GUÍA PRÁCTICA

1. DATOS GENERALES	
Asignatura: Ecuaciones Diferenciales	**Código de la Asignatura:** SIS-03212
Carrera: Ingeniería de Sistemas	
Curso: A	**Semestre:** Tercero
Contenido Analítico: • Resolución Analítica • Técnica Separación de Variables • Técnica para ecuaciones Exactas • Técnica para ecuaciones Homogéneas • Técnica para EDO lineales	**Unidad Temática:** ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN
Docente: Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez	**Email:** victorestevez@hotmail.com
Bibliografia a seguir: • DIFFERENTIAL EQUATIONS Fourth Edition, Blanchard, Paul/ Devaney, Robert L. / Hall, Glen R.	
Práctica: 2	**Titulo:** Resolución Analítica de las E.D.O.
Material de Apoyo: Diapositivas	**Carga horaria:** 6

2. OBJETIVO
• Utiliza técnicas analíticas para la resolución de EDO lineales de primer orden • Formula Modelo mediante EDO, resolviendo la Ecuación, implementando la solución en un lenguaje de programación, graficando e interpretando resultados.

3. SOFTWARE, SIMULADORES Y/O EQUIPOS	
Detalle	**Cantidad**

1. Introducción

En esta práctica debes utilizar técnicas analíticas para resolver una Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden. Antes de empezar, se recomienda la lectura del libro "Differential Equations 4ed" de Paul Blanchard, el resumen proporcionado en las diapositivas y revisar los apuntes de clases, comprendiendo la lógica de de la técnica aplicada. En realidad el número de EDO que se puede resolver con estas técnicas es reducido, sin embargo es importante practicar estas técnicas para comprender muchos modelos utilizados.

2. Técnica Separación de variables

Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales

1. $(1+y^2)dt + (1+t^2)dy = 0$
2. $(1+y^2)dt + tydy = 0$
3. $(y^2+ty^2)y' + t^2 - yt^2 = 0$
4. $(1+y^2)dt = tdy$
5. $t\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+t^2} = 0$

6. $t\sqrt{1-y^2}dt + y\sqrt{1-t^2}dy = 0$, $y_{t=0} = 1$
7. $e^{-y}(1+y') = 1$
8. $y\ln(y)dt + tdy = 0$, $y_{t=0} = 1$
9. $y' = a^{t+y}$, $(a > 0, a \neq 1)$
10. $e^y(1+t^2)dy - 2t(1+e^y)dt = 0$
11. $(1+e^t)yy' = e^y$, $yt = 0 = 0$
12. $(1+y^2)(e^{2t}dt - e^y dy) - (1+y)dy = 0$
13. $(ty^2 - y^2 + t - 1)dt + (t^2y - 2ty + t^2 + 2y - 2t + 2)dy = 0$
14. $y' = \sin(t-y)$
15. $y' = at + by + c$, a, b, c son constantes
16. $(t+y)^2 y' = a^2$
17. $(1-y)e^y y' + \frac{y^2}{t\ln(t)} = 0$
18. $(1+y^2)dt = (y - \sqrt{1+y^2})(1+t^2)^{\frac{3}{2}}dy$
19. $ty^2(ty' + y) = a^2$
20. $(t^2y^2 + 1)dt + 2t^2dy = 0$, sugerencia, sustituir $ty = u$
21. $(1+t^2y^2)y + (ty-1)^2ty' = 0$, sugerencia, sustituir $ty = u$
22. $(t^2y^3 + y + t - 2)dt + (t^3y^2 + t)dy = 0$ sugerencia, sustituir $ty = u$
23. $(t^6 - 2t^5 + 2t^4 - y^3 + 4t^2y)dt + (ty^2 - 4t^3)dy = 0$, sugerencia, sustituir $y = ut$
24. $y' + 1 = \frac{(t+y)^m}{(t+y)^n + (t+y)^p}$
25. $(\ln(t) + y^3)dt - 3ty^2dy = 0$
26. $(ty + 2ty\ln^2(y) + ty\ln(y))dt + (2t^2\ln(y) + t)dy = 0$ sugerencia, sustituir $t\ln(y) = u$
27. $y - ty' = a(1 + t^2y')$
28. $(a^2 + y^2)dt + 2t\sqrt{at - t^2}dy = 0$. $y_{(t=a)} = 0$
29. $y' + \sin(\frac{t+y}{2}) = \sin(\frac{t-y}{2})$

