

M. L. Krasnov
A. I. Kiselev
G. I. Makárenko

*Funciones de variable compleja
Cálculo operacional
Teoría de la estabilidad*



Editorial MIR Moscú

Traducido del ruso por
T. I. Shapovalova

На испанском языке

Impreso en la URSS
© Издательство «Наука», 1981
© Traducción al español. Editorial Mir. 1983

Índice

Prefacio	7
Capítulo I	
Funciones de variable compleja	9
§ 1. Números complejos y operaciones con ellos	9
§ 2. Funciones de variable compleja	21
§ 3. Límite de sucesión de los números complejos. Límite y continuidad de una función de variable compleja	29
§ 4. Diferenciación de funciones de variable compleja. Condiciones de Cauchy-Riemann	36
§ 5. Integración de funciones de variable compleja	46
§ 6. Fórmula integral de Cauchy	55
§ 7. Series en el dominio complejo	62
§ 8. Ceros de una función. Los puntos singulares aislados	80
§ 9. Residuos de funciones	86
§ 10. Teorema de Cauchy de los residuos. Aplicación de residuos al cálculo de las integrales definidas. Sumación de ciertas series mediante residuos	93
§ 11. Residuo logarítmico. Principio de argumento. Teorema de Rouchet	117
§ 12. Aplicaciones conformes	126
§ 13. Potencial complejo. Su sentido hidrodinámico	155
Capítulo II	
Cálculo operacional	161
§ 14. Obtención de representaciones y originales	161
§ 15. Solución del problema de Cauchy para las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes constantes	189
§ 16. Integral de Duhamel	202
§ 17. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por el método operacional	205
§ 18. Solución de las ecuaciones integrales de Volterra con núcleos de la forma especial	209

Indice

§ 19. Ecuaciones diferenciales con el argumento de retardo	216
§ 20. Solución de ciertos problemas de la física matemática	219
§ 21. Transformación discreta de Laplace	222
Capítulo III	
Teoría de la estabilidad	237
§ 22. Concepto acerca de la estabilidad de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Los más simples tipos de puntos de reposo	237
§ 23. Segundo método de Liapunov	245
§ 24. Examinación de la estabilidad por la primera aproximación	249
§ 25. Estabilidad asintótica en total. Estabilidad según Lagrange	254
§ 26. Criterio de Rauss-Hurwitz	257
§ 27. Criterio geométrico de estabilidad (criterio de Mijailov)	260
§ 28. D-particiones	264
§ 29. Estabilidad de soluciones de las ecuaciones en diferencias	272
Respuestas	282
Suplemento	330
Bibliografía	333

Prefacio

En la presente edición todo el texto está redactado de nuevo y están incluidos ciertos complementarios. Está ampliada la parte consagrada a la teoría de los residuos y a sus aplicaciones (en particular, está introducido el concepto del residuo respecto a un punto infinitamente alejado, aplicación de los residuos a la sumación de ciertas series). Se amplia el número de problemas para la aplicación del cálculo operacional al estudio de ciertas funciones (de función gamma, función de Bessel y otr.), está aumentado también el número de problemas para la representación de funciones dadas gráficamente. Está reelaborado el párrafo dedicado a las aplicaciones conformes. Está incrementada la cantidad de ejemplos que se analizan en el texto. Están eliminadas unas erratas e inexactitudes; algunos problemas que tenían soluciones muy complicadas están sustituidos por más simples.

*M.L. Krasnov
A.I. Kiseliov
G.I. Makarenko*

Introducción

En el presente volumen están reunidos más de 1 000 problemas y ejercicios de las más importantes partes de las matemáticas superiores: funciones de una variable compleja, cálculo operacional y teoría de la estabilidad, los cuales el lector tiene que resolver por sí mismo, particularmente. Dichos problemas están cogidos de la actividad práctica de los especialistas técnicos, con los cuales chocan los estudiantes después de haber cursado los estudios.

Este manual puede ser útil también para los lectores que desean estudiar individualmente dichos materiales especiales del curso de matemáticas superiores.

De las selecciones de problemas conocidas, dedicadas a las materias indicadas este libro se distingue por las características fundamentales siguientes: por sí mismo representa un manual-guía de metodología que contiene breves conocimientos teóricos acerca de cada punto de empalme; ejercicios y problemas con resoluciones y explicaciones detalladas como ejemplos, gran cantidad de problemas y ejercicios para resolverlos individualmente. Casi todos de ellos poseen respuestas, y en algunos casos están dotados por explicaciones para su resolución, o con breves soluciones. Todos los problemas y ejercicios se disponen según determinada sucesión: de lo simple a lo complejo.

El libro presupone que el lector trabaje sistemáticamente con el material elegido. De acuerdo con ésto, el número de problemas y ejercicios está restringido de modo que él podrá por lo menos resolver la mayoría de ellos. En lo que se refiere al contenido de ejercicios, los autores intentaron evitar según la posibilidad los ejemplos de elevada dificultad técnica. Sin duda, ésto no significa, que en el libro no haya problemas complejos.

Los autores prestaron principal atención al aspecto matemático del tema, únicamente, en pocas palabras exponiendo el sentido geométrico y físico de ciertos problemas a examinar.

Autores

Capítulo I

Funciones de variable compleja

§ 1. Números complejos y operaciones con ellos

El número complejo z se llama la expresión del tipo

$$z = x + iy$$

(la forma algebraica del número complejo), donde x y y son los números reales cualesquiera y i es la unidad imaginaria que satisface la condición $i^2 = -1$. Los números x y y se llaman correspondientemente las partes *reales* e *imaginarias*, del número complejo z y se denominan

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

El número complejo $\bar{z} = x - iy$ se llama *conjugado* al número complejo $z = x + iy$.

Los números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se consideran ser iguales cuando y sólo cuando $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

El número complejo $z = x + iy$ se representa en el plano XOY por el punto M con las coordenadas (x, y) o por el vector, el origen del cual se encuentra en el punto $O(0, 0)$ y su extremo se encuentra en el punto $M(x, y)$ (fig. 1). La longitud ρ del vector \overline{OM} se llama *módulo* del número complejo y se denomina $|z|$, así que $\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. El ángulo φ formado por el vector \overline{OM} con el eje OX se llama *el argumento* del número complejo z y se denomina $\varphi = \operatorname{Arg} z$; el se determina no únicamente, sino con exactitud hasta el sumando que es múltiple a 2π :

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

donde $\arg z$ es el valor principal $\operatorname{Arg} z$ que determinan las condiciones

$$-\pi < \arg z \leq \pi,$$

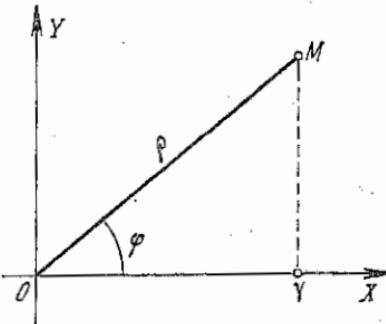


Fig. 1

con todo esto

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{si } x > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{si } x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{si } x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & \text{si } x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & \text{si } x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Tienen lugar las relaciones siguientes:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{sen}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Dos números complejos z_1 y z_2 son iguales en el caso y sólo en el caso, cuando sus módulos son iguales y sus argumentos son iguales o se distinguen en la magnitud que es múltiple a 2π :

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2\pi n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Sean dados dos números complejos $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

4. La suma $z_1 + z_2$ de los números complejos z_1 y z_2 se llama el número complejo

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. La diferencia $z_1 - z_2$ de los números complejos z_1 y z_2 se llama el número complejo

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. El producto $z_1 z_2$ de los números complejos z_1 y z_2 se llama el número complejo

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

De la definición del producto de los números complejos sigue en particular que

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

4. El cociente $\frac{z_1}{z_2}$ de la división del número complejo z_1 en el número complejo $z_2 \neq 0$ se llama tal número complejo z que satisface a la ecuación $z z_2 = z_1$. Para el cociente tiene lugar la fórmula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}. \quad (2)$$

Aquí fué utilizada la fórmula $z_2^{-1} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

La fórmula (2) se puede escribir en la forma

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

La parte real $\operatorname{Re} z$ y la parte imaginaria $\operatorname{Im} z$ del número complejo z se expresan a través de los números complejos conjugados del modo siguiente:

$$\operatorname{Re} z = \frac{\bar{z} + z}{2}, \quad \operatorname{Im} z = i \frac{\bar{z} - z}{2} = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Ejemplo 1. Mostrar que $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

Demostración. Según la definición tenemos

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + \\ &\quad + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

1. Demostrar las relaciones siguientes:

a) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; b) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$;

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; d) $\overline{\overline{z_1 + z_2}} = z_1 + z_2$.

Ejemplo 2. Hallar las soluciones reales de la ecuación

$$(4 + 2i)x + (5 - 3i)y = 13 + i.$$

Solución. Separemos en el miembro primero de la ecuación la parte real e imaginaria: $(4x + 5y) + i(2x - 3y) = 13 + i$. De aquí según la definición de la igualdad de dos números complejos obtenemos

$$\begin{cases} 4x + 5y = 13, \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, hallamos

$$x = 2, \quad y = 1.$$

Hallar las soluciones reales de las ecuaciones:

2. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$.

3. $(x - iy)(a - ib) = i^b$, donde a, b son los números reales dados $|a| \neq |b|$.

4. $\frac{1}{z+i} + \frac{2+i}{1+i} = \sqrt{2}$, donde $z = x + iy$.

5. Presentar el número complejo $\frac{1}{(a+ib)^2} + \frac{1}{(a-ib)^2}$ en la forma algebraica.

6. Demostrar que $\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}}=i$ (x es real).
7. Expresar x y y a través de u y v , si $\frac{1}{x+iy}+\frac{1}{u+iv}=1$ (x, y, u, v son los números reales).
8. Hallar todos los números complejos que satisfacen la condición $z=z^2$.

Ejemplo 3. Hallar el módulo y argumento del número complejo

$$z = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}.$$

Solución. Tenemos

$$x = -\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} < 0, \quad y = -\cos \frac{\pi}{8} < 0.$$

El valor principal del argumento según (1) será

$$\begin{aligned}\arg z &= -\pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right) = -\pi + \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = \\ &= -\pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{8} \pi \right) = -\pi + \frac{3}{8} \pi = -\frac{5}{8} \pi.\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5}{8} \pi + 2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1.$$

9. En los problemas siguientes hallar el módulo y el valor principal del argumento de los números complejos:

- a) $z = 4 + 3i$; b) $z = -2 + 2\sqrt{3}i$;
 c) $z = -7 - i$; d) $z = -\cos \frac{\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$;
 e) $z = 4 - 3i$; f) $z = \operatorname{cos} \alpha - i \operatorname{sen} \alpha \left(\pi < \alpha < \frac{3}{2} \pi \right)$.

Cualquier número complejo $z = x + iy$ ($z \neq 0$) se puede escribirlo en la forma trigonométrica

$$z = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \quad \text{donde } \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Ejemplo 4. Escribir en la forma trigonométrica el número complejo

$$z = -1 - i\sqrt{3}.$$

Solución. Tenemos

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}, \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi.$$

Por consiguiente,

$$-1 - i\sqrt{3} = 2 \left[\cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right].$$

Ejemplo 5. Hallar raíces reales de la ecuación

$$\cos x + i \sin x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i.$$

Solución. La ecuación dada no tiene raíces. En efecto, esta ecuación es equivalente a las siguientes: $\cos^2 x = 1/2$, $\sin x = 3/4$. Las últimas ecuaciones son incompatibles, porque $\cos^2 x + \sin^2 x = 13/16$, que es imposible para ningunos valores x .

Cualquier número complejo $z \neq 0$ se puede escribirlo en la forma exponencial

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad \text{donde } \rho = |z|, \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Ejemplo 6. Hallar todos los números complejos $z \neq 0$ que satisfacen la condición $z^{n-1} = \bar{z}$.

Solución. Sea $z = \rho e^{i\varphi}$. Entonces $\bar{z} = \rho e^{-i\varphi}$.

Según la condición

$$\rho^{n-1} e^{i(n-1)\varphi} = \rho e^{-i\varphi} \quad \text{o} \quad \rho^{n-2} e^{in\varphi} = 1,$$

de donde $\rho^{n-2} = 1$, es decir, $\rho = 1$ y $in\varphi = 2k\pi i$, es decir $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$). Por consiguiente,

$$z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

10. Expresar los siguientes números complejos en la forma trigonométrica:

a) -2 ; b) $2i$; c) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$;

d) $1 - \sin \alpha + i \cos \alpha \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$;

e) $\frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha} \quad (0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$;

en la forma exponencial:

f) -2 ; g) i ; h) $-i$; i) $-1 - i\sqrt{3}$;

j) $\sin \alpha - i \cos \alpha \quad (\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi)$; k) $5 + 3i$.

Sean los números complejos z_1 y z_2 dados en la forma trigonométrica $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$.

Su producto se halla mediante la fórmula

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

es decir, durante la multiplicación de los números complejos sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \operatorname{Arg}(z_1 z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

El cociente de dos números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$ se halla por la fórmula

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)],$$

es decir,

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|, \quad \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

La elevación del número complejo

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

a la potencia natural n se realiza por la fórmula

$$|z^n| = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

es decir,

$$|z^n| = |z|^n, \quad \operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \dots).$$

De aquí se obtiene la fórmula de Moivre

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Las propiedades del módulo de los números complejos

1. $|\bar{z}| = |z|;$
2. $\bar{z}\bar{z} = |z|^2;$
3. $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|;$
4. $|z^n| = |z|^n;$
5. $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0;$
6. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|;$
7. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|;$
8. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$

Ejemplo 7. Calcular $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$.

Solución. Presentemos el número $z = -1 + i\sqrt{3}$ en la forma trigonométrica

$$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right).$$

Utilizando la fórmula de la elevación a potencia citada arriba, obtendremos

$$(-1+i\sqrt{3})^{60} = 2^{60} \left[\cos \left(60 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) + i \sin \left(60 \cdot \frac{2}{3} \pi \right) \right] = \\ = 2^{60} (\cos 40\pi + i \sin 40\pi) = 2^{60}.$$

Ejemplo 8. Demostrar que el polinomio

$$f(x) = (\cos \alpha + x \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - x \sin n\alpha$$

se divide en $x^2 + 1$.

Solución. Tenemos $x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$. De acuerdo con la fórmula de Moivre

$$f(i) = (\cos \alpha + i \sin \alpha)^n - \cos n\alpha - i \sin n\alpha = \\ = \cos n\alpha + i \sin n\alpha - \cos n\alpha - i \sin n\alpha = 0.$$

Por analogía $f(-i) = 0$. Es decir, $f(x)$ se divide en $x^2 + 1$.

11. Demostrar que el polinomio

$$f(x) = x^n \sen \alpha - \lambda^{n-1} x \sen n\alpha + \lambda^n \sen(n-1)\alpha$$

se divide en $x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2$.

12. Calcular:

- a) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} \right)^{40}$; b) $(2-2i)^7$; c) $(\sqrt{3}-3i)^6$;
d) $\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^8$.

13. Demostrar que

$$\left(\frac{1+i \tg \alpha}{1-i \tg \alpha} \right)^n = \frac{1+i \tg n\alpha}{1-i \tg n\alpha}.$$

14. Demostrar que si

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 1, \text{ entonces } (\cos \alpha - i \sin \alpha)^n = 1.$$

15. Utilizando la fórmula de Moivre, expresar mediante las potencias $\sen \varphi$ y $\cos \varphi$ las funciones siguientes de los ángulos múltiples:

- a) $\sen 3\varphi$; b) $\cos 3\varphi$; c) $\sen 4\varphi$; d) $\cos 4\varphi$; e) $\sen 5\varphi$;
f) $\cos 5\varphi$.

La raíz de la potencia n del número complejo z tiene n valores diferentes que se hallan mediante la fórmula

$$-\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi = \arg z$.

Los puntos que corresponden a los valores $\sqrt[n]{z}$, son los vértices de n -polígono regular inscrito en la circunferencia del radio $R = \sqrt[n]{|z|}$ con el centro en el origen de coordenadas.

La raíz de potencia n del número real a también tiene n distintos valores; entre estos valores tenemos dos valores reales, uno o ninguno depende de la paridad o imparidad de n y del signo del número a .

Ejemplo 9. Hallar todos los valores $\sqrt[4]{1-i}$.

Solución. Reducimos el número complejo $1-i$ a la forma trigonométrica

$$1-i=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Por consiguiente,

$$\sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right).$$

Suponiendo $k = 0, 1, 2, 3$, hallamos

$$(k=0) \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}-i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$(k=1) \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{7}{16}\pi+i\sin\frac{7}{16}\pi\right),$$

$$(k=2) \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{15}{16}\pi+i\sin\frac{15}{16}\pi\right),$$

$$(k=3) \quad \sqrt[4]{1-i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{23}{16}\pi+i\sin\frac{23}{16}\pi\right).$$

En los problemas siguientes hallar todos los valores de la raíz:

16. a) $\sqrt[4]{-1}$; b) \sqrt{i} ; c) $\sqrt[3]{i}$; d) $\sqrt[4]{-i}$.

17. a) $\sqrt[3]{1}$; b) $\sqrt[3]{-1+i}$; c) $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$.

18. $\sqrt[5]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}$.

Ejemplo 10. ¿Qué conjunto de puntos en el plano de la variable compleja z se determina por la condición

$$\operatorname{Im} z^2 > 2?$$

Solución. Sea $z = x + iy$. Entonces

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Por consiguiente, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$.

Según la condición $2xy > 2$ o $xy > 1$. Esta desigualdad determina el conjunto de puntos en el primer y tercer cuadrante sobre y debajo de la hipérbola $xy = 1$.

Ejemplo 11. ¿Qué conjunto de puntos en el plano complejo se determina por la condición

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg(z+1-i) \leq \frac{3}{4}\pi?$$

Solución. El número complejo

$$z+1-i = z - (-1+i)$$

se representa por el vector, el origen del cual es el punto $-1+i$, y el extremo del cual es el punto z . El ángulo entre este vector y el eje OX es $\arg(z+1-i)$ y él se cambia en

los límites de $-\frac{\pi}{2}$ hasta $\frac{3}{4}\pi$. Por consiguiente, la desigualdad dada determina el ángulo entre las rectas que salen del punto $-1+i$ y que forman con el eje OX los ángulos de $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3}{4}\pi$ de radianes (fig. 2).

Ejemplo 12. ¿Qué dominio se determina por la condición $|z| + \operatorname{Re} z < 1$?

Solución. Sea $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Entonces $|z| = \rho$, $\operatorname{Re} z = \rho \cos \varphi$. Según la condición $\rho + \rho \cos \varphi < 1$, de donde

$$\rho < \frac{1}{1 + \cos \varphi}.$$

Esta condición la satisfacen todos los puntos que se encuentran en el dominio limitado por la curva

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos \varphi}$$

(ecuación de parábola en coordenadas polares).

En los problemas siguientes hallar conjuntos de puntos en el plano de la variable compleja z que se determinan por las condiciones dadas:

19. a) $|z| \geq 2$; b) $\frac{1}{|z|} \geq 1$, $z \neq 0$; c) $\left| \frac{1}{z} \right| \leq 2$, $z \neq 0$.

20. a) $|z-5i| = 8$; b) $|z-1-i| \leq 4$.

21. a) $1 < |z+i| < 2$, $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{2}$;

b) $2 < |z| < 3$, $\frac{\pi}{8} < \arg z < \frac{4}{3}\pi$.

22. a) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| \leq 1$; b) $0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1$.

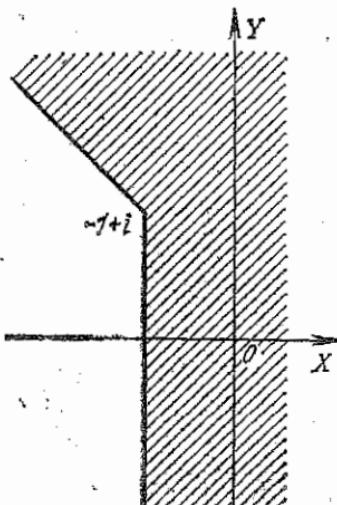


Fig. 2

23. a) $1 \leq |z + 2 + i| \leq 2$; b) $|z - 1| < |z - i|$;
 c) $1 < \operatorname{Re} z < 2$.
24. $|z - a| < |1 - az|$ (a es real, $|a| < 1$).
25. a) $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$; b) $|z| - \operatorname{Re} z \leq 0$.
26. $\operatorname{Im} \bar{z}^2 < 1$.
27. $4 \leq |z - 1| + |z + 1| \leq 8$.
28. a) $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) < -\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{4} < \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) < \frac{1}{2}$.

Ejemplo 13. ¿Qué curva se da por la ecuación $|z + c| + |z - c| = 2a$, donde c y a son los números reales positivos, al mismo tiempo $a > c$?

Solución. $|z + c|$ es la distancia entre los puntos z y $-c$; $|z - c|$ es la distancia entre los puntos z y c . Según la condición la suma de distancias del punto z hasta los dos puntos dados $z_1 = -c$ y $z_2 = c$ es constante. En ese caso el punto z se encuentra en elipse. La ecuación de esta elipse tiene la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Ejemplo 14. ¿Qué curva se define por la ecuación $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{4}$?

Solución. Sea $z = x + iy$. Tenemos

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}}}{2} = \frac{z + \bar{z}}{2z\bar{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Según la condición

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4} \text{ o } x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Esto es la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

29. ¿Qué línea forma el conjunto de todos los puntos $z = -2 + iy$, si y obtiene valores reales cualesquiera?

30. ¿Qué línea forma el conjunto de todos los puntos $z = x + 2i$, si x obtiene valores reales cualesquiera?

Indicar qué líneas se determinan por las ecuaciones siguientes:

31. a) $\operatorname{Im} z^2 = 2$; b) $\operatorname{Re} \bar{z}^2 = 1$; c) $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2}$.

32. a) $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = 1$; b) $\operatorname{Im} (\overline{z^2 - z}) = 2 - \operatorname{Im} z$.

33. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$.

34. $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$.

35. a) $|z-i| + |z+i| = 4$; b) $|-z| - i|z+i| = 2$.

36. a) $|z| - 3 \operatorname{Im} z = 6$; b) $3|z| - \operatorname{Re} z = 12$.

37. a) $|z-2| = |1-2z|$; b) $|z-z_1| = |z-z_2|$;
c) $\operatorname{Re}(z^2 - z) = 0$; d) $\operatorname{Re}(1+z) = |z|$.

Ejemplo 15. Escribir en la forma compleja la ecuación de la recta

$$Ax + By + C = 0. \quad (3)$$

Solución. Sea $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Entonces $x = \frac{\bar{z} + z}{2}$, $y = \frac{\bar{z} - z}{2}i$. Sustituyendo en la ecuación (3) las expresiones para x y y , obtendremos

$$A(\bar{z} + z) + Bi(\bar{z} - z) + 2C = 0$$

o

$$(A + iB)\bar{z} + (A - iB)z + 2C = 0. \quad (4)$$

Introduzcamos la denominación

$$A + iB = a.$$

Entonces la ecuación (4) toma la forma

$$\bar{az} + a\bar{z} + 2C = 0.$$

Ejemplo 16. Escribir en la forma compleja la ecuación de la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0. \quad (5)$$

Solución. Tenemos

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}, \quad 2x = \bar{z} + z, \quad 2y = i(\bar{z} - z).$$

Sustituyendo en la ecuación (5) obtendremos

$$\bar{z}z + \bar{z} + z + i(\bar{z} - z) = 0$$

o

$$\bar{z}z + (1 - i)z + (1 + i)\bar{z} = 0.$$

Ejemplo 17. ¿Qué línea en el plano XOY se determina por la ecuación

$$z\bar{z} + i(z - \bar{z}) - 2 = 0 \quad (6)$$

Solución. Sea $z = x + iy$.

Tenemos $\bar{z} = x - iy$, $z\bar{z} = x^2 + y^2$.

La ecuación (6) obtiene la forma

$$x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0$$

o

$$x^2 + (y - 1)^2 = 3.$$

Esto es la circunferencia del radio $R = \sqrt{3}$ con el centro en el punto $(0, 1)$.

Escribir en la forma compleja las ecuaciones de las líneas siguientes:

38. a) De los ejes de coordenadas OX y OY ; b) de la recta $y = x$; c) de la recta $y = kx + b$, donde k, b son reales.

39. a) De la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$; b) de la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

Problemas diferentes

Resolver las ecuaciones:

40. $z^3 + 3z^2 + 3z + 3 = 0$.

41. $z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 4z - 15 = 0$.

42. Hallar el número complejo z , la representación del cual es el punto del segmento z_1z_2 que se encuentra de z_2 en dos veces más lejos que de z_1 .

43. ¿A qué vector se convierte el vector $a + ib$ siendo especulativo su reflejo en la bisectriz del primer cuarto?

44. ¿A qué vector se convierte el vector $-\sqrt{3} + 3i$ al girarlo en el ángulo de 90° ?

45. ¿A qué vector se convierte el vector $-\sqrt{3} - i$ al girarlo en el ángulo de 120° ?

46. Hallar el ángulo en el cual es necesario girar el vector $4 - 3i$ para recibir el vector $-\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$.

47. Hallar el ángulo, en el cual es necesario girar el vector $3\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ para recibir el vector $-5 + i$.

Resolver las ecuaciones:

48. $(x + i)^n - (x - i)^n = 0$ (x es real).

49. $\cos x + i \sin x = \sin x + i \cos x$.

50. Hallar el vector, que se obtendrá al girar en 45° y duplicar el vector $z = 3 + 4i$.

51. El centro del cuadrado se encuentra en el punto $z_0 = 1 + i$, y uno de los vértices se encuentra en el punto $z_1 = 1 - i$. ¿En qué puntos se encuentran los demás vértices del cuadrado?

52. Sea que z_1, z_2, \dots, z_n son las raíces de la ecuación $z^n - 1 = 0$ ($n > 1$).

Demostrar que $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.

Hallar las sumas siguientes:

53. a) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$;

b) $\cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$.

54. a) $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x$;

b) $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x$.

§ 2. Funciones de variable compleja

Dicen que en el dominio D está determinada la función $w = f(z)$, si a cada punto $z \in D$ está asignado uno (función uniforme) o varios (función multiforme) valores de w .

De esa manera, la función $w = f(z)$ realiza la aplicación de los puntos del plano complejo z sobre los puntos correspondientes del plano complejo w .

Sea $z = x + iy$ y $w = u + iv$. Entonces la dependencia $w = f(z)$ entre la función compleja w y la variable compleja z puede ser trazada mediante las dos funciones reales u y v de variables reales x y y

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Ejemplo 1. Sea $w = z^3 - iz$.

Suponiendo $z = x + iy$, $w = u + iv$ obtendremos

$$\begin{aligned} u + iv &= (x + iy)^3 - i(x - iy) = \\ &= (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x). \end{aligned}$$

Por consiguiente, la igualdad $w = z^3 - iz$ es equivalente a dos igualdades

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - y, \\ v = 3x^2y - x - y^3. \end{cases}$$

Hallar para las siguientes funciones la parte real e imaginaria:

55. a) $w = \bar{z} - iz^2$; b) $w = z^2 + i$; c) $w = i - z^3$; d) $w = \frac{1}{z}$;

e) $w = \frac{iz+1}{1+\bar{z}}$; f) $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

En los problemas siguientes hallar las imágenes de los puntos dados para las aplicaciones señaladas:

56. a) $z_0 = -i$; $w = z^2$; b) $z_0 = 1 - i$, $w = (z - i)^2$;
 c) $z_0 = 1$, $w = \frac{1}{z-i}$; d) $z_0 = 2 + 3i$, $w = \frac{\bar{z}}{z}$.

Sea que en el plano z la curva se da por la ecuación $F(x, y) = 0$. Para hallar la ecuación de imagen $\Phi(u, v) = 0$ de esta curva en el plano w para la aplicación mediante la función $w = f(z) = u + iv$, es necesario excluir x y y de las ecuaciones

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Si la curva está prefijada mediante las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \text{ o } z = z(t) = x(t) + iy(t),$$

entonces las ecuaciones paramétricas de su imagen para la aplicación $w = f(z) = u + iv$ serán

$$\begin{cases} u = u[x(t), y(t)] = U(t), \\ v = v[x(t), y(t)] = V(t). \end{cases}$$

Ejemplo 2. ¿En qué curva se transforma la circunferencia unidad $|z| = 1$ mediante la función $w = z^2$?

Solución. Puesto que según la condición $|z| = 1$, entonces

$$|w| = |z|^2 = 1.$$

De esta forma, la imagen de la circunferencia $|z| = 1$ en el plano z es la circunferencia $|w| = 1$ que pasa dos veces en el plano w . Esto se desprende de lo que si $w = z^2$, entonces $\operatorname{Arg} w = 2 \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ y cuando el punto z traza la circunferencia completa $|z| = 1$ su imagen traza la circunferencia $|w| = 1$ dos veces.

Ejemplo 3. Hallar la imagen de circunferencia

$$z = R \cos t + iR \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

para la aplicación $w = \frac{z}{z}$.

Solución. Sea $z = x + iy$. La ecuación dada de la circunferencia se puede escribir en la forma

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t \quad (0 \leq t < 2\pi).$$

Separaremos la parte real e imaginaria de la función $w = u + iv$. Tenemos

$$u + iv = \frac{z}{z} = \frac{z^2}{zz} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + i \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

De aquí

$$u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Sustituyendo $x = R \cos t$ y $y = R \sin t$ en u y v obtenemos las ecuaciones paramétricas de imágen de la circunferencia

$$\begin{cases} u = \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \cos 2t, \\ v = \frac{2 \cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \sin 2t, \end{cases} \quad (*)$$

o $u^2 + v^2 = 1$.

