REPASO

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & -5 \\ -5 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & y & 4 & 5 & 6 \\ t & 6 & 2 & 3 & 2 & m \\ 3 & z & 4 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \\ 7 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

¿De qué orden son A, B y C?

Hallar: a_{34} , a_{41} , b_{32} , b_{25} , c_{12} , c_{23}

ORDEN, TAMAÑO O DIMENSIÓN : $A_{4\times4} = A_4$

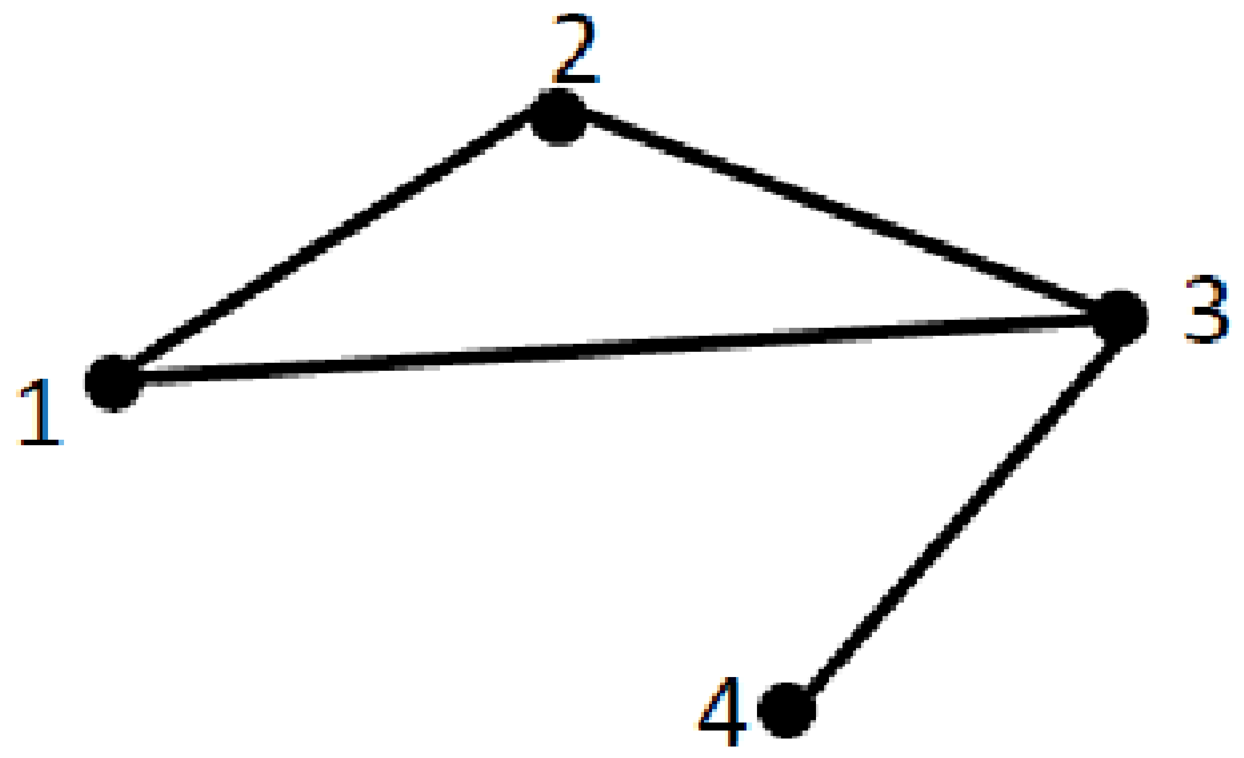
$B_{3\times6}$

$C_{4\times3}$

$a_{34} = -1$; $a_{41} = -1$; $b_{32} = z$; $b_{25} = 2$; $c_{12} = -2$; $c_{23} = 9$

REPASO

Según la gráfica que une los 4 puntos, construya una matriz 4x4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si "i" no está conectado con "j" y $a_{ij} = 1$ si "i" está conectado con "j"



$$a_{23} = 1$$

$i \qquad j$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Operaciones con matrices:

- Igualdad entre matrices
- Suma de matrices
- Producto de una matriz por un escalar
- Producto de dos matrices

Igualdad entre matrices

Dos matrices A y B son iguales, si ambas son del mismo orden y sus elementos correspondientes entre si son iguales.

