Ciencias de la Computación

Ecuaciones Diferenciales con Python

Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

2022

Departamento Ciencias y Tecnología

Agradecimientos

Agradecimientos especiales a Sofía Estevez Ordoñez, Víctor Rodriguez Cabrera, mis amados padres quienes desde niño me inculcaron la curiosidad por las ciencias el amor, son un ejemplo. A Blanca Pozo Flores amada mama II, quien siempre me impulso y me dio seguridad, siempre serás inspiración y guía. A Ivette E. Perez Pozo, amada esposa, por la paciencia y el apoyo incondicional. Agradecimiento especial al Mayor Camilo Rios, por la confianza y el apoyo, y un agradecimiento especial a todos los alumnos en los diferentes semestres para quienes esta orientado este compendio, por todos ellos es posible llevar este pequeño aporte, que espero sirva mas que solo para aprobar la materia, y sea un cambio de visión de lo que son las matemáticas para las ciencias de la computación.

Prefacio

Las Ecuaciones Diferenciales son una manera de describir y representar la vida cotidiana, mediante las ideas y procedimientos del cálculo. Podría decirse que el cálculo básicamente es un lenguaje para que los principios que gobiernan muchos fenómenos pudieran ser expresados. Desafortunadamente, en los cursos tradicionales cursos sobre ecuaciones diferenciales ha sido difícil transmitir la belleza del tema , porque el número de ecuaciones que pueden tratarse con procedimientos analíticos es muy limitado, por lo cual, normalmente los cursos se enfocan más en los procedimientos que en los conceptos.

Este Texto es un compendio de varios Libros y autores, tratando de extraer los conceptos y la interpretación de las Ecuaciones Diferenciales, con un enfoque donde intentamos desprendernos del tradicional estudio de ardides y procedimientos para simplemente resolver ecuaciones diferenciales sin un sentido real. Mas bien nos enfocamos en la comprensión de las Ecuaciones Diferenciales y sus soluciones dentro de la vida cotidiana, aprovechando para ello la tecnología inherente a las ciencias de la computación. Por otro lado, muchas de las Ecuaciones Diferenciales más importantes en la vida real no pueden ser tratadas de manera analítica, por lo que los procedimientos numéricos y cualitativos son más efectivos para estos casos.

Bajo el enfoque descrito, intentamos desviarnos del típico texto receta de cocina"sobre ecuaciones diferenciales. Se abordará temas que se centran en la formulación de modelos con Ecuaciones Diferenciales y la interpretación de sus soluciones, utilizando la simulación computacional para ello. Para ello resolvemos una ecuación desde tres puntos de vista diferentes, analítico, cualitativo, y numérico.

El principal enfoque que adoptamos es cualitativo. Se espera que los estudiantes sean capaces de visualizar las ecuaciones diferenciales y sus soluciones de muchas maneras geométricas, de esta forma comprender el significado y sentido de las soluciones. Por ejemplo, se usarán los campos de pendientes, gráficas de soluciones, campos vectoriales y curvas solución en el plano fase como herramientas para un mejor entendimiento de las soluciones, por lo que el uso del computador será primordial.

También hacemos énfasis en los procedimientos numéricos, impulsando además a la experimentación e implementación de los modelos y resultados en programas funcionales, para ello se propone el lenguaje Python para este fin aprovechando las habilidades en el diseño de algoritmos del estudiante, .

Un factor esencial en este curso, es que incorporamos el modelado en forma integral. Se espera que los estudiantes entiendan el significado de las variables y parámetros de una ecuación diferencial y que sean capaces de interpretarlas en términos de un modelo particular. Los casos de estudio presentados, corresponden a diferentes áreas y se realizará el análisis respectivo para formular la Ecuación y solución aprovechando los tres enfoques mencionados para tal fin.

Índice general

Índice de figuras

Índice de cuadros

Capítulo 1

Introducción a las Ecuaciones Diferenciales

El humano, como sujeto parte de la naturaleza, percibe y siente la necesidad de comprender y controlar su entorno. Para ello cuenta con la capacidad de la percepción y de realizar representaciones de la realidad, sobre las cuales pueda analizar, experimentar, predecir, etc. Bajo este esquema ha sido posible comprender y predecir el comportamiento de fenómenos, tales como la posición de la Tierra al transcurrir el tiempo; la velocidad de un objeto cuando cae; el crecimiento de una población en un eco sistema determinado, la economía familiar y del país en el tiempo o al suceder algún evento, y un sin fin de fenómenos que la humanidad intenta controlar.

Para representar la realidad será necesario el uso de un lenguaje que nos permita expresar el fenómeno que se quiere analizar, el aumento de velocidad, el ascenso de temperatura, el aumento de población, es decir el menor cambio en cualquier aspecto que concierne a nuestro planeta. [5] Las matemáticas son una importante opción como lenguaje para estas representaciones, desempeñan un papel cada vez más importante en las ciencias como la físicas, la química, la biológicas, la economía, y muchas otras, provocando una integración de las disciplinas científicas y las matemáticas aplicadas. [6]

Las realidades cambiantes, antes mencionadas, tienen en común que son variaciones a través del tiempo, y el lenguaje de las matemáticas nos provee un importante concepto y estudio de estos cambios a través de la "diferencial". Para el uso de este concepto la dificultad radica en la conversión de la realidad de la vida, a este formalismo matemático. Por lo general esto es complicado porque implica la conversión de hipótesis imprecisas en fórmulas muy precisas [7]. A este proceso se denomina modelado, e iniciaremos nuestro estudio bajo esta comprensión.

1.1. El Modelo

La idea de realizar una representación no es producir una copia exacta del objeto "real", sino más bien capturar algunas características de la çosa real", por lo que un fenómeno, un sistema, pueden tener diferentes representaciones. Por ejemplo, si pretendemos tener un modelo de un hombre, ¿escogeríamos el retrato de una persona, un maniquí o un cerdo? todos ellos pueden ser modelos de un ser humano, y aunque ninguno es una copia perfecta de éste, sí poseen ciertos aspectos en común con un ser humano. El retrato describe la apariencia física de un individuo en particular; el maniquí porta ropa tal como una persona y el cerdo está vivo y posee órganos semejantes al humano. ¿Cuál de los tres modelos es "mejor"? depende que se requiere del modelo: recordar viejos amigos, comprar ropa o estudiar biología.[7]

Los modelos matemáticos que estudiaremos son sistemas que evolucionan con el tiempo, pero con frecuencia también están supeditados a otras variables. De hecho, los sistemas del mundo real pueden ser notoriamente complicados; la población de viscachas en Bolivia depende del número de gatos de monte, del número de halcones, del número de cazadores, del número de ratones (alimento alternativo para los depredadores), de las prácticas usuales agrícolas, del clima, de varias enfermedades típicas de estos animales, etc. Podemos elaborar un modelo de la población de viscachas suficientemente simple para que sea entendible, sólo haciendo hipótesis simplificadoras y englobando los efectos que puedan o no ser comunes.

Una vez elaborado el modelo, debemos comparar las predicciones de éste con los datos del sistema. Si el modelo y el sistema concuerdan, tendremos confianza en que las hipótesis hechas al crear el modelo son razonables y que podemos usarlo para hacer predicciones; si no concuerdan, entonces debemos estudiar y mejorar nuestras suposiciones. En todo caso, aprendemos más acerca del sistema al compararlo con el modelo.

