Unidad II - Resolución Analítica E.D.O. - Ecuaciones Exactas

Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

April 5, 2021

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

TÉCNICA PARA ECUACIONES EXACTAS

Se estudiará otra técnica para la resolución de E.D., la cual aplicaremos cuando identifiquemos una E.D. exacta.

- Diremos que una E.D. es axacta cuando tenga la forma: $A(x,y)dx + B(x,y)dy = 0$
- Debe cumplirse que $\frac{\partial}{\partial y}A(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}B(x,y)$
- Si esto se cumple, la solución será $f(x,y) = c$
- donde $f(x,y)$ se hallará resolviendo las relaciones $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = A$ **y** $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = B$

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Hallar la solución General de la Ecuación:
$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$:

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Hallar la solución General de la Ecuación:
$(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$:

Ecuación Exacta

Verificamos si es una E.D. Exacta:

- $\frac{\partial}{\partial y}(2x + y) = 0 + 1$
- $\frac{\partial}{\partial x}(2y + x) = 0 + 1$
- Entonces la E.D. es exacta

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Ecuación Exacta

Para solucionarla, encontramos $f(x,y) = c$, si esto es cierto, entonces se cumple que:

- 1) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (2x + y)$
- 2) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (2y + x)$
- de 1) tenemos: $f(x,y) = \int (2x + y) dx$ entonces $f(x,y) = x^2 + xy + g(y)$
- $f(x,y)$ es nuestra solución, sin embargo aún necesitamos hallar $g(y)$

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Continuando.....

Ecuación Exacta

- para ello aplicamos la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto de $''y''$:
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 + x + g'(y)$
- e igualamos con 2) quedando: $2y + x = x + g'(y)$
- Despejando $g'(y) = 2y$ entonces $g(y) = y^2$
- $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
- $x^2 + xy + y^2 = c$ es nuestra solución a la E.D. planteada.

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Hallar la solucion general para: $(x^{-1}y)dx + (ln(x) + 3y^2)dy = 0$:

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Hallar la solucion general para: $(x^{-1}y)dx + (ln(x) + 3y^2)dy = 0$:

Ecuación Exacta

Verificamos si es una E.D. Exacta:

- $\frac{\partial}{\partial y}(x^{-1}y) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\partial}{\partial x}(ln(x) + 3y^2) = \frac{1}{x}$
- Entonces la E.D. es exacta

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Ecuación Exacta

Para solucionarla, encontramos $f(x,y) = c$, si esto es cierto, entonces se cumple que:

- 1) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (x^{-1}y)$
- 2) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (ln(x) + 3y^2)$
- de 1) tenemos: $f(x,y) = \int (x^{-1}y)dx$ entonces $f(x,y) = yln(x) + g(y)$
- $f(x,y)$ es nuestra solución, pero necesitamos hallar $g(y)$

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Continuando.....

Ecuación Exacta

- para ello aplicamos la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto de $''y''$:
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = ln(x) + g'(y)$
- e igualamos con 2) quedando: $ln(x) + 3y^2 = ln(x) + g'(y)$
- Despejando $g'(y) = 3y^2$ entonces $g(y) = y^3$
- $f(x,y) = yln(x) + y^3$
- $yln(x) + y^3 = c$ es nuestra solución a la E.D. planteada.

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Sea $(2x + y + 2xy^2)dx + (x + 2x^2y) = 0$ una E.D. a solucionar:

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Sea $(2x + y + 2xy^2)dx + (x + 2x^2y) = 0$ una E.D. a solucionar:

Ecuación Exacta

Verificamos si es una E.D. Exacta:

- $\frac{\partial}{\partial y}(2x + y + 2xy^2) = 0 + 1 + 4xy$
- $\frac{\partial}{\partial x}(x + 2x^2y) = 1 + 4xy$
- Entonces la E.D. es exacta

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Ecuación Exacta

Para solucionarla, encontramos $f(x,y) = c$, para que esto sea cierto, entonces debe cumplirse que:

- 1) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (2x + y + 2xy^2)$
- 2) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x + 2x^2 y)$
- de 1) tenemos: $f(x,y) = \int (2x + y + 2xy^2)dx$ entonces $f(x,y) = x^2 + yx + x^2y^2 + g(y)$
- $f(x,y)$ es nuestra solución, pero necesitamos hallar $g(y)$

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Continuando.....

