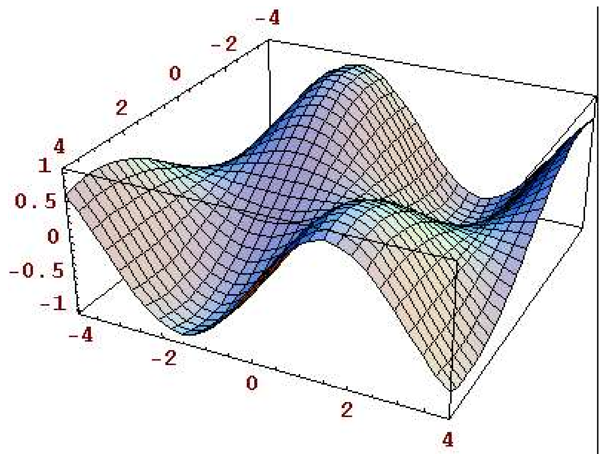
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES



Criterio de desempeño

Conoce las características de la funcion vectorial de variable vectorial para aplicarlas en la resolucion de problemas inherentes a el campo de existencia cyurvas de nivel y limites de funciones variables y su continuidad .

Contenido analitico

1. Definición de Función
2.Campo de existencia
3. Métodos de graficacion de funciones.
4. Curvas de Nivel
5. Limites en funciones de variables
6. Continuidad

Introducción

Muchas funciones dependen de más de una variable independiente. La función $V(r,H) = \pi r^2 H$ calcula, a partir de su radio y su altura, el volumen de un cilindro circular recto. La función $f(x,y) = x^2 + y^2$ calcula la altura del paraboloide sobre el punto $P(x,y)$, a partir de las dos coordenadas de P. La temperatura T de un punto sobre la superficie terrestre depende de su latitud x y su longitud y, lo que se expresa escribiendo $T = f(x,y)$

En esta sección definiremos funciones de más de una variable independiente y analizaremos algunas formas de graficarlas.

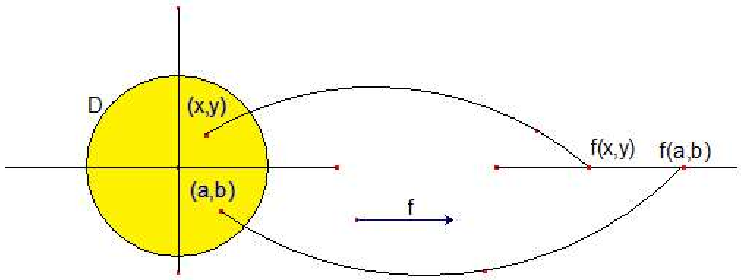
Dominio y rango

Definition *Una función f de dos variables es una regla que asigna a cada par ordenado de números reales (x,y) de un conjunto D, un número real único que se denota con $f(x,y)$. El conjunto D es el dominio de f y su rango es el conjunto de valores que toma f, es decir, $\{f(x,y)/(x,y) \in D\}$.*

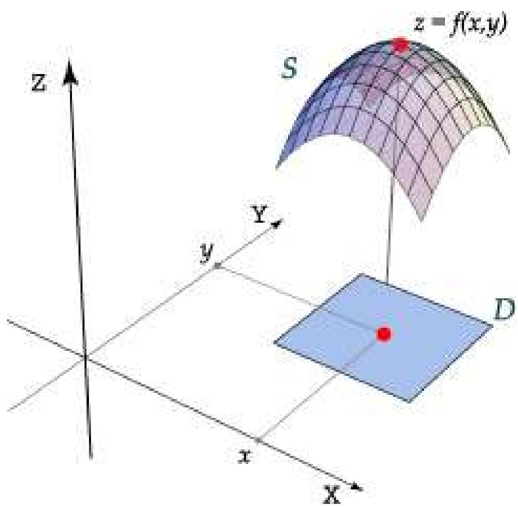
A menudo, se escribe $z = f(x,y)$ para hacer explícito el valor que toma f en el punto (x,y). Las variables x y y son *variables independientes* y z es la *variable dependiente*.