Los tipos de predicciones que son razonables dependen de nuestras hipótesis. Si nuestro modelo se basa en reglas precisas como las leyes de Newton sobre el movimiento o las reglas del interés compuesto, entonces podemos usarlo para hacer predicciones cuantitativas muy exactas. Si las hipótesis son menos precisas o si el modelo es una versión simplificada del sistema, entonces sería absurdo tratar de obtener predicciones cuantitativas exactas. En este caso, deberíamos usar el modelo para hacer predicciones cualitativas, tales como "la población de viscachas en Bolivia aumentará...". La línea divisoria entre predicciones cualitativas y cuantitativas es en sí misma imprecisa, pero veremos que con frecuencia es mejor y más fácil usar cualitativamente aun el más preciso de los modelos [7].

El flujo de trabajo que se usará en este curso, tendrá tres aspectos fundamentales, e implicará un equilibrio de los tres [3]

1. **El proceso de modelado**: mediante el cual los objetos y procesos físicos se describen mediante leyes físicas y formulaciones matemáticas. Dado que muchas leyes físicas implicarán, como dijimos, tasas de cambio (o la derivada), tendremos ecuaciones que involucren diferenciales como lenguaje natural para elaborar las representaciones.

2. El análisis de los problemas matemáticos que se plantean. Esto implica la **investigación completa de las ecuaciones y sus soluciones**, incluidos estudios numéricos detallados.

3. Aclaramos que la solución matemática de la ecuación diferencial no completa el proceso general. **La interpretación de la solución en el contexto del problema original** debe ser dada, y las implicaciones analizadas.

1.2. Construcción del modelo

Vamos a sugerir los siguientes pasos básicos para elaborar un modelo son [7]

1. Establecer claramente las hipótesis en que se basará el modelo. Éstas deben describir las relaciones entre las cantidades por estudiarse.

2. Definir completamente las variables y parámetros que se usarán en el modelo.

3. Usar las hipótesis formuladas en el paso 1 para obtener ecuaciones que relacionen las cantidades del paso 2.

En el paso 1, o paso “científico”, describimos cómo creemos que funciona el sistema físico o, por lo menos, cuales son sus aspectos mas importantes. En algunos casos, esas hipótesis son bastante especulativas, por ejemplo, “a las viscachas no les preocupa su sobrepoblación”. En otros casos, las hipótesis son bastante precisas y bien aceptadas, como “la fuerza es igual al producto de la masa y la aceleración”. La calidad de las hipótesis determina la validez del modelo y las situaciones en que el modelo es pertinente. Por ejemplo, algunos modelos de población se aplican sólo a pequeñas poblaciones en grandes entornos, mientras que otros consideran espacios y recursos limitados. Muy importante es evitar “hipótesis ocultas” que hagan al modelo parecer misterioso o mágico. [7]

El paso 2 es donde nombramos las cantidades que se estudiarán y, en caso necesario, describimos las unidades y escalas implicadas. Pasar por alto este paso es como decidir que hablaremos un idioma propio sin decirle a nadie qué significan las palabras. Básicamente, a partir de la observación, seleccionamos variables que consideremos relevantes. Estas variables se agrupan en tres categorías básicas: la **variable independiente, las variables dependientes y los parámetros**. En este curso, la variable independiente es (casi) siempre el tiempo. El tiempo es “independiente” de cualquier otra cantidad en el modelo. Por otra parte, las variables dependientes son cantidades que son funciones de la variable independiente. Por ejemplo, en la frase “la posición es una función del tiempo”, queremos decir que la posición es una variable que depende del tiempo. [7]

Es posible enunciar vagamente el objetivo de un modelo expresado en términos de una ecuación diferencial como “describir el comportamiento de la variable dependiente conforme cambie la variable independiente”. Por ejemplo, podemos preguntar si la variable dependiente aumenta, disminuye o si oscila o tiende a un límite. [7]

Los parámetros son cantidades que dentro un experimento no cambian con el tiempo (o con la variable independiente) pero que pueden ajustarse en otros experimentos (por causas naturales o por un científico efectuando el experimento). Por ejemplo, la masa de un objeto estudiado no cambia en un experimento, la gravedad en la tierra en un experimento y sitio determinado no cambia.

El aspecto más importante del estudio de un modelo consiste en determinar la manera en que cambian las variables dependientes al cambiar la variable independiente cuando ajustamos los parámetros.

En el paso 3 formulamos las ecuaciones. La mayor parte de los modelos que consideraremos son expresados utilizando derivadas en nuestras ecuaciones. Debemos poner atención atención a frases como "razón de cambio de..." o "tasa de crecimiento de...", ya que razón de cambio es sinónimo de derivada. Otros conceptos importantes son la "velocidad" (derivada de la posición con respecto del tiempo) y "aceleración" (derivada de la velocidad con respecto del tiempo) en modelos de física. La palabra "es" significa "es igual" e indica dónde se encuentra la igualdad. La frase "A es proporcional a B" $A \propto B$ significa $A = kB$, donde k es una constante de proporcionalidad (a menudo un parámetro en el modelo)[7].

Una importante regla empírica que usamos al formular modelos es: Simplifica el álgebra siempre que puedas . A continuación analicemos algunas situaciones:

Caída de un objeto

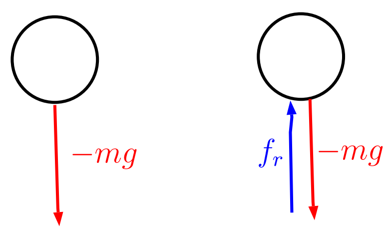

Figura 1.1: Fuerzas que actúan sobre el cuerpo

Pretendemos analizar y predecir la velocidad y posición de un objeto cuando este cae, en primer lugar hacemos nuestra suposición en base a la observación, al análisis y el conocimiento de las leyes de Newton, de la manera mas simple: *El único factor que genera el movimiento es el peso del objeto*, por tanto, $F_{neta} = -mg$ siendo la $F_{net} = ma$ y si entendemos la aceleración a como : $\frac{dv}{dt}$. En segundo lugar, identificamos la variable independiente, el tiempo t, variable dependiente, la velocidad v, y el parámetro, en este caso la constante gravedad g. Finalmente expresamos el supuesto con las variables identificadas:

$$\frac{dv}{dt} = -g \tag{1.1}$$

Obtenemos una ecuación, que involucra la diferencial de la velocidad, respecto del tiempo. Sin embargo, sabemos que esta es una suposición ideal, y que en realidad el contacto de superficie con el aire genera una fuerza de resistencia, con la cual podemos añadir otro supuesto: "La resistencia del aire f_r crece al aumentar la velocidad del gato al caer". Esta hipótesis supone que la resistencia del aire proporciona una fuerza que se opone a la fuerza de la gravedad y crece conforme aumenta la velocidad v del objeto, es decir $f_r \propto v$, como es proporcional, tenemos $f_r = kv$. Ahora bien, la fuerza neta ya no es solamente $F_{net} = -mg$, añadimos el supuesto: $F_{net} = f_r - mg$, es decir $F_{net} = kv - mg$ es decir ahora tenemos:

$$m\frac{dv}{dt} = kv - mg \tag{1.2}$$

Mediante la experimentación se puede evidenciar que este modelo solo es correcto con cuerpos pequeños. Para cuerpos mas grandes podemos realizar el supuesto de $f_r \propto v^2$. Teniendo entonces:

$$m\frac{dv}{dt} = kv^2 - mg \tag{1.3}$$

Notar además que en todos los casos tomamos $a = \frac{dv}{dt}$, pero entendiendo que $v = \frac{dy}{dt}$, podríamos también concluir: $a = \frac{d^2y}{dt^2}$ quedando por ejemplo la ecuación 1.2 como:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = k\frac{dy}{dt} - mg \tag{1.4}$$

Crecimiento ilimitado de la población

Un modelo elemental del crecimiento de una población se basa en la hipótesis de que: *La velocidad de crecimiento de la población es proporcional al tamaño de la población.* Observar que la razón de cambio de una población sólo depende del tamaño de ésta. En particular, las limitaciones de espacio o recursos no tienen efecto. Esta hipótesis es razonable para pequeñas poblaciones en grandes entornos, por ejemplo, los primeros brotes de moho en una pieza de pan. Como la hipótesis es tan simple, esperamos que el modelo también lo sea. Las cantidades implicadas son: El tiempo t que es la variable independiente, el tamaño de la población P (variable dependiente).

