Practica 1 Variable Compleja.

Cuerpo de los Números Complejos.

1. Demostrar las relaciones siguientes:

a) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; d) $\overline{\bar{z}_1 + \bar{z}_2} = z_1 + z_2$.

Hallar las soluciones reales de las ecuaciones:

2. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

3. $(x - iy)(a - ib) = i^5$, donde a, b son los números reales dados $|a| \neq |b|$.

4. $\frac{1}{z - i} + \frac{2 + i}{1 + i} = \sqrt{2}$, donde $z = x + iy$.

5. Presentar el número complejo $\frac{1}{(a + ib)^2} + \frac{1}{(a - ib)^2}$ en la forma algebraica.

6. Demostrar que $\frac{\sqrt{1 + x^2} + ix}{x - i\sqrt{1 + x^2}} = i$ (x es real).

7. Expresar x y y a través de u y v, si $\frac{1}{x + iy} + \frac{1}{u + iv} = 1$ (x, y, u, v son los números reales).

8. Hallar todos los números complejos que satisfacen la condición $\bar{z} = z^2$.

9. En los problemas siguientes hallar el módulo y el valor principal del argumento de los números complejos:

a) $z = 4 + 3i$; b) $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$;

c) $z = -7 - i$; d) $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$;

e) $z = 4 - 3i$; f) $z = \cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha \left(\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi\right)$.

10. Expresar los siguientes números complejos en la forma trigonométrica:

a) -2; b) $2i$; c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

d) $1 - \operatorname{sen}\alpha + i\cos\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$;

e) $\frac{1 + \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$;

en la forma exponencial:

f) -2; g) i; h) $-i$; i) $-1 - i\sqrt{3}$;

j) $\operatorname{sen}\alpha - i\cos\alpha \left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$; k) $5 + 3i$.

11. Demostrar que el polinomio
$f(x) = x^n \operatorname{sen} \alpha - \lambda^{n-1} x \operatorname{sen} n\alpha + \lambda^n \operatorname{sen}(n-1)\alpha$
se divide en $x^2 - 2\lambda x \cos\alpha + \lambda^2$.

12. Calcular:

a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$; b) $(2-2i)^7$; c) $(\sqrt{3}-3i)^6$;

d) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$.

13. Demostrar que

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg} n\alpha}{1-i\operatorname{tg} n\alpha}.$$

14. Demostrar que si
$(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)^n = 1$, entonces $(\cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha)^n = 1$.

15. Utilizando la fórmula de Moivre, expresar mediante las potencias sen φ y cos φ las funciones siguientes de los ángulos múltiples:

a) sen 3φ; b) cos 3φ; c) sen 4φ; d) cos 4φ; e) sen 5φ; f) cos 5φ.

En los problemas siguientes hallar todos los valores de raíz:

16. a) $\sqrt[4]{-1}$; b) $\sqrt{i}$; c) $\sqrt[3]{i}$; d) $\sqrt[4]{-i}$.

17. a) $\sqrt[4]{1}$; b) $\sqrt[3]{-1+i}$; c) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

18. $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)}$.

En los problemas siguientes hallar conjuntos de puntos en el plano de la variable compleja z que se determinan por las condiciones dadas:

19. a) $|z| \geqslant 2$; b) $\frac{1}{|z|} \geqslant 1$, $z \neq 0$; c) $\left|\frac{1}{z}\right| \leqslant 2$, $z \neq 0$.

20. a) $|z-5i| = 8$; b) $|z-1-i| \leqslant 4$.

21. a) $1 < |z+i| < 2$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$;

b) $2 < |z| < 3$, $\frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{4}{3}\pi$.

22. a) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$; b) $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 1$

23. a) $1 \leqslant |z + 2 + i| \leqslant 2$; b) $|z - 1| < |z - i|$; c) $1 < \operatorname{Re} z < 2$.

24. $|z - a| < |1 - a\bar{z}|$ (a es real, $|a| < 1$).

25. a) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$; b) $|z| - \operatorname{Re} z \leqslant 0$.

26. $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$.

27. $4 \leqslant |z - 1| + |z + 1| \leqslant 8$.

28. a) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < -\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4} < \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) +$

29. ¿Qué línea forma el conjunto de todos los puntos $z = -2 + iy$, si y obtiene valores reales cualesquiera?

30. ¿Qué línea forma el conjunto de todos los puntos $z = x + 2i$, si x obtiene valores reales cualesquiera?

Indicar qué líneas se determinan por las ecuaciones siguientes:

31. a) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; b) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$; c) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$.

32. a) $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 1$; b) $\operatorname{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) = 2 - \operatorname{Im} z$.

33. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

34. $2z\bar{z} + (2 + i)z + (2 - i)\bar{z} = 2$.

35. a) $|z - i| + |z + i| = 4$; b) $|-z| - i|z + i| = 2$.

36. a) $|z| - 3 \operatorname{Im} z = 6$; b) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

37. a) $|z - 2| = |1 - 2\bar{z}|$; b) $|z - z_1| = |z - z_2|$;
c) $\operatorname{Re} (\bar{z}^2 - z) = 0$; d) $\operatorname{Re} (1 + z) = |z|$.

Escribir en la forma compleja las ecuaciones de las líneas siguientes:

38. a) De los ejes de coordenadas OX y OY; b) de la recta $y = x$; c) de la recta $y = kx + b$, donde k, b son reales.

39. a) De la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$; b) de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Resolver las ecuaciones:

40. $z^3 + 3z^3 + 3z + 3 = 0$.

41. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

42. Hallar el número complejo z, la representación del cual es el punto del segmento z_1z_2 que se encuentra de z_2 en dos veces más lejos que de z_1.

43. ¿A qué vector se convierte el vector $a + ib$ siendo especulativo su reflejo en la bisectriz del primer cuarto?

44. ¿A qué vector se convierte el vector $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo en el ángulo de 90°?

45. ¿A qué vector se convierte el vector $-\sqrt{3} - i$ al girarlo en el ángulo de 120°?

46. Hallar el ángulo en el cual es necesario girar el vector $4 - 3i$ para recibir el vector $-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}} i$.

47. Hallar el ángulo, en el cual es necesario girar el vector $3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ para recibir el vector $-5 + i$.

Resolver las ecuaciones:

48. $(x + i)^n - (x - i)^n = 0$ (x es real).

49. $\cos x + i \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x + i \cos x$.

50. Hallar el vector, que se obtendrá al girar en 45° y duplicar el vector $z = 3 + 4i$.

51. El centro del cuadrado se encuentra en el punto $z_0 = 1 + i$, y uno de los vértices se encuentra en el punto $z_1 = 1 - i$. ¿En qué puntos se encuentran los demás vértices del cuadrado?

52. Sea que $z_1, z_2, \ldots, z_n$ son las raíces de la ecuación $z^n - 1 = 0$ $(n > 1)$.

Demostrar que $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$.

Hallar las sumas siguientes:

53. a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \ldots + \operatorname{sen} nx$;

b) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$.

54. a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \ldots + \operatorname{sen} (2n - 1) x$;

b) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos (2n - 1) x$.