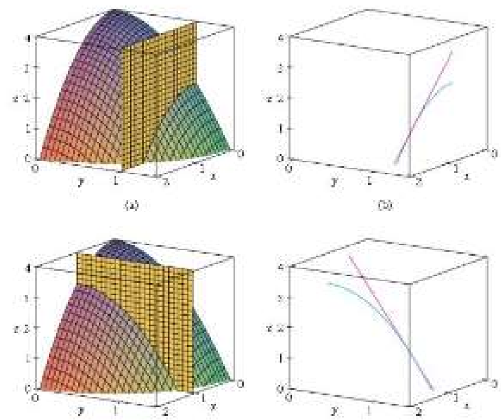
DERIVADAS PARCIALES



Criterio de desempeño

Conocer el concepto de función de derivada parcial para ejecutar su calculo a través de su interpretación geométrica y las formulas básicas de derivación, para desarrollar el razonamiento lógico y analítico en la solución de problemas de aplicación.

Contenido analitico

1.Definicion de derivada parcial
2. Derivada direccional
3. Derivadas parciales de orden superior
4. Reglas de la cadena
5. Definición Implícita
6. Incrementos diferenciales
7. Diferencial exacta

Introducción

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿"Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes"? Se puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado.

Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o la razón de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes se puede utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama derivación parcial y el resultado se llama derivada parcial de f con respecto a la variable independiente elegida.

Definition *a) La derivada parcial de* $f(x,y)$ *con respecto a* x *en el punto* (x_0,y_0) *es*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

b) La derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto a y en el punto (x_0,y_0) es

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si los limites existen.

Notation *Notaciones equivalentes son:*

$$f_x(x_0,y_0)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$z_x(x_0,y_0) \quad \text{"Derivada parcial de } f \text{ con respecto a } x \text{ en } (x_0,y_0)\text{"}.$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)$$
$$D_x f(x_0,y_0)$$

De manera similar para $\frac{\partial f}{\partial y}$

Las definiciones de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ nos proporcionan dos maneras distintas de derivar f en un punto: con respecto a x en la forma usual (considerando a y como una constante), y con respecto a y en la forma usual, considerando a x como constante, por lo general, los valores de las derivadas parciales son distintos entre sí en un punto dado (x_0,y_0).

Example *Determine los valores de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en el punto $(4,-5)$ si*

a) $f(x,y) = x^2 + 3xy + y + 1$
b) $f(x,y) = xy^3 - 3e^{xy} + \ln x$
c) $f(x,y) = \cos(xy) - \sin(x - y)$

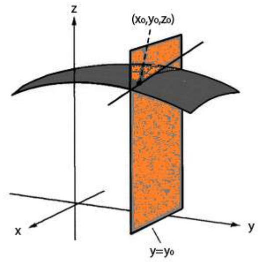
Las derivadas parciales $f_x(a,b)$ y $f_y(a,b)$ se pueden interpretar en forma geométrica como las pendientes de las tangentes en el punto $P(a,b,c)$ a las trazas C_1 y C_2 de la superficie S en los planos $y = b$ y $x = a$.

Example *Si $f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{1+y}\right)$ calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.*

Example *Determine f_x, f_y y f_z si $f(x,y,z) = e^{xy}\ln z$.*

Interpretación geométrica de la derivada parcial

¿Pero qué es lo que significa geométricamente el cálculo de una derivada parcial? Veamos el siguiente ejemplo:



En este gráfico tenemos una superficie $z = f(x,y)$ de la cual estamos haciendo la derivada parcial respecto la variable x en un punto (x_0, y_0, z_0). Hemos visto que hacer la derivada parcial respecto a x significa dejar la variable como constante. Mantener el valor fijo $y = y_0$ nos da como resultado un plano que pasa por el punto y_0. Construimos entonces el plano que sea paralelo al eje x. Este plano corta nuestra superfície. En la curva intersección consideramos la recta tangente en el punto (x_0, y_0, z_0). La derivada parcial nos dará la pendiente de esta recta.

Derivadas de orden superior

Si f es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales f_x y f_y son también funciones de dos variables, de modo que se consideran sus derivadas parciales $(f_x)_x, (f_x)_y, (f_y)_y, (f_y)_x$, que se llaman segundas derivadas parciales de f. Si $z = f(x,y)$, se tiene la notación siguiente

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$
$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Example *Determine las segundas derivadas parciales de*

a) $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

b) $f(x,y) = \sin^2(x^2 + yx)$

Observe que en el ejemplo anterior $f_{xy} = f_{yz}$. Esto no es una coincidencia. Resulta que las derivadas parciales combinadas f_{xy} y f_{yx} son iguales para la mayor parte de las funciones que uno encuentra en la práctica. El teorema siguiente, el cual fue descubierto por el matemático francés Alexis Clairaut (1713-1765), presenta las condiciones en las cuales es posible afirmar que $f_{xy} = f_{yx}$.

