vector nulo) y se denota por
$\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

Es importante notar que un vector se puede representar por medio de muchos segmentos de recta dirigidos diferentes, todos apuntando en la misma dirección y todos de la misma longitud que los denominaremos vectores **equivalentes**.



Definition *El espacio vectorial V_3 de dimensión 3 (o tridimensional) es el conjunto de todos las ternas ordenados $\langle x, y, z \rangle$ de números reales, llamados vectores sujetos a los siguientes axiomas*

***Adición de vectores**. Si se tiene $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, entonces*
$\overrightarrow{a + b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$

***Multiplicación de vectores por escalar**. Si $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y c es un escalar, entonces*
$\overrightarrow{ca} = \langle ca_1, ca_2, ca_3 \rangle$

Definition *Se define el vector $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ y el vector opuesto $\vec{a} = \langle -a_1, -a_2, -a_3 \rangle$*

El siguiente teorema relaciona las propiedades de la suma y multiplicación por escalar.

Theorem *Sea $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vectores arbitrarios d y e escalares*

* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
* $\vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$
* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
* $\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = \vec{0}$

* $e\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = \overrightarrow{ea}+\overrightarrow{eb}$
* $(e+d)\vec{a} = \overrightarrow{ea}+\overrightarrow{da}$
* $1\vec{a} = \vec{a}$
* $0\vec{a} = \vec{0}$

Exercise *Hallar el simétrico del punto $A = (4,-2)$ respecto de $M = (2,6)$.*

Example *Denotamos por $B = (x,y)$ al simétrico de A, luego se cumple que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$*

Sustituyendo los valores de los puntos, obtenemos dos ecuaciones correspondientes a las coordenadas de los vectores $\langle -2,8\rangle = \langle x-2, y-6\rangle$

Resolvemos ambas ecuaciones y obtenemos $B = (0,14)$.

La magnitud o longitud del vector $\vec{v}$ es la longitud en cualquiera de sus representaciones, y se denota por el símbolo $\|\vec{v}\|$

La longitud del vector bidimensional $\vec{a} = \langle a_1,a_2\rangle$ es

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

La longitud del vector tridimensional $\vec{a} = \langle a_1,a_2,a_3\rangle$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

Example *Sea $\vec{a} = \langle 4,0,3\rangle$ y $\vec{b} = \langle -2,1,5\rangle$ encuentre $\|\vec{a}\|$ y los vectores $\overrightarrow{a+b}$, $\overrightarrow{a-b}$, $\overrightarrow{3b}$ y $\overrightarrow{2a+5b}$.*

Tres vectores en V_3 juegan un papel especial.

$$i = \langle 1,0,0\rangle \quad j = \langle 0,1,0\rangle \quad k = \langle 0,0,1\rangle$$

Estos vectores i,j y k se denominan vectores base estándar. Tienen longitud 1 y apuntan en las direcciones de los ejes positivos x,y y z. De manera similar, en dos dimensiones se define $i = \langle 1,0\rangle$, $j = \langle 0,1\rangle$

Sea $\vec{a} = \langle a_1,a_2,a_3\rangle$ entonces se puede escribir $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ (mostrar esta aseveración).

Theorem *Sean $\vec{u},\vec{v} \in V_3$ con $\vec{u} = \langle u_1,u_2,u_3\rangle$ $\vec{v} = \langle v_1,v_2,v_3\rangle$*

** Igualdad de vectores*

Si $\vec{u} = \vec{v}$ entonces $u_1 = v_1;\ u_2 = v_2;\quad u_3 = v_3$

** Longitud de un multiplo escalar*

Sea $\vec{v}$ un vector y sea c un escalar. Entonces

$\|\overrightarrow{cv}\| = |c|\|\vec{v}\|$ donde $|c|$ es el valor absoluto de c.

** Vector unitario en la dirección de $\vec{v}$*

Si $\vec{v}$ es un vector distinto de cero, entonces el vector

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$$

tiene longitud 1 y tiene la misma dirección que $\vec{v}$.

Example *Hallar vector unitario*

a) en la dirección del vector $\vec{v} = \langle 8,-10\rangle$

b) en la dirección del punto $A(2,-5)$ al punto $B(4,3)$

Example *Dado $\vec{a} = \langle -2,2\rangle$, $\vec{b} = \langle 3,-2\rangle$ y $\vec{c} = \langle 5,-4\rangle$ encontrar los escalares h,k tales que :*

$$\vec{c} = \overrightarrow{ha} + \overrightarrow{kb}$$

Example *Determine un vector que tenga la misma dirección que* $\langle 2,4,2\rangle$ *pero de longitud* 6.

