ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA "Mcal. Antonio José de Sucre" Prestigio, Disciplina y Mejores Oportunidades	PRACTICAI CALCULO II
Ingenieria Paralelo "A-C"	II/2021

1. Para que valores de a y b los siguientes vectores son paralelos; $\vec{u} = \langle 4, a+2b, 2b-a-1\rangle$ y $\vec{v} = \langle 2, a-b, b+a\rangle$

   Resp: $\left[a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{1}{12}\right]$,

2. Dados los vectores $\vec{u} = \langle 2, k\rangle$ y $\vec{v} = \langle 3, -2\rangle$. Calcular el valor de k para que los vectores u, v sean:

   a. perpendiculares

   b. paralelos

   c. formen un ángulo de $60°$

   Resp. $a)\ k = 3$

   $b)\ k = -\frac{4}{3}$

   $c)\ k = 16 \pm \frac{26}{3}\sqrt{3}$

3. Dados los siguientes vectores $\vec{a} = -2i + 3j + k$; $\vec{b} = 4i - 3j + 3k$ y $\vec{c} = -j + 4k$ determinar

   a. $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$

   b. $\vec{a} - 5\vec{b} - 4\vec{c}$

   c. $\left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot 3\vec{c}$

   d. $-\left(4\vec{b} - 3\vec{c}\right) \times 2\vec{b}$

   RESP:a) $8{,}7$ b) $22j - 30k - 22i$ c) -97 d) $54i + 96j + 24k$

4. Determinar el valor del parametro k para que los vectores $\langle k, -2, 3\rangle, \langle -1, k, 1\rangle$ sean

   a. ortogonales

   b. paralelos

   RESP a) $k = 1$ b) no existe el k

5. Dado los vectores $\vec{A} = 2i + aj$ y $\vec{B} = 6i$, hallar el valor de a para que la magnitud de B sea igual a tres veces la magnitud de $\overrightarrow{A \times B}$

   Resp. $a = \frac{1}{3}$

6. Determine la medida del ángulo ABC, en donde los tres puntos son $A(4,3)B(1-1)C(6-4)$

   Resp: $84.09°$

7. Encuentre un vector que tenga la misma dirección y el doble de la magnitud que $\vec{a}$

   $\vec{a} = 14i - 15j + 6k$

RESP:$\langle 28,-30,12\rangle$

Dados $\vec{a} = 3i - j - 4k$ $\vec{b} = 2i + 5j - 2k$ y $\vec{c} = -i + 6k$ determine en los ejercicios del 9 al 11

8. $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right)$

RESP: 36

9. $\left\|\vec{b}\right\| + \|\vec{c}\|$

RESP:$\sqrt{33} + \sqrt{37}$

10. Dos vectores unitarios perpendiculares a $\vec{b}$ y a $\vec{c}$

11. Halle un vector que tenga la dirección opuesta y un tercio de la magnitud de $\vec{a}$

$\vec{a} = 14i - 15j + 6k$

RESP: $\left\langle -\frac{14}{3}, 5, -2\right\rangle$

12. Encuentre un vector de magnitud 2 que tenga la misma dirección que $\vec{a}$

$\vec{a} = 14i - 15j + 6k$

RESP: $\frac{2}{\sqrt{457}}\langle 14,-15,6\rangle$

13. Encuentre dos vectores unitarios que son ortogonales a los vectores $j + 2k$ e $i - 2j + 3k$ de tamaño 1.

14. Demostrar que si x y y pertenecen a $\mathbb{R}^2$ verifica que $(\vec{x}+\vec{y}) \circ (\vec{x}-\vec{y}) = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$

15. Sea k el paralepipedo determinado por $u =< 3,1,2>$ $v =< 1,1,2 >$ y $w =< 1,3,3 >$

a. calcule el volumen de K

b. Calcule el área de la cara determinada por u y v

c. Calcule el ángulo entre u y el plano que contiene a la cara determinada por v y w

Resp: $a)$ 9 $b)$ $\sqrt{35}$ $c)40.01°$

16. Si $\vec{a} = \langle 3,1\rangle$ $\vec{b} = \langle -1,4\rangle$ encontrar un vector con la misma dirección que $\overrightarrow{a+b}$ pero 5 veces mas largo.

