Unidad II - Resolución Analítica E.D.O. - Ecuaciones Homogéneas

Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

February 5, 2022

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

Revisamos una técnica para la resolución analítica de ecuaciones diferenciales, por separación de variables:

- Aplicamos este método cuando las E.D. tengan la forma: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$

Resolución Analítica - Separación de Variables

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

Revisamos una técnica para la resolución analítica de ecuaciones diferenciales, por separación de variables:

- Aplicamos este método cuando las E.D. tengan la forma: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$
- Donde $g(x)$ esta perfectamente definida en terminos de x, y $h(y)$ esta perfectamente definida en términos de y.

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

- Se ha **separado y definido** perfectamente las funciones en términos de ''x'' y de ''y''.
- Integrando ambos miembros: $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$
- Aplicando las integrales respectivas logramos despejar la función ''y''.

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

- Esta técnica se utiliza cuando las funciones de la EDO, son homogéneas.
- Una función es homogénea si cumple : $f_{(kx,kt)} = k^n f_{(x,y)}$
- Ejemplo: $f_{(x,t)} = t^2 + y^2 - ty$ es una función homogénea, ya que:
  - $f_{(kx,kt)} = (kt)^2 - (ky)^2 - (kt)(ky)$

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

- Esta técnica se utiliza cuando las funciones de la EDO, son homogéneas.
- Una función es homogénea si cumple : $f_{(kx,kt)} = k^n f_{(x,y)}$
- Ejemplo: $f_{(x,t)} = t^2 + y^2 - ty$ es una función homogénea, ya que:
  - $f_{(kx,kt)} = (kt)^2 - (ky)^2 - (kt)(ky)$
  - $f_{(kx,kt)} = k^2t^2 - k^2y^2 - k^2ty$

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

- Esta técnica se utiliza cuando las funciones de la EDO, son homogéneas.
- Una función es homogénea si cumple : $f_{(kx,kt)} = k^n f_{(x,y)}$
- Ejemplo: $f_{(x,t)} = t^2 + y^2 - ty$ es una función homogénea, ya que:
  - $f_{(kx,kt)} = (kt)^2 - (ky)^2 - (kt)(ky)$
  - $f_{(kx,kt)} = k^2t^2 - k^2y^2 - k^2ty$
  - $f_{(kx,kt)} = k^2(t^2 - y^2 - ty)$

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

- Esta técnica se utiliza cuando las funciones de la EDO, son homogéneas.
- Una función es homogénea si cumple : $f_{(kx,kt)} = k^n f_{(x,y)}$
- Ejemplo: $f_{(x,t)} = t^2 + y^2 - ty$ es una función homogénea, ya que:
  - $f_{(kx,kt)} = (kt)^2 - (ky)^2 - (kt)(ky)$
  - $f_{(kx,kt)} = k^2t^2 - k^2y^2 - k^2ty$
  - $f_{(kx,kt)} = k^2(t^2 - y^2 - ty)$
  - $f_{(kx,kt)} = k^2 f_{(x,t)}$

TÉCNICA PARA ECUACIONES HOMOGENEAS

- La función homogénea, se puede representar como : $\frac{dy}{dt} = \phi(\frac{y}{t})$
- Mediante un cambio de variable $u = \frac{y}{t}$, siendo $\frac{dy}{dt} = t\frac{du}{dt}$
- $t\frac{du}{dt} = \phi(u) - u$
- Básicamente hemos reducido la EDO a una ecuación con variables separables.
- Bastará con realizar la sustitución $y = ut$

Pregunta

Dada la ecuación : $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ hallar la solución general.

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2t^2 - k^2y^2} + ky$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2 t^2 - k^2 y^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2(t^2 - y^2)} + ky$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2 t^2 - k^2 y^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k\sqrt{(t^2 - y^2)} + ky$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2 t^2 - k^2 y^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k\sqrt{(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k(\sqrt{(t^2 - y^2)} + y)$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2t^2 - k^2y^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k\sqrt{(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k(\sqrt{(t^2 - y^2)} + y)$
- $f_{(ky,kt)} = kf_{(y,t)}$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2t^2 - k^2y^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k\sqrt{(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k(\sqrt{(t^2 - y^2)} + y)$
- $f_{(ky,kt)} = kf_{(y,t)}$
- $f_{(y,t)} = t$ *verificamos si es homogénea*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2t^2 - k^2y^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k\sqrt{(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k(\sqrt{(t^2 - y^2)} + y)$
- $f_{(ky,kt)} = kf_{(y,t)}$
- $f_{(y,t)} = t$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = kt$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \sqrt{t^2 - y^2} + y$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{(kt)^2 - (ky)^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2t^2 - k^2y^2} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = \sqrt{k^2(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k\sqrt{(t^2 - y^2)} + ky$
- $f_{(ky,kt)} = k(\sqrt{(t^2 - y^2)} + y)$
- $f_{(ky,kt)} = kf_{(y,t)}$
- $f_{(y,t)} = t$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = kt$
- $f_{(ky,kt)} = kf_{(y,t)}$

Ambas funciones en la EDO son homogéneas de grado 1!

