Sea A una matriz de dimensión 2×3 Hallar la dimensión de la matriz B, tal que el producto $B \cdot A$ tenga una sola fila

$$B \cdot A$$

$$m \times \boxed{n = 2} \times 3$$

$$m \times 3$$

$$m = 1$$

$$\Rightarrow B_{1 \times 2}$$

Sea $A_{6\times 3}$, $B_{m\times n}$, $C_{5\times 8}$ Determinar las dimensiones de B y ABC

$$A \cdot B \cdot C$$
$$6\times 3 \quad m\times n \quad 5\times 8$$

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

$$6\times \boxed{3 = m}\times n \qquad m\times \boxed{n = 5}\times 8$$

$$\Rightarrow B_{3\times 5}$$

$$A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C$$

$$6\times \boxed{3 \quad 3}\times 5$$

$$6\times \boxed{5 \quad 5}\times 8 \rightarrow 6\times 8 \Rightarrow (A \cdot B \cdot C)_{6\times 8}$$

Determinar X en la ecuación matricial $AX - 2AB = AB - 2X + BA$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AX - 2AB = AB - 2X + B \cdot A$$

$$AX + 2X = AB + BA + 2AB$$

$$(A+2)X = 3AB + BA$$

$$A + 2 = A + 2I$$

$$(A+2I)X = 3AB + BA$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \underbrace{3\left[\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right] + \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]}_{3\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+3c & 3b+3d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a+3c = -1 \\ 3b+3d = 2 \\ 3c = -4 \\ 3d = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5/3 \\ c = -4/3 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Construya una matriz $B_{4\times 2}$ usando sólo 1 y 0 como entradas, de tal forma que $A \cdot B = I_2$

$$\underbrace{(2\times\boxed{4)\,(m}\times n)}_{2\times n} = 2\times 2 \qquad \left\{\begin{array}{l} m=4 \\ n=2 \\ \Rightarrow B_{4\times 2} \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+c+e & b+d+f \\ c+e+g & d+f+h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a+c+e=1 \rightarrow a=1;\ c=0;\ e=0 \\ b+d+f=0 \rightarrow b=0;\ d=0;\ f=0 \\ c+e+g=0 \rightarrow g=0 \\ d+f+h=1 \rightarrow h=1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \#$$

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ encontrar la expresión general de la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tal que el producto de ambas conmute

$$A \cdot B = B \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2c & 3c \\ 2a+5c & 2b+5c & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2b & 2a+5b & c \\ 5c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3a+2c = 3a+2b \\ 3b+2c = 2a+5b \\ 3c = c \\ 2a+5c = 5c \rightarrow a = 0 \\ 2b+5c = 7c \rightarrow b = 0 \\ 2c = 0 \rightarrow c = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar la forma general de la matriz X que conmute con $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$

Prop. Conmutativa : $A \cdot X = X \cdot A$; A, X son matrices cuadradas

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

$$-c = b$$
$$-d = -a$$
$$a = d$$
$$b = -c$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

$$\{a, c\} \in \mathbb{R}$$

Verificación

$$X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = X \cdot A$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Calcular la potencia n-ésima de la siguiente matriz $E = \begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$

POTENCIAS DE MATRICES :

$\downarrow$

Sólo se obtiene de matrices cuadradas

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 \neq \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 27 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E^2 = \begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 2e & 1 \\ 0 & e^2 & 2e \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}$$

$$E^3 = E^2 \cdot E = E \cdot E^2 = \begin{pmatrix} e^2 & 2e & 1 \\ 0 & e^2 & 2e \\ 0 & 0 & e^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^3 & 3e^2 & 3e \\ 0 & e^3 & 3e^2 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

$$E^4 = E^3 \cdot E = \begin{pmatrix} e^4 & 4e^3 & 6e^2 \\ 0 & e^4 & 4e^3 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix}$$

$$E^n = \begin{pmatrix} e^n & ne^{n-1} & \left(\frac{n^2-n}{2}\right)e^{n-2} \\ 0 & e^n & ne^{n-1} \\ 0 & 0 & e^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lccccccccc}
t_1 & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 \ldots \\
a & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & \\
P_1 & & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