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = b_{11}$$

$$a_{12} = b_{12}$$

$$\vdots$$

$$a_{mn} = b_{mn}$$

Ejemplo. Si se cumple que la matriz $\mathrm{A} = \mathrm{B}$. Hallar: m, n, r, x, y, z

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} x+1 & n-2y & y+4 \\ 2m-3z & r-n+4y & z+3 \end{pmatrix}$$

$A_{2\times3}$; $B_{2\times3}$

$3 = x+1 \rightarrow x = 2$

$8 = n-2y \rightarrow 8 = n-2(3) \rightarrow n = 14$

$7 = y+4 \rightarrow y = 3$

$9 = 2m-3z \rightarrow m = 6$

$6 = r-n+4y \rightarrow r = 4$

$4 = z+3 \rightarrow z = 1$

Suma de matrices

La suma de matrices se da solamente entre matrices del mismo orden.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{3 \times 2} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

Al sumar matrices de orden mxn, el resultado será otra matriz de orden mxn; por ejemplo, si se suman matrices de orden 3x2, el resultado será otra matriz de orden 3x2.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}}_{3 \times 2} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

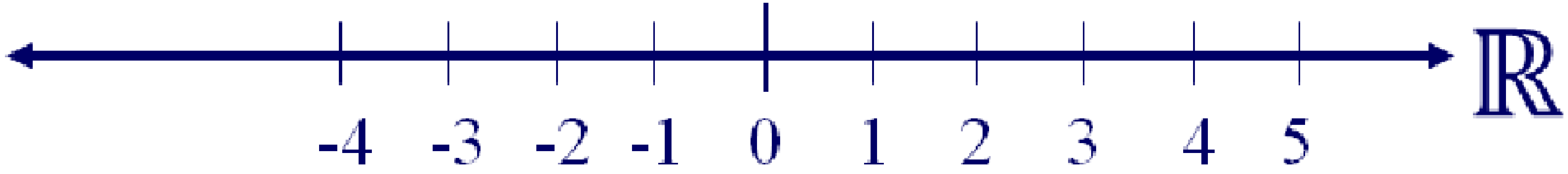
Para sumar matrices, se suma el elemento de una matriz con el elemento de la otra matriz correspondiente a la misma posición.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2 & 5+3 & -1+(-1) \\ 4+6 & 0+8 & 6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 \\ 10 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

¿Qué es un escalar?



Un escalar (k) es cualquier número que pertenece a $\mathbb{R}$

Producto de una matriz por un escalar

$$kA = k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sea $\mathrm{k} = -3$ y $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ Hallar kA

$$\mathrm{kA} = -3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -9 \\ -6 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma y producto por un escalar

1) $A + O = A$ Existencia de la matriz nula

2) $0 \cdot A = O$ Producto por el escalar 0

3) $1 \cdot A = A$ Producto por el escalar 1

4) $A + B = B + A$ Conmutatividad en la suma de matrices

5) $k(A + B) = kA + kB$ Distributividad del producto por un escalar

6) $A + B + C = (A+B) + C = (A+C) + B$ Prop. Asociativa

Ejemplo. realice las operaciones indicadas con $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -2\\ 0 & -8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 0 & 1\\ 8 & -3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}5 & -9\\ 3 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}$

$-7A+3B$

$$-7\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -2\\ 0 & -8\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 0 & 1\\ 8 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-7 & -28\\ 14 & 14\\ 0 & 56\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-12 & 21\\ 0 & 3\\ 24 & -9\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-19 & -7\\ 14 & 17\\ 24 & 47\end{pmatrix}$$

$B-A-2C$

$$B+(-1)A+(-2)C$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 0 & 1\\ 8 & -3\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & -2\\ 0 & -8\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}5 & -9\\ 3 & 0\\ 6 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-4 & 7\\ 0 & 1\\ 8 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & 2\\ 0 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-10 & 18\\ -6 & 0\\ -12 & -2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-15 & 21\\ -4 & 3\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

Ejemplo.