Pues, la imágen es la circunferencia de unidad que pasan dos veces que sigue de lo que $0 \leq t < 2\pi$, y de las fórmulas (*).

57. Determinar en qué líneas del plano w se aplican mediante la función $w = \frac{1}{z}$ las líneas siguientes del plano z :

- a) $|z| = \frac{1}{2}$; b) $\operatorname{Re} z = 0$; c) $\arg z = \frac{3}{4}\pi$; d) $\arg z^2 = -\frac{\pi}{2}$;
e) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; f) $|z| = z$.

58. Hallar las imágenes de los ejes de coordenadas OX y OY para las siguientes aplicaciones:

a) $w = \frac{z+1}{z-1}$; b) $w = 1 + \frac{1}{z}$.

Principales funciones elementales de variable compleja

1. La función racional fraccionaria

$$w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m};$$

en particular, la función racional es el polinomio

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

2. La función exponencial e^z se define como la suma de la serie potencial convergente absoluta en todo el plano complejo

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

La función exponencial e^z tiene las propiedades siguientes:

a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, donde z_1 y z_2 son las magnitudes complejas cualesquiera,

b) $e^{z+2k\pi i} = e^z$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) es decir, e^z es la función periódica con el período $2\pi i$.

3. Las funciones trigonométricas $\sin z$ y $\cos z$ se determinan por las series potenciales:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

convergentes absolutamente para cualquier valor complejo z . Las funciones $\sin z$ y $\cos z$ son periódicas con el período real 2π y tienen solo los ceros reales $z = k\pi$ y $z = \pi/2 + k\pi$ correspondientemente, donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Para las funciones e^z , $\sin z$ y $\cos z$ tienen lugar las fórmulas de Euler

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad (1)$$

de donde

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2)$$

Las funciones $\operatorname{tg} z$ y $\operatorname{ctg} z$ se determinan por las igualdades

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (3)$$

Para las funciones trigonométricas actúan todas las fórmulas de trigonometría.

4. Las funciones hiperbólicas $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$ se determinan por las igualdades

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \quad (5)$$

5. Las funciones trigonométricas e hiperbólicas se unen entre sí por las relaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen} z = -i \operatorname{sh} iz, & \operatorname{sh} z = -i \operatorname{sen} iz, \\ \operatorname{cos} z = \operatorname{ch} iz, & \operatorname{ch} z = \operatorname{cos} iz, \\ \operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, & \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \\ \operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, & \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz. \end{array}$$

6. La función logarítmica $\operatorname{Ln} z$, donde $z \neq 0$, se determina como función inversa a la exponencial, al mismo tiempo

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{ln} |z| + i \operatorname{Arg} z = \operatorname{ln} |z| + i \arg z + 2k\pi i$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (6)$$

Esta función es multiforme. El valor principal $\ln z$ se llama aquel valor que reciben para $k = 0$; el se denomina $\ln z$:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Es evidente que

$$\ln z = \ln z + 2k\pi i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Las relaciones siguientes son válidas:

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2,$$

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2.$$

7. Las funciones trigonométricas inversas $\text{Arcsen } z$, $\text{Arccos } z$, $\text{Arctg } z$, $\text{Arcctg } z$ se definen como funciones inversas correspondientes a las funciones $\sin w$, $\cos w$, $\operatorname{tg} w$, $\operatorname{ctg} w$.

Por ejemplo, si $z = \sin w$, entonces w se llama arco seno del número z y se designa $w = \text{Arcsen } z$. Todas estas funciones son multiformes y se expresan a través de las funciones logarítmicas

$$\text{Arcsen } z = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}); \quad (7)$$

$$\text{Arccos } z = -i \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}); \quad (8)$$

$$\text{Arctg } z = -\frac{i}{2} \ln \frac{1+iz}{1-iz}; \quad (9)$$

$$\text{Arcctg } z = -\frac{i}{2} \ln \frac{z+i}{z-i}. \quad (10)$$

Si tomemos los valores principales de las funciones logarítmicas correspondientes, recibimos los valores principales de las funciones trigonométricas inversas $\text{arcosen } z$, $\text{arccos } z$, $\text{arctg } z$, $\text{arcctg } z$.

8. La función general potencial $w = z^a$, donde $a = \alpha + i\beta$ es el número complejo cualquiera, se determina por la igualdad

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

Esta función, en general, es función multiforme; su valor principal es igual

$$z^a = e^{a \ln z}.$$

9. La función general exponencial $w = az$ ($a \neq 0$ es el número complejo cualquiera) se determina por la igualdad

$$az = e^{z \ln a}.$$

El valor principal de esta función multiforme es $az = e^{z \ln a}$.

Separar la parte real e imaginaria de las funciones siguientes:

59. a) $w = 2z - 1$; b) $w = z + z^2$; c) $w = z^{-1}$.

60. a) $w = e^{-z}$; b) $w = e^{\bar{z}^2}$; c) $w = \sin z$; d) $w = -\operatorname{ch}(z - i)$.

61. a) $w = 2^{z^2}$; b) $w = \operatorname{sh} z$; c) $w = \operatorname{tg} z$.

Ejemplo 4. Hallar el valor del módulo de la función $w = \operatorname{sen} z$ en el punto

$$z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Solución. Sea $z = x + iy$. Entonces

$$w = \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x.$$

El módulo de la función $\operatorname{sen} z$ es igual a

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} z| &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y \cos^2 x} = \\ &= \sqrt{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 y (1 - \operatorname{sen}^2 x)} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y}. \end{aligned}$$

Suponiendo $z = \pi + i \ln(2 + \sqrt{5})$, hallamos

$$\begin{aligned} |\operatorname{sen} [\pi + i \ln(2 + \sqrt{5})]| &= \operatorname{sh} [\ln(2 + \sqrt{5})] = \\ &= \frac{e^{\ln(2 + \sqrt{5})} - e^{-\ln(2 + \sqrt{5})}}{2} = \frac{2 + \sqrt{5} - \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}{2} = 2. \end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que la función trigonométrica $\operatorname{sen} z$ en la región compleja puede obtener los valores por módulo más que unidad.

En los problemas siguientes hallar el valor del módulo y el valor principal del argumento de funciones dadas en los puntos indicados:

62. $w = \cos z$, a) $z_1 = \frac{\pi}{2} + i \ln 2$; b) $z_2 = \pi + i \ln 2$.

63. $w = \operatorname{sh} z$, $z_0 = 1 + i \frac{\pi}{2}$.

64. $w = ze^z$, $z_0 = \pi i$.

65. $w = \operatorname{ch}^2 z$, $z_0 = i \ln 3$.

66. Hallar logaritmos de los números siguientes:

a) e ; b) $-i$; c) i ; d) $-1 - i$; e) $3 - 2i$; f) i^i .

67. Hallar:

a) i^i ; b) $i^{\frac{1}{i}}$; c) 1^i ; d) $(-4)^{\sqrt{2}}$; e) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$;

f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$; g) $(1-i)^{3-3i}$.

68. Hallar el módulo ρ y el argumento φ de los números complejos: a) $\operatorname{th} \pi i$; b) 10^i ; c) 3^{2-i} .

Ejemplo 5. Escribir en la forma algebraica $\text{Arcsen } \frac{\pi}{3} i$.

Solución. Suponiendo en la fórmula (7) $z = \frac{\pi}{3} i$, obtenemos

$$\text{Arcsen } \frac{\pi}{3} i = -i \ln \left(-\frac{\pi}{3} \pm \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right).$$

De aquí

$$\begin{aligned} \text{Arcsen } \frac{\pi}{3} i &= -i \ln \left[-\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) \right] = \\ &= -i \left[\ln \left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) + \pi i + 2k\pi i \right] = \\ &= (2k+1)\pi - i \ln \left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Arcsen } \frac{\pi}{3} i &= -i \ln \left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= -i \left[\ln \left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) + 2k\pi i \right] = \\ &= 2k\pi - i \ln \left(\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{9}} - \frac{\pi}{3} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Ejemplo 6. Escribir en la forma algebraica $\text{Arctg}(1+i)$.

Solución. Suponiendo en la fórmula (9) $z = 1+i$, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Arctg}(1+i) &= -\frac{i}{2} \ln \frac{1+i(1+i)}{1-i(1+i)} = -\frac{i}{2} \ln \frac{i}{2-i} = \\ &= -\frac{i}{2} \ln \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) \end{aligned}$$

Más

$$\ln \left(-\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \right) = -\ln \sqrt{5} + (2k+1)\pi i - i \arctg 2.$$

Definitivamente

$$\begin{aligned} \text{Arctg}(1+i) &= -\frac{1}{2} \arctg 2 + (2k+1) \frac{\pi}{2} + \frac{i}{2} \ln \sqrt{5} \\ &\quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

Escribir en la forma algebraica los siguientes números complejos:

69. a) $e^{\frac{\pi}{4}i}$; b) $\ln(1-i)$.

70. a) $\sin \pi i$; b) $\cos \pi i$; c) $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} i$.

71. a) $\operatorname{ctg} \pi i$; b) $\operatorname{Arcsen} i$; c) $\operatorname{Arctg} \frac{i}{3}$.

72. a) $\operatorname{Arccos} i$; b) $\operatorname{sh} \frac{\pi i}{2}$; c) $\operatorname{th} \pi i$.

Ejemplo 7. Resolver la ecuación $\sin z = 3$.

Solución. El problema se reduce al hallazgo del valor $z = \operatorname{Arcsen} 3$.

Utilicemos la fórmula (7):

$$\operatorname{Arcsen} t = -i \ln(it + \sqrt{1-t^2}).$$

Tendremos

$$z = \operatorname{Arcsen} 3 = -i \ln(3i + \sqrt{-8})$$

o, teniendo en cuenta que

$$\sqrt{-8} = \pm \sqrt{8}i,$$

obtendremos

$$z = -i [\ln(3 + \sqrt{8})i],$$

$$z = -i [\ln(3 - \sqrt{8})i].$$

Puesto que

$$\arg[(3 + \sqrt{8})i] = \arg[(3 - \sqrt{8})i] = \frac{\pi}{2},$$

$$|(3 + \sqrt{8})i| = 3 + \sqrt{8}, \quad |(3 - \sqrt{8})i| = 3 - \sqrt{8},$$

entonces

$$\ln[(3 \pm \sqrt{8})i] = \ln(3 \pm \sqrt{8}) + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i,$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Por consiguiente,

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \ln(3 \pm \sqrt{8}) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Resolver las ecuaciones siguientes:

73. $e^{-z} + 1 = 0.$ 74. $e^z + i = 0.$

75. $4 \cos z + 5 = 0.$ 76. $\operatorname{sh} iz = -i.$

77. $\operatorname{sen} z = \pi i.$ 78. $e^{ix} = \cos \pi x$ (x es real).

79. $e^{2z} + 2e^z - 3 = 0.$ 80. $\operatorname{ch} z = i,$

81. a) $\ln(z + i) = 0.$ b) $\ln(i - z) = 1.$

§ 3. Límite de sucesión de los números complejos. Límite y continuidad de una función de variable compleja

1. Sea dada una sucesión $\{z_n\}$ de los números complejos

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

Definición 1. El número complejo a se llama el límite de una sucesión $\{z_n\}$, si para cualquier número positivo ε se puede indicar tal número $N = N(\varepsilon)$, empezando del cual, todos los elementos z_n de esta sucesión satisfacen la desigualdad

$$|z_n - a| < \varepsilon \text{ para } n \geq N(\varepsilon).$$

La sucesión $\{z_n\}$ que tiene el límite a se llama convergente en el número a que se anota en forma $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

A cada sucesión de los números complejos $\{z_n\}$ le corresponden dos sucesiones de los números reales $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$, donde $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \dots$

Teorema 1. La sucesión $\{z_n = x_n + iy_n\}$ converge en el número $a = \alpha + i\beta$ cuando y sólo cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

Definición 2. La sucesión $\{z_n\}$ se llama acotada, si existe tal número positivo M que para todos los elementos z_n de esta sucesión se cumpla la desigualdad $|z_n| \leq M$.

Teorema 2. Cada sucesión convergente es acotada.

Propiedades de las sucesiones convergentes de números complejos

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = b$, entonces

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm \tau_n) = a \pm b;$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \tau_n) = ab;$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\tau_n} = \frac{a}{b} \quad (\tau_n \neq 0, b \neq 0).$$

Ejemplo 1. Demostrar que la sucesión

$$z_n = \frac{n-i}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

tiene como el límite el número $a = 1$.

Solución. Sea prefijado el número arbitrario $\varepsilon > 0$. Mostremos que existe tal número N que $|z_n - 1| < \varepsilon$ cuando $n \geq N$. Puesto

que

$$|z_n - 1| = \left| \frac{n-i}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{1+i}{n+1} \right| = \frac{\sqrt{2}}{n+1},$$

por consiguiente, la desigualdad $|z_n - 1| < \epsilon$ será cumplida, si $\frac{\sqrt{2}}{n+1} < \epsilon$, es decir, para $n > \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} - 1$. Que significa que en calidad de N se puede tomar

$$N = N(\epsilon) = \left\lceil \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} - 1 \right\rceil + 1.$$

Aquí el símbolo $\lceil x \rceil$ significa la parte entera del número real x .

Ejemplo 2. Dado que la sucesión $\{z_n\}$ tiene el límite a . Demostrar que la sucesión $\{|z_n|\}$ tiene el límite igual $|a|$.

Efectivamente, debido a que $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0. \quad (1)$$

De otra parte, para los dos números complejos cualesquiera z_n y a tiene lugar la desigualdad (véase la página 14)

$$||z_n| - |a|| \leq |z_n - a|. \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |a|$.

Condición suficiente de la convergencia de sucesión de los números complejos

Sea $z_n = \rho_n e^{i\varphi_n}$, donde $\rho_n = |z_n|$, $\varphi_n = \arg z_n$. Con eso, si $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = \rho_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi_0$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho_0 e^{i\varphi_0}$.

Ejemplo 3. Demostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^z, \text{ donde } z = x + iy.$$

Demostración. Designemos

$$z_n = \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n} \right)^2 + \frac{y^2}{n^2} \right]^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2 + y^2 + 2xn}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = e^x.$$

Puesto que

$$\varphi_n = \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x},$$

entonces

$$\arg z_n = \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = n \arg \left(1 + \frac{z}{n} \right) = n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{arctg} \frac{y}{n+x} = y.$$

Utilizando la condición suficiente de la convergencia de sucesión de los números complejos, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^z.$$

Lo que queda completamente demostrado.

Ejemplo 4. Demostrar que la sucesión

$$z_n = \arg \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

diverge.

Demostración. Puesto que

$$z_n = \arg \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{para } n \text{ par,} \\ \pi & \text{para } n \text{ impar,} \end{cases}$$

por consiguiente, la sucesión $\{z_n\}$ tiene la forma $\pi, 0, \pi, 0, \dots$ y no tiene límite.

Ejemplo 5. Sea

$$x_n = 1 + \rho \cos \alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \dots + \rho^n \cos n\alpha,$$

donde $0 < \rho < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Hallar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Solución. Suponemos

$$y_n = \rho \sin \alpha + \rho^2 \sin 2\alpha + \dots + \rho^n \sin n\alpha$$

y examinemos el límite de sucesión de los números complejos

$$z_n = x_n + iy_n = 1 + \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha) + \rho^2 (\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha) + \dots$$

$$\dots + \rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).$$

Supongamos

$$t = \rho (\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad |t| = \rho < 1.$$

Utilizando la fórmula de Moivre y la fórmula de la suma de progresión geométrica, obtenemos

$$z_n = 1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t},$$

y puesto que $|t| < 1$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{1 - t}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} z_n &= \operatorname{Re} \frac{1}{1 - t} = \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \rho(\cos \alpha + i \sin \alpha)} = \\ &= \frac{1 - \rho \cos \alpha}{(1 - \rho \cos \alpha)^2 + \rho^2 \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \rho \cos \alpha}{1 - 2\rho \cos \alpha + \rho^2}. \end{aligned}$$

Suponemos que tenemos la sucesión $\{z_n\}$ de los números complejos

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

Si para cualquier número grande $M > 0$ existe tal número natural N que todos los términos z_n de sucesión con los números $n > N$ satisfacen la desigualdad $|z_n| > M$, entonces se dice que la sucesión $\{z_n\}$ converge en punto infinito o más simple, en el infinito y escriben $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$.

Completando el plano de la variable compleja con tal introducido punto infinitamente alejado $z = \infty$, obtenemos el plano extendido de la variable compleja.

El entorno del punto infinito se llama el conjunto de todos los puntos z que satisfacen la desigualdad $|z| > R$ (adjunto con un punto infinitamente alejado), es decir, conjunto de todos los puntos z que se encuentran fuera del círculo con el centro en el origen de coordenadas del radio R suficientemente grande.

Hallar los límites de sucesiones siguientes:

$$82. z_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{i \frac{\pi}{n}}.$$

$$83. z_n = \frac{i^n}{n}.$$

$$84. z_n = (1 + 3i)^n.$$

$$85. z_n = \frac{e^{in}}{n^2}.$$

$$86. z_n = \frac{n+2i}{3n+7i}.$$

$$87. z_n = e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2n}\right)}.$$

$$88. z_n = n \operatorname{sen} \frac{i}{n}.$$

$$89. z_n = n \cos \frac{n\pi}{2} + in \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}. \quad 90. z_n = \frac{\operatorname{sh} in}{n}.$$

91. Se sabe que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty, \quad z_n = x_n + iy_n.$$

¿Qué se puede decir de la existencia de los límites de sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ para $n \rightarrow \infty$?

2. Definición 1. El entorno del punto z_0 del plano de la variable compleja z se llama cada región que contiene este punto; δ -entorno del punto z_0 se llama el conjunto de todos los puntos z que se encuentran dentro del círculo del radio δ con el centro en el punto z_0 , es decir, el conjunto de todos los puntos z que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| < \delta$.

Sea la función $f(z)$ determinada en cierto entorno Ω del punto z_0 , menos puede ser, el mismo punto z_0 .

Definición 2. El número A se llama el límite de la función $f(z)$ en el punto z_0 , si para cualquier número $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ que para todos los puntos $z \in \Omega$ que satisfacen la condición $0 < |z - z_0| < \delta$ se cumple la desigualdad

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

En este caso escriben

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Se supone aquí que z_0 y A son los puntos finales del plano complejo.

Citamos una definición más del límite de una función en el punto. Sea la función $f(z)$ determinada en cierto entorno Ω del punto z_0 , salvo puede ser el mismo punto z_0 .

Definición 3. Si para cualquiera sucesión $\{z_n\}$, $z_n \neq z_0$ que converge en el punto z_0 , la sucesión correspondiente de valores de una función $\{f(z_n)\}$ converge en el mismo número complejo A , este número A se llaman el límite de la función $f(z)$ en el punto z_0 :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A.$$

Aquí no se presupone el finito de z_0 y A .

La existencia del $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, donde

$$z \rightarrow z_0$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

es equivalente a la existencia de dos límites

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y);$$

con todo eso

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y).$$

Los límites de funciones de variable compleja tienen las propiedades siguientes.

Dado que existen los límites

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B.$$

Entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)g(z)] = AB$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

Definición 4. Función $f(z)$ prefijada en el dominio D se llama continua en el punto $z_0 \in D$, si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

En otras palabras: la función $f(z)$ es continua en el punto z_0 , si para cada número $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ que para todos los puntos $z \in D$ que satisfacen a la condición $|z - z_0| < \delta$, tiene lugar la desigualdad $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Para la continuidad de función de variable compleja

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ es necesario y suficiente que sus partes real e imaginaria, es decir las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, sean continuas en el punto (x_0, y_0) por el conjunto de variables x y y .

Definición 5. La función $f(z)$ de variable compleja se llama continua en el dominio D , si ella es continua en cada punto de este dominio.

La suma, diferencia y el producto de dos funciones de variable compleja $f(z)$ y $g(z)$ que son continuas en el dominio D también son funciones continuas en este dominio, y la función $\frac{f(z)}{g(z)}$ es continua en aquellos puntos del dominio D , donde $g(z) \neq 0$.

Si la función $f(y)$ es continua en el punto z_0 , y la función $F(\tau)$ es continua en el punto $\tau_0 = f(z_0)$, entonces la función compuesta $F[f(z)]$ es continua en el punto z_0 .

Ejemplo 6. Sea dada la función lineal

$$w = f(z) = az + b,$$

donde a y b son las constantes complejas. Demostrar que en el punto z_0 esta función tiene límite igual a $w_0 = az_0 + b$, $a \neq 0$.

Demostración. En realidad, tomemos un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Puesto que

$$|f(z) - w_0| = |(az + b) - (az_0 + b)| = |az - az_0| = |a| \cdot |z - z_0|,$$

entonces, escogiendo en calidad de $\delta(\varepsilon) > 0$ el numero $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$, obtendremos $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ para $0 < |z - z_0| < \delta$. Esto significa que $w_0 = az_0 + b$ es el límite de la función $f(z) = az + b$ en el punto z_0 .

Por lo que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = az_0 + b = f(z_0),$$

entonces queda demostrado que en cada punto z_0 la función lineal es continua.

Ejemplo 7. Mostrar que la función $w = z^2$ es continua para cualquier valor z .

Solución. Tomemos un punto arbitrario z_0 y un número arbitrario $\varepsilon > 0$. Puesto que el valor de la función $f(z) = z^2$ en el punto z_0 es igual a $f(z_0) = z_0^2$, entonces mostremos que existe el número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|z^2 - z_0^2| < \varepsilon$ para $|z - z_0| < \delta$.

Si $z \rightarrow z_0$, entonces se halla tal número $M > 0$ que $|z| < M$ y $|z_0| < M$. Entonces

$$\begin{aligned} |z^2 - z_0^2| &= |(z + z_0)(z - z_0)| = \\ &= |z + z_0| \cdot |z - z_0| < (|z| + |z_0|) |z - z_0| < \\ &< 2M |z - z_0|. \end{aligned}$$

Si suponemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, entonces de la desigualdad $|z - z_0| < \delta$ sigue que

$$|z^2 - z_0^2| < 2M \delta \leqslant \varepsilon,$$

es decir, para cualquier z_0 la función $w = z^2$ es continua.

Utilizando la definición del límite, mostrar que

$$92. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z+1}{z+2} = 1. \quad 93. \lim_{z \rightarrow 3-4i} |z| = 5.$$

Calcular los límites siguientes:

$$94. \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^2 + 3iz - 2}{z + i}. \quad 95. \lim_{z \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2z}{\operatorname{ch} iz + i \operatorname{sh} iz}.$$

$$96. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{sh} iz}. \quad 97. \lim_{z \rightarrow -\frac{\pi}{2}i} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}.$$

Demostrar que las funciones siguientes son continuas en todo el plano complejo:

$$98. f(z) = z. \quad 99. f(z) = \operatorname{Re} z. \quad 100. f(z) = \operatorname{Im} z.$$

101. $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, donde a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) son las constantes complejas.

102. Demostrar que la función racional $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios, es continua en todos los puntos del plano complejo z , en los cuales $Q(z) \neq 0$.

103. Mostrar que la función $w = e^z$ es continua en todos los puntos del plano complejo.

§ 4. Diferenciación de funciones de variable compleja. Condiciones de Cauchy-Riemann

Sea la función $w = f(z)$ determinada en cierto dominio D de la variable compleja z . Sea que los puntos z y $z + \Delta z$ pertenecen al dominio D . Designemos

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y.$$

Definición 1. Función $w = f(z)$ se llama *diferenciable en el punto $z \in D$* , si la relación $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ tiene el límite finito para Δz que tiende al cero de un modo arbitrario. Este límite se llama la *derivada de la función $f(z)$ en el punto dado z* y se designa por el símbolo $f'(z)$ ($\text{o } w' \text{ o } \frac{dw}{dz}$), entonces según la definición

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (1)$$

Si $z = x + iy$, $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces en cada punto de diferenciabilidad de función $f(z)$ se cumplen las relaciones

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

que se llaman *condiciones de Cauchy-Riemann*.

A la razón inversa, si en cierto punto (x, y) las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son diferenciables como las funciones de las variables reales x y y , además, satisfacen las relaciones (2), entonces la función $f(z) = u + iv$ es diferenciable en el punto $z = x + iy$ como la función de la variable compleja z .

Definición 2. Función $w = f(z)$ se llama *analítica en el punto dado $z \in D$* , si ella es diferenciable tanto en el mismo punto z , como en su cierto entorno. La función $f(z)$ se llama *analítica en el dominio D* , si es diferenciable en cada punto de este dominio. Para cualquiera función analítica $f(z)$ tenemos

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Ejemplo 1. Mostrar que la función $w = e^z$ es analítica en todo el plano complejo.

Solución. Tenemos $e^z = e^x \cos y + i \sin y$, entonces

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ como funciones de variables reales x y y son diferenciables en cualquier punto (x, y) (tienen las derivadas parciales continuas de cualquier orden) y con todo eso satisfacen a las condiciones (2).

Por consiguiente, la función $w = e^z$ es analítica por doquier. En virtud de la fórmula (3) obtenemos para $f(z) = e^z$

$$(e^z)' = (e^x \cos y)_x' + i(e^x \sin y)_x' = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Pues $(e^z)' = e^z$.

Ejemplo 2. Si es la función $w = z\bar{z}$ analítica por lo menos en un punto.

Solución. Tenemos $\bar{z} = x^2 + y^2$ así que

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0.$$

Las condiciones de Cauchy-Riemann en este caso tienen la forma

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

y satisfacen sólo en el punto $(0, 0)$.

Por consiguiente, la función $w = z\bar{z}$ es diferenciable únicamente en el punto $z = 0$ y no es analítica en ninguna parte.

Mostremos, utilizando la definición 1, que la función $f(z) = z\bar{z}$ es diferenciable en el punto $z = 0$. Al mismo tiempo $f(0) = 0$, por eso

$$\Delta f = f(0 + \Delta z) - f(0) = \Delta z \cdot \bar{\Delta z}$$

y

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z \cdot \bar{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \bar{\Delta z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} (\Delta x - \Delta y) = 0.$$

De tal modo, la derivada $f'(0)$ existe y es igual a cero.

Ejemplo 3. ¿La función $w = \bar{z} = x - iy$ es analítica o no?

Solución. Aquí $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ en todas partes son las funciones diferenciables de variables x y y . Más

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Por consiguiente, $\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$, es decir, la primera de las condiciones de Cauchy-Riemann no se cumple en ningún punto del plano complejo.

Lo que significa que la función $w = z$ no es diferenciable en ninguna parte y, por consiguiente, no es analítica.

Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann, aclarar cuáles funciones de las siguientes son analíticas por lo menos en un punto y cuáles no lo son:

104. a) $w = z^2\bar{z}$; b) $w = ze^z$; c) $w = |z| \bar{z}$; d) $w = e^{z^2}$;
e) $w = |z| \operatorname{Re} \bar{z}$; f) $w = \operatorname{sen} 3z - i$.

105. a) $w = \bar{z} \operatorname{Re} z$; b) $w = \bar{z} \operatorname{Im} z$; c) $w = |z| \operatorname{Im} z$;
d) $w = \operatorname{ch} z$.

106. Mostrar que en el dominio $\operatorname{Re} z > 0$ $w = \ln z$ es la función analítica.

107. Mostrar, utilizando el cálculo directo que para n natural

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

108. Mostrar que si las funciones analíticas $f(z)$ y $\varphi(z)$ satisfacen la condición $f'(z) = \varphi'(z)$, entonces $f(z) = \varphi(z) + \text{const.}$

109. Mostrar que pasando de las coordenadas cartesianas (x, y) a coordenadas polares (ρ, φ) las condiciones de Cauchy—Riemann (2) obtienen la forma

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (4)$$

110. Mostrar que si la función analítica $w = f(z)$ en cierto dominio es real, entonces esta función es constante.

111. Mostrar que si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en el dominio D , entonces en este dominio se cumple la igualdad

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

112. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ la función analítica en el dominio D . Mostrar que las familias de líneas $u(x, y) = \text{const}$ y $v(x, y) = \text{const}$ son ortogonales.

113. Mostrar que el módulo y el argumento de la función analítica

$$f(z) = R(x, y) e^{i\Phi(x, y)}$$

se conectan por las relaciones

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = -R \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Utilizando las condiciones de Cauchy-Riemann se puede reconstruir la función analítica $f(z)$, si se sabe su parte real $u(x, y)$ o su parte imaginaria $v(x, y)$ (véase [17]).

Además, la función analítica $f(z)$ en el entorno del punto z_0 se puede reconstruir a partir de una de las fórmulas siguientes (véase [10]):

$$f(z) = 2u \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) - \bar{C}_0. \quad (5)$$

$$f(z) = 2iv \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) + \bar{C}_0, \quad (6)$$

donde \bar{C} es el número conjugado para $C_0 = f(z)$ y \bar{z} es el número conjugado para z_0 .

Ejemplo 4. Hallar la función analítica $w = f(z)$ a partir de su parte real conocida $u(x, y) = 2e^x \cos y$ y con la condición complementaria $f(0) = 2$.

Solución. Primer procedimiento. Tenemos $\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^x \cos y$. A partir de las condiciones de Cauchy-Riemann debe ser $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, entonces, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2e^x \cos y$. De aquí $v(x, y) = \int 2e^x \cos y dy = 2e^x \sin y + \varphi(x)$, donde la función $\varphi(x)$ no es conocida por ahora. Diferenciando $v(x, y)$ a partir de x y utilizando la segunda condición de las condiciones de Cauchy-Riemann, obtendremos

$$2e^x \sin y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^x \sin y,$$

de donde $\varphi'(x) = 0$ y, por consiguiente, $\varphi(x) = C$, donde $C = \text{const.}$

Pues, $v(x, y) = 2e^x \sin y + C$, y por consiguiente,

$$f(z) = 2e^x \cos y + i(2e^x \sin y + C) = 2e^z + iC.$$

Hallamos la constante C de la condición $f(0) = 2$, es decir, $2e^0 + iC = 2$; de aquí $C = 0$. Respuesta: $f(z) = 2e^z$.