Las unidades para esas cantidades dependen de la aplicación. Si estamos modelando el crecimiento de moho en el pan, entonces t podría medirse en días y $P(t)$

sería el área cubierta por el moho o bien el peso del moho. Si estamos hablando de la población europea que invadió Sud América, entonces probablemente se medirá en años y $P(t)$ en millones de personas. En este caso haríamos corresponder $t = 0$ a cualquier tiempo que quisiéramos. El año mes de mayo de 2019 (año que inicio la pandemia en Bolivia) es una opción conveniente si queremos modelar el crecimiento de la población del virus.

Expresemos ahora nuestra hipótesis usando esta notación. La tasa de crecimiento de la población P es la derivada $\frac{dP}{dt}$. Puesto que ésta es proporcional a la población, es decir $\frac{dP}{dt} \propto P$ se puede expresar como igual al producto, kP:

$$\frac{dP}{dt} = kP \tag{1.5}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Este es llamado modelo de Malthus, un modelo básico para modelar el crecimiento poblacional. Sabemos, sin embargo, que el crecimiento de población, también dependerán de muchos factores, por ejemplo de los recursos disponibles como tamaño de territorio, alimentos limitados, etc. Si analizamos el comportamiento de esta situación, podemos concluir que [7] :

- Si la población es pequeña, la razón de crecimiento de la población es proporcional a su tamaño.
- Si la población es demasiado grande para ser soportada por su entorno y recursos, la población disminuirá. Es decir, la razón de crecimiento es negativa.

Se introduce entonces otra cantidad, el tamaño de la población que corresponde a ser "demasiado grande". Esta cantidad es un segundo parámetro N, que llamamos la "capacidad de soporte" del entorno. Usando esta notación, podemos reescribir nuestras hipótesis como:

- $\frac{dP}{dt} \approx kP$
- Si $P > N$ entonces $\frac{dP}{dt} < 0$

Queremos también que el modelo sea "algebráicamente simple" o por lo menos tan simple como sea posible, podríamos intentar una expresión de la forma:

$$\frac{dP}{dt} = k(algo)P \tag{1.6}$$

Queremos que el factor "algo" sea cercano a 1 si P es pequeña, pero si $P > N$, queremos que "algo" sea negativo. La expresión más simple que tienen estas propiedades podría ser la función: $algo = (1 - \frac{P}{N})$, notar que si P es muy pequeño el valor de $\frac{P}{N}$ es mas pequeño que 1. A medida que P crece, la división resulta cada vez mas grande, acercándose a 1, y si esta es superada, tendremos un factor negativo, que es el comportamiento que estamos buscando, quedando el modelo:

$$\frac{dP}{dt} = k(1 - \frac{P}{N})P \tag{1.7}$$

Este es llamado "modelo logístico" de la población con constante de proporcionalidad k y capacidad de soporte N.[7]

1.3. Que es una Ecuación Diferencial?

Hasta el momento hemos representado ciertos fenómenos utilizando la diferencial en una ecuación, formalicemos el concepto. Una Ecuación diferencial es una ecuación que involucra una variable dependiente y sus "derivadasçon respecto a una o más variables independientes. Muchas de las leyes de la naturaleza, en Física, Química, Biología, Astronomía, Economía; encuentran la forma más natural de ser expresadas en el lenguaje de las Ecuaciones Diferenciales [1].

Es fácil entender la razón detrás de esta amplia utilidad de las Ecuaciones Diferenciales. Si recordamos que $y = f_{(t)}$ es una función, entonces su derivada $\frac{dy}{dt}$ puede ser interpretada como el ritmo de cambio de y con respecto a t. En muchos procesos naturales, las variables involucradas y su ritmo de cambio están conectados entre sí por medio de los principios científicos básicos que rigen el proceso. Cuando esta conexión es expresada matemáticamente, el resultado generalmente es una "Ecuación Diferencial" [3].

Formalmente, llamaremos Ecuación Diferencial, a una ecuación, que liga una o mas variables independientes, por ejemplo t, la función incógnita $y_{(t)}$ y sus derivadas $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, ...\frac{d^ny}{dt^n}$, es decir:

$$F(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}, ...\frac{d^ny}{dt^n}) = 0 \tag{1.8}$$

Dicho de otro modo, se llama Ecuación diferencial, una ecuación en la que figuran la diferencial de una función incógnita [1].

1.4. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

Las Ecuaciones Diferenciales, pueden ser clasificadas, según su tipo, su orden, y su grado.

- Según su tipo las Ecuaciones Diferenciales pueden ser: Ordinarias o Parciales.
  - La Ecuación es clasificada como **Ordinaria**, si la ecuación diferencial contiene derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una sola variable independiente. Por ejemplo la caída de la manzana analizada previamente, fue modelada tomando en cuanta el cambio de velocidad (variable dependiente) v, solo en función del tiempo (variable independiente) t, es decir, en que medida cambia la velocidad, al transcurrir el tiempo, $\frac{dv}{dt} = -g$.
  - Si la ecuación diferencial contiene una o más variables dependientes con respecto a dos o más variables independientes, es decir, se contempla derivadas parciales, se denomina **Ecuaciones diferenciales a derivadas parciales**. Por ejemplo, en un fluido que circula por un tubo, puede analizarse que la velocidad del flujo, no solo depende del tiempo, si no también del espacio, mas aun si tomamos el espacio en tres dimensiones, tenemos componentes en (x, y, z), por tanto tenemos que el cambio de velocidad (variable dependiente) depende de posición en el eje x, y, z y también del tiempo t, por tanto se tendrá una ecuación como: $\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}c = 0$ (simplificando a una sola dimensión (x), es decir sin tomar en cuenta el vector (x, y, z).
- Según el orden, puede clasificarse según el orden.
  - Se denomina de **Primer orden** cuando la Ecuación involucra solo la primera derivada, en nuestro ejemplo, la Ecuación $\frac{dv}{dt} = -g$ es de primer orden.

  - Si la Ecuación tiene derivadas de segundo, tercero, u orden n, se denomina de **orden superior** n, donde n es la derivada mayor. Si en nuestro ejemplo entendemos la velocidad como cambio de posición al transcurrir el tiempo, tendremos $\frac{d^2y}{dt^2} = -g$ como Ecuación de segundo orden.

- Según su linealidad

  - La **Ecuación es Lineal** si la variable dependiente y y todas sus derivadas son de primer grado. Además cada coeficiente de y y sus derivadas depende solamente de la variable independiente. Es decir, tienen la forma:

$$a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + ... + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = f(t) \qquad (1.9)$$

    Los coeficiente a deben ser polinomios lineales. Para nuestro ejemplo de la caída de la manzana, si involucramos la fricción del viento podríamos utilizar la ecuación: $m\frac{dv}{dt} + kv = g$, es una ecuación lineal (m la masa, k coeficiente de fricción).

  - Las que no cumplen las propiedades anteriores, son denominadas **ecuaciones no lineales**, y son las que mas se utilizan en fenómenos cotidianos mas interesantes, por ejemplo, para nuestro caso de caída, un modelo mas real es : $y\frac{dy}{dt} + t^2y = t$.