Martha es una persona muy activa; por la mañana, de lunes a viernes de 7 a 13, trabaja como administrativo en una empresa. Los lunes, miércoles y viernes lleva la contabilidad de otra empresa de 4 a 7 de la tarde, y los martes y jueves de 5 a 9 ejerce como abogado en un bufete.

a) Escribe la matriz semanal de su trabajo, indicando el número de horas que dedica a cada actividad y la dimensión de ésta.

b) Si trabaja durante 12 semanas, escriba la nueva matriz con el número total de horas que dedica durante esas doce semanas, a cada actividad, según el día de la semana.

a)

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccccc} \text{Lunes} & \text{Martes} & \text{Miérc.} & \text{Juev.} & \text{Viern.} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Admin.} \\ \text{Contab.} \\ \text{Abogado} \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow 3 \times 5$$

b)

$$12 \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 72 & 72 & 72 & 72 \\ 36 & 0 & 36 & 0 & 36 \\ 0 & 48 & 0 & 48 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo.

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 9 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ Hallar la matriz X de $6A + 3B + 3X = 5X - 5A + 5B$

$$6A + 3B + 3X = 5X - 5A + 5B$$

$$-2X = -11A + 2B \qquad \times(-1)$$

$$2X = 11A - 2B$$

$$X = \frac{1}{2}(11A - 2B)$$

$$X = \frac{1}{2}\left[11\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 9 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 8 & -\frac{25}{2} \\ \frac{79}{2} & \frac{97}{2} \\ 44 & 14 \end{pmatrix}$$

Producto de dos matrices

Dos matrices A y B se multiplican si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B.

$$\mathrm{A}_{m\times n} \qquad \mathrm{B}_{n\times p}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$m \times \boxed{n = n} \times p$$

Sea la matriz A de tamaño m×n y la matriz B de tamaño n×p , se define la matriz C=A×B de tamaño m×p donde cada elemento c se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de matriz A con cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

$$(m \times \boxed{n)(n} \times p) = m \times p$$

m×p

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots\cdots + a_{in}b_{nj}$$

Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -7 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ Hallar $A \cdot B$ y $B \cdot A$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -7 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4(2)+5(-7)+2(4) & -4(-1)+5(5)+2(6) & -4(4)+5(3)+2(3) \\ 3(2)-1(-7)+4(4) & 3(-1)-1(5)+4(6) & 3(4)-1(3)+4(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -35 & 41 & 5 \\ 29 & 16 & 21 \end{pmatrix} \quad \#\#$$

$A \cdot B$

$$\underbrace{2 \times \boxed{3 = 3} \times 3}_{2 \times 3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Sea $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -7 & 5 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ Hallar $A \cdot B$ y $B \cdot A$

$B \cdot A = ?$ $\Rightarrow$ No se puede multiplicar

$3 \times \boxed{3 \neq 2} \times 3$

Ejemplo

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar $A.B$ y $B.A$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(4)-1(0)+4(9) & 2(5)-1(1)+4(3) & 2(2)-1(7)+4(2) \\ 5(4)+7(0)+8(9) & 5(5)+7(1)+8(3) & 5(2)+7(7)+8(2) \\ 9(4)+0(0)+4(9) & 9(5)+0(1)+4(3) & 9(2)+0(7)+4(2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 44 & 21 & 5 \\ 92 & 56 & 75 \\ 72 & 57 & 26 \end{pmatrix}$$

#