PRÁCTICA 5

1) Hallar la norma, la distancia y el ángulo en los siguientes casos:

a) $u = (3,4)$, $v = (12,5)$

b) $u = (2,1,2)$, $v = (3,2,6)$

c) $p = 6 + 8x^2$, $q = 4 + 2x + 4x^2$

Rpta.-

a) 5 ; 13 ; $\sqrt{82}$; 30,5°

b) 3 ; 7 ; $3\sqrt{2}$; 17,7°

c) 10 ; 6 ; $2\sqrt{6}$; 21,04°

2) Sean: $u = (3,4)$, $v = (12,5)$ vectores en $\mathbb{R}^2$, el producto interior está definido por: $\langle u, v\rangle = 2u_1v_1 + 5u_2v_2$. Calcular la norma, la distancia y el ángulo entre vectores.

Rpta.- 9,9 ; 20,3 ; 12,9 ; 31,2

3) En el espacio vectorial $M_{m\times n}$con elementos en R, se tiene el siguiente producto interno:

$$\langle A, B\rangle = tr\,(A^tB) \qquad \forall\ A, B \in M_{m\times n}$$

$Si \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, Determinar $\alpha \in R$, tal que:

a) La distancia entre A y B sea $\sqrt{3}$

b) El ángulo entre A y B sea 60°

Rpta.- $a = \pm 1$; $\alpha = 0$

4) Determinar si el vector $(-1,1,0,2)$ es ortogonal al subespacio de $\mathbb{R}^4$: $(0,0,0,0)$ $(1,-5,-1,2)(4,0,9,2)$

Rpta.- No es

5) ¿Para qué valores de k son ortogonales u y v?

a) $u = (2,1,3)$ $v = (1,7,k)$ b) $u = (k,k,1)$ $v = (k,5,6)$

Rpta.- $k = -3$; $k = -2$; $k = -3$

6) Encontrar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por los vectores :

a) $v_1 = (1,-1,3)$ $v_2 = (5,-4,-4)$ $v_3 = (7,-6,2)$

b) $v_1 = (2,0,-1)$ $v_2 = (4,0,-2)$

c) $v_1 = (1,4,5,2)$ $v_2 = (2,1,3,0)$ $v_3 = (-1,3,2,2)$

Rpta.- $(8t\,;9t\,;t)$ $(s\,;t\,;2s)$ $(-t+2s\,;-t-4s\,;t\,;7s)$

7) Demostrar que si u y v son vectores ortogonales tales que $\|u\| = \|v\| = 1$ entonces $\|u - v\| = \sqrt{2}$

8) Determinar cuáles de los siguientes polinomios son ortogonales entre sí.

$$P(x) = 2 + 3x - x^2 \;;\; Q(x) = 4 + 2x + 2x^2 \;;\; R(x) = 1 + 4x - 6x^2 \;;\; S(x) = 1 - 5x + 3x^2$$

Rpta.- $Q(x) - S(x)$; $Q(x) - R(x)$

9) Encontrar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ con norma uno cuyo producto escalar con $(3, -1)$ sea cero

Rpta.- $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

10) Dados los vectores $(3, 4, 2, 3)$; $(6, 6, 1, 5)$; $(3, 2, 5, 2)$ Hallar otro vector ortonormal a cada uno de los anteriores

Rpta.- $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, 0, -\frac{6}{7}\right)$

11) Verificar que los siguientes vectores son ortonormales entre sí:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

b) $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Rpta.- SI , SI

12) Comprobar que los vectores $v_1 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$; $v_2 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$; $v_3 = (0, 0, 1)$ forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. Expresar cada uno de los siguientes vectores como una combinación lineal de v_1, v_2, v_3

Rpta.- SI es base ortonormal ; $-\frac{7}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 + 2v_3$ $\quad -\frac{37}{5}v_1 - \frac{9}{5}v_2 + 4v_3$

13) El plano P en $\mathbb{R}^3$, es generado por la siguiente base: $\{(1, 2, 3), (0, -3, 2)\}$ determinar la proyección del vector $V = (2, -4, 8)$ sobre el plano P.

