Unidad II - Resolución Analítica E.D.O. - Ecuaciones Lineales.

Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

February 22, 2022

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Técnica para resolver Ecuaciones Lineales de Primer Orden
Se estudiará en esta sección una técnica analítica para resolver ecuaciones lineales de primer orden.

- Recordemos que un ecuación lineal de primer orden tiene la forma: $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x)$
- Reescribiremos la ecuación, dividiendo ambos miembros por $a_1(x)$: $\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)} = \frac{f(x)}{a_1(x)}$
- Entonces podemos escribir $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$
- Donde $p(x) = \frac{a_0}{a_1}$ y $f(x) = \frac{g(x)}{a_1}$ ambas funciones continuas.
- La solución a esta ecuación es: $y = y_c + y_p$ donde y_c y y_p son dos soluciones de la ecuación.

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Solución y_c

- Se contempla esta forma: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$
- Utilizando separación de variables: $\frac{dy}{dx} = -P(x)y$, entonces $\frac{1}{y}dy = -p(x)dx$
- $\int \frac{1}{y}dy = -\int p(x)dx$
- Resolviendo: $ln|y| = -\int p(x)dx + c$
- entonces $y = e^{-\int p(x)dx} \cdot e^{c}$
- es decir $\boxed{y_c = k \cdot e^{-\int p(x)dx}}$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Solución y_p

- Se contempla la forma : $y_p = \mu(x)y_c$ donde μ es el multiplo de la solución anterior (variación de parámetros)
- Sustituyendo en la E.D.: $y' + p(x)y = f(x)$ tenemos $\frac{d}{dx}(\mu y_c) + p(x)\mu y_c = f(x)$
- Derivando: $\mu\frac{dy_c}{dx} + y_c\frac{d\mu}{dx} + p(x)\mu y_c = f(x)$
- Factorizando $\mu(\frac{dy_c}{dx} + p(x)y_c) + y_c\frac{d\mu}{dx} = f(x)$
- como $\frac{dy_c}{dx} + p(x)y_c = 0$ queda la expresión: $y_c\frac{d\mu}{dx} = f(x)$
- Resolviendo: $d\mu = \frac{f(x)}{y_c}dx$ entonces $\mu = \int \frac{f(x)}{y_c}dx$
- Como $y_p = \mu y_c$ entonces $y_p = \left[\int \frac{f(x)}{e^{-\int p(x)dx}}dx\right] \cdot e^{-\int p(x)dx}$
- Reordenando: $\boxed{y_p = \left[\int e^{\int p(x)dx} \cdot f(x)dx\right] \cdot e^{-\int p(x)dx}}$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Solución $y = y_c + y_p$

$$y = ke^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} \cdot f(x)dx\right]$$

- Multiplicando por $e^{\int p(x)dx}$ nos queda:
  $e^{\int p(x)dx}y = k + \int e^{\int p(x)dx} f(x)dx$
- Aplicando la derivada con respecto a x a ambos miembros:
  $\frac{d}{dx}e^{\int p(x)dx}y = \frac{d}{dx}(k + \int e^{\int p(x)dx} f(x))dx$
- Quedando $e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) \cdot y = e^{\int p(x)dx} f(x))$
- Notar que si dividimos ambos miembros por $e^{\int p(x)dx}$ llegamos a la ecuación original $\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)$. Básicamente la idea será partir de esta forma, y multiplicar por el factor encontrado para poder aplicar **separación de variables** y encontrar la solución.

por definición

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t}y$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t}y$

Resolución

- $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t}y = 2$ *Acomodamos*
- Factor : $e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{ln(t)} = t$ *comapara* $\frac{dy}{dx} + p_{(x)}y = q_{(x)}$
- $\frac{dy}{dt}t + y = 2t$ *multiplicando por el factor*
- $\frac{d}{dt}(ty) = 2t$ *por definición*
- $ty = \int 2tdt$ *aplicando integrales con respecto de t*
- $ty = t^2 + c$ *integrando*
- $\boxed{y = t + \frac{c}{t}}$ *despejando*

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

Resolución

- $\text{Factor}\ :\ e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$ *comapa* $\frac{dy}{dx} + p_{(x)}y = q_{(x)}$
- $\frac{dy}{dx}e^{x^2} + 2xye^{x^2} = 2x$ *multiplicando por el factor*
- $\frac{d}{dx}(e^{x^2}y) = 2x$ *por definición*
- $e^{x^2}y = \int 2xdx$ *aplicando integrales con respecto de x*
- $e^{x^2}y = x^2 + c$ *integrando*
- $\boxed{y = (x^2 + c)e^{-x^2}}$ *despejando*

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xcos(y)+sin(2y)}$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xcos(y)+sin(2y)}$