Definition *Dos vectores distintos de cero* $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *son paralelos, si existe algún escalar* c *tal que*

$$\vec{u} = c\vec{v}$$

Example *El vector* $\vec{w}$ *tiene punto inicial* $(2,-1,3)$ *y punto final* $(-4,7,5)$ *¿Cuál de los vectores siguientes es paralelo a* $\vec{w}$*?*

a) $u = \langle 3,-4,-1\rangle$

b) $v = \langle 12,-16,4\rangle$

Producto Escalar

Definition *Si* $\vec{a} = \langle a_1,a_2,a_3\rangle$ *y* $\vec{b} = \langle b_1,b_2,b_3\rangle$, *entonces el producto escalar o producto punto de* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$ *es el número* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *dado por*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Así, para hallar el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se multiplican las componentes correspondientes y se suman. El resultado no es un vector. Es un número real, es decir, un escalar, a veces se llama producto punto (o producto interior). Aunque la definión anterior se da para vectores tridimensionales, el producto escalar de vectores en V_n se define de un modo similar.

Example *Hallar los siguientes productos*

a) $\langle 3,5,7\rangle\cdot\langle -3,8,6\rangle$

b) $(i-3j+6k)\cdot(j-7k)$

Theorem *(Propiedades del producto escalar) Sean* $\vec{u},\vec{v}$ *y* $\vec{w}$ *vectores en el plano o en el espacio y sea* c *un escalar.*

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$

2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

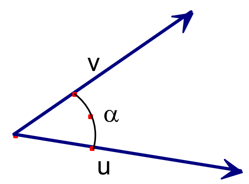
3. $c(\vec{u}\cdot\vec{v}) = c\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot c\vec{v}$

4. $\vec{0}\cdot\vec{v} = 0$

5. $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

Ángulo entre vectores

El ángulo entre dos vectores distintos de cero es el ángulo α, $0 \le \alpha \le \pi$ entre sus respectivos vectores en posición canónica o estándar, como se muestra en la figura .

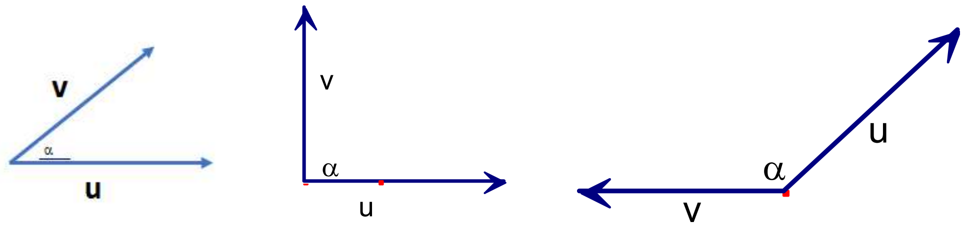


El siguiente teorema muestra cómo encontrar este ángulo usando el producto escalar. (Observar que el ángulo entre el vector cero y otro vector no está definido).

Theorem *Si α es el ángulo entre dos vectores distintos de cero $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces*

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$$

Se puede considerar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ como medida del grado al que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ apuntan en la misma dirección. El producto escalar $\vec{u}\cdot\vec{v}$ es positivo si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ apuntan en la misma dirección general, 0 si son perpendiculares y negativo si apuntan en direcciones opuestas generalmente



$u\cdot v > 0$ $\quad$ $u\cdot v = 0$ $\quad$ $u\cdot v < 0$

En el caso extremo donde $\vec{u}$ y $\vec{v}$ apuntan exactamente en la misma dirección, se tiene $\alpha = 0$, así que $\cos\alpha = 1$ y entonces $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|$

Los vectores no nulos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se llaman perpendiculares u ortogonales si el ángulo entre ellos es $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Entonces

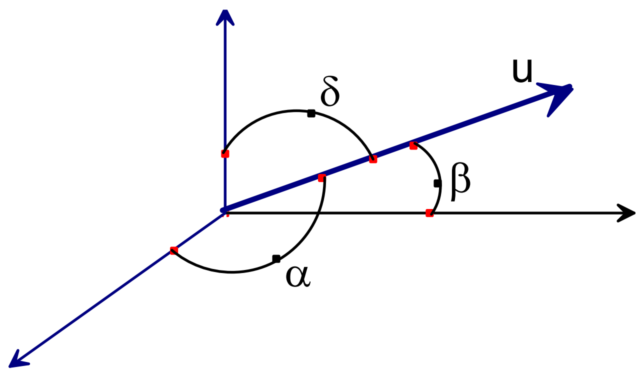
$$u\cdot v = \|u\|\,\|v\|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

y a la inversa si $u\cdot v = 0$, entonces $\cos\alpha = 0$, por lo tanto, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

En consecuencia, se tiene el siguiente método para determinar si dos vectores son ortogonales.

$\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales si y solamente si $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Los **ángulos directores** de un vector $\vec{u}$ diferente de cero son los ángulos α, β y γ (en el intervalo $[0,\pi)$) que un vector $\vec{u}$ forma con los ejes positivos x, y y z



.

