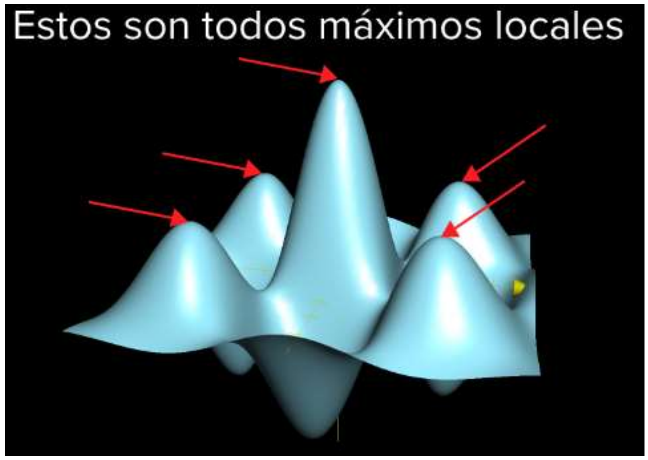
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS



Criterio de desempeño

Aplicar los conceptos de derivadas parciales a través de estrategias que permitan la resolución de problemas de calculo de áreas, volúmenes y que se apliquen en la vida cotidiana desarrollando en los estudiantes el razonamiento lógico y analítico.

Contenido analitico

1.Planos tangentes y rectas normales a superficies
2. Máximos y mínimos
3.Maximos y mínimos condicionales
4.Problemas de planteo

Planos Tangentes y Rectas Normales

Hasta ahora las superficies en el espacio se han representado principalmente por medio de ecuaciones de la forma $z = f(x,y)$, sin embargo, en el desarrollo que sigue, es conveniente utilizar la representación más general $F(x,y,z) = 0$. Una superficie S dada por $z = f(x,y)$ se puede convertir a la forma general definiendo F como:

$F(x,y,z) = f(x,y) - z$

Puesto que $f(x,y) - z = 0$ se puede considerar S como la superficie de nivel de F dada por

$$F(x,y,z) = 0 \text{ ecuación alternativa de la superficie } S$$

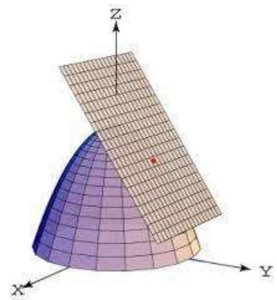
Example *Dada la función $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$ describir la superficie de nivel dada por $F(x,y,z) = 0$.*

Definition *Sea F diferenciable en un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ de la superficie S dada por $F(x,y,z) = 0$ tal que $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \neq 0$.*
*1.- Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se le llama **plano tangente** a S en P.*
*2.- A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ se le llama r**ecta normal** a S en P.*

Como es normal al plano tangente en (x_0,y_0,z_0) debe ser ortogonal a todo vector en el plano tangente en, y se tiene $\nabla F(x_0,y_0,z_0) \cdot v = 0$ donde $v = \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle$ donde (x,y,z) un punto arbitrario en el plano tangente, lo que demuestra el resultado enunciado en el teorema siguiente.

Theorem *(Ecuación del plano tangente) Si F es diferenciable en (x_0,y_0,z_0) entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x,y,z) = 0$ en (x_0,y_0,z_0) es*

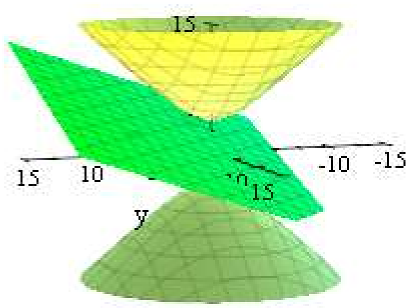
$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x - x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y - y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z - z_0) = 0$$



Example *Hallar una ecuación del plano tangente al hiperboloide de dos hojas $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ en el punto $(1,-1,4)$.*

Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar planos tangentes a superficies. En el ejemplo anterior su grafica de la superficie y el plano tangente seria:

$x - y - 2z + 6 = 0$



Example *Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide $z(x,y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$ en el punto $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$.*

Example *Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por $xyz = 12$ en el punto $(2,-2,-3)$.*

Example *Determine el plano tangente a la superficie $z = x\cos y - ye^x$ en $(0,0,0)$.*

Example *Las superficies*

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$ y $g(x,y) = x + y - 4$

Se cortan en una elipse Determine ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la elipse en el punto $P_0(1,1,3)$.

