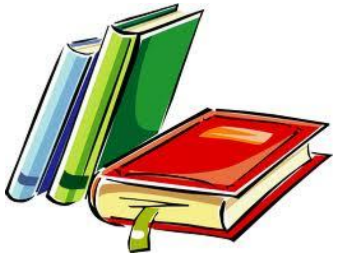
ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA
"Mcal. Antonio José de Sucre"
Prestigio, Disciplina y Mejores Oportunidades

ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA
"Mcal. Antonio José de Sucre"
Prestigio, Disciplina y Mejores Oportunidades

UNIDAD III

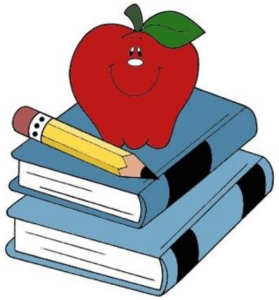
VECTORES ALEATORIOS

DOCENTE: ING. IVETT JACQUELINE TANCARA ZAMBRANA



TEMARIO

1. Variables Aleatorias
2. Funciones de densidad de probabilidad de vectores aleatorios
3. Valor medio y matriz de covarianza
4. Coeficiente de correlación
5. Matriz de varianzas y covarianzas
6. Matriz de correlación
7. Distribución Multinominal



1. VARIABLES ALEATORIAS

En el tema anterior, dado un experimento aleatorio, prestamos atención a una sola característica de dicho experimento, considerando una variable:

$$\boxed{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}}$$

Sin embargo, nos puede interesar estudiar simultáneamente varias características del experimento. Es decir, estudiar varias variables a la vez:

$$\boxed{X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \; ; \; Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \; ; \; Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; \ldots}$$

1. VARIABLES ALEATORIAS

Estudiar las **variables simultáneamente** proporciona mas información que su estudio por separado ya que permite analizar las interrelaciones entre las características involucradas.

Por ejemplo: Al seleccionar una persona

- Se puede observar su **peso** y **altura**; por tanto podemos analizar dos variables por separado o estudiar el comportamiento de las dos variables a la vez.
- Al estudiar estas variables de manera conjunta podemos observar la relación existente entre ambas (normalmente a mayor altura, mayor peso).
- Esta evaluación no se podría apreciar estudiando las variables "**peso**" y "**altura**" de manera independiente.

1. VARIABLES ALEATORIAS

1.1. DEFINICIÓN

Un vector aleatorio es un vector de la siguiente forma:

(x1; x2;………; xn)

“Donde cada coordenada es una **variable aleatoria**”

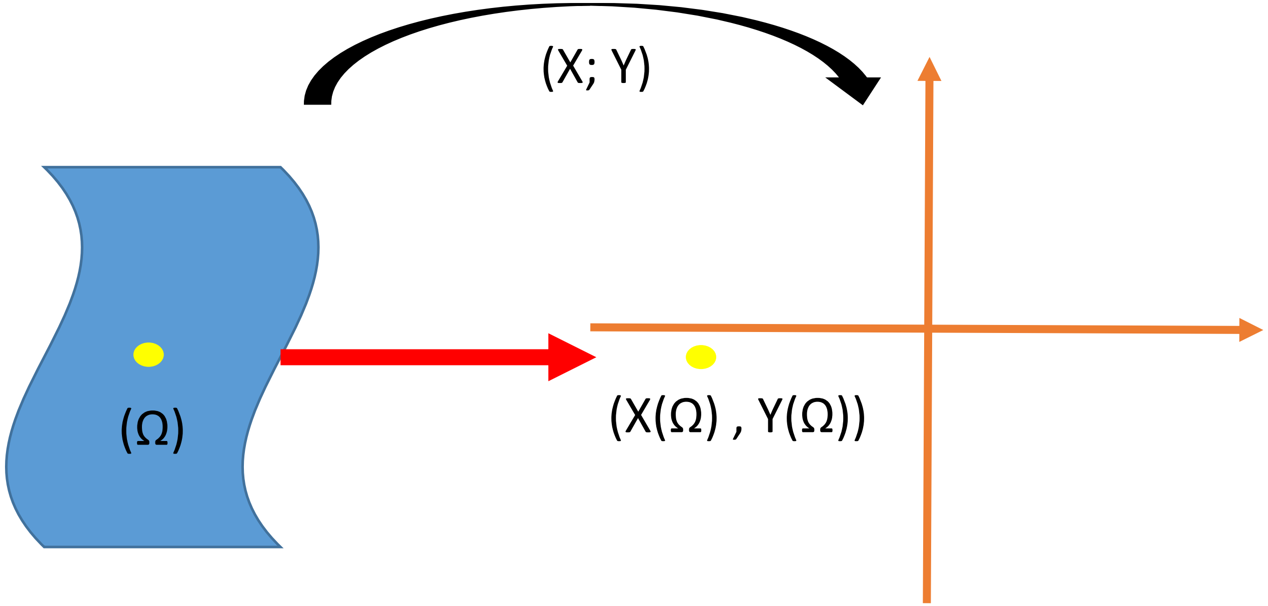
De manera simplificada se manejan los vectores de tipo:

- **Aleatorio discreto:** Cuando todas las variables aleatorias que lo conforman son discretas.
- **Aleatorio continuo:** Cuando todas las variables aleatorias del vector aleatorio son continuas.

1. VARIABLES ALEATORIAS

De manera simplificada se manejaran vectores **Bi-variados**, osea de dos dimensiones; ejm:

Un vector bi variado (X, Y) es una función del espacio muestral del experimento aleatorio Ω en dos dimensiones:



2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

2.1. VECTORES ALEATORIOS CONTINUOS

Recordemos que los vectores aleatorios **discretos** trabajan con suma y los vectores aleatorios **continuos** trabajan con integrales.

Por que las integrales son la versión continua de la suma, cuando integramos básicamente estamos sumando pero de una manera infinita continua.

$$(X, Y)$$

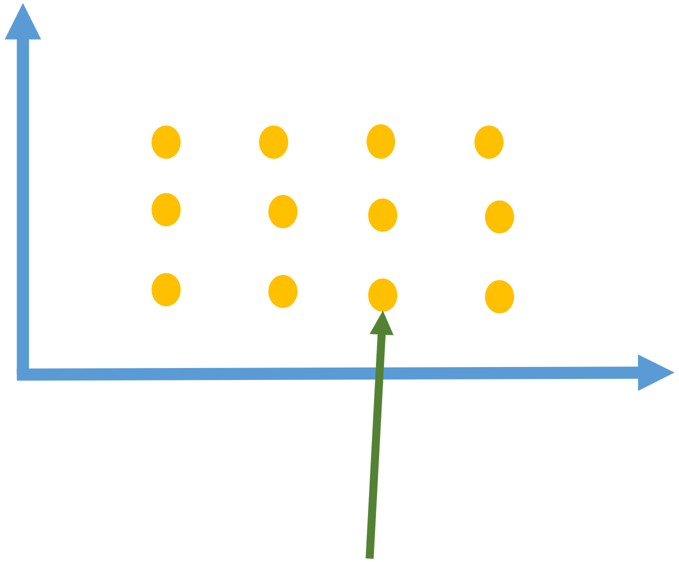
$\downarrow$

VECTOR ALEATORIO

$\left\{ \text{Variables aleatorias continuas} \right\}$

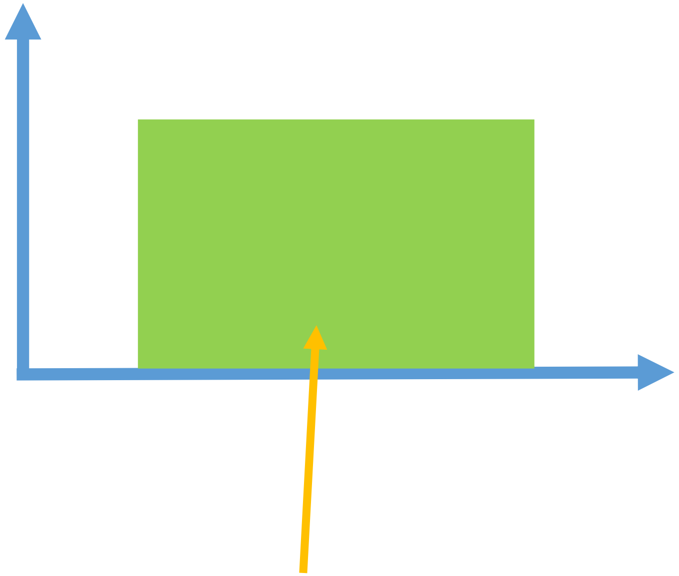
2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Variables aleatorias Discretas