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt} t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt}t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt}t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + (ut)^2} + ut)dt$ *Cambio $y = ut$, entonces $dy = udt + tdu$*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt} t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + (ut)^2} + ut)dt$ *Cambio $y = ut$, entonces $dy = udt + tdu$*
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + u^2 t^2} + ut)dt$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt}t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + (ut)^2} + ut)dt$ *Cambio* $y = ut$*, entonces* $dy = udt + tdu$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + u^2 t^2} + ut)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2(1 + u^2)} + ut)dt$ *factorizamos* t^2

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt} t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + (ut)^2} + ut)dt$ *Cambio $y = ut$, entonces $dy = udt + tdu$*
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + u^2 t^2} + ut)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2(1 + u^2)} + ut)dt$ *factorizamos t^2*
- $t(udt + tdu) = (t\sqrt{1 + u^2} + ut)dt$ *t se computa de la raíz*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt} t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + (ut)^2} + ut)dt$ *Cambio $y = ut$, entonces $dy = udt + tdu$*
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + u^2 t^2} + ut)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2(1 + u^2)} + ut)dt$ *factorizamos t^2*
- $t(udt + tdu) = (t\sqrt{1 + u^2} + ut)dt$ *t se computa de la raíz*
- $t(udt + tdu) = t(\sqrt{1 + u^2} + u)dt$ *factorizamos t*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt}t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + (ut)^2} + ut)dt$ *Cambio $y = ut$, entonces $dy = udt + tdu$*
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + u^2t^2} + ut)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2(1 + u^2)} + ut)dt$ *factorizamos t^2*
- $t(udt + tdu) = (t\sqrt{1 + u^2} + ut)dt$ *t se computa de la raíz*
- $t(udt + tdu) = t(\sqrt{1 + u^2} + u)dt$ *factorizamos t*
- $udt + tdu = (\sqrt{1 + u^2} + u)dt$ *simplificamos t*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $\frac{dy}{dt}t = \sqrt{t^2 + y^2} + y$
- $tdy = (\sqrt{t^2 + y^2} + y)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + (ut)^2} + ut)dt$ *Cambio $y = ut$, entonces $dy = udt + tdu$*
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2 + u^2t^2} + ut)dt$
- $t(udt + tdu) = (\sqrt{t^2(1 + u^2)} + ut)dt$ *factorizamos t^2*
- $t(udt + tdu) = (t\sqrt{1 + u^2} + ut)dt$ *t se computa de la raíz*
- $t(udt + tdu) = t(\sqrt{1 + u^2} + u)dt$ *factorizamos t*
- $udt + tdu = (\sqrt{1 + u^2} + u)dt$ *simplificamos t*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1 + u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1 + u^2} + u - u)dt$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$
- $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{t}$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$
- $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{t}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{t}$ *integramos*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$
- $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{t}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{t}$ *integramos*
- $\arcsin(u) = \ln(t) + c$

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$
- $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{t}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{t}$ *integramos*
- $\arcsin(u) = \ln(t) + c$
- $\arcsin(u) = \ln(t) + \ln(c)$ *logaritmo de cte sigue como cte*

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$
- $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{t}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{t}$ *integramos*
- $\arcsin(u) = \ln(t) + c$
- $\arcsin(u) = \ln(t) + \ln(c)$ *logaritmo de cte sigue como cte*
- $u = \sin(\ln(ct))$

Resolución Analítica - Ecuaciones Homogéneas

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$
- $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{t}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{t}$ *integramos*
- $\arcsin(u) = \ln(t) + c$
- $\arcsin(u) = \ln(t) + \ln(c)$ *logaritmo de cte sigue como cte*
- $u = \sin(\ln(ct))$
- $\frac{y}{t} = \sin(\ln(ct))$ *volvemos a la variable y*

Resolución Analítica - Ecuaciones Homogéneas

Sea $ty' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$ la E.D. a resolver.