Theorem *Suponga que f está definida en un disco D que contiene el punto (a,b). Si tanto la función f_{xy} como f_{yx} son continuas en D entonces*

$$f_{xy} = f_{yx}$$

Las derivadas parciales de orden 3 o superiores también se pueden definir. Por ejemplo

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial^2 y \partial x}$$

y mediante el teorema de Clairaut se puede demostrar que $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$si estas funciones son continuas.

Example *Calcular f_{xxyz} si*

a) $f(x,y,z) = \sin(3x + yz)$

b) $f(x,y) = \cos(xyz^2) - \tan(x + y - z)$

Example *Compruebe que la función $u(x,t) = \sin(x - at)$ cumple con la ecuación de onda. (Ec. de onda $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$)*

Regla de la cadena

En el caso de funciones de más de una variable, la regla de la cadena tiene varias versiones, cada una de ellas da una regla para derivar una función compuesta. La primera versión se relaciona con el caso donde $z = f(x,y)$ y cada variable x y y es a su vez una función de la variable t. Esto significa que z es indirectamente una función de t, $z = f(g(t), h(t))$, y la regla de la cadena da una fórmula para diferenciar z como una función de t.

Theorem *a) Suponga que $z = f(x,y)$ es una función de x y y diferenciable, donde $x = g(t)$ y $y = h(t)$ son funciones de t diferenciables. Entonces z es una función de t diferenciable y*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

b) Suponga que $z = f(x,y)$ es una función diferenciable de x y y, donde $x = g(s,t)$ y $y = h(s,t)$ son funciones diferenciables de s y t, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Example *Si $z(x,y) = e^x \sin y$ donde $x(s,t) = st^2$ y $y(s,t) = s^2 t$ calcule $\frac{\partial z}{\partial s}$ y $\frac{\partial z}{\partial t}$.*

Example *Si $z(x,y) = x^2 y + 3xy^4$, donde $x(t) = \sin 2t$ y $y(t) = \cos t$, determine $\frac{dz}{dt}$ cuanto $t = 0$*

Derivación implicita

1. Se supone que una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$ define a y en forma explicita como una función diferenciable de x, es decir, $y = f(x)$ aplicando regla de la cadena se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

como $\frac{dx}{dx} = 1$ y si $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ se resuelve

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

2. Si la ecuación $F(x,y,z) = 0$ define a z implicitamente como función diferenciable de x y y entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad F_z(x,y,z) \neq 0$$

Example *Hallar una derivada implicita*

1. *Hallar* $\frac{dy}{dx}$ *dada la ecuacion* $y^3 + y^2 - 5y - x^3 + 4 = 4x^2 - 5y^7$
2. *Hallar* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *dada la ecuación* $3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = xyz - z^2$

Derivada Direccional

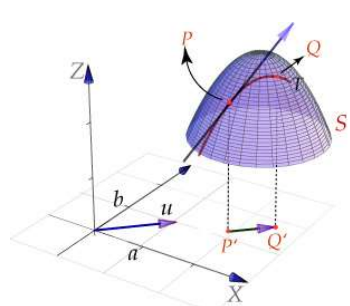
Recuerde que si $z = f(x,y)$, entonces las derivadas parciales f_x y f_y representan las razones de cambio de z en las direcciones x y y; es decir, en las direcciones de los vectores unitarios i y j.

Suponga que ahora quiere encontrar la razón de cambio de z en (x_0,y_0) en la dirección de un vector unitario arbitrario $u = \langle a,b\rangle$. Para hacer esto considere la superficie S cuya ecuación es $z = f(x,y)$ y evaluando la función en el punto $P(x_0,y_0,z_0)$ se tiene $z_0 = f(x_0,y_0)$. El plano vertical que pasa por P en la dirección de $\vec{u}$ corta a S en una curva C. La pendiente de la recta tangente T a C en el punto P es la razón de cambio de z en la dirección de u.

Definition *La derivada direccional de f en (x_0,y_0) en la dirección de un vector $\vec{u} = \langle a,b\rangle$ unitario es*

$$D_uf(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0,y_0)}{h}$$

si existe este limite.



Remark *Al comparar la definición anterior con las derivadas parciales, observe que si $\vec{u} = i = \langle 1,0\rangle$, entonces $D_uf = f_x$ y si $\vec{u} = j = \langle 0,1\rangle$ si , entonces $D_yf = f_y$. En otra palabras, las derivadas parciales de f con respecto a x y y son justamente casos especiales de la derivada direccional.*

Example *Determine la derivada direccional $D_uf(x,y)$ si*

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

y $\vec{u}$ es el vector unitario que se obtiene con el ángulo $\theta = \frac{\pi}{6}$ ademas calcular dicha derivada en el punto $(1,2)$

Cuando calcula la derivada direccional de una función que está definida por medio de una fórmula, en general se aplica el teorema siguiente.