Ecuación Exacta

- para ello aplicamos la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto de $''y''$:
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x + 2yx^2 + g'(y)$
- e igualamos con 2) quedando: $x + 2x^2y = x + 2yx^2 + g'(y)$
- Despejando $g'(y) = 0$ entonces $g(y) = k$
- $f(x,y) = x^2 + yx + x^2y^2 + k$
- $x^2 + yx + x^2y^2 + k = c$ es nuestra solución a la E.D. planteada.

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Veamos otro ejemplo: Sea $(sin(xy) + xycos(xy))dx + (x^2cos(xy))dy = 0$ una E.D. a solucionar:

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Veamos otro ejemplo: Sea $(sin(xy) + xycos(xy))dx + (x^2cos(xy))dy = 0$ una E.D. a solucionar:

Ecuación Exacta

Verificamos si es una E.D. Exacta:

- $\frac{\partial}{\partial y}(sin(xy) + xycos(xy)) = xcos(xy) + xcos(xy) - x^2sin(xy) = 2xcos(xy) - x^2sin(xy)$
- $\frac{\partial}{\partial x}x^2cos(xy) = 2xcos(xy) - x^2sin(xy)$
- Entonces la E.D. es exacta

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Ecuación Exacta

Para solucionarla, encontramos $f(x,y) = c$, para que esto sea cierto, entonces debe cumplirse que:

- 1) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (sin(xy) + xycos(xy))$
- 2) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x^2 cos(xy))$
- de 2) tenemos: $f(x,y) = \int (x^2 cos(xy))dy$ entonces $f(x,y) = xsin(xy) + g(x)$
- $f(x,y)$ es nuestra solución, pero necesitamos hallar $g(x)$

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Continuando.....

Ecuación Exacta

- para ello aplicamos la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto esta vez de ''x'':
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = xycos(xy) + sin(xy) + g'(x)$
- e igualamos con 1) quedando: $xycos(xy) + sin(xy) + g'(x) = sin(xy) + xycos(xy)$
- Despejando $g'(y) = 0$ entonces $g(y) = k$
- $f(x,y) = xsin(xy) + k$
- $xsin(xy) + k = c$ es nuestra solución a la E.D. planteada.

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Sea $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$ una E.D. a solucionar:

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Sea $(x^3 + xy^2)dx + (x^2y + y^3)dy = 0$ una E.D. a solucionar:

Ecuación Exacta

Verificamos si es una E.D. Exacta:

- $\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + xy^2) = 2xy$
- $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y + y^3) = 2xy$
- Entonces la E.D. es exacta

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Ecuación Exacta

- 1) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (x^3 + xy^2)$
- 2) $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x^2 y + y^3)$
- de 2) tenemos: $f(x,y) = \int (x^3 + xy^2) dx$ entonces $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y)$
- $f(x,y)$ es nuestra solución, pero necesitamos hallar $g(y)$

Resolución Analítica - Ecuaciones Exactas

Continuando.....

Ecuación Exacta

- para ello aplicamos la derivada parcial de $f(x,y)$ con respecto de $''y''$:
- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 y + g'(y)$
- e igualamos con 1) quedando: $x^2 y + g'(y) = x^2 y + y^3$
- Despejando $g'(y) = y^3$ entonces $g(y) = \frac{1}{4} y^4$
- $f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 y^2 + \frac{1}{4} y^4$ multiplicando por 4.
- $x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = c$ es nuestra solución a la E.D. planteada.