Unidad II - Modelacion E.D.O.

Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

January 30, 2022

El Problema - El modelo

El camino hasta ahora

- Conceptualizamos
- Clasificamos
- Comprendimos el significado de la solución de una ecuación
- Dimos pautas para formular las Ecuaciones Diferenciales

El Problema - El modelo

Hoy veremos

- Ejemplos de modelado
- Resolución intuitiva de una EDO formulada
- Implementaremos y analizaremos el resultado con datos.
- Analizaremos las limitaciones del modelo
- Añadiremos algunas características a nuestro modelo
- Veremos la importancia de revisar técnicas para la resolución de la EDO.

Conflicto - Crecimiento Poblacional

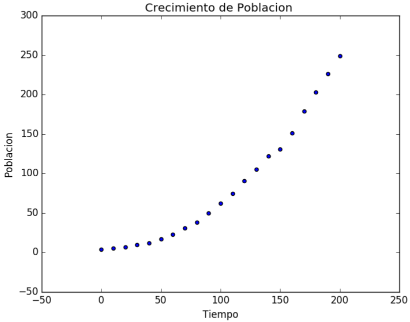
Pregunta

¿Como podemos generar un modelo que nos permita predecir el crecimiento de la población de los estados unidos? ¿Que necesitamos para poder generar el modelo?
Básicamente nos centraremos en analizar...
"El **cambio de población**, al transcurrir el tiempo".

Modelo de Malthus

Consideremos los siguientes datos acerca del crecimiento de población de U.S.A. desde 1790.

Año	Población (en millones)
1790,	3.9
1800,	5.3
1810,	7.2
1820,	9.6
1830,	12.0
1840,	17.0
1850,	23.0
1860,	31.0
1870,	38.0
1880,	50.0
1890,	62.0
1900,	75.0
1910,	91.0
1920,	105.0
1930,	122.0
1940,	131.0
1950,	151.0
1960,	179.0
1970,	203.0
1980,	226.0
1990,	249.0



Modelos

Modelo de Crecimiento Malthusiano

"La población, cuando no se controla, aumenta en una proporción geométrica." (Thomas Malthus, Un ensayo sobre el principio de la población, 1798)

Suposición

La tasa de crecimiento de la población es proporcional a la cantidad de población.

- Identifica las variables
- Utiliza las variables para expresar la suposición

Modelos

Modelo de Crecimiento Malthusiano

Suposición

La tasa de crecimiento de la población es proporcional a la cantidad de población.

Variables:

- t : **Tiempo**, variable independiente
- P : **Población**, variable dependiente

Entendemos la tasa de crecimiento como el cambio de cantidad de población con respecto del tiempo: $\frac{dP}{dt}$.
Por tanto la suposición se traduce como : $\frac{dP}{dt} \alpha P$ es decir $\frac{dP}{dt} = kP$ donde k es un coeficiente de crecimiento.

Conflicto - Crecimiento Poblacional

? Pregunta

Ya formulamos nuestra Ecuación diferencial, intuitivamente vimos que la manera de despejar la ecuación es tener al lado derecho la variable (dependiente) que queremos despejar y en le lado izquierdo la variable independiente, con ello estamos en condiciones de aplicar la antiderivada, es decir integramos ambos miembros con respecto de t.

- Encontrar la solución general de nuestro modelo propuesto $\frac{dP}{dt} = kP$.

Modelos

Modelo de Crecimiento Malthusiano

Intuitivamente podemos resolver esta Ecuación Diferencial de forma analítica:

Resolución Analítica

- $(\frac{1}{P})(\frac{dP}{dt}) = k$
- $\int(\frac{1}{P})(\frac{dP}{dt})dt = \int kdt$
- $ln(\frac{1}{P}) = kt + c$
- $P_{(t)} = e^{kt+c}$
- $P_{(t)} = e^{kt}e^{c}$
- $\boxed{P_{(t)} = Ce^{kt}}$

Conflicto - Crecimiento Poblacional

Pregunta

Ya tenemos la solución general de nuestro modelo, es decir, podemos conseguir la familia de funciones que satisfacen la ecuación. Dado un problema a valor inicial, donde la Población inicial es P_0, es decir $P_{(t=0)} = P_0$.