P (X=x ; Y=y) > 0

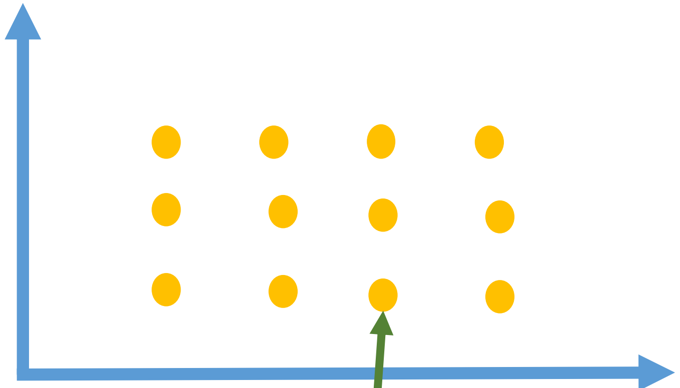
Variables aleatorias continuas



P (X=x ; Y=y) = 0

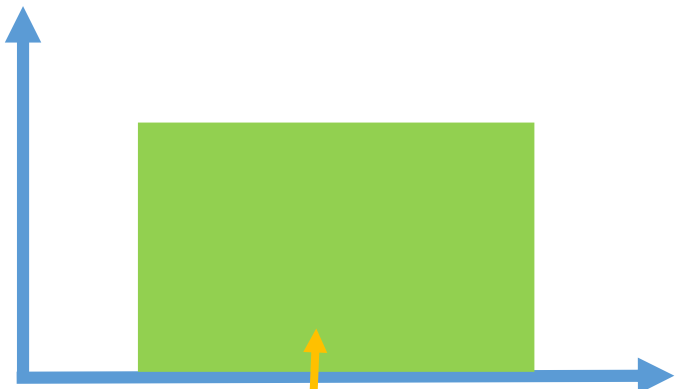
2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Variables aleatorias Discretas



$$\sum_{X} \sum_{Y} f\,(x, y) = 1$$

Variables aleatorias continuas



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{xy}(x, y)dy\ dx\ = 1$$

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Ejemplo:

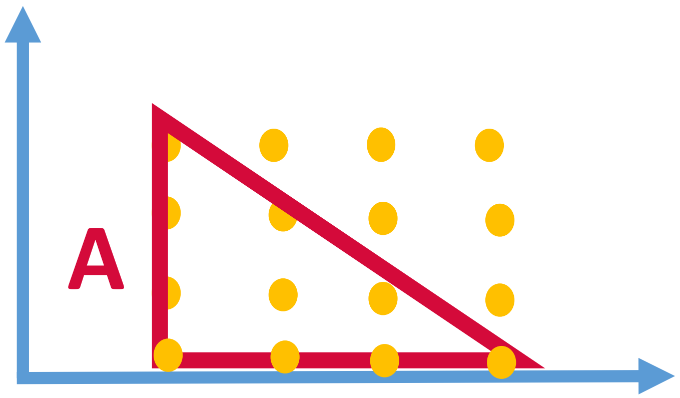
Tengan Y1 y Y2 una función de densidad de probabilidad conjunta dada por:

$$f\,(y1, y2) = \begin{cases} Ky1 * y2 & 0 \le y1 \le 1; 0 \le y2 \le 1 \\ 0 & \textit{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

Encuentre el valor de K que haga de ésta una función de densidad de probabilidad.

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Variables aleatorias Discretas (prob.)



P((X, Y) Є A) =

$$\sum f(X, Y)$$

Variables aleatorias Continuas (prob.)

P((X, Y) Є A) =

$$\int_{(x,y)\in A}^{+\infty} f(x, y)\,dy\,dx$$

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Ejemplo:

Denote con Y1 y Y2 las proporciones de tiempo (en un día hábil) durante las cuales los empleados I y II, respectivamente, realizan sus tareas asignadas. El comportamiento de frecuencia relativa conjunta esta modelado por la función de densidad:

$$f(y1, y2) = \begin{cases} y1 + y2 & 0 \le y1 \le 1; 0 \le y2 \le 1 \\ 0 & \textit{en cualquier otro punto} \end{cases}$$

a. Encuentre P(Y1<1/2 ; Y2>1/4)
b. Encuentre P(Y1+Y2<= 1)

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Las distribuciones marginales y condicionadas son distribuciones unidimensionales asociadas a las de un vector aleatorio. Para ellas podemos calcular probabilidades, medias, varianzas, etc.

Distribuciones marginales

A la distribución por separado, de cada una de las variables que componen el vector aleatorio, se le llama distribución marginal.