Resp: $\langle 10,25\rangle$

17. Hallar el valor de α tal que los vectores $\langle 2,2\alpha,-1\rangle$ y $\langle \alpha,0,-\alpha\rangle$ forman un ángulo de 45°

Resp. ± 1

18. Hallar el valor de α tal que los vectores $\langle 2,\alpha,1\rangle$ y $\langle -1,\alpha,1\rangle$ forman un ángulo de 90°

RESP $\alpha = \pm 1$

19. Hallar λ si $\vec{u} = \langle 4,1,3\rangle$ y $\vec{v} = \langle 2,1,\lambda\rangle$ para que $\vec{u} \times \vec{v} = \langle 1,-10,2\rangle$

Resp.$\lambda = 4$

20. Determine un vector que tenga la misma dirección que $\langle -2,4,2\rangle$ pero de longitud 6.

Resp. $\left\langle -\frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{12}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}\right\rangle$

21. Dados los vectores $\vec{v} = \langle 1,0,-1\rangle$ y $\vec{w} = \langle 1,1,0\rangle$ Calcular los vectores unitarios de $\mathbb{R}^3$ que son ortogonales a ambos.

RESP:$\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

22. Encuentre un vector de magnitud 6 que tenga la misma dirección que el vector $\langle 4,-7\rangle$

Respuesta:$\langle\frac{24}{\sqrt{65}},\frac{-42}{\sqrt{65}}\rangle$

23. Hallar los valores de x, y, z para que los vectores $\vec{u}=\langle 1,x,x+y\rangle$y $\vec{v}=\langle x-y,z,1\rangle$ sean perpendiculares.

Resp: $x=0 \quad y=t \quad z=-2$

24. Determine el valor de a para que los puntos $A(1,0,1)$, $B(1,1,1)$ y $C(1,6,a)$ sean los vértices de un triángulo de área $\frac{3}{2}$

RESP: $a=4$ o $a=-2$

25. Halla un vector $\vec{w}$ cuyo modulo sea 4 y ademas perpendicular al vector $\vec{u}=\langle 2,0,1\rangle$ y a $\vec{v}=\langle 3,-1,2\rangle$

RESP $\vec{w}=\left\langle\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3},-\frac{4\sqrt{6}}{3}\right\rangle$

26. Encuentre todos los vectores en el espacio de magnitud 1 que sean ortogonales al vector $\langle 1,-1,0\rangle$

Resp:$\left\langle t,t,\sqrt{1-2t^2}\right\rangle$

27. Mostrar que si vectores no nulos $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son ortogonales, entonces los cosenos directores satisfacen

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2=0$$

28. Hallar las longitudes y los ángulos internos del triángulo con los vértices que se indican, y determinar si el triángulo es un triángulo rectángulo, un triángulo isósceles, o ninguna

$(0,0,4)$, $(2,6,7)$, $(6,4,8)$

Resp:$7,\sqrt{21},2\sqrt{17}$

$33°44'29.89''$ $88°12'48.86''$ $58°21'41.85''$ triángulo escaleno

29. Hallar las longitudes y los ángulos internos del triángulo con los vértices que se indican, y determinar si el triángulo es un triángulo rectángulo, un triángulo isósceles, o ninguna

$(3,4,1)(0,6,2)(3,5,6)$

Resp:$\sqrt{14};\sqrt{26},\sqrt{26}$

$68.4754601;68.4754601;43.0490798$ triángulo isosceles

30. Dado el triángulo entre los puntos $P(1,2,3);Q(3,4,4);R(2,3,7)$ hallar la longitud de su altura H respecto al punto R

RESP: $H=\frac{7\sqrt{2}}{3}$

31. Determinar si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explicar por qué o dar un ejemplo que demuestre que es falsa

a. Es posible encontrar el producto vectorial de dos vectores en un sistema de coordenadas bidimensional.

b. Si u y v son vectores en el espacio que son distintos de cero y no son paralelos, entonces $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$

c. Si $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{u} \circ \vec{w}$ y $\vec{u} \neq 0$ entonces $\vec{v} = \vec{w}$

d. Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales a $\vec{w}$, entonces $\vec{u} + \vec{v}$ es ortogonal a $\vec{w}$