Maximos y minimos

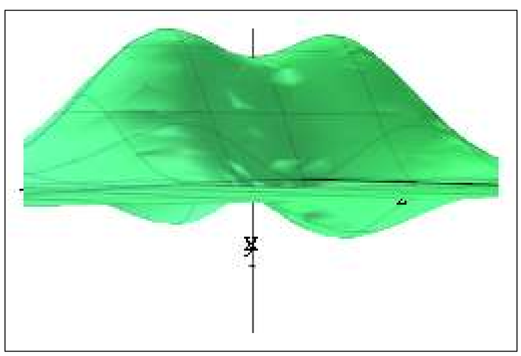
Valores extremos y puntos silla

Para determinar los valores extremos locales de una función de una variable, buscamos los puntos donde la gráfica tiene una recta tangente horizontal. En tales puntos, buscamos los máximos locales, los mínimos locales y los puntos de inflexión. Para una función $f(x,y)$ de dos variables, buscamos los puntos donde la superficie $z = f(x,y)$ tiene un plano tangente horizontal. En tales puntos, buscamos los máximos locales, los mínimos locales y los puntos silla.

Definition *(Máximo local, mínimo local)*
Sea $f(x,y)$ definida en una región R que contiene al punto (a,b). Entonces,
1. $f(a,b)$ es un valor máximo local de f si $f(a,b) \geq f(x,y)$ para todos los puntos del dominio (x,y) en un disco abierto con centro en (a,b).
2. $f(a,b)$ es un valor mínimo local de f si $f(a,b) \leq f(x,y)$ para todos los puntos del dominio (x,y) en un disco abierto con centro en (a,b).

Los máximos locales corresponden a picos de montaña en la superficie $z = f(x,y)$ y los mínimos locales corresponden a fondos de valle. En tales puntos, los planos tangentes (cuando existen) *son horizontales*. Los extremos locales también se conocen como extremos relativos.

Decir que f tiene un máximo local relativo en (x_0,y_0) significa que el punto (x_0,y_0,z_0) es por lo menos tan alto como todos los puntos cercanos en la gráfica de $z = f(x,y)$. De manera similar, f tiene un mínimo relativo en (x_0,y_0) si (x_0,y_0,z_0) es por lo menos tan bajo como todos los puntos cercanos en la gráfica.



Definition *(Punto critico) Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0,y_0). El punto (x_0,y_0) es un punto crítico de f, si se satisface una de las condiciones siguientes:*
a.- $f_x(x_0,y_0) = 0$ y $f_y(x_0,y_0) = 0$
b- $f_x(x_0,y_0)$ o $f_y(x_0,y_0)$ no existen.

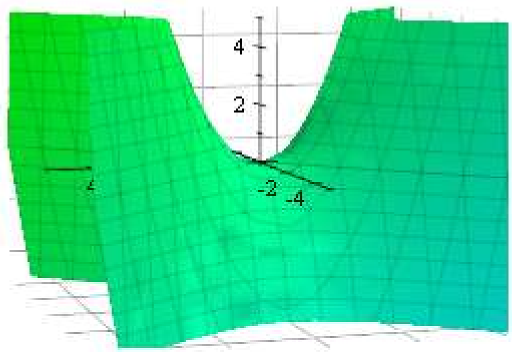
Theorem *Si f tiene un extremo relativo en (x_0,y_0) en una región abierta R, entonces (x_0,y_0) es un punto crítico de f.*

Example *Hallar los puntos criticos de*
1) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$
2) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$

Criterio de las segundas derivadas

El siguiente teorema afirma que para encontrar extremos relativos, sólo se necesita examinar los valores de $f(x,y)$ en los puntos críticos. Sin embargo, como sucede con una función de una variable, los puntos críticos de una función de dos variables no siempre son máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos dan **puntos silla** que no son ni máximos relativos ni mínimos relativos.

Como ejemplo de un punto crítico que no es un extremo relativo, considérese la superficie dada por $f(x,y) = y^2 - x^2$



Paraboloide hiperbólico que se muestra en la figura. En el punto $(0,0)$, ambas derivadas parciales son 0. Sin embargo, la función f no tiene un extremo relativo en este punto ya que en todo disco abierto centrado en $(0,0)$ la función asume valores negativos (a lo largo del eje x) y valores positivos (a lo largo del eje y). Por tanto, el punto $(0,0,0)$ es un punto silla de la superficie.

Theorem *Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a,b) para el cual*

$$f_x(a,b) = 0 \quad f_y(a,b) = 0$$

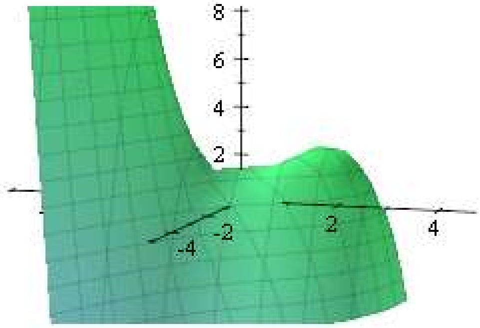
Para buscar los extremos relativos de f, considérese la cantidad
$d(a,b) = f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - (f_{xy}(a,b))^2$
*1) Si $d(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) > 0$ entonces f tiene un **mínimo relativo** en $(a,b,f(a,b))$*
*2) Si $d(a,b) > 0$ y $f_{xx}(a,b) < 0$ entonces f tiene un **máximo relativo** en $(a,b,f(a,b))$*
*3) Si $d(a,b) < 0$ entonces $(a,b,f(a,b))$ es un **punto silla***
4) Si $d(a,b) = 0$ el criterio no lleva a ninguna conclusión