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Vectores aleatorios discretos

Densidad marginal de X

$$f(x) = \sum_{y} f(x, y)$$

Densidad marginal de Y

$$f(y) = \sum_{x} f(x, y)$$

Vectores aleatorios continuos

Densidad marginal de X

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dy$$

Densidad marginal de Y

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,dx$$

2. FUNCIONES DE DENSIDAD DE VECTORES ALEATORIOS

Ejemplo:

Sea $f(y_1, y_2) = 4\, y_1 * y_2$ Si $0 <= y_1 <= 1$ $0 <= y_2 <= 1$

Encuentra las marginales $f(y_1)$ y $f(y_2)$

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

Trabajamos con un vector aleatorio con n componentes X1, X2, . . . , Xn representándolo como un vector columna:

$$x = \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ xn \end{pmatrix}$$

3.1. VALOR MEDIO O LA ESPERANZA MEDIA

El vector de medias de un vector aleatorio X es aquel cuyas componentes son las esperanzas de cada componente de X:

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} E(x1) \\ E(x2) \\ \cdot \\ \cdot \\ E(xn) \end{pmatrix}$$

Dado un vector aleatorio bidimensional (X, Y), podemos hallar la esperanza de una transformación suya como:

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

Vectores aleatorios discretos (media)

Sea h(x,y) : |R2→ |R

$$E\big(h(x,y)\big) = \sum_{x}\sum_{y} h(x,y) * f(x,y)$$

Vectores aleatorios continuos (media)

$$E\big(h(x,y)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(x,y) * f(x,y)\,dy\,dx$$

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

Ejemplo:

Sea $f(y1,y2) = K\,y1y2$ Si $0 <= y1 <= 1; 0 <= y2 <= y1$

- Hallar el valor de k en función de la integración
- Hallar el valor de la esperanza media de dicha función de densidad para la expresión (y2/y1)

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

Ejemplo

Sean **X, Y** variables aleatorias continuas cuya función de densidad de probabilidad conjunta es

$$f(x,y) = \frac{2}{3}(x + 2y)\ ,\ 0 \leq x,\ y \leq 1$$

Calcule la media de la suma **X + Y**:

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

3.2. COVARIANZA

La **covarianza** es un valor que indica el grado de variación conjunta de dos variables aleatorias respecto a sus medias; por lo tanto la covarianza es una medida de la relación lineal entre dos variables:

$$\boxed{COV(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]}$$

Equivalente a:

$$\boxed{COV(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]}$$

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

Propiedades de la covarianza:

- Si X y Y son independientes:

$$COV(X,Y) = 0$$

$$E[XY] = E[X]\,E[Y]$$

- Si COV (X,Y) = 0 no implica que X y Y sean independientes

- Si COV(aX+b, cY+d) se entiende = acCOV(X,Y)

3. VALOR MEDIO Y MATRIZ DE COVARIANZA

Ejemplo

Sean **X, Y** variables aleatorias continuas cuya función de densidad de probabilidad conjunta es

$$f(x,y) = \frac{2}{3}(x+2y)\ ,\ 0 \le x,\ y \le 1$$

Encuentre la covarianza entre X, Y

4. COEFICIENTE DE CORRELACIÓN

El **coeficiente de correlación de Pearson** es una medida de dependencia lineal entre dos variables aleatorias cuantitativas y reduce el rango de la covarianza.

A diferencia de la covarianza, la **correlación de Pearson** es independiente de la escala de medida de las variables; Por lo tanto la correlación es una medida adimensional de la relación lineal entre dos variables:

$$\boxed{\rho(x,y) = \frac{COV\ (X,Y)}{\sqrt{Var[X]}\ \sqrt{Var[Y]}}}$$

5. MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS

Es una representación ordenada de las varianzas y covarianzas entre las variables aleatorias.

5.1. DEFINICIÓN

Sean X, Y variables aleatorias conjuntas (discretas o continuas)

$$\sigma_x{}^2 = V(x) \quad ; \quad \sigma_y{}^2 = \mathrm{V(y)} \qquad \text{Varianzas}$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = COV\ (X,Y) = COV\ (Y,X) \qquad Covarianzas$$

Entonces la matriz de varianzas y covarianzas es:

$$\boxed{(\sigma_{xy}) = \begin{pmatrix} \sigma_x{}^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y{}^2 \end{pmatrix}}$$

5. MATRIZ DE VARIANZAS Y COVARIANZAS

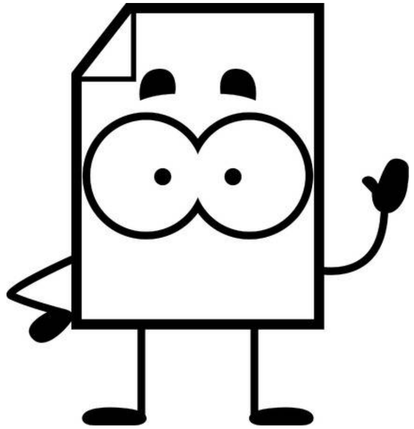
Esta matriz es simétrica y contiene en la diagonal las varianzas de cada variable. Los otros componentes son las covarianzas entre las dos variables: $\boldsymbol{\sigma_{xy}} = \boldsymbol{\sigma_{yx}}$

