CAP#01: OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

1.1. TÉRMINO ALGEBRAICO

Definición	Ejemplos
Es una expresión matemática que está compuesta por varios elementos (Coeficiente, parte literal y exponente).	$7\frac{x^2}{y}$
	$-4\sqrt{xy}$
	$6x^{-\frac{1}{3}}$

1.2. EXPRESIÓN ALGEBRAICA

Definición	Ejemplos
Es un conjunto de números y letras asociadas entre sí mediante las seis operaciones del álgebra (Suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación).	$a=7\frac{x^2}{y}+\frac{3}{4}x^{10}y$
	$b=6x^{-2}+-4\sqrt{xy}$
	$c=\left(6x^{-\frac{1}{3}}+xy\right)\left(\sqrt{11}x^6z+\frac{x}{z}\right)$

1.3. POLINOMIO ALGEBRAICO

Definición	Ejemplos
Es una expresión algebraica que constituye la suma o la resta ordenadas de un número finito de términos con exponentes numéricos positivos.	$P_{(x)}=4x^2y-3xy^2$
	$Q_{(x)}=-8x^3+9x^2-1$
	$R_{(x)}=9x^4-x^3+3x^2-1$

1.4. LEYES DE EXPONENTES Y RADICALES

Leyes de EXPONENTES	
$a^n a^m=a^{n+m}$	$a^n b^n=(ab)^n$
$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m} \quad ;a\neq 0$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad ;b\neq 0$
$\left(a^n\right)^m=a^{nm}$	$\left(a^n\right)^{m^r}=a^{nm^r}$
$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \quad ;a\neq 0$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n \quad ;a\wedge b\neq 0$
$a^0=1 \quad ;a\neq 0$	$a^1=a$

Leyes de RADICALES	
$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$
$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$	$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$
$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad ;b\neq 0$	$\frac{\sqrt[n]{a}}{b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b^n}} \quad ;b\neq 0$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[nm]{a}$	$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nr]{a^{mr}}$

1.5. SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición	
Sean a,b,s expresiones algebraicas: $s=a+b$	
Propiedades suma y resta algebraica	
$a+b=b+a$	$(a+b)+c=a+(b+c)$
$a-b=a+(-b)$	$k_1a+k_2a=(k_1+k_2)a$
$a+0=a$	$a-a=0$

Regla de signos	Ejemplos
Términos semejantes con signos iguales se suman y se copia el signo al resultado	$8a+3a=11a$
	$-2a-5a=-7a$
Términos semejantes con signos distintos se restan y se copia el signo del mayor al resultado.	$-3a+a=-2a$
	$-5a+12a=7a$

1.6. MULTIPLICACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición		
Sean a,b,p expresiones algebraicas: $p = a \cdot b = ab$		
Propiedades multiplicación algebraica		
$ab = ba$	$(ab)c = a(bc)$	
$a(b+c) = ab + ac$		$a \cdot 1 = a$
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$		$a \cdot 0 = 0$

Ley de signos multiplicación	Ejemplo
$(+)(+) = (+)$	$(8a)(3b) = 24ab$
$(+)(-) = (-)$	$(2a)(-5b) = -10ab$
$(-)(+) = (-)$	$(-3a)(2b) = -6ab$
$(-)(-) = (+)$	$(-7a)(-2b) = 14ab$

1.7. PRODUCTOS NOTABLES

Cuadrado de un binomio	Suma y diferencia
$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Cubo de un binomio	
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	
Producto de la forma I	
$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$	
Producto de la forma II	
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	
Producto de la forma III	
$(mx+a)(nx+b) = mnx^2 + (an+bm)x + ab$	

1.8. BINOMIO DE NEWTON

Forma General	
$(a \pm b)^2 = C_0 a^n \pm C_1 a^{n-1} b + C_2 a^{n-2} b^2 \pm \ldots + C_n b^n$	
Número de términos	**Termino k-ésimo**
$N = n + 1$	$t_k = \binom{n}{k-1} a^{N-k} b^{k-1}$

Coeficientes (Números Combinatorios)

$$C_k = \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!}$$

$$Factorial \rightarrow \begin{cases} n! = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1) \\ 0! = 1 \qquad\qquad 1! = 1 \end{cases}$$