- Que necesitamos para hallar la solución particular?
- Encontrar la solución particular de nuestro modelo propuesto que cumpla las condiciones iniciales dadas

Modelos

Modelo de Crecimiento Malthusiano

$$\boxed{P_{(t)} = Ce^{kt}}$$

Es la **Solución General** de la Ecuación Diferencial, puesto que puede ser una función $P_{(t)}$ para cualquier constante arbitraria C. Para una situación especifica, podemos pensar en que en $t = 0$ existe una población inicial P_0:

- $P_{(0)} = Ce^{k(0)}$
- $P_{(0)} = C$
- $\boxed{P_{(t)} = P_0 e^{kt}}$

Es decir, sabiendo una población inicial P_0, podemos formular la **solución particular** para esa condición inicial.

Modelo de Malthus

Consideremos los siguientes datos acerca del crecimiento de población de U.S.A. desde 1790, y utilicemos nuestro modelo para ver ver como predice el crecimiento de población.

$$\boxed{P_{(t)} = P_0 e^{kt}}$$

Año	Población (en millones)
1790,	3.9
1800,	5.3
1810,	7.2
1820,	9.6
1830,	12.0
1840,	17.0
1850,	23.0
1860,	31.0
1870,	38.0
1880,	50.0
1890,	62.0
1900,	75.0
1910,	91.0
1920,	105.0
1930,	122.0
1940,	131.0
1950,	151.0
1960,	179.0
1970,	203.0
1980,	226.0
1990,	249.0

Conflicto - Crecimiento Poblacional

Pregunta

Ya tenemos casi listo nuestro modelo, pero para realizar la simulación necesitamos el valor de la constante k!!!

- Que necesitaríamos para encontrar el valor del parámetro k?
- Encontrar el valor de k utilizando nuestra solución particular y los datos del censo
- Realice la simulación del modelo y compárelos con los datos reales, utilice para ello gráficas, puede utilizar python como herramienta para la simulación.

Modelo de Malthus

Consideremos los siguientes datos acerca del crecimiento de población de U.S.A. desde 1790, y utilicemos nuestro modelo para ver ver como predice el crecimiento de población.

$$\boxed{P_{(t)} = P_0 e^{kt}}$$

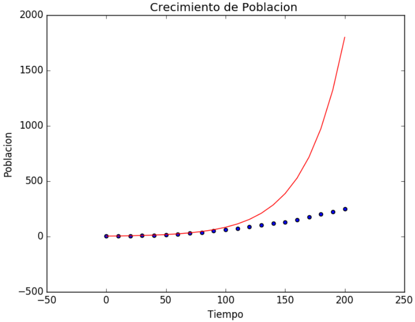
Año	Población (en millones)
1790,	3.9
1800,	5.3
1810,	7.2
1820,	9.6
1830,	12.0
1840,	17.0
1850,	23.0
1860,	31.0
1870,	38.0
1880,	50.0
1890,	62.0
1900,	75.0
1910,	91.0
1920,	105.0
1930,	122.0
1940,	131.0
1950,	151.0
1960,	179.0
1970,	203.0
1980,	226.0
1990,	249.0

- $P_0 = 3.9$
- $P_{(t=10)} = 5.3$
- $5.3 = 3.9e^{10k}$
- $ln(\frac{5.3}{3.9}) = 10k$
- $k = 0.3067$ $\boxed{P_{(t)} = 3.9e^{0.3067t}}$