Resolución

- $\frac{dx}{dy} - xcos(y) = sin(2y)$ *cambiando*
- Factor : $e^{-\int cos(y)dy} = e^{-sin(y)}$ *comapa* $\frac{dy}{dx} + p_{(x)}y = q_{(x)}$
- $\frac{dx}{dy}e^{-sin(y)} - xe^{-sin(y)}cos(y) = e^{-sin(y)}sin(2y)$ *multiplicando por el factor*
- $\frac{d}{dy}(e^{-sin(y)}x) = e^{-sin(y)}sin(2y)$ *por definición*
- $xe^{-sin(y)} = \int(e^{-sin(y)}sin(2y))dy$ *aplicando integrales con respecto de x*
- $xe^{-sin(y)} = -2e^{-sin(y)}(1 + sin(y)) + c$ *integrando*
- $\boxed{x = ce^{sin(y)} - 2sin(y) - 2}$ *despejando*

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t + 1$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $\frac{dy}{dt} + \frac{2}{t}y = t + 1$

Resolución

- Factor : $e^{-\int \frac{2}{t}} = e^{2ln(t)} = t^2$ *compara* $\frac{dy}{dx} + p_{(x)}y = q_{(x)}$
- $\frac{dy}{dt}t^2 + 2ty = t^2(t+1)$ *multiplicando por el factor*
- $\frac{d}{dt}(t^2y) = t^3 + t^2$ *por definición*
- $yt^2 = \int(t^3 + t^2)$ *aplicando integrales con respecto de x*
- $yt^2 = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2) + c$ *integrando*
- $\boxed{y = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + ct^{-2}}$ *despejando*

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $xy' - 4y = x^6 e^x$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver: $xy' - 4y = x^6 e^x$

Resolución

- $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x^5 e^x$ *Dividiendo ambos miembros por "x" para dejar libre y'*
- $e^{\int(-4x^{-1})dx} = e^{ln|x^{-4}|} = x^{-4}$ *compara* $\frac{dy}{dx} + p_{(x)}y = q_{(x)}$
- $x^{-4}\frac{dy}{dx} - x^{-4}\frac{4}{x}y = x^{-4}x^5 e^x$ *multiplicando por el factor*
- $\frac{d}{dx}(x^{-4}y) = xe^x$
- $x^{-4}y = \int xe^x dx$ *aplicando integrales con respecto de x*
- $x^{-4}y = xe^x - e^x + c$ *integrando*
- $\boxed{y = x^5 e^x - x^4 e^x + x^4 c}$ *despejando*

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver la E.d.: $y' + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolver la E.d.: $y' + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$

- Factor integrante $e^{\int dx} = e^x$ *Comparando con* $e^{\int p(x)dx}$
- $e^x\frac{dy}{dx} + e^x y = e^x\frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$ *multiplicando por el factor encontrado por la EDO*
- $\frac{d}{dx}(y \cdot e^x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ *por definición*
- $y \cdot e^x = \int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$ *integrando ambos miembros con respecto de x*
- $y \cdot e^x = \int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx$ Resolvemos la integral, para lo cual acomodamos la expresión a

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolución

- Sea $z = e^{2x} \Rightarrow dz = 2e^{2x}dx \Rightarrow dx = \frac{dz}{2e^{2x}} \Rightarrow dx = \frac{dz}{2z}$
- $\int \frac{z-1}{z+1}\frac{dz}{2z} = \frac{1}{2}\int \frac{z-1}{z(z+1)}dz$ *sustituyendo en la expresión inical*
- $\frac{A}{z} + \frac{B}{z+1} = \frac{z-1}{z(z+a)}$ *Utilizando fracciones parciales para resolver la integral*
- $A(z+1) + Bz = z - 1.$ *asignando valores y realizando operacines*
- $z = 0 \Rightarrow A = -1$ *De forma simiar,* $z = -1 \Rightarrow B = 2$
- *quedando la integral como* $\frac{1}{2}\int(\frac{1}{z} + \frac{2}{z+1})dz.$
- La integral es: $\frac{1}{2}(ln|z| + 2ln|z+1|) + c$

Resolución Analítica - Ecuaciones Lineales de Primer Orden

Resolución

- Retomamos el cambio de variable $z = e^{2x}$ entonces
  $y \cdot e^{x} = \frac{1}{2}(-ln|e^{2x}| + 2ln|e^{2x} + 1|) + c$
- $y \cdot e^{x} = \frac{1}{2}(-2xln|e| + 2ln|e^{2x} + 1|) + c$
- $y \cdot e^{x} = (-xln|e| + ln|e^{2x} + 1|) + c$
- $y \cdot e^{x} = (-x + ln|e^{2x} + 1|) + c$
- $\boxed{y = \frac{1}{e^{x}}(-x + ln|e^{2x} + 1|) + \frac{c}{e^{x}}}$