Ejemplos:

Ecuación diferencial	**Tipo**	**Orden**	**Lineal**
$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = kv(\frac{\partial^2 m}{\partial n^2})^2$	Parcial	4	No
$(y^v)^3 - y''' + y'' - y^2 = 0$	Ordinaria	5	No
$\frac{dy}{dx} + y = \frac{x}{y}$	ordinaria	1	No
$\sin(y') + y = 0$	Ordinaria	1	No
$\frac{dy}{dx} = 2e^{-x}$	Ordinaria	1	Si
$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial t} + kx - \frac{\partial y}{\partial s}$	Parcial	1	Si
$t^2\ddot{y} + t\dot{y} + y = 0$	Ordinaria	2	Si
$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial s^2 = c}$	Parcial	2	Si
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 + v^2)y = 0$	Ordinaria	2	Si
$yy'' + x^2y = x$	Ordinaria	2	No

1.5. Solución de una Ecuación Diferencial

La solución de una ecuación diferencial **es una función** que no contiene derivadas y que satisface a dicha ecuación; es decir, que al sustituir la función y sus derivadas en la ecuación diferencial resulta una identidad.

Por ejemplo, para el caso de la caída de la manzana, la Ecuación Diferencial es:

$$\tfrac{dv}{dt} = -g$$

Integrando con respecto de t ambos miembros para despejar $v_{(t)}$:

$$\int dv = -\int g dt$$

Resultando la función velocidad:

$$v = -gt + c$$

donde c es la constante de integración. A esta solución vamos a llamar **solución general** de la Ecuación. En rigor la solución general de una ecuación diferencial es la función que satisface a la ecuación y que contiene una o más constantes arbitrarias (obtenidas de las sucesivas integraciones), es decir corresponde a una familia de funciones.

Para comprobar lo indicado, sustituyamos el resultado en la ecuación: $\frac{d}{dt}(-gt + c) = -g$, derivando, llegamos a $-g = -g$.

Hablaremos de **solución particular** de una ecuación diferencial a la función que satisface la ecuación y cuyas constantes arbitrarias toman un valor específico (específicamente pasa por un único punto). Si en nuestro caso, dada la solución general $v = -gt + c$, queremos tomar la çondición inicial"que en tiempo $t = 0$, la velocidad inicial es de v_0, entonces sustituyendo tendremos: $v_0 = c - g(0)$, es decir $c = v_0$, por tanto $v = v_0 - gt$, la cual es la ecuación de la velocidad en función del tiempo que aprendimos en cinemática.

Si pensamos en $v = \frac{dy}{dt}$, es decir, la velocidad en la diferencial de la posición con respecto del tiempo, tendremos $\frac{dy}{dt} = v_0 - gt$, la resolución concluiría en $y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 + c$ (solución general), y si tomamos $t = 0$ con $y = y_0$, quedaría: $y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$

Experimentando con python

Para visualizar nuestra solución vamos a utilizar python, un lenguaje muy sencillo de aprender. Iniciemos importando las librerías necesarias, trabajaremos con vectores y gráficas:

```
import numpy # libreria para manejar vectores y matrices
import matplotlib.pyplot as pl # libreria para graficar
```

Vamos a utilizar "def", para crear una función, que implemente la solución general, y que tenga como parámetros el tiempo, el valor de la constante y retorna la velocidad. Notar que las variables en python no necesitan estar tipadas, y que el cuerpo de la función no se encuentra entre llaves, para ello python necesita que tabules el bloque.

```
# creamos funcion para nuetsra solucion general
def solu_velocidad(t, v0, g):
  v = v0 -g * t
  return v
```

Ahora podemos implementar la función pasando un vector como t, para cada valor se computará la velocidad v.

```
# creamos vector de 0 hasta 10 en 50 partes
t = numpy.linspace(0, 40, 50)
# para cada valor de t, computamos v
v = solu_velocidad(t, 3, 9.81)

pl.plot(t, v) # graficar
pl.grid()      # mostramos grilla
pl.xlabel("tiempo")
pl.ylabel("velocidad")
pl.show()
```

Ejemplo 2

Comprobar que la función $y = ce^t$ es la solución general de la ecuación $\frac{dy}{dt} - y = 0$ y hallar la solución particular que satisface la condición inicial $y_{t=1} = -1$

- $\frac{dy}{dt} - y = 0$

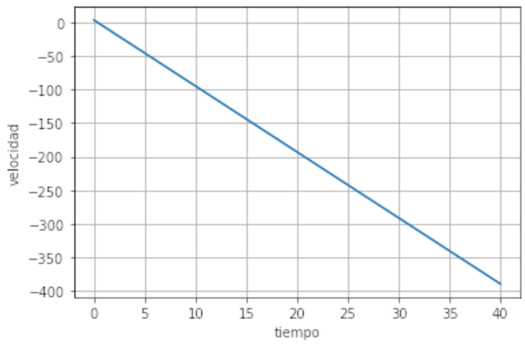

Figura 1.2: Grafica de la solución particular $c = 3$

- $\frac{d}{dt}(ce^t) - ce^t = 0$ *sustituir*
- $ce^t - ce^t = 0$ *derivando*
- $0 = 0$

Podemos graficar la solución general colocando diferentes valores a la constante c:

```
# creamos funcion para nuetsra solucion general
def solu_general(t, c):
    y = c * numpy.exp(t)
    return y
```

Graficaremos la familia de curvas solución con los valores c, 50, -50, -30, -20, 20, 30, 50:

```
t = numpy.linspace(5, 10, 100)
for c in [-50, -30, -20, 20, 30, 50]:
    y = solu_general(t, c)
    pl.plot(t, y, label="c="+str(c))
pl.grid()
pl.legend()
pl.show()
```

La solución general determina una familia de curvas integrales que representan las gráficas de funciones exponenciales. [1]

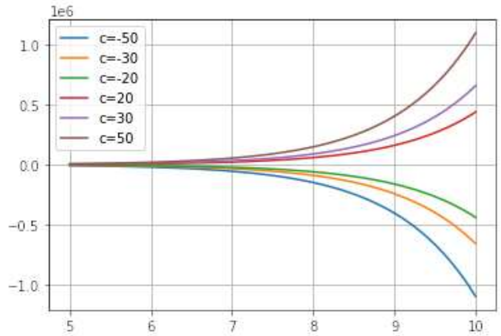

Figura 1.3: Curvas integrales generadas por la solucion general

Para la solución particular correspondiente a la condición inicial $y_{t=1} = -1$.