Ecuaciones Homogéneas

- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u)dt - udt$ *organizamos*
- $tdu = (\sqrt{1+u^2} + u - u)dt$
- $tdu = \sqrt{1+u^2}dt$
- $\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{t}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{t}$ *integramos*
- $\arcsin(u) = \ln(t) + c$
- $\arcsin(u) = \ln(t) + \ln(c)$ *logaritmo de cte sigue como cte*
- $u = \sin(\ln(ct))$
- $\frac{y}{t} = \sin(\ln(ct))$ *volvemos a la variable y*
- $\boxed{y = t\sin(\ln(ct))}$

Pregunta

Para la ecuación $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ encontrar la solución general.

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ *verificamos si es homogénea*

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \frac{tk\sec(\frac{ky}{kt})+ky}{kt}$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \frac{tk\sec(\frac{ky}{kt})+ky}{kt}$
- $f_{(ky,kt)} = \frac{k(t\sec(\frac{y}{t})+y)}{kt}$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \frac{tk\sec(\frac{ky}{kt})+ky}{kt}$
- $f_{(ky,kt)} = \frac{k(t\sec(\frac{y}{t})+y)}{kt}$
- $f_{(ky,kt)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t}+y)}{t}$

Resolución Analítica - Ecuaciones Homogéneas

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \frac{tk\sec(\frac{ky}{kt})+ky}{kt}$
- $f_{(ky,kt)} = \frac{k(t\sec(\frac{y}{t})+y)}{kt}$
- $f_{(ky,kt)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t}+y)}{t}$
- $f_{(ky,kt)} = f_{(t,y)}$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $f_{(y,t)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ *verificamos si es homogénea*
- $f_{(ky,kt)} = \frac{tk\sec(\frac{ky}{kt})+ky}{kt}$
- $f_{(ky,kt)} = \frac{k(t\sec(\frac{y}{t})+y)}{kt}$
- $f_{(ky,kt)} = \frac{t\sec(\frac{y}{t}+y)}{t}$
- $f_{(ky,kt)} = f_{(t,y)}$

Función homogénea de grado 0.

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $tdy = (t\sec(\frac{y}{t}) + y)dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $tdy = (t\sec(\frac{y}{t}) + y)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(\frac{ut}{t}) + ut)dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $tdy = (t\sec(\frac{y}{t}) + y)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(\frac{ut}{t}) + ut)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(u) + ut)dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $tdy = (t\sec(\frac{y}{t}) + y)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(\frac{ut}{t}) + ut)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(u) + ut)dt$
- $t^2du + utdt = t\sec(u)dt + utdt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $tdy = (t\sec(\frac{y}{t}) + y)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(\frac{ut}{t}) + ut)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(u) + ut)dt$
- $t^2du + utdt = t\sec(u)dt + utdt$
- $t^2du = t\sec(u)dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $tdy = (t\sec(\frac{y}{t}) + y)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(\frac{ut}{t}) + ut)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(u) + ut)dt$
- $t^2du + utdt = t\sec(u)dt + utdt$
- $t^2du = t\sec(u)dt$
- $\frac{1}{\sec(u)}du = \frac{t}{t^2}dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $tdy = (t\sec(\frac{y}{t}) + y)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(\frac{ut}{t}) + ut)dt$
- $t(tdu + udt) = (t\sec(u) + ut)dt$
- $t^2du + utdt = t\sec(u)dt + utdt$
- $t^2du = t\sec(u)dt$
- $\frac{1}{\sec(u)}du = \frac{t}{t^2}dt$

Función homogénea de grado 0.

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $\int \frac{1}{\sec(u)} du = \int \frac{1}{t} dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $\int \frac{1}{\sec(u)}du = \int \frac{1}{t}dt$
- $\int \cos(u)du = \int \frac{1}{t}dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $\int \frac{1}{\sec(u)} du = \int \frac{1}{t} dt$
- $\int \cos(u) du = \int \frac{1}{t} dt$
- $\sin(u) = \ln(t) + \ln(c)$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $\int \frac{1}{\sec(u)} du = \int \frac{1}{t} dt$
- $\int \cos(u) du = \int \frac{1}{t} dt$
- $\sin(u) = \ln(t) + \ln(c)$
- $u = \arcsin(\ln(ct))$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $\int \frac{1}{\sec(u)} du = \int \frac{1}{t} dt$
- $\int \cos(u) du = \int \frac{1}{t} dt$
- $\sin(u) = \ln(t) + \ln(c)$
- $u = \arcsin(\ln(ct))$
- $\frac{y}{t} = \arcsin(\ln(ct))$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $\int \frac{1}{\sec(u)}du = \int \frac{1}{t}dt$
- $\int \cos(u)du = \int \frac{1}{t}dt$
- $\sin(u) = \ln(t) + \ln(c)$
- $u = \arcsin(\ln(ct))$
- $\frac{y}{t} = \arcsin(\ln(ct))$
- $\boxed{y = t\arcsin(\ln(ct))}$