[Compare lo anterior con la notación $y = f(x)$ para funciones de una sola variable.]

Una función de dos variables es justo una función cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ y cuyo rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$. Una manera de representar tal función se logra mediante un diagrama de flechas (véase figura), donde el dominio D_f se representa como un subconjunto del plano xy.



Si una función f está definida por una fórmula y no se especifica dominio alguno, entonces se entiende que el dominio de f será el conjunto de los pares (x,y) para el cual la expresión dada es un número muy bien definido.



Example *Determine los dominios y la grafica de los dominios de las funciones siguientes y evalúe* $f(3,2)$

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

b) $f(x,y) = x\ln(y^2 - x)$

Example *Determine el dominio y rango de* $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma manera que las funciones de una sola variable. Por ejemplo, se puede formar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de funciones de dos variables como sigue.

$(f \pm g)(x,y) = f(x,y) \pm g(x,y)$

$(f \bullet g)(x,y) = f(x,y)g(x,y)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \qquad g(x,y) \neq 0$

Example *Dada la función f definida por*

$$f(x\acute{y}) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x < 0 \text{ y } x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + 3y \text{ si } x \geq 0, y \geq 0 \text{ y } x + 1 < 1 \\ 0 \text{ si } 0 < x \leq 1 \text{ y } -1 \leq y < 0 \end{cases}$$

Represente gráficamente el dominio de f.

1. **a.** Halle, en caso de ser posible:

i. $f(0,0)$

ii. $f(-1,0)$

iii. $f(3,0)$

iv. $f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

v. $f\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

Grafica de una función

Definition *Si f es una función de dos variables con dominio D, entonces la* ***gráfica*** *de f es el conjunto de todos los puntos (x,y,z) en $\mathbb{R}^3$ tal que $z = f(x,y)$ y (x,y) está en D_f.*

Así como la gráfica de una función f de una variable es una curva C con ecuación $y = f(x)$, la gráfica de una función f de dos variables es una superficie S cuya ecuación es $z = f(x,y)$. Se puede representar la gráfica S de f directamente encima o abajo de su dominio D_f en el plano xy.

Example *Describir la función* $f(x,y) = 6 - 3x - 2y$

Example *Describir la función* $f(x,y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$

Curva y superficie de nivel

Hay dos formas usuales de dibujar los valores de una función $f(x,y)$.

1. Consiste en trazar las curvas de nivel en el dominio, donde f asume un valor constante.

2. Consiste en trazar la superficie $z = f(x,y)$, en el espacio como se vio anteriormente.

Definition *(Curva de nivel) El conjunto de puntos en el plano donde una función $f(x,y)$ tiene un valor constante es una curva de nivel de f.*

Example *Graficar la función y trazar las curvas de nivel de la función*

a) $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$

b) $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

Definition *(Superficie de nivel) El conjunto de puntos (x,y,z) en el espacio donde una función de tres variables independientes tiene un valor constante $f(x,y,z) = k$, es una superficie de nivel de f.*

Como las gráficas de funciones de tres variables constan de puntos $(x,y,z,f(x,y,z))$ que están en un espacio con cuatro dimensiones, no podemos trazarlas en nuestro marco de referencia tridimensional. Sin embargo, podemos ver cómo se comporta la función, analizando sus superficies de nivel tridimensionales.