32. Sean $\vec{u} = \langle -1, 1, 2\rangle$, $\vec{v} = \langle 1, -2, 1\rangle$, $\vec{w} = \langle 2, 3, -1\rangle$ calcular

a. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

b. $(\vec{u} \cdot \vec{v}) * \vec{w}$

c. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

d. $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{w}$

e. $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$

33. ean $\vec{u} = \langle 2, 2, 3 \rangle$ y $\vec{v} = \langle 4, 3, 5 \rangle$calcular

a. $\vec{u} \times \vec{v}$

b. $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$

c. $\vec{w} = \dfrac{\vec{u} \times \vec{v}}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}$

d. Hallar θ si $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\theta$

34. Determinar el punto de intersección entre las siguientes pares de rectas:

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-6}{5}$$

$$\frac{x-7}{6} = y-3 = z-2$$

RESP: $(1, 2, 1)$

35. Determinar si las rectas se cortan, y si es asi, hallar el punto de intersección y el de ángulo de intersección

$$x = 4t+2, y = 3, z = -t+1$$

$$x = 2s+2, y = 2s+3, z = s+1$$

RESP: $(2, 3, 1)$ $\theta = 55.53°$

36. Determinar si las rectas se cortan, y si es asi, hallar el punto de intersección y el de ángulo de intersección

$$\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = z+1$$

$$\frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$$

Resp. no se cortan

37. Hallar la minima distancia entre

$\dfrac{x-3}{2} = y-5 = \dfrac{z-4}{2}$ y el punto $(2, 5, -7)$

RESP:

38. Determinar la ecuación del plano que contiene a punto $A(0, 1, 0)$ y a la recta :

$$L : \frac{x-2}{-1} = \frac{y}{3} = z+2$$

RESP: $x + z = 0$

39. Dado el plano $L_1 : 3x - 5y + z - 2 = 0,$ determinar la ecuación de un plano L_2 paralelo a L_1

que contenga al punto $A(-3,2,4)$.

RESP: $3x-5y+z+15=0$

40. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,2,3)$ y es paralela a la recta

$$r:\begin{cases}2x+3y-z=-1\\ x-y+3z=4\end{cases}$$

RESP: $\dfrac{x-1}{-8}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-3}{5}$

41. Consideremos la recta

$r:\begin{cases}5x-y+z=0\\ x-y-z=4\end{cases}$ y el plano $ax-6y+4z=5$

se pide

a. Calcular el valor de a para que la recta y el plano sean paralelos

b. Calcular el valor de a para que la recta sea perpendicular al plano.

RESP: a) $a=26$ b) $a=-2$

42. Encuentre las ecuaciones de los planos que son paralelos al plano $x+2y-2z=1$ y estan a 2 unidades de el.

Resp: , $x+2y-2z-7=0 \quad x+2y-2z+5=0$

43. ¿Para que valores de a son paralelas las rectas

$r:\begin{cases}4x+5y+2z-3=0\\ x+3y+4z-5=0\end{cases} \qquad s:\begin{cases}5x+y+2az-7=0\\ 10x+9y+\frac{1}{2}z+9=0\end{cases}$

RESP: $a=-4$

44. Encuentre si las lineas dadas por las ecuaciones

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4} \quad y \quad \frac{x+1}{6}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+5}{2}$$

son paralelas o se intersectan.

Resp: no son paralelos

45. Una bolita pequeña, cae desde el punto $P_1(3,5,10)$ sobre el plano $6x+2y+3z-34=0$ sobre el que resbala hasta quedar sobre el plano XY. Calcular su distancia total recorrida.

RESP: 10.21

46. Sobre el plano $4x+7y+5z-62=0$ hallar la proyección de la recta

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-6}{2}$$

RESP: $\dfrac{x-40}{-10}=\dfrac{y+14}{5}=z$

47. Hallar la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $P_1(0,2,4), P_2(3,5,4), P_3(3,6,1)$ Su centro esta sobre el plano $x+2y+3z-15=0$

RESP:$(x-1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=9$

48. Hallar la ecuación del plano que forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el plano $\sqrt{3}x+2y-3z=2$ y pasa por el punto $A(2,2,2)$ ademas forma un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ con el plano $z=2$.

