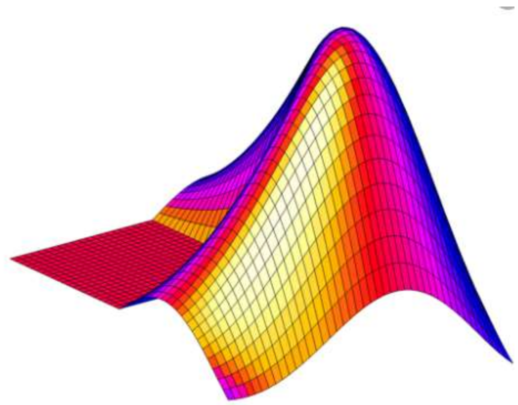
GEOMETRIA ANALITICA DEL ESPACIO



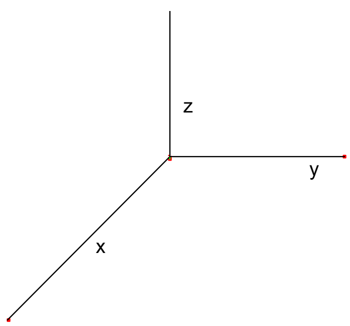
Criterio de Desempeño

Conoce y aplica correctamente el concepto de geometria analitica en la resolucion de problemas de rectas y planos en el espacio y de superficies cuadraticas en la vida cotidiana todo dentro de un margen de respeto y cordialidad

Coordenadas cartesianas en el espacio tridimensional

Para comenzar, considere tres ejes de coordenadas mutuamente perpendiculares (ejes x, y, z) con sus ceros en el punto común O, llamado origen.

Los tres ejes determinan tres planos yz, xz y xy que dividen la espacio en ocho celdas llamadas octantes. El octante donde todas las coordenadas de un punto son positivas se conoce como primer octante; no hay una numeración convencional para los otros siete octantes.. A cada punto P le corresponde una terna ordenada de números (x, y, z) sus coordenadas cartesianas, que miden sus distancias dirigidas a los tres planos.



Example *Interpretación geometrica de ecuaciones y desigualdades*

a) $z \geq 0$	*El semiespacio que comprende a los puntos que están sobre y arriba del plano* xy
b) $x = -3$	*El plano perpendicular al eje* x *en* $x = -3.$ *Este plano es paralelo al plano* yz *y está* 3 *unidades atrás de él*
· *c)* $z = 0, x \leq 0, y \geq 0$	*El segundo cuadrante del plano* xy.
d) $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$	*El primer octante*
e) $-1 \leq y \leq 1$	*El bloque entre los planos* $y = -1$ *y* $y = 1$*(incluyendo estos planos)*
f) $y = -2, z = 2$	*La recta donde se intersecan los planos* $y = -2$ *y* $z = 2.$ *O bien, la recta paralela al eje* x *que pasa por el punto* $(0,-2,2)$

La fórmula para la distancia entre dos puntos en el plano xy se extiende (es similar a la fórmula válida) en el espacio.

Definition *La distancia entre* $P_1(x_1,y_1,z_1)$ *y* $P_2(x_2,y_2,z_2)$ *es*

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$$

Example *Calcular la distancia entre dos puntos* $P(2,1,5)$ *y* $Q(-2,3,0)$.

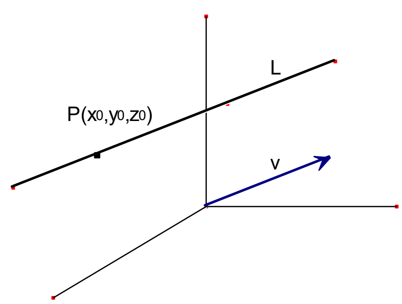
Rectas y Planos en el Espacio

Esta sección muestra la forma de utilizar los productos escalar y vectorial para escribir ecuaciones de las rectas, de segmentos de recta y de planos en el espacio.

Rectas y segmentos de rectas en el espacio

En el plano, una recta queda determinada por un punto y un número que representa la pendiente de la recta. En el espacio, una recta queda determinada por un punto y un vector que indica la dirección de la recta.