Modelo de Malthus

$$\boxed{P_{(t)} = 3.9e^{0.3067t}}$$

Año	Real	Estimada
1790.00	3.90	3.90
1800.00	5.30	5.30
1810.00	7.20	7.20
1820.00	9.60	9.79
1830.00	12.00	13.30
1840.00	17.00	18.08
1850.00	23.00	24.57
1860.00	31.00	33.38
1870.00	38.00	45.37
1880.00	50.00	61.65
1890.00	62.00	83.79
1900.00	75.00	113.86
1910.00	91.00	154.74
1920.00	105.00	210.29
1930.00	122.00	285.77
1940.00	131.00	388.36
1950.00	151.00	527.77
1960.00	179.00	717.23
1970.00	203.00	974.69
1980.00	226.00	1324.58
1990.00	249.00	1800.07



Ejercicios de Discución

? Desintegración radioactiva

A continuación se considera el fenómeno de la desintegración radiactiva que, a partir de la experimentación, sabemos que se comporta de acuerdo con la ley:

"La velocidad a la que se desintegra una cantidad de un isótopo radiactivo es proporcional a la cantidad de isótopo presente. La constante de proporcionalidad λ sólo depende de qué isótopo radiactivo se utilice".

- **Escriba un modelo para la desintegración de un isótopo radioactivo particular**

Ejercicos de Discución

Desintegración radioactiva

La vida media de un isótopo radiactivo es la cantidad de tiempo que se necesita para que una cantidad de material radiactivo se descomponga hasta la mitad de su cantidad original. La vida media de Carbono 14 (C-14) es de 5730 años.

- **Determine el parámetro de velocidad de decaimiento λ Para C-14 en unidades de yr^{-1}**

Ejercicos de Discución

Pregunta

Vimos las limitaciones de nuestro modelo de crecimiento de población:

- Que podemos tomar en cuenta para ajustar de mejor manera a la data del crecimiento poblacional en Estados Unidos?
- Tomemos en cuenta los recursos, por ejemplo el tamaño del territorio, o los alimentos que pueden abasteces a una especie determinada, estos son limitados por supuesto, ¿Como modelamos estos recursos, tal que sea coherente con el análisis comparativo del anterior modelo con la data real?

Modelo Logístico de Crecimiento

Modificamos los supuestos anteriores:

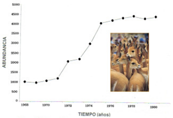


Figura 6.2. Censos de la población de vicuñas en la zona nuclear de la Reserva Nacional Pampa Galeras, Perú.

Supuestos

- Si la **población es pequeña**, su tasa de crecimiento es proporcional al tamaño de la población.
- Si la **población es demasiado grande para ser soportada por su entorno y recursos**, la población disminuirá. Es decir, la razón de crecimiento es negativa.

Modelo Logístico de Crecimiento

Podemos reescribir nuestras hipótesis:

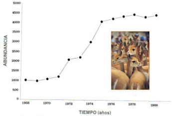


Figura 6.2. Censos de la población de vicuñas en la zona nuclear de la Reserva Nacional Pampa Galeras, Perú.

Supuestos

- $\frac{dP}{dt} = kP$ si P es pequeña
- $\frac{dP}{dt} < 0$ si $P > N$ donde N es la capacidad de soporte.

Como mejoramos el modelo algebraicamente?

Ejercicos de Discución

Pregunta

Ya comprendido el comportamiento del sistema:

- Formalizar modelo como expresión que cumpla el comportamiento descrito anteriormente.

Modelo Logístico de Crecimiento

Podemos reescribir nuestras hipótesis:

Formulación

- $\frac{dP}{dt} = k(algo)P$
- Buscamos *algo* que cuando $P < N$ la expresión sea positiva, y para $P > N$ sea negativa.

Modelo Logístico de Crecimiento

Podemos reescribir nuestras hipótesis:

Formulación

Que tal *algo* $= (1 - \frac{P}{N})$

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = k(1 - \frac{P}{N})P}$$

Ecuación diferencial, ordinaria, de primer orden, NO lineal.

Modelo Logístico de Crecimiento

Analicemos la ecuación planteada:

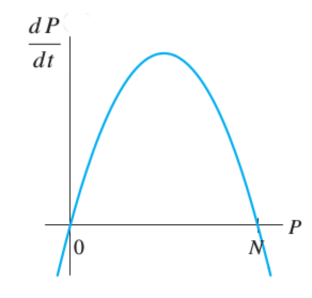
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = k(1 - \frac{P}{N})P}$$

? Pregunta

- Grafica la función
- Que conclusiones podemos sacar de la gráfica?