- $y = ce^t$
- $-1 = ce^{(1)}$
- $-1 = ce$
- $-e^{-1} = c$
- $c = -e^{-1}$
- $y = -e^{-1}e^t$
- $y = -e^{t-1}$

```
# creamos funcion para nuetsra solucion general
def solu_particular(t):
    y = -numpy.exp(t-1)
    return y
```

La solución particular es la curva integral que pasa por el punto $(t = 1, y = -1)$ [1]

Ejemplo 3

Más importante que encontrar un conjunto de símbolos organizados en una expresión algebraica es preguntar qué nos dice la solución que encontramos acerca

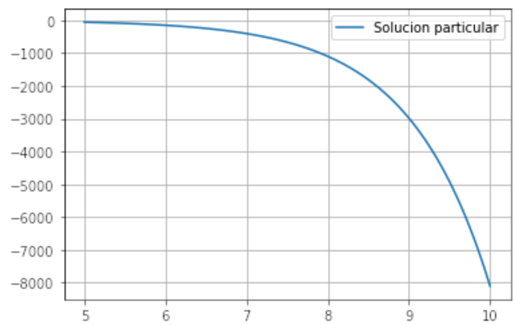

Figura 1.4: Grafica de la solución particular $y_{t=1} = -1$

de la situación que se está modelando. Por ejemplo la ecuación de nuestro ejemplo $\frac{dP}{dt} = kP$ para alguna constante k, si $P = 0$, entonces $\frac{dP}{dt} = 0$. Esto quiere decir que la función constante $P = 0$ es una solución de la ecuación diferencial. A este tipo especial de solución, se le denomina solución de equilibrio, porque es constante para siempre. ¿Como se interpreta esto que acabamos de mostrar? En términos del modelo de población, pensemos en una población de infectados por el corona virus, si no existen infectados,la población es 0, por tanto no es posible que pueda propagarse y cambiar de tamaño al transcurrir el tiempo, esto es la velocidad de propagación es 0. Por otro lado si $P_{(t_0)} \neq 0$ en algún tiempo t_0, entonces en el tiempo $t = t_0$ $\frac{dP}{dt} \neq 0$, en consecuencia la población no es constante. La población P es siempre positiva (población negativa no tiene sentido), por lo que el el cambio de población al transcurrir el tiempo (velocidad de crecimiento) será positiva o negativa según sea el parámetro $k < 0$ o $k > 0$. En el caso $k > 0$ la población está creciendo (como era de esperarse). Conforme t crece, la población de infectados $P(t)$ se vuelve mayor, por lo que la velocidad de crecimiento $\frac{dP}{dt}$ aumenta (a mas infectados, mayor el contacto y la propagación). A su vez, la población $P(t)$ crece aún más rápidamente. Es decir, la velocidad de crecimiento crece en relación directa con la población.[3]

Nuestro análisis de la manera en que $P(t)$ crece cuando t aumenta se llama **análisis cualitativo** de la ecuación diferencial. Si todo lo que nos interesa es saber si el modelo predice explosiones de población de infectados, o decrecimiento del mismo, basta con responder el parámetro k y si $P > 0$.

Si, por otra parte, conocemos el valor exacto de la población inicial de infectados P_0 y queremos predecir el valor de la población a los 10 días $P_{(10)}$ o a los 100 días

$P_{(100)}$, entonces necesitamos información más precisa sobre la función la solución. En este caso, partimos del valor de la población $P(t)$ en $t = 0$ es decir, la condición inicial. Si comenzamos con una condición inicial diferente obtenemos una función $P(t)$ distinta, una familia de curvas solución. Una solución al problema de valor inicial es una función $P(t)$ que satisface la ecuación planteada $\frac{dP}{dt} = kp$. Intuitivamente podemos resolver la ecuación:

- $\frac{dP}{dt} = kp$
- $\frac{1}{p}\frac{dP}{dt} = k$
- $\int(\frac{1}{p}\frac{dP}{dt})dt = \int kdt$
- $\int \frac{1}{p}dP = \int kdt$
- $\ln(P) = kt + c$
- $P = e^{kt+c}$
- $P = e^{kt}e^{c}$
- $P = Ce^{kt}$

Utilicemos los datos del inicio de la pandemia Covid-19 en Bolivia.

Día	Fecha	País	Código	Infectados	Recuperados	Fallecidos
0	2020-03-11	Bolivia	BO	2	0	0
1	2020-03-12	Bolivia	BO	2	0	0
2	2020-03-13	Bolivia	BO	3	0	0
3	2020-03-14	Bolivia	BO	10	0	0
4	2020-03-15	Bolivia	BO	10	0	0
5	2020-03-16	Bolivia	BO	11	0	0
6	2020-03-17	Bolivia	BO	11	0	0
7	2020-03-18	Bolivia	BO	12	0	0
8	2020-03-19	Bolivia	BO	12	0	0
9	2020-03-20	Bolivia	BO	15	0	0
10	2020-03-21	Bolivia	BO	19	0	0
11	2020-03-22	Bolivia	BO	24	0	0
12	2020-03-23	Bolivia	BO	27	0	0
13	2020-03-24	Bolivia	BO	29	0	0
14	2020-03-25	Bolivia	BO	32	0	0
15	2020-03-26	Bolivia	BO	43	0	0
16	2020-03-27	Bolivia	BO	61	0	0
17	2020-03-28	Bolivia	BO	74	0	0
18	2020-03-29	Bolivia	BO	81	0	1
19	2020-03-30	Bolivia	BO	97	0	4
20	2020-03-31	Bolivia	BO	107	0	6
21	2020-04-01	Bolivia	BO	115	1	7
22	2020-04-02	Bolivia	BO	123	1	8
23	2020-04-03	Bolivia	BO	132	1	9
24	2020-04-04	Bolivia	BO	139	1	10

En este caso, en $t = 0$ (es decir tomamos el día 0, donde se detectan 2 infectados), tendremos:

- $P = Ce^{kt}$
- $2 = Ce^{k*0}$
- $2 = Ce^{0}$

- $C = 2$
- $P = 2e^{kt}$

Sabemos que la población de infectados, por ejemplo, a los 10 días era de 19 infectados, y podemos usar este valor para determinar k. Si hacemos:

- $P = 2e^{kt}$
- $19 = 2e^{10k}$
- $\frac{19}{2} = e^{10k}$
- $10k = \ln(\frac{19}{2})$
- $k = \frac{\ln(\frac{19}{2})}{10}$
- $k = 0{,}2025$
- $P = 2e^{0{,}203t}$

Básicamente nuestro modelo quedaría:

$$P = 2e^{0{,}203t} \tag{1.10}$$

Contrastemos la simulación de este modelo, con los datos reales, para eso utilicemos nuestras herramienta "python":

Carguemos los datos reales de una base de daos, en este caso nuestro archivo csv.:

```
data = numpy.loadtxt("dataset_covid19_BO.csv", delimiter=',')
dias = data[:,0]
infectados = data[:,1]
pl.scatter(dias, infectados)
pl.grid()
pl.show()
```

Ahora, implementemos nuestro modelo para la simulación:

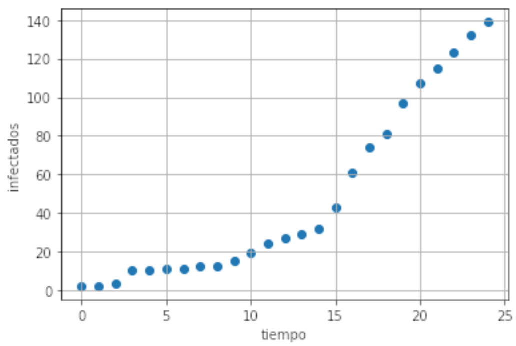

Figura 1.5: Grafica datos infectados COVID19

```
def get_infectados(p0, t, k):
    p = p0 * numpy.exp(k * t)
    return p
```

Usando nuestra función:

```
t = numpy.linspace(0, 22, 100)
p0 = 2
k = 0.203
p = get_infectados(p0, t, k)
td = data[:,0] # capturamos dias de la data
pd = data[:,1] # capturamos contagiados de la data
pl.scatter(td, pd, color="red", label="Datos reales")
pl.plot(t, p, label="Simulacion")
pl.xlabel("Tiempo")
pl.ylabel("Infectados")
pl.grid()
pl.legend()
pl.show()
```

Como vemos en la figura, este modelo de población de infectados $P(t)$ predice razonablemente bien la población hasta aproximadamente el día 20, pero después de este día la predicción resulta muy grande.