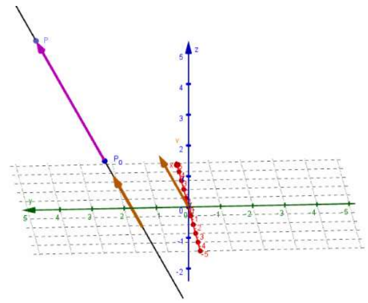
Suponga que L es una recta en el espacio que pasa por un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y que es paralela a un vector $\vec{v} = \langle v_1,v_2,v_3\rangle$. Entonces L es el conjunto de todos los puntos $P(x,y,z)$ tal que $\overrightarrow{P_0P}$ es paralelo a $\vec{v}$



Ecuación vectorial de una recta

Dados un vector $\vec{v} = \langle v_1,v_2,v_3\rangle$ y un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$, nos proponemos hallar la ecuación de la recta L que pasa por el punto P_0 y es paralela al vector $\vec{v}$.

Consideremos un punto $P(x,y,z)$ perteneciente a la recta $L.$ El vector $\overrightarrow{P_0P}$ resultara paralelo al vector director $\vec{v}$



$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$$
$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = t\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

esto implica

$$\langle x,y,z \rangle - \langle x_0,y_0,z_0 \rangle = t\langle v_1,v_2,v_3 \rangle$$
$$\langle x,y,z \rangle = (x_0,y_0,z_0) + t\langle v_1,v_2,v_3 \rangle$$
$$t \in \mathbb{R}$$

Example *Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $M(3,2,1)$ y $S(-1,1,0)$.*

Tenemos como datos dos puntos de la recta, entonces los vectores $\overrightarrow{MS}$ y $\overrightarrow{SM}$ son paralelos a dicha recta. Elegimos uno de ellos como vector director.

$$\vec{v} = \overrightarrow{MS} = \langle -4,-1,-1 \rangle$$

Podemos tomar cualquiera de los dos puntos dados cómo punto de paso, por ejemplo M. Entonces la ecuación es

$\langle x,y,z \rangle = (3,2,1) + t\langle -4,-1,-1 \rangle$ *Ec. vectorial de la recta*

Ecuaciones paramétricas de una recta

La parametrización estándar de la recta que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y que es paralela a $\vec{v} = \langle v_1,v_2,v_3 \rangle$ es

$x = x_0 + tv_1 \quad y = y_0 + tv_2 \quad z = z_0 + tv_3 \quad -\infty < t < \infty$

Ecuación simetrica de la recta

La parametrización estándar de la recta que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y que es paralela a $\vec{v} = \langle v_1,v_2,v_3 \rangle$ es

$\dfrac{x-x_0}{v_1} = \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3}$

Si el vector $\vec{v} = \langle 0,v_2,v_3 \rangle$ entonces, la recta que pasa por $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y que es paralela a $\vec{v} = \langle 0,v_2,v_3 \rangle$ es

$x = x_0;\ \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3}$

De manera similar si $v_2 = 0$ 0 $v_3 = 0$.

Example *Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(-2,0,4)$ y que es paralela a $v = 2i + 4j - 2k$.*

Example *Hallar la ecuación parametrica de la recta que pasa por el origen y cuya* *dirección es ortogonal a los vertores* $\vec{u} = 2i - j + 3k,\ \vec{v} = -i - j + 2k.$

Example *Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos* $(-3, 2, -3)$ *y* $(1, -1, 4)$.

Example *Encontrar*

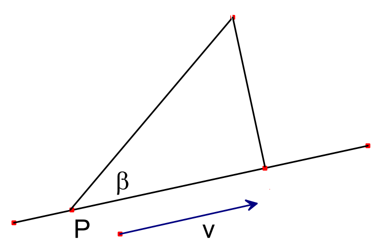
a) ecuaciones parametrica, simetrica para la recta L *que pasa por el punto* $P(5, -2, 4)$ *y es paralela a al vector* $\left\langle \frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3} \right\rangle$

b)¿En que punto la recta L *corta al plano* xy

c) Graficar el vector de posición de la recta L.

Distancia de un punto S a una recta que pasa por P y que es paralela a $\vec{v}$

$$d(S, L) = \frac{\| PS \times \vec{v} \|}{\| \vec{v} \|}$$



La distancia de S a la recta que pasa

Example *Calcular la distancia del punto* $S(1, 1, 5)$ *a la recta*

$L : x = 1 + t \quad y = 3 - t \quad z = 2t$

Ecuación de un plano en el espacio

Un plano en el espacio queda determinado si conocemos un punto en el plano y su “inclinación” u orientación. Esta “inclinación” se define especificando un vector perpendicular o normal al plano.