Remark *Si $d > 0$ entonces f_{xx} y f_{yy} deben tener el mismo signo. Esto significa que f_{xx} puede sustituirse por f_{yy} en las dos primeras partes del teorema.*

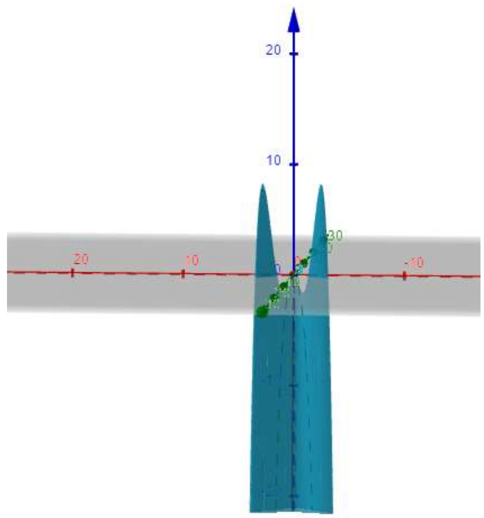
Un recurso conveniente para recordar la fórmula de d en el criterio de las segundas derivadas parciales lo da el determinante de 2×2

$$d(a,b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix}$$

Example *Identificar los extremos relativos de $f(x,y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$*



Example *Identificar los extremos relativos de* $f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2 - x^4 - 2y^4$



Example *Calcule la distancia más corta desde el punto* $(1,0,2)$ *al plano* $x + 2y + z = 4.$ *y el punto que determina esta distancia.*

Example *Una caja rectangular sin tapa se fabrica con* $12\ m^2$ *de cartón. Calcule el volumen máximo de la caja.*

Example *La base de un acuario de volumen* V *está hecho de pizarra y los lados son de vidrio. Si la pizarra cuesta cinco veces más por unidad de área que el vidrio, determine las dimensiones del acuario que minimizan el costo de los materiales.*

Example *Si la longitud de la diagonal de una caja rectangular debe ser* L*, ¿cuál es el volumen más grande posible?*

Multiplicadores de Lagrange

Muchos problemas de optimización tienen restricciones, o ligaduras, para los valores que pueden usarse para dar la solución óptima. Tales restricciones tienden a complicar los problemas de optimización porque la solución óptima puede presentarse en un punto frontera del dominio. En esta sección se estudia una ingeniosa técnica para resolver tales problemas.

Es el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Theorem *Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas, y tales que f tiene un extremo en un punto (x_0,y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x,y) = c$ donde $c \in R$. Si $\nabla g(x_0,y_0) \neq 0$ entonces existe un número real λ tal que:*

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

El método de los multiplicadores de Lagrange emplea el teorema anterior para encontrar los valores extremos de una función f sujeta a una restricción.

Theorem *Sean f y g funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange, y sea f una función que tiene un mínimo o un máximo sujeto a la restricción $g(x,y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f seguir los pasos descritos a continuación.*

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$ y $g(x,y) = c$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente.

$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y)$
$f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y)$
$g(x,y) = c$

2. Evaluar en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción $g(x,y) = c$ y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción $g(x,y) = c$.

Example *Hallar el valor maximo de $f(x,y) = 4xy$ donde $x > 0$ y $y > 0$ sujeto a la restricción $\left(\frac{x^2}{3^2}\right) + \left(\frac{y^2}{4^2}\right) = 1$*

Example *La función de producción de Cobb-Douglas para un fabricante de software está dada por $f(x,y) = 100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{4}}$ .donde x representa las unidades de trabajo (a $\$150$ por unidad) y y representa las unidades de capital (a $\$250$ por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a $\$50000$. Hallar el nivel máximo de producción de este fabricante.*

Example *Hallar el valor minimo de $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ sujeto a restricción o ligadura $2x - 3y - 4z = 49$.*

El método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

En problemas de optimización que involucran dos funciones de restricción g y h se puede introducir un segundo multiplicador de Lagrange μ, (letra minúscula mu del alfabeto griego), y resolver la ecuación

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

donde los vectores gradiente no son paralelos.

Example *Sea $T(x,y,z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 11$. Hallar las temperaturas extremas en la curva formada por la intersección del plano $x + y + z = 3$ y la esfera.*