Segundo procedimiento. Utilizemos la fórmula (5). En nuestro ejemplo $u(x, y) = 2e^x \cos y$, $z_0 = 0$, $C_0 = 2$. Por consiguiente, en virtud de la fórmula (5) obtendremos $f(z) = 2 \cdot 2e^{z/2} \cos \frac{z}{2i} - 2$.

Utilizando que $\cos \frac{z}{2i} = \cos \left(-\frac{iz}{2}\right) = \operatorname{ch} \frac{z}{2}$, obtenemos definitivamente $f(z) = 2e^z$.

Ejemplo 5. Hallar la función analítica $w = f(z)$ por su parte imaginaria conocida $v(x, y) = 3x + 2xy$ para la condición que $f(-i) = 2$.

Solución. Utilizemos la fórmula (6). En nuestro ejemplo $v(x, y) = 3x + 2xy$, $z_0 = -i$, $C_0 = 2$, por consiguiente,

$$f(z) = 2i \left(3 \frac{z+i}{2} + 2 \frac{z+i}{2} \cdot \frac{z-i}{2i} \right) + 2 = 3iz + z^2.$$

Reconstruir la función analítica $f(z)$ en el entorno del punto z_0 a partir de la parte real $u(x, y)$ o de la parte imaginaria $v(x, y)$ y del valor $f(z_0)$:

114. a) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$;

b) $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ($x > 0$), $f(1) = 0$.

c) $u = x^2 - y^2 + 2x$, $f(i) = 2i - 1$.

115. a) $v = 2(\operatorname{ch} x \operatorname{sen} y - xy)$, $f(0) = 0$;

b) $u = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{ch} y - x$, $f(0) = 0$;

- c) $v = 2(2 \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y + xy)$, $f(0) = 3$.
 116. a) $v = -2 \operatorname{sen} 2x \operatorname{sh} 2y + y$, $f(0) = 2$;
 b) $v = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, $f(0) = 2$.

Definición 3. La función $\varphi(x, y)$ se llama *armónica en el dominio D*, si tiene en este dominio las derivadas parciales continuas hasta el segundo orden inclusive y si satisface en este dominio la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Si la función $f(z) = u + iv$ es analítica en cierto dominio D , entonces su parte real $u(x, y)$ y la parte imaginaria $v(x, y)$ son las funciones armónicas en este dominio.

Sin embargo, si $u_1(x, y)$ y $v_1(x, y)$ son dos funciones armónicas cualesquiera, entonces la función $f_1(z) = u_1(x, y) + iv_1(x, y)$ no es obligatoriamente analítica: para la analiticidad de $f_1(z)$ es necesario que las funciones u_1 y v_1 satisfagan complementariamente las condiciones de Cauchy-Riemann.

Dos funciones armónicas que satisfacen las condiciones (2) se llaman *un par conjugado de las funciones armónicas* (es importante el orden de las funciones en el par).

117. Mostrar que las funciones siguientes son armónicas:

- a) $u = x^2 + 2x - y^2$; b) $u = 2e^x \cos y$; c) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$;
 d) $u = -\frac{y}{x^2 + y^2}$; e) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; f) $u = \ln(x^2 + y^2)$.

118. ¿Pueden ser las partes real o imaginaria de una función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ las funciones siguientes?

- a) $u = x^2 - y^2 + 2xy$; b) $u = x^2$; c) $v = \ln(x^2 + y^2)$;
 d) $v = \frac{x^2 + 1}{2} y^2$.

119. ¿Para qué condiciones el trinomio $u = ax^2 + 2bxy + cy^2$ es la función armónica?

En los ejemplos siguientes se dan los pares $u(x, y)$, $v(x, y)$ de funciones armónicas. Hallar entre ellos los pares conjugados de las funciones armónicas.

120. a) $u = 3(x^2 - y^2)$, $v = 3x^2y - y^3$;
 b) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$;
 c) $u = x$, $v = -y$; d) $u = e^x \cos y + 1$, $v = 1 + e^x \operatorname{sen} y$.

121. Sea la función $u(x, y)$ armónica en el dominio D , donde esta función tiene las derivadas parciales continuas de cualquier orden. Mostrar que las últimas serán también funciones armónicas en el dominio D .

122. Sea la función $u = u(x, y)$ es armónica en el dominio D . Hallar todas las funciones f , para las cuales la función $f(u)$ será también armónica en el dominio D .

123. Sea analítica la función $w = f(z)$ en el dominio D . ¿Qué funciones de las siguientes

$$\text{a) } |w|; \text{ b) } \arg w; \text{ c) } \ln |w|$$

serán armónicas en el dominio D ?

124. Demostrar que el producto de las funciones conjugadas armónicas en el dominio D $u(x, y), v(x, y)$ será la función armónica en el dominio D .

125. Sea $u = u(x, y), v = v(x, y)$ un par conjugado de las funciones armónicas en el dominio D . ¿Cuáles de los pares siguientes de funciones

$$\text{a) } Au - Bv, Bu + Av, A, B - \text{const};$$

$$\text{b) } u^2 - v^2, uv;$$

$$\text{c) } e^u \cos v, e^u \sin v$$

serán las funciones armónicas en el dominio D ?

Ejemplo 6. Hallar todas las funciones armónicas del tipo $u = f(x^2 + y^2)$ que se diferencian de la constante.

Solución. Puesto que las funciones buscadas deben ser armónicas, estas funciones deben satisfacer la ecuación de Laplace

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (7)$$

Sustituimos la función dada en la ecuación (7). Para eso hallemos sus derivadas del segundo orden. Supongamos $t = x^2 + y^2$. Entonces obtendremos $u = f(t)$, donde $t = t(x, y)$. A partir de la regla de diferenciación de la función compuesta hallamos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(t) \frac{\partial t}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(t) \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + f'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(t) \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + f'(t) \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}.$$

Sumando dos últimas igualdades, obtenemos

$$\left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 \right] f''(t) + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) f'(t) = 0$$

$$tf''(t) + f'(t) = 0.$$

Para hallar la función f recibimos la ecuación de Euler

$$t^2f''(t) + tf'(t) = 0,$$

la resolución general de la cual es la función

$$f(t) = C_1 \ln t + C_2, \quad C_1, C_2 \text{ son const.}$$

Pues, las funciones armónicas buscadas tienen la forma

$$u = f(x^2 + y^2) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2.$$

En los problemas siguientes hallar todas las funciones armónicas del tipo indicado:

$$126. \quad x = f(ax + by); \quad a, b \text{ son constantes.}$$

$$127. \quad u = f(xy). \quad 128. \quad u = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$129. \quad u = f(x^2 - y^2). \quad 130. \quad u = f(x + \sqrt{x^2 + y^2}).$$

$$131. \quad u = f\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right).$$

Sentido geométrico del módulo y argumento de la derivada

Sea la función $f(z)$ analítica en el punto z_0 y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces $|f'(z_0)|$ es igual al coeficiente del estiramiento en el punto z_0 para la aplicación $w = f(z)$ del plano z en el plano w ; más exactamente: para $|f'(z_0)| > 1$ tiene lugar el estiramiento y para $|f'(z_0)| < 1$ existe la contracción.

El argumento de la derivada $f'(z_0)$ geométricamente es igual al ángulo en que es necesario girar la tangente en el punto z_0 , a la cualquiera curva lisa en el plano z que pasa por el punto z_0 para recibir la dirección de la tangente en el punto $w_0 = f(z_0)$ a la imagen de esta curva en el plano w para la aplicación $w = f(z)$. Es comprensible que si $\varphi = \arg f'(z) > 0$, entonces el giro se realiza de derecha a la izquierda y para $\varphi < 0$, en sentido horario.

Ejemplo 7. Hallar el coeficiente de estiramiento y el ángulo del giro para la aplicación $w = z^2$ en el punto $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Solución. Tenemos $w'(z) = 2z$, por consiguiente,

$$w'|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$$

Pasando de la forma algebraica del número complejo $2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$ a la forma trigonométrica, obtenemos

$$2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Por consiguiente,

$$|f'(z)|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = 4,$$

$$\arg f'(z)|_{z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4},$$

es decir, el coeficiente de estiramiento $r = 4$ y el ángulo del giro $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Hallar el coeficiente de estiramiento r y el ángulo del giro φ para las aplicaciones prefijadas $w = f(z)$ en los puntos dados:

$$132. \text{ a) } w = e^z \text{ en los puntos } z_1 = \ln 2 + i \frac{\pi}{4} \text{ y } z_2 = -1 - i \frac{\pi}{2};$$

$$\text{b) } w = \operatorname{sen} z \text{ en los puntos } z_1 = 0 \text{ y } z_2 = 1 + i;$$

$$\text{c) } w = z^3 \text{ en los puntos } z_1 = 2 - i \text{ y } z_2 = 1 + i \frac{\pi}{2}.$$

133. Aclarar que parte del plano complejo se estira y que contracciona si las aplicaciones son siguientes:

$$\text{a) } w = e^z; \text{ b) } w = \ln z; \text{ c) } w = \frac{1}{z}; \text{ d) } w = z^3.$$

Si la función $w = f(z)$ es analítica en cierto dominio D , aplica biunívocamente este dominio en el dominio \tilde{D} , entonces la curva L que se encuentra en el dominio D aplica en cierta curva \tilde{L} en el plano w , la longitud de la cual es igual a

$$l_w = \int_L |f'(z)| |dz|. \quad (8)$$

El dominio D en el plano z para la aplicación $w = f(z)$ pasa en el dominio \tilde{D} en el plano w , al mismo tiempo el área del dominio \tilde{D} se expresa por la fórmula

$$S_{\tilde{D}} = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy. \quad (9)$$

De tal modo, $|f'(z)|^2$ es igual al coeficiente de la desfiguración del área para la aplicación $w = f(z)$.

Ejemplo 8. El punto $z = x + iy$ traza el segmento

$$x = 1, \quad -1 \leq y \leq 1. \quad (10)$$

¿Cuál es la longitud de la línea que se recibe para la aplicación de este segmento mediante la función $w = z^2$?

Solución. Primer procedimiento. Tenemos $w = z^2$ o

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy,$$

es decir

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy. \end{cases}$$

Es evidente que en la línea (10) vamos a tener

$$\begin{cases} u = 1 - y^2, \\ v = 2y, \end{cases} \quad (11)$$

al mismo tiempo para el cambio y de -1 a $+1$ v se cambia de -2 hasta $+2$. De (14) obtenemos la ecuación de parábola

$$u = 1 - \frac{v^2}{4} \quad (\text{fig. 3}) \quad (12)$$

La longitud del arco $A'B'C'$ de la parábola (12)

$$l_w = 2 \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{v^2}{4}} dv = \int_0^2 \sqrt{4 + v^2} dv = 2\sqrt{2} + \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

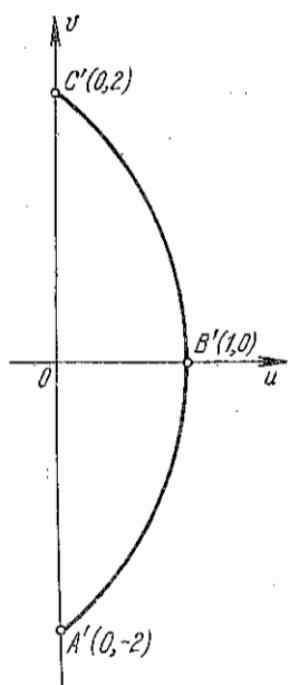


Fig. 3

Segundo procedimiento. Utilizando la fórmula (8), obtendremos

$$\begin{aligned} l_w &= \int_L^L |f'(z)| |dz| = \\ &= \int_L^L |2z| |az| = 4 \int_{-1}^1 \sqrt{1+y^2} dy = \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{1+y^2} dy = 2\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Ejemplo 9. Calcular el área del dominio en el cual se transforma para la aplicación $w = e^z$ el cuadrado

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon,$$

$$-\varepsilon \leq y \leq \varepsilon \quad (\text{fig. 4})$$

(a es real, $0 < \varepsilon < \pi$,

$$z = x + iy).$$

Calcular el límite de la relación de las áreas de estos dominios cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Solución. El primer procedimiento. Tenemos $w = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$ o $w = \rho e^{i\varphi}$, donde $\rho = e^x$, $\varphi = y$. De tal modo, en el caso de la aplicación $w = e^z$ en el plano w obtenemos el dominio limitado por dos rayos $\arg w = -\varepsilon$ y $\arg w = \varepsilon$ y por los arcos de las dos circunferencias $\rho = e^{a-\varepsilon}$ y $\rho = e^{a+\varepsilon}$ (fig. 5). El área del dominio aplicado será igual a

$$S_w = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\varphi \int_{e^{a-\varepsilon}}^{e^{a+\varepsilon}} \rho d\rho = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon} (e^{4\varepsilon} - 1).$$

Segundo procedimiento. Utilizando la fórmula (9), tenemos

$$\begin{aligned} S_w &= \iint_D |f'(z)|^2 dx dy = \iint_D e^{2x} dx dy = \\ &= \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} e^{2x} dx \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dy = \varepsilon e^{2a-2\varepsilon} (e^{4\varepsilon} - 1). \end{aligned}$$

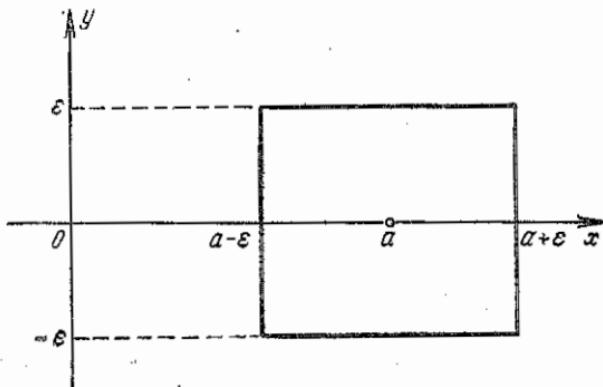


Fig. 4

Es evidente que el área S_z del dominio D es igual a $S_z = 4\varepsilon^2$, por eso

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_w}{S_z} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon e^{2a-2\varepsilon} (e^{4\varepsilon} - 1)}{4\varepsilon^2} = e^{2a}.$$

134. Hallar el área de imagen del cuadrado $D \{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ para la aplicación $w = z^2$ y la longitud de su frontera.

135. Hallar el área de imagen del rectángulo

$$P \left\{ 0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2 < \frac{\pi}{2}, 0 < y_1 \leqslant y \leqslant y_2 < \frac{\pi}{2} \right\}$$

para la aplicación $w = \cos z$.

136. Sea z que circunscribe el dominio definido por las condiciones

$$1 \leqslant |z| \leqslant 2, \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Hallar el área del dominio recibido al aplicar $w = z^2$.

137. Hallar la longitud L de la espiral en que mediante la función $w = e^z$ se aplica el segmento $y = x, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

138. Hallar el dominio P_w en el cual la función $w = e^z$ aplica el rectángulo $P \{1 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 8\}$. Calcular el área del dominio P_w mediante la fórmula (9) y explicar, porque esta fórmula da un resultado falso.

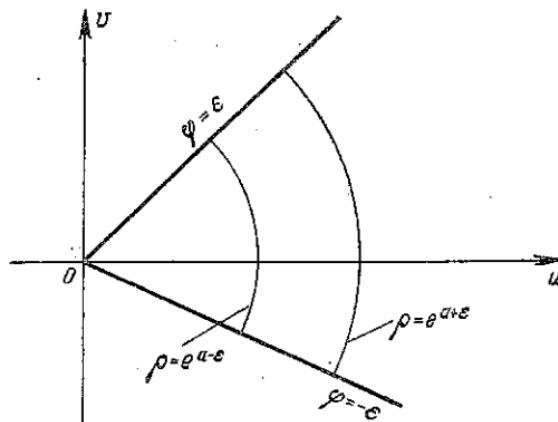


Fig. 5

139. Hallar el área de una figura que se obtiene aplicando triángulo limitado por las líneas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ mediante la función $w = 1 + iz$.

§ 5. Integración de funciones de variable compleja

Sea una función unívoca $f(z)$ determinada y continua en el dominio D y C , una orientada curva suave a trozos, cerrada o no que se encuentra en D .

Sea

$$z = x + iy, \quad f(z) = u + iv,$$

donde $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ son las funciones reales de las variables x y y .

El cálculo de la integral de la función $f(z)$ de la variable compleja z reduce al cálculo de las integrales curvilíneas, es decir,

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (4)$$

La integral $\int_C f(z) dz$, en rasgos generales, depende del modo de integración C .

Si $f(z)$ es la función analítica en el dominio simplemente conexo D , entonces la integral no depende del modo de integración. En este caso

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

donde L es un contorno cerrado suave a trozos en el dominio D .

Si la curva C está prefijada por las ecuaciones paramétricas

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

y los puntos inicial y final del arco C corresponden a los valores del parámetro $t = t_0$, $t = t_1$, entonces

$$\int_C f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} [z(t)] z'(t) dt, \quad (2)$$

donde

$$z(t) = x(t) + iy(t).$$

Si la función $f(z)$ es analítica en el dominio simplemente conexo D que contiene los puntos z_0 y z_1 , entonces tiene lugar la fórmula de Neuton-Leibniz

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0) = \Phi(z)|_{z_0}^{z_1}, \quad (3)$$

donde $\Phi(z)$ es alguna primitiva para la función $f(z)$, es decir,

$$\Phi'(z) = f(z)$$

en el dominio D .

Si las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ son analíticas en el dominio simplemente conexo D y z_0 y z_1 son los puntos arbitrarios de este dominio, entonces tiene lugar la fórmula de integración por partes:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) \varphi'(z) dz = [f(z) \varphi(z)]|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z) f'(z) dz.$$

La sustitución de variables en integrales a partir de las funciones de variable compleja se realiza análogamente al caso de la función de la variable real. Sea la función analítica $z = \varphi(w)$ que aplica biunívocamente el contorno C_1 en w -plano en el contorno C en z -plano. Entonces

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f[\varphi(w)] \varphi'(w) dw.$$

Si el modo de integración es semirrecta que sale del punto z_0 o es la circunferencia con el centro en el punto z_0 , entonces es útil hacer la sustitución de la variable del tipo

$$z - z_0 = \rho e^{i\varphi}.$$

En primer caso $\varphi = \text{const}$, y ρ es la variable real de integración, en segundo caso $\rho = \text{const}$ y φ es la variable real de integración.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int_C (1+i-2\bar{z}) dz$$

por líneas que conectan los puntos $z_1 = 0$, y $z_2 = 1 + i$,

1) por la recta;

2) por la parábola $y = x^2$;

3) por la quebrada $z_1 z_2 z_3$, donde $z_3 = 1$.

Solución. Reescribiremos la función subintegral en forma

$$1+i-2\bar{z} = (1-2x) + i(1+2y).$$

Aquí $u = 1-2x$, $v = 1+2y$.

Utilizando la fórmula (1), obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C (1+i-2\bar{z}) dz &= \int_C (1-2x) dx - (1+2y) dy + \\ &\quad + i \int_C (1+2y) dx + (1-2x) dy. \end{aligned}$$

1) La ecuación de la recta que pasa por los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + i$ es $y = x$, $0 \leq x \leq 1$, y por consiguiente, $dy = dx$. Por eso

$$\begin{aligned} \int_C (1+i-2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [(1-2x) - (1+2x)] dx + \\ &\quad + i \int_0^1 [(1+2x) + (1-2x)] dx = 2(i-1). \end{aligned}$$

2) Para la parábola $y = x^2$ tenemos $dy = 2x dx$ ($0 \leq x \leq 1$)
Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \int_C (1+i-2\bar{z}) dz &= \int_0^1 [1-2x-(1+2x^2)2x] dx + \\ &\quad + i \int_0^1 [1+2x^2+(1-2x)2x] dx = -2 + \frac{4}{3}i. \end{aligned}$$

3) En el segmento $z_1 z_3$: $y = 0$, $dy = 0$, $0 \leq x \leq 1$. En el segmento $z_2 z_3$: $x = 1$, $dx = 0$, $0 \leq y \leq 1$. Utilizando la propiedad de linealidad de las integrales curvilíneas, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C (1+i-2\bar{z}) dz &= \int_{z_1 z_3} (1+i-2\bar{z}) dz + \int_{z_2 z_3} (1+i-2\bar{z}) dz = \\ &= \int_0^1 (1-2x) dz + i \int_0^1 dx - \int_0^1 (1+2y) dy + i \int_0^1 (1-2 \cdot 1) dy = -2. \end{aligned}$$

Este ejemplo muestra que la integral de la función continua pero no analítica depende, en general, de la forma del modo de integración.

Ejemplo 2. Calcular la integral

$$\int_C (z^2 + z\bar{z}) dz,$$

donde C es el arco de circunferencia $|z| = 1$ ($0 \leq \arg z \leq \pi$).

Solución. Supongamos que $z = e^{i\varphi}$, entonces $dz = ie^{i\varphi} d\varphi$ y

$$\begin{aligned} \int_C (z^2 + z\bar{z}) dz &= \int_0^\pi ie^{i\varphi} (e^{i2\varphi} + 1) d\varphi = i \int_0^\pi (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}) d\varphi = \\ &= \left(\frac{1}{3} e^{i3\varphi} + e^{i\varphi} \right) \Big|_0^\pi = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Calcular la integral $\int_C e^{\bar{z}} dz$, donde C es el segmento de la recta $y = -x$ que conecta los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = \pi - i\pi$.

Solución. Las ecuaciones paramétricas de la línea C son

$$x = t, \quad y = -t$$

o en la forma compleja

$$z = t - it,$$

donde la variable real t se cambia de 0 hasta π .

Empleando la fórmula (2) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_C e^{\bar{z}} dz &= \int_0^\pi e^{t+it} (1-i) dt = (1-i) \int_0^\pi e^{(1+i)t} dt = \\ &= \frac{1-i}{1+i} e^{(1+i)t} \Big|_0^\pi = (e^\pi + 1)i. \end{aligned}$$

Ejemplo 4. Calcular la integral

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz.$$

Solución. Puesto que la función subintegral $f(z) = 3z^2 + 2z$ es analizable en todas partes, entonces utilizando la fórmula de Newton-Leibniz, hallamos

$$\begin{aligned} \int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z) dz &= (z^3 + z^2) \Big|_{1-i}^{2+i} = \\ &= (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 = 7 + 19i \end{aligned}$$

Ejemplo 5. Calcular la integral

$$\int_0^i z \cos z dz.$$

Solución. Las funciones $f(z) = z$ y $\varphi(z) = \cos z$ son analizables en todas partes. Empleando la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^i z \cos z dz &= \int_0^i z (\operatorname{sen} z)' dz = (z \operatorname{sen} z)|_0^i - \int_0^i \operatorname{sen} z dz = \\ &= i \operatorname{sen} i + \cos i|_0^i = -\operatorname{sh} 1 + \operatorname{ch} 1 - 1 = \frac{1-e}{e}. \end{aligned}$$

Ramas unívocas de una función multiforme.

Puntos de ramificación

Sea que la función $w = f(z)$ es analítica en el dominio D y aplica D en el dominio G y es tal que la función inversa $z = \varphi(w)$ es multiforme en el dominio G . Si existen funciones uniformes, analíticas $z = \varphi_1(w), z = \varphi_2(w), \dots$, en el dominio G , para las cuales la función dada $w = f(z)$ es inversa, entonces las funciones $\varphi_1(w), \varphi_2(w), \dots$ se llaman *ramas unívocas de la función* $\varphi(w)$ determinadas en el dominio G .

Por ejemplo, la función $w = z^n$ a cada punto z_0 le asigna en correspondencia el único punto w_0 , pero a cada un punto w_0 ($w \neq 0, w \neq \infty$) la función $z = \sqrt[n]{w}$ le asigna en correspondencia n puntos diferentes del plano z ; al mismo tiempo, si $w = pe^{i\theta}$, entonces estos n valores de z se hallan mediante las fórmulas $z_k = re^{i(\theta + 2k\pi)/n}$, donde

$$r = \sqrt[n]{p}, \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (-\pi < \theta \leq \pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Sea que el dominio simplemente conexo G contiene el punto w_0 , pero no contiene los puntos $w = 0$ y $w = \infty$. Entonces a varios valores fijos de k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) para la misma elección del número θ_0 (por ejemplo, $\theta_0 = \arg w_0$) le corresponden las ramas diferentes de la función $z = \sqrt[n]{w}$.

El punto que tiene tal propiedad que el recorrido alrededor de éste en un entorno suficientemente pequeño proporciona el paso de una rama de la función multiforme a la otra, se llama el *punto de ramificación* de la función multiforme que consideramos. Los puntos de ramificación de la función $\sqrt[n]{w}$ son los puntos $w = 0$ y $w = \infty$.

Después de recorrer n veces alrededor del punto $w = 0$ nos volvemos a la rama inicial de la función $\sqrt[n]{w}$; los puntos de ramificación que tienen esta propiedad se llaman los puntos *algebraicas* de ramificación del orden $n-1$. En cada uno de estos puntos la función tiene un sólo valor: $\sqrt[n]{0} = 0, \sqrt[n]{\infty} = \infty$, es decir, en dichos puntos las ramas diferentes de la función coinciden.

Para la función logarítmica $w = \ln z$ los puntos de ramificación son $z = 0$ y $z = \infty$, al mismo tiempo, $\ln 0 = \infty$ y $\ln \infty = \infty$. Un cualquier número finito de recorridos (en la misma dirección) alrededor del punto $z = 0$ no conduce a la rama inicial de función $\ln z$. Tales puntos de ramificación se llaman *logarítmicos*. Al integrar es necesario separar una rama de la función multiforme. Esto se logra prefijando el valor de la función multiforme en cierto punto del contorno de integración.

Si el contorno de integración C está cerrado, entonces el punto inicial z_0 de la integración se considera aquel punto, en el cual está dado el valor de la función subintegral.

Ejemplo 6. Calcular la integral

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

donde C es el arco superior de la circunferencia $|z| = 1$. Para \sqrt{z} se toma aquella rama, para la cual $\sqrt{1} = -1$.

Solución. Primer procedimiento. La función \sqrt{z} tiene dos valores:

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \sqrt{|z|} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right] = \\ &= -|z| \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \end{aligned}$$

donde $\varphi = \arg z$.

Puesto que los valores z se toman en la circunferencia de unidad, entonces $|z| = 1$ y, por consiguiente,

$$\sqrt{z} = \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2},$$

$$\sqrt{z} = -\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}.$$

El segundo valor satisface la condición $\sqrt{1} = -1$

$$\sqrt{z} = -\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (4)$$

Al mismo tiempo, sea $z = 1$, entonces $\arg z = 0$ y

$$\sqrt{1} = -\cos 0 - i \sin 0 = -1.$$

Empleando la fórmula de Newton-Leibniz, obtenemos

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_1^{-1} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}|_1^{-1} = 2(\sqrt{-1} - \sqrt{1}).$$

Suponiendo en la fórmula (4) $z = -1$, hallamos

$$\begin{aligned}\sqrt{-1} &= -\left[\cos \frac{\arg(-1)}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\arg(-1)}{2}\right] = \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = -i.\end{aligned}$$

De acuerdo con la elección de la rama tenemos $\sqrt{1} = -1$ y, definitivamente, obtenemos

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = -2(1-i).$$

Segundo procedimiento. Suponemos que $z = \rho e^{i\varphi}$, donde $\rho = 1$, mientras que φ se cambia de 0 a π . De la condición $\sqrt{1} = -1$ se desprende que $\sqrt{e^{i\varphi}} = e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}$. Ahora tenemos

$$\begin{aligned}\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} &= \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{e^{i\varphi}}} d\varphi = \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i(\frac{\varphi}{2} + \pi)}} = \int_0^\pi ie^{i(\frac{\varphi}{2} - \pi)} d\varphi = \\ &= 2e^{i(\frac{\varphi}{2} - \pi)} \Big|_0^\pi = 2(e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\pi}) = 2(1-i).\end{aligned}$$

Ejemplo 7. Calcular la integral $I = \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz$ a partir del arco

de la circunferencia $|z| = 1$ ($\ln z$ es el valor principal del logaritmo, $\ln 1 = 0$).

Solución. Primer procedimiento. Utilizando la fórmula de Newton-Leibniz, obtenemos

$$\begin{aligned}I &= \int_1^i \frac{\ln^3 z}{z} dz = \int_1^i \ln^3 z d(\ln z) = \frac{\ln^4 z}{4} \Big|_1^i = \\ &= \frac{\ln^4 i - \ln^4 1}{4} = \frac{\ln^4 i}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi i}{2}\right)^4 = \frac{\pi^4}{64}.\end{aligned}$$

Segundo procedimiento. Hacemos la sustitución de la variable

$$\ln z = w, \quad dw = \frac{dz}{z}.$$

El arco de la circunferencia $|z| = 1$ pasa al segmento del eje imaginario comprendido entre los puntos $(0, 0)$ y $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

La integral obtiene la forma

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}i} w^4 dw = \frac{w^5}{5} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{1}{5} \frac{\pi^5 i^5}{2^4} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Tercer procedimiento. Suponemos que $z = e^{i\varphi}$ (aquí $\rho = |z| = 1$). Entonces

$$\ln z = i\varphi, \quad dz = ie^{i\varphi} d\varphi.$$

La variable real φ se cambia en los límites $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. En este caso obtenemos

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{i^3 \varphi^3 e^{i\varphi} i}{e^{i\varphi}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^3 d\varphi = \frac{\varphi^4}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^4}{64}.$$

Calcular las integrales siguientes:

140. $\int_C z \operatorname{Im} z^2 dz$, C : $|z| = 1$ ($-\pi \leq \arg z \leq 0$).