Rpta.- $\left(\frac{117}{91}, -\frac{354}{91}, \frac{743}{91}\right)$

14) Determinar la proyección ortogonal de u sobre el sub espacio $W = \{v_1, v_2\}$

a) $u = (2, 1, 3)$ $v_1 = (-1, 2, 1)$ $v_2 = (2, 2, 4)$

b) $u = (0, 1, -1)$ $v_1 = (-1, 2, 1)$ $v_2 = (-2, 4, 2)$

Rpta.- $(2, 1, 3)$ $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

15) Encontrar la proyección ortogonal de u sobre el espacio vectorial generado por a

a) $u = (-1, -2)$ $a = (-2, 3)$

b) $u = (1, 0, 0)$ $a = (4, 3, 8)$

Rpta.- $\left(\frac{8}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ $\left(\frac{16}{89}, \frac{12}{89}, \frac{32}{89}\right)$

16) Hallar la proyección ortogonal del vector $u = (5\,,6\,,7\,,2)$ sobre el espacio solución del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Rpta.- $(0\,,0\,,0\,,1)$

17) Determinar una base ortogonal del complemento ortogonal del subespacio S.

$$S = \{(a,b,c)/a - b - c = 0 \quad \wedge \quad b - c = 0\}$$

Rpta.- $\{(1\,,-2\,,0),(-2\,,-1\,,5)\}\ es\ base\ ortogonal\ de\ S^{\perp}$

18) Encontrar una base ortonormal del siguiente espacio vectorial V:

$$V = \{(x,y,z,u)\mathbb{R}^4 \,/\, x - y + u = 0 \quad ; \quad x + 2z = 0\}$$

Rpta.- $\left(-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\ ;\ -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\ ;\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\ ;\mathbf{0}\right)\ \left(-\frac{4}{3\sqrt{14}}\,,\frac{5}{3\sqrt{14}}\,,\frac{2}{3\sqrt{14}}\,,\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$

19) Encontrar una base ortonormal del siguiente espacio vectorial V:

$$V = \{(x,y,z)\mathbb{R}^3 \,/\, 2x + y - z = 0\}$$

Rpta.- $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\frac{2}{\sqrt{5}}\,,0\right)\ \left(\frac{2}{\sqrt{30}}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{30}}\ ;\ \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$

20) Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $5x - 3y + z = 0$

a) Encontrar una base para W

b) Encontrar la distancia entre el punto $\mathrm{P}(1\,,-2\,,4)$ y el subespacio W

Rpta.- $(3t - s\,,5t\,,5s)\quad ;\quad \sqrt{\frac{45}{7}}$

21) Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{u_1\,,u_2\}$ en una base ortonormal

a) $u_1 = (1\,,-3)\,,\ u_2 = (2\,,2)$

b) $u_1 = (1\,,0)\,,\ u_2 = (3\,,-5)$

22) Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{u_1\,,u_2,u_3\}$ en una base ortonormal

a) $u_1 = (1\,,1\,,1)\,,\ u_2 = (-1\,,1\,,0)\ ,\ u_3 = (1\,,2\,,1)$

b) $u_1 = (1\,,0\,,0)\,,\ u_2 = (3\,,7\,,2)\,,u_3 = (0\,,4\,,1)$

23) Sean los vectores: $u_1 = (1\,,-1\,,-1)\,,\ u_2 = (0\,,3\,,3)\,,\ u_3 = (3\,,2\,,4)$ que forman una base en $\mathbb{R}^3$. Aplique el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal.

24) Sea la base para el espacio vectorial P_2: $(1 + x + x^2\ ,\ 1 + x\ ,\ 1)$ Aplique el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal

Rpta.- $q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}}\quad ,\quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{2x^2}{\sqrt{6}}\quad ,\quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}}$