Unidad I - Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

January 30, 2022

1. Presentación
2. Concepto
3. El problema
   - Proposito
   - Modelación
4. El Objeto
   - Definición
   - Clasificación de las Ecuacioens Diferenciales
   - Soluciones de las Ecuaciones Diferenciales
5. El Objetivo
6. El contenido
7. La Forma
8. El método
9. La Evaluación
10. Bibliografía
11. Conclusiones

El Problema - El modelo

Bienvenida

- En este curso: **predecir el futuro**
- Conocimiento de **las cosas que nos rodean**
- **Regularidades que gobiernan sus cambios**.

El Problema - El modelo

Bienvenida

- Acudir a **herramientas matamáticas**
- Realizar **representaciones formales de la realidad**
- **Manipular** el sistema en un ámbito conocido
- Esto es: **"Modelación"**.

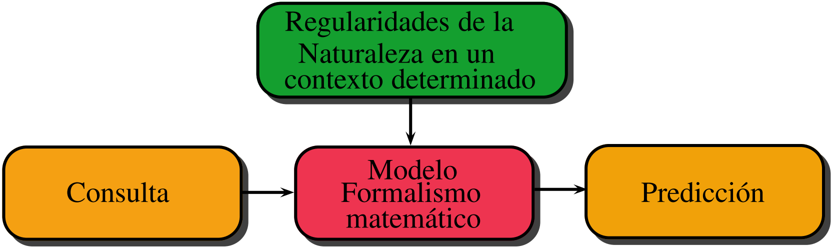
El Problema - El modelo

Que vamos a hacer hoy?

- **En esta unidad:**
  - **Presentamos algunas situaciones posibles donde se requieren realizar predicciones.**
  - **Se establecerá y conceptualizará nuestro objeto de estudio.**
  - **Recordaremos además conceptos básicos de calculo, física y programación básica en Python.**

cómo, porqué, para qué?

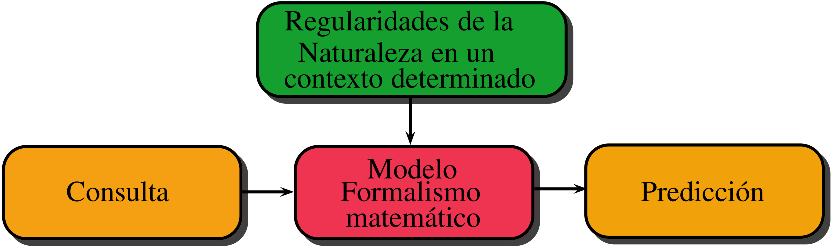
- El **modelado matemático** es el proceso de describir un **fenómeno de la vida cotidiana** en un **formalismo matemático**.



El Problema - El modelo

cómo, porqué, para qué?

- Identificamos las cantidades a estudiar...
- ..y las relaciones matemáticas entre ellas.
- Los pasos para construir un modelo implican:
    - Declarar los **supuestos** sobre el**fenómeno**.
    - Identificar las **variables y parámetros relevantes**.
    - Utilizando los **supuestos** del primer paso,formular ecuaciones que relacionen las **variables del segundo paso**.



Problema - El modelo

Para que modelar?

- El objetivo no es producir una **copia exacta del objeto "real"**
- La idea es **representar algunas características** simplemente.
- Realizaremos simplificaciones
- **Que simplificaciones hacer?**
- Las necesarias para diseñar un buen modelo!!!

Problema - El modelo

Pregunta

Si se desea modelar un humano, cual es el mejor modelo:

- Una fotografía?
- Un Manequi?
- Un cerdo?

Problema - El modelo

Depende....

- Recuerdo familiar
- Confección de ropa
- Medicina

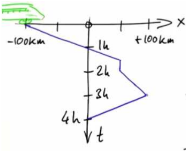
El Problema - El modelo

Que podemos utilizar?