RESP: $4\sqrt{3}x + y - 2\left(4\sqrt{3} - 1\right) = 0$

49. Hallar las coordenadas del punto simetrico A' al punto $A(3,2,1)$ respecto a la recta $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$

RESP: $A'\left(-\frac{1}{17}, -\frac{56}{17}, \frac{39}{17}\right)$

50. Demuestre que los planos $x + y - z = 1$ y $2x - 3y + 4z = 5$ no son paralelos ni perpendiculares.

51. Hallar la interseción entre el plano y recta.

$P : 2x + 7y + 4z = 51 \qquad \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-8}{5}$

RESP: no se intersectan

52. Demuestre que las rectas dadas son paralelas, y obtenga una ecuación del plano determinada por estas rectas

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

RESP: $4x + 2y - 3z + 5 = 0$

53. Calcular los puntos de minimo y maxima distancia entre la recta

$\frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-12}{4}$ con la esfera $(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 = 9$

RESP: $D_{\min} = 3 \quad D_{\max} = 9 \quad (0,2,8)(1,4,6)(3,8,2)$

54. Hallar una ecuación del plano que contiene las rectas

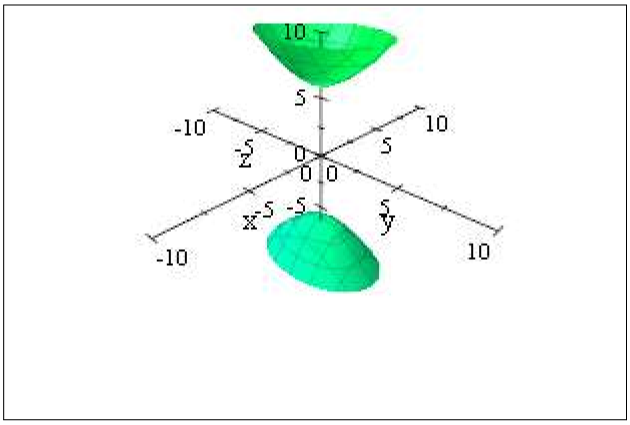
$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z$ y $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$

Resp: $x + y + z = 5$

55. Reduzca la ecuación a una de las formas estandar, clasifique y bosquejela.

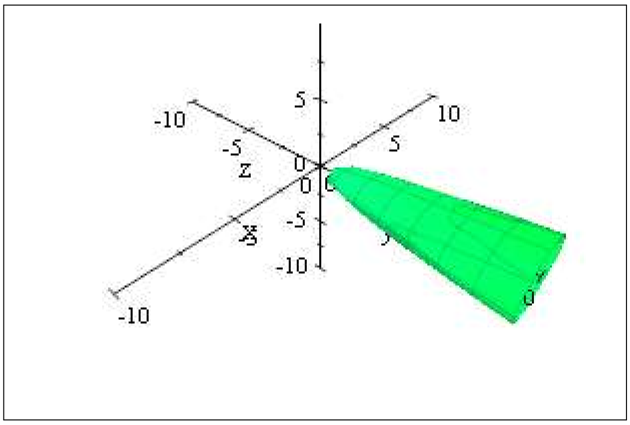
$z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

Resp:



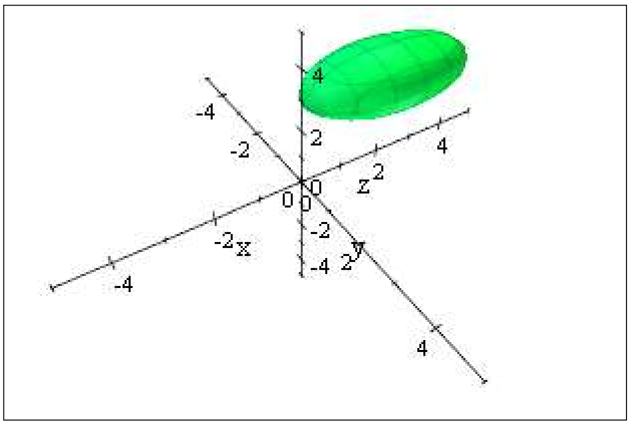
56. Reduzca la ecuación a una de las formas estandar, clasifique y bosquejela.