Example *Describa las superficies de nivel de la función*

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Example *(a) determine el dominio de la función y su grafica, (b) determine el rango, (c) describa las curvas de nivel, de las funciones*

1) $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$

2) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

Example *Trace por lo menos tres superficies de nivel de la función*

a) $f(x,y,z) = x+z$

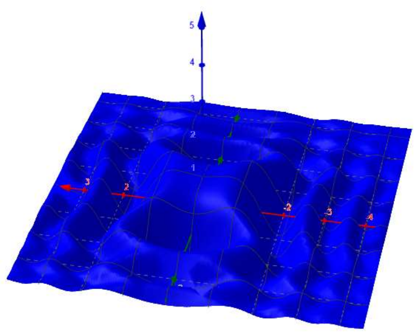
b) $f(x,y,z) = z-x^2-y^2$

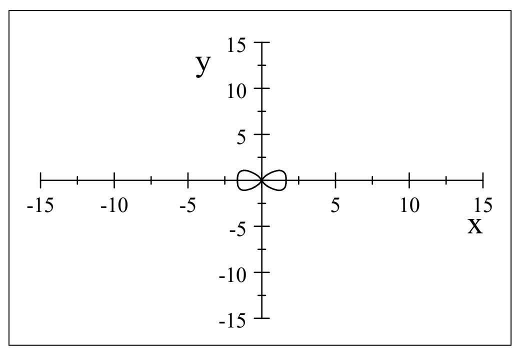
Graficación por computadora

Los programas de graficación tridimensional para las computadoras y las calculadoras permiten graficar funciones de dos variables, oprimiendo unas cuantas teclas. Con frecuencia, podemos obtener información más rápidamente de una gráfica que de una fórmula.

Example *Se muestra gráfica generada por computadora , junto con una curva de nivel.*

$$z = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{8}}(\sin x^2 + \cos y^2)$$





Limites

A modo de entender el comportamiendo de las funciones de 2 variables, se compara el comportamento de las funciones

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{y} \quad g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

cuando x y y tiende a el origen de coordenadas (por lo tanto el punto (x,y) se aproxima al origen).

Valores que toma $f(x,y)$ cuando $(x,y) \to (0,0)$

$x\diagdown y$	-1	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1
-1	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
0.2	0.829	0.986	0.999	1	0.999	0.986	0.829
0	0.841	0.990	1		1	0.990	0.841
0.2	0.829	0.986	0.999	1	0.999	0.986	0.829
0.5	0.759	0.959	0.986	0.990	0.986	0.959	0.759
-1	0.455	0.759	0.829	0.841	0.829	0.759	0.455

notamos que como $(x,y) \to (0,0)$ $f(x,y) \to 1$

valores de la función $g(x,y)$

$x\diagdown y$	-1	-0.5	-0.2	0	0.2	0.5	1
-1	0	0.600	0.923	1	0.923	0.600	0
0.5	0.600	0	0.724	1	0.724	0	-0.600
0.2	-0.923	-0.724	0	1	0	-0.724	-0.923
0	1	1	1		1	1	1
0.2	-0.923	-0.724	0	1	0	-0.724	-0.923
0.5	0.600	0	0.724	1	0.724	0	-0.600
-1	0	0.600	0.923	1	0.923	0.600	0

notamos que como $(x,y) \to (0,0)$ $g(x,y)$ no converge a ningun punto.

Las tablas anteriores se muestran valores de $f(x,y)$ y $g(x,y)$, aproximadas con tres cifras decimales, para los puntos (x,y) cerca del origen. Observe que ninguna función está definida en el origen. Al parecer, cuando (x,y) se aproxima a $(0,0)$, los valores de $f(x,y)$ se aproximan a 1, en tanto que los valores de $g(x,y)$ no tienden a ningún número. Resulta entonces que estas conjeturas basadas en la evidencia numérica son correctas, por lo que