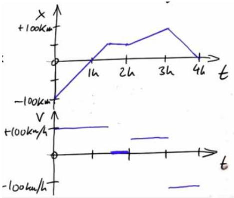
- podemos **expresan suposiciones** en términos de **"cambios"**,
- **Supuestos** a menudo incluirán frases como **"la tasa de cambio de... ", " la tasa de aumento de...**
- **"Velocidad"** y **"Aceleración"**.

Problema - Recordando Velocidad, tasa de cambio

Recordemos el concepto de Velocidad



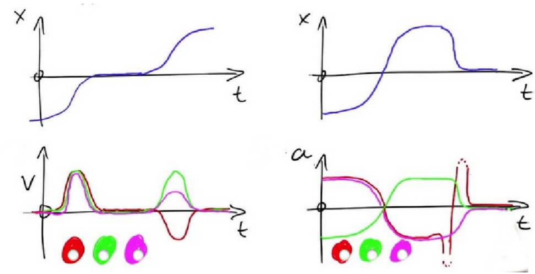
- Un tren parte de -100Km.
- Pasadas 1,5 [Hrs], el tren llega a los 50Km del observador.
- Se detiene por media hora para recoger pasajeros.
- Avanza por 1 hr hasta 100Km.
- Y retorna hasta el observador en 1 hora.



- "Posición en función tiempo"
- **Posición depende de tiempo**.
- **Velocidad**: Tasa de cambio de posición x al transcurrir el tiempo t.

$$v = \frac{dx}{dt}$$

El Problema - Recordando definiciones - Derivada



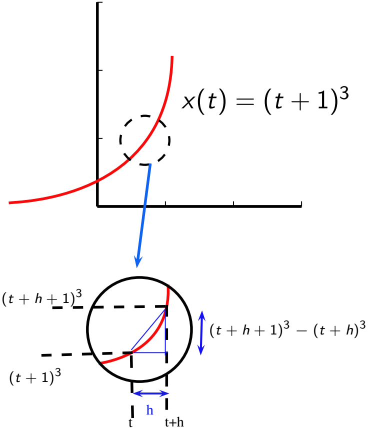
? Pregunta

- Para $v = \frac{dx}{dt}$ es decir x' cual de las gráficas es la correcta (rojo, verde o lila)?
- Para $a = \frac{dv}{dt}$ es decir x'' cual de las gráficas es la correcta (rojo, verde o lila)?

El Problema - Recordando definiciones - Derivada

Analicemos

Supongamos que $x(t) = (t+1)^3$ es una ecuación de posición en función del tiempo, y queremos hallar la tasa de cambio $v = \frac{dx}{dt}$:



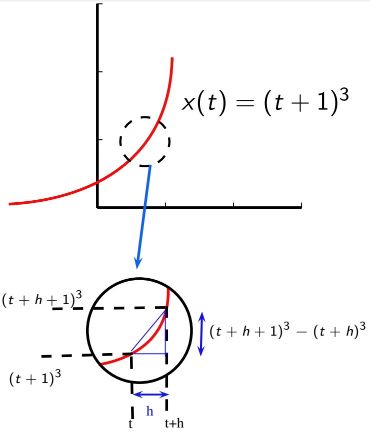
? Pregunta

- Cual es la tasa de cambio?
- Puedes computar la diferencial por definición?
- Por tablas de derivación?

El Problema - Recordando definiciones - Derivada

Analizando

Supongamos que $x(t) = (t+1)^3$ es una ecuación de posición en función del tiempo, y queremos hallar la tasa de cambio $v = \frac{dx}{dt}$:



Pregunta

- Cual es la tasa de cambio?
- Recordando la definición de la derivada:
  $$\lim_{h \to 0} \frac{(t+h+1)^3 - (t+h)^3}{h}$$
- Resolviendo análiticamente $3(t+1)^2$

El Problema - Recordando definiciones - Derivada

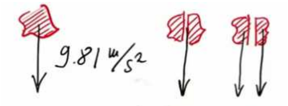
Recordemos ahora algunos conceptos de dinámica:

Fuerza

- **Aceleración**: cambio de velocidad en función del tiempo.
- **Velocidad** depende del tiempo: $a = v' = \frac{dv}{dt} = x''$
- La segunda ley de Newton nos dice: $F = ma$
- Entonces, tenemos : $\boxed{a = x'' = \frac{dv}{dt} = \frac{f}{m}}$

El Problema - Recordando definiciones - Derivada

Recordemos ahora algunos conceptos de dinámica:



Fuerza

- Cerca de la superficie de la tierra: $a = 9,81[m/s^2]$
- Dos cuerpos caen separadamente al mismo tiempo
- Si las unimos con pegamento, el nuevo cuerpo, cae de la misma forma.
- Independiente de la masa del cuerpo.

Problema - Recordando definiciones - Derivada

Fuerza

Así que ahora, podemos formar ecuaciones a partir de este análisis:

- $v_{(t)} = \frac{dx}{dt}$
- $a_{(t)} = \frac{dv}{dt}$
- $F = \frac{dv}{dt}m$

- Estas Ecuaciones nos servirán para generar los modelos del fenómeno del movimiento.

Problema - El modelo

Pregunta

¿Como modelamos la caída de un objeto tal que podamos predecir la velocidad y posición al transcurrir el tiempo?

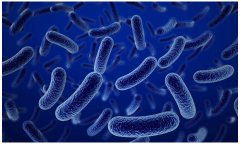
- Que hace que el cuerpo se mueva?
- Que variables tomamos en cuenta?

Problema - El modelo

Caída libre

- **Propósito:** Analizar el cambio de velocidad en le tiempo.
- **Supuesto:** Solo el peso es el causante de la caída.
- **Variables necesarias:** Velocidad, Tiempo.
- **Traducción:** $F_{net} = mg$, $ma = mg$
- La ecuación queda: $a = mg$
- Es decir $\boxed{\frac{dv}{dt} = g}$

El Problema - El modelo

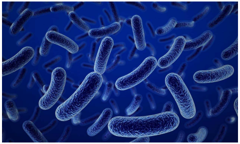


Pregunta

¿Como modelamos el crecimiento poblacional para determinar la cantidad de bacterias aproximada al transcurrir el tiempo?

- A mayor cantidad bacterias, mayor la velocidad de crecimiento
- Que variables tomamos en cuenta?

El Problema - El modelo



Crecimiento de Población

- **Propósito:** Analizar el crecimiento de población de Bacterias en el tiempo.
  Supuesto: La velocidad de crecimiento es proporcional al tamaño de l Población.
- **Variables necesarias:** Población, Tiempo.
- **Traducción:** $\frac{dP}{dt} \propto P$
- La ecuación queda: $\boxed{\frac{dP}{dt} = kP}$

Problema - El modelo

Como iniciamos la formulación del modelo?: Considere la situación de pretender modelar el movimiento de un paracaidista cayendo.

Caída en Paracaídas

Suponemos ahora, que su movimiento está sujeto a dos fuerzas:

- La fuerza debida a la gravedad
- Una fuerza de arrastre debido a la atmósfera

El Problema - Formulación

Como iniciar la formulación del modelo? Las variables que miden las cantidades se dividen en tres tipos básicos:

Tipos de variables

- **La variable independiente.**
- **La o las variables dependientes.**
- **A menudo los parámetros.**

En este curso la variable independiente casi siempre mide el tiempo. Cada variable dependiente mide una cantidad que es una función de la variable independiente. Los parámetros son cantidades que no cambian con el tiempo (o con la variable independiente) pero que pueden ser ajustadas, quizás por causas naturales o por un científico que ejecute el experimento.