Coeficientes (Triángulo de Pascal)

$$\begin{array}{ccccccccccl}
 & & & & 1 & & & & & & C_k \rightarrow n=0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & C_k \rightarrow n=1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & C_k \rightarrow n=2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & C_k \rightarrow n=3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & C_k \rightarrow n=4 \\
\therefore & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots &
\end{array}$$

1.9. FACTORIZACIÓN

Factor Común	Trinomio cuadrado perfecto
$ab + ac = a(b+c)$	$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$
Cuatrinomio cubico perfecto	
$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$	
Diferencia de cuadrados	
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	
Suma y diferencia de cubos	
$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$	
Trinomio de la forma	
$x^2 + px + q = (x+a)(x+b) \rightarrow \begin{cases} a+b=p \\ ab=q \end{cases}$	

Aspa simple

$$px^2 + qx + r = (mx+a)(nx+b)$$

$$\begin{array}{cc} mx & a \\ nx & b \end{array} \Bigg\} \rightarrow an + bm = q$$

Aspa doble I

$$px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = (mx^2 + ax + b)(nx^2 + cx + d)$$

$$\begin{array}{ccc} mx^2 & ax & b \\ nx^2 & cx & d \end{array} \Bigg\} \rightarrow \begin{cases} cm + an = q \\ ad + bc = s \\ dm + bn = r \end{cases}$$

Aspa doble II
$px^2+qxy+ry^2+sy+tx+u=(mx+ay+b)(nx+cy+d)$
$\begin{array}{ccc} mx & ay & b \\ nx & cy & d \end{array} \rightarrow \begin{cases} cm+an=q \\ ad+bc=s \\ dm+bn=t \end{cases}$

Factor recíproco
$px^6+qx^5+rx^4+sx^3+rx^2+p$
$=x^3\left[p\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+q\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+r\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]$
$CV:\begin{cases} x+\frac{1}{x}=u \\ x^2+\frac{1}{x^2}=u^2-2 \\ x^3+\frac{1}{x^3}=u^3-3u \end{cases}$

Método de Ruffini
$px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots+s$
$=(x-a)\left(px^{n-1}+bx^{n-2}+cx^{n-3}+\ldots+d\right)$
$\left.\begin{array}{c\|ccccc} & p & q & r & \ldots & s \\ a & \downarrow & ap & ab & \ldots & -s \\ \hline & p & b & c & \ldots & \boxed{0} \end{array}\right\rangle \rightarrow \begin{cases} b=q+ap \\ c=r+ab \end{cases}$

1.10. DIVISIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Definición
Sean a,b,c expresiones algebraicas
$c=a\div b=\frac{a}{b}$

Propiedades división algebraica		
$\frac{a}{b}=\left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$	$\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$	
$\frac{0}{a}=0$	$\frac{a}{1}=a$	$\frac{a}{a}=1$

Ley de signos DIVISIÓN	Ejemplo
$\frac{(+)}{(+)}=(+)$	$\frac{8a}{2b}=\frac{4a}{b}$
$\frac{(+)}{(-)}=(-)$	$\frac{9a}{-3b}=-\frac{3a}{b}$
$\frac{(-)}{(+)}=(-)$	$\frac{-14a}{2b}=-\frac{7a}{b}$
$\frac{(-)}{(-)}=(+)$	$\frac{-18a}{-6b}=\frac{3a}{b}$

1.11. TEOREMA DEL RESTO

Definición
Sean $P_{(x)}$ y $Q_{(x)}$ polinomios algebraicos:
$\frac{P_{(x)}}{D_{(x)}}=C_{(x)}+\frac{R}{D_{(x)}}\rightarrow \boxed{P_{(x)}=C_{(x)}D_{(x)}+R}$
$D_{(x)}=0\rightarrow x=k\rightarrow \boxed{P_{(k)}=R}$
Sí $R=0$ entonces $P_{(x)}$ es divisible entre $Q_{(x)}$.
Sí $R\neq 0$ entonces $P_{(x)}$ no es divisible entre $Q_{(x)}$.