Los cosenos de estos ángulos directores, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ y $\cos\delta$, se llaman **cosenos directores** de un vector $\vec{u}$. Si aplicamos la medida de ángulos con el vector i y el vector $\vec{u}$, se obtiene

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\bullet i}{\|\vec{u}\|\|i\|} = \frac{u_1}{\|\vec{u}\|} \qquad \#$$

de igual se manera se optiene

$$\cos\beta = \frac{u\bullet j}{\|u\|\|j\|} = \frac{u_2}{\|\vec{u}\|} \quad \cos\delta = \frac{\vec{u}\bullet k}{\|\vec{u}\|\|k\|} = \frac{u_3}{\|\vec{u}\|} \qquad \#$$

los cosenos directores cumplen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\delta = 1 \qquad \#$$

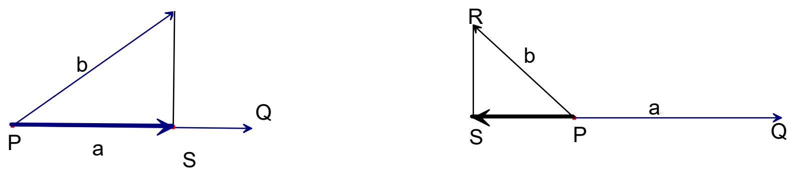
Example *Mostrar la igualdad anterior.*

Usando las igualdades anteriores se puede escribir

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \langle u_1, u_2, u_3\rangle = \langle \|u\|\cos\alpha, \|u\|\cos\beta, \|u\|\cos\delta\rangle \\ &= \|u\|\langle\cos\alpha, \cos\beta, \cos\delta\rangle\end{aligned}$$

Example *Encuentre los ángulos de dirección del vector* $\langle 1,2,3\rangle$

En la figura se muestran las representaciones $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con el mismo punto inicial P. Si S es el pie de la perpendicular de R a la recta que contiene a $\overrightarrow{PQ}$, entonces el vector con representación $\overrightarrow{PS}$ se llama vector proyección de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ y se denota por $proy_a b$. Puede pensarlo como una sombra de $\vec{b}$ en el vertor $\vec{a}$.



$proy_a b$

La *proyección escalar* de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$ (llamada también la componente de $\vec{b}$ a lo largo de $\vec{a}$) se define como la magnitud de la proyección vectorial, que es el número $\|b\|\cos\theta$ donde θ es el ángulo entre los vectores a y b.

Proyección escalar de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$:

$$comp_a b = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\|a\|}$$

Proyección vectorial de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$:

$$proy_a b = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$$

Example *Halle la proyección escalar y la proyección vectorial de* $\langle 1,1,2\rangle$ *sobre a* $\langle 2,3,1\rangle$.

Producto Vectorial o Producto Cruz

El producto cruz $\vec{a}\times\vec{b}$ de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, a diferencia del producto escalar, es un *vector*. Por esta razón se llama producto vectorial. Note que $\overrightarrow{a\times b}$ se define sólo cuando $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores *tridimensionales.*

Definition *Si* $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ *y* $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ *entonces el producto* $\overrightarrow{a\times b}$ *es el vector*

$$\overrightarrow{a \times b} =< a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_2, a_1 b_2 - a_2 b_1 >$$

Existe una similitud de la definion de $\overrightarrow{a \times b}$ con la de un determinante, y probablemente la forma mas sencilla de defininir un producto vectorial

$$\overrightarrow{a \times b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Example *Si $\vec{a} = \langle 5,6,7 \rangle$ y $\vec{b} = \langle -2,5,7 \rangle$ hallar $\overrightarrow{a \times b}$.*

Example *Mostrar que el vector $\overrightarrow{a \times b}$ es perpendicular al vector $\vec{a}$ y al vector $\vec{b}$.*

Propiedades algebraicas del producto vectorial

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores y d un escalar, entonces

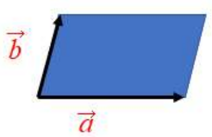
1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\left(\overrightarrow{da}\right) \times \vec{b} = d\left(\overrightarrow{a \times b}\right) = \overrightarrow{a \times (db)}$
3. $\vec{a} \times \left(\overrightarrow{b + c}\right) = \overrightarrow{a \times b} + \overrightarrow{a \times c}$
4. $\left(\overrightarrow{a + b}\right) \times \vec{c} = \overrightarrow{a \times c} + \overrightarrow{b \times c}$
5. $\vec{a} \cdot \left(\overrightarrow{b \times c}\right) = \left(\overrightarrow{a \times b}\right) \cdot \vec{c}$
6. $\vec{a} \times \left(\overrightarrow{b \times c}\right) = (a \cdot c)\vec{b} - (a \cdot b)\vec{c}$

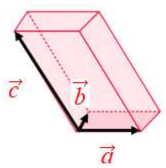
Estas propiedades se pueden demostrar si se escriben los vectores en términos de sus componentes y se usa la definición de un producto cruz. Se dejan las demostraciones como ejercicios.