141. $\int_C e^{|z|^2} \operatorname{Re} z dz$, C es la recta que conecta los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$.

142. $\int_C \ln z dz$ ($\ln z$ es el valor principal del logaritmo), C : $|z| = 1$, a) el punto inicial del proceso de integración $z_0 = 1$; b) $z_0 = -1$. El recorrido se efectúa contra el sentido horario.

143. $\int_C z \operatorname{Re} z dz$, C : $|z| = 1$. El recorrido se realiza contra el sentido horario.

144. $\int_C z \bar{z} dz$, C : $|z| = 1$. El recorrido se efectúa contra el sentido horario.

145. $\int_1^i z e^z dz$.

146. $\int_C \operatorname{Re} z dz$, C : a) $z = (2 + i)t$ ($0 \leq t \leq 1$); b) quebrada que se compone del segmento $[0, 2]$ del eje real y del segmento que conecta los puntos $z_1 = 2$ y $z_2 = 2 + i$.

147. $\int_{1+i}^{-1-i} (2z+1) dz.$

148. $\int_0^{i+1} z^3 dz.$

149. $\int_1^i (3z^4 - 2z^3) dz.$

150. $\int_C e^z dz$, C : a) es el arco de parábola $y = x^2$ que conecta los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + i$; b) es el segmento de la recta que conecta estos puntos.

151. $\int_C \cos z dz$, C : es el segmento de la recta que conecta $z_1 = \frac{\pi}{2}$ y $z_2 = \pi + i$.

152. $\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z}}$, C : a) es la mitad superior de la circunferencia $|z| = 1$; se elige aquella rama de la función $\sqrt[4]{z}$ para la cual $\sqrt[4]{1} = 1$;

b) $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \geq 0$, $\sqrt{-i} = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1-i)$.

153. $\int_C \frac{dz}{\sqrt[4]{z^3}}$, C : es la mitad superior de la circunferencia $|z| = 1$; se toma aquella rama de la función $w = \sqrt[4]{z^3}$, para la cual $\sqrt[4]{1} = 1$.

154. $\int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{\frac{z^2}{2}} dz.$ 155. $\int_0^i z \cos z dz.$

156. $\int_1^i z \sin z dz.$ 157. $\int_0^i (z - i) e^{-z} dz.$

158. $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ por el arco de la circunferencia $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$.

159. $\int_1^i \frac{\ln z}{z} dz$ por el segmento de la recta que conecta los puntos $z_1 = 1$ y $z_2 = i$.

$$160. \int_0^{1+i} \sin z \cos z dz.$$

161. $\int_1^i \frac{1 + \operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz$ por la recta que conecta los puntos $z_1 = 1$ y $z_2 = i$.

162. $\int_{-1}^i \frac{\cos z dz}{\sqrt{\sin z}}$ por la recta que conecta los puntos $z_1 = -1$ y $z_2 = i$; elegimos aquella rama de la función $\sqrt{\sin z}$, para la cual $\sqrt{\sin(-1)} = i\sqrt{\sin 1}$.

$$163. \int_C \operatorname{Re}(\sin z) \cos z dz, C: |\operatorname{Im} z| \leq 1, \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}.$$

$$164. \int_C z \operatorname{Im}(z^2) dz, C: |\operatorname{Im} z| \leq 1, \operatorname{Re} z = 1.$$

$$165. \int_{-i}^i z e^{z^2} dz.$$

166. $\int_C \operatorname{tg} z dz$, C : es el arco de la parábola $y = x^2$ que conecta los puntos $z = 0$, $z = 1 + i$.

§ 6. Fórmula integral de Cauchy

Si la función $f(z)$ es analítica en el dominio D limitado por el contorno cerrado suave a trozos C y en el mismo contorno, entonces es válida la fórmula de Cauchy.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} (z_0 \in D), \quad (1)$$

donde el contorno C se recorre de tal modo que el dominio D siempre se queda a la izquierda. La fórmula integral de Cauchy permite calcular algunos integrales.

Ejemplo 1. Calcular la integral

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz.$$

Solución. Dentro de la circunferencia $|z| = 2$ el denominador de fracción se anula en el punto $z_0 = -1$. Para utilizar las fórmulas (1) reescribiremos la integral en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz &= \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{(z+1)(z+3)} dz = \\ &= \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{\frac{z+3}{z-(-1)}} dz. \end{aligned}$$

Aquí $z_0 = -1$ y la función $f(z) = \frac{\operatorname{ch} iz}{z+3}$ es analítica en el círculo $|z| \leq 2$. Por eso

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2 + 4z + 3} dz &= 2\pi i f(-1) = 2\pi i \frac{\operatorname{ch} (-i)}{2} = \\ &= \pi i \operatorname{ch} i = \pi i \cos 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 2. Empleando la fórmula integral de Cauchy, calcular la integral

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz,$$

si: 1) $C: |z - 2| = 1$; 2) $C: |z - 2| = 3$; 3) $C: |z - 2| = 5$.

Solución. 1) En el dominio cerrado, acotado por la circunferencia $|z - 2| = 1$, la función subintegral es analítica, por eso en virtud del teorema de Cauchy

$$\int_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 0_s$$

2) Dentro del dominio, limitado por la circunferencia $|z - 2| = 3$ se encuentra un punto $z = 0$, en el cual el denominador se anula. Reescribiremos la integral en la forma

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = \int_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z} dz..$$

La función $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z}$ es analítica en el dominio dado. Utilizando la fórmula integral de Cauchy ($z_0 = 0$), obtenemos

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz = 2\pi i \frac{e^{z^2}}{z-6} \Big|_{z=0} = 2\pi i \left(-\frac{1}{6} \right) = -\frac{\pi i}{3}.$$

3) En el dominio limitado por la circunferencia $|z - 2| = 5$ tenemos dos puntos $z = 0$, $z = 6$, en los cuales el denominador de la

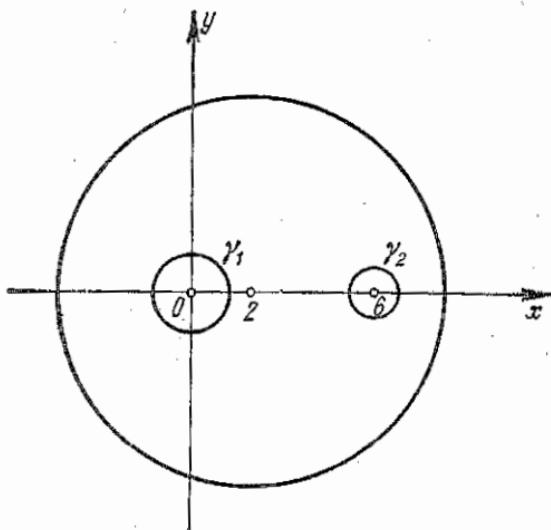


Fig. 6

función subintegral se anula. Es imposible utilizar directamente la fórmula (1). En este caso para calcular la integral se puede hacer lo siguiente.

Primer procedimiento. Desarrollamos la fracción $\frac{1}{z^2 - 6z}$ en fracciones simples. Tenemos

$$\frac{1}{z^2 - 6z} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{z-6} - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z} \right).$$

Sustituyendo en la integral, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2}}{z^2 - 6z} dz &= \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z-6} - \frac{1}{6} \int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z} = \\ &= \frac{1}{6} 2\pi i e^{36} - \frac{1}{6} 2\pi i = \frac{e^{36} - 1}{3} \pi i. \end{aligned}$$

Segundo procedimiento. Construyamos las circunferencias γ_1 y γ_2 con los centros en los puntos $z = 0$ y $z = 6$ de los radios suficientemente pequeños tales, para que las circunferencias no se intersequen y se encuentren completamente en el círculo $|z - 2| \leq 5$ (fig. 6).

En el dominio triplemente conexo, limitado por las circunferencias $|z - 2| = 5$, γ_1 y γ_2 , la función subintegral en todas partes es analizable. En virtud del teorema de Cauchy para el dominio múltiplemente conexo

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z} = \int_{\gamma_1} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z}.$$

A cada integral en el segundo miembro se puede utilizar la fórmula integral de Cauchy (1). De resultas obtenemos

$$\int_{|z-2|=5} \frac{e^{z^2} dz}{z^2 - 6z} = 2\pi i \left. \frac{e^{z^2}}{z-6} \right|_{z=0} + 2\pi i \left. \frac{e^{z^2}}{z} \right|_{z=6} = \frac{e^{36} - 1}{3} \pi i.$$

Calcular mediante la fórmula integral de Cauchy las integrales siguientes (todas las circunferencias se recorren contra el sentido horario):

$$167. \quad \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 2z} dz.$$

$$168. \quad \int_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz.$$

$$169. \quad \int_{|z-1|=2} \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi z}{2}}{z^2 + 2z - 3} dz.$$

$$170. \quad \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} iz}{z^2 - 4z + 3} dz.$$

$$171. \quad \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}} dz.$$

$$172. \quad \int_{|z|=3} \frac{\cos(z + \pi i)}{z(e^z + 2)} dz.$$

$$173. \quad \int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2 + 16}.$$

$$174. \quad \int_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z + 9)}.$$

$$175. \quad \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{2}(z+i)}{z^2 - 2z} dz.$$

$$176. \quad \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z \operatorname{sen}(z-1)}{z^2 - z} dz.$$

Si la función $f(z)$ es analizable en el dominio D y en su frontera C , entonces para cualquiera n natural tiene lugar la fórmula

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad (2)$$

donde $z_0 \in D$, $z \in C$. Se puede emplear la fórmula (2) para calcular algunas integrales.

Ejemplo 3. Calcular la integral

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z^2-1)^2} dz.$$

Solución. La función subintegral $\frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z^2-1)^2}$ es analítica en el dominio $|z-1| \leq 1$ en todas partes menos en el punto $z_0 = 1$. Separemos bajo el signo de integral la función $f(z)$ que es analítica en el círculo $|z-1| \leq 1$. Para eso reescribiremos la función subintegral en la forma

$$\frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z^2-1)^2} = \frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{(z-1)^2},$$

y en calidad de $f(z)$ tomemos $\frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z+1)^2}$. Suponiendo en la fórmula (2) $n=1$, obtenemos

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{(z-1)^2} dz = 2\pi i f'(1).$$

Hallamos la derivada

$$f'(z) = \left(\frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z+1)^2} \right)' = \frac{\pi \cos \pi z \cdot (z+1) - 2 \operatorname{sen} \pi z}{(z+1)^3}.$$

De aquí

$$f'(1) = \frac{2\pi \cos \pi}{2^3} = -\frac{\pi}{4}.$$

Por consiguiente,

$$\int_{|z-1|=1} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z^2-1)^2} dz = -\frac{\pi^2}{2} i.$$

Ejemplo 4. Calcular la integral

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3 (z-1)}.$$

Solución. Primer procedimiento. El denominador $(z+1)^3 (z-1)$ de la función subintegral se anula en dos puntos $z_1 = -1$, $z_2 = 1$ que se encuentran dentro del círculo $|z| \leq 2$. Desarrollemos en fracciones simples la función

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z+1)^3 (z-1)} &= \frac{1}{8} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{8} \frac{1}{z+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(z+1)^2} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{(z+1)^3}. \end{aligned}$$

Utilizando la linealidad de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} dz &= \frac{1}{8} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sh} z dz}{z-1} - \\ &- \frac{1}{8} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1} dz - \frac{1}{4} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2} dz - \\ &- \frac{1}{2} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz. \end{aligned}$$

Apliquemos la fórmula integral de Cauchy (1) para las dos primeras integrales:

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z-1} dz &= 2\pi i \operatorname{ch} 1, \\ \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{z+1} dz &= 2\pi i \operatorname{ch} 1. \end{aligned}$$

La tercera y cuarta integrales las calculamos mediante la fórmula (2)

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^2} dz &= 2\pi i (\operatorname{ch} z)' \Big|_{z=-1} = -2\pi i \operatorname{sh} 1. \\ \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} (\operatorname{ch} z)'' \Big|_{z=-1} = \pi i \operatorname{ch} 1. \end{aligned}$$

Obtenemos definitivamente

$$\begin{aligned} \int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} &= \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} - \frac{2\pi i \operatorname{ch} 1}{8} + \\ &+ \frac{1}{4} 2\pi i \operatorname{sh} 1 - \frac{1}{2} \pi i \operatorname{ch} 1 = \frac{\operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1}{2} \pi i = -\frac{\pi i}{2e}. \end{aligned}$$

Segundo procedimiento. Construyamos las circunferencias γ_1 y γ_2 con centros en los puntos $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$ de los radios suficientemente pequeños tales, para que las circunferencias no se intersequen y se encuentren completamente en el círculo $|z| \leq 2$. La función subintegral en todas partes es analizable en el dominio triplemente conexo limitado por las circunferencias $|z| = 2$, γ_1 y γ_2 . En virtud del teorema de Cauchy para el dominio múltiplemente conexo tenemos

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} + \int_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)}. \quad (3)$$

Emplearemos la fórmula (2) a la primera integral del miembro segundo (3), representando previamente la función subintegral en forma

$$\frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3(z-1)} = \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} \cdot \frac{z-1}{z-1}.$$

La función $\frac{\operatorname{ch} z}{z-1}$ es analítica dentro de γ_1 , por lo tanto en virtud de la fórmula (2)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} &= \int_{\gamma_1} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} \frac{z-1}{z-1} dz = \\ &= \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{\operatorname{ch} z}{z-1} \right)'' \Big|_{z=-1} = -\frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4} \pi i. \end{aligned}$$

Utilizamos la fórmula integral de Cauchy (1) a la segunda integral en el miembro derecho (3)

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} &= \int_{\gamma_2} \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} \frac{z-1}{z-1} dz = \\ &= 2\pi i \frac{\operatorname{ch} z}{(z+1)^3} \Big|_{z=1} = \pi i \frac{\operatorname{ch} 1}{4}. \end{aligned}$$

Definitivamente obtenemos

$$\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\pi i \frac{2e^{-1} + \operatorname{ch} 1}{4} + \pi i \frac{\operatorname{ch} 1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}.$$

Calcular las integrales siguientes:

$$177. \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz.$$

$$178. \int_{|z|=1} \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z^3} dz.$$

$$179. \int_{|z-1|=1} \frac{\sin \frac{\pi}{4} z}{(z-1)^3(z-3)} dz.$$

$$180. \int_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2} dz.$$

$$181. \int_{|z-3|=6} \frac{z dz}{(z-2)^3(z+4)}.$$

$$182. \int_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2} dz.$$

$$183. \int_{|z|=1/2} \frac{1}{z^3} \cos \frac{\pi}{z+1} dz.$$

$$184. \int_{|z-2|=1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z^2+4)^2} dz.$$

$$185. \int_{|z|=1/2} \frac{1-\operatorname{sen} z}{z^2} dz.$$

$$186. \int_{|z-1|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2} dz.$$

§ 7. Series en el dominio complejo

Sea que tenemos una serie con los términos complejos

$$z_1 + z_2 + \dots + z_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n. \quad (1)$$

donde $z_n = x_n + iy_n$.

La serie (1) converge cuando y sólo cuando converge como la serie

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} x_n. \quad (2)$$

tanto como y serie

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} y_n. \quad (3)$$

La serie (1) se llama absolutamente convergente, si converge la serie

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|. \quad (4)$$

Las series (2), (3), (4) son unas series con los términos reales y el problema de su convergencia se resuelve mediante el criterio de convergencia de las series en el dominio real.

Ejemplo 1. Examinar convergencia de una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}.$$

Solución. Tenemos $e^{in} = \cos n + i \operatorname{sen} n$. De tal modo, el problema de convergencia de una serie dada se reduce al problema de convergencia de series con los términos reales:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^2}.$$

Cada una de estas series converge absolutamente. Por consiguiente, la serie dada converge absolutamente.

Ejemplo 2. Examinar la convergencia de una serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Solución. Tenemos

$$e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos \frac{\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{n}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{n}$ diverge, mientras que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n}$ converge. Por consiguiente, la serie dada diverge.

Examinar la convergencia de las series:

$$187. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in}{2^n}.$$

$$188. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin in}{3^n}.$$

$$189. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos in^2}{5^{n^2}}.$$

$$190. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i2n}}{n\sqrt[n]{n}}.$$

$$191. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$192. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{\frac{n}{2^2} \cos in}.$$

$$193. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} i\sqrt[n]{n}}{\operatorname{sen} in}.$$

$$194. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\operatorname{sh} in}.$$

$$195. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} i\frac{\pi}{n}}{n \ln n}.$$

$$196. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}.$$

Serie de potencias

Una serie que tiene la forma

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad (5)$$

donde $c_0, c_1, \text{ etc.}$ son las constantes complejas y z es la variable compleja, se llama *serie de potencias* en el dominio complejo.

TEOREMA DE ABEL. Si la serie de potencias (5) converge para cierto valor de $z = z_0$, entonces ella converge y absolutamente converge para todos los valores de z , para las cuales $|z| < |z_0|$. Si la serie (5) diverge para $z = z_1$, entonces ella diverge y para cualquier valor de z , para el cual $|z| > |z_1|$.

El dominio de la convergencia de la serie (5) es el círculo con el centro en el origen de coordenadas.

El radio de convergencia de una serie de potencias se determina mediante las fórmulas

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \quad (c_n \neq 0) \quad (6)$$

6

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}, \quad (7)$$

si existen los límites indicados.

Ejemplo 3. Determinar el radio de convergencia de una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos in \cdot z^n.$$

Solución. Tenemos

$$c_n = \cos in = \frac{e^{-n} + e^n}{2} = \operatorname{ch} n.$$

Para hallar el radio de convergencia R utilizamos la fórmula (6):

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\operatorname{ch} n|}{|\operatorname{ch}(n+1)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch}(n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} n \cdot \operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} n \cdot \operatorname{sh} 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{th} n \cdot \operatorname{sh} 1} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{ch} 1 + \operatorname{sh} 1} = e^{-1}, \end{aligned}$$

puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{th} n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n + e^{-n}}{e^n - e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2n}}{1 - e^{-2n}} = 1.$$

Entonces, el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = e^{-1}$.

Ejemplo 4. Hallar el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n.$$

Solución. Hallamos el módulo del coeficiente $c_n = (1+i)^n$:

$$|c_n| = |(1+i)^n| = |1+i|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}.$$

Empleando la fórmula (7), hallamos el radio de convergencia de la serie dada

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Hallar los radios de convergencia de las siguientes series de potencias:

197. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n.$

198. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n.$

$$199. \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n.$$

$$200. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{i_n} \right)^n.$$

$$201. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{i}{n} z^n.$$

$$202. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\ln i_n} \right)^n.$$

$$203. \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n.$$

$$204. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen} \frac{\pi i}{n} z^n.$$

$$205. \sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n.$$

$$206. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{\operatorname{sen}^n (1 + i n)}.$$

$$207. \sum_{n=0}^{\infty} (n+i) z^n.$$

$$208. \sum_{n=0}^{\infty} \cos i n \cdot z^n.$$

209. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ tiene el radio de convergencia r y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c'_n z^n$ tiene el radio de convergencia r' .

Estimar el radio de convergencia R de las series siguientes:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + c'_n) z^n; \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} (c_n - c'_n) z^n;$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} c_n c'_n z^n; \quad d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{c'_n} z^n \quad (c'_n \neq 0).$$

Series de Taylor y de Laurent

La función $f(z)$ que es unívoca y analítica en el punto $z = z_0$ se desarrolla en el entorno de este punto en serie de potencias de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \tag{8}$$

los coeficientes de la cual c_n se calculan según las fórmulas

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{9}$$

donde Γ es la circunferencia con el centro en el punto $z = z_0$ que se encuentra completamente en el entorno del punto z_0 , en el cual la función $f(z)$ es analítica. El centro de la circunferencia del círculo de convergencia se encuentra en el punto z_0 ; esta circunferencia pasa a través del punto singular ξ de la función $f(z)$ que es más próxima al punto z_0 , es decir, el radio de convergencia de la serie (8) será igual a la distancia del punto z_0 al más próximo punto singular de la función $f(z)$.

Para las funciones

$$\ln(1+z), \quad (1+z)^\alpha$$

tienen lugar los desarrollos siguientes en serie de Taylor en el entorno del punto $z_0 = 0$:

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots \quad (R=1). \quad (10)$$

$$(1+z)^\alpha = 1 + \alpha z - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots \\ \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha+n-1)}{n!} z^n + \dots \quad (R=1). \quad (11)$$

En particular, para $\alpha = -1$ obtenemos

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \dots + (-1)^n z^n + \dots \quad (R=1). \quad (12)$$

La fórmula (10) da el desarrollo en serie de Taylor en el entorno del punto $z = 0$ del valor principal del logaritmo; para obtener la serie de Taylor para otros valores de la función multiforme $\ln(1+z)$ conviene añadir a la serie (10) los números $2n\pi i$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + 2n\pi i.$$

Ejemplo 5. Desarrollar en serie de Taylor en el entorno del punto $z_0 = 0$ la función

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3},$$

utilizando el desarrollo (12), y hallar el radio de convergencia de la serie.

Solución. Desarrollemos la función dada en fracciones simples

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{1}{z-3}.$$

Transformemos el miembro segundo del modo siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{4} \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Empleando el desarrollo (12) de la función $\frac{1}{1+z}$, obtendremos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4}(1-z+z^2-z^3+\dots)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}+\dots\right)= \\ &= \frac{1}{4}\left(-\frac{4}{3}z+\frac{8}{9}z^2-\frac{28}{27}z^3+\dots\right)=-\frac{z}{3}+\frac{2}{3^2}z^2-\frac{7}{3^3}z^3+\dots \end{aligned}$$

El punto $z = -1$ es el punto más próximo singular al punto $z_0 = 0$ de la función dada. Por eso el radio de convergencia de la serie obtenida es $R = 1$.

Ejemplo 6. Desarrollar en serie por potencias de diferencia $z - 3$ la función

$$f(z) = \frac{1}{3-2z}.$$

Solución. Transformemos la función dada del modo siguiente:

$$\frac{1}{3-2z} = \frac{1}{3-2(z-3+3)} = \frac{1}{-3-2(z-3)} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}.$$

Sustituyendo en el desarrollo (12) z por $\frac{2}{3}(z-3)$, obtendremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-2z} &= -\frac{1}{3} \left[1 - \frac{2}{3}(z-3) + \frac{2^2}{3^2}(z-3)^2 - \frac{2^3}{3^3}(z-3)^3 + \dots \right] = \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}(z-3) - \frac{2^2}{3^3}(z-3)^2 + \frac{2^3}{3^4}(z-3)^3 - \dots \end{aligned}$$

Esta serie converge para la condición

$$\left| \frac{2}{3}(z-3) \right| < 1.$$

o $|z-3| < \frac{3}{2}$, es decir, el radio de convergencia de serie $R = \frac{3}{2}$.

Ejemplo 7. Hallar unos términos primeros del desarrollo en serie por potencias z de la función $f(z) = \operatorname{tg} z$ y hallar el radio de la convergencia de la serie.

Solución. Suponemos que la serie buscada tiene el aspecto de

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots,$$

donde

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad f^{(0)}(0) = f(0) = 0.$$

Para hallar los valores de las derivadas $f^{(n)}(z)$ en el punto $z = 0$ vamos a diferenciar la función. Tenemos

$$f'(z) = \frac{1}{\cos^2 z} \quad o \quad f'(z) = 1 + f^2(z). \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} f''(z) &= 2f(z)f'(z), \\ f'''(z) &= 2[f'^2(z) + f(z)f''(z)], \\ f^{IV}(z) &= 2[3f'(z)f''(z) + f(z)f'''(z)], \\ f^{V}(z) &= 2[3f''^2(z) + 4f'(z)f'''(z) + f(z)f^{IV}(z)], \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Suponiendo en (13) y (14) $z = 0$, hallamos

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1; & f''(0) &= 0; & f'''(0) &= 2; & f^{IV}(0) &= 0; \\ & & & & & f^{(V)}(0) &= 16, \dots \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores hallados de derivadas en serie, obtenemos

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{2}{3!} z^3 + \frac{16}{5!} z^5 + \dots \quad (15)$$

El punto $\zeta = \pi/2$ es el punto más próximo singular al punto $z = 0$. Por eso el radio de convergencia de la serie obtenida $R = \pi/2$.

En los problemas siguientes las funciones dadas desarrollar en serie de Taylor, usando los desarrollos hechos, y hallar los radios de convergencia de series:

210. $\operatorname{sen}(2z + 1)$ por potencias $z + 1$.

211. $\cos z$ por potencias $z + \frac{\pi}{4}$.

212. e^z por potencias $2z - 1$.

213. $\frac{1}{3z+1}$ por potencias $z + 2$.

214. $\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ por potencias z .

215. $\frac{z}{z^2+i}$ por potencias z .

216. $\cos^2 \frac{iz}{2}$ por potencias z .

217. $\operatorname{sh}^2 \frac{z}{2}$ por potencias z .

218. $\ln(2 - z)$ por potencias z .

219. $\ln(2 + z - z^2)$ por potencias z .

Hallar unos términos primeros del desarrollo en serie por potencias z de las funciones siguientes. Hallar el radio de

convergencia de las series:

$$220. \frac{1}{1+e^z}. \quad 221. \frac{1}{2+\sin z}. \quad 222. \frac{1}{e^{-z}+5}.$$

$$223. \ln(1+e^{-z}). \quad 224. \ln \cos z.$$

$$225. \ln(1+\cos z). \quad 226. e^{\frac{1}{1-z}}.$$

227. Hallar la función $f(z)$ analítica en el círculo $|z| \leq 1$ y que obtiene en la circunferencia $|z| = 1$ el valor

$$\frac{a - \cos \theta + i \sin \theta}{a^2 - 2a \cos \theta + 1}, \quad a > 1, \quad \theta = \arg z.$$

228. Dado que la función $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ es analítica en el círculo $|z| \leq 1$. Demostrar que el valor medio de la función $\frac{f(z)}{z^n}$ en la circunferencia $|z| = 1$ es igual a a_n .

Sea dada la serie

$$\frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (16)$$

Si $c_{-n} \neq 0$ y existe el límite finito

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}, \quad (17)$$

entonces, esta serie converge en el dominio

$$|z - z_0| > r. \quad (18)$$

Ejemplo 8. Hallar el dominio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}.$$

Solución. Aquí $c_{-n} = (1+i)^{n+1}$, $c_{-n-1} = (1+i)^{n+2}$, $z_0 = 0$. Por eso

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(1+i)^{n+2}|}{|(1+i)^{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |1+i| = \sqrt{2}.$$

La serie dada converge en el dominio $|z| > \sqrt{2}$.

Ejemplo 9. Hallar el dominio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{(z+i)^n}.$$

Solución. Tenemos

$$c_{-n} = \sin n = i \operatorname{sh} n, \quad c_{-n-1} = i \operatorname{sh}(n+1).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i \operatorname{sh}(n+1)|}{|i \operatorname{sh} n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh}(n+1)}{\operatorname{sh} n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{e^n - e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - e^{-2n-1}}{1 - e^{-2n}} = e. \end{aligned}$$

Por consiguiente, la serie converge en el dominio $|z + i| > e$, es decir, fuera del círculo con el centro en el punto $z_0 = -i$ y del radio e .

Determinar el dominio de convergencia de las series siguientes:

$$229. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1-i)^n z^n}.$$

$$230. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})^n}{z^n}.$$

$$231. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\cos in}.$$

$$232. \sum_{n=1}^{\infty} e^n (iz)^{-n}.$$

$$233. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n (z+1)^n}.$$

$$234. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n 2^{-n}}{(z-2-i)^n}.$$

$$235. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{(z+2i)^n}.$$

$$236. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}.$$

La serie de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \\ &+ c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + c_n(z - z_0)^n + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

converge en el dominio, en el cual convergen las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots, \quad (20)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (21)$$

Suponemos que la serie (20) converge en el dominio $|z - z_0| > r$, es decir, fuera del círculo con el centro en el punto $z = z_0$ del radio r y la serie (21) converge en el círculo $|z - z_0| < R$. Entonces, si

1) $r > R$, la serie (19) diverge en todas partes;

2) $r < R$, la serie (19) converge en el anillo $r < |z - z_0| < R$. Aquí $r \geq 0$, $0 < R < +\infty$.

Ejemplo 10. Determinar el dominio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{e^{in+1/2}}.$$

Solución. Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{(z+1)^n}$ tenemos

$$c_{-n} = e^{in}, \quad c_{-n-1} = e^{i(n+1)}.$$

Por consiguiente,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e^{i(n+1)}|}{|e^{in}|} = 1,$$

entonces la primera serie converge en el dominio $|z+1| > 1$.

Para la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{e^{in+1/2}}$ tenemos

$$c_n = e^{-in-1/2}, \quad c_{n+1} = e^{-i(n+1)-1/2}.$$

Su radio de convergencia

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|e^{-in-1/2}|}{|e^{-i(n+1)-1/2}|} = 1,$$

de modo que la segunda serie converge en el dominio $|z+1| < 1$. La serie dada diverge en todas partes.

Ejemplo 11. Determinar el dominio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n.$$

Solución. Para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ tenemos

$$c_{-n} = (3+4i)^n, \quad c_{-n-1} = (3+4i)^{n+1}.$$

Por consiguiente,

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(3+4i)^{n+1}|}{|(3+4i)^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |3+4i| = 5,$$

La primera serie converge en el dominio $|z+2i|>5$. Para la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ tenemos

$$c_n = 6^{-n}, \quad c_{n+1} = 6^{-n-1}.$$

Por tanto el radio de convergencia de esta serie de potencias será igual a

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|6^{-n}|}{|6^{-n-1}|} = 6.$$

La serie converge en el dominio $|z+2i| < 6$.