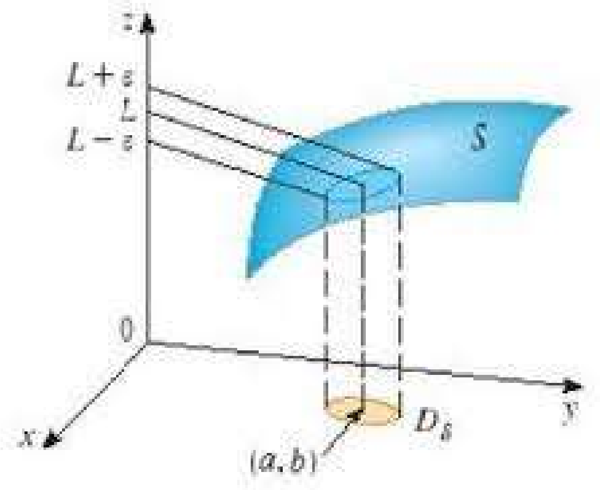
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1 \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \text{No existe}$$

Definition *Sea f una función de dos variables cuyo dominio D contiene, entre otros, puntos arbitrariamente cercanos a (a,b). Entonces, el límite de $f(x,y)$ cuando (x,y) tiende a (a,b) es L por lo que se escribe*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

si para todo número $\varepsilon > 0$ hay un número correspondiente $\delta > 0$ tal que,
si $(x,y) \in D$ y $0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$ entonces $|f(x,y)-L| < \varepsilon$.

Interpretación geometrica



La definición anterior establece que la distancia entre $f(x,y)$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña, haciendo la distancia desde (x,y) a (a,b) suficientemente pequeña, pero no cero. La definición se refiere sólo a la distancia entre (x,y) y (a,b) . No se refiere a la dirección de aproximación. Por consiguiente, si existe el límite, entonces $f(x,y)$ tiene que aproximarse al mismo límite sin que importe cómo (x,y) se aproxima a (a,b) . Por lo tanto, si encuentra dos trayectorias distintas de aproximación a lo largo de las cuales la función $f(x,y)$ tiene diferentes límites, entonces se infiere que no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Si $f(x,y) \to L_1$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ a lo largo de una trayectoria C_1 y $f(x,y) \to L_2$ cuando $(x,y) \to (a,b)$ a lo largo de una trayectoria C_2 donde $L_1 \neq L_2$, entonces **no existe** $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Example *Dada la función g definida por* $g(x,y) = \dfrac{3xy}{x^2+y^2}$

Calcule $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ *en cada caso*

a) A lo largo de la recta de ecuación $x = 0$.
b) A lo largo de la recta de ecuación $y = x$.
c) A lo largo de la recta de ecuación $x = \dfrac{y}{2}$
d) A lo largo de la parábola de ecuación $y = x^2$
e) Concluya acerca de la existencia del límite entorno al origen.

Example *Demuestre que no existe el limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Example *Demuestre que no existe el limite* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Example *Verifique que el límite* $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy-2x-y+2}{x^2-2x+y^2-4y+5}$ *no existe.*

Remark *Observe la siguiente propiedad*

Si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = c$ *y si existen* $\lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ *y* $\lim\limits_{y\to b} f(x,y)$ *entonces existen los limites iterados*

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = c$$

El recíproco no es cierto.

Continuidad

Definition *Se dice que una función f de dos variables es continua en (a,b), si*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

f es continua en D si f es continua en todos los puntos (a,b) de D.

Theorem *Toda función polinomial de dos variables es continua en $\mathbb{R}^2$.*

Theorem *Toda función racional de dos variables es continua excepto en los puntos que anulan el denominador.*

Theorem *Si k es un número real y f y g son dos funciones reales continuas en (a,b) , entonces las funciones $kf, f \pm g, fg, f/g, sig(a,b) \neq 0$, son continuas en (a,b) .*

Example *¿ Dónde es continua la función $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$?*

Example *Estudie la continuidad de la función real f de dos variables definida por:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\ (x,y) \neq 0 \\ 0 \quad si & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ejercicios resueltos

1. Halle el dominio de la funcion dada $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-16}$ y graficar dicho dominio

   solucion:

   para que $z \in R$. debe ocurrir que $x^2+y^2-16 \geq 0$

   $x^2+y^2 \geq 4^2$

   $D_f = \{(x,y) \in R^2 / x^2+y^2 \geq 4^2\}$