Clase 30/09

jueves, 30 de septiembre de 2021 02:03 p. m.

46. Demostrar la relación entre derivadas parciales:

$$z = \frac{1}{x}(f(x-y) + g(x-ay)) \qquad a^2 z_{xx} = z_{yy}$$

$$u = x - y \qquad v = x - ay.$$

$$z = \frac{1}{x} \cdot f(u) + \frac{1}{x} g(v).$$

$$\rightarrow z_x = -\frac{1}{x^2} \cdot f(u) + \frac{1}{x} \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x^2} g(v) + \frac{1}{x} \frac{dg}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$z_x = -\frac{1}{x^2} f(u) + \frac{1}{x} \frac{df}{du} - \frac{1}{x^2} f(v) + \frac{1}{x} \frac{df}{dv}.$$

$$z_{xx} = \frac{2}{x^3} \cdot f(u) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{df}{du} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2f}{du^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+ \frac{2}{x^3} f(v) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{df}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{df}{dv} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2f}{dv^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

$$z_{xx} = \frac{2}{x^3} f(u) - \frac{1}{x^2} \frac{df}{du} - \frac{1}{x^2} \frac{df}{du} + \frac{1}{x} \frac{d^2f}{du^2} + \frac{2}{x^3} g(v) - \frac{1}{x^2} \frac{dg}{dv} - \frac{1}{x^2} \frac{dg}{dv} + \frac{1}{x} \frac{d^2g}{dv^2}.$$

$$z = \frac{1}{x}(f(x-y) + g(x-ay)) \qquad u = x - y \qquad v = x - ay. \qquad f' \qquad f(x-y, x+y)$$

$$u(x,y) = \qquad v(x,y)$$

$$z = \frac{1}{x} \cdot f(u) + \frac{1}{x} g(v).$$

$$z_y = \frac{1}{x} \frac{df}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{x} \frac{dg}{dv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{df}{du}(-1) + \frac{1}{x} \frac{dg}{dv}(-a)$$

$$\underbrace{z_y = -\frac{1}{x} \cdot \frac{df}{du} - \frac{a}{x} \frac{dg}{dv}}. \Leftarrow$$

$$z_{yy} = -\frac{1}{x} \frac{d^2f}{du^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{a}{x} \cdot \frac{d^2g}{dv^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= -\frac{1}{x} \frac{d^2f}{du^2} \cdot (-1) - \frac{a}{x} \frac{d^2g}{dv^2} \cdot (-a) \qquad f'(x) = \frac{df}{dx}$$

$$z_{yy} = \frac{1}{x} \frac{d^2f}{du^2} + \frac{a^2}{x} \frac{d^2g}{dv^2}.$$

$$a^2 z_{xx} = z_{yy}$$ $- \frac{2}{x^2}$

$$a^2\left(\frac{2}{x^3} f(u) - \frac{1}{x^2}\frac{df}{du} - \frac{1}{x^2}\frac{df}{du} + \frac{1}{x}\frac{d^2f}{du^2} + \frac{2}{x^3} g(v) - \frac{1}{x^2}\frac{dg}{dv} - \frac{1}{x^2}\frac{dg}{dv} + \frac{1}{x}\frac{d^2g}{dv^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\frac{d^2f}{du^2} + \frac{a^2}{x}\frac{d^2g}{dv^2}$$

$$\frac{2a^2}{x^3} f(u) - \frac{2a^2}{x^2}\frac{df}{du} + \frac{a^2}{x}\frac{d^2f}{du^2} + \frac{2a^2}{x^3} g(v) - \frac{2a^2}{x^2}\frac{dg}{dv} + \frac{1}{x}\frac{d^2g}{dv^2} \overset{?}{\neq} \frac{1}{x}\frac{d^2f}{du^2} + \frac{a^2}{x}\frac{d^2g}{dv^2}.$$

$\therefore$ La relación No es Verdadera.

$f'(x) = \frac{df}{dx}$ $\boxed{f(u)}$ $f(u) = u^2+5$

$\to f(x,y) = ?$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ $f' . \frac{df}{du}$

50. Demostrar la relación entre derivadas parciales:

$z = [f(x+ay) + g(x-ay)] \qquad \to \qquad a^2 z_{xx} = z_{yy}$

$\frac{df}{du}$ f'

$u = x+ay \qquad v = x-ay.$

$z = f(u) + g(v).$

$z_x = f'(u). + g'(v).$ $\qquad z_y = f'(u).a + g'(v).(-a) = af'(u) - ag'(v)$

$z_{xx} = f''(u). + g''(v)$ $\qquad z_{yy} = af''(u).a - ag''(v).(-a) = a^2 f''(u) + a^2 g''(v).$

$$a^2(f''(u) + g''(v)) \overset{?}{=} a^2 f''(u) + a^2 g''(v)$$

$$a^2 f''(u) + a^2 g''(v) = a^2 f''(u) + a^2 g''(v)$$

$\therefore$ Se Verifica

Example Si $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$ hallar el gradiente.