Pues bien; $r = 5 < R = 6$. Por consiguiente, la serie dada converge en el anillo $5 < |z+2i| < 6$.

Definir los dominios de convergencia de series siguientes:

$$237. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + in\right) (z+1+i)^n. \quad 238. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}.$$

$$239. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n (z-2+i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} (1+in)(z-2+i)^n.$$

$$240. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n.$$

$$241. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n.$$

$$242. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

$$243. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} in}{(z-i)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!} (0! = 1).$$

$$244. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4 z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n 2^n}.$$

$$245. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}.$$

$$246. -\frac{i}{2(z-i)} + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(2i)^n}.$$

$$247. \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \quad 248. -\frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n.$$

$$249. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n} (b \neq 0).$$

La función $f(z)$ es unívoca y analítica en el anillo $r < |z - z_0| < R$ (no se excluyen los casos, cuando $r = 0$ y $R = +\infty$) se desarrolla en este anillo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (22)$$

donde los coeficientes c_n se hallan mediante las fórmulas

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (23)$$

Aquí Γ es la circunferencia arbitraria con el centro en el punto z_0 que se encuentra dentro del anillo dado.

En la fórmula (22) la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

se llama la parte principal de la serie de Laurent, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

se llama la parte correcta de la serie de Laurent.

En la práctica para hallar los coeficientes c_n tratan de evitar el empleo de las fórmulas (23), puesto que ellos proporcionan cálculos voluminosos. En realidad, si esto es posible, utilizan los desarrollos hechos en serie de Taylor de las funciones elementales.

Ejemplo 12. Desarrollar en serie de Laurent en el anillo $0 < |z - i| < 2$ la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}.$$

Solución. Primer procedimiento. La función $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}$ es analítica en el anillo $0 < |z - 1| < 2$. Hallamos los coeficientes de serie de Laurent mediante la fórmula (23)

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{(z^2 - 1)^2}}{(z - 1)^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(z - 1)^{n+3} (z + 1)^2},$$

donde Γ es una circunferencia cualquiera con el centro en el punto $z_0 = 1$ que se encuentra en el anillo dado.

Si $n + 3 \leq 0$, es decir $n \leq -3$, entonces la función subintegral $\frac{1}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}$ será analítica en todos los puntos comprendidos dentro de la circunferencia Γ incluso comprendidos y en los puntos $z = 1$. En este caso

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2} = 0,$$

es decir, $c_n = 0$ para $n = -3, -4, \dots$. Si $n + 3 > 0$, es decir $n > -3$, entonces aplicando la fórmula (2) del § 6 para la derivada del cualquier orden de la función analítica, obtendremos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\frac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+3}} dz = \left. \frac{1}{(n+2)!} \frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}} \left[\frac{1}{(z+1)^2} \right] \right|_{z=1} = \\ &= \frac{1}{(n+2)!} \left. \frac{(-1)^n (n+3)!}{(z+1)^{n+4}} \right|_{z=1} = \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}. \end{aligned}$$

Para $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ tenemos

$$c_n = \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}}.$$

La serie de Laurent para la función dada en el anillo $0 < |z-1| < 2$ tendrá el aspecto de

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2-1)^2} &= \sum_{n=-2}^{+\infty} c_n (z-1)^n = \sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{2^{n+4}} (z-1)^n \\ &\stackrel{6}{=} \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8} (z-1) + \\ &\quad + \frac{5}{64} (z-1)^2 - \frac{3}{64} (z-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

Segundo procedimiento. Es necesario presentar $f(z)$ en la forma de la suma de potencias (positivas y negativas) de diferencia $(z-1)$. Transformemos la función dada del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(z+1)^2}. \end{aligned} \tag{24}$$

Dos primeros sumandos en el miembro segundo (24) tienen la forma necesaria, puesto que representan por sí mismo las potencias de la diferencia $(z-1)$.

Escribiremos dos últimos sumandos en la forma

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{1 + \frac{z-1}{2}}, \quad \frac{1}{(z+1)^2} = \\ = \frac{1}{4} \left[1 + \left(\frac{z-1}{2} \right) \right]^{-2}.$$

Empleando la fórmula (12) y luego la fórmula (11) para $\alpha = -2$, obtenemos

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right], \quad (25)$$

$$\frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4} \left[1 - 2 \cdot \frac{z-1}{2} + \frac{-2(-2-1)}{2!} \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{-2(-2-1)(-2-2)}{3!} \left(\frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right]. \quad (26)$$

Sustituyendo (25) y (26) en (24), hallaremos

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \\ + \frac{1}{8} \left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2} \right)^2 - \left(\frac{z-1}{2} \right)^3 + \dots \right] + \\ + \frac{1}{16} \left[1 - (z-1) + \frac{3}{2^2} (z-1)^2 - \frac{4}{2^3} (z-1)^3 + \dots \right]$$

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8} (z-1) + \\ + \frac{5}{64} (z-1)^2 - \frac{3}{64} (z-1)^3 + \dots$$

Ejemplo 13. Desarrollar en serie de Laurent la función

$$f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z}$$

en el entorno del punto $z_0 = 0$.

Solución. Para todo número complejo ζ tenemos

$$\cos \zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} + \dots$$

Suponiendo $\zeta = \frac{1}{z}$, obtenemos

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = z^2 \left(1 - \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{4! z^4} - \frac{1}{6! z^6} + \dots \right) = \\ = z^2 \frac{1}{2!} \frac{1}{4! z^2} - \frac{1}{6! z^4} + \dots$$

6

$$z^2 \cos \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} + z^2 + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \dots$$

Este desarrollo es válido para cualquier punto $z \neq 0$. En el caso dado «el anillo» representa por sí mismo todo el plano complejo con un punto excluido $z = 0$. Este «anillo» se puede determinarlo mediante la relación siguiente: $0 < |z - 0| < +\infty$. Aquí $r = 0$, $R = +\infty$, $z_0 = 0$. La función dada es analítica en el «anillo» indicado.

Ejemplo 14. Examinar diferentes desarrollos en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2},$$

aceptando $z_0 = 0$.

Solución. La función $f(z)$ tiene dos puntos singulares: $z_1 = -2$ y $z_2 = 1$. Por consiguiente, tenemos tres «anillos» con el centro en el punto $z_0 = 0$, la función $f(z)$ es analítica en cada uno de los «anillos»:

- a) círculo $|z| < 1$;
- b) anillo $1 < |z| < 2$;

c) $2 < |z| < +\infty$ es el exterior del círculo $|z| \leq 2$.

Hallamos las series de Laurent para la función $f(z)$ en cada uno de estos «anillos».

Representemos $f(z)$ en forma de la suma de fracciones elementales

$$f(z) = \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z-1}. \quad (27)$$

a) Desarrollo en el círculo $|z| < 1$. Transformemos (27) del modo siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} - \frac{1}{1-z}. \quad (28)$$

Mediante la fórmula (12) obtenemos

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots, \quad |z| < 1, \quad (29)$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \dots, \quad |z| < 2, \quad (30)$$

Sustituyendo (29) y (30) en (28), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots - (1 + z + z^2 + z^3 + \dots +) = \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z - \frac{7}{8}z^2 - \frac{15}{16}z^3 + \dots \end{aligned}$$

Este desarrollo es la serie de Taylor de la función $f(z)$.

b) Es el desarrollo en el anillo $1 < |z| < 2$. La serie (30) para la función $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ sigue siendo convergente en este anillo porque

$|z| < 2$. La serie (29) para la función $\frac{1}{1-z}$ diverge, para $|z| > 1$. Por eso transformamos $f(z)$ del modo siguiente:

$$f(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}}. \quad (31)$$

Empleando la fórmula (12), obtenemos

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \quad (32)$$

Esta serie converge para $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, es decir, para $|z| > 1$.

Sustituyendo (30) y (32) en (31), hallaremos

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z^2+z-2} &= \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \\ &= \dots + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8} - \frac{z^3}{16} + \dots \end{aligned}$$

6

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}.$$

c) Desarrollo para $|z| > 2$. La serie (30) para la función $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ para $|z| > 2$ diverge y la serie (32) para la función $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$ converge, puesto que si $|z| > 2$, entonces $|z| > 1$ también.

La función $f(z)$ la representemos en tal forma:

$$f(z) = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}} + \frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right).$$

Por medio de la fórmula (12) obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \frac{8}{z^3} + \dots + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{z} \left(2 - \frac{1}{z} + \frac{5}{z^2} - \frac{7}{z^3} + \dots \right) \end{aligned}$$

6.

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2} = \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \dots$$

Este ejemplo muestra que para la misma función $f(z)$ la serie de Laurent, en general, tiene la forma diferente para diferentes anillos.

Ejemplo 15. Desarrollar en serie de Laurent la función

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

en el entorno de sus puntos singulares.

Solución. Los puntos singulares de la función $f(z)$ son: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$.

1) El desarrollo de $f(z)$ en el entorno del punto $z_1 = 1$, es decir, en el anillo $0 < |z - 1| < 1$. Representemos la función $f(z)$ en forma de la suma de fracciones elementales

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}.$$

Transformemos el miembro segundo del modo siguiente:

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}.$$

Aplicando el desarrollo (12), en el cual z ha sido cambiado en $-(z-1)$, obtenemos

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - [1 + (z-1) + (z-1)^2 + \dots]$$

ó

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n. \quad (33)$$

2) Desarrollo de $f(z)$ en el entorno del punto $z_2 = 2$, es decir, en el anillo $0 < |z - 2| < 1$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2z-3}{z^2-3z+2} &= \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{1}{z-2} + \frac{1}{1+(z-2)} = \\ &= \frac{1}{z-2} + 1 - (z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \dots \end{aligned}$$

ó

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n. \quad (34)$$

Desarrollar en serie de Laurent en el entorno del punto $z = 0$ las funciones siguientes:

$$250. \frac{\sin z}{z^2}.$$

$$251. \frac{\sin^2 z}{z}.$$

$$252. \frac{e^z}{z}.$$

$$253. \frac{e^z}{z^3}.$$

$$254. z^3 e^{\frac{1}{z}}.$$

$$255. z^k \cos \frac{1}{z}.$$

$$256. \frac{1}{z} \operatorname{sen}^2 \frac{2}{z}. \quad 257. \frac{1 - \cos z}{z^2}. \quad 258. \frac{e^z - 1}{z}.$$

$$259. \frac{1 + \cos z}{z^4}. \quad 260. \frac{1 - e^{-z}}{z^3}.$$

Desarrollar en serie de Laurent las funciones siguientes en entornos de los puntos indicados:

$$261. \frac{z}{(z+1)^2}, \quad z_0 = -1. \quad 262. \frac{\operatorname{sen} z}{z-2}, \quad z_0 = 2.$$

$$263. \frac{1}{ze^{z+i}}, \quad z_0 = -i.$$

Desarrollar las funciones siguientes en la serie de Laurent en los anillos indicados:

$$264. \frac{1}{(z-2)(z-3)}, \quad \text{a)} 2 < |z| < 3; \quad \text{b)} 3 < |z| < +\infty.$$

$$265. \frac{1}{z^2+z}, \quad \text{a)} 0 < |z| < 1; \quad \text{b)} 1 < |z| < +\infty.$$

$$266. \frac{1}{(z+2)(1+z^2)}, \quad \text{a)} 1 < |z| < 4; \quad \text{b)} 4 < |z| < +\infty.$$

$$267. \frac{2z+3}{z^2+3z+2}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$268. \frac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}, \quad \text{a)} |z| < 1; \quad \text{b)} 1 < |z| < 2; \\ \text{c)} 2 < |z| < \infty.$$

$$269. \frac{2}{z^2-1}, \quad 1 < |z+2| < 3.$$

$$270. \frac{1}{z^3+2z-8}, \quad 1 < |z+2| < 4.$$

$$271. \frac{z+2}{z^2-4z+3}, \quad 2 < |z-1| < +\infty.$$

$$272. \frac{z^5}{(z^2-4)^2}, \quad 2 < |z| < +\infty.$$

$$273. \frac{z}{(z^2-4)(z^2-1)}, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$274. \frac{1}{z^3+1}, \quad 0 < |z-i| < 2.$$

$$275. \frac{1}{(z^2-4)^2}, \quad 4 < |z+2| < +\infty.$$

§ 8. Ceros de una función. Los puntos singulares aislados

1. Ceros de una función. Dado que la función $f(z)$ es analítica en el punto z_0 . El punto z_0 se llama *cero de la función $f(z)$ del orden* (*o de la multiplicidad*) n , si se cumplen las condiciones

$$f(z_0) = 0, \quad f'(z_0) = 0, \dots, \quad f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Si $n = 1$, entonces el punto z_0 se llama *cero simple*.

El punto z_0 será el cero de n -orden de la función $f(z)$ que es analítica en el punto z_0 entonces y sólo entonces, cuando en algún entorno de este punto existe la igualdad

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

donde la función $\varphi(z)$ es analizable en el punto z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$.

Ejemplo 1. Hallar los cero de la función $f(z) = 1 + \cos z$ y determinar su orden.

Solución. Igualando $f(z)$ al cero, obtenemos $\cos z = -1$, de donde $z_n = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son los ceros de la función dada. A continuación

$$f'[(2n + 1)\pi] = -\operatorname{sen}(2n + 1)\pi = 0.$$

$$f''[(2n + 1)\pi] = -\cos(2n + 1)\pi = 1 \neq 0.$$

Por consiguiente, los puntos $z_n = (2n + 1)\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son los ceros del segundo orden de la función dada.

Ejemplo 2. Hallar los ceros de la función $f(z) = 1 - e^z$ y determinar sus órdenes.

Solución. Igualando $f(z)$ al cero, hallamos los ceros $z_n = 2n\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \dots$) de la función $f(z)$. Luego

$$f'(2n\pi i) = -e^{2n\pi i} = -1 \neq 0.$$

Así, $f(2n\pi i) = 0$, $f'(2n\pi i) \neq 0$, por consiguiente, los puntos $z_n = 2n\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son los ceros simples de la función $f(z) = 1 - e^z$.

Ejemplo 3. Hallar el orden del cero $z_0 = 0$ para la función

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \operatorname{sen} z}.$$

Solución. Mediante el desarrollo de la función $\operatorname{sen} z$ en serie de Taylor en el entorno del punto $z_0 = 0$, obtendremos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^8}{z - \operatorname{sen} z} = \frac{z^8}{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)} = \\ &= \frac{z^8}{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots} = \frac{z^5}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots} = z^5 \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}. \end{aligned}$$

Supongamos que

\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}.

$$\varphi(z) = \frac{1}{\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \dots}.$$

Entonces $f(z) = z^5 \varphi(z)$, donde $\varphi(z)$ es la función analítica en el punto $z_0 = 0$, con todo $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Por consiguiente, el punto $z_0 = 0$ es para la función dada el cero del quinto orden.

Ejemplo 4. Hallar los ceros de la función $f(z) = (z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z$ y definir sus órdenes.

Solución. Suponiendo $f(z) = 0$, obtenemos $(z^2 + 1)^3 \operatorname{sh} z = 0$, de donde $z^2 + 1 = 0$ ó $\operatorname{sh} z = 0$. Resolviendo estas ecuaciones, hallamos los ceros de la función $f(z)$:

$$z = -i, \quad z = i, \quad z = k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Sea $z = -i$, entonces $f(z)$ se puede representar en la forma

$$f(z) = (z + i)^3 \varphi(z),$$

donde la función $\varphi(z) = (z - i)^3 \operatorname{sh} z$ es analítica en el punto $z = -i$, además $\varphi(-i) = 8i \operatorname{sh} i = -8 \operatorname{sen} 1 \neq 0$. Esto significa que el punto $z = -i$ es el cero del tercer orden. Análogamente se demuestra que y el punto $z = i$ es el cero del tercer orden. Examinamos los ceros $z = k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). La derivada

$$f'(z) = 6z(z^2 + 1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2 + 1)^3 \operatorname{ch} z$$

en los puntos $z = k\pi i$ es diferente del cero. Por consiguiente, $z = k\pi i$ son los ceros del primer orden.

Hallar los ceros de las funciones siguientes y determinar sus órdenes:

$$276. \text{ a)} f(z) = z^4 + 4z^2; \quad \text{b)} f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

$$277. \text{ a)} f(z) = z^2 \operatorname{sen} z; \quad \text{b)} f(z) = \frac{\operatorname{sh}^2 z}{z}.$$

$$278. \text{ a)} f(z) = 1 + \operatorname{ch} z; \quad \text{b)} f(z) = \frac{(1 - \operatorname{sh} z)^2}{z}.$$

$$279. \text{ a)} f(z) = (z + \pi i) \operatorname{sh} z; \quad \text{b)} f(z) = \cos z^3.$$

$$280. \text{ a)} f(z) = (z^2 + \pi^2)(1 + e^{-z}); \quad \text{b)} f(z) = \cos z + \operatorname{sh} iz.$$

Hallar el orden del cero $z_0 = 0$ para las funciones siguientes:

$$281. \quad f(z) = \frac{z^6}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(\operatorname{sen} \frac{z}{2}\right)^2}.$$

$$282. \quad f(z) = e^{\operatorname{sen} z} - e^{\operatorname{tg} z}.$$

$$283. \quad f(z) = \frac{z^3}{1+z-e^z}. \quad 284. \quad f(z) = 2(\operatorname{ch} z - 1) - z^2.$$

$$285. \quad f(z) = \frac{(1-\cos 2z)^2}{z-\operatorname{sh} z}.$$

$$286. f(z) = (e^z - e^{z^2}) \ln(1 - z). \quad 287. f(z) = z^2(e^{z^2} - 1).$$

$$288. f(z) = 6 \operatorname{sen} z^3 + z^3(z^6 - 6).$$

289. El punto z_0 es el cero del orden n para la función $\varphi(z)$ y el cero del orden m para la función $\psi(z)$. ¿Qué es el punto z_0 para las funciones

$$\text{a)} \varphi(z) + \psi(z); \quad \text{b)} \varphi(z) \cdot \psi(z); \quad \text{c)} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}?$$

2. *Puntos singulares aislados.* El punto z_0 se llama *el punto singular aislado* de la función $f(z)$, si existe el entorno de este punto, en el cual $f(z)$ es analizable en todas partes, menos el mismo punto $z = z_0$.

El punto z_0 se llama *el punto singular evitable* de la función $f(z)$, si existe el límite finito de la función $f(z)$ en el punto z_0 .

$$\text{Ejemplo 5. } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

El punto singular de la función $f(z)$ es $z_0 = 0$. Tenemos

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{e^z - 1}{z} = 1.$$

Por consiguiente, el punto $z_0 = 0$ es el punto singular evitable.

El punto z_0 se llama *el polo* de la función $f(z)$, si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Para que el punto z_0 sea el polo de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que este punto sea el cero para la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

Al punto z_0 le llaman *el polo del orden n* ($n \geq 1$) de la función $f(z)$, si este punto es el cero del orden n para la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.

En el caso $n = 1$ el polo se llaman simple.

$$\text{Ejemplo 6. } f(z) = \frac{1}{z^3}.$$

El punto singular $z_0 = 0$. Supongamos que $z = \rho e^{i\varphi}$, entonces $f(z) = \frac{e^{-i\varphi}}{\rho^3}$. Es evidente que $|f(z)| = \frac{1}{\rho^3}$, de donde sigue que $|f(z)|$ crece indefinidamente, cuando $z \rightarrow 0$ según la ley cualquiera. Por consiguiente, $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \infty$, es decir, el punto $z_0 = 0$ es el polo de esta función. Para las funciones $\varphi(z) = z^3$ el punto $z_0 = 0$ es el cero del tercer orden y, por consiguiente, $z_0 = 0$ es el polo del tercer orden para la función $f(z) = \frac{1}{z^3}$.

Para que el punto z_0 sea el polo del orden n de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que la función $f(z)$ sea posible representarla en la forma de $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}$, donde la función $\varphi(z)$ es analítica en el punto z_0 y $\varphi(z_0) \neq 0$.

$$\text{Ejemplo 7. } f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^3 + z^2 - z - 1}.$$

La función $f(z)$ tiene dos puntos singulares $z = -1$ y $z = 1$. Examinamos el punto $z = -1$. Representemos $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \frac{\sin z}{\frac{z-1}{(z+1)^2}}.$$

Aquí

$$\varphi(z) = \frac{\sin z}{z-1}$$

es analítica en el entorno del punto $z = -1$, y al mismo tiempo $\varphi(-1) = \frac{\sin 1}{2} \neq 0$. Por lo tanto, el punto $z = -1$ es el polo doble de la función dada. Análogamente, al escribir la función $f(z)$ en la forma

$$f(z) = \frac{\frac{\sin z}{(z+1)^2}}{z-1},$$

deducimos que el punto $z = 1$ es el polo simple de esta función.

El punto z_0 se llama *el punto singular esencial* de la función $f(z)$, si en el punto z_0 la función $f(z)$ no tiene ni el límite finito, ni el infinito.

Ejemplo 8. Definir el carácter del punto singular $z = 0$ de la función $f(z) = e^z/z^2$.

Solución. Examinemos esta función en los ejes real e imaginario. En el eje real $z = x$ y $f(x) = e^x/x^2 \rightarrow \infty$ para $x \rightarrow 0$. En el eje imaginario $z = iy$ y $f(iy) = e^{iy}/y^2 \rightarrow 0$ para $y \rightarrow 0$. Por consiguiente, no existe el límite de $f(z)$ en el punto $z = 0$ ni finito, ni infinito tampoco. El punto $z = 0$ es el punto singular esencial de la función $f(z)$.

Ejemplo 9. Definir el carácter del punto singular $z = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{1}{2+z^2-2 \operatorname{ch} z}.$$

Solución. El punto $z = 0$ es el polo de la función $f(z)$, puesto que él es el cero del denominador. Examinemos la función $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = 2 + z^2 - 2 \operatorname{ch} z$. Para ella $\varphi(0) = 0$. Hallemos el orden del cero $z = 0$ de esta función. Tenemos

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= 2z - 2 \operatorname{sh} z, & \varphi'(0) &= 0; \\ \varphi''(z) &= 2 - 2 \operatorname{ch} z, & \varphi''(0) &= 0; \\ \varphi'''(z) &= -2 \operatorname{sh} z, & \varphi'''(0) &= 0; \\ \varphi^{IV}(z) &= -2 \operatorname{ch} z, & \varphi^{IV}(0) &= -2 \neq 0.\end{aligned}$$

De este modo, $z = 0$ es el cero del cuarto orden para $\varphi(z)$ y, por consiguiente, para la función dada $f(z)$ el punto $z = 0$ es el polo del cuarto orden.

Ejemplo 10. Definir el carácter del punto singular $z = 1$ de la función

$$f(z) = \frac{\sin \pi z}{2e^{z-1} - z^2 - 1}.$$

Solución. Examinemos la función

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{2e^{z-1} - z^2 - 1}{\sin \pi z}.$$

El punto $z = 1$ es el cero del tercer orden para el numerador

$$\psi(z) = 2e^{z-1} - z^2 - 1,$$

ya que

$$\psi(1) = 0; \quad \psi'(1) = (2e^{z-1} - 2z)|_{z=1} = 0;$$

$$\psi''(1) = (2e^{z-1} - 2)|_{z=1} = 0; \quad \psi'''(1) = 2e^{z-1}|_{z=1} = 2 \neq 0.$$

El punto $z = 1$ es el cero del primer orden para el denominador $\sin \pi z$ de la función $\varphi(z)$.

Por tanto, el punto $z = 1$ es el cero del orden $3 - 1 = 2$ para la función $\varphi(z)$ y, por eso, es el polo del segundo orden para la función dada.

Definir el carácter del punto singular $z_0 = 0$ para las funciones siguientes:

290. a) $\frac{1}{z - \sin z}$; b) $\frac{1}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$; c) $\frac{1}{e^{-z} + z - 1}$.

291. a) $\frac{\operatorname{sen} z}{e^{-z} + z - 1}$; b) $\frac{\operatorname{sh} z}{z - \operatorname{sh} z}$.

Hallar los puntos singulares y definir su carácter de las funciones siguientes:

292. a) $\frac{1}{1 - \operatorname{sen} z}$; b) $\frac{1 - \cos z}{z^2}$.

293. a) $e^{\frac{1}{z+2}}$; b) $\cos \frac{1}{z}$.

294. a) $\frac{z}{z^5 + 2z^3 + z^8}$; b) $\frac{1}{e^{-z} - 1} + \frac{1}{z^2}$.

295. a) $e^{-\frac{1}{z^2}}$. b) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{z+1}$; c) $\operatorname{ch} \frac{1}{z}$.

296. a) $\frac{z^2}{\cos z - 1}$; b) $\frac{1 - \operatorname{sen} z}{\cos z}$; c) $\frac{z - \pi}{\operatorname{sen}^2 z}$.

Existen las afirmaciones siguientes:

1. Para que el punto z_0 sea el punto singular evitable de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en el entorno del punto z_0 no contenga la parte principal.

2. Para que el punto z_0 sea el polo de la función $f(z)$, es necesario y suficiente que la parte principal del desarrollo de Laurent de $f(z)$ en el

entorno z_0 contenga sólo el número finito de términos

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (c_{-k} \neq 0).$$

El máximo de los exponentes de potencias y de diferencias $z - z_0$ que se encuentran en los denominadores de los términos de la parte principal de serie de Laurent coincide con el orden del polo.

3. El punto z_0 es el punto singular esencial para la función $f(z)$ entonces y sólo entonces cuando la parte principal de su desarrollo de Laurent en el entorno del punto z_0 contiene infinitamente muchos términos.

Ejemplo 11. Definir el carácter del punto singular $z_0 = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}.$$

Solución. Por medio del desarrollo en serie de Taylor para la función e^{-z} en el entorno del punto $z_0 = 0$, obtenemos el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del cero

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} (1 - e^{-z}) = \frac{1}{z} \left[1 - \left(1 - z + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} - \dots \right) = 1 - \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} - \dots \end{aligned}$$

Este desarrollo no contiene la parte principal. Por eso el punto $z_0 = 0$ es singular evitable.

Función $f(z)$ que ha sido definida en el punto $z = 0$ por la unidad, es decir,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1 - e^{-z}}{z}, & \text{si } z \neq 0, \\ 1, & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

es analítica también y en el punto $z_0 = 0$.

Ejemplo 12. Definir el carácter del punto singular $z_0 = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^7}.$$

Solución. Desarrollando la función $\cos z$ en serie de Taylor según los exponentes z , obtenemos el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del cero:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^7} \left(\frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \frac{z^8}{8!} + \frac{z^{10}}{10!} - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{2!z^5} - \frac{1}{4!z^3} + \frac{1}{6!z} - \frac{z}{8!} + \frac{z^3}{10!} - \dots \end{aligned}$$

El desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z_0 = 0$ contiene el número finito de términos de potencias negativas z . Por consiguiente, el punto $z_0 = 0$ es el polo del quinto orden,

puesto que el más grande exponente de potencia de z que se encuentra en los denominadores de los términos de la parte principal de serie de Laurent es igual al cinco.

Ejemplo 13. Definir el carácter del punto singular $z = 1$ de la función

$$f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

Solución. Utilizando el desarrollo

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$$

y suponiendo que $u = \frac{1}{z-1}$, obtenemos el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z_0 = 1$:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z-1) \left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots \right] = \\ &= 1 + (z-1) + \frac{1}{2!(z-1)} + \frac{1}{3!(z-1)^2} + \dots \end{aligned}$$

Este desarrollo contiene el conjunto infinito de los términos de potencias negativas $z - 1$. Por lo tanto, el punto $z_0 = 1$ es el punto singular esencial de la función $f(z)$.

Definir el carácter de los puntos singulares indicados:

$$297. \frac{1 + \cos z}{z - \pi}, \quad z_0 = \pi. \quad 298. \frac{z^2 - 3z + 2}{z^2 - 2z + 1}, \quad z_0 = 1.$$

$$299. \frac{\sin z}{z^2}, \quad z_0 = 0. \quad 300. \frac{\operatorname{sh} z}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$$301. \cos \frac{1}{z + \pi}, \quad z_0 = -\pi. \quad 302. \frac{z^2 - 1}{z^6 + 2z^5 + z^4}, \quad z = 0, \quad z_0 = -1.$$

$$303. \frac{\ln(1+z^8)}{z^2}, \quad z_0 = 0. \quad 304. \frac{\operatorname{sen}^2 z}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$$305. \frac{ez+e}{z+e}, \quad z_0 = -e. \quad 306. \cos \frac{1}{z} + \operatorname{sen} \frac{2-\pi z}{z}, \quad z = 0.$$

$$307. z \operatorname{sh} \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

§ 9. Residuos de funciones

Sea el punto z_0 es el punto singular aislado de la función $f(z)$. *Residuo* de la función $f(z)$ en el punto z_0 se llama el número que se designa con el símbolo $\operatorname{res} f(z_0)$ y que se define por igualdad

$$\operatorname{res} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz. \quad (1)$$

(Otras designaciones son: $\text{res } [f(z); z_0]$, $\text{res } f(z)$. (En calidad del contorno γ se puede tomar la circunferencia con el centro en el punto z_0 del radio suficientemente pequeño tal que la circunferencia no salga de los límites de la analiticidad de función $f(z)$ y no contenga dentro otros puntos singulares de la función $f(z)$. El residuo de función es igual al coeficiente de la primera potencia con signo menos en el desarrollo de Laurent $f(z)$ en el entorno del punto $z = z_0$:

$$\text{res } f(z_0) = c_{-1}. \quad (2)$$

Residuo en el punto singular evitable es igual al cero.

