66.75 - 86-09: Procesos Estocásticos

Guía 1: Ejercicio 4

Universidad de Buenos Aires

Abril de 2020

1. Enunciado

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_N$ variables aleatorias conjuntamente Gaussianas con media $\boldsymbol{\mu_X}$ y matriz de covarianza $\boldsymbol{C_X}$.

1. Calcular la varianza de la variable aleatoria $Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_NX_N$ donde a_i son coeficientes reales tales que el vector $\mathbf{a} = [a_1, a_2, \ldots, a_N]^T$ tiene norma unitaria.
2. Sea

$$\boldsymbol{C_X} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

   Determine el máximo y el mínimo valor posible de la varianza de Y cuando $\mathbf{a}$ recorre el círculo unitario.

2. Resolución

Para resolver tanto el primer inciso como el segundo, vamos a definir algunos vectores que nos van a facilitar bastante la notación y resolución del problema:

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, ..., X_N]^T$$
$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, ..., a_N]^T$$

De esta forma, podemos plantear que: $Y = \mathbf{a}^T\mathbf{X}$, siendo que el vector $\mathbf{a}$ tiene norma unitaria, es decir que vale la siguiente igualdad: $\mathbf{a}^T\mathbf{a} = 1$.

1. Para resolver el primer inciso, empezaremos calculando la media de la variable aleatoria Y:

$$Y = \mu_Y = \mathbb{E}[\mathbf{a}^T \mathbf{X}] = \mathbf{a}^T \mathbb{E}[X] = \mathbf{a}^T \mu_{\mathbf{X}}$$

Con este dato, podemos ahora si, calcular la varianza de Y como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma_Y^2 = \mathbb{E}[(Y - \mu_Y)(Y - \mu_Y)^T)] = \mathbb{E}[(\mathbf{a}^T \mathbf{X} - \mathbf{a}^T \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{a}^T \mathbf{X} - \mathbf{a}^T \mu_{\mathbf{X}})^T] = \\ = \mathbb{E}[\mathbf{a}^T (\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})^T \mathbf{a}] = \mathbf{a}^T \boldsymbol{C_X} \mathbf{a} \end{aligned}$$

2. Aplicando la matriz de covarianza específica que plantea el problema, primero procedemos a calcular la varianza de Y, la cual queda parametrizada en función de los valores a_1 y a_2 que conforman el vector $\mathbf{a}$:

$$\sigma_Y^2(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 3a_1^2 + 3a_2^2 - 2a_1 a_2$$

Ahora, debemos tener en consideración la condición de norma unitaria para el vector $\mathbf{a}$, la cual actua como restricción para nuestro problema: $a_1^2 + a_2^2 = 1$.

El problema nos pide encontrar el valor máximo y mínimo de σ_Y, sujeto a la restricción antemencionada, por lo que vamos a resolverlo mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange:

$$L = 3a_1^2 + 3a_2^2 - 2a_1 a_2 - \lambda(a_1^2 + a_2^2 - 1)$$

Aplicando las derivadas parciales respecto a a_1 y a_2, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial a_1} = 6a_1 - 2a_2 - 2\lambda a_1 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 - 2\frac{a_2}{a_1} \\ \frac{\partial L}{\partial a_2} = 6a_2 - 2a_1 - 2\lambda a_2 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 - 2\frac{a_1}{a_2} \end{aligned}$$

Igualando las 2 expresiones obtenidas para λ, obtenemos:

$$3 - 2\frac{a_2}{a_1} = 3 - 2\frac{a_1}{a_2} \Rightarrow a_2^2 = a_1^2$$

Ahora, aplicando la restricción sobre el vector **a**, obtenemos:

$$a_1^2 + a_2^2 = 1 \Rightarrow 2a_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = \pm 1/\sqrt{2} \quad a_2 = \pm 1/\sqrt{2}$$

Finalmente, reemplazando estos valores de a_1 y a_2, se obtiene que $\sigma_{Y_{min}} = 2$ y $\sigma_{Y_{max}} = 4$