El Problema - El modelo

Volviendo al ejemplo del paracaidistas:

? Identifica las variables:

- Variable independiente:
- Variable dependiente:
- Parámetros:

El Problema - El modelo

Identificación de Variables

- Variable independiente: t para el tiempo (medido en segundos)
- Variable dependiente: v para la velocidad (medida en metros por segundo)
- Parámetros:
    - g es la constante gravitatoria (medida en metros por segundo al cuadrado)
    - m es la masa del paracaidista (medida en kilogramos)
    - k es el coeficiente de arrastre (medido en kilogramos por metro)

El Problema - El modelo

Pregunta

Como traducimos los supuestos anteriores con las variables y parámetros identificados?

El Problema - El modelo

Este modelo se basa en la segunda ley de movimiento de Newton

$$f = ma$$

Formulando la Ecuación

En este modelo, estamos asumiendo que hay dos fuerzas que actúan sobre el paracaidista: la fuerza debido a la gravedad (mg) y la fuerza de arrastre la cual es proporcional a la velocidad ($F_{fr} \propto v$ es decir $F_{fr} = kv$). Combinados son

$$F_{neta} = mg - kv$$

Donde **m**, **g** y **k** son los **parámetros** que ya hemos discutido.

El Problema - El modelo

Modelo

Puesto que la aceleración es el cambio de la velocidad con respecto del tiempo:

$$f = m\frac{dv}{dt}$$

Mediante la segunda ley de Newton formulamos:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Con la cual podemos encontrar una función para v que satisfaga la ecuación, generando así el modelo para predecir el movimiento del paracaidas.

El Objeto

Vistas las anteriores situaciones, establecemos el **objeto de estudio** en este curso como:

ECUACIONES DIFERENCIALES

El Objeto

Qué es una Ecuación Diferencial?

- Es aquella ecuación que liga una **variable independiente**, una **función incognita**, y sus **derivadas**, es decir una Ecuación de la forma:

$$\boxed{F(t, y, y', y'', ...y^{(n)}) = 0}$$

donde **''t''** es una **variable independiente**, **''y''** una **función que depende de ''t''**.

El Objeto

Clasificación de las Ecuaciones diferenciales

- **Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:** Dependen solo de una variable independientes, es decir no aparecen derivadas parciales:
  - $\frac{dx}{dy} + 10y = e^x$
  - $\frac{d^2x}{dy^2} - \frac{dy}{dx} + 3y = 0$
  - $y'' - 2y' + sin(y) = 0$
- **Ecuaciones Diferenciales Parciales:** Pueden depender de varias variables independiente, aparecen derivadas parciales.
  - $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial x}$
  - $\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial a} + y^2 = 0$

El Objeto

Clasificación de las Ecuaciones diferenciales

- **Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden:** La máxima derivación que tiene es 1 (primera):
  - $\frac{dy}{dx} = e^x$
  - $\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 10y = e^x$ pese a estar elevado a la 2, sigue siendo de primer orden.
  - $y' - 2y = e^x$
- **Ecuaciones Diferenciales de Orden Superio:** tienen un orden mayor de derivación
  - $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} = e^x$ Derivada de segundo orden
  - $\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dx}{dy}\right)^5 = sin(x)$ Derivada de tercer orden
  - $y'' + (y')^3 = cos(x)$ Derivada de 2 orden

El Objeto

Clasificación de las Ecuaciones diferenciales

- **Ecuaciones Diferenciales Lineales: Son ecuaciones que tienen la forma:**
  $a_n(x)y^{(N)} + a_{n-1}(x)y^{(N-1)}.....a_1(x)y' + a_0(x)y = y(x)$
- Si la variable dependiente ''y'' aparece en la ecuación solo con grado 1.
- Si los coeficientes de los términos siempre dependen de x.
- ejemplo: $(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$

El Objeto

Clasifica las ecuaciones:

- $\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$
- $xy''' + (2x+1)y'' + xy' + y \cdot sin(x) = 0$

El Objeto

Solución

$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$

- Es una E.D. ordinaria, solo se depende de una variable independiente.
- Es una E.D. de Cuarto Orden, pues tiene una derivada cuarta.
- No es una E.D. lineal tiene una función ''y'' elevada al cuadrado.