Sea $\frac{dy}{dt} = \frac{t\sec(\frac{y}{t})+y}{t}$ una E.D. a resolver.

Ecuaciones homogéneas

- $\int \frac{1}{\sec(u)}du = \int \frac{1}{t}dt$
- $\int \cos(u)du = \int \frac{1}{t}dt$
- $\sin(u) = \ln(t) + \ln(c)$
- $u = \arcsin(\ln(ct))$
- $\frac{y}{t} = \arcsin(\ln(ct))$
- $\boxed{y = t\arcsin(\ln(ct))}$

Ecuaciones homogéneas

- Las ecuaciones de la forma $\frac{dy}{dt} = f(\frac{a_1 t + b_1 y + c_1}{a_2 t + b_2 y + c_2})$
- Se puede reducir a homogénea **trasladando el origen de coordenadas al punto** (t_0, y_0)
- Esto se consigue con la sustitución: $t = A + t_0$, y $y = B + y_0$

Pregunta

Para la ecuación $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ encontrar la solución general.

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t - y - 4)dy = -(t + y - 2)dt$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t - y - 4)dy = -(t + y - 2)dt$ *separamos diferenciales*
- $(t + y - 2)dt + (t - y + 4)dy = 0$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t-y-4)dy = -(t+y-2)dt$ *separamos diferenciales*
- $(t+y-2)dt + (t-y+4)dy = 0$
- *Computamos la intersección entre las dos rectas...*
- $t_0 = -1,\ y_0 = 3$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t-y-4)dy = -(t+y-2)dt$ *separamos diferenciales*
- $(t+y-2)dt + (t-y+4)dy = 0$
- *Computamos la intersección entre las dos rectas...*
- $t_0 = -1,\ y_0 = 3$
- Cambio de variable: $t = A - 1$, $y = B + 3$, entonces $dA = dt$, $dB = dy$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t-y-4)dy = -(t+y-2)dt$ *separamos diferenciales*
- $(t+y-2)dt + (t-y+4)dy = 0$
- *Computamos la intersección entre las dos rectas...*
- $t_0 = -1$, $y_0 = 3$
- Cambio de variable: $t = A-1$, $y = B+3$, entonces $dA = dt$, $dB = dy$
- $(A-1-B-3+4)dB + (A-1+B+3-2)dA = 0$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t - y - 4)dy = -(t + y - 2)dt$ *separamos diferenciales*
- $(t + y - 2)dt + (t - y + 4)dy = 0$
- *Computamos la intersección entre las dos rectas...*
- $t_0 = -1,\ y_0 = 3$
- Cambio de variable: $t = A - 1$, $y = B + 3$, entonces $dA = dt$, $dB = dy$
- $(A - 1 - B - 3 + 4)dB + (A - 1 + B + 3 - 2)dA = 0$
- $(A + B)dA + (A - B)dB = 0$ *(Ecuación homogénea)*