Nuestro modelo es bastante bueno siempre que la población sea relativamente pequeña. Sin embargo, con el paso del tiempo el modelo predice que la población continuará creciendo sin límite, y obviamente esto no sucede en el mundo real, sabemos que ante varios contagios en algún momento estos recuperan, y luego de un pico grande, cominza a disminuir la población de infectados, por otra parte sabemos que las medidas de confinamiento, cuarentenas, o grupos que no acatan las medidas, etc, influyen enormemente en el comportamiento de la pandemia. En consecuencia, si queremos un modelo que sea exacto sobre una escala grande de tiempo, debemos tomar en cuenta todos estos hechos.[3]

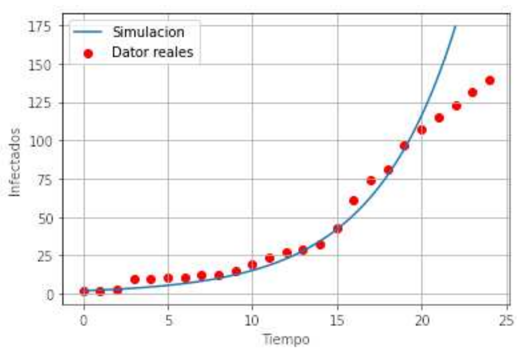

Figura 1.6: Grafica de la solución particular $y_{t=1} = -1$

Hemos encontrado una funciones resultado como soluciones generales y particulares (al tener condiciones iniciales) a partir de la resolución de integrales en la ecuación diferencial. Puedes hacer la prueba de estas soluciones, sustituyendo las funciones en la ecuación. Esta técnica es denominada analítica, la cual en estos casos ha sido fácilmente implementada. Sin embargo, si queremos resolver el modelo logístico de crecimiento de población de la ecuación 1.7, ya no la tendremos tan sencilla. Veremos en el siguiente capítulo técnicas para su resolución, por el momento y aprovechando las gráficas, podemos analizar el comportamiento de la ecuación diferencial de manera "cualitativa", observando $\frac{dP}{dt}$: donde su valor es cero, dónde es positiva y dónde es negativa. [3]

Grafiquemos la ecuación diferencial 1.7, para ello implementamos el modelo con la Ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

```
def logistica(p, k, n):
    dpdt = k * (1 - p / n) * p
```

```
    return dpdt
```

Implementemos esta función utilizando el siguiente caso: constante de crecimiento $k = 0{,}019$, recursos limitados $n = 10$.

```
k = 0.019
n = 10
p = numpy.linspace(0, 10, 100)

dpdt = logistica(p, k, n)
pl.plot(p, dpdt)
pl.grid()
pl.xlabel("Poblacion")
pl.ylabel("Velocidad de crecimiento")
pl.show()
```

Resultado se visualiza en la figura:

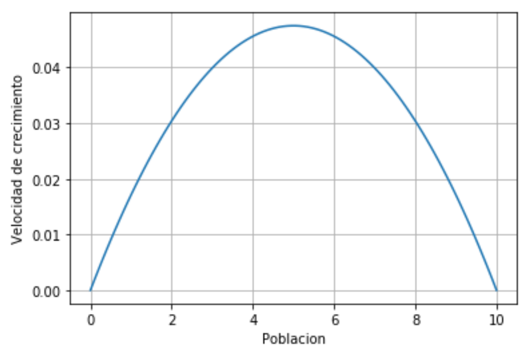

Figura 1.7: Gráfica Población vs Velocidad

Observamos que la gráfica corta al eje *poblacion* en exactamente dos puntos, $P = 0$ y $P = N$. En cualquiera de los dos caso, tenemos $\frac{dP}{dt} = 0$. Es decir que la población P desaparece para todo tiempo t, en otras palabras la población permanece constante si $P = 0$ o $P = N$. Podemos inferir que las funciones constantes $P_{(t)} = 0$ y $P_{(t)} = N$ resuelven la ecuación diferencial. Esas dos soluciones constantes tienen mucho sentido: si la población es cero, permanecerá en cero indefinidamente; si la población es exactamente la asociada con la capacidad de soporte, ni crecerá ni disminuirá. Igual que antes, decimos que $P = 0$ y $P = N$ son puntos de equilibrio. Las funciones constantes $P_{(t)} = 0$ y $P_{(t)} = N$ son llamadas soluciones de equilibrio.

El comportamiento a largo plazo de la población es muy diferente para otros valores. Si la población se encuentra entre 0 y N, tenemos entonces $\frac{dP}{dt} > 0$ es decir es positiva y en consecuencia la población $P_{(t)}$ está creciendo. En tanto que $P_{(t)}$ se encuentre entre 0 y N, la población continúa incrementándose. Sin embargo, cuando tiende a la capacidad de soporte N, $\frac{dP}{dt}$ se acerca a cero, por lo que esperamos que la población se nivele cuando tienda a N.

Si $P_{(0)} > N$, entonces $\frac{dP}{dt} < 0$ y la población está disminuyendo. Y cuando tiende a la capacidad de soporte N, $\frac{dP}{dt}$ se aproxima a cero y esperamos de nuevo que la población se nivele en N.

Finalmente, si $P_{(0)} < 0$ (que no tiene sentido en términos de poblaciones), tenemos también $\frac{dP}{dt} < 0$. Vemos de nuevo que $P_{(t)}$ disminuye, pero esta vez no se nivela a ningún valor particular ya que $\frac{dP}{dt}$ se vuelve más y más negativa conforme $P_{(t)}$ decrece.

Así, a partir sólo del conocimiento de la gráfica de $\frac{dP}{dt}$, podemos esbozar varias diferentes soluciones con condiciones iniciales diferentes, todas sobre los mismos ejes. La única información que necesitamos es el hecho de que $P = 0$ y $P = N$ son soluciones de equilibrio; $P_{(t)}$ crece si $0 < P < N$, y $P_{(t)}$ disminuye si $P > N$ o $P < 0$. Por supuesto, los valores exactos de $P_{(t)}$ en cualquier tiempo dado t dependerán de los valores de $P_{(0)}$, k y N.

Enfoques de la solución

Nos enfocaremos en tres orientaciones diferentes para el estudio de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. El **enfoque analítico** busca fórmulas explícitas que describan el comportamiento de los sistemas. Vimos que las funciones exponenciales dan soluciones explícitas al modelo del crecimiento exponencial, por ejemplo en el crecimiento de la población de infectados por el COVID19 en Bolivia. Desafortunadamente, un gran número de ecuaciones importantes no pueden tratarse con el método analítico; simplemente no hay manera de encontrar una fórmula exacta que describa la situación. Nos vemos entonces forzados a recurrir a métodos alternativos.[7]

Un procedimiento particularmente poderoso para describir el comportamiento de las soluciones es el **enfoque cualitativo**. Éste implica usar la geometría para tener un panorama del comportamiento del modelo, tal como lo hicimos con el modelo logístico del crecimiento de la población con recursos limitados. No lo utilizamos para dar valores precisos de la solución en tiempos específicos, pero sí para determinar su comportamiento a largo plazo. Con frecuencia, ésta es justamente la clase de información que requerimos.[7]

El tercer enfoque para resolver ecuaciones diferenciales es el **enfoque numérico**. La computadora aproxima la solución que buscamos. Aunque no ilustramos ninguna técnica de aproximación numérica en esta sección, veremos pronto que son una herramienta poderosa para darnos ideas respecto a las soluciones que deseamos.[7]

Los tres métodos que usamos tienen sus ventajas y también desventajas. Algunas veces ciertos métodos son útiles mientras que otros no lo son. Una de nuestras principales tareas al estudiar las soluciones de ecuaciones diferenciales será determinar qué método, o combinación de éstos, funciona bien en cada caso específico. [7]