$x = 2y^2 + 3z^2$

Resp: 

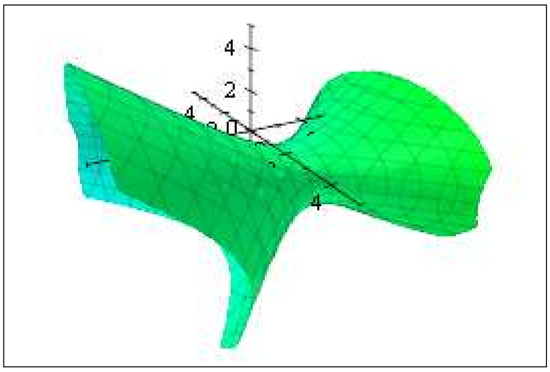
57. Reduzca la ecuación a una de las formas estandar, clasifique y bosquejela.

$4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

Resp: 

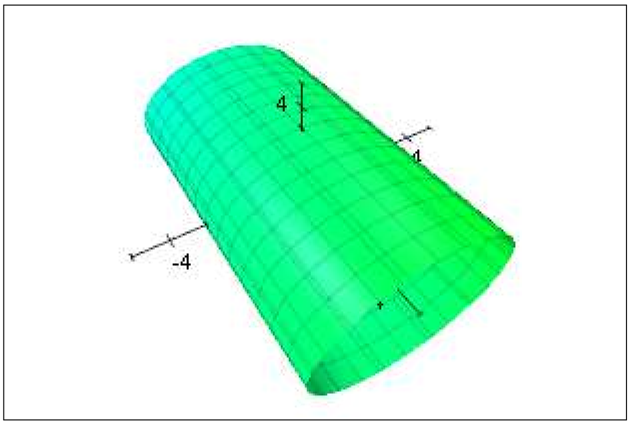
58. Reduzca la ecuación a una de las formas estandar, clasifique y bosquejela.

$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

Resp: 

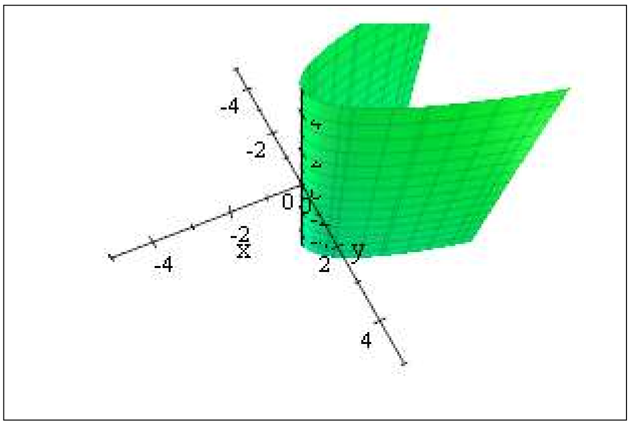
59. Describir y dibujar la superficie

$y^2 + z^2 = 9$

Resp: 

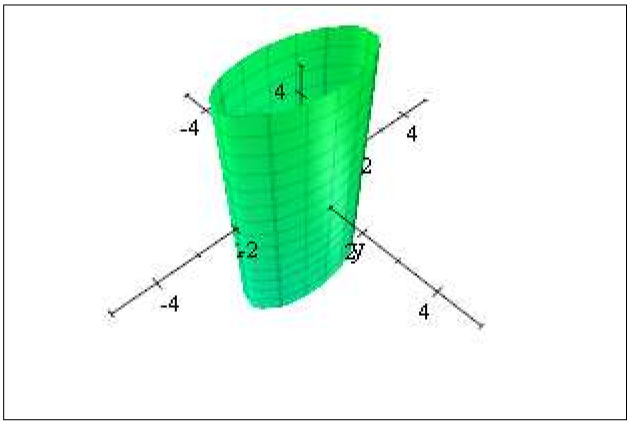
60. Describir y dibujar la superficie

$x^2 - y = 0$

Resp: 

61. Describir y dibujar la superficie

$4x^2 + y^2 = 4$

Resp: 

62. Represente la grafica

$x^2 - y^2 - z^2 - 14x + 6y - 8z + 10 = 0$

63. Represente la grafica

$4y - 3z - 15 = 0$

64. Represente la grafica

$y = z^2 + 1$

65. Represente la grafica

$9x^2 + 4z^2 = 36$

66. Represente la grafica

$z^2 - 4x^2 = 9 - 4y^2$

67. Hallar el dominio de la siguiente función vectorial de variable escalar

$\overrightarrow{f(t)} = \sqrt{t^2 - 9}\, i + \frac{1}{x^2 - 4} j + \ln(1 - x^2)k$