Modelo Logístico de Crecimiento

Grafica $\frac{dP}{dt}$ vs P



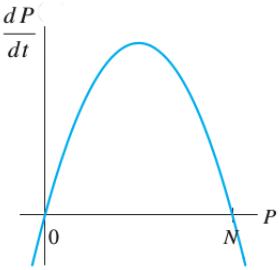
$$\boxed{\frac{dP}{dt} = k(1 - \frac{P}{N})P}$$

Modelo Logístico de Crecimiento

? Pregunta

- Recuerdas que ocurría cuando la derivada se igualaba a 0?
- Encuentra los valores para $\frac{dP}{dt} = 0$
- Las raíces de esta ecuación se denominan puntos de equilibrio y son soluciones también de la Ecuación Diferencial.
- Que ocurre con la población en esos puntos?
- Podemos esbozar la gráfica $P - t$?

Modelo Logístico de Crecimiento



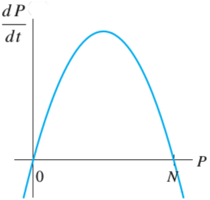
Análisis Cualitativo

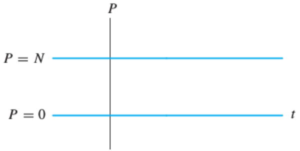
Que podemos decir del comportamiento de la solución? **Análisis Cualitativo**:

- $0 = k(1 - \frac{P}{N})P$
- $P_{=}0$ entonces $\frac{dP}{dt} = 0$ para todo t
- $(1 - \frac{P}{N}) = 0$
- $P = N$ entonces $\frac{dP}{dt} = 0$ para todo t

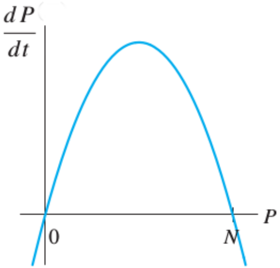
Modelo Logístico de Crecimiento

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)}$$





Modelo Logístico de Crecimiento



Continuando con el **Análisis Cualitativo**:

- Si $0 < P_{(t=0)} < N$ entonces $\frac{dP}{dt} > 0$. Esto quiere decir que $P_{(t)}$ incrementa.
- Si $P_{(t=0)} > N$ entonces $\frac{dP}{dt} < 0$. Esto quiere decir que $P_{(t)}$ decrementa.

Ejercicos de Discución

? Población de Peces

Supongamos que una especie de peces en un lago particular tiene una población P que es modelada por el modelo de población logística con tasa de crecimiento k , capacidad de carga N y un tiempo t medido en años. Ajuste el modelo para tener en cuenta 100 peces que se cosechan cada año.

- **Determine la expresión para:** $\frac{dP}{dt}$

Ejercicos de Discución

? Población de Peces

Supongamos que el parámetro de tasa de crecimiento $k = 0.3$, y la capacidad de carga es $N = 2500$. En el modelo de población logística del ejercicio anterior. Supongamos $P_{(0)} = 2500$

Si se pescan 100 peces cada año:

Qué predice el modelo para el comportamiento a largo plazo de la población de peces?

- La población de peces se extinguirá.
- La población de peces se acercará a 396
- La población de peces se acercará a 2104
- La población de peces se acercará a 2400

Conclusión

En esta Clase:

- Estudiamos el caso de modelo de crecimiento poblacional
- Identficamos variables, supuestos y tasa de cambio.
- Traducimos los supuestos en términos de las variables identificadas.
- Resolvimos intuitivamente la ecuación.
- Analizamos y validamos el modelo propuesto con datos reales.
- Dimos pautas para el análisis cualitativo del modelo.
- Ahora nos preguntamos: **Como resolvemos analíticamente las Ecuaciones Diferenciales**