EJEMPLO:

Sean X,Y variables aleatorias continuas, cuya función de distribución de probabilidad conjunta es:

$$f(x, y) = [Kxy] \qquad 0 < x < 7; \quad 1 < y < 5$$

- ✓Encuentre la matriz de varianzas y covarianzas
- ✓Hallar el coeficiente de correlación con



6. MATRIZ DE CORRELACIÓN

Es una representación ordenada de los valores de correlación entre las variables aleatorias.

6.1. DEFINICIÓN

Sean X e Y variables aleatorias conjuntas (discretas y continuas); la matriz de correlación es:

$$\boxed{[\rho_{xy}] = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy} \\ \rho_{yx} & 1 \end{pmatrix}}$$

Esta matriz es simétrica y contiene el valor de 1 en la diagonal. Los otros componentes son valores de correlación entre las variables: ρ_{xy}=ρ_{yx}

7. DISTRIBUCIÓN MULTINOMINAL

Es una generalización de la distribución binomial. Se presenta cuando los resultados de cada ensayo tienen mas de dos resultados posibles. Se supondrá que los ensayos son independientes y que la probabilidad se mantiene constante para cada tipo de resultado.

7.1. DISTRIBUCIÓN MULTINOMINAL

Sean: **n=** cantidad de ensayos realizados

k= cantidad de resultados diferentes que se pueden obtener en cada ensayo

Sean:

x1: cantidad de resultados del tipo 1

.

xk: cantidad de resultados del tipo k

7. DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

Tales que $x_1 + x_2 + . . . + x_k = n$

Sean las probabilidades correspondientes a cada tipo de resultado

p_1: Probabilidad que el resultado sea de tipo 1
p_2: Probabilidad que el resultado sea de tipo 2
. . .
p_k: Probabilidad que el resultado sea de tipo k

Tales que $p_1 + p_2 + . . . + p_k = 1$

Las variables aleatorias $X_1, X_2, . . . X_k$ tienen distribución multinomial.

Entonces, la distribución de probabilidad de $X_1, X_2, . . . X_k$ está dada por la función:

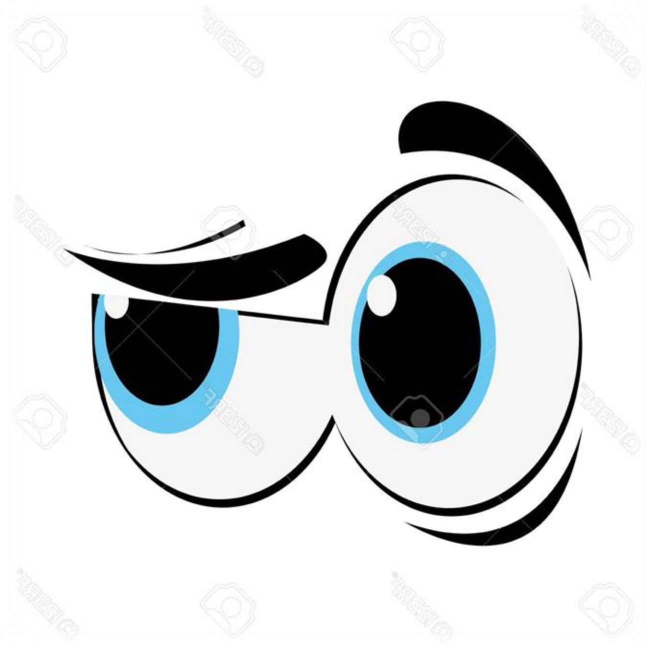
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \binom{n}{x_1, x_2, \ldots, x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k} = \frac{n!}{x_1!x_1!\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$$

$x_1, x_2, . . . , x_k = 0, 1, 2, . . . , n; \quad x_1 + x_2 + . . . + x_k = n$

8. APLICACIÓN

Si la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias discretas **X, Y** está dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2x+y), & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0, & \text{para otros valores}\end{cases}$$



Encontrar:

- ✓ Corroborar que pertenece a un vector continuo
- ✓ Hallar las distribuciones marginales
- ✓ La media del vector
- ✓ Covarianza
- ✓ Coeficiente de correlación
- ✓ Matriz de varianzas y covarianzas
- ✓ Matriz de correlación