Operaciones elementales en una matriz

1) Intercambio entre filas:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 6 & 8 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 8 \\ 4 & 5 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

$\sim$ Signo de Equivalencia

2) Multiplicación de una fila con un escalar:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{-3F_1}{\sim} \begin{pmatrix} -6 & 3 & -15 \\ 4 & 9 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \underset{\left(\frac{3}{4}\right)F_3}{\sim} \begin{pmatrix} -6 & 3 & -15 \\ 4 & 9 & 3 \\ -\frac{3}{4} & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Escalar: $K \neq 0$

3) Suma de una fila con otra fila multiplicado por un escalar K $(K \neq 0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}_{-2F_2+F_1} \sim \begin{pmatrix} -6 & -7 & -7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \underset{F_2+F_3}{\sim} \begin{pmatrix} -6 & -7 & -7 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$

Fila que va a cambiar

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \\ 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_4}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \\ 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \underset{-3F_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -12 & -15 \\ 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -12 & -15 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\left(\frac{1}{3}\right)F_2 + F_3$

Ejemplo Convertir la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ en una matriz I

pivote

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{\substack{-2F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -11 & 4 \end{pmatrix} \underset{\substack{-4F_2+F_1 \\ 11F_2+F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} \underset{*\frac{1}{81}F_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$30F_3 + F_1$
$-7F_3 + F_2$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Pivote es distinto de cero y no se repite ni en la fila ni la columna de anteriores pivotes

Ejemplo

$$\begin{pmatrix}15 & 7 & -7\\ -1 & 1 & 1\\ 13 & 7 & -5\end{pmatrix}_{F_1 \leftrightarrow F_2} \sim \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 15 & 7 & -7\\ 13 & 7 & -5\end{pmatrix}_{\substack{15F_1+F_2\\ 13F_1+F_3\\ (-1)F_1}} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 22 & 8\\ 0 & 20 & 8\end{pmatrix}_{\left(\frac{1}{22}\right)F_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 4/11\\ 0 & 20 & 8\end{pmatrix}_{\substack{F_2+F_1\\ -20F_2+F_3}} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{7}{11}\\ 0 & 1 & \frac{4}{11}\\ 0 & 0 & \frac{8}{11}\end{pmatrix}_{\substack{\left(\frac{7}{8}\right)F_3+F_1\\ \left(-\frac{1}{2}\right)F_3+F_2\\ \left(\frac{11}{8}\right)F_3}} \sim \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I$$

Método de Gauss Consiste en escalonar una matriz mediante operaciones elementales (Forma escalonada)

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 6 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -3F_1+F_2 \\ -F_1+F_3 \\ \left(-\frac{3}{2}\right)F_1+F_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -9 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left(-\frac{5}{11}\right)F_2+F_3 \\ \left(-\frac{3}{22}\right)F_2+F_4 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{61}{22} \end{pmatrix} \left(\frac{61}{24}\right)F_3+F_4$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & -9 \\ 0 & 0 & \frac{12}{11} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz en su forma escalonada

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 13 & -3 \end{pmatrix} \underset{\substack{-F_1+F_2 \\ -3F_1+F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix} \underset{-2F_2+F_3}{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Matriz en su forma escalonada

Método de Gauss-Jordan (Matriz en su forma escalonada reducida)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{2F_1+F_2 \\ 2F_1+F_3}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{-4F_2+5F_3 \\ \left(\frac{1}{5}\right)F_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\left(\frac{2}{15}\right)F_3+F_2 \\ \left(\frac{1}{3}\right)F_3}}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Matriz en su forma escalonada reducida

21) Una empresa tiene tres comercios, F_1, F_2, F_3, en las que se fabrican diariamente tres tipos diferentes de productos, A, B y C, como se indica a continuación:

F_1: 200 unidades de A, 40 de B y 30 de C.

F_2: 20 unidades de A, 100 de B y 200 de C.

F_3: 80 unidades de A, 50 de B y 40 de C.

Cada unidad de A que se vende proporciona un beneficio de 5 €; por cada unidad de B, se obtienen 20 € de beneficio; y por cada una de C 30 €. Sabiendo que la empresa vende toda la producción diaria, obtener matricialmente el beneficio diario obtenido con cada una de los tres comercios.

$$\begin{array}{c} \\ F1 \\ F2 \\ F3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 200 & 40 & 30 \\ 20 & 100 & 200 \\ 80 & 50 & 40 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

BENEFICIO / UNIDAD

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = N$$

$$M \cdot N = ?$$

19) Tres personas: A, B, C, quieren comprar las siguientes cantidades de fruta:

A: 2 kg de peras, 1 kg de manzanas y 6 kg de naranjas.
B: 2 kg de peras, 2 kg de manzanas y 4 kg de naranjas.
C: 1 kg de peras, 2 kg de manzanas y 3 kg de naranjas.

En el pueblo en el que viven hay dos fruterías F_1 y F_2 . En F_1 las peras cuestan 1,5 €/ Kg, las manzanas 1 €o/Kg y las naranjas 2 €/Kg; en F_2 las peras cuestan 1,8 €/Kg, las manzanas 0,8 €/Kg y las naranjas 2 €/Kg.

a) Expresa matricialmente la cantidad de fruta (peras, manzanas y naranjas) que quiere comprar cada persona (A, B, C).
b) Escribe una matriz con los precios de cada tipo de fruta en cada una de las dos fruterías.
c) Obtén una matriz, a partir de las dos anteriores, en la que quede reflejado lo que se gastaría cada persona haciendo su compra en cada una de las dos fruterías.

a)
$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{PERA} & \text{MANZANA} & \text{NARANJA} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array} = M$$

b)
$$\begin{array}{c} \\ \text{PERA} \\ \text{MANZANA} \\ \text{NARANJA} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} F_1 & F_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}8 \\ 1 & 0{,}8 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} = N$$

c) $M \cdot N = ?$

22) En una pastelería elaboran tres tipos de postres: A, B y C, utilizando leche, huevos y azúcar (entre otros ingredientes) en las cantidades que se indican:

A: 3/4 de litro de leche, 100 g de azúcar y 4 huevos.

B: 3/4 de litro de leche, 112 g de azúcar y 7 huevos.

C: 1 litro de leche y 200 g de azúcar.

El precio al que se compran cada uno de los tres ingredientes es de 0,6 € el litro de leche, 1 € el kg de azúcar, y 1,2 € la docena de huevos. Obtener matricialmente el gasto que supone cada uno de estos tres postres (teniendo en cuenta solamente los tres ingredientes indicados).

$$\begin{array}{cccc} & \text{LECHE} & \text{AZUCAR} & \text{HUEVOS} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \multicolumn{3}{c}{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 100 & 4 \\ \frac{3}{4} & 112 & 7 \\ 1 & 200 & 0 \end{pmatrix}} \end{array} = M \qquad \begin{array}{cc} & \text{PRECIO} \\ \begin{array}{c} \text{LECHE} \\ \text{AZUCAR} \\ \text{HUEVO} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}001 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \end{array} = P \qquad M \cdot P = ?$$

$$\begin{array}{l} 1€ \text{ — } 1000\ gr \\ x \text{ — } 1\ gr \end{array} \rightarrow x = \frac{1 \cdot 1}{1000} = 0{,}001$$

$$\begin{array}{l} 1{,}2€ \text{ — } 12 \text{ HUEVOS} \\ x \text{ — } 1 \text{ HUEVO} \end{array} \rightarrow x = \frac{1 \cdot 1{,}2}{12} = 0{,}1$$