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t-y-4)dy = -(t+y-2)dt$ *separamos diferenciales*
- $(t+y-2)dt + (t-y+4)dy = 0$
- *Computamos la intersección entre las dos rectas...*
- $t_0 = -1,\ y_0 = 3$
- Cambio de variable: $t = A-1$, $y = B+3$, entonces $dA = dt$, $dB = dy$
- $(A-1-B-3+4)dB + (A-1+B+3-2)dA = 0$
- $(A+B)dA + (A-B)dB = 0$ *(Ecuación homogénea)*
- $(A+Au)dA + (A-Au)(Adu+udA) = 0$ cambio $B = uA$ y $dB = udA + Adu$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(t-y-4)dy = -(t+y-2)dt$ *separamos diferenciales*
- $(t+y-2)dt + (t-y+4)dy = 0$
- *Computamos la intersección entre las dos rectas...*
- $t_0 = -1,\ y_0 = 3$
- Cambio de variable: $t = A - 1$, $y = B + 3$, entonces $dA = dt$, $dB = dy$
- $(A-1-B-3+4)dB + (A-1+B+3-2)dA = 0$
- $(A+B)dA + (A-B)dB = 0$ *(Ecuación homogénea)*
- $(A+Au)dA + (A-Au)(Adu+udA) = 0$ *cambio* $B = uA$ *y* $dB = udA + Adu$
- $AdA + AudA + A^2du + AudA - A^2udu - Au^2dA = 0$
- $AdA + AudA + A^2du + AudA - A^2udu - Au^2dA = 0$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $AdA + AudA + AudA - Au^2dA + A^2du - A^2udu = 0$
- $A(1 + 2u - u^2)dA + A(A - Au)du = 0$ *Factorizamos A*
- $(1 + 2u - u^2)dA + A(1 - u)du = 0$ *Simplificamos*
- $A(1 - u)du + (1 + 2u - u^2)dA = 0$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $AdA + AudA + AudA - Au^2dA + A^2du - A^2udu = 0$
- $A(1 + 2u - u^2)dA + A(A - Au)du = 0$ *Factorizamos A*
- $(1 + 2u - u^2)dA + A(1 - u)du = 0$ *Simplificamos*
- $A(1 - u)du + (1 + 2u - u^2)dA = 0$

Resolución Analítica - Ecuaciones Homogéneas

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $\frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \frac{1}{A}dA = 0$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $\frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \frac{1}{A}dA = 0$ *Integramos*
- $\int \frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \int \frac{1}{A}dA = 0$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $\frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \frac{1}{A}dA = 0$ *Integramos*
- $\int \frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \int \frac{1}{A}dA = 0$
- $\int \frac{1-u}{N}\frac{dN}{2-2u} + \int \frac{1}{A}dA = 0$ *Cambio* $N = 1 + 2u - u^2$, $dN = (2-2u)du$

Resolución Analítica - Ecuaciones Homogéneas

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $\frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \frac{1}{A}dA = 0$ *Integramos*
- $\int \frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \int \frac{1}{A}dA = 0$
- $\int \frac{1-u}{N}\frac{dN}{2-2u} + \int \frac{1}{A}dA = 0$ *Cambio* $N = 1 + 2u - u^2$, $dN = (2-2u)du$
- $\frac{1}{2}\ln(N) + \ln(A) = \ln(c)$
- $\ln((1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}}) + \ln(A) = \ln(c)$
- $\ln(A(1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}}) = \ln(c)$
- $A(1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}} = c$
- $A^2(1+2u-u^2) = c$

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $\frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \frac{1}{A}dA = 0$ *Integramos*
- $\int \frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \int \frac{1}{A}dA = 0$
- $\int \frac{1-u}{N}\frac{dN}{2-2u} + \int \frac{1}{A}dA = 0$ *Cambio* $N = 1 + 2u - u^2$, $dN = (2-2u)du$
- $\frac{1}{2}\ln(N) + \ln(A) = \ln(c)$
- $\ln((1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}}) + \ln(A) = \ln(c)$
- $\ln(A(1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}}) = \ln(c)$
- $A(1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}} = c$
- $A^2(1+2u-u^2) = c$
- $(t+1)^2(1+2(\frac{y-3}{t+1}) - (\frac{y-3}{t+1})^2) = c$

Resolución Analítica - Ecuaciones Homogéneas

Sea $\frac{dy}{dt} = -\frac{t+y-2}{t-y+4}$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $\frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \frac{1}{A}dA = 0$ *Integramos*
- $\int \frac{1-u}{1+2u-u^2}du + \int \frac{1}{A}dA = 0$
- $\int \frac{1-u}{N}\frac{dN}{2-2u} + \int \frac{1}{A}dA = 0$ *Cambio* $N = 1 + 2u - u^2$, $dN = (2-2u)du$
- $\frac{1}{2}\ln(N) + \ln(A) = \ln(c)$
- $\ln((1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}}) + \ln(A) = \ln(c)$
- $\ln(A(1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}}) = \ln(c)$
- $A(1+2u-u^2)^{\frac{1}{2}} = c$
- $A^2(1+2u-u^2) = c$
- $(t+1)^2(1+2(\frac{y-3}{t+1}) - (\frac{y-3}{t+1})^2) = c$
- $\boxed{t^2 + 2yt - y^2 - 4t + 8y = C}$

? Pregunta

Para la ecuación $(x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy = 0$ encontrar la solución general.