1.6. Ejercicios

1. Clasificar las siguientes ecuaciones por su tipo, orden y grado:

   a) $(\frac{\partial y}{\partial x})^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{xy}{t}e^t$

   b) $(x-1)y'' + y(y')^3 - x = 0$

   c) $(x-1)y''' + (xy')^2 = \frac{x}{y}$

   d) $t^2y'' + ty' + 3y = 0$

   e) $t(y^{IV})^3 + (y''')^4 = 1$

   f) $(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2})^3 + (\frac{\partial^2 y}{\partial x^2})^3 = y$

   g) $\sin(2t)y' + 5y + 2 = 0$

   h) $y' + 5y + \sin(2t) = 0$

   i) $\frac{dy}{dx}\cos(x) + yx = 0$

   j) $\frac{dx}{dy}yx + \cos(x) = 0$

2. Verificar si las siguientes función $y_{(t)}$ son soluciones de las Ecuaciones Diferenciales presentadas:

   a) $\frac{dy}{dt} = 3y - 3$ Solución: $y = 2e^{3t} + 1$

b) $\dot{y} = 2ty$ Solución: $y = e^{y^2}$

c) $y' = 4y - 8$ Solución: $y = 3e^{4t} + 2$

d) $\dot{y} = -2e^{2t}x^2$ Solución: $y = e^{-2t}$

e) $y' = \frac{y-3}{t}$ Solución: $y = t + 3$

f) $\frac{dy}{dt} = 3x - 3$ Solución: $y = 2e^{3t}$

g) $\frac{dy}{dt} - 2yt$ Solución: $y = e^{t^2}$

h) $y' - 4y + 8 = 0$ Solución: $y = 3e^{4t} + 2$

i) $\frac{dy}{dt} = -2e^{2t}y^2$ solución: $y = -2e^t$

j) $\dot{y} = \frac{y-3}{t}$ solución $y = t + 3$

3. Dada la ecuación diferencial, su solución y las condiciones iniciales, determinar el valor de las constantes arbitrarias, graficar la curva solución para dicha condición inicial.

a) $yy' + 6x = 0$, solución: $y^2 = -6x^2 + c$, condición inicial: $y_{(x=0)} = 4$

b) $y^2y' - 4x = 0$, solución: $y^3 = 6x^2 + c$ condición inicial: $y_{(x=\frac{1}{2})} = 0$

c) $y\frac{dy}{dt} = e^2t + 1$, solución: $y^2 = e^{2t} + 2t + c$ condición inicial: $y_{(x=0)} = \frac{1}{2}$

d) $2\ddot{y}+\dot{y}-y = 0$ solución: $yc_1e^{\frac{t}{2}}+c_2e^{-t}$ condición inicial: $y_{(t=0)} = 0$, $\dot{y}_{(t=0)} = 1$

e) $y''+y = \cos(x)+4$ solución: $y = c_1x\sin(x)+c_2$ condición inicial: $y_{(x=0)} = 4$, $y'_{(x=0)} = \frac{\pi}{2}$

4. Encontrar la solución general:

- $\dot{y} = 3e^t$
- $y' = 8e^{-t}$
- $\frac{dy}{dt} + 5\cos(6t)$
- $\dot{y} - 2\sin(7t) = 0$
- $3y'' = sin(9t)$

5. Encontrar la solución particular para los problemas de valor inicial presentados:

- $\frac{dy}{dt} - t^4 = 0$ Condición inicial: $y_{t=2} = 3$
- $\dot{y} - t^{\frac{3}{2}} = 0$ Condición inicial: $y_{t=3} = 7$
- $\frac{d^2y}{dt^2} - t^4 = 0$ Condición inicial: $y'_{t=0} = 3$, $y_{t=0} = 1$
- $y'' + \cos(t) = 0$ Condición inicial: $y'_{t=0} = 0$, $y_{t=0} = 0$
- $\frac{dp}{dt} - 0{,}2p = 0$ Condición inicial: $p_{t=0} = 50$

6. Construye una ecuación diferencial de la forma: $\frac{dy}{dt} = 2y - t + g(y)$, que tenga la función $y = e^{2t}$ como solución.

7. Construye una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$ que tenga la función $y = e^{t^3}$ como una solución. (Trata de encontrar una cuyo lado derecho $f(t, y)$ dependa explícitamente de t y y)

8. Considere el modelo de población $\frac{dP}{dt} = 0{,}4P(1 - \frac{P}{230})$, donde $P_{(t)}$ es la población en el tiempo t.

   a) Para qué valores de P está en equilibrio la población?

   b) Graficar la función (Python).

   c) Para qué valores de P está creciendo la población?

   d) Para qué valores de P está decreciendo la población?

9. Considere el modelo de población $\frac{dP}{dt} = 0{,}3P(1 - \frac{P}{200})(\frac{P}{50} - 1)$, donde $P_{(t)}$ es la población en el tiempo t.

   a) Para qué valores de P está en equilibrio la población?

   b) Graficar la función (Python).

   c) Para qué valores de P está creciendo la población?

   d) Para qué valores de P está decreciendo la población?

10. Considere la ecuación diferencia $\frac{dP}{dt} = P^3 - P^2 - 12P$

    a) Para qué valores de P está en equilibrio P?

    b) Graficar la función (Python).

c) Para qué valores de P está creciendo P?

d) Para qué valores de P está decreciendo P?

11. El archivo de texto adjunto *ejer04.csv* proporciona una tabla con información del área de terreno en Australia colonizada por el sapo marino americano (Bufo marinis) cada cinco años desde 1939 hasta 1974. La primera columna corresponde al **Año**, y la segunda al **Área ocupada acumulativa** (km^2) . Modele la migración de este sapo bajo el supuesto que la velocidad de crecimiento es proporcional a la población de sapos. Para ello:

    a) Formula la Ecuación Diferencial.

    b) Resuelve el problema de valor inicial.

    c) Determina la constante k (mostrar los datos reales población - tiempo)

    d) Graficar población real y población del modelo

    e) Compara la solución con los datos reales. Crees en tus predicciones?

    f) Haga predicciones acerca de la superficie de terreno ocupada en los años 2010, 2050 y 2100.

12. Considere un modelo elemental del proceso de aprendizaje: si bien el aprendizaje humano es un proceso extremadamente complicado, es posible construir modelos de ciertos tipos simples de memorización. Por ejemplo, considere una persona a quien se le da una lista para estudiar, y posteriormente se le hacen pruebas periódicas para determinar exactamente qué tanto de la lista ha memorizado. (Por lo general las listas consisten en sílabas sin sentido, números de tres dígitos generados al azar o entradas de tablas de integrales. Si $L_{(t)}$ es la fracción de la lista aprendida en el tiempo t, donde $L = 0$ corresponde a no saber nada del listado y $L = 1$ corresponde a saberlo por completo, podemos entonces formar un simple modelo de este tipo de aprendizaje con base en las hipótesis: La rapidez de aprendizaje es proporcional a la fracción que queda por aprender.

    a) Formular la Ecuación diferencial.

    b) Graficar la la tasa de cambio con respecto del tiempo. (utilizar $k = 0{,}2$)

c) Generar el modelo de memorización resolviendo la ecuación planteada.

d) Para que valores de L con $0 < L < 1$ ocurre mas rápido el aprendizaje?

13. Suponga que dos estudiantes memorizan listas de acuerdo con el mismo modelo: $\frac{dL}{dt} = 2(1 - L)$

    a) Si uno de los estudiantes aprende la mitad de la lista en el tiempo $t = 0$ y el otro no memoriza nada de ella, qué estudiante está aprendiendo más rápidamente en este instante?

    b) Alcanzará el estudiante que comienza sin saber nada de la lista al estudiante que empieza sabiendo la mitad de la lista?