3. Técnica para Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

Resolver las siguientes Ecuaciones Diferenciales

1. $4t - 3y + y'(2y - 3t) = 0$
2. $ty' = y + \sqrt{y^2 - t^2}$
3. $4t^2 - ty + y^2 + y'(t^2 - ty + 4y^2) = 0$
4. $4t^2 + ty - 3y^2 + y'(-5t^2 + 2ty + y^2) = 0$
5. $y' = \frac{2ty}{3t^2 - y^2}$
6. $2ty(t^2 + y^2) = y(y^2 + 2t^2)$
7. $ty' = \sqrt{y^2 - t^2}$
8. $at^2 + 2bty + cy^2 + y'(bt^2 + 2cty + fy^2) = 0$
9. $(y^4 - 3t^2)dy = -tydt$

10. $y^3dt + 2(t^2 - ty^2)dy = 0$
11. $(y - ty')^2 = t^2 + y^2$
12. $3t + y - 2 + y'(t - 1) = 0$
13. $2t + 2y - 1 + y'(t + y - 2) = 0$
14. $(3y - 7t + 7)dt - (3t - 7y - 3)dy = 0$
15. $(y + y\sqrt{t^2y^4 + 1})dt + 2tdy = 0$
16. $4ty^2dt + (3t^2y - 1)dy = 0$
17. $(t + y^3)dt + (3y^5 - 3y^2t)dy = 0$
18. $2(t^2y + \sqrt{1 + t^4y^2})dt + t^3dy = 0$
19. $(2t - 4y)dt + (t + y - 3)dy = 0$
20. $(t - 2y - 1)dt + (3t - 6y + 2)dy = 0$
21. $(t - y + 3)dy + (3t + y + 1)dy = 0$
22. $(t + y)dt + (t + y - 1)dy = 0$
23. $y\cos(t)dt + (2y - \sin(t))dy = 0$
24. $(t - y\cos(\frac{y}{t})dt + t\cos(\frac{y}{t})dy = 0$
25. $y^3dy + 3y^2ydy + 2y^3dy = 0$
26. $ydt + (2\sqrt{ty} - t)dy = 0$

6. Modelación y Resolución

Resolver los siguientes problemas mediante EDO, graficar la solución en colab.

1. Una cubeta de 5 galones está llena de agua pura. Suponga que empezamos a añadir sal a la cubeta a razón de 1/4 de libra por minuto. Además, abrimos el grifo de manera que salga 1/2 galón por minuto de la cubeta, y agregamos agua pura para mantener llena la cubeta. Si la solución de agua salada está siempre bien mezclada, ¿cuál es la cantidad de sal en la cubeta después de
   (a) 1 minuto?
   (b) 10 minutos?
   (c) 60 minutos?
   (d) 1 000 minutos?
   (e) un tiempo muy grande?

2. Considere el modelo siguiente, muy simple, sobre los niveles de colesterol en la sangre, basado en el hecho de que el colesterol es fabricado por el cuerpo para usarse en la construcción de paredes celulares y es absorbido de alimentos que lo contienen: sea $C(t)$ la cantidad de colesterol en la sangre de una persona particular en el tiempo t (en miligramos por decilitro). Entonces $\frac{dC}{dt} = k_1(C_n - C) + k_2E$, donde C_n es el nivel natural de colesterol en la persona, k_1 es el parámetro de producción, E es la razón diaria a la que se ingiere colesterol , y k_2 es el parámetro de absorción.
   (a) Suponga $C_n = 200$, $k_1 = 0.1$ $k_2 = 0.1$, $E = 400$ y $C_0 = 150$. ¿Cuál será el nivel de colesterol de la persona después de 2 días con esta dieta?
   (b) Con las condiciones iniciales anteriores, ¿cuál será el nivel de colesterol en la persona después de 5 días con esta dieta?