Si el punto z_0 es el polo de n orden de la función $f(z)$, entonces

$$\text{res } f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{f(z)(z-z_0)^n\}. \quad (3)$$

En caso del polo simple ($n = 1$)

$$\text{res } f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z-z_0)]. \quad (4)$$

Si la función $f(z)$ en el entorno del punto z_0 se puede presentarla como el cociente de dos funciones analíticas

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

al mismo tiempo $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, y $\psi'(z_0) \neq 0$, es decir, z_0 es el polo simple de la función $f(z)$, entonces

$$\text{res } f(z_0) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (5)$$

Si el punto z_0 es el punto singular esencial de la función $f(z)$, entonces para hallar $\text{res } f(z_0)$ es necesario hallar el coeficiente c_{-1} en el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del punto z_0 ; lo que es $\text{res } f(z_0)$.

Ejemplo 1. Hallar residuos de la función

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$$

en sus puntos singulares.

Solución. Los puntos singulares de la función $\frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2}$ son

los puntos $z=0$ y $z=\pi/4$. En el punto $z=0$ tenemos

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z^2}{z^2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z - \frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}.$$

Por consiguiente, el punto $z = 0$ es el punto singular evitable de la función $f(z)$. Por eso

$$\text{res } f(0) = 0.$$

En el punto $z = \pi/4$ tenemos $\lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) = \infty$, es decir, el punto $z = \pi/4$ es el polo (del primer orden) de la función $f(z)$.

Según la fórmula (4) tenemos

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} f(z) \left(z - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^3 - \frac{\pi}{4} z^2} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{z \rightarrow \pi/4} \frac{\sin z^2}{z^2} = \frac{16}{\pi^2} \sin \frac{\pi^2}{16}.$$

Ejemplo 2. Hallar residuos de la función

$$f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3 (z-2)}$$

en sus puntos singulares.

Solución. Los puntos singulares de la función $f(z)$ son $z = -1$ y $z = 2$. El punto $z = -1$ para la función $f(z)$ es el polo del tercer orden. Según la fórmula (3) tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(-1) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{e^z}{z-2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z^2 - 6z + 10}{(z-2)^3} e^z = -\frac{17}{54e}. \end{aligned}$$

El punto $z = 2$ es el polo del primer orden, por eso conforme a la fórmula (4)

$$\operatorname{res} f(2) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{e^z}{(z+1)^3} = \frac{e^3}{27}.$$

Ejemplo 3. Hallar residuos de la función $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$ en sus puntos singulares.

Solución. Puntos singulares $f(z)$ son los ceros del denominador, es decir, las raíces de la ecuación $z^4 + 1 = 0$. Tenemos

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_3 = e^{-i\frac{3\pi}{4}}, \quad z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Por medio de la fórmula (5), obtendremos

$$\operatorname{res} f(z_1) = \frac{1}{4z^3} \Bigg|_{z=z_1} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

$$\operatorname{res} f(z_2) = \frac{1}{4z^3} \Bigg|_{z=z_2} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9\pi}{4}}.$$

$$\operatorname{res} f(z_3) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{-i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{9\pi}{4}},$$

$$\operatorname{res} f(z_4) = \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Ejemplo 4. Hallar el residuo de la función

$$f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z^2}$$

en su punto singular.

Solución. El punto singular de la función $f(z)$ es el punto $z = 0$. Ella es el punto singular esencial de la función $f(z)$. De hecho, el desarrollo de Laurent de la función en el entorno del punto $z = 0$ tiene la forma

$$f(z) = z^3 \left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3! z^6} + \frac{1}{5! z^{10}} - \dots \right) = z - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^7} - \dots,$$

es decir, contiene el número infinito de miembros en la parte principal. El residuo de la función en el punto $z = 0$ es igual a cero, puesto que el coeficiente c_{-1} en el desarrollo de Laurent $f(z)$ es igual a cero.

Si la función $f(z)$ tiene la forma $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, donde las funciones analíticas $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ en el punto z_0 tienen ceros superiores del primer orden, entonces en este caso es muy cómodo cambiar las funciones $\varphi(z)$ y $\psi(z)$ por desarrollos en serie de Taylor en el entorno del punto z_0 .

Ejemplo 5. Hallar el residuo en el punto $z = 0$ de la función

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z}.$$

Solución. El punto $z = 0$ es el cero del numerador $\varphi(z) = \sin 3z - 3 \sin z$ y al mismo tiempo es el cero del denominador $\psi(z) = (\sin z - z) \sin z$. Definimos los órdenes del cero para estas funciones, empleando el desarrollo en serie de Taylor $\sin z$ en el entorno del punto $z = 0$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

Tenemos

$$\varphi(z) = \sin 3z - 3 \sin z =$$

$$\begin{aligned} &= 3z - \frac{3^3 z^3}{3!} + \frac{3^5 z^5}{5!} - \dots - 3 \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \\ &= - \frac{3^3 - 3}{3!} z^3 + \frac{3^5 - 3}{5!} z^5 - \dots = z^3 \varphi_1(z) \end{aligned}$$

donde

$$\varphi_1(z) = -\frac{3^3 - 3}{3!} + \frac{3^5 - 3}{5!} z^2 - \dots, \quad \varphi_1(0) = -4 \neq 0;$$

$$\begin{aligned}\psi(z) &= (\sin z - z) \sin z = \left(-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) = \\ &= z^4 \left(-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots\right) \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right) = z^4 \psi_1(z)\end{aligned}$$

donde

$$\psi_1(z) = \left(-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \dots\right) \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right), \quad \psi_1(0) = -\frac{1}{6} \neq 0.$$

Por consiguiente,

$$f(z) = \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z} = \frac{z^3 \varphi_1(z)}{z^4 \psi_1(z)} = \frac{\varphi_1(z)}{z \psi_1(z)},$$

y puesto que $\varphi_1(0) \neq 0$, $\psi_1(0) \neq 0$, entonces el punto $z = 0$ es el polo simple de la función dada, por eso su residuo en este punto lo hallamos mediante la fórmula (5)

$$\text{res}_{z=0} \frac{\sin 3z - 3 \sin z}{(\sin z - z) \sin z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\varphi_1(z)}{z \psi_1(z)} z = \frac{\varphi_1(0)}{\psi_1'(0)} = \frac{-4}{-\frac{1}{7}} = 24.$$

Calcular los residuos siguientes:

$$308. \text{ res}_{z=0} \frac{z^{n-1}}{\sin^n z} (n = 1, 2, \dots). \quad 309. \text{ res}_{z=0} \frac{\sin 2z - 2z}{(1 - \cos z)^2}.$$

$$310. \text{ res}_{z=0} \frac{e^z - 1 - z}{(1 - \cos 2z) \sin z}. \quad 311. \text{ res}_{z=0} \frac{(1 - \operatorname{ch} z) \operatorname{sh} z}{(1 - \cos z) \sin^2 z}.$$

$$312. \text{ res}_{z=0} \frac{z^{n-2}}{\operatorname{sh}^n z} (n = 2, 3, \dots). \quad 313. \text{ res}_{z=0} \frac{z^2}{\operatorname{ch} z - 1 - \frac{z^2}{2}}$$

Ejemplo 6. Hallar residuos de la función $f(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z}$ en sus puntos singulares.

Solución. Los puntos singulares de la función dada son $z = 1$ y $z = 0$. El punto $z = 1$ es el polo simple, por lo tanto

$$\text{res}_{z=1} f(z) = \frac{e^{1/z}}{-1} \Big|_{z=1} = -e.$$

Para definir el carácter del punto singular $z = 0$ desarrollemos la función en serie de Laurent en el entorno de este punto. Tenemos

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots,$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

Multiplicando estas series, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{e^{1/z}}{1-z} &= \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2! z^2} + \frac{1}{3! z^3} + \dots\right) (1 + z + z^2 + z^3 + \dots) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots\right) \frac{1}{z} + c_{-2} \frac{1}{z^2} + \dots + \text{la parte correcta} \end{aligned}$$

donde $c_{-k} \neq 0$, $k = 2, 3, \dots$

Puesto que la parte principal de la serie de Laurent contiene un conjunto infinito de términos de potencias negativas z , entonces el punto $z = 0$ es el punto singular esencial de la función dada. Su residuo en el punto $z = 0$ es igual

$$\underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z) = c_{-1} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e - 1.$$

Ejemplo 7. Hallar el residuo de la función $f(z) = \cos z \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ en su punto singular $z = 0$.

Solución. Para definir el carácter del punto singular desarrollemos la función dada en serie de Laurent en el entorno del punto $z = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots, \\ \operatorname{sen} \frac{1}{z} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots \end{aligned}$$

Multiplicando estas series, obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) = \cos z \operatorname{sen} \frac{1}{z} &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{1}{2! 3!} + \frac{1}{4! 5!} + \dots\right) \frac{1}{z} - \\ &- \left(\frac{1}{0! 3!} + \frac{1}{2! 5!} + \frac{1}{4! 7!} + \dots\right) \frac{1}{z^3} + \dots + \text{la parte correcta.} \end{aligned}$$

Pues, la serie de Laurent en el entorno del punto $z = 0$ tiene la forma

$$\cos z \operatorname{sen} \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! (2n+1)!} \frac{1}{z} + c_{-3} \frac{1}{z^3} + \dots + \text{la parte correcta,}$$

donde $c_{-(2k-1)} \neq 0$, $k = 1, 2, \dots$

La parte principal de la serie de Laurent contiene un conjunto infinito de términos y, por consiguiente, el punto $z = 0$ es el punto esencialmente singular de la función dada. El residuo buscado es igual

$$\underset{z=0}{\operatorname{res}} \left(\cos z \operatorname{sen} \frac{1}{z} \right) = c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! (2n+1)!}.$$

Ejemplo 8. Hallar el residuo de la función

$$w = z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z+1}$$

en su punto singular.

Solución. El punto singular de la función dada es el punto $z = -1$. Para definir el carácter de este punto desarrollemos la función en serie de Laurent en el entorno del punto $z = -1$. Para eso expresemos z^2 a través de potencias de la diferencia $z - (-1) = z + 1$. Tenemos

$$z^2 = [(z + 1) - 1]^2 = (z + 1)^2 - 2(z + 1) + 1. \quad (1)$$

La serie de Laurent para la función $\operatorname{sen} \frac{1}{z+1}$ en el entorno del punto $z = -1$ tiene la forma

$$\operatorname{sen} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{3! (z+1)^3} + \frac{1}{5! (z+1)^5} - \dots \quad (2)$$

Multiplicando (1) y (2), hallamos

$$\begin{aligned} w &= z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z+1} = \\ &= [(z+1)^2 - 2(z+1) + 1] \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3! (z+1)^3} + \frac{1}{5! (z+1)^5} - \dots \right] = \\ &= \left(1 - \frac{1}{3!} \right) \frac{1}{z+1} + \frac{2}{3!} \frac{1}{(z+1)^3} + \\ &\quad + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!} \right) \frac{1}{(z+1)^5} + \dots + [-2 + (z+1)]. \end{aligned}$$

La serie de Laurent contiene el conjunto infinito de términos de potencias negativas de la suma $z + 1$. Por consiguiente, el punto $z = -1$ es el punto esencialmente singular de la función dada y su residuo en este punto es igual

$$\underset{z=-1}{\operatorname{res}} w = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}.$$

Ejemplo 9. Hallar el residuo de la función

$$f(z) = e^{1/z^2} \cos z$$

en el punto $z = 0$.

Solución. Puesto que el residuo en el punto $z = 0$ es igual al coeficiente para z^{-1} , entonces en seguida obtenemos que en el caso dado este residuo es igual al cero, porque la función $f(z)$ es par y su desarrollo en el entorno del punto $z = 0$ no puede contener potencias impares z .

Hallar residuos en los puntos singulares de las funciones siguientes:

$$314. \quad f(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z^3 - \frac{\pi}{4} z}.$$

$$315. \quad f(z) = z^3 e^{1/z}.$$

$$316. \quad f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + 1)(z - 3)}.$$

$$317. \quad f(z) = \frac{e^z}{\frac{1}{4} - \operatorname{sen}^2 z}.$$

$$318. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^3(z-1)}.$$

$$319. \quad f(z) = \frac{z}{(z+1)^3(z-2)^2}.$$

$$320. \quad f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1+z^4}.$$

$$321. \quad f(z) = z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}.$$

$$322. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z} + z^3.$$

$$323. \quad f(z) = \frac{\operatorname{sen} 2z}{(z+i)\left(z-\frac{i}{2}\right)^2}.$$

$$324. \quad f(z) = \frac{1-\cos z}{z^3(z-3)}.$$

$$325. \quad f(z) = e^{z^2+\frac{1}{z^2}}.$$

$$326. \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2-1)(z+3)}.$$

$$327. \quad f(z) = \frac{\cos z}{z^3 - \frac{\pi}{2} z^2}.$$

$$328. \quad f(z) = \frac{e^{\pi iz}}{z-i}.$$

$$329. \quad f(z) = \frac{z^{2n}}{(z-1)^n} \quad (n > 0 \text{ -- es entero}).$$

$$330. \quad f(z) = \operatorname{ctg}^2 z.$$

$$331. \quad f(z) = \operatorname{sen} z \cos \frac{1}{z}.$$

$$332. \quad f(z) = e^{\frac{z}{z-1}}.$$

$$333. \quad f(z) = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{z}}{1-z}.$$

$$334. \quad f(z) = \frac{\frac{1}{e^z}}{1+z}.$$

$$335. \quad f(z) = e^{\frac{z^2+1}{z}}.$$

$$336. \quad f(z) = e^z \operatorname{sen} \frac{1}{z}.$$

§ 10. Teorema de Cauchy de los residuos.

Aplicación de residuos al cálculo
de las integrales definidas.

Sumación de ciertas series mediante residuos

I. Teorema de Cauchy de los residuos

Teorema. Si la función $f(z)$ es analítica en la frontera C del dominio D y en todas partes dentro del dominio a excepción del número finito de los puntos singulares z_1, z_2, \dots, z_n , entonces

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{h=1}^n \operatorname{res} f(z_h).$$

Ejemplo 1. Calcular la integral $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz$.

Solución. En el dominio $|z| < 4$ la función $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ es analítica en todas partes excepto los puntos $z = 0$ y $z = -1$.

Según el teorema de Cauchy de los residuos

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1)).$$

El punto $z = 0$ es el punto singular evitable de la función $f(z)$, porque

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z(z+1)} = 1.$$

Por tanto $\operatorname{res} f(0) = 0$. El punto $z = -1$ es el polo del primer orden

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{z \rightarrow -1} \left\{ \frac{e^z - 1}{z(z+1)} (z+1) \right\} = 1 - e^{-1}.$$

De tal modo $\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (1 - e^{-1})$.

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz$.

Solución. En el dominio $D: |z| < 2$ la función $f(z) = \operatorname{tg} z$ es analítica en todas partes, excepto los puntos $z = \frac{\pi}{2}$ y $z = -\frac{\pi}{2}$ que son los polos simples. Todos los demás puntos singulares $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ de la función $f(z) = \operatorname{tg} z$ se encuentran fuera del dominio D y por eso no los tomamos en consideración.

Tenemos

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z=\frac{\pi}{2}} = -1.$$

$$\operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z=-\pi/2} = -1.$$

Por lo tanto $\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz = -4\pi i$.

Ejemplo 3. Calcular la integral $\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1} dz$.

Solución. En el dominio $D: |z-i| < 3/2$ la función $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2 + 1}$ tiene dos puntos singulares: $z = i$ es el polo del primer orden y $z = 0$ es el punto esencialmente singular.

Según la fórmula (5) del § 9 tenemos

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Para hallar el residuo en el punto $z = 0$ hay que tener el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno del punto $z = 0$. Sin embargo, en el caso dado no hay necesidad de buscar la serie de Laurent: la función $f(z)$ es par y por eso se puede decir de antemano que en su desarrollo de Laurent se tendrán sólo potencias par de z y $\frac{1}{z}$. Debido a lo que, $c_{-1} = 0$ y por lo tanto $\operatorname{res} f(0) = 0$. En virtud del teorema de Cauchy de los residuos

$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}.$$

Ejemplo 4. Calcular la integral

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz.$$

Solución. En el círculo $|z| \leq 2$ la función subintegral tiene dos puntos singulares $z = 1$ y $z = 0$. Es muy fácil definir que $z = 1$ es el polo simple, por eso

$$\operatorname{res}_{z=1} \left(\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} \right) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)'} \Big|_{z=1} = \sin 1.$$

Para definir el carácter del punto singular $z = 0$ escribimos la serie de Laurent para la función $\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$ en el entorno de este punto. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} &= \\ &= -\frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z} = -(1+z+z^2+\dots) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \frac{1}{5! z^5} - \dots \right) = \\ &= -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots \right) \frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots + \text{la parte correcta}, \\ &\quad c_{-k} \neq 0, k=2, 3, \dots \end{aligned}$$

Puesto que la serie de Laurent contiene un conjunto infinito de términos de potencias negativas z , entonces el punto $z = 0$ es singular esencial.

El residuo de la función subintegral en este punto es igual

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1} = c_{-1} = -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots \right) = -\sin 1.$$

Por consiguiente,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz = 2\pi i (\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 1) = 0.$$

Calcular las integrales:

337. $\int_{|z|=1} z \operatorname{tg} \pi z dz.$

338. $\int_C \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)}$, donde C : $x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}$.

339. $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}.$

340. $\int_{z-i=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2} dz.$

341. $\int_{|z|=1/2} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz.$

342. $\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\operatorname{sen} \pi z}{z^2-z} dz.$

343. $\int_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^z+3}.$

344. $\int_{|z|=1} \frac{z^2 az}{\operatorname{sen}^3 z \cos z}.$

345. $\int_{|z-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}.$

346. $\int_{|z|=4} \frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}.$

347. $\int_C \frac{\cos \frac{z}{2}}{z^2-4} dz, C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$

348. $\int_C \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz, C: x^2+y^2-2x=0.$

349. $\int_C \frac{\operatorname{sen} \pi z}{(z^2-1)^2} dz, C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$

350. $\int_C \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz; C: x^2+y^2=16.$

351. $\int_C \frac{z \operatorname{sen} z}{(z-1)^5} dz, C: \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$

352. $\int_C \frac{dz}{z^4+1}, C: x^2+y^2=2x.$

353. $\int_{|z|=1} z^3 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz.$

$$354. \int_{|z|=1/3} (z+1) e^{1/z} dz.$$

$$355. \int_{|z|=2/3} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{z^2} + e^{z^2} \cos z \right) dz.$$

Residuo de función respecto al punto infinito

Hablan que la función $f(z)$ es analítica en el punto infinito (o infinitamente alejado) $z = \infty$, si la función

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

es analítica en el punto $\zeta = 0$.

Por ejemplo, la función $f(z) = \operatorname{sen} \frac{1}{z}$ es analítica en el punto $z = \infty$ porque la función

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \operatorname{sen} \zeta$$

es analítica en el punto $\zeta = 0$.

Sea que la función $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto infinitamente alejado (a excepción del mismo punto $z = \infty$).

El punto $z = \infty$ se llama *punto singular aislado* de la función $f(z)$, si en cierto entorno de este punto no hay otros puntos singulares de la función $f(z)$.

La función $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$ tiene en el infinito una particularidad no aislada: los polos $z_k = k\pi$ de esta función se acumulan en el infinito, si $k \rightarrow \infty$.

Es conocido que $z = \infty$ es el punto singular evitable, el polo o el punto singular esencial de la función $f(z)$ en dependencia del $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$,

si este límite es finito, infinito o no existe en absoluto.

Criterios del tipo de un punto singular infinitamente alejado, relacionados con el desarrollo de Laurent cambian en comparación con los criterios para los puntos singulares finitos.

Teorema 1. Si $z = \infty$ es el punto singular evitable de la función $f(z)$, entonces el desarrollo de Laurent $f(z)$ en el entorno de este punto no contiene potencias positivas z ; si $z = \infty$ es el polo, entonces este desarrollo contiene el número finito de potencias positivas z , en el caso de la singularidad esencial contiene el número infinito de potencias positivas z .

Con esto, el desarrollo $f(z)$ en serie de Laurent que converge en todas partes fuera del círculo del radio suficientemente grande R con el centro en el punto $z = 0$ (a excepción, puede ser, del mismo punto $z = \infty$) vamos a denominar el desarrollo de Laurent de la función $f(z)$ en el entorno de un punto infinitamente alejado.

Sea que la función $f(z)$ es analítica en cierto entorno del punto $z = \infty$ (menos, puede ser, el mismo punto).

La magnitud

$$\operatorname{res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz, \quad (1)$$

donde γ es la circunferencia suficientemente grande $|z| = \rho$ que se recorre en sentido horario (de tal modo que el entorno del punto $z = \infty$ se queda a la izquierda, como y en el caso del punto finito $z = a$) es el residuo de la función $f(z)$ en el infinito.

De esta definición sigue que el residuo de la función en el infinito es igual al coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent $f(z)$ en el entorno del punto $z = \infty$ tomado con el signo contrario:

$$\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1}. \quad (2)$$

Ejemplo 5. Tenemos $f(z) = 1 + \frac{1}{z}$ para la función $f(z) = \frac{z+1}{z}$.

Se puede considerar esta expresión como su desarrollo de Laurent en el entorno de un punto infinito. Es evidente que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 1,$$

así que el punto $z = \infty$ es el punto singular evitable y suponemos como siempre $f(\infty) = 1$ y, por consiguiente,

$$\operatorname{res} f(\infty) = -1.$$

De este ejemplo se deduce que el residuo de la función analítica respecto al punto infinito singular evitable puede resultarse diferente del cero, a diferencia del punto finito singular evitable.

Los desarrollos conocidos de las funciones e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ se puede considerarlos también como los desarrollos de Laurent en el entorno del punto $z = \infty$. Puesto que todos estos desarrollos contienen un conjunto infinito de potencias positivas z , entonces las funciones enumeradas tienen en el punto $z = \infty$ la singularidad esencial.

Teorema 2. Si la función $f(z)$ tiene en el plano extendido complejo un número finito de los puntos singulares, entonces la suma de todos sus residuos, incluso y el residuo en el infinito, es igual a cero.

Así que si a_1, a_2, \dots, a_n son los puntos singulares finitos de la función $f(z)$, entonces

$$\operatorname{res} f(\infty) + \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k) = 0$$

6

$$\operatorname{res} f(\infty) = - \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(a_k). \quad (3)$$

La última relación podrá ser útil para calcular ciertas integrales.

Ejemplo 6. Calcular la integral

$$I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4}.$$

Solución. Las raíces z_1, z_2, z_3, z_4 de la ecuación $z^4 = -1$ que todas se encuentran dentro de la circunferencia $|z| = 2$ son los polos

(finitos) de la función subintegral

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}.$$

La función $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ en el entorno del punto infinito tiene el desarrollo

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} - \dots,$$

del cual se ve que $\operatorname{res} f(\infty) = -c_{-1} = 0$. En vigor de la igualdad (3)

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^4 \operatorname{res} f(z_k) = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty) = 0.$$

Ejemplo 7. Calcular la integral

$$I = \int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3 (z^3+3)^4} dz.$$

Solución. La función subintegral

$$f(z) = \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3 (z^3+3)^4}$$

dentro de la circunferencia $|z|=3$ tiene cinco puntos singulares que son los polos múltiples. La aplicación del teorema fundamental sobre los residuos proporciona muchas calculaciones. Para calcular la integral dada es más cómodo utilizar la igualdad (3), en virtud del cual obtendremos

$$I = -2\pi i \operatorname{res} f(\infty). \quad (3')$$

Ya que la función $f(z)$ se puede representar en la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3 (z^3+3)^4} = \\ &= \frac{z^{17}}{z^6 \left(1 + \frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{z^3}\right)^4 z^{12}} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{2}{z^2}\right)^3 \left(1 + \frac{3}{z^3}\right)^4}. \end{aligned}$$

entonces se ve de aquí, que la parte correcta del desarrollo de Laurent de esta función en el entorno del punto infinitamente alejado $z=\infty$ comienza con el término $1/z$. Por consiguiente, $\operatorname{res} f(\infty) = -1$. Sustituyendo este valor en la igualdad (3), obtendremos $I = 2\pi i$.

Definir el carácter del punto infinitamente alejado para las funciones siguientes:

$$356. \quad f(z) = \frac{z^3 - z^2 + z + 6}{z^2}. \quad 357. \quad f(z) = \frac{z+1}{z^4}.$$

$$358. \quad f(z) = \frac{e^z}{z^2}. \quad 359. \quad f(z) = \cos \frac{1}{z}.$$

$$360. \quad f(z) = e^{1/z^2}.$$

$$361. \quad f(z) = z^3 e^{1/z}.$$

362. Sea la función $f(z)$ representable en la forma $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, donde la función $\varphi(\zeta)$ es analítica en el punto $\zeta = 0$. Demostrar que $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0)$.

Utilizando el residuo respecto al punto infinito calcular las integrales siguientes:

$$363. \quad \int_{|z|=1} \frac{z^2 + 1}{z^3} dz.$$

$$364. \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}}.$$

$$365. \quad \int_{|z|=2} \frac{1000z+2}{1+z^{1224}} dz.$$

$$366. \quad \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z-1} dz.$$

$$367. \quad \int_{|z|=1} z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z} dz.$$

$$368. \quad \int_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1} dz.$$

II. Aplicación de residuos al cálculo de integrales definidas

1. *Integrales de funciones racionales.* Sea $f(x)$ una función racional, $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, donde $P_m(x)$ y $Q_n(x)$ son los polinomios respectivamente de potencias m y n . Si $f(x)$ es continua en todo el eje real ($Q_n(x) \neq 0$) y $n \geq m+2$, es decir, la potencia del denominador por lo menos en dos unidades es más que la potencia del numerador, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sigma, \quad (4)$$

donde σ significa la suma de residuos de la función $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ en todos los polos que se encuentran en el semiplano superior.

Ejemplo 8. Calcular la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad (a > 0).$$

Solución. Puesto que la función subintegral $f(x) = \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2}$ es par, entonces

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Introduzcamos la función $f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2}$ que en el eje real, es decir, para $z = x$ coincide con $f(x)$. La función $f(z)$ tiene en el semiplano superior el polo del segundo orden en el punto $z = ai$, el residuo $f(z)$ respecto a este polo es igual

$$\begin{aligned} \operatorname{res} f(ai) &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} [f(z)(z - ai)^2] = \\ &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z + ai)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ai} \frac{2az}{(z + ai)^3} = \frac{1}{4ai}. \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula (4), obtenemos

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{4ai} = \frac{\pi}{4a}.$$

Calcular las integrales siguientes con los límites infinitos:

$$369. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$$

$$370. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$371. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$$

$$372. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^{n+1}}.$$

$$373. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 4x + 13)^2}.$$

$$374. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2 (x^2 + b^2)^2}.$$

$$375. \int_0^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx.$$

$$376. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1 + x^{2n}} dx.$$

$$377. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^6}.$$

$$378. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

$$379. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(a + bx^2)^4} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$380. \text{Demostrar la fórmula } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(1 + z^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \pi.$$

2. Integrales del tipo

$$\int_0^\infty R(x) \cos \lambda x dx, \quad \int_0^\infty R(x) \sin \lambda x dx,$$

donde $R(x)$ es una fracción propia racional, $\lambda > 0$ es cualquier número real. Para calcular tales integrales es cómodo utilizar el *lema de Jordan*:

Sea $g(z)$ una función analítica en el semiplano superior ($0 < \arg z < \pi$) a excepción del número finito de los puntos singulares

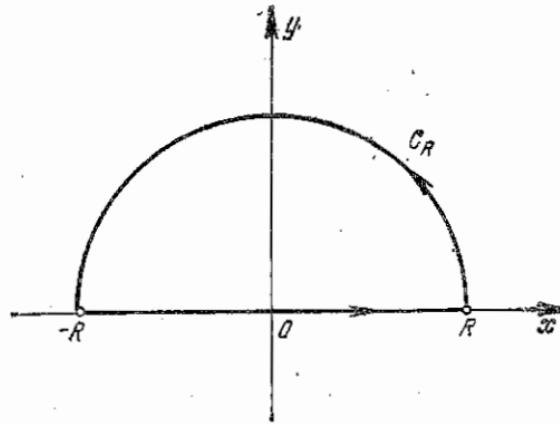


Fig. 7

y tiende en este semiplano a cero para $|z| \rightarrow \infty$. Entonces, para $\lambda > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} g(z) e^{i\lambda z} dz = 0,$$

donde el contorno C_R es la semicircunferencia en el semiplano superior con el centro en el punto 0 y del radio R (fig. 7).

Ejemplo 9. Calcular la integral

$$I = \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2} dx \quad (a > 0, k > 0).$$

Solución. Introduzcamos una función auxiliar

$$f(z) = \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2}.$$

Es evidente que si $z = x$, entonces $\operatorname{Im} f(x)$ coincide con la función subintegral $\varphi(x) = \frac{x \sin ax}{x^2 + k^2}$. Examinemos el contorno indicado en la

fig. 7. Para (R suficientemente grande en el contorno C_R) la función $g(z) = \frac{z}{z^2 + k^2}$ satisface la desigualdad $|g(z)| < \frac{R}{R^2 - k^2}$ y por consiguiente, $g(z)$ tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$. Entonces, según la lema de Jordan

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 0. \quad (5)$$

Para cualquier $R > k$ por el teorema sobre residuos tenemos

$$\int_{-R}^R \frac{xe^{iaz}}{x^2 + k^2} dx + \int_{C_R} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} dz = 2\pi i \sigma.$$

donde

$$\sigma = \operatorname{res}_{z=ik} \left[\frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} \right] = \lim_{z \rightarrow ik} \left[\frac{ze^{iaz}}{z^2 + k^2} (z - ik) \right] = \frac{1}{2} e^{-ak}.$$

En el límite para $R \rightarrow \infty$, teniendo en cuenta la relación (5), obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iaz}}{x^2 + k^2} dx = \pi i e^{-ak}.$$

Separando de la izquierda y de la derecha las partes reales e imaginarias, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^2 + k^2} dx = \pi e^{-ak}.$$

En virtud de lo que la función subintegral es par definitivamente obtenemos

$$I = \frac{\pi}{2} e^{-ak}.$$

Ejemplo 10. Hallar la representación integral de la función de unidad (función de Heaviside) $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, \\ 1 & \text{para } t > 0. \end{cases}$

Solución. Examinemos la función

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-itz}}{z} dz,$$

donde el contorno C se representa en fig. 8.