Ecuación de un plano

El plano que pasa por $P_0(x_0, y_0, z_0)$, normal al vector $\vec{n} = Ai + Bj + Ck$ se describe igualmente por cada una de las siguientes ecuaciones

Ecuación vectorial: $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$

Ecuación cartesiana: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Ecuación cartesiana simplificada: $Ax + By + Cz = D$, donde

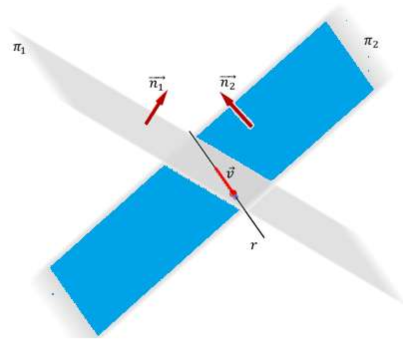
$D = Ax_o + By_0 + Cz_0$

Example *Determinar una ecuación para el plano que pasa por* $P_0(-3, 0, 7)$ *perpendicular a* $\vec{n} = 5i + 2j - k$.

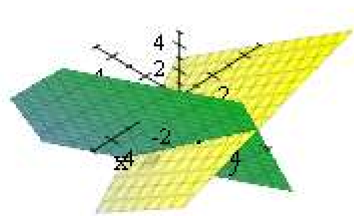
Example *Determinar una ecuación para el plano que pasa por* $A(0, 0, 1), B(2, 0, 0)$ *y* $C(0, 3, 0)$.

Rectas de intersección

Así como las rectas son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección, dos planos son paralelos si y sólo si sus vectores normales son paralelos, es decir $\overrightarrow{n_1} = k\overrightarrow{n_2}$, para cierto escalar k. Dos planos no paralelos se intersecan en una recta



Example *Determinar la recta de intersección de los planos* $3x - 6y - 2z = 15$ *y* $2x + y - 2z = 5$.

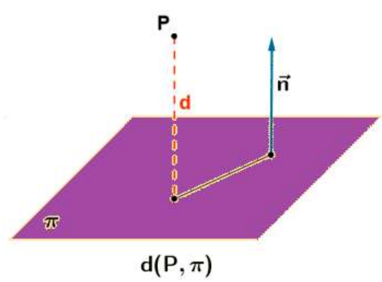


Example *Determinar el punto donde la recta*

$x = \frac{8}{3} + 2t \quad y = -2t \quad z = 1 + t$ *interseca al plano* $3x + 2y + 6z = 6$.

Distancia de un punto a un plano

Si $P(x_0, y_0, z_0)$ es un punto, y el plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ la distancia entre dicho punto y el plano es:



$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Example *Hallar la distancia del punto* $P(3, 1, -2)$ *a los planos y* $\pi_1 : 2x + y - z + 1 = 0$ *y* $\pi_2 : 2y - 3 = 0$

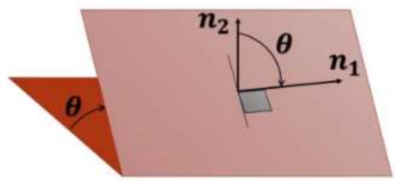
$$d(P,\pi_1) = \frac{|2(3)+1(1)-1(-2)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{10}{\sqrt{6}}$$

$$d(P,\pi_2) = \frac{|2(1)-3|}{\sqrt{2^2}} = \frac{1}{2}$$

Example *Calcular la distancia de* $(1,1,3)$ *al plano* $3x+2y+6z=6$

Ángulo entre planos

El ángulo entre dos planos que se cortan, se define como el ángulo (agudo) determinado por sus vectores normales.