(c) ¿Cuál será el nivel de colesterol en la persona después de un tiempo muy largo con esta dieta?

(d) Se sabe que los niveles muy altos de colesterol en la sangre son un factor de riesgo para las enfermedades del corazón. Suponga que, después de un tiempo largo con la dieta alta en dicho esteroide descrita antes, la persona recibe una dieta muy baja en colesterol, de manera que E cambia a $E = 100$. (El nivel inicial de colesterol en el tiempo inicial de esta dieta es el resultado obtenido en el inciso (c).)

(e) ¿Cuál será el nivel de colesterol en la persona después de 1 día, después de 5 días y después de un tiempo muy largo con la nueva dieta?

(f) Suponga que la persona se queda con la dieta alta en colesterol, pero toma medicamentos que bloquean parte de la absorción de dicha sustancia ingerida con los alimentos, por lo que k_2 cambia a $k_2 = 0.075$. Con el nivel de colesterol del inciso (c), ¿cuál será la proporción del esteroide en la sangre de esta persona después de 1 día, de 5 días y después de un tiempo muy largo?

3. Una taza de chocolate caliente está inicialmente a 170 F y se deja en un cuarto que tiene una temperatura ambiente de 70 F. Suponga que a partir del tiempo t = 0 se enfría a razón de 20 por minuto.

   (a) Suponga que es aplicable la ley de Newton sobre el enfriamiento: “La razón de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura en curso y la temperatura ambiente.” Escriba un problema de valor inicial que modele la temperatura del chocolate caliente.

   (b) ¿Cuánto tiempo le toma al chocolate caliente enfriarse a una temperatura de 110 F?

4. Suponga que va a tener una gran cena con un gran grupo de invitados. Usted decide cocinar 2 galones de chile con carne. La receta indica 2 cucharaditas de salsa picante por galón, pero usted lee mal las instrucciones y pone 2 cucharadas grandes de salsa picante por galón. (Como cada cucharada grande corresponde a 3 cucharaditas, usted ha puesto 6 de éstas por galón, lo que da un total de 12 cucharaditas de salsa picante en el guisado.) Usted no quiere tirar el chile con carne porque el menú no es muy variado (y algunas personas gustan comer este platillo con mucho picante), por lo que termina sirviéndolo. Sin embargo, conforme cada persona se sirve, usted llena la cazuela con frijoles y jitomates sin picante hasta que la concentración de salsa picante concuerda con la de la receta. Suponga que los invitados toman 1 taza de chile con carne por minuto de la cazuela (hay 16 tazas en un galón), ¿cuánto tiempo pasará hasta que el chile con carne tenga la concentración de salsa picante indicada en la receta? ¿Cuántas copas de chile con carne se habrán tomado de la cazuela?

5. Suponga que la señora Marta desea comprar una casa nueva y debe pedir prestado $us. 150000 . Ella quiere una hipoteca a 20 años y tiene dos opciones. Puede pedir prestado el dinero al 7% anual sin puntos o bien al 6.85% por año con un cargo de 3 puntos. (Un “punto” es una comisión del 1% de la cantidad del préstamo que debe pagarse al principio del préstamo. Por ejemplo, una hipoteca con 3 puntos requiere que la señora Marta pague $4500 adicionales para recibir el préstamo.) Como aproximación, suponemos que el interés es compuesto y que los pagos se hacen continuamente. Sea:

   $M(t)$ = cantidad adeudada en el tiempo t (medido en años),

   i = tasa de interés anual, y

   p = pago anual.

   El modelo para la cantidad adeudada es: $\frac{dM}{dt} = iM - p$

   (a) ¿Cuánto debe pagar la señora Marta en cada caso?

   (b) ¿Qué opción es mejor sobre el tiempo del préstamo (suponiendo que la señora Marta no invierte el dinero que hubiese pagado en puntos)?

(c) Si la señora Marta puede invertir los $4500 que hubiese pagado en puntos para la segunda hipoteca al 5% compuesto continuamente, ¿cuál es la mejor opción?