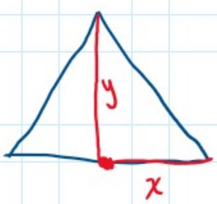
$$\nabla f(x,y) = \langle \cos x + e^{xy} y ,\ x e^{xy} \rangle = \underbrace{(\cos x + y e^{xy})\,\hat{i} + x e^{xy}\,\hat{j}}_{\mathbb{R}}$$

Example *El radio de la base y la altura de un cono circular recto se han medido dando como resultado* 10 *y* 25 *centímetros, respectivamente, con un posible error en la medida de* 0.1 *centímetros como máximo en cada medición. Utilizar la diferencial para estimar el error que se produce en el cálculo del volumen del cono:*

Si un cono tiene por radio la base x *y* y *por altura y, su volumen es*

$$\boxed{V(x,y) = \frac{\pi}{3}x^2 y}$$

El error cometido en el cálculo del volumen es la diferencia entre el valor de esta función en $(10, 25)$ *y su valor en* $(10 + 0.1, 25 + 0.1)$



$x = 10 \quad y = 25$ [cm]. $\quad 0{,}1$ cm

$V(x,y) = \frac{\pi}{3} x^2 y = \quad \rightarrow dx = \pm 0{,}1 \quad dy = \pm 0{,}1 \in$

$x = 10 \quad y = 25$

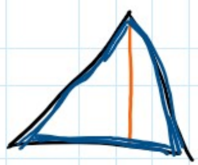
$V(10,25) \cong 2618$ [cm^3]

$dV(x,y) = V_x \cdot dx + V_y\, dy$

$dV(x,y) = \frac{2\pi}{3} xy\, dx + \frac{\pi}{3} x^2\, dy$

$dx = -$

$dV(10,25) = \frac{2\pi}{3}(10)(25)(0.1) + \frac{\pi}{3} 10^2 (0.1) \approx \underline{\underline{62.3}}$ cm^3.



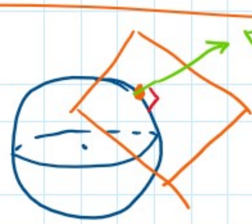
25
10

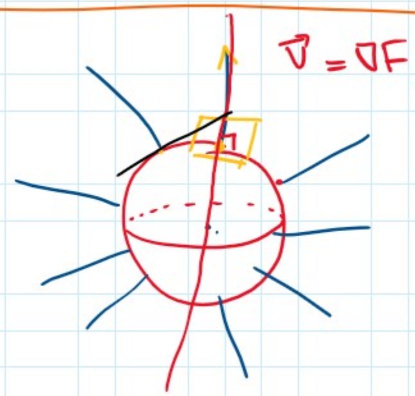
$dx = -0.1$

$dy = -0.1$

$A = \frac{(b+B)\,h}{2} =$

$\sqrt{}$





Example *Hallar una ecuación del plano tangente al hiperboloide de dos hojas* $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ *en el punto* $(1, -1, 4)$. ¶

Example *Hallar una ecuación del plano tangente al hiperboloide de dos hojas* $z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$ *en el punto* $(1, -1, 4)$. ¶

$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0 \rightarrow F(x,y,z) = 0$

$F(x,y,z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$

$\nabla F(x,y,z) = \langle -4x, -4y, 2z \rangle$

$\nabla F(1,-1,4) = \langle -4, 4, 8 \rangle \leftarrow$ vector Normal del plano tan.

$\vec{n}, P.$

$\vec{n} = \langle -4, 4, 8 \rangle \quad P(1,-1,4)$

4
4
-32

$-4(x-1) + 4(y+1) + 8(z-4) = 0$

$-4x + 4y + 8z - 24 = 0$ || Ec pl. tan a la Sup.

Example *Hallar la ecuación del plano tangente al paraboloide* $z(x,y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$ *en el punto* $\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$

$F(x,y,z) = 1 - \frac{x^2}{10} - \frac{4}{10}y^2 - z \quad \cdot 10$

$\rightarrow -2x - 8y - 10z + 15 = 0$

$\rightarrow \nabla F(x,y,z) = \langle -\frac{x}{5}, -\frac{4}{5}y, -1 \rangle = \langle -\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, -1 \rangle$

$\langle A, B, C \rangle = \vec{V} = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \quad \langle -2, -8, -10 \rangle$

$x = x_0 + At$

$y = y_0 + Bt$

$z = z_0 + Ct$

$\nabla F(1, 1, \frac{1}{2}) = \langle -2, -8, -10 \rangle$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 1 - 8t \\ z &= \tfrac{1}{2} - 10t \end{aligned}}$$

Example *Hallar un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por* $xyz = 12$ *en el punto* $(2, -2, -3)$. ¶

$F(x,y,z) = xyz - 12 = 0$

$\nabla F(x,y,z) = \langle yz, xz, xy \rangle$ vector Normal

$\nabla F(2,-2,-3) = \langle 6, -6, -4 \rangle$

$\nabla F(x,y,z) = \langle yz,\ xz,\ xy \rangle$ vector Normal

$\nabla F(2,-2,-3) = \langle 6, -6, -4 \rangle$ vector direc

-12 -12 -

$6(x-2) - 6(y+2) - 4(z+3) = 0$

$6x - 6y - 4z - 36 = 0 \quad \div 2$

$$\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$$

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+3}{-4}.$$