14. Considere las dos siguientes ecuaciones diferenciales que modelan las tasas de memorización de un poema por dos estudiantes. La tasa de Juan es proporcional a la cantidad por aprender, con una constante de proporcionalidad de $k = 2$. La tasa de Ana es proporcional al cuadrado de la cantidad por aprender y cuya constante de proporcionalidad es de $k = 3$.

    a) Formular las ecuaciones

    b) Resolver las ecuaciones (puede utilizar sympy)

    c) Graficar ambos modelos de velocidad

    d) Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en t=0 , si ambos empiezan la memorización juntos y nunca antes han visto el poema? Encuentre la solución particular de ambos y graficar.

    e) Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en t=0t=0 , si ambos empiezan a memorizar juntos habiendo aprendido la mitad del poema? Encuentre la solución particular de ambos y graficar.

    f) Qué estudiante tiene una tasa más rápida de aprendizaje en t=0t=0 , si ambos empiezan la memorización juntos y habiendo aprendido un tercio del poema? Encuentre la solución particular de ambos y graficar.

15. En los siguientes ejercicios, consideramos el fenómeno de la desintegración radiactiva que, por experimentación, sabemos que se comporta de acuerdo con

la ley siguiente: La tasa a la que una cantidad de un isótopo radiactivo se desintegra es proporcional a la cantidad del isótopo presente. La constante de proporcionalidad depende sólo de la partícula radiactiva considerada.

a) Modele la desintegración radiactiva en base a E.D.O. usando la notación: t tiempo, $r_{(t)}$ cantidad de isótopo radiactivo particular en el tiempo t, $-\lambda$ tasa de desintegración. Observa que el signo menos se usa para $\lambda < 0$.

b) Usando esta notación, escriba un modelo para la desintegración de un isótopo radiactivo particular.

c) Si la cantidad del isótopo presente en $t = 0$ es r_0, establezca el problema de valor inicial correspondiente para el modelo resuelto.

d) Implementar una función en Python para implementar el modelo generado.

e) Graficar el modelo cantidad de isotopo vs tiempo.

16. La vida media de un isótopo radiactivo es la cantidad de tiempo que toma a una cantidad de material radiactivo desintegrarse a la mitad de su cantidad original.

a) La vida media del carbono 14 (C-14) es de 5230 años. Determine el parámetro λ de tasa de desintegración del C-14.

b) La vida media del yodo 131 (1-131) es de 8 días. Calcule el parámetro de tasa de desintegración del 1-131.

c) Cuáles son las unidades de los parámetros de tasa de desintegración en las partes (a) y (b)?

d) Para estimar la vida media de un isótopo, podríamos comenzar con 1000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma a 500 de ellos desintegrarse o podríamos comenzar con 10 000 átomos del isótopo y medir la cantidad de tiempo que le toma desintegrarse a 5 000 de ellos. Obtendremos la misma respuesta? Explícalo.

17. El fechado por carbono es un método para determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del material orgánico. Las hipótesis implícitas en el fechado por carbono son que:

    - El carbono 14 (C-14) constituye una proporción constante del carbono que la materia viva ingiere según una base regular.
    - Una vez que la materia muere, el C-14 presente se desintegra, pero ningún átomo nuevo es agregado a la materia.

    Entonces, al medir la cantidad de C-14 que aún permanece en la materia orgánica y al compararla con la cantidad de C-14 encontrada en la materia viva, puede calcularse el "tiempo desde la muerte". Usando el parámetro de la tasa de desintegración que usted estimó en el anterior ejercicio, determine el tiempo desde la muerte si:

    a) 88 % del C-14 original aún está presente en el material.

    b) 12 % del C-14 original aún está presente en el material.

    c) 2 % del C-14 original aún está presente en el material.

    d) 98 % del C-14 original aún está presente en el material.

18. El isótopo radiactivo I-131 se usa en el tratamiento de la hiper tiroides. El I-131 administrado a un paciente se acumula en forma natural en la glándula tiroides, donde se desintegra y acaba con parte de la glándula.

    a) Suponga que se requieren 72 horas para enviar el I-131 del productor al hospital. Qué porcentaje de la cantidad originalmente enviada llega al hospital?

    b) Si el I-131 es almacenado en el hospital 48 horas adicionales antes de ser usado, ¿qué tanto queda de la cantidad original enviada por el productor cuando el material radiactivo se utilice?

    c) Qué tiempo le tomará al I-131 desintegrarse completamente de manera que el hospital pueda deshacerse de los residuos sin precauciones especiales?

19. Suponga que una especie de pez en un lago específico tiene una población que sigue el modelo logístico de población con razón k de crecimiento, capacidad N de soporte y tiempo t medido en años. Ajuste el modelo para tomar en cuenta cada una de las situaciones siguientes.

    a) 100 peces son cultivados cada año.

    b) Un tercio de la población de peces es cultivada anualmente.

    c) El número de peces cultivados cada año es proporcional a la raíz cuadrada del número de peces en el lago.

20. Suponga el parámetro $k = 0{,}3$ de razón de crecimiento y la capacidad $N = 2500$ de soporte en el modelo logístico de población del ejercicio anterior. Y también que $P_{(0)} = 2500$.

    a) Graficar la tasa de crecimiento.

    b) Si 100 peces son cultivados cada año, ¿ qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de la población de peces ? En otras palabras, qué da un análisis cualitativo del modelo?

    c) Si cada año se cultiva una tercera parte de los peces, qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de dicha población?

21. El rinoceronte es actualmente muy raro. Suponga que se aparta suficiente terreno para su preservación y que hay entonces suficiente espacio para muchos más territorios de rinocerontes que rinocerontes. En consecuencia, no habrá peligro de una sobre población. Sin embargo, si la población es muy pequeña, los adultos fértiles tendrán dificultad en encontrarse cuando sea el tiempo de apareamiento.

    a) Escriba una ecuación diferencial que modele la población de rinocerontes con base en esas hipótesis. (Note que hay más de un modelo razonable que se ajusta a esas suposiciones.)

    b) Encuentre la solución general.

    c) Graficar, velocidad - tiempo, y población tiempo. Tiene sentido el modelo generado?

22. Considere las siguientes hipótesis respecto a la fracción de una pieza de pan cubierta por moho:

    - Las esporas de moho caen sobre el pan a una razón constante.
    - Cuando la proporción cubierta es pequeña, la fracción del pan cubierto por el moho se incrementa a una razón proporcional a la cantidad de pan cubierto.
    - Cuando la fracción de pan cubierto por el moho es grande, la razón de crecimiento disminuye.
    - Para sobrevivir, el moho debe estar en contacto con el pan.

    a) Usando estas hipótesis, escriba una ecuación diferencial que modele la proporción de una pieza de pan cubierta por moho. (Observe que hay más de un modelo razonable que se ajuste a esas hipótesis.)

    b) Encuentre la solución general.

    c) Graficar, velocidad - tiempo, y población tiempo. Tiene sentido el modelo generado?

23. El archivo $ejer11.csv$ contiene datos sobre la población de búhos amarillos en Inglaterra. La primera columna corresponde a los años en que se tomo el control de población, la segunda respectivamente pertenece al tamaño de la población de Búhos. :

    a) Grafique utilizando matplotlib.

    b) Qué modelo de población usaría usted para modelar esta población?

    c) Puede usted calcular (o por lo menos hacer estimaciones razonables) los valores del parámetro?

    d) Qué predice su modelo para la población actual?

    e) Podría implementar un predictor de población de Búhos en python con este estudio? Realizar codificación.