EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 5.1

1. Considere los tres sistemas

(i) $$\frac{dx}{dt} = 2x + y \qquad \frac{dy}{dt} = -y + x^2$$

(ii) $$\frac{dx}{dt} = 2x + y \qquad \frac{dy}{dt} = y + x^2$$

(iii) $$\frac{dx}{dt} = 2x + y \qquad \frac{dy}{dt} = -y - x^2.$$

Los tres sistemas tienen un punto de equilibrio en (0, 0). ¿Cuáles dos sistemas tienen planos fase con el mismo "retrato local" cerca de (0, 0)? Justifique su respuesta. [*Sugerencia:* Se requieren muy pocos cálculos para este ejercicio, pero no deje de dar una justificación completa.]

2. Considere los tres sistemas siguientes:

(i) $$\frac{dx}{dt} = 3\operatorname{sen} x + y \qquad \frac{dy}{dt} = 4x + \cos y - 1$$

(ii) $$\frac{dx}{dt} = -3\operatorname{sen} x + y \qquad \frac{dy}{dt} = 4x + \cos y - 1$$

(iii) $$\frac{dx}{dt} = -3\operatorname{sen} x + y \qquad \frac{dy}{dt} = 4x + 3\cos y - 3.$$

Los tres sistemas tienen un punto de equilibrio en (0, 0). ¿Cuáles son los dos sistemas que tienen planos fase con el mismo "retrato local" cerca de (0, 0)? Justifique su respuesta. [*Sugerencia:* Se requieren muy pocos cálculos para este ejercicio, pero no deje de exponer sus argumentos.]

3. Para el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + x^2.$$

(a) Encuentre el sistema linearizado para el punto de equilibrio (0, 0).

(b) Clasifique (0, 0) (como fuente, sumidero, centro, . . .).

(c) Esboce el plano fase para el sistema no lineal cerca de (0, 0).

(d) Repita los incisos (a) a (c) para el punto de equilibrio en (2, 4).

4. En el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x$$
$$\frac{dy}{dt} = -4x^3 + y.$$

(a) Demuestre que el origen es el único punto de equilibrio.

(b) Encuentre el sistema linearizado en el origen.

(c) Clasifíquelo y esboce su plano fase.

5. Considere el sistema en el ejercicio 4.

(a) Encuentre la solución general de la ecuación $dx/dt = -x$. [*Sugerencia:* La solución es tan fácil como parece ser.]

(b) Usando la solución del inciso (a) en vez de x, determine la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dt} = -4x^3 + y.$$

[*Sugerencia:* Esto proporciona un repaso de las ecuaciones lineales en la sección 1.8.]

(c) Use los resultados de los incisos (a) y (b) para obtener la solución general del sistema.

(d) Encuentre las curvas solución del sistema que tienden al origen cuando $t \to \infty$.

(e) Encuentre las curvas solución del sistema que se aproximan al origen cuando $t \to -\infty$.

(f) En el plano fase, esboce las curvas solución correspondientes a esas soluciones. Son las separatrices.

(g) Compare el esbozo del sistema linearizado que obtuvo en el ejercicio 4 contra un bosquejo de las soluciones separatrices para el punto de equilibrio en el origen para este sistema. ¿En qué se parecen las dos gráficas? ¿Cómo difieren?

6. Para el modelo de población de especies en competencia

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy$$

estudiado en esta sección, mostramos que el punto de equilibrio $(1, 1)$ es un punto silla.

(a) Encuentre el sistema linearizado cerca de cada uno de los otros puntos de equilibrio.

(b) Clasifique cada punto de equilibrio (como fuente, sumidero, punto silla, etcétera).

(c) Esboce el plano fase de cada sistema linearizado.

(d) Dé una breve descripción del plano fase cerca de cada punto de equilibrio del sistema no lineal.

En los ejercicios 7-16, restringimos la atención al primer cuadrante ($x, y \geq 0$). Para cada sistema,

(a) encuentre y clasifique todos los puntos de equilibrio (en el primer cuadrante),

(b) esboce el plano fase del sistema cerca de cada punto de equilibrio, y

(c) describa los comportamientos de las soluciones cerca de cada punto de equilibrio.

7.
$$\frac{dx}{dt} = x(-x - 3y + 150)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-2x - y + 100)$$

8.
$$\frac{dx}{dt} = x(10 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(30 - 2x - y)$$

9.
$$\frac{dx}{dt} = x(100 - x - 2y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(150 - x - 6y)$$

10.
$$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 100)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

11. $$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 40)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

12. $$\frac{dx}{dt} = x(-4x - y + 160)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

13. $$\frac{dx}{dt} = x(-8x - 6y + 480)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-x^2 - y^2 + 2500)$$

14. $$\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(y - x^2)$$

15. $$\frac{dx}{dt} = x(2 - x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(y - x)$$

16. $$\frac{dx}{dt} = x(x - 1)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(x^2 - y)$$

17. Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = -x^3$$
$$\frac{dy}{dt} = -y + y^2.$$

El sistema tiene puntos de equilibrio en $(0, 0)$ y $(0, 1)$.