Cerrando el contorno por la semicircunferencia C_R que se encuentra en el semiplano superior, podemos ver que para $t < 0$ en vigor

del lema de Jordan las integrales

$$\int_{C_R} \frac{e^{-itz}}{z} dz \rightarrow 0 \text{ para } R \rightarrow \infty,$$

y puesto que en el dominio con tal contorno cerrado la función subintegral es analizable obtenemos que $f(t) = 0$ para $t < 0$.

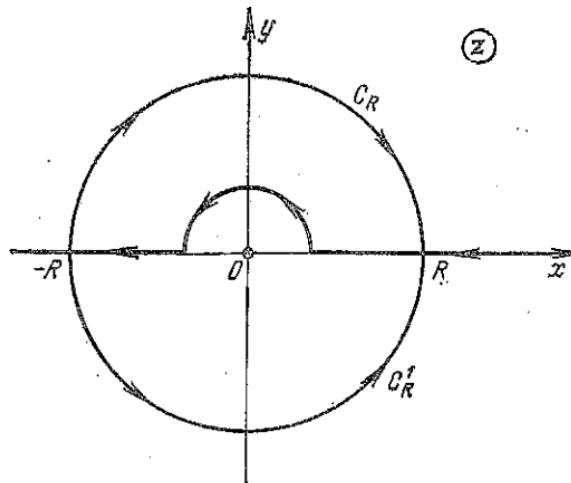


Fig. 8

Construyamos ahora el cierre del contorno con ayuda de la semicircunferencia C'_R que se encuentra en el semiplano inferior. Ahora para $t > 0$ de nuevo obtenemos en virtud del lema de Jordan que las integrales

$$\int_{C'_R} \frac{e^{-itz}}{z} dz \rightarrow 0 \text{ para } R \rightarrow \infty.$$

Pero ahora el punto $z = 0$ se encuentra dentro del contorno de integración. Resulta que debido al teorema de Cauchy de los residuos

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-itz}}{z} dz = 1 \quad (t > 0).$$

Pues

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-itz}}{z} dz = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 0, \\ 1 & \text{para } t > 0. \end{cases}$$

De ese modo la integral examinada representa por sí misma la función discontinua.

Calcular las integrales siguientes:

$$381. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x dx}{x^2 - 2x + 10}.$$

$$382. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x + 20} dx.$$

$$383. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$$

$$384. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 9}.$$

$$385. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax dx}{1+x^4} (a > 0). \quad 386. \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} (a > 0).$$

$$387. \int_0^{\infty} \frac{\cos mx dx}{a^2 + x^2} (m > 0, a > 0).$$

$$388. \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{1+x^2+x^4} dx. \quad 389. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{(x^2+1)(x^2+9)} (\lambda > 0).$$

$$390. \int_0^{\infty} \frac{x^3 \operatorname{sen} ax}{(1+x^2)^2} dx (a > 0). \quad 391. \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos x dx}{(x^2+1)^2}$$

$$392. \int_0^{\infty} \frac{3x^2 - a^2}{(x^2+b^2)^2} \cos mx dx.$$

Ejemplo 11. Calcular la integral

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{x(x^2+b^2)} dx \quad (a > 0, b > 0). \quad (6)$$

Solución. Introduzcamos la función $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$ tal que $\operatorname{Im} f(z)$ coincide con la función subintegral en (6) para $z = x$. La función $f(z)$ tiene una particularidad en el eje real: el polo del primer orden en el punto $z = 0$. Por eso escogamos el contorno de integración de esa manera como se indica en la fig. 9 (el punto singular $z = 0$ se recorre por el semicírculo pequeño C_r ($r < b$)); escogamos el semicírculo C_R de este modo, para que $b < R$.

De este modo dentro del contorno cerrado se encuentra sólo un polo de la función $f(z)$ en el punto $z = bi$. Según el teorema de Cauchy de los residuos

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iaz}}{x(x^2+b^2)} dx + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} dz + \int_r^R \frac{e^{iaz} dx}{x(x^2+b^2)} + \\ & + \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)} dz = 2\pi i \sigma, \quad (7) \end{aligned}$$

donde

$$\sigma = \operatorname{res}_{z=b} \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} = \lim_{z \rightarrow bi} \frac{e^{iaz}(z - bi)}{z(z^2 + b^2)} = -\frac{e^{-ab}}{2b^2}. \quad (8)$$

Sustituyendo en la primera integral (7) x en $-x$ y uniéndola con la

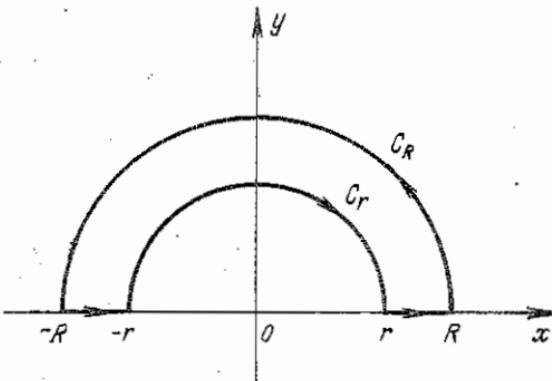


Fig. 9

tercera integral, obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx + \int_r^R \frac{e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx = \\ &= \int_r^R \frac{e^{iax} - e^{iax}}{x(x^2 + b^2)} dx = 2i \int_r^R \frac{\sin ax dz}{x(x^2 + b^2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Yá que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} = \frac{1}{b^2},$$

entonces la función subintegral $\frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$ es representable en la forma

$$\frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)} = \frac{1}{b^2} \frac{1}{z} + \frac{\psi(z)}{z},$$

donde $\lim_{z \rightarrow 0} \psi(z) = 0$. Suponiendo $z = re^{i\varphi}$, hallamos

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{e^{iz} dz}{z(z^2 + b^2)} &= \frac{1}{b^2} \int_{C_r} \frac{dz}{z} + \int_{C_r} \frac{\psi(z)}{z} dz = \\ &= -\frac{i\pi}{b^2} + i \int_{-\pi}^0 \psi(re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

La integral en el segundo miembro de (10) para $r \rightarrow 10$ tiene cero como límite

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\pi}^0 \psi(re^{i\varphi}) d\varphi = 0. \quad (11)$$

En resumen, de acuerdo con el lema de Jordan la cuarta integral en el miembro primero (7) tiende hacia el cero para $R \rightarrow \infty$, ya que la función $g(z) = \frac{1}{z(z^2 + b^2)}$ tiende al cero para $|z| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z(z^2 + b^2)} dz = 0. \quad (12)$$

De este modo para $R \rightarrow \infty$, y $r \rightarrow 0$ la igualdad (7), teniendo en cuenta las relaciones (8)-(12) obtiene la forma

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx - \frac{\pi i}{b^2} = -\pi i \frac{e^{-ab}}{b^2},$$

de donde

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-ab}).$$

Calcular las integrales siguientes:

$$393. \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

$$394. \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + 1)} dx.$$

$$395. \int_0^\infty \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

$$396. \int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2 + a^2)^2} dx.$$

3. *Calculación de integrales que contienen una función exponencial*
Ejemplo 12. Calcular las integrales de Frenel

$$I_1 = \int_0^\infty \cos x^2 dx, \quad I_2 = \int_0^\infty \sin x^2 dx,$$

sabiendo que

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (13)$$

Solución. Examinemos una función auxiliar $f(z) = e^{iz^2}$ y el contorno indicado en fig. 10 (el sector circular $OBAO$ donde $OA = OB = R$)

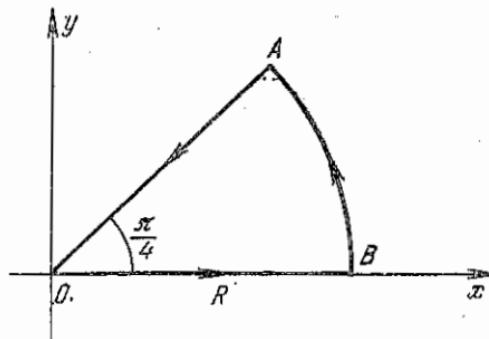


Fig. 10

$= R$ y $\angle BOA = \pi/4$). Dentro de este contorno $f(z)$ es analítica y por medio del teorema de Cauchy

$$\int_{OBAO} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_{AO} e^{iz^2} dz = 0. \quad (14)$$

Mostremos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0. \quad (15)$$

Realmente, suponiendo $z^2 = \xi$, obtenemos $dz = \frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}}$ y

$$\int_{C_R} e^{iz^2} dz = \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{i\xi}}{2\sqrt{\xi}} d\xi,$$

donde Γ_{R^2} es un cuarto de la circunferencia del radio R^2 .

La función $g(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$ satisface las condiciones del lema de

Jordan y por lo tanto,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R^2}} \frac{e^{iz}}{2\sqrt{\xi}} d\xi = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{iz^2} dz = 0.$$

En segmento $AO: z = \rho e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z^2 = \rho^2 e^{i\frac{\pi}{2}} = \rho^2 i$, $0 \leq \rho \leq R$. De aquí

$$\int_{AO} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{-\rho^2} e^{i\frac{\pi}{4}} d\rho = -e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-\rho^2} d\rho. \quad (16)$$

Al pasar en (14) al límite para $R \rightarrow \infty$, y tomando en consideración (15), (16) y (13), obtendremos

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

6

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx + i \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

de donde obtenemos

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{1}{2} i \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Ejemplo 13. Calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1).$$

Solución. Escojamos una función auxiliar

$$f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$$

y el contorno indicado en fig. 11 (rectángulo con lados $2R$ y 2π). Dentro de este contorno $f(z)$ es analizable a excepción del punto $Z = \pi i$ que es para ella el polo simple

$$\operatorname{res} f(\pi i) = \frac{e^{a\pi i}}{(1+e^z)'} \Big|_{z=\pi i} = \frac{e^{a\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{a\pi i}.$$

Según el teorema de Cauchy de los residuos

$$\int_{DA} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{BC} f(z) dz + \int_{CD} f(z) dz = -2\pi i e^{a\pi i} \quad (17)$$

En el segmento $DA: z = x, -R \leq x \leq R$; por lo tanto

$$\int_{DA} = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx. \quad (18)$$

En el segmento $AB: z = R + iy, 0 \leq y \leq 2\pi$; en ese caso

$$\left| \frac{e^{az}}{1+e^z} \right| = \left| \frac{e^{a(R+iy)}}{1+e^{R+iy}} \right| \leq \frac{e^{aR}}{e^R - 1}.$$

Vale decir,

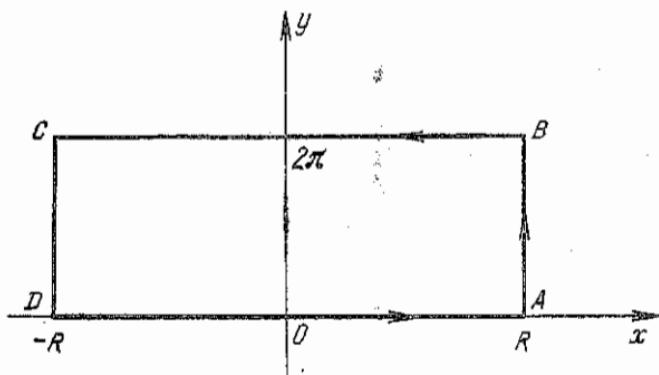


Fig. 11

$$\left| \int_{AB} \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R - 1} dy = \frac{2\pi e^{aR}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \text{ para } R \rightarrow \infty \text{ (ya que } 0 < a < 1\text{).} \quad (19)$$

Análogamente obtenemos

$$\left| \int_{CD} f(z) dz \right| \leq \frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}} 2\pi \rightarrow 0 \text{ para } R \rightarrow \infty \quad (20)$$

En el segmento $BC: z = x + 2\pi i, -R \leq x \leq R$; por eso

$$\int_{BC} = \int_{-R}^R \frac{e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^{x+2\pi i}} dx = -e^{2\pi ai} \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx. \quad (21)$$

Pasando al límite en (17) para $R \rightarrow \infty$ y teniendo en cuenta (18)–(21), obtendremos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx - e^{2\pi ai} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{2\pi ai},$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{2\pi i e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi}.$$

Calcular las integrales siguientes:

397. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx$ ($a > 0, b > 0$).

Indicación. Tomar $f(z) = e^{az^2}$, el contorno es un rectángulo con los lados $2R$ y $\frac{b}{2a}$.

398. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1+e^x} dx$ ($0 < a < 1, 0 < b < 1$).

Indicación. Tomar $f(z) = \frac{e^{az} - e^{bz}}{1+e^z}$, el contorno es como en la fig. 14.

4. Cálculo de integrales del tipo

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \operatorname{sen} x) dx, \quad (22)$$

donde R es la función racional del argumento $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$ limitada dentro del intervalo de integración.

Suponemos que $e^{ix} = z$, entonces $dx = \frac{dz}{iz}$ y

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{z^2 - 1}{2iz}.$$

Es evidente que en dicho caso $|z| = 1, 0 \leq x \leq 2\pi$.

La integral (22) obtiene la forma

$$\int_C F(z) dz, \quad (23)$$

donde C es la circunferencia del radio de unidad con el centro en el origen de coordenadas. De acuerdo con el teorema de Cauchy de los residuos la integral (23) es igual $2\pi\sigma i$, donde σ es la suma de residuos respecto de los polos comprendidos dentro de la circunferencia C .

Ejemplo 14. Calcular la integral $I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b \cos x)^2}$ ($a > b > 0$).

Solución. Aplicando la sustitución $e^{ix} = z$, después de las transformaciones simples obtendremos

$$I = \frac{4}{i} \int_C \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{4}{i} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} F(z_k).$$

Dentro del círculo de unidad para la condición que $a > b > 0$ se encuentra un solo polo (doble)

$$z_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}.$$

El residuo de la función $F(z) = \frac{z}{(bz^2 + 2az + b)^2}$ respecto a este polo

$$\operatorname{res} F(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{z(z - z_1)^2}{b^2(z - z_1)^2(z - z_2)^2} \right\} = \frac{a}{4} (a^2 - b^2)^{3/2}.$$

Pues

$$I = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Calcular las integrales siguientes:

$$399. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (0 < p < 1).$$

$$400. \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3x dx}{1 - 2p \cos 2x + p^2} \quad (0 < p < 1).$$

$$401. \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x dx}{1 - 2p \cos x + p^2} \quad (p > 1).$$

$$402. \int_0^{2\pi} \frac{\cos x dx}{1 - 2p \sin x + p^2} \quad (0 < p < 1).$$

$$403. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + \cos x} \quad (a > 1).$$

$$404. \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(x - a) dx \quad (\operatorname{Im} a > 0).$$

$$405. \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 x}{a + b \cos x} dx \quad (a > b > 0).$$

406. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+a \cos x} \quad (0 < a < 1).$

407. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b \cos x} \quad (0 < b < a).$

III. Sumación de ciertas series mediante residuos

1. Sea la función $f(z)$ analizable en todo el plano complejo a excepción del número finito de polos z_1, z_2, \dots, z_h que no coinciden con ninguno de los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y suponemos que $f(z)$ satisface la condición $f(z) = O(z^{-2})$ para $z \rightarrow \infty$ *). Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = -\pi \sum_{m=1}^h \operatorname{res}_{z=z_m} [f(z) \operatorname{ctg} \pi z]. \quad (24)$$

Ejemplo 15. Hallar la suma de una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$, donde

$a \neq 0$.

Solución. Examinemos la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}.$$

Esta función en todas partes es analizable además de los puntos $z_1 = ai$ y $z_2 = -ai$ que son los polos simples. Puesto que

$$(z) = \frac{1}{z^2 \left(1 + \frac{a^2}{z^2} \right)},$$

entonces de aquí se desprende que

$$\frac{1}{z^2 + a^2} = O(z^{-2}) \text{ para } z \rightarrow \infty.$$

Aplicando la fórmula (24), obtendremos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = -\pi \left[\operatorname{res}_{z=ai} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} + \operatorname{res}_{z=-ai} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} \right].$$

*) La inscripción " $f(z) = O(g(z))$ para $z \rightarrow \infty$ " significa que la relación $\frac{f(z)}{g(z)}$ es limitada siendo $z \rightarrow \infty$:

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq C, \text{ donde } C = \text{const}, C > 0.$$

Para la función $\frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2}$ los puntos $z_1 = ai$ y $z_2 = -ai$ son los polos simples, y por consiguiente, sus residuos serán igual

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} = \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{2z} \Big|_{z=z_k} = \frac{\operatorname{ctg} \pi z_k}{2z_k}, \quad k=1, 2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= -\pi \left(\frac{\operatorname{ctg} \pi ai}{2ai} + \frac{\operatorname{ctg} (-\pi ai)}{-2ai} \right) = \\ &= \frac{\pi}{a} i \operatorname{ctg} (\pi ai) = \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a. \end{aligned}$$

La serie en el primer miembro de la última igualdad se puede escribir en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \dots + \frac{1}{(-n)^2 + a^2} + \dots + \frac{1}{(-2)^2 + a^2} + \\ &+ \frac{1}{(-1)^2 + a^2} + \frac{1}{0^2 + a^2} + \frac{1}{1^2 + a^2} + \frac{1}{2^2 + a^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + a^2} + \dots \\ &\dots = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}. \end{aligned}$$

De aquí hallamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} - \frac{1}{2a^2}.$$

La suma buscada de la serie dada será igual a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \frac{\pi}{a} \operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{2a^2} = \frac{\pi a \operatorname{cth} \pi a - 1}{2a^2}.$$

Hallar las sumas de las series siguientes en las cuales el número a no es entero:

$$408. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}. \quad 409. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 - a^4}.$$

$$410. \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^2}. \quad 411. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

2. Dado que función $f(z)$ es analizable en todo el plano complejo además del número complejo de los polos z_1, z_2, \dots, z_k que no coin-

ciden con ninguna de los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y suponemos que $f(z)$ satisface la desigualdad

$$|f(z)| \leq e^{a+|\operatorname{Im} z|} s(|z|), \quad (25)$$

donde $s(|z|) \rightarrow 0$ para $z \rightarrow \infty$, $z \in G_\rho$; $0 \leq a \leq \pi$. Aquí G_ρ es todo el plano con los círculos eliminados del plano $|z - z_m| \leq \rho$, $m = 1, 2, \dots, k$.

Entonces es válida la fórmula

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{m=1}^k \operatorname{res}_{z=z_m} \frac{f(z)}{\sin \pi z} \quad (26)$$

Ejemplo 16. Hallar la suma de una serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}$, $a \neq 0$.

Solución. La función $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ tiene dos polos simples $z_1 = ai$ y $z_2 = -ai$ y ella satisface la condición (25), ya que

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + a^2|} \leq \frac{1}{|z|^2 - |a|^2},$$

aquí $a = 0$, $s(|z|) = \frac{1}{|z|^2 - |a|^2} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$.

Utilizando la fórmula (26), obtendremos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = -\pi \left[\operatorname{res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} + \operatorname{res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} \right].$$

Hallamos los residuos de la función $\frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z}$ en los puntos z_k , $k = 1, 2$:

$$\operatorname{res}_{z=z_k} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} = \frac{1}{2z_k \sin \pi z_k + (z_k^2 + a^2) \pi \cos \pi z_k},$$

de donde

$$\operatorname{res}_{z=ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} = \frac{1}{2ai \sin \pi ai} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a},$$

$$\operatorname{res}_{z=-ai} \frac{1}{(z^2 + a^2) \sin \pi z} = -\frac{1}{2a \operatorname{sh} \pi a}.$$

Por consiguiente,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{a \operatorname{sh} \pi a}.$$

Más tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} &= \dots + \frac{(-1)^n}{(-n)^2 + a^2} + \dots + \frac{(-1)^{-2}}{(-2)^2 + a^2} + \\ &+ \frac{(-1)^{-1}}{(-1)^2 + a^2} + \frac{(-1)^0}{0^2 + a^2} + \frac{(-1)^1}{1^2 + a^2} + \frac{(-1)^2}{2^2 + a^2} + \dots \\ &\dots + \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} + \dots = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2}. \end{aligned}$$

De aquí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} - \frac{1}{2a^2},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} = \\ &= \frac{\pi}{2a \operatorname{sh} \pi a} + \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} \right). \end{aligned}$$

Hallar sumas de series siguientes, suponiendo que el número a no es entero:

$$412. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2}. \quad 413. \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

$$414. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \alpha n}{n^2 + a^2}, \quad -\pi < \alpha < \pi.$$

$$415. \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n^2 + a^2)^2}.$$

§ 11. Residuo logarítmico. Principio del argumento. Teorema de Rouchet

Función $\varphi(z)$ que es la derivada del logaritmo de función $f(z)$ se llama la *derivada logarítmica* de la función $f(z)$:

$$\varphi(z) = [\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Sólo ceros o los puntos singulares de función $f(z)$ pueden ser los puntos singulares de función $\varphi(z)$.

El residuo de la derivada logarítmica de función $f(z)$ respecto al punto, que es el cero de función $f(z)$, es igual al orden del cero, y respecto al punto que es el polo de la función, es igual al orden de este polo con el signo menos.

Ejemplo 1. Hallar los residuos de la derivada logarítmica de función $f(z) = \frac{\sin z}{z+1}$ respecto de sus ceros y polos.

Solución. La función dada tiene un conjunto infinito de ceros simples $z = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) y un polo simple $z = -1$. De aquí

$$\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \operatorname{res}_{z=-1} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1.$$

Hallar los residuos de derivadas logarítmicas de funciones dadas respecto de sus ceros y polos:

$$416. \quad f(z) = \frac{\sin z}{z}. \quad 417. \quad f(z) = \cos^3 z.$$

$$418. \quad \text{a) } f(z) = \frac{\cos z}{z}; \quad \text{b) } f(z) = \sin z.$$

Sea analizable la función $f(z) \neq 0$ en todos los puntos del contorno cerrado C . La magnitud

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

se llama el *residuo logarítmico* de la función $f(z)$ respecto al contorno cerrado C .

Teorema del residuo logarítmico. *Sea analítica la función $f(z)$ en el dominio cerrado D , a excepción del número finito de polos y en la frontera C de este dominio no tiene ni ceros ni polos. Entonces la diferencia entre el número de ceros y de polos de $f(z)$ en D contados con sus órdenes será igual al residuo logarítmico de la función $f(z)$ respecto al contorno cerrado C :*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

donde N es el número de ceros $f(z)$ en D , P es el número de polos $f(z)$ en D .

El residuo logarítmico del polinomio

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

respecto al contorno C es igual al número de ceros de este polinomio (teniendo en cuenta su multiplicidad) en el dominio D limitado mediante el contorno C .

Ejemplo 2. Hallar el residuo logarítmico de la función $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{e^{iz}-1}$ respecto al contorno $C: |z| = 8$.

Solución. Hallamos los ceros z_h de la función $f(z)$. Resolvemos para esto la ecuación $\operatorname{ch} z = 0$ o $e^{iz} + e^{-z} = 0$. Al escribir la última ecuación en forma de $e^{2z} = -1$ hallamos $2z = \ln(-1) = (2k+1)\pi i$, así que $z_h = \frac{2k+1}{2}\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (todos los ceros son simples). Para hallar los polos de función $f(z)$ resolvemos la ecuación $e^{iz} - 1 = 0$ o $e^{iz} = 1$. Tenemos $iz = \ln 1 = 2m\pi i$, $z_m = 2m\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). En el círculo $|z| < 8$ se encuentran ceros

$$z_h = \frac{2k+1}{2}\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, -3)$$

y los ceros simples

$$z_m = 2mn \quad (m = 0, \pm 1)$$

de la función $f(z)$. El número de ceros $N = 6$, el número de polos $P = 3$. Por consiguiente,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=8} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 6 - 3 = 3.$$

Ejemplo 3. Hallar el residuo logarítmico de la función

$$f(z) = \frac{1+z^2}{1-\cos 2\pi z}$$

respecto a la circunferencia $|z| = \pi$.

Solución. Suponiendo que $1+z^2 = 0$, hallamos dos ceros simples de la función $f(z)$: $a_1 = -i$, $a_2 = i$. Suponiendo que $1 - \cos 2\pi z = 0$, hallamos los polos de la función $f(z)$: $z_n = n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La multiplicidad de polos $k = 2$.

En el círculo $|z| < \pi$ la función dada tiene dos ceros simples $a_1 = -i$, $a_2 = i$ y siete polos dobles

$$z_1 = -3, z_2 = -2, z_3 = -1, z_4 = 0, z_5 = 1, z_6 = 2, z_7 = 3.$$

Pues, $N = 2$ y $P = 7$. En virtud del teorema del residuo logarítmico obtenemos que el residuo logarítmico de la función dada $f(z)$ respecto a la circunferencia $|z| = \pi$ será igual

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2 - 7 \cdot 2 = -12.$$

En los problemas siguientes hallar los residuos logarítmicos de funciones dadas respecto de los contornos indicados:

$$419. f(z) = \frac{z}{1+z^3}, \quad C : |z| = 2.$$

$$420. f(z) = \cos z + \operatorname{sen} z, \quad C : |z| = 4.$$

$$421. f(z) = (e^z - 2)^2 \quad C : |z| = 8.$$

$$422. f(z) = \operatorname{th} z, \quad C : |z| = 8.$$

$$423. f(z) = \operatorname{tg}^3 z, \quad C : |z| = 6.$$

$$424. f(z) = 1 - \operatorname{th}^2 z, \quad C : |z| = 2.$$

Principio del argumento. El residuo logarítmico de la función $f(z)$ respecto al contorno cerrado C es igual al incremento $\Delta_C \operatorname{Arg} f(z)$ del argumento $f(z)$ para el recorrido del contorno C dividido en 2π :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

Por consiguiente, la diferencia entre el número de ceros y de polos de la función $f(z)$ comprendidos en el dominio D es igual a

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z).$$

En otras palabras, la diferencia $N - P$ es igual al número de revoluciones que realiza en el plano w el vector que sale del punto $w = 0$ al punto $w = f(z)$, cuando el punto z circunscribe el contorno C (el número de revoluciones lo consideraremos ser positivo, si el vector se gira contra el sentido horario y es negativo en el caso contrario).

En un caso particular, cuando la función $w = f(z)$ es analítica en el dominio D y en su frontera C , en la cual ella no se anula, el residuo logarítmico de $f(z)$ respecto a C del número de ceros de $f(z)$ en D que es igual la variación de $\operatorname{Arg} f(z)$ durante su recorrido del contorno C dividido en 2π :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} f(z) = N.$$

Lo que tiene lugar, por ejemplo, para el polinomio $Q_n z = \sum_{k=0}^n a_k z^k$.

Ejemplo 4. Hallar el número de raíces en el semiplano derecho $\operatorname{Re} z > 0$ de la ecuación

$$Q_5(z) = z^5 + z^4 + 2z^3 - 8z - 1 = 0.$$

Solución. Debido al principio de argumento el número de ceros dentro del contorno C es igual a

$$N = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \operatorname{Arg} Q_5(z),$$

donde el contorno C está compuesto de la semicircunferencia C_R : $|z| = R$, $\operatorname{Re} z > 0$ y de su diámetro en el eje imaginario; el radio R , lo consideramos ser tal grande que todos los ceros del polinomio $Q_5(z)$ que se encuentra en el semiplano derecho dan en el semicírculo $|z| < R$, $\operatorname{Re} z > 0$. Tenemos

$$Q_5(z) = z^5 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).$$

De aquí

$$\begin{aligned}\operatorname{Arg} Q_5(z) &= \operatorname{Arg} \left[z^5 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) \right] = \\ &= \operatorname{Arg} z^5 + \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) = \\ &= 5 \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).\end{aligned}$$

El incremento del argumento $Q_5(z)$ al recorrer en el sentido positivo a semicircunferencia C_R es igual a

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5 \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).$$

Pasemos en esta igualdad al límite siendo $R \rightarrow \infty$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) =$$

$$= 5 \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right).$$

Los dos límites en el segundo miembro existen y son iguales respectivamente a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z = \pi,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} - \frac{8}{z^4} - \frac{1}{z^5} \right) = 0.$$

De tal manera

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\pi.$$

Suponemos ahora que el punto z se mueve por el eje imaginario desde $z = iR$ hasta $z = -iR$. Aceptemos que $z = it$, $-R \leq t \leq R$. Entonces

$Q_5(it) = u(t) + iv(t) = t^4 - 1 + i(t^5 - 2t^3 - 8t)$,
de donde

$$\begin{cases} u = t^4 - 1, \\ v = t^5 - 2t^3 - 8t. \end{cases} \quad (1)$$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la línea que circunscribe el punto $w = Q_5(z)$ en el plano (u, v) , cuando el punto z recorre el eje imaginario de arriba abajo. Para construir esta línea hallemos los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas Ou y Ov . Igu-

lando u y v al cero, obtendremos correspondientemente

$$t^4 - 1 = 0 \quad \text{dónde } t = \pm 1, \quad (2)$$

$$t^6 - 2t^3 - 8t = 0 \quad \text{dónde } t = \pm 2, \quad t = 0. \quad (3)$$

Observamos que las ecuaciones (2) y (3) no tienen raíces comunes (reales), así que el polinomio $Q_5(z)$ no tiene ceros en eje imaginario. Por consiguiente, es válida la aplicación del principio del argumento. Las raíces de ecuaciones (2) y (3) las distribuimos por decrecimiento, es decir, según el recorrido del contorno y hallamos los valores respectivos de u y v :

Nº	t	u	v
1	2	15	0
2	1	0	-9
3	0	-1	0
4	-1	0	9
5	-2	15	0

A continuación

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} u = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} v = \pm\infty.$$

Estos datos permiten construir la línea que nos interesa (fig. 12). De fig. 12 se ve que el vector $w = Q_5(z)$ se va a girar en ángulo $\varphi = 3\pi$

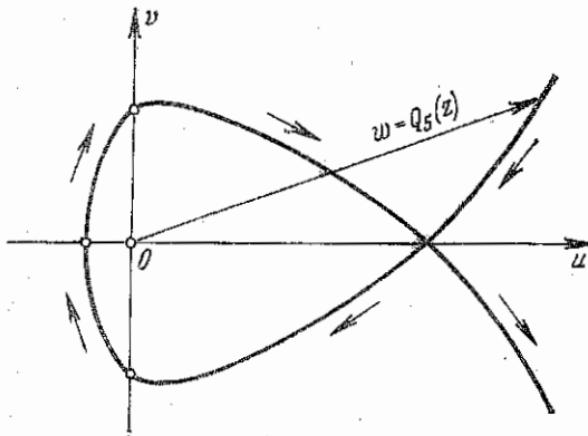


Fig. 12

en el sentido negativo. Por consiguiente,

$\Delta_C \operatorname{Arg} Q_5(z) = 5\pi - 3\pi = 2\pi$,
de donde el número de ceros en semiplano derecho sera igual

$$N = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.$$

Ejemplo 5. Hallar el número de raíces de la ecuación

$$Q_7(z) = z^7 - 2z - 5 = 0$$

en semiplano derecho.