68. Encuentre el dominio de r y determine los numeros en los que r es continua determinar $\overrightarrow{r'(t)}$ y $\overrightarrow{r''(t)}$

$r(t) = \sqrt{t - 1}\, i + \sqrt{2 - t}\, j$

RESP: continua en toda su dominio $[1,2]$ $\overrightarrow{r'(t)} = \frac{1}{2}(t - 1)^{-\frac{1}{2}} i - \frac{1}{2}(2 - t)^{-\frac{1}{2}} j$
$r''(t) = -\frac{1}{4}(t - 1)^{-\frac{3}{2}} i + \frac{1}{4}(2 - t)^{-\frac{3}{2}} j$

69. Encuentre el dominio de r y determine los números en los que r es continua determinar ademas $\overrightarrow{r'(t)}$ y $\overrightarrow{r''(t)}$

$r(t) = \tan t i + (t^2 + 8t)j$

RESP:continua en todo su dominio $\left\{ t : t \neq \left(\frac{\pi}{2}\right) + n\pi \right\}$ $\overrightarrow{r'(t)} = \sec^2 t i + (2t + 8)j$
$r''(t) = 2\sec^2 t \tan t i + 2j$

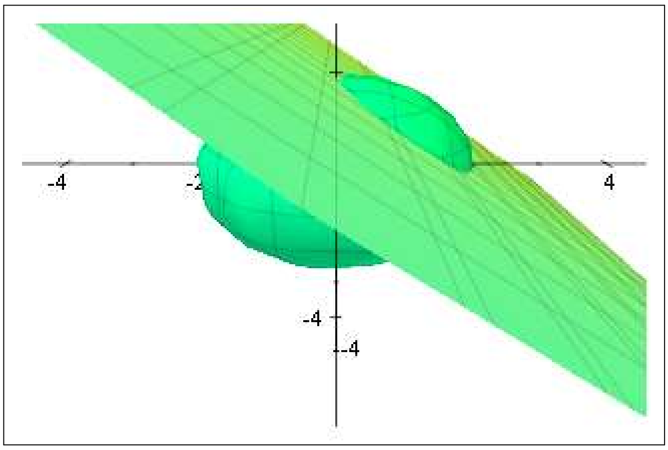
70. Calcular la derivada $f'(t)$ de la siguiente función y evaluar en $t = -1$

$\overrightarrow{f(t)} = t^4 i + e^t j + \ln t k$

RESP:$\langle 12, e, -1 \rangle$

71. Hallar la curva representada por la intersección de las superficies. Después representar la curva por medio de una función vectorial usando el parámetro dado.

Superficie	parametro
$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + z = 2$	$x = 1 + \sin t$

Resp. 

$\overrightarrow{r(t)} = (1 + \sin t)i + \sqrt{2}\cos t j + (1 - \sin t)k$

$\overrightarrow{r(t)} = (1 + \sin t)i - \sqrt{2}\cos t j + (1 - \sin t)k$

72. Determine las ecuaciones simetricas de la recta tangente a la curva con ecuación $\overrightarrow{r(t)} = 2\cos t i + 6\sin t j + t k$ en $t = \frac{\pi}{3}$

Resp: $\frac{x - 1}{-\sqrt{3}} = \frac{y - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{z - \frac{\pi}{3}}{1}$

73. Determine la ecuación del plano perpendicular a la curva $x = 3t, y = 2t^2, z = t^3$ en $t = -1$.

Resp: $3x - 4y + 5z = -22$

74. Considere la curva $r(t) = 2ti + \sqrt{7t}\,j + \sqrt{9 - 7t - 4t^2}\,k \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$.

a. Demuestre que la curva esta sobre una esfera con centro en el origen.

b. Donde corta la recta tangente en $t = \frac{1}{4}$ al plano xz.