1.12. COCIENTES NOTABLES

Caso#01. Cociente exacto para todo n
$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}$
Caso#02. Cociente exacto para n par
$\frac{a^n-b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}$
Caso#03. Cociente exacto para n impar
$\frac{a^n+b^n}{a+b}=a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+ab^{n-2}-b^{n-1}$

Forma General	Número de términos
$\frac{a^r+b^s}{a^p+b^q}\rightarrow\frac{\left(a^p\right)^{\frac{r}{p}}+\left(a^q\right)^{\frac{s}{q}}}{a^p+b^q}$	$n=\frac{r}{p}=\frac{s}{q}$
Termino k-ésimo	
$t_k=a^{n-k}b^{k-1}\rightarrow Caso\#1$ $t_k=(-1)^{k-1}a^{n-k}b^{k-1}\rightarrow\begin{cases} Caso\#2 \\ Caso\#3 \end{cases}$	
Términos centrales	
$\left.t_c=t_{\frac{n+1}{2}}=(ab)^{\frac{n-1}{2}}\right\rangle\rightarrow\begin{cases} Caso\#1 \\ n\rightarrow impar \end{cases}$	

$$\left.\begin{aligned} t_{c_1} &= t_{\frac{n}{2}} = a^{\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}-1} \\ t_{c_2} &= t_{\frac{n}{2}+1} = a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\rangle \rightarrow \begin{cases} Caso\#1 \\ n \rightarrow par \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} t_{c_1} &= t_{\frac{n}{2}} = a^{\frac{n}{2}} (-b)^{\frac{n}{2}-1} \\ t_{c_2} &= t_{\frac{n}{2}+1} = a^{\frac{n}{2}-1} (-b)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}\right\rangle \rightarrow Caso\#2$$

$$\left. t_c = t_{\frac{n+1}{2}} = (-ab)^{\frac{n-1}{2}} \right\rangle \rightarrow Caso\#3$$

1.13. SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición para FRACCIONES HOMOGÉNEAS

Sean a,b,c,d expresiones algebraicas:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

Definición para FRACCIONES HETEROGÉNEAS

Sean a,b,c,d expresiones algebraicas:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{pa+qc}{e} \rightarrow \begin{cases} e = mcm(c,d) \\ p = \dfrac{e}{c} \\ q = \dfrac{e}{d} \end{cases}$$

1.14. MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición

Sean a,b,c,d expresiones algebraicas:

$$\frac{a}{c}\times\frac{b}{d}=\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d}$$

1.15. DIVISIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS

Definición

Sean a,b,c,d expresiones algebraicas:

$$\frac{a}{c}\div\frac{b}{d}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

1.16. RACIONALIZACIONCOCIENTES NOTABLES

Raíz cuadrada	Raíz n-ésima
$\dfrac{p}{\sqrt{a}}\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}\right)=\dfrac{p\sqrt{a}}{a}$	$\dfrac{p}{\sqrt[n]{a^k}}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a^{n-k}}}{\sqrt[n]{a^{n-k}}}\right)=\dfrac{p\sqrt[n]{a^{n-k}}}{a}$

Suma o diferencia de raíces cuadradas

$$\frac{p}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}\left(\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}\right)=\frac{p\left(\sqrt{a}\mp\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Suma o diferencia de raíces cubicas

$$\frac{p}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}\right)$$
$$=\frac{p\left(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}\right)}{a\pm b}$$

Suma o diferencia de raíces n-ésima pares

$$\frac{p}{\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}\left(\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}\mp\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\mp\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}\mp\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\mp\sqrt[n]{b^{n-1}}}\right)$$
$$=\frac{p\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}\mp\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots\mp\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a-b}$$

Suma o diferencia de raíces n-ésima impares

$$\frac{p}{\sqrt[n]{a}\pm\sqrt[n]{b}}\left(\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}\mp\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^{n-1}}\mp\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}}\right)$$
$$=\frac{p\left(\sqrt[n]{a^{n-1}}\mp\sqrt[n]{a^{n-2}b}+\ldots+\sqrt[n]{b^{n-1}}\right)}{a\pm b}$$