Example *Calcular el ángulo entre los planos* $3x-6y-2z=15$ *y* $2x+y-2z=5$

Example *Encuentre un plano que pase por el origen y que corte al plano* $M: 2x+3y+z=12$ *en ángulo recto. ¿Cómo sabe que su plano es perpendicular a* M*?*

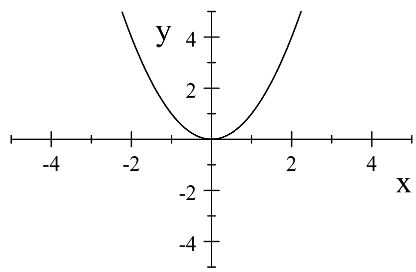
Cilindros y superficies cuadraticas

Cilindros

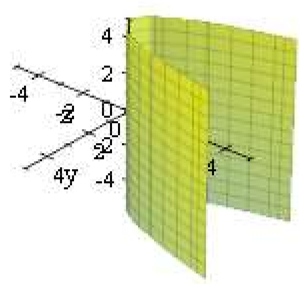
Un cilindro es una superficie generada al mover una línea recta paralela a una recta fija dada a lo largo de una curva plana dada. La curva se conoce como curva generatriz del cilindro. En geometría sólida, donde cilindro significa cilindro circular, las curvas generatrices son circunferencias, pero ahora permitiremos que las curvas generatrices sean arbitrarias. El cilindro de nuestro primer ejemplo es generado por una parábola.

Al graficar manualmente un cilindro es recomendable primero graficar la curva generadora en el plano correspondiente, y luego el cilindro en el espacio.

Example *Cilindro parabólico* $y = x^2$



Curva generatriz



cilindro $y = x^2$

Example *Graficar el cilindro* $y^2 - z^2 = 1$

Superficies cuadraticas

El siguiente tipo de superficies que estudiaremos es el de las superficies cuádricas. Estas superficies son el análogo tridimensional de las elipses, parábolas e hipérbolas.

Una superficie cuádrica es la gráfica en el espacio de una ecuación de segundo grado en x, y y z. La forma más general es

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

donde $A, B, C, \ldots, K$, son constantes reales. Sin embargo, esta ecuación se puede simplificar mediante traslaciones y rotaciones, como en el caso bidimensional. Sólo estudiaremos las ecuaciones más sencillas. Aunque definidos de otro modo, los cilindros también son ejemplos de superficies cuádricas. Las superficies cuádricas básicas son los elipsoides, los paraboloides, los conos elípticos y los hiperboloides.

(Consideramos a las esferas como elipsoides especiales).

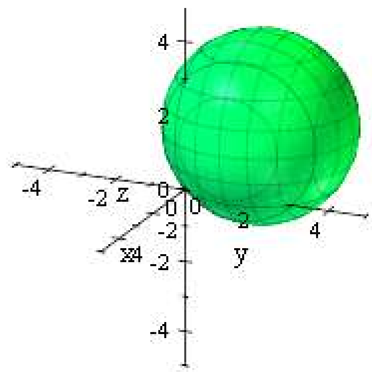
Esferas

La ecuación general de la esfera es de la forma:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Jz + K = 0$ con $A = B = C$

La ecuación canonica de la esfera de radio r y centro (h, k, p) es

$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-p)^2 = r^2$



Example *Determinar el centro y el radio de la esfera*

$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$

Example *Interpretación de ecuaciones y desigualdades*

a) $x^2 + y^2 + z^2 < 4$

b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

c) $x^2 + y^2 + z^2 > 4$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \;\; z \leq 0$

Elipsoides

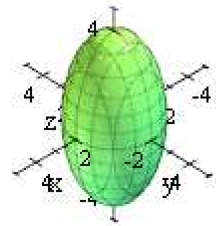
La ecuación general de el elipsoide es de la forma:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Jz + K = 0$ con $sgn(A) = sgn(B) = sgn(C)$

El elipsoide con centro el origen de coordenadas en su foma canonica es

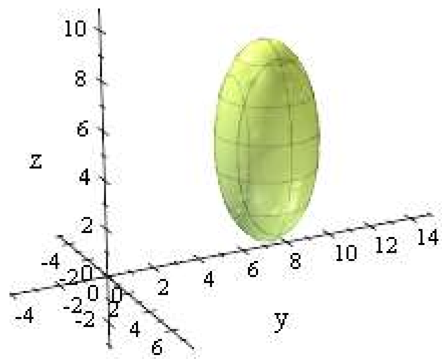
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

donde el elipsoide corta a los ejes coordenados en $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0)y(0, 0, \pm c)$ los números reales positivos a, b y c se llaman semiejes del elipsoide. Éste se encuentra dentro de la caja rectangular definida por las desigualdades y la superficie es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados, ya que en la ecuación que la define, cada variable está elevada al cuadrado.