Resp: $b)\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{37}{4\sqrt{7}}\right)$

75. Hallar la longitud de arco de la curva dada por

$\overrightarrow{r(t)} = a\cos ti + a\sin tj + btk \quad (0, 2\pi]$

Resp: $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

76. Representar la curva plana por medio de una función vectorial.

$\frac{x^3}{56} - \frac{y^2}{4} = 1$

Resp: $\overrightarrow{r(t)} = ti + \sqrt{\frac{t^3}{16} - 4}\,j$

77. Encuentre la ecuación parametrica de la recta tangente a la curva en P

$r(t) = \langle e^t, te^t, t^2 + 4\rangle \quad P(1, 0, 4)$

RESP: $x = 1 + s \quad y = s \quad z = 4$

78. Determinar los vectores T, N, B la función

$f(t) = \left\langle \frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2} \right\rangle$ en $t = 1$

RESP: $T(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\langle 1, 1, 1\rangle \; N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 0, -1\rangle \; B(t) = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle -1, 2, -1\rangle$

79. Determinar los vectores T, N, B la función

$f(t) = \langle t\cos t, t\sin t, t\rangle \quad t = 0$

RESP: $T(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1, 0, 1\rangle \quad N(t) = \langle 0, 1, 0\rangle \quad B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1, 0, 1\rangle$

80. Encuentre la ecuación parametrica de la recta tangente a la curva en P

$r(t) = \langle 2t^3 - 1, -5t^2 + 3, 8t + 2\rangle \quad P(1, -2, 10)$

RESP: $x = 1 + 6t \;\; y = -2 - 10t \;\; z = 10 + 8t$

81. Hallar la curvatura K de la curva

$\overrightarrow{r(t)} = ti + t^2j + \frac{t^2}{2}k$

Resp. $k = \frac{\sqrt{5}}{(1 + 5t^2)^{\frac{3}{2}}}$

82. Encontrar la curvatura K de la curva en el punto dado

$\overrightarrow{r(t)} = ti + t^2j + \frac{t^3}{4}k \quad P(2, 4, 2)$

Resp: $k = \frac{7\sqrt{26}}{676}$

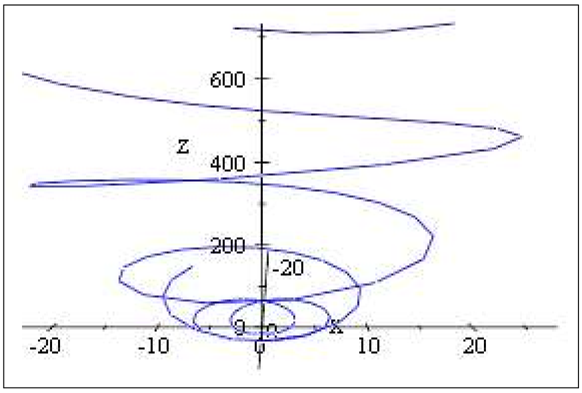
83. Hallar el vector tangente T a la curva de intersección de las superficies:

$z = x^2 + y^2 \quad z = 2 \quad P(1,1,2)$

RESP: $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle -1,1,0\rangle$

84. Dibujar la curva en el espacio y hallar su longitud sobre el intervalo dado.

$\overrightarrow{r(t)} = \langle \cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t, t^2\rangle \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Resp: 

$s = \sqrt{5}\,\frac{\pi^2}{8}$

85. Calcular $T(t)$, $N(t)$ para la curva

$\overrightarrow{r(t)} = ti + t^2 j + \frac{t^2}{2}k \quad t = 1$

Resp: $T(1) = \frac{\sqrt{6}}{6}\langle 1,2,1\rangle$

$N(1) = \frac{\sqrt{30}}{30}\langle -5,2,1\rangle$

86. Calcule la curvatura de $\overrightarrow{r(t)} = \langle t, t^2, \frac{t^3}{4}\rangle$

a. En un punto en general

b. En el punto $P(2,4,2)$

Resp: $\frac{7\sqrt{26}}{676}$

87. Demuestre que la curva $\overrightarrow{r(t)} = t^2 i + (1-3t)j + (1+t^3)k$, pasa por los puntos $(1,4,0)$ y $(9,-8,28)$, pero no por el punto $(4,7,6)$.