→ Sucesión de segundo orden

$$t_n = t_1 + a(n-1) + P_1 \frac{(n-1)(n-2)}{2} + Q_1 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} + R_1 \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{24} + \ldots\ldots$$

$$t_n = t_1 + a(n-1) + P_1 \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0 + 1(n-1) + 1\frac{(n-1)(n-2)}{2} =$$

$$= n-1 + \frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{2n-2+n^2-3n+2}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Demostrar si $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$$(A+B)(A+B) = A^2 + 2AB + B^2$$

$$A^2 + AB + B.A + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$$

No cumple

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}\right]^2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}^2$$

$$\begin{pmatrix} 52 & -48 \\ 64 & 52 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 93 & 60 \\ 48 & 96 \end{pmatrix}$$

No cumple

En un edificio hay tres tipos de viviendas: L3, L4 y L5. Las viviendas L3 tienen 4 ventanas pequeñas y 3 grandes; las L4 tienen 5 ventanas pequeñas y 4 grandes, y las L5, 6 pequeñas y 5 grandes. Cada ventana pequeña tiene 2 cristales y 4 bisagras, y las grandes, 4 cristales y 6 bisagras.

a) Escriba una matriz que describa el número y tamaño de ventanas de cada vivienda y otra que exprese el número de cristales y bisagras de cada tipo de ventana.

b) Calcular la matriz que exprese el número de cristales y de bisagras de cada tipo de vivienda.

a)

$$\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{V.Peg.} & \text{V.grandes} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ \text{V. peg} \\ \text{V. grandes} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Cristales} & \text{Bisagras} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{c} \\ L3 \\ L4 \\ L5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{V. peg} & \text{V. grand.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{V. peg.} \\ \text{V. grand.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Cr.} & \text{Bis.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 20 & 34 \\ 26 & 44 \\ 32 & 54 \end{pmatrix}$$

#

Una industria fabrica dos tipos de bombillas: Transparentes (T) y opacas (O). De cada tipo se hacen cuatro modelos M1, M2, M3 y M4. La siguiente tabla muestra la producción semanal de bombillas de cada tipo y modelo.

	T	O
M_1	300	200
M_2	400	250
M_3	250	180
M_4	500	300

$= A \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & M1 & M2 & M3 & M4 \\ \hline T & 300 & 400 & 250 & 500 \\ O & 200 & 250 & 180 & 300 \end{array}$

El porcentaje de bombillas defectuosas es el 2% en el modelo 1, el 5% en el modelo 2, el 8% en el modelo 3 y el 10% en el modelo 4. Calcule la matriz que exprese el número de bombillas transparentes y opacas, buenas y defectuosas que se producen.

$$\begin{array}{c|cc} & \text{Defect.} & \text{Buenas} \\ \hline M1 & 0{,}02 & 0{,}98 \\ M2 & 0{,}05 & 0{,}95 \\ M3 & 0{,}08 & 0{,}92 \\ M4 & 0{,}1 & 0{,}90 \end{array} = B$$

$$\begin{array}{c|cccc} & M1 & M2 & M3 & M4 \\ \hline T & 300 & 400 & 250 & 500 \\ O & 200 & 250 & 180 & 300 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & \text{Def.} & \text{Buenas} \\ \hline M1 & 0{,}02 & 0{,}98 \\ M2 & 0{,}05 & 0{,}95 \\ M3 & 0{,}08 & 0{,}92 \\ M4 & 0{,}1 & 0{,}90 \end{array}$$

$$300(0{,}02) + 400(0{,}05) + 250(0{,}08) + 500(0{,}1)$$

$$\begin{pmatrix} 96 & 1354 \\ 60{,}9 & 869{,}1 \end{pmatrix}$$

1) Escriba explícitamente la matriz $C = (c_{ij})_{4\times4}$ si $c_{ij} = a_{ij}b_{jj} + 2b_{ij}$ dadas las matrices $A = (a_{ij})_{4\times4}$ y $B = (b_{ij})_{4\times5}$ y siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{pmatrix}$$

$$c_{12} = a_{12}b_{22} + 2b_{12} = (2)(1) + 2(0) = 2$$

i j

$$c_{43} = a_{43}b_{33} + 2b_{43} = (1)(1) + 2(1) = 4$$

i j

6) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 9 \\ 2 & 5 & 8 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

a) Halle el elemento c_{24} de C=AB
b) Calcule AB
c) Por qué BA no está definido

a) c_{24} :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(1)(9) + (-2)(8) + (3)(7) = 14 = c_{24}$$