$xy''' + (2x+1)y'' + xy' + y \cdot sin(x) = 0$

- Es una E.D. ordinaria, solo se depende de una variable independiente.
- Es una E.D. de Tercer Orden, pues tiene una derivada tercera.
- Es una E.D. lineal tiene una función

El Objeto

Clasifica la ecuación:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = G \cdot \left(m_e \frac{-\vec{x_s}}{\|\vec{x_s}\|^3} + m_m \frac{\vec{x_m} - \vec{x_s}}{\|\vec{x_m} - \vec{x_s}\|^3} \right)$$

El Objeto

$$\frac{d^2x}{dt^2} = G \cdot \left(m_e \frac{-\vec{x_s}}{\|\vec{x_s}\|^3} + m_m \frac{\vec{x_m} - \vec{x_s}}{\|\vec{x_m} - \vec{x_s}\|^3} \right) \quad (1)$$

Clasificación

- Es una E.D. ordinaria, solo se depende de una variable independiente.
- Es una E.D. de Segundo Orden, pues tiene una derivada segunda, la aceleración.
- No es una E.D. lineal tiene la función dependiente en un denominador elevado al cuadrado.

El Objeto

Solución

Qué significa resolver una Ecuación Diferencial?

- Si de una **ecuación algebraica**, la incognita a resolver es un número, la **resolución de una ecuacióin diferencial** será una función, es decir resultará el **modelo que nos ayudará a predecir un ''y'' en la medida que cambie ''x''**.

Ejemplo

Sea $y' = x\sqrt{y}$ una ecuación diferencial. Sea $y = \frac{x^4}{16}$ la función solución de la ecuación.

Como podemos probar esta aseveración?

El Objeto

Revisión

Comprobemos reemplazando la función solución:

Reemplazando en el segundo miembro:

- $y' = x\sqrt{\frac{x^4}{16}}$
- $y' = x\frac{\sqrt{(x^4)}}{\sqrt{16}}$
- $y' = x\frac{x^2}{4}$
- $y' = \frac{x^3}{4}$

Reemplazando en el primer miembro

- $y' = \frac{dy}{dx}\frac{x^4}{16}$
- $y' = \frac{4x^3}{16}$
- $y' = \frac{x^3}{4}$

Resultados que comprueban que la función $y = \frac{x^4}{16}$ es solución de la ecuación.

El Objeto

Cuales son las soluciones de una Ecuación Diferencial?

- **Solución General**: Una función $\phi(x, C)$ que depende de una Constante "C" que satisface la Ecuación para cualquier valor de C.
- **Solución particular**: Obtenida asignando a la solución general cualquier valor a la constante arbitraria C, según un valor inicial.

El Objeto

Pregunta:

Recuerda que formulamos la ecuación: $\frac{dv}{dt} = -g$

- Que significaría resolver la ecuación?
- Intuitivamente, es posible despejar la ecuación y encontrar la solución general?
- Es esta una solución general? que nos dice la función despejada?

El Objeto

Resolución:

Recuerda que formulamos la ecuación: $\frac{dv}{dt} = -g$

- $\frac{dv}{dt} = -g$ aplicamos la "ant-iderivada"
- $\int (\frac{dv}{dt})dt = -\int gdt$ integramos ambos miembros con respecto de t
- $\boxed{v = -gt + c}$

Observación: Cuando la ecuación tiene la forma $\frac{dy}{dt} = cte$, basta aplicar la anti derivada para despejar la ecuación y obtener la solución general, esto es aplicar la integral con respecto de t a ambos miembros.