88. Hallar el vector unitario tangente y hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto P

$\overrightarrow{r(t)} = ti + t^2 j + tk \quad P(0,0,0)$

89. Determine los vectores unitarios tangente y normal $T(t), N(t)$

$r(t) = 2\sin ti + 3j + 2\cos tk \quad t = \frac{\pi}{4}$

RESP: $T(t) = \cos ti - \sin tk \quad N(t) = -\sin ti - \cos tk$

$T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(i-k) \quad N\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}(i+k)$

90. Hallar el vector unitario tangente y hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto P

$\overrightarrow{r(t)} = \langle t, t, \sqrt{4-t^2}\rangle \quad P\left(1,1,\sqrt{3}\right)$

91. Hallar el vector unitario tangente y hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto P

$r(t) = \langle 2\sin t, \cos t, 4\rangle \quad P\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4\right)$

Resp: $T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left\langle -\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right\rangle$

$x = t \quad y = 0 \quad z = t$

92. Hallar la curvatura K de la curva

$\overrightarrow{r(t)} = 4\cos(2\pi t)i + 4\sin(2\pi t)j$

Rep: $\frac{1}{4}$

93. Hallar la curvatura K de la curva

$\overrightarrow{r(t)} = a\cos t\omega i + a\sin \omega tj$

Resp: $\frac{1}{a}$

94. Hallar la curvatura K de la curva

$\overrightarrow{r(t)} = 4ti + 3\cos tj + 3\sin tk$

Resp: $\frac{3}{25}$

95. Hallar la curvatura de la curva de P

$y = \cos 2x \quad P(2,0)$

RESP: 4

96. Movimiento de un proyectil Una pelota de béisbol es golpeada desde 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y conun ángulo de 45° con respecto al nivel del suelo.

a. Hallar la función vectorial de la trayectoria de la pelota de béisbol

b. Hallar la altura máxima.

c. Hallar el alcance.

d. Hallar la longitud de arco de la trayectoria.

Resp $a)$ $\left(50t\sqrt{2}\right)i + \left(3 + 50t\sqrt{2} - 16t^2\right)j$

$b)$ $\frac{649}{8}$ pies

$c)$ 315.5 pies

$d)$ 362.9 pies

97. Hallar la longitud de arco de la curva dada por

$\overrightarrow{r(t)} = b\cos ti + b\sin tj + \sqrt{1 - b^2}\, tk$ desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$

Resp: $s = 2\pi$

98. Hallar la longitud de arco de la curva dada por

$\overrightarrow{r(t)} = -ti + +4tj + 3tk \quad (0, 1]$

Rep $s = \sqrt{26}$

99. Hallar la curvatura de la curva definida por

$\overrightarrow{r(t)} = 2ti + t^2j - \frac{1}{3}t^3k$

Resp: $\dfrac{2}{(t^2+2)^2}$

100. Encuentre los puntos de la curva en los que que la curvatura es 0

$y = x^4 - 12x^2$

RESP: $\left(\pm\sqrt{2}, -20\right)$

101. Encuentre los puntos de la curva en los que que la curvatura es 0

$y = \sinh x$

RESP: $(0,0)$

102. Demostrar que la curvatura en todos los puntos de una circunferencia de radio k es igual $\dfrac{1}{k}$.

103. Sea C la curva con ecuaciones parametricas $r(t) = t^2 i + t^3 j$ hallar la curvatura en el punto P correspondiente a $t = \dfrac{1}{2}$

RESP: $\dfrac{96}{125}$

104. Sean $u(t) = t^2 i + 6tj + tk$ y $v(t) = ti - 5tj + 4t^2 k.$ Hallar los valores de t para los que $u(t)$ y $v'(t)$ son ortogonales

105. Usar $v(t)$ y $u(t)$ del ejercicio anterior encontrar

$D_t(u(t) \times v(t))$

RESP: $(72t^2 + 10t)i + (2t - 16t^3)j - (15t^2 + 12t)k$

106. Usar $v(t)$ y $u(t)$ del ejercicio anterior encontrar

$D_t(u(t) \cdot v(t))$

RESP: $15t^2 - 60t$

107. $r(t)$ es la posición de una partícula en el espacio en el instante $t.$ Calcule el ángulo entre los vectores velocidad y aceleración en el instante $t = 0$.

a. $r(t) = (3t+1)i + \sqrt{3}\,tj + t^2 k$

b. $r(t) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} ti + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} t - 16t^2\right) j$

108. $r(t)$ es el vector posición de una partícula en el espacio en el instante t. Determine el instante o los instantes, en el intervalo dado, en que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales entre sí.

a. $r(t) = (t - \sin t)i + (1 - \cos t)j \quad 0 \le t \le 2\pi$

b. $r(t) = \sin ti + tj + \cos tk \quad t \ge 0$