6. Un deposito cilindrico de volumen V_0 esta lleno de aire atmosférico, que se comprime de un modo adiabático (sin intercambio de calor con el medio que le rodea), hasta que su volumen se hace igual a V_1. Calcular el trabajo invertido durante la compresión. Recordar que el proceso adiabático se caracteriza por la ecuación de Poisson: $\frac{p}{p_0} = (\frac{V_0}{V})^k$, donde V_0 es el volumen inicial del gas, p_0 es la presión inicial del mismo, y k es una magnitud constante para el gas dado.

7. Un punto material de masa igual a $1[g]$, se mueve en linea recta debido a la acción de una fuerza que es directamente proporcional al tiempo, calculado desde el instante $t = 0$, e inversamente proporcional a la velocidad del punto. En el instante $t = 10[s]$, la velocidad era igual a $50[\frac{cm}{s}]$, y la fuerza igual a $4[dinas]$. Que velocidad tendrá el punto al cabo de un minuto del comienzo del movimiento?

8. Una bala se introduce en una tabla de $h = 10cm[]$ de espesor, con velocidad $v_0 = 200[\frac{m}{s}]$, traspasandola con velocidad $v_1 = 80[\frac{m}{s}]$. Suponiendo que la resistencia de la tabla al movimiento de la bala es proporcional al cuadrado de la velocidad, hallar el tiempo del movimiento de la bala por la tabla.

9. Un barco retrasa su movimiento por la acción de la resistencia del agua, que es proporcional a la velocidad del barco. La velocidad inicial del barco es de $10[\frac{m}{s}]$, despues de $5[s]$ su velocidad será de $8[\frac{m}{s}]$. Despues de cuanto tiempo la velocidad se hará $1[\frac{m}{s}]$?

10. Determinar el camino C resorrido por un cuerpo durante el tiempo t, si su velocidad es proporcional al trayecto, sabiendo que en $10[s]$ el cuerpo recorre $100[m]$ y en $15[s]$ recorre $200[m]$.

11. El fondo de un depósito de $300[L]$ de capacidad, esta cubierto de sal. Suponiendo que la velocidad con que se disuelve la sal es proporcional a la diferencia entre la concentración en el instante dado, y la concentración de la disolución saturada ($1[Kg]$ de sal para $3[L]$ de agua) y que la cantidad de agua pura dada disuelve $\frac{1}{3}$ de Kg de sal por minuto, hallar la cantidad de sal que contendrá la disolución al cabo de una hora.

12. Cierta cantidad de sustancia que contenia $3[Kg]$ de humedad, se colocó en una habitación de $100[m^3]$ de volumen, donde el aire tenia al principio el 25% de humedad. El aire saturado a esta temperatura, contiene $0.12[Kg]$ de humedad por $1[m^3]$. Si durante el primer día la substancia perdió la mitad de su humedad, ¿ Que cantidad de humedad quedará al finalizar el segundo día ? Nota: La humedad contedida en una sustancia porosa, se evapora al espacio que la rodea, con una velocidad que es proporcional a la cantidad de humedad que hay en la siustancia, y es también proporcional a la diferencia entre la humedad del aire que la rodea y la humedad del aire saturado.

13. Cierta cantidad de una sustancia indisoluble que contiene en sus poros $2[Kg]$ de sal, se somete a la acción de $30[L]$ de agua. Despues de $5[min]$ se disuelve $1[Kg]$ de sal. ¿ Dentro de cuanto tiempo se disolvera el 99% de la cantidad inicial de sal?

14. Una pared de ladrillos tiene $30[cm]$ de espesor. Hallar la dependencia de la temperatura de la distancia del punto hasta el borde exterior de la pared, si la temperatura de la superficie interior de la misma es igual a $20°$ y en la exterior a $0°$. Hallar la cantidad de calorexpedida por pared (por $1[m^2]$) al exterior durante 1 dia. Nota: Según la ley de Newton, la velocidad Q de propagación del calor a través de una superficie A perpendicular al eje OX, es $Q = -kS\frac{dT}{dt}$, donde k es el coeficiente de conductibilidad térmica, T la temperatura, t el tiempo y S el área de la superficie A ($k = 0.0015$)

8. Calificación y Fecha de Entrega

Puntuación : 10

Fecha Defensa: 07/08/2021