El Objeto

Resolución:

Recuerda que $v = \frac{dy}{dt}$

- $\frac{dy}{dt} = -gt + c$ reemplazando en la solución general anterior
- $\int (\frac{dy}{dt})dt = \int (-gt + c)dt$ aplicando anti derivada
- $\boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + ct + d}$

Observación: Cuando la ecuación tiene la forma $\frac{dy}{dt} = f(t)$,, es decir el lado izquierdo es una función solamente de t, basta aplicar la anti derivada para despejar la ecuación y obtener la solución general, esto es aplicar la integral con respecto de t a ambos miembros.

El Objeto

Pregunta:

- Queremos que al inicio de nuestra observación, es decir en $t = 0$, tengamos una posición y velocidad **inicial** $y = y_0$, $v = v_0$
- Es decir, queremos que nuestra solución pase por un punto específico, $y_{t=0} = y_0$ y $y'_{t=0} = 0$ (recuerda y' es la velocidad)
- Es esta una solución particular? que nos dice la la solución?

El Objeto

Resolución:

- $v = -gt + c$
- $v_0 = -g(0) + c$ la $v = v_0$ cuando $t = 0$
- $c = v_0$ despejando
- $\boxed{v = v_0 - gt}$ sustituyendo el valor de c

Esta es la solución particular, que satisface a la **condición inicial** $v_{(t=0)} = v_0$ (problema a valor inicial).

El Objeto

Resolución:

Del mismo modo:

- $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + d$ reemplazamos $c = v_0$
- $y_0 - \frac{1}{2}g(0)^2 + v_0(0) + d \;\; t = 0$ para $y = y_0$
- $y_0 = d$
- $\boxed{y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \text{ reemplazamos } d = y_0}$

Esta es la solución particular, que satisface a la **condición inicial** $y_{(t=0)} = y_0$ (problema a valor inicial).

El Objeto

Resolución

- Ya sabemos cual es el resultado de resolver una ecuación diferencial: una función.
- Sin embargo, veremos que no siempre es posible llegar a una función como solución, pero si podremos esbozarla para un análisis culitativo, o acudiremos al computador para plantear soluciones "aproximadas".
- Por tal motivo, abordaremos 3 enfoques
  - **Analítico** : Implican encontrar fórmulas para los valores futuros de la cantidad.
  - **Cualitativo** : Se apoyan en un esbozo de la descripción de su comportamiento a largo plazo
  - **Numérico** : Requieren que efectuemos cálculos aritméticos (o bien que los haga una computadora) que den aproximaciones de los valores futuros de la cantidad.

El Objetivo

Vistas las anteriores situaciones y el Objeto de estudio en este curso, establecemos el **Objetivo** como:

Formular modelos matemáticos
de fenómenos naturales
en términos de
ECUACIONES DIFERENCIALES
realizando su resolución.

Acudimos a la siguiente teoría sobre nuestro objeto de estudio para llegar a nuestro objetivo y asi resolver el problema.

UT1: TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

- Conceptualización de las ED.
- Clasificación de las ED
- Soluciones ED ordinarias
- Métodos de resolución de una E.D.
- Modelación por E.D.O.

El Contenido

UT2: ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

- Resolución Analítica
  - Técnica Separación de Variables
  - Técnica para ecuaciones Exactas
  - Técnica para ecuaciones Homogéneas
  - Técnica para ecuaciones lineales y de Beronoulli
- Resolución Cualitativa
  - Campos de Pendientes
  - Linea fase
- Resolución Numérica
  - Algoritmo de Euler
  - Conceptos de error
  - Introducción a la precisión y estabilidad.
- Existencia y Unicidad de la Solución

Contenido

UT3: SISTEMAS LINEALES Y EDO DE ORDEN SUPERIOR

- Modelado con Sistemas de EDO.
- Campos vectoriales y el plano de fase
- Métodos Analíticos para sistemas especiales
- Método de Euler para sistemas.
- Existencia y Unicidad de la Solución