(a) Encuentre el sistema linearizado en $(0, 0)$.

(b) Determine los eigenvalores y eigenvectores y dibuje el plano fase del sistema linearizado en $(0, 0)$.

(c) Encuentre el sistema linearizado en $(0, 1)$.

(d) Calcule los eigenvalores y eigenvectores y esboce el plano fase del sistema linearizado en $(0, 1)$.

(e) Bosqueje el plano fase del sistema no lineal. [*Sugerencia:* El sistema se desacopla; dibuje entonces primero una línea fase para cada una de las ecuaciones individuales.]

(f) ¿Por qué se ven tan diferentes los planos fase para los sistemas lineales y no lineal cerca de los puntos de equilibrio?

18. Si un sistema no lineal depende de un parámetro, entonces los puntos de equilibrio pueden cambiar cuando varía el parámetro. En otras palabras, cuando éste se modifica puede ocurrir una bifurcación. Considere la familia paramétrica

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - a$$
$$\frac{dy}{dt} = -y(x^2 + 1),$$

donde a es el parámetro.

(a) Demuestre que el sistema no tiene puntos de equilibrio si $a < 0$.

(b) Compruebe que tiene dos puntos de equilibrio si $a > 0$.

(c) Demuestre que sólo posee un punto de equilibrio si $a = 0$.

(d) Encuentre la linearización del punto de equilibrio para $a = 0$ y calcule los eigenvalores de este sistema lineal.

Observación: Cuando el parámetro a crece desde $a = 0$, el sistema cambia de cero a dos puntos de equilibrio. Decimos que el sistema tiene una bifurcación en $a = 0$ y que $a = 0$ es un valor de bifurcación del parámetro.

19. Para continuar el estudio del sistema no lineal dado en el ejercicio 18,

(a) use el campo de direcciones para esbozar el plano fase para el sistema si $a = -1$,

(b) emplee el campo de direcciones y la linearización en el punto de equilibrio para bosquejar el plano fase para $a = 0$, y

(c) utilice el campo de direcciones y la linearización en los puntos de equilibrio para dibujar el plano fase para $a = 1$.

Observación: La transición de un sistema sin puntos de equilibrio a otro con un punto silla y un sumidero, a través de un punto de equilibrio con cero como eigenvalor, es típica de bifurcaciones que generan puntos de equilibrio.

En los ejercicios 20-25, cada sistema depende del parámetro a. En cada ejercicio,

(a) encuentre los puntos de equilibrio,

(b) determine todos los valores de a donde ocurre una bifurcación, y

(c) en un corto párrafo completo con figuras, describa el plano fase en, antes y después de cada valor de bifurcación.

20. $$\frac{dx}{dt} = y - x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = y - a$$

21. $$\frac{dx}{dt} = y - x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = a$$

22. $$\frac{dx}{dt} = y - x^2$$
$$\frac{dy}{dt} = y - x - a$$

23. $$\frac{dx}{dt} = y - ax^3$$
$$\frac{dy}{dt} = y - x$$

24. $$\frac{dx}{dt} = y - x^2 + a$$
$$\frac{dy}{dt} = y + x^2 - a$$

25. $$\frac{dx}{dt} = y - x^2 + a$$
$$\frac{dy}{dt} = y + x^2$$

26. El sistema

$$\frac{dx}{dt} = x(-x - y + 70)$$
$$\frac{dy}{dt} = y(-2x - y + a)$$

es un modelo para un par de especies en competencia, en el cual dy/dt depende del parámetro a. Encuentre los dos valores de bifurcación de a. Describa el destino de las poblaciones x y y antes y después de cada bifurcación.

27. Suponga que dos especies X y Y se introducirán a una isla. Se sabe que ambas compiten entre sí, pero se desconoce la naturaleza precisa de su interacción. Suponemos que las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ de X y Y, respectivamente, son modeladas por un sistema

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$
$$\frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

(a) Suponga $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$; esto significa que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio. ¿Cómo correlacionaría esto con la capacidad de X y Y para migrar a la isla?

(b) Si una pequeña población está formada por una sola especie que se reproduce rápidamente, ¿qué puede concluir acerca de los valores de $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ en $(0, 0)$?