La ecuación canonica de elipsoide de centro el punto (h,k,p) es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-p)^2}{c^2}=1$$



Cono Eliptico

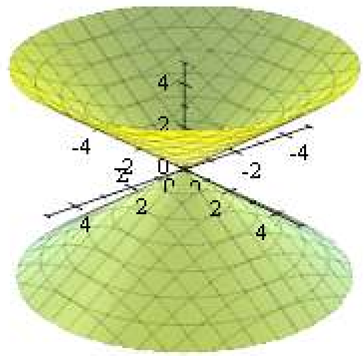
La ecuación general del cono eliptico es de la forma:

$Ax^2+By^2+Cz^2+Gx+Hy+Jz=0$ donde los signos de A,B y C de uno de ellos es negativo

La ecuación canonica del cono eliptico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

es simétrico con respecto a los tres planos coordenados



la ecuación canonica con centro el punto (h,k,p) es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 0$$

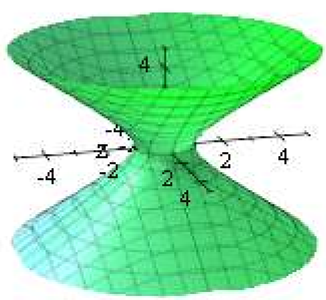
Hiperboloides

Hiperboloide de una hoja

La ecuación canonica del hiperboloide de una hoja con centro el origen de coordenadas es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es simétrico con respecto a cada uno de los tres planos coordenados



la ecuación canonica con centro el punto (h,k,p) es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1$$

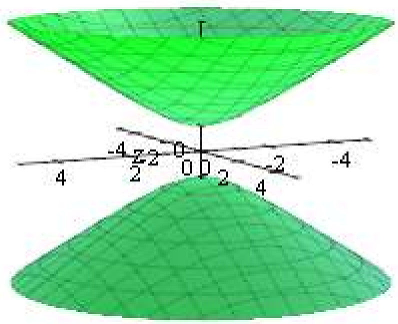
Hiperboloide de dos hojas

La ecuación canonica del hiperboloide de dos hojas con centro el origen de coordenadas es:

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es simétrico con respecto a los tres planos coordenados. El plano $z = 0$ no corta a la superficie; de hecho, para que un plano horizontal corte a la superficie, debemos tener

$|z| \geq c$.



la ecuación canonica con centro el punto (h,k,p) es:

$$-\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-p)^2}{c^2} = 1$$

Paraboloides

Paraboloide eliptico

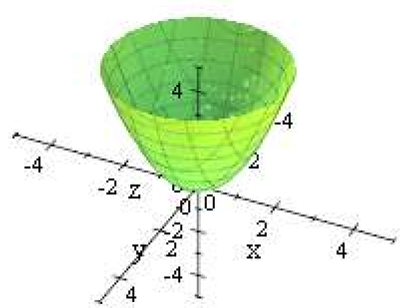
La ecuación canonica de un paraboloide eliptico con vertice el origen de coordenadas es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

El paraboloide elíptico es simétrico con respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$. La única intersección con los ejes es el origen. Excepto por este punto, la superficie está completamente por arriba (si $c > 0$) o completamente debajo (si $c < 0$) del plano xy, según el signo de c.

El paraboloide eliptico

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$$



si su vertice es el punto (h,k,p) su ecuación canonica es

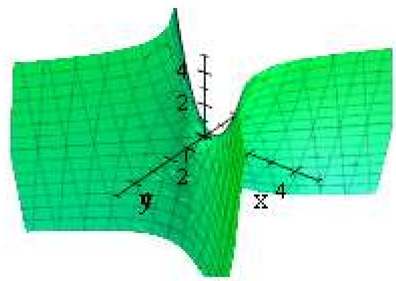
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(z-p)}{c}$$

Paraboloide hiperbolico

El paraboloide hiperbólico

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \quad c > 0$$

tiene simetría con respecto a los planos $x = 0$ y $y = 0$



Example *Graficar las siguientes superficies*

a) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$

b) $5x^2 = z^2 - 3y^2$

c) $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$

e) $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$