COMANDO GENERAL DEL EJÉRCITO
ESCUELA MILITAR DE INGENÍERIA
Mcal. ANTONIO JOSÉ DE SUCRE"
BOLIVIA

GUÍA PRÁCTICA

1. DATOS GENERALES	
Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**Código de la Asignatura:** SIS-03212
Carrera: Ingeniería de Sistemas	
Curso: A	**Semestre:** Tercero
Contenido Analítico: • Conceptualización de las ED. • Clasificación de las ED • Soluciones ED ordinarias • Métodos de resolución de una E.D. • Modelación por E.D.O.	**Unidad Temática:** TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
Docente: Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez	**Email:** victorestevez@hotmail.com
Bibliografia a seguir: • DIFFERENTIAL EQUATIONS Fourth Edition, Blanchard, Paul/ Devaney, Robert L. / Hall, Glen R.	
Práctica: 1	**Titulo:** Modelación mediante E.D.O.
Material de Apoyo: Diapositivas	**Carga horaria:** 6

2. OBJETIVO
• Utilizar EDO para modelar fenómenos • Establecer las soluciones correspondientes a las EDO formuladas • Generar modelos básicos a partir de las soluciones generadas.

3. SOFTWARE, SIMULADORES Y/O EQUIPOS	
Detalle	**Cantidad**
Google Colab	`https://colab.research.google.com`

1. Introducción

En esta práctica debe Formular las ecuaciones diferenciales, a partir de la identificación de variables y sus relaciones, siempre respecto a cambios en el tiempo. Se pedirá el uso los conceptos de derivadas e integración para la resolución básica de las Ecuaciones formuladas. Se pedirá interpretar estos resultados a partir de gráficas. Las gráficas y la implementación de modelos se puede realizar utilizando Python en google colab. Antes de empezar, se recomienda la lectura del libro "Differential Equations 4ed" de Paul Blanchard, el resumen proporcionado en las diapositivas y revisar los apuntes de clases, comprendiendo la lógica de de la técnica aplicada. Debe generar también un cuaderno en colab para cada ejercicio, graficando e implementando el resultado encontrado.

2. Modelación

1. Considere el modelo de población $\frac{dP}{dt} = 0.4P(1 - \frac{P}{230})$, donde $P_{(t)}$ es la población en el tiempo t.

(a) Para qué valores de P está en equilibrio la población?

(b) Graficar la función (Python).

(c) Para qué valores de P está creciendo la población?

(d) Para qué valores de P está decreciendo la población?

2. Considere el modelo de población $\frac{dP}{dt} = 0.3P(1 - \frac{P}{200})(\frac{P}{50} - 1)$, donde $P_{(t)}$ es la población en el tiempo t.

   (a) Para qué valores de P está en equilibrio la población?

   (b) Graficar la función (Python).

   (c) Para qué valores de P está creciendo la población?

   (d) Para qué valores de P está decreciendo la población?

3. Considere la ecuación diferencia $\frac{dP}{dt} = P^3 - P^2 - 12P$

   (a) Para qué valores de P está en equilibrio P?

   (b) Graficar la función (Python).

   (c) Para qué valores de P está creciendo P?

   (d) Para qué valores de P está decreciendo P?

4. El archivo de texto adjunto *ejer04.csv* proporciona una tabla con información del área de terreno en Australia colonizada por el sapo marino americano (Bufo marinis) cada cinco años desde 1939 hasta 1974. La primera columna corresponde al **Año**, y la segunda al **Área ocupada acumulativa** (km^2) . Modele la migración de este sapo bajo el supuesto que la velocidad de crecimiento es proporcional a la población de sapos. Para ello:

   (a) Formula la Ecuación Diferencial.

   (b) Resuelve el problema de valor inicial.

   (c) Determina la constante k (mostrar los datos reales población - tiempo)

   (d) Graficar población real y población del modelo

   (e) Compara la solución con los datos reales. Crees en tus predicciones?

   (f) Haga predicciones acerca de la superficie de terreno ocupada en los años 2010, 2050 y 2100.

5. Considere un modelo elemental del proceso de aprendizaje: si bien el aprendizaje humano es un proceso extremadamente complicado, es posible construir modelos de ciertos tipos simples de memorización. Por ejemplo, considere una persona a quien se le da una lista para estudiar, y posteriormente se le hacen pruebas periódicas para determinar exactamente qué tanto de la lista ha memorizado. (Por lo general las listas consisten en sílabas sin sentido, números de tres dígitos generados al azar o entradas de tablas de integrales. Si $L_{(t)}$ es la fracción de la lista aprendida en el tiempo t, donde $L = 0$ corresponde a no saber nada del listado y $L = 1$ corresponde a saberlo por completo, podemos entonces formar un simple modelo de este tipo de aprendizaje con base en las hipótesis: La rapidez de aprendizaje es proporcional a la fracción que queda por aprender.

   (a) Formular la Ecuación diferencial.

   (b) Graficar la la tasa de cambio con respecto del tiempo. (utilizar $k = 0.2$)

   (c) Generar el modelo de memorización resolviendo la ecuación planteada.

   (d) Para que valores de L con $0 < L < 1$ ocurre mas rápido el aprendizaje?

6. Suponga que dos estudiantes memorizan listas de acuerdo con el mismo modelo: $\frac{dL}{dt} = 2(1 - L)$

(a) Si uno de los estudiantes aprende la mitad de la lista en el tiempo $t = 0$ y el otro no memoriza nada de ella, qué estudiante está aprendiendo más rápidamente en este instante?

(b) Alcanzará el estudiante que comienza sin saber nada de la lista al estudiante que empieza sabiendo la mitad de la lista?

7. Considere las dos siguientes ecuaciones diferenciales que modelan las tasas de memorización de un poema por dos estudiantes. La tasa de Juan es proporcional a la cantidad por aprender, con una constante de proporcionalidad de $k = 2$. La tasa de Ana es proporcional al cuadrado de la cantidad por aprender y cuya constante de proporcionalidad es de $k = 3$.

   (a) Formular las ecuaciones

   (b) Resolver las ecuaciones (puede utilizar sympy)

   (c) Graficar ambos modelos de velocidad

   (d) Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en t=0 , si ambos empiezan la memorización juntos y nunca antes han visto el poema? Encuentre la solución particular de ambos y graficar.

   (e) Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en t=0t=0 , si ambos empiezan a memorizar juntos habiendo aprendido la mitad del poema? Encuentre la solución particular de ambos y graficar.

   (f) Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en t=0t=0 , si ambos empiezan la memorización juntos y habiendo aprendido un tercio del poema? Encuentre la solución particular de ambos y graficar.

8. En los siguientes ejercicios, consideramos el fenómeno de la desintegración radiactiva que, por experimentación, sabemos que se comporta de acuerdo con la ley siguiente: La tasa a la que una cantidad de un isótopo radiactivo se desintegra es proporcional a la cantidad del isótopo presente. La constante de proporcionalidad depende sólo de la partícula radiactiva considerada.

   (a) Modele la desintegración radiactiva en base a E.D.O. usando la notación: t tiempo, $r_{(t)}$ cantidad de isótopo radiactivo particular en el tiempo t, $-\lambda$ tasa de desintegración. Observa que el signo menos se usa para $\lambda < 0$.

   (b) Usando esta notación, escriba un modelo para la desintegración de un isótopo radiactivo particular.

   (c) Si la cantidad del isótopo presente en $t = 0$ es r_0, establezca el problema de valor inicial correspondiente para el modelo resuelto.

   (d) Implementar una función en Python para implementar el modelo generado.

   (e) Graficar el modelo cantidad de isotopo vs tiempo.

9. La vida media de un isótopo radiactivo es la cantidad de tiempo que toma a una cantidad de material radiactivo desintegrarse a la mitad de su cantidad original.

   (a) La vida media del carbono 14 (C-14) es de 5230 años. Determine el parámetro λ de tasa de desintegración del C-14.

   (b) La vida media del yodo 131 (1-131) es de 8 días. Calcule el parámetro de tasa de desintegración del 1-131.

   (c) Cuáles son las unidades de los parámetros de tasa de desintegración en las partes (a) y (b)?

   (d) Para estimar la vida media de un isótopo, podríamos comenzar con 1000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma a 500 de ellos desintegrarse o podríamos comenzar con 10 000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma desintegrarse a 5 000 de ellos. Obtendremos la misma respuesta? Explícalo.

10. El fechado por carbono es un método para determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del material orgánico. Las hipótesis implícitas en el fechado por carbono son que:
    - El carbono 14 (C-14) constituye una proporción constante del carbono que la materia viva ingiere según una base regular.
    - Una vez que la materia muere, el C-14 presente se desintegra, pero ningún átomo nuevo es agregado a la materia.

    Entonces, al medir la cantidad de C-14 que aún permanece en la materia orgánica y al compararla con la cantidad de C-14 encontrada en la materia viva, puede calcularse el ”tiempo desde la muerte”. Usando el parámetro de la tasa de desintegración que usted estimó en el anterior ejercicio, determine el tiempo desde la muerte si:
    (a) 88% del C-14 original aún está presente en el material.
    (b) 12% del C-14 original aún está presente en el material.
    (c) 2% del C-14 original aún está presente en el material.
    (d) 98% del C-14 original aún está presente en el material.
11. El isótopo radiactivo I-131 se usa en el tratamiento de la hiper tiroides. El I-131 administrado a un paciente se acumula en forma natural en la glándula tiroides, donde se desintegra y acaba con parte de la glándula.
    (a) Suponga que se requieren 72 horas para enviar el I-131 del productor al hospital. Qué porcentaje de la cantidad originalmente enviada llega al hospital?
    (b) Si el I-131 es almacenado en el hospital 48 horas adicionales antes de ser usado, ¿qué tanto queda de la cantidad original enviada por el productor cuando el material radiactivo se utilice?
    (c) Qué tiempo le tomará al I-131 desintegrarse completamente de manera que el hospital pueda deshacerse de los residuos sin precauciones especiales?
12. Suponga que una especie de pez en un lago específico tiene una población que sigue el modelo logístico de población con razón k de crecimiento, capacidad N de soporte y tiempo t medido en años. Ajuste el modelo para tomar en cuenta cada una de las situaciones siguientes.
    (a) 100 peces son cultivados cada año.
    (b) Un tercio de la población de peces es cultivada anualmente.
    (c) El número de peces cultivados cada año es proporcional a la raíz cuadrada del número de peces en el lago.
13. Suponga el parámetro $k = 0.3$ de razón de crecimiento y la capacidad $N = 2500$ de soporte en el modelo logístico de población del ejercicio anterior. Y también que $P_{(0)} = 2500$.
    (a) Graficar la tasa de crecimiento.
    (b) Si 100 peces son cultivados cada año, ¿ qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de la población de peces ? En otras palabras, qué da un análisis cualitativo del modelo?
    (c) Si cada año se cultiva una tercera parte de los peces, qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de dicha población?
14. El rinoceronte es actualmente muy raro. Suponga que se aparta suficiente terreno para su preservación y que hay entonces suficiente espacio para muchos más territorios de rinocerontes que rinocerontes. En consecuencia, no habrá peligro de una sobre población. Sin embargo, si la población es muy pequeña, los adultos fértiles tendrán dificultad en encontrarse cuando sea el tiempo de apareamiento.

(a) Escriba una ecuación diferencial que modele la población de rinocerontes con base en esas hipótesis. (Note que hay más de un modelo razonable que se ajusta a esas suposiciones.)

(b) Encuentre la solución general.

(c) Graficar, velocidad - tiempo, y población tiempo. Tiene sentido el modelo generado?

15. Considere las siguientes hipótesis respecto a la fracción de una pieza de pan cubierta por moho:

- Las esporas de moho caen sobre el pan a una razón constante.
- Cuando la proporción cubierta es pequeña, la fracción del pan cubierto por el moho se incrementa a una razón proporcional a la cantidad de pan cubierto.
- Cuando la fracción de pan cubierto por el moho es grande, la razón de crecimiento disminuye.
- Para sobrevivir, el moho debe estar en contacto con el pan.

(a) Usando estas hipótesis, escriba una ecuación diferencial que modele la proporción de una pieza de pan cubierta por moho. (Observe que hay más de un modelo razonable que se ajuste a esas hipótesis.)

(b) Encuentre la solución general.

(c) Graficar, velocidad - tiempo, y población tiempo. Tiene sentido el modelo generado?

16. El archivo $ejer11.csv$ contiene datos sobre la población de búhos amarillos en Inglaterra. La primera columna corresponde a los años en que se tomo el control de población, la segunda respectivamente pertenece al tamaño de la población de Búhos. :

(a) Grafique utilizando matplotlib.

(b) Qué modelo de población usaría usted para modelar esta población?

(c) Puede usted calcular (o por lo menos hacer estimaciones razonables) los valores del parámetro?

(d) Qué predice su modelo para la población actual?

(e) Podría implementar un predictor de población de Búhos en python con este estudio? Realizar codificación.

5. Calificación y Fecha de Entrega

Puntuación : 10%

Fecha Defensa: 01/08/2021