Theorem *Si f es una función diferenciable de x y de y, entonces f tiene una derivada direccional, en la dirección de cualquier vector unitario $\vec{u} = \langle a,b\rangle$ y*

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)a + f_y(x,y)b$$

Example *Determine la derivada direccional del ejemplo anterior.*

Example *Determine la derivada direccional de*

1. $f(x,y) = ye^{-x}$ *en el punto* $(0,4)$ *en* $\langle 5,8\rangle$
2. $f(x,y) = x\sin(x,y)$ *en el punto* $(2,0)$ *en* $\langle -7,4\rangle$

Para funciones de tres variables, se puede definir las derivadas direccionales de una manera similar. Igualmente $D_u f(x,y,z)$, puede interpretarse como la razón de cambio de la función en la dirección de un vector unitario $\vec{u}$. Si $f(x,y,z)$ es derivable y $\vec{u} = \langle a,b,c\rangle$ es un vector unitario, entonces

$$D_u f(x,y,z) = f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c$$

Example *Encuentre la derivada direccional de $f(x,y,z) = x + y\cos(3xyz)$ en la dirección $\vec{v} = \langle 2,5,7,\rangle$ en el punto $\left(0,\frac{\pi}{2},\pi\right)$.*

Vector gradiente

La derivada direccional se puede escribir como el producto punto de dos vectores:

$$\begin{aligned} D_u f(x,y,z) &= f_x(x,y,z)a + f_y(x,y,z)b + f_z(x,y,z)c \\ &= \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle \cdot \langle a,b,c\rangle \\ &= \langle f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)\rangle \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

El primer vector en este producto punto se presenta no sólo al calcular las derivadas direccionales, sino también en muchos otros contextos. Por eso se le da un nombre especial, *gradiente de f,* y una notación especial ($grad(f)$ o $\nabla f(x,y)$ que se lee "nabla f").

Definition *Si f es una función de dos variables x y y, entonces el gradiente de f es la función vectorial ∇f definida por*

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x(x,y), f_y(x,y)\rangle = \frac{\partial f}{\partial x}i + \frac{\partial f}{\partial y}j$$

Example *Si $f(x,y) = \sin x + e^{xy}$ hallar el gradiente.*

Con esta notación para el vector gradiente, se puede escribir la derivada direccional como:

$$D_u f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \vec{u}$$

Example *Determine la derivada direccional de la función $f(x,y) = x^2y^3 - 4y$ en el punto $(2,-1)$ en la dirección del vector $\vec{v} = \langle 2,5\rangle$.*

Theorem *La dirección de maximo incremento de f esta dado por $\nabla f(x,y)$. el valor maximo de $D_u f(x,y)$ es $\|\nabla f(x,y)\|$*

Example *(a) Si $f(x,y) = xe^{xy}$, determine la razón de cambio de f en el punto $P(2,0)$ en la dirección de P a $Q\left(\frac{1}{2},2\right)$*
(b) ¿En qué dirección f tiene la máxima razón de cambio? ¿Cuál es esta máxima razón de cambio?

Example *Suponga que la temperatura en un punto (x,y,z) en el espacio está dado por $T(x,y,z) = \dfrac{80}{1+x^2+2y^2+3z^2}$, donde T se mide en grados Celsius y x,y,z en metros. ¿En qué dirección se incrementa más rápido la temperatura en el punto $(1,1,2)$? ¿Cuál es la razón de incremento máxima?*

Diferencial

Definition *La diferencial total de la variable dependiente z es:*

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Esta definición puede extenderse a una función de tres o más variables. Por ejemplo si $w = f(x,y,z,u)$ la diferencial total de w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \frac{\partial w}{\partial u}du$$

Example *El radio de la base y la altura de un cono circular recto se han medido dando como resultado 10 y 25 centímetros, respectivamente, con un posible error en la medida de 0.1 centímetros como máximo en cada medición. Utilizar la diferencial para estimar el error que se produce en el cálculo del volumen del cono:*
Si un cono tiene por radio la base x y y por altura y, su volumen es

$$V(x,y) = \frac{\pi}{3}x^2y$$

El error cometido en el cálculo del volumen es la diferencia entre el valor de esta función en $(10,25)$ y su valor en $(10+0.1, 25+0.1)$

$$V(10+0.1,25+0.1) - V(10,25)$$

la cual, aproximadamente, es la diferencial de V en $(10,25)$. Como la diferencial en un punto genérico (x,y) es:

$$dV(x,y) = \frac{2\pi}{3}xydx + \frac{\pi}{3}x^2dy$$

y los incrementos $dx = 0.1$ y $dy = 0.1$ y evaluando en el punto $(10,25)$ se tiene

$$dV(10,25) = \frac{500\pi}{3}(0.1) + \frac{100\pi}{3}(0.1) \approx 63\ cm^3$$

Example *Hallar la diferencial total de cada función:*
a) $z = 2x\sin y - 3x^2y^2$
b) $w = x^2+y^2+z^2$

Ecuaciones en diferenciales totales

La ecuación

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

se llama ecuación en diferenciales totales.

Puede demostrarse que el primer miembro de esta ecuación es exacta si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$