Sea $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $x + y = z$, por tanto $dy = dz - dx$

Sea $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $x + y = z$, por tanto $dy = dz - dx$
- $(2 - z)dx + (2z - 1)dz$

Sea $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $x + y = z$, por tanto $dy = dz - dx$
- $(2 - z)dx + (2z - 1)dz$
- $dx - \frac{2z-1}{z-2}dz = 0$

Sea $(x + y + 1)dx + (2x + 2y + 1)dy = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $x + y = z$, por tanto $dy = dz - dx$
- $(2 - z)dx + (2z - 1)dz$
- $dx - \frac{2z-1}{z-2}dz = 0$
- $x - 2z - 3\ln(z - 2) = c$

Sea $(x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy=0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $x+y=z$, por tanto $dy=dz-dx$
- $(2-z)dx+(2z-1)dz$
- $dx-\frac{2z-1}{z-2}dz=0$
- $x-2z-3\ln(z-2)=c$
- $\boxed{x+2y+3\ln(x+y-2)=c}$

? Pregunta

Para la ecuación $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ encontrar la solución general.

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $y = z^\alpha$, por tanto $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $y = z^\alpha$, por tanto $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$
- $(x^2z^{2\alpha} - 1)(\alpha z^{\alpha-1}dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $y = z^\alpha$, por tanto $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$
- $(x^2z^{2\alpha} - 1)(\alpha z^{\alpha-1}dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $(x^2z^{2\alpha} - z^{\alpha-1})(\alpha dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $y = z^\alpha$, por tanto $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$
- $(x^2z^{2\alpha} - 1)(\alpha z^{\alpha-1}dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $(x^2z^{2\alpha} - z^{\alpha-1})(\alpha dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $3\alpha + 1 = \alpha - 1$ igualamos los grados

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $y = z^\alpha$, por tanto $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$
- $(x^2z^{2\alpha} - 1)(\alpha z^{\alpha-1}dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $(x^2z^{2\alpha} - z^{\alpha-1})(\alpha dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $3\alpha + 1 = \alpha - 1$ igualamos los grados
- $\alpha = -1$ entonces $y = z^{-1}$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $y = z^\alpha$, por tanto $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$
- $(x^2z^{2\alpha} - 1)(\alpha z^{\alpha-1}dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $(x^2z^{2\alpha} - z^{\alpha-1})(\alpha dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $3\alpha + 1 = \alpha - 1$ igualamos los grados
- $\alpha = -1$ entonces $y = z^{-1}$
- $(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4})dz + 2\frac{x}{z^3}dx = 0$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- En este caso, las funciones son paralelas!!
- Hacemos la sustitución: $y = z^\alpha$, por tanto $dy = \alpha z^{\alpha-1}dz$
- $(x^2z^{2\alpha} - 1)(\alpha z^{\alpha-1}dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $(x^2z^{2\alpha} - z^{\alpha-1})(\alpha dz) + 2xz^{3\alpha}dx = 0$
- $3\alpha + 1 = \alpha - 1$ igualamos los grados
- $\alpha = -1$ entonces $y = z^{-1}$
- $(\frac{1}{z^2} - \frac{x^2}{z^4})dz + 2\frac{x}{z^3}dx = 0$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(z^2 - x^2)dz + 2zxdx = 0$

Sea $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(z^2-x^2)dz+2zxdx=0$
- $u(u^2+1)dx+x(u^2-1)du=0$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(z^2 - x^2)dz + 2zxdx = 0$
- $u(u^2 + 1)dx + x(u^2 - 1)du = 0$
- $\frac{dx}{x} - \frac{u^2-1}{u^3+u}du = 0$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(z^2 - x^2)dz + 2zxdx = 0$
- $u(u^2 + 1)dx + x(u^2 - 1)du = 0$
- $\frac{dx}{x} - \frac{u^2-1}{u^3+u}du = 0$
- $\ln(x) + \ln(u^2 - 1) - \ln(u) = \ln(c)$

Sea $(x^2y^2 - 1)dy + 2xy^3dx = 0$ la ecuación a resolver:

Ecuaciones homogéneas

- $(z^2 - x^2)dz + 2zxdx = 0$
- $u(u^2 + 1)dx + x(u^2 - 1)du = 0$
- $\frac{dx}{x} - \frac{u^2-1}{u^3+u}du = 0$
- $\ln(x) + \ln(u^2 - 1) - \ln(u) = \ln(c)$
- $\boxed{\frac{x(u^2+1)}{u} = c}$