UT3: SISTEMAS LINEALES Y EDO DE ORDEN SUPERIOR

- Resolución analítica, EDO de orden superior
  - EDO lineales homogeneas de coeficiente constante
  - EDO lineales no homogeneas de coeficiente constante
  - Ecuación de Cauchi Euler
  - EDO lineales de coeficiente variable
- Oscilador Armónico
- Forzamiento Senoidal
- Forzamiento no amortiguado y resonancia
- Series de Potencia

El Contenido

UT4: SISTEMAS NO LINEALES

- Análisis del punto de Equilibrio
- Análisis Métodos Cualitativos
- Sistemas Hamiltonianos
- Sistemas Disipativos
- Sistemas lineales en tres dimensiones
- Forzamiento periodico de Sistemas no lineales y caos.
- Teoría de la Estabilidad

El Contenido

UT5: TRANSFORMADA DE LAPLACE

- Definición de la Transformada de Laplace
- Resolución de Ecuaciones diferenciales de primer orden
- Funciones Discontinuas
- Ecuaciones de segundo Orden
- Funciones Delta y forzamiento de impulso
- Retroalimentación
- Convoluciones
- Función de Transferencia

El Contenido

- **Iteración 1**: 01 de Febrero al 19 de Marzo:

Unidad Temática	1	2	3	4	5	6	7
UT1	•	•	•	•	•	•	•
UT2	•	•	•	•	•	•	•
Examen	•	•	•	•	•	•	•

- **Iteración 2** : 21 de Marzo al 07 de Mayo:

Unidad Temática	1	2	3	4	5	6	7
UT3	•	•	•	•	•	•	•
UT4	•	•	•	•	•	•	•
Examen	•	•	•	•	•	•	•

- **Iteración 3**: 09 de Mayo al 19 de Junio.

Unidad Temática	1	2	3	4	5	6	7
UT4	•	•	•	•	•	•	•
UT5	•	•	•	•	•	•	•
Examen	•	•	•	•	•	•	•

Espacio y Tiempo donde se realizará el proceso.

Donde y cuando?

- **Tiempo**: 20 semanas (02 de Febrero al 19 de Junio)
- **Aula**: 5 horas académicas a la semana.
- **Virtual**: Lecturas y Diapositivas 6 horas a la semana.
- **Producción**: Resolución de ejercicios : 10 hora semanales.
- **Virtual**: Foros 1 hora.

El Método

Como utilizamos el contenido para llegar al objetivo?

Como?

- Aprendizaje basado en problemas (Casos de estudio).
- Exposición y resolución de ejercicios colaborativos.
- E-learning.
- Coding Dojo (Kata - Randori).
- Modelar, resolver, programar y experimentar!!!!

La Evaluación

En que medida nos acercamos al objetivo?

- Pruebas Diagnosticas.
- **Resoluciones en Red**: Resoluciones colaborativas.
- **Experimentación** - Desarrollo de Aplicación y pruebas.
- **Tres iteraciones**: Tres Pruebas Objetivas.

La Evaluación

En que medida nos acercamos al objetivo?

- **Primera Iteración**: 23 de Marzo.
- **Segunda Iteración** : 11 de Mayo.
- **Tercera Iteración**: 15 de Junio.

Bibliografía

Bibliografía

- Differential Equations 4th Edition, Paul Blanchard-Robert Devaney-Glen Hall.
- Introduction to Differential Equations with Dynamical System - Stephen Campbell, Richard Haberman
- Ecuaciones Diferenciales, Isabel Carmona Jover
- Ecuaciones Diferenciales con Python - Texto de Apoyo, Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

Conclusión

En esta Clase:

- Recordamos conceptos de la **Derivada** y estudiamos su aplicación en la Física.
- Dimos los primeros pasos para **modelar un fenómeno**.
- Comprendimos **qué es una Ecuación diferencial** y principalmente para que sirven.
- Comprendimos **qué representa la solución** de una Ecuación diferencial.
- Se **clasificaron** Ecuaciones Diferenciales
- Ahora nos preguntamos: **Como y para que modelar un fenómeno con Ecuaciones Diferenciales**