(c) Como X y Y compiten por los recursos, la presencia de cualquiera de las especies disminuirá la razón de crecimiento de la otra población. ¿Nos dice algo lo anterior acerca de $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ en $(0, 0)$?

(d) Usando las hipótesis de los incisos (a) al (c), ¿qué tipo(s) de punto de equilibrio sería $(0, 0)$? [Podría haber más de una posibilidad. Especifíquelas todas.]

(e) Para cada una de las posibilidades del inciso (d), esboce un plano fase cerca de $(0, 0)$.

Justifique todas sus respuestas.

28. Para las dos especies X y Y del ejercicio 27, suponga que tanto X como Y se reproducen muy lentamente, y que la competencia entre ambas es muy intensa.

(a) ¿Qué puede usted concluir acerca de $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ en $(0, 0)$?

(b) ¿Cuál es su conclusión respecto de $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ en $(0, 0)$?

(c) ¿Qué tipo(s) de punto de equilibrio puede ser $(0, 0)$? [Puede haber más de una probabilidad. Si es así, especifíquelas todas.]

(d) Para cada una de las posibilidades anotadas en el inciso (c), esboce un plano fase cerca de $(0, 0)$.

Recuerde justificar todas sus respuestas.

29. Para las especies X y Y de los ejercicios 27 y 28, supongamos que X se reproduce muy rápidamente en la isla si no hay ninguna Y presente, y que la especie Y se reproduce lentamente si no hay ninguna X presente. También considere que la tasa de crecimiento de X disminuye significativamente por la presencia de Y, pero que Y es indiferente a la población de X.

(a) ¿Qué puede decir acerca de $\partial f/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ en $(0, 0)$?

(b) ¿Y respecto de $\partial f/\partial y$ y $\partial g/\partial x$ en $(0, 0)$?

(c) ¿Cuáles son los posibles tipos del punto de equilibrio en $(0, 0)$? [Puede haber más de una probabilidad. Si es así, especifíquelas todas.]

(d) Para cada uno de los tipos anteriores, dibuje el plano fase cerca de $(0, 0)$.

Justifique todas sus respuestas.

30. Imagine que dos países similares Y y Z están comprometidos en una carrera armamentista. Sean $y(t)$ y $z(t)$ el tamaño de los acopios de armamentos de Y y Z, respectivamente. Modelamos la situación con el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dy}{dt} = h(y, z)$$
$$\frac{dz}{dt} = k(y, z).$$

Suponga que todo lo que sabemos acerca de las funciones h y k son las dos hipótesis:

(i) Si el acopio de armas del país Z no está cambiando, entonces cualquier incremento en el acopio de Y da como resultado un decremento en la razón de aumento de producción de armas del país Y. Lo mismo es cierto para el país Z.

(ii) Si cualquier país aumenta su acopio, el otro responde incrementando su razón de producción de armas.

(a) ¿Qué implican las hipótesis respecto de $\partial h/\partial y$ y $\partial k/\partial z$?

(b) ¿Y qué implican acerca de $\partial h/\partial z$ y $\partial k/\partial y$?

(c) ¿Qué puntos de equilibrio son posibles para este sistema? Justifique su respuesta. [*Sugerencia:* Suponga que tiene un punto de equilibrio. ¿Qué implican sus resultados en los incisos(a) y (b) acerca de la matriz jacobiana en ese punto?]

5.2 ANÁLISIS CUALITATIVO

El proceso de linearización analizado en la sección 5.1 nos da un procedimiento bastante efectivo para entender el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal cerca de un punto de equilibrio. Desafortunadamente, la información "local" que proporciona sólo puede usarse cerca de puntos de equilibrio. (Hacer predicciones basadas en linearizaciones lejanas de los puntos de equilibrio puede acarrear consecuencias drásticas; vea la sección 4.5.)

Hasta ahora nuestros únicos procedimientos generales para el estudio del comportamiento de los sistemas no lineales lejos de los puntos de equilibrio son numéricos. Es cierto que el estudio numérico cuidadoso de un sistema puede dar considerable información acerca del comportamiento de sus soluciones. Sin embargo, es difícil saber si se han probado las condiciones iniciales suficientes para observar todos los posibles comportamientos de las soluciones. En esta sección desarrollaremos algunos procedimientos cualitativos que pueden combinarse con linearizaciones y métodos numéricos.

Especies en competencia

Recuerde el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy,$$

donde x y y son poblaciones de dos especies que compiten por recursos (vea la sección 5.1).

En la sección 5.1 determinamos que los puntos de equilibrio son $(0, 0)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$ y $(1, 1)$. Por linearización, encontramos que el punto $(1, 1)$ es un punto silla. Hay una curva cuyas soluciones se acercan a $(1, 1)$ cuando $t \to \infty$, y además separa el plano fase en