Propiedades geometricas del producto vectorial

Si $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son vectores distintos de cero en el espacio y d un escalar, entonces

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ es ortogonal tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.
2. $\left\|\overrightarrow{a \times b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \sin\theta$
3. $\overrightarrow{a \times b} = 0$ si y solo si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son multiplos escalares uno de otro es decir, paralelos.
4. $\left\|\overrightarrow{a \times b}\right\|$ =Area del paralelogramo que tiene a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como lados adyacentes.
5. $\left|\vec{c} \cdot \left(\overrightarrow{a \times b}\right)\right|$ =Volumen de un paralepipedo





Example *Calcular el volumen del paralepipedo cuyos lados son los vectores*

$\langle 1,6,8\rangle, \langle -3,2,6\rangle$ *y* $\langle 0,7,8\rangle$.

Example *Mostrar que el cuadrilátero con vértices en los puntos siguientes es un paralelogramo y calcular su área*

$A = (5,2,0) \quad B = (2,6,1) \quad C = (2,4,7) \quad D = (5,0,6)$

.

Ejercicios Resueltos

1. Encuentre el vector unitario en dirección del vector $2i - j - 2k$

Solución:

$\|2i - j - 2k\| = \|(2,-1,-2)\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

Por lo tanto en vector solo cambia de longitud con el producto de un escalar, como su tamaño es 3 cuando se divida entre 3 tendremos un vector unitario

$\frac{1}{3}\langle 2,-1,-2\rangle = \left\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$

2. Sea el punto $P(x_1,y_1)$ y la recta $L : ax + by + c = 0$, demostrar que la distancia del punto P a la recta L es $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, luego usar la fórmula para hallar la distancia del punto $(1,2)$ a la recta $3x + 4y - 1 = 0$.

Solución:

Sea la recta $L = \left\{\left(0, \frac{-c}{b}\right) + \alpha(b,-a)\right\}$ sea $\vec{v} = (b,-a)$ un vector que esta sobre la recta L, sea $\vec{w} = \left(x_1, y_1 + \frac{c}{b}\right)$ un vector que va desde un punto cualquiera de la recta al punto P, entonces la distancia del punto a la recta será igual a $\|\vec{w} - proy_{\vec{v}}\vec{w}\|$ es decir

$$\left\|\vec{w} - \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right\| = \left\|\left\langle x_1, y_1 + \frac{c}{b}\right\rangle - \frac{\left\langle x_1, y_1+\frac{c}{b}\right\rangle\cdot\langle b,-a\rangle}{\|\langle b,-a\rangle\|^2}\langle b,-a\rangle\right\| =$$

$$= \left\|\left\langle x_1, \frac{by_1+c}{b}\right\rangle - \frac{\left\langle x_1, \frac{by_1+c}{b}\right\rangle\cdot\langle b,-a\rangle}{a^2+b^2}\langle b,-a\rangle\right\| =$$

$$= \left\|\left\langle x_1, \frac{by_1+c}{b}\right\rangle - \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{b^2x_1 - aby_1 - ac}{b}\right)\langle b,-a\rangle\right\| =$$

$$= \left\|\left\langle x_1, \frac{by_1+c}{b}\right\rangle - \frac{1}{a^2+b^2}\left\langle b^2x_1 - aby_1 - ac, -\frac{ab^2x_1 - a^2by_1 - a^2c}{b}\right\rangle\right\| =$$

$$= \left|\frac{1}{a^2+b^2}\right|\left\|\left\langle a^2x_1 + b^2x_1 - b^2x_1 + aby_1 + ac, -\frac{a^2by_1+b^3y_1+a^2c+cb^2+ab^2x_1-a^2by_1-a^2c}{b}\right\rangle\right\| =$$

$$= \left|\frac{1}{a^2+b^2}\right|\left\|\left\langle a^2x_1 + aby_1 + ac, \frac{b^3y_1 + cb^2 + ab^2x_1}{b}\right\rangle\right\| =$$

$$= \left|\frac{1}{a^2+b^2}\right|\|\langle a^2x_1 + aby_1 + ac, b^2y_1 + cb + abx_1\rangle\| =$$

$$= \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2+b^2}\right|\|\langle a,b\rangle\| = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}\sqrt{a^2+b^2} = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)}$$

$$dist((1,2), 3x+4y-1=0) = \frac{|3(1)+4(2)-1|}{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)} = \frac{10}{5} = 2$$

3. Demostrar que el punto $\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q})$ es el punto medio del segmento que une los puntos $\vec{p}$ y $\vec{q}$.

Solución: