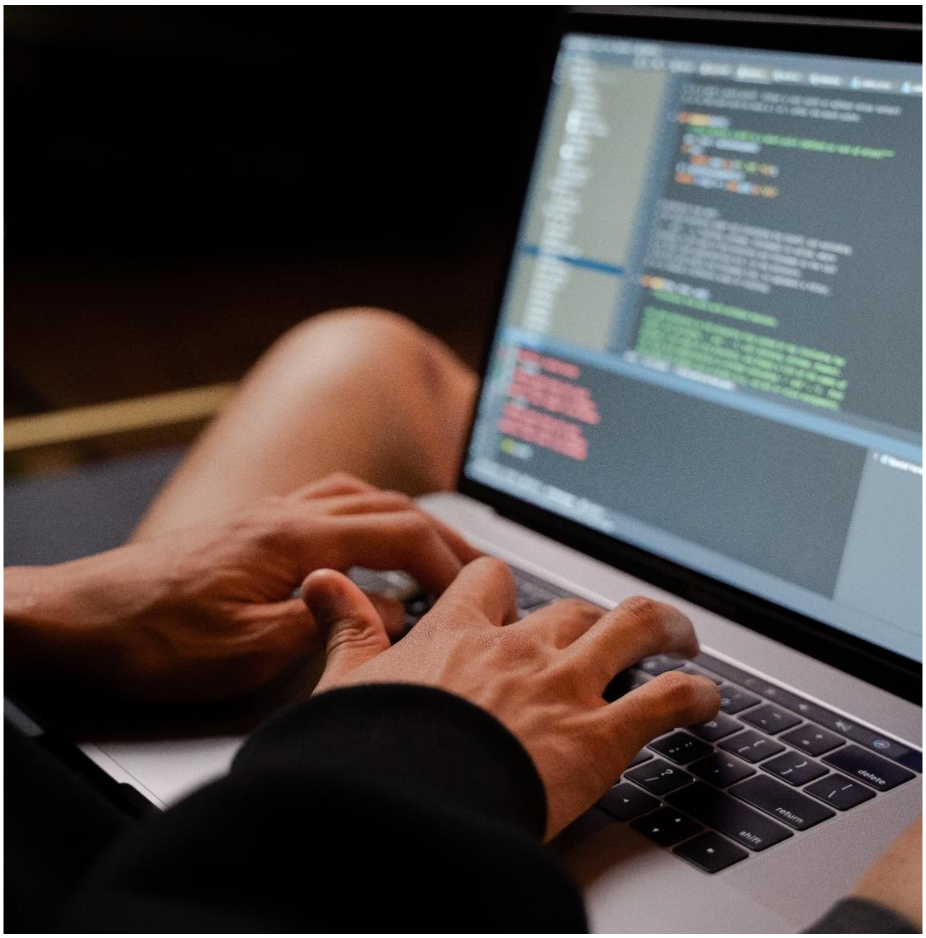
# ECUACIONES DIFERENCIALES



**ESTUDIANTE:** VICTOR MANUEL CACERES PACO

**CODIGO:** C9901-5

**TRABAJO:** PRACTICA 1

**GESTION:** **2022**

Nº Tema: Fecha: / /

# Práctica N° 1

## Ejercicio 1

1- Considere el modelo de población $\frac{dP}{dt} = 0.4P\left(1 - \frac{P}{230}\right)$, donde $P_{(t)}$ es la población

a) Para qué valores de P esta equilibrio la población

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}4P - \frac{0{,}4P^2}{230}$$

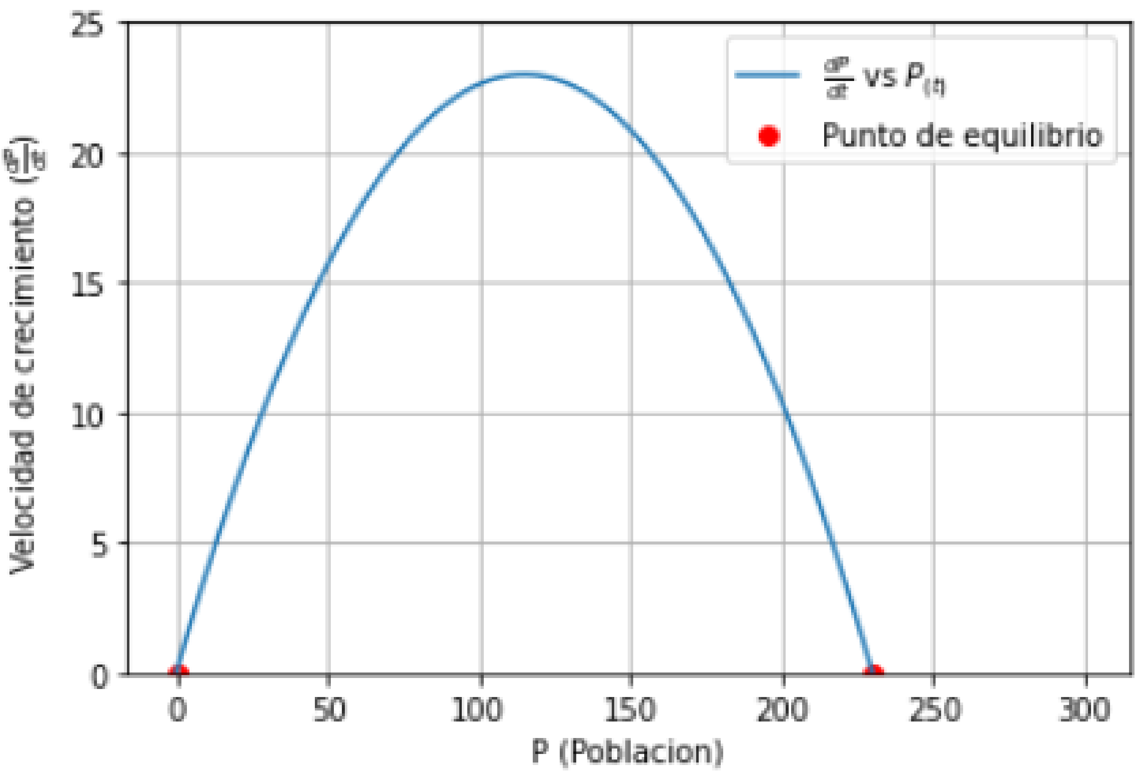
$$\frac{0{,}4P^2}{230} - 0{,}4P = 0$$

$P=0$ $\quad P = \frac{0{,}4 \times 230}{0{,}4}$ $\quad P=230$

$\boxed{P = 230}$ Puntos de

$\boxed{P = 0}$ Equilibrio

b) Graficar la funcion python



c) Para que valores P esta creciendo la población

Para el intervalo $0 < P < 230$

d) Para que valores de esta decreciendo la poblacion

Para el intervalo $P < 0$ y $P > 230$.

# Ejercicio 2

2- Considere el modelo de población $\frac{dP}{dt} = 0.3P\left(1 - \frac{P}{200}\right)\left(\frac{P}{50} - 1\right)$ donde $P_{(t)}$ es la población en el tiempo.

a) Para que valores P esta en equilibrio la población

$$\frac{dP}{dt} = 0.3P\left(1 - \frac{P}{200}\right) \cdot \left(\frac{P}{50} - 1\right)$$

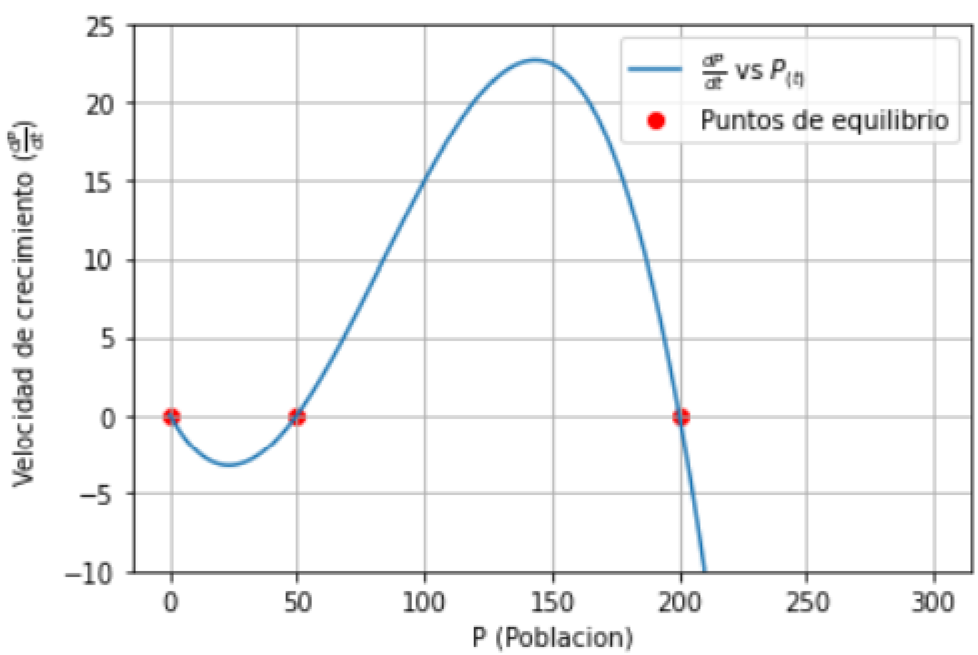
$$0 = 0.3P\left(1 - \frac{P}{200}\right) * \left(\frac{P}{50} - 1\right)$$

$0.3p = 0$ entonces $p = 0$

Tema:

* $\left(\frac{P}{50} - 1\right) = 0$ entonces $\boxed{P = 50}$
* $\left(1 - \frac{P}{200}\right) = 0$ entonces $\boxed{P = 200}$

b- Graficar la función (payton)



c - Para que valores de P esta creciendo la población

R = para los intervalos $50 < P < 200$

d. Para que valores P esta decreciento la población ?

para el longo $0 < P < 50$ y para $P > 200$

3 - Considere la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = P^3 - P^2 - 12P$

a. para que valores P esta (creciendo p.) en equilibrio

$$\frac{dP}{dt} = P^3 - P^2 - 12P$$

$$0 = P(P^2 - P - 12) \nearrow$$

$P_1 = 0$

$P^2 - P - 12 = 0$

$P \quad +3 = 3P$

$P \quad -4 = \frac{-4P}{-P}$

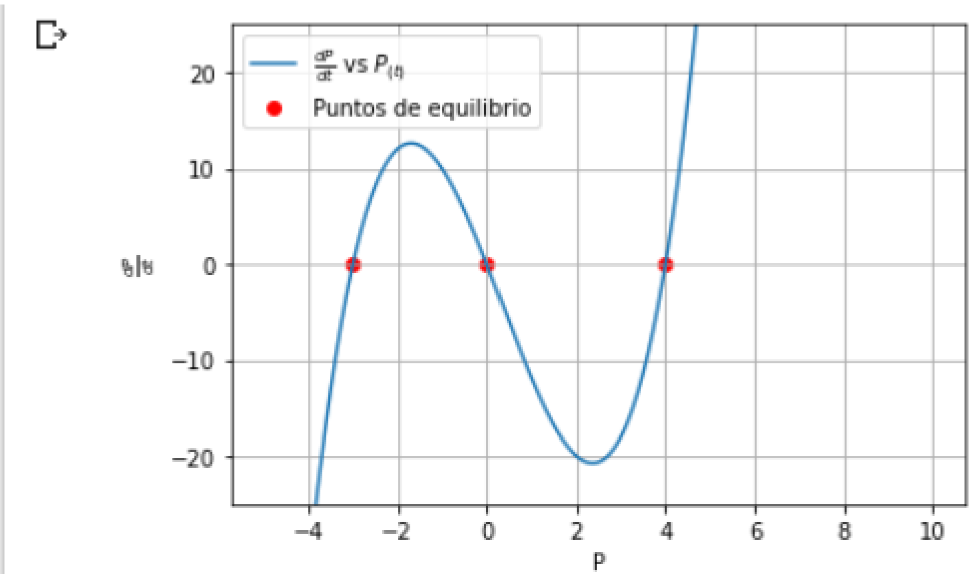
$P_2 = -3$

$P_3 = 4$

Valores de equilibri son:

$P_1 = 0 \quad P_2 = -3 \quad P_3 = 4$

b. Graficar la función (python)




4 - a) Formula la Ecuación Diferencial

$$\frac{dP}{dt} \propto P$$

$$\frac{dP}{dt} = KP$$

$$\frac{dP}{dt} = K(P)$$

solución

Nº Tema: Fecha:

b) Resuelve el problema del valor inicial

$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$

$\ln|P| = kt + c$

$\underline{P = e^{kt} \cdot C}$ sol.

c) Determinar la constante k (mostrar los datos reales pobla

$P = Ce^{kt}$  $\underline{C = 328}$  $P = 328\, e^{kt}$

$328 = Ce^{0}$

en $t = 5$ años  $P = 550002$

$550\quad = 32800\, e^{5k}$  $\boxed{K = 0{,}1034}$ sol.

$K = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{550}{328}\right.$

5- datos $t$ líneas

$\alpha(t) \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 0 \end{cases}$

$\alpha(t)$ = dependiente

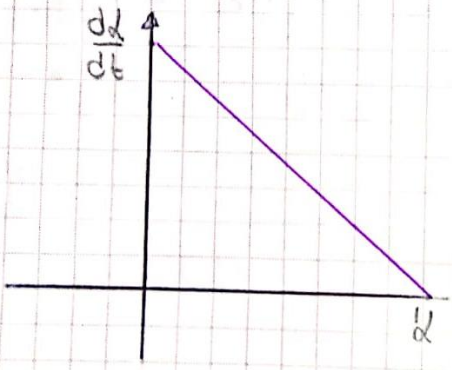
$t$ = Independiente.

a) Ecuación diferencial.

porque es proporcional

$$\boxed{\frac{d\alpha}{dt} \propto 1-\alpha} \longrightarrow \boxed{\frac{d\alpha}{dt} = k(1-\alpha)} \rightarrow \text{Ecuación diferencial}$$

b) Graficar la tasa de cambio con respecto del tiempo (utilizar $k=0,2$)




c) Generar el modelo de memorización resolviendo la ecuación planteada.

$$\frac{d\alpha}{dt} = k(1-\alpha)$$

$$\int \frac{d\alpha}{1-\alpha} = \int k\,dt$$

Cambio Variable

$u = 1-\alpha$

$-du = -d\alpha$

$$\int \frac{du}{u} = kt + c$$

$$-\ln|u| = kt + c$$

$$-\ln|1-\alpha| = kt + c \, /(-1)$$

$$\ln|1-\alpha| = -kt + c$$

$$1-\alpha = e^{-kt+c}$$

$$1-\alpha = e^{-kt} \cdot e^{c}$$

$$1-\alpha = Ce^{-kt}$$

$$\boxed{\alpha_{(t)} = 1 - Ce^{-kt}}$$

Modelo Memorización $\alpha(t)$ las líneas respecto al tiempo

c) Para que valores de $\alpha$ con $0 < \alpha < 1$ ocurre más rapido el aprendizaje.

con $\alpha = 0$ se produce mayor velocidad de aprendizaje, según la grafica.

6 - Suponga que dos estudiantes memorizen listas de acuerdo el mismo modelo $\frac{d\alpha}{dt} = 2(1-\alpha)$

a) Si uno de los estudiantes aprende la mitad de la lista en el tiempo $t=0$ y el otro no memoriza nada de ella, que estudiante esta aprendiendo mas rapidamente

$$\int \frac{d\alpha}{1-\alpha} = \int 2\,dt \qquad u = 1-\alpha \quad -du = dt$$

$$-\int \frac{du}{u} = 2t \Rightarrow -\ln|u| = 2t$$

$$1-\alpha = e^{-2t+c} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1 - Ce^{-2t}}$$

2 = Datos

Juan $\rightarrow K = 2$

Ana $\rightarrow K = 3$

a)

| Aprendizaje Juan | Aprendizaje Ana |
| --- | --- |
| $\frac{d\alpha}{dt} \propto (1-\alpha)$ | $\frac{d\alpha}{dt} \propto (1-\alpha)^2$ |
| $\frac{d\alpha}{dt} = (1-\alpha)K$ | $\frac{d\alpha}{dt} = (1-\alpha)^2 K$ |
| $\frac{d\alpha}{dt} = 2(1-\alpha)$ | $\frac{d\alpha}{dt} = 3(1-\alpha)^2$ |

b) Resolver las ecuaciones $\rightarrow$

Aprendizaje de Juan

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2(1-\alpha)$$

$$\int \frac{d\alpha}{1-\alpha} = \int 2\,dt \qquad u = 1-\alpha \quad du = -d\alpha$$

$$-\ln|u| = 2t + C \quad /(-1)$$

$$\ln|u| = -2t - C$$

$$1-\alpha = e^{-2t} \cdot e^{c}$$

$$-\alpha = Ce^{-2t} - 1$$

$$\boxed{\alpha = 1 - Ce^{-2t}}$$

Nº Tema: Fecha:

Aprendizaje de Anna

$$\frac{d\alpha}{dt} = k(1-\alpha)^2 \qquad u = (1-\alpha)$$

$$\int \frac{d\alpha}{(1-\alpha)^2} = \int k\,dt \qquad du = -du$$

$$-\int u^{-2}\,du = kt + c$$

$$-\frac{u^{-1}}{-1} = kt + c$$

$$+\frac{1}{(1-\alpha)} = kt + c$$

$$\frac{1}{kt+c} = 1-\alpha$$

$$\alpha = 1 - \frac{1}{kt+c}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{kt+c-1}{kt+c}}$$

c) Graficar ambos modelos de velocidad

Tema:

8:- $r$ = radiación → Es proporcional $\frac{dr}{dt}$

a) Modele la desintegración radiactiva en base EDO usando la notación $t$ tiempo, $r(t)$ cantidad de isótopo radiactivo particular $t$, $-\lambda$ tasa de desintegración. Observa que el signo menos se usa para $\lambda < 0$

Variables

$t$ = independiente
$r(t)$ = dependiente

$$\boxed{\frac{dr}{dt} \propto r} \rightarrow \text{Es proporcional}$$

$$\frac{dr}{dt} = -\lambda r \quad \Big\} \text{ Ecuación diferencial}$$

b) Usando esta notación escriba un modelo para la desintegración de un isótopo radiactivo particular.

$$\frac{dr}{dt} = -\lambda r \Rightarrow \int \frac{dr}{r} = \int -\lambda dt$$

$$\ln|r| = -\lambda t + c$$

$$r = e^{-\lambda t + c}$$

$$\boxed{r = Ce^{-\lambda t}}$$

c) Si la cantidad del isótopo presente en $t=0$ es $r_0$, establezca el problema de valor inicial correspondiente para el modelo resuelto

$$r_0 = Ce^{-\lambda(0)} \longrightarrow t=0$$

$$r_0 = C \rightarrow \boxed{r = r_0 e^{\lambda t}}$$

d) Implementar una función python para implementar modelo generado

```
def desintegración (r0, t, lamp)
    r = r0 * numpy.ex(-lam * t)
    return r
```

9-

a) La vida media del carbono 14 (C-14) es de 5230 años Determ. el parametro $\lambda$ de tasa de desintegración C-14

$r = r_0 e^{-\lambda t}$

$\frac{1}{2}\cancel{r_0} = \cancel{r_0} e^{-\lambda(5230)}$

$\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\lambda\, 5230$

$-\frac{\ln|1/2|}{5230} = \lambda$

$\boxed{\lambda = -0{,}000132533}$ sol

b La media del yodo 131 (I-131) es de 8 días. Calcule el parametro de tasa de desintegración del I-131

$r = r_0 e^{-\lambda t}$

$\frac{1}{2}\cancel{r_0} = \cancel{r_0} e^{-\lambda(5230)}$

$\frac{1}{2} = e^{-\lambda(8)}$

$\boxed{\lambda = 0{,}087}$ sol

$\lambda = -\frac{1}{8}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

c: Cuales son las unidades de los parametros de tasa de desintegración en las partes (a) y (b)

En el inciso (a) las unidades son años

En el inciso (b) las unidades son en días

d) Para 100 atomos Isotopo $t = ?$ 10000 atomos Iso

Si obtendriamos la misma cantidad, con el dato inicial y la desintegración por la mitad, simplificamos porque son iguales.

Ejercicio 10

a) 88% del C-14 original aun esta presente en el material

$r = r_0 e^{-0{,}0001225 t}$

$\frac{88}{100} r_0 = r_0 e^{-0{,}0001325 t}$

Nº Tema: Fecha: / /

$\frac{88}{100} = e^{-0{,}0001325t}$

$t = \frac{1}{-0{,}0001325} \ln\left(\frac{88}{100}\right)$

$t = 964{,}5$ años sol.

b) 12% del C-14 original aun esta presente en el material

$r = r_0\, e^{-0{,}0001325t}$

$\frac{12}{100}\% \cancel{r_0} = \cancel{r_0}\, e^{-0{,}0001325t}$

$\frac{12}{100} = e^{-0{,}0001325t}$

$t = \ln\left(\frac{12}{100}\right) \frac{1}{-0{,}0001325}$

$t = 15998$ años sol.

c) 2% del C-14 original aun esta presente en el material.

$r = r_0\, e^{-0{,}0001325t}$

$\frac{2}{100} \cancel{r_0} = \cancel{r_0}\, e^{-0{,}0001325t}$

$t = 29517$ años

$t = \frac{1}{-0{,}0001325} \ln\left(\frac{2}{100}\right)$

d) 98% del C-14 original aun esta presente en el material

$r = r_0\, e^{-0{,}0001325t}$

$\frac{98}{100} \cancel{r_0} = \cancel{r_0}\, e^{-0{,}0001325t}$

$t = \frac{1}{-0{,}0001325} \ln\left(\frac{98}{100}\right)$

$t = 152{,}43$ años

Nº

Tema: Fecha: / /

10 - C a) Suponga que se requieren 72 horas para enviar el I-131 del productor al hospital. Que porcentaje de la cantidad original enviada por el productor llega al hospital.

$$r = r_0 e^{-0,0866 t}$$

$$P \cancel{r_0} = \cancel{r_0} e^{-0,0866 (72/24)}$$

$$P = e^{-0,0866 \left(\frac{72}{24}\right)}$$

$$P = 77\%$$

b) Si el I-131 es almacenado en el hospital 48 horas adicionales antes de ser usado ¿Que tanto queda la cantidad original enviada por el productor cuando el material radiactivo se utilize?

$$P \cancel{r_0} = \cancel{r_0} e^{-0,0866 \left(\frac{48}{24} + 3\right)}$$

$$P = e^{-0,0866 (5)}$$

$$P = 64.8\% \text{ solución}$$

c) Que tiempo tomara el I-131 desintegiarse completamente de manera que el hospital pueda deshacerse de los residuos sin precauciones especiales

Nunca podra desintegiarse completamente porque $e^{-\lambda t}$ nunca dara $\underline{0}$, sol.

12 = a) 100 peces son cultivados cada año

$$\frac{dP}{dt} = K\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - 100$$

b) Un tercio de la población de peces es cultivada anualmente

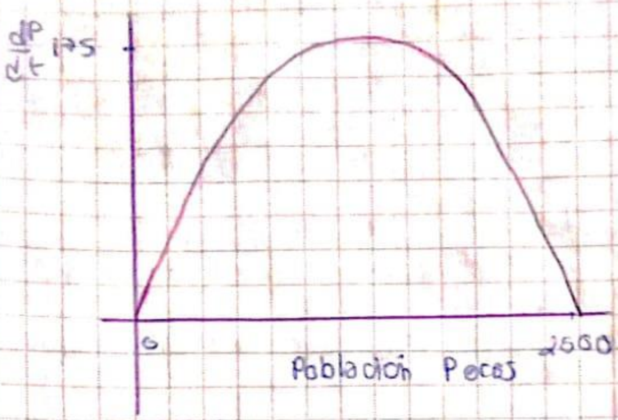
$$\frac{dP}{dt} = K\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - \frac{1}{3}P$$

c) El numero de peces cultivados cada año es proporcional a la raíz cuadrada del numero de peces en el lago

$$\frac{dP}{dt} = K\left(1 - \frac{P}{N}\right)P - r\left(\sqrt{P}\right)$$

Nº Tema: Fecha: / /

13 = a) Grafica taza de crecimiento




b)

14 = a) Escriba una ecuación diferencial que modele la población de rinocerontes con base en esas hipotesis

Es posible en varios modelos, ya que R es la población de rinocerontes.

$$\frac{dR}{dt} = -b + KR(t)$$

b) Encuentre la solución general

$$\frac{dR}{du} = KR - b$$

$$\frac{dR}{dt} \cdot \frac{1}{KR-b} = 1$$

$$\int \frac{dR}{KR-b} = \int dt$$

$$\frac{1}{K} \ln|KR-b| = t+c$$

$$\ln|KR-b| = (t+c)K$$

$$KR - b = e^{K(t+c)}$$

$$KR = e^{K(t+c)} + b$$

$$R = \left(e^{K(t+c)} + b\right)\frac{1}{K}$$ sol.

15) a) $\frac{dM}{dt} = k(1-\frac{M}{A})M$ supongamos $A=150$ [mm²]

$\frac{dM}{dt} = k(1-\frac{M}{150})M$

b) solución General

$M(t) = \frac{150}{C_1 e^{-kt}+1}$

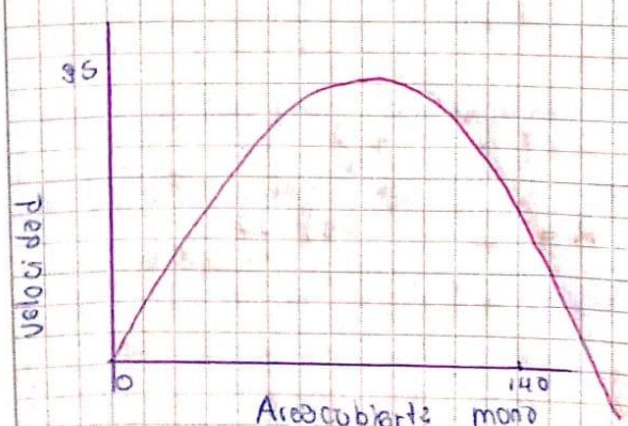
supongamos un $t=0$ área inicial poblada 10 [mm²]

$M(t=0)=10$

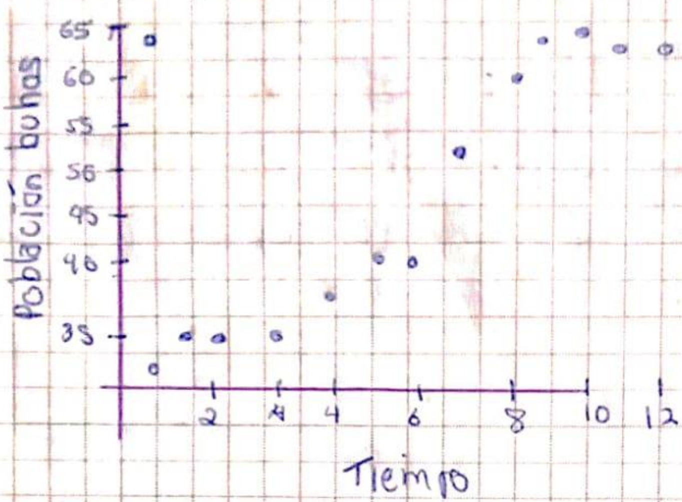
$10 = \frac{150}{C_1+1}$

La solución particular para la condición inicial $M_{(t=0)}=1$ es $M=\frac{150}{14e^{-kt}+1}$

c) Graficar



16 a) Grafique




b) Que modelo de población usaría usted para modelar esta población

$P(t) = Ce^{kt}$

$P = 34$ $t = 0$ Población Inicial

Población en $t = 1$

$P(t=11) = 34$

$62 = 34e^{11k}$

$k = \dfrac{\ln\left(\frac{62}{34}\right)}{11}$

$P(t) = 34e^{0,056t}$

c) Puede calcular usted los valores parametro

$P(t=11) = 34$

$P = 34e^{0,056t} \rightarrow t = 1$

$P = 62,95$

d) Que predice su modelo para la población actual

| t = | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| real | 34 | 40 | 40 | 46 | 42 | 48 | 48 | 52 | 60 |
| propuesta | 34 | 35 | 37 | 40 | 42 | 44 | 47 | 49 | 52 |