Solución. Elijamos un contorno C como se indica en el ejemplo 4. Entonces

$$\begin{aligned}\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) &= \Delta_{C_R} \operatorname{Arg}(z^7 - 2z - 5) = \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left[z^7 \left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7} \right) \right] = \\ &= 7\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} z + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7} \right) = \\ &= 7\pi + \Delta_{C_R} \operatorname{Arg} \left(1 - \frac{2}{z^6} - \frac{5}{z^7} \right) \rightarrow 7\pi \text{ para } R \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Supongamos $z = it$ ($-R \leq t \leq R$). Entonces

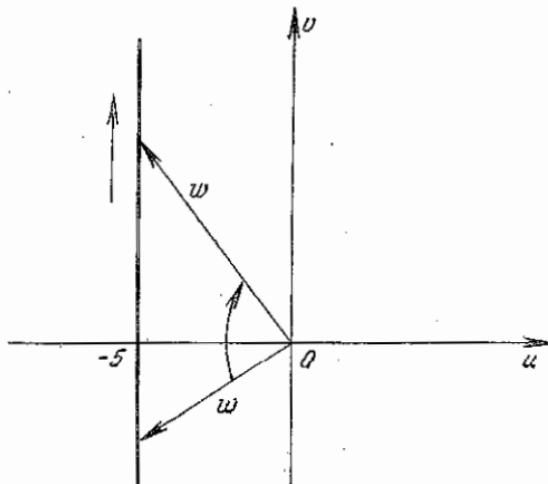


Fig. 13

$$Q_7(it) = u(t) + iv(t) = -5 + i(-t^7 - 2t),$$

de donde

$$\begin{cases} u = -5 \\ v = -t(t^6 + 2). \end{cases}$$

Puesto que $u \neq 0$, entonces la aplicación del principio del argumento es válido ($Q_7(z)$ en el eje imaginario no tiene ceros). Esta línea es la recta (fig. 13). El vector $w = Q_7(z)$ gira en el sentido negativo en π radianes. Por consiguiente

$$\Delta_{C_R} \operatorname{Arg} Q_7(z) \xrightarrow[R \rightarrow \infty]{} 7\pi - \pi = 6$$

y

$$N = \frac{6\pi}{2\pi} = 3,$$

es decir, la ecuación dada tiene tres raíces en el semiplano derecho.

Para las ecuaciones siguientes determinar el número de raíces en el semiplano derecho:

$$425. z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2 = 0. \quad 426. z^3 - 2z - 5 = 0.$$

$$427. z^3 - 4z^2 + 5 = 0. \quad 428. 2z^3 - z^2 - 7z + 5 = 0.$$

$$429. z^5 + 5z^4 - 5 = 0. \quad 430. z^{12} - z + 1 = 0.$$

Teorema de Rouchet. Sean analíticas las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ en un dominio cerrado D limitado por el contorno C y en todos los puntos de este contorno satisfacen la desigualdad $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Entonces su suma $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ y la función $f(z)$ tienen en el dominio D el número igual de ceros (tomando en consideración su multiplicidad).

Ejemplo 6. Hallar el número de ceros de la función

$$F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

dentro del círculo de unidad $|z| < 1$.

Solución. Representemos la función $F(z)$ en forma de la suma de dos funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$ que escojamos, por ejemplo, del modo siguiente:

$$f(z) = -4z^5, \quad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Entonces en la circunferencia $|z| = 1$ obtendremos

$$|f(z)| = |-4z^5| = 4.$$

$$|\varphi(z)| = |z^8 + z^2 - 1| \leqslant |z^8| + |z^2| + 1 = 3.$$

Pues, en la frontera $|z| = 1$ del círculo se cumple la desigualdad $|f(z)| > |\varphi(z)|$. La función $f(z) = -4z^5$ tiene el cero múltiple de cinco en el origen de coordenadas. En vigor del teorema de Rouchet la función

$$F(z) = f(z) + \varphi(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

tiene en el círculo $|z| < 1$ cinco ceros. Notemos que es posible otra elección de las funciones $f(z)$ y $\varphi(z)$, por ejemplo, tal:

$$f(z) = z^8 - 4z^5, \quad \varphi(z) = z^2 - 1.$$

Ejemplo 7. Determinar el número de raíces de la ecuación

$$z^6 - 6z + 10 = 0$$

dentro del círculo $|z| < 1$.

Solución. Supongamos, por ejemplo, $f(z) = 10$ y $\varphi(z) = z^6 - 6z$. En la circunferencia $|z| = 1$ tenemos

$$|f(z)| = 10, \quad |\varphi(z)| = |z^6 - 6z| \leqslant |z^6| + 6|z| = 7.$$

Así, en todos los puntos de la circunferencia $|z| = 1$ se cumple la desigualdad $|f(z)| > |\varphi(z)|$. La función $f(z) = 10$ no tiene ceros dentro del círculo $|z| < 1$ y, por consiguiente, de acuerdo con el teorema de Rouchet no tiene ceros y la función $z^6 - 6z + 10$,

Aplicando el teorema de Rouchet, hallar el número de raíces de las ecuaciones dadas en los dominios indicados:

$$431. z^4 - 3z^3 - 1 = 0, \quad |z| < 2.$$

$$432. z^3 + z + 1 = 0, \quad |z| < \frac{1}{2}.$$

$$433. z^5 + z^2 + 1 = 0, \quad |z| < 2.$$

$$434. z^8 + 6z + 10 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$435. 27z^{11} - 18z + 10 = 0, \quad |z| < 1.$$

$$436. z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0, \quad |z| < 1.$$

Ejemplo 8. ¿Cuántas raíces de la ecuación

$$z^4 - 5z + 1 = 0 \quad (4)$$

se encuentran en el anillo $1 < |z| < 2$?

Solución. Sea N el número de raíces de la ecuación (4) en el anillo $1 < |z| < 2$. Entonces $N = N_2 - N_1$, donde N_1 es el número de raíces de la ecuación (4) en el círculo $|z| < 1$, N_2 es el número de raíces de la ecuación (4) en el círculo $|z| < 2$ ($N_2 \geq N_1$). Se ve claro que en la circunferencia $|z| = 1$ la ecuación (4) no tiene raíces: si $|z| = 1$, entonces $|z^4 - 5z + 1| \geq 3$.

Para hallar N_1 tomemos $f(z) = -5z$, $\varphi(z) = z^4 + 1$. En la circunferencia $|z| = 1$ tenemos $|f(z)| > |\varphi(z)|$, puesto que $|f(z)| = |-5z| = 5$, $|\varphi(z)| = |z^4 + 1| \leq |z^4| + 1 = 2$. La función $f(z) = -5z$ en el círculo $|z| < 1$ tiene un solo cero, por consiguiente, $N_1 = 1$.

Para hallar N_2 tomemos $f(z) = z^4$, $\varphi(z) = 1 - 5z$. En la circunferencia $|z| = 2$ tenemos $|f(z)| > |\varphi(z)|$, puesto que $|f(z)| = |z^4| = 2^4 = 16$, $|\varphi(z)| = |1 - 5z| \leq 1 + 5|z| = 11$. La función $f(z) = z^4$ tiene cuatro raíces en el círculo $|z| < 2$ y por lo tanto, $N_2 = 4$.

El número de raíces de la ecuación (4) en el anillo $1 < |z| < 2$ será $N = 4 - 1 = 3$.

En los problemas siguientes determinar la cantidad de raíces de las ecuaciones dadas en los anillos indicados:

$$437. 4z^4 - 29z^2 + 25 = 0, \quad 2 < |z| < 3.$$

$$438. z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0, \quad 1 < |z| < 2.$$

$$439. z^6 - 8z + 10 = 0, \quad 1 < |z| < 3.$$

Ejemplo 9. Hallar el número de raíces de la ecuación

$$z^2 - ae^z = 0, \quad \text{donde } 0 < a < e^{-1},$$

en el círculo de unidad $|z| < 1$.

Solución. Supongamos $f(z) = z^2$ y $\varphi(z) = -ae^z$. En la circunferencia $|z| = 1$ tenemos

$$|f(z)| = |z^2| = 1, \\ |\varphi(z)| = |-ae^z| = a |e^z| = a |e^{x+iy}| = ae^x \leq ae < 1$$

en virtud de las condiciones $-1 \leq x \leq 1$ y $0 < a < e^{-1}$.

Pues, $|f(z)| > |\varphi(z)|$, si $|z| = 1$. La función $f(z) = z^2$ en el círculo $|z| < 1$ tiene la raíz doble en el origen de coordenadas.

Por tanto, en vigor del teorema de Rouchet la ecuación inicial en el círculo tiene dos raíces.

Observación. Examinemos la función real $F(x) = x^2 - ae^x$. Esta función en el segmento $-1 \leq x \leq 1$ es continua. Además, $F(-1) = 1 - ae^{-1} > 0$, puesto que $0 < ae^{-1} < e^{-2} < 1$, $F(0) = -a < 0$, $F(1) = 1 - ae > 0$, puesto que $a < e^{-1}$.

De tal manera en los extremos de los segmentos $-1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq 1$ la función $F(x)$ obtiene los valores de diferentes signos. De aquí se desprende que la ecuación dada en el círculo $|z| < 1$ tiene dos raíces reales de diferentes signos.

En los problemas siguientes determinar el número de raíces de las ecuaciones dadas en los dominios indicados:

$$440. e^{z-\lambda} = z \quad (\lambda > 1), \quad |z| < 1.$$

$$441. e^z = az^n, \text{ donde } n \text{ es el número real y } |a| > \frac{e^R}{R^n},$$

$$|z| < R.$$

$$442. z^2 - \cos z = 0, \quad |z| < 2.$$

$$443. z^4 - \operatorname{sen} z = 0, \quad |z| < \pi$$

$$444. z^2 + \operatorname{ch} iz = 0, \quad |z| < 0,5.$$

$$445. \operatorname{ch} z = z^2 - 4z, \quad |z| < 1.$$

$$446. 2^z = 4z, \quad |z| < 1.$$

Ejemplo 10. Hallar el número de raíces de la ecuación

$$\lambda - z - e^{-z} = 0, \quad \lambda > 1.$$

en el semiplano derecho $\operatorname{Re} z > 0$.

Solución. Examinemos el contorno que se compone del segmento $[-iR, iR]$ y de la semicircunferencia derecha $|z| = R$. Supongamos $z(z) = z - \lambda$ y $\varphi(z) = e^{-z}$. En el segmento $[-iR, iR]$, donde $f = iy$ tenemos

$$|f(z)| = |iy - \lambda| = \sqrt{\lambda^2 + y^2} \geq \sqrt{\lambda^2} = \lambda > 1,$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-ix}| = 1,$$

y por consiguiente, $|f(z)| > |\varphi(z)|$.

En la semicircunferencia $|z| = R$, donde $\operatorname{Re} z = x > 0$ para R ($R > \lambda + 1$) suficientemente grande tenemos $|f(z)| > |\varphi(z)|$, ya que

$$|f(z)| = |z - \lambda| \geq |z| - \lambda = R - \lambda > 1.$$

$$|\varphi(z)| = |e^{-z}| = |e^{-x-iy}| = |e^{-x}e^{-iy}| = e^{-x}|e^{-iy}| = e^{-x} \leq 1 \quad (x > 0).$$

Según el teorema de Rouchet dentro del contorno indicado para cualquiera que sea grande R la ecuación dada tiene tantas raíces cuantas tiene la ecuación $f(z) = z - \lambda = 0$, es decir, una sola raíz. Por consiguiente y en todo el semiplano derecho la ecuación dada tiene una sola raíz.

447. Mostrar que la ecuación $ze^{\lambda-z} = 1$, donde $\lambda > 1$, tiene en el círculo de unidad $|z| \leq 1$ una sola raíz real y positiva.

448. Mostrar que la ecuación $1 + z + \alpha z^n = 0$, donde n es el número natural, más grande que la unidad para cualquier α tiene en el círculo $|z| \leq 2$, por lo menos una sola raíz.

449. Sea $f(z)$ y $\varphi(z)$ las funciones analíticas en cierto entorno del punto a , C es el círculo con el centro en el punto a , tal que a lo largo de la circunferencia de este círculo tenemos

$$|\alpha f(z)| + |\beta \varphi(z)| < r.$$

Mostrar que la ecuación $F(z) = z - a - \alpha f(z) - \beta \varphi(z) = 0$ tiene dentro del círculo C una y sólo una raíz.

§ 12. Aplicaciones conformes

I. Concepto de aplicación conforme

Definición. Aplicación (transformación) del entorno del punto z_0 en el entorno del punto w_0 que se realiza por la función $w = f(z)$ se llama *conforme*, si en el punto z_0 ella tiene la propiedad de conservación de ángulos entre líneas y constancia de estiramientos (fig. 14).

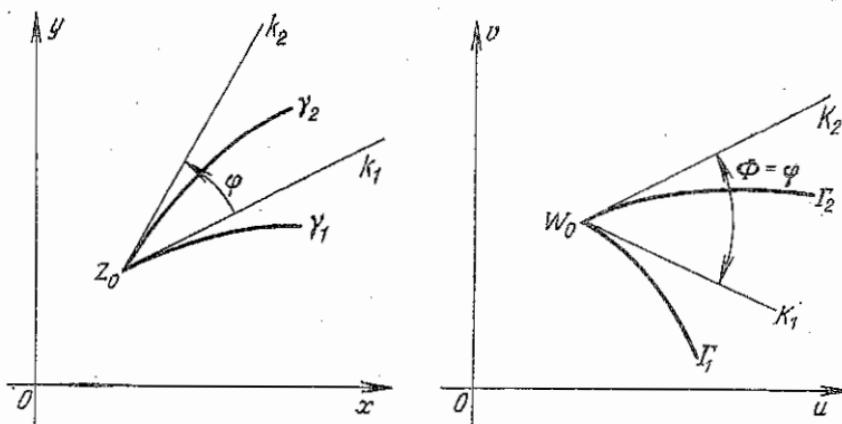


Fig. 14

Esto significa que: 1) si al aplicar $w = f(z)$ las curvas γ_1 y γ_2 pasan correspondientemente en las curvas Γ_1 y Γ_2 , entonces el ángulo φ entre las tangentes k_1 y k_2 a las curvas γ_1 y γ_2 en el punto z_0 será igual al ángulo Φ entre las tangentes respectivas K_1 y K_2 a las curvas Γ_1 y Γ_2 en el punto w_0 , es decir, $\Phi = \varphi$; 2) si en el plano de la variable compleja z tomemos un círculo infinitamente pequeño con el centro en el punto z_0 , entonces en el plano w le va a corresponder un círculo infinitamente pequeño con el centro en el punto w_0 . Por lo tanto se

dice que la aplicación conforme tiene la propiedad de conservatismo de ángulos y de semejanza en lo pequeño.

Si durante la aplicación $w = f(z)$ los ángulos entre las direcciones respectivas son iguales no sólo por la magnitud, sino y por la dirección de referencia, entonces tal aplicación se llama la transformación conforme del primer género.

La aplicación conforme, con la cual los ángulos se conservan únicamente por la magnitud absoluta, pero se cambia la dirección de su referencia en la dirección contraria, se llama la aplicación conforme del segundo género.

Un ejemplo más simple de la aplicación conforme del primer género es la aplicación $w = z$, mientras que de la aplicación del segundo género es la aplicación $w = \bar{z}$.

En lo sucesivo vamos a examinar solamente las aplicaciones conformes del primer género.

La aplicación $w = f(z)$ se llama conforme en el dominio D , si ella es conforme en cada punto de este dominio.

Criterio de conformidad. Para que la aplicación $w = f(z)$ sea conforme en el dominio D , es necesario y suficiente que la función $w = f(z)$ en este dominio sea de una hoja *) y analítica, cuando $f'(z) \neq 0$ para todos $z \in D$.

Si no supongamos que la función $f(z)$ es de una hoja, entonces la aplicación que realiza esta función no será biunívoca y por eso no será conforme tampoco. Por ejemplo, la función $w = z^4$ dada en semicírculo $1 \leq |z| \leq 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$, es analítica en él y además, en todas partes en el semicírculo se cumple la condición $w' = 4z^3 \neq 0$. Sin embargo, la función $w = z^4$ aplica el semicírculo dado en el dominio $1 \leq |w| \leq 16$, $0 \leq \arg w \leq 4\pi$ es decir, en el dominio que cubre dos veces el anillo correspondiente en el plano w lo que altera la correspondencia biunívoca.

Ejemplo 1. ¿En qué dominios D las aplicaciones

- a) $w = 2z$, b) $w = (z - 2)^3$
son conformes?

a) Puesto que la función $f(z) = 2z$ es analítica y de una hoja en todo el plano complejo z y su derivada $f'(z) = 2 \neq 0$, entonces la aplicación dada es conforme en todo el plano complejo.

b) La aplicación $w = (z - 2)^3$ es conforme en todas partes, a excepción del punto $z = 2$, en el cual la derivada $f'(z) = 2(z - 2)$ se anula.

450. Indicar dominios de conformidad para las aplicaciones siguientes:

- a) $w = e^{-3z}$; b) $w = z^2 - 4z$; c) $w = -iz^2$;
d) $w = \operatorname{sh}(1 - z)$; e) $w = (z + 2i)^3$.

II. Teoremas generales de la teoría de aplicaciones conformes

1. **Teorema de Riemann.** Existe una función analítica $w = f(z)$ que aplica biunívocamente y de modo conforme un dominio pleno simplemente conexo D en el otro G , si ninguno de estos dominios no

*) La función $w = f(z)$ se llama de una hoja en el dominio D , si tiene en distintos puntos del dominio D distintos valores.

coincide con todo el plano con un punto excluido o con todo el plano extendido.

Existe un conjunto infinito de funciones analíticas que efectúan la aplicación del dominio D sobre el dominio G . La unicidad de función $w = f(z)$ que aplica se garantiza, si vamos a exigir que se cumpla una de las condiciones:

a) el punto prefijado z_0 en el dominio D pasará al punto prefijado w_0 del dominio G , y la línea que sale de z_0 girará en el ángulo dado α ($w_0 = f(z_0)$, $\arg f'(z_0) = \alpha$);

b) el punto z_0 del dominio D y el punto z_1 de la frontera γ pasarán respectivamente al punto w_0 del dominio G y al punto w_1 de la frontera Γ [$w_0 = f(z_0)$, $w_1 = f(z_1)$];

c) tres puntos de frontera z_1, z_2, z_3 del dominio D pasarán en tres puntos de frontera w_1, w_2, w_3 del dominio G [$w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$, $w_3 = f(z_3)$], al mismo tiempo, si durante el movimiento por la frontera γ de z_1 a z_3 a través de z_2 el dominio D se queda a la izquierda (a la derecha), entonces durante el movimiento por la frontera Γ de w_1 a w_3 a través de w_2 el dominio G deberá quedarse a la izquierda (a la derecha) también.

En los casos b) y c) la función $f(z)$ se presupone ser continua en el dominio cerrado D .

2. *Principio de correspondencia biunívoca de fronteras.* Sea el dominio D limitado por un contorno suave o suave a trozos γ . Sea la función $w = f(z)$ analítica en D y en γ aplica el contorno γ en cierto contorno Γ que limita el dominio G , sin embargo cuando el punto z recorre el contorno γ de tal manera que el dominio D se queda a la izquierda, el punto respectivo w recorre el contorno Γ de tal manera que el dominio G también se queda a la izquierda. Entonces el dominio D mediante la función $w = f(z)$ se aplicará biunívocamente y de forma conforme sobre el dominio G .

3. *Principio de simetría.* Sea el dominio D que tiene en su frontera cierto segmento rectangular γ (de longitud finita o infinita) se aplica por la función $w = f(z)$ sobre el dominio G así que γ se convierte en el segmento rectangular Γ que entra en la frontera del dominio (fig. 15). Designemos respectivamente por medio de l y L las rectas, en las cuales se encuentran los segmentos γ y Γ . El principio de simetría afirma: si la función $w = f(z)$ es analítica en el dominio D , y también en todos los puntos interiores del segmento de frontera γ , entonces esta función es analítica en el dominio D^* también que es simétrica con D respecto a la recta l y tiene la propiedad de que dos puntos cualesquiera z_1 y z_2 (uno de los cuales se encuentra en D), simétricas respecto a l , se aplican en los puntos w_1 y w_2 , simétricas respecto a la recta L .

Ejemplo 2. En el dominio D limitado por el contorno γ :

$$x^2 + y^2 - 2x = 0,$$

está prefijada la función

$$w = 3z + i.$$

¿En qué dominio pasará D al efectuar la aplicación por medio de esta función?

Solución. Sea $z = x + iy$, $w = u + iv$. Entonces la relación $w = 3z + i$ se anota de nuevo en forma de $u + iv = 3x + i(3y + 1)$, así que $u = 3x$, $v = 3y + 1$. De aquí $x = u/3$, $y = (v - 1)/3$.

El contorno γ se aplica en el contorno Γ :

$$\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \left(\frac{v-1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u}{3} = 0 \quad \text{y} \quad (u-3)^2 + (v-1)^2 = 9,$$

es decir, la circunferencia del radio 3 con el centro en el punto $M(3, 1)$. La dirección positiva del recorrido del contorno γ corresponde a la

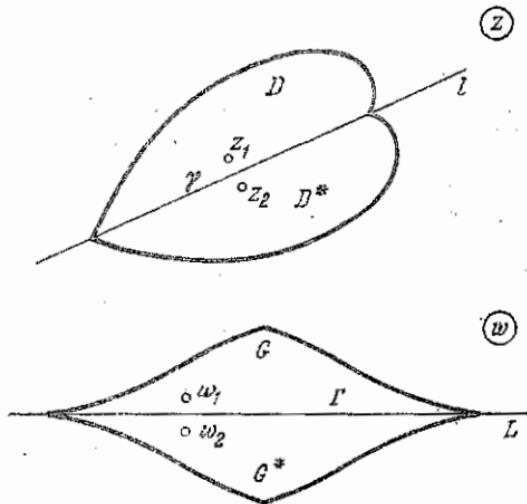


Fig. 15

dirección positiva del recorrido del contorno Γ . Se puede convencerse en esto al dar los contornos por las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} \gamma: & x = 1 + \cos \varphi, & y = \sin \varphi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \Gamma: & u = 3 + 3 \cos \varphi, & v = 3 \sin \varphi + 1, & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{aligned}$$

Conforme al principio de la correspondencia biunívoca de fronteras el dominio D aplicará en el dominio G , es decir, en el interior de la circunferencia limitada por el contorno Γ . Esto puede verificarse y de otra manera: tomar un cualquier punto $z \in D$ y hallar su imagen para la aplicación $w = 3z + i$. Por ejemplo, el punto $z = 1$ pasa al punto $w = 3 + i$ que se encuentra dentro del contorno Γ .

Ejemplo 3. Dados los puntos $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 3 + 2i$ simétricos

respecto a la recta $y = x$. Mostrar que la función $w = e^{-\frac{i\pi}{2}} z$ conduce z_1 y z_2 en los puntos $w_1 = 3 - 2i$ y $w_2 = 2 - 3i$, simétricos respecto a la recta $y = -x$.

Solución. Es muy fácil verificar que la función $w = e^{-\frac{i\pi}{2}} z$ aplica la recta $y = x$ en la recta $y = -x$. La función $w = e^{-\frac{i\pi}{2}} z$ es analítica en todas partes. En vigor del principio de simetría los puntos $z_1 = 3 + 2i$ y $z_2 = 2 + 3i$, simétricos respecto a la recta $y = x$ pasarán a los puntos $w_1 = 3 - 2i$ y $w_2 = 2 - 3i$, simétricos respecto a la recta $y = -x$.

Ejemplo 4. Mostrar que la función $w = e^{\frac{iz}{h}}$ aplica la franja $0 < \operatorname{Im} z < h$ en el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$.

Solución. Vamos a pasar la frontera del dominio D de manera que el dominio D se quede con esto a la izquierda. Puesto que

$$w = u + iv = e^{\frac{ix+iy}{h}} = e^{\frac{ix}{h}} e^{\frac{iy}{h}},$$

entonces, cuando el punto z recorre el eje real Ox de $x = -\infty$ hasta $x = +\infty$ (para $y = 0$) el punto respectivo $w = e^{\frac{ix}{h}}$ recorre el semieje real positivo Ou del plano w del punto $u = 0$ hasta el punto $u = +\infty$, $v = 0$. Cuando el punto $z = x + ih$ recorre la frontera superior de la franja del punto $+\infty + ih$ hasta el punto $-\infty + ih$ (lo que corresponde al cambio x de $+\infty$ hasta $-\infty$), entonces el punto correspon-

diente $w = e^{\frac{ix}{h}} e^{i\pi} = -e^{\frac{ix}{h}}$ recorre el semieje real negativo Ou del plano w del punto $-\infty$ hasta el punto 0. Puesto que la función $w = e^{\frac{iz}{h}}$ es analítica en el dominio D : $0 < \operatorname{Im} z < h$ y en su frontera, entonces ella aplica conformemente este dominio en el dominio G : $\operatorname{Im} w > 0$.

451. Mostrar que el semianillo $1 \leq |z| \leq 2$, $0 \leq \arg z \leq \pi$ con ayuda de la función $w = z^2$ se aplica en el anillo $1 \leq |w| \leq 4$, $0 \leq \arg w \leq 2\pi$.

452. Mostrar que el ángulo $0 < \arg z < \pi/5$, $0 < |z| < +\infty$, mediante la función $w = z^5$ se aplica en el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$, así que el punto $z = 0$ pasa al punto $w = 0$.

453. Mostrar que la franja $1 \leq y < 1 + 2\pi$ mediante la función $w = e^z$ se aplica en el plano completo w con el corte a lo largo de la parte positiva del eje Ou .

III. Aplicaciones conformes que se efectúan mediante la función lineal $w = az + b$.

por medio de la función $w = \frac{1}{z}$

y por la función lineal fraccional $w = \frac{az+b}{cz+d}$

1. *Función lineal.* La función lineal $w = az + b$, donde a y b son los números complejos constantes ($a \neq 0$), realiza la aplicación conforme de todo el plano z en todo el plano w , puesto que para todo z tenemos $w' = a \neq 0$.

Casos particulares:

1.

$$w = z + b$$

(1)

realiza la transformación de traslación paralela

$$2. \quad w = e^{i\alpha} z, \quad (2)$$

donde α , es el número real que realiza la transformación del giro alrededor del origen de coordenadas en un ángulo α .

$$3. \quad w = rz, \quad (3)$$

donde r , el número real positivo, produce la transformación de semejanza con el centro de semejanza en el origen de coordenadas, r es la razón de semejanza.

Un caso general de la aplicación lineal

$$w = az + b, \quad \text{donde } a = re^{i\alpha}, \quad (4)$$

se realiza por medio del empleo sucesivo: 1) del giro cerca del origen de coordenadas en el ángulo α , 2) de la transformación de semejanza con el centro de semejanza en el origen de coordenadas y con la razón de semejanza igual a r , 3) de la translación paralela con ayuda del vector que corresponde al número complejo b .

Observemos que la transformación lineal deja inmóvil dos puntos $z_1 = \infty$ y $z_2 = \frac{b}{1-a}$. Para $a = 1$ obtenemos $z_2 = \infty$, es decir, en este caso ambos puntos inmóviles coinciden.

Ejemplo 5. Mostrar que la aplicación lineal $w = az + b$ se define en suyo grado, si vamos a exigir que dos puntos distintos z_1 y z_2 pasen respectivamente a los puntos prefijados arbitrariamente, pero distintos w_1 y w_2 .

Solución. En realidad, la representación de la aplicación $w = az + b$ será realizado, si son conocidos los valores de parámetros a y b . Mostremos que nuestras condiciones permiten hallar únicamente estos parámetros. Sea que para $z = z_1$ obtenemos $w = w_1$, es decir, $w_1 = az_1 + b$, y para $z = z_2$ obtenemos $w_2 = az_2 + b$.

De estas igualdades hallamos

$$a = \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1}, \quad b = \frac{w_1 z_2 - w_2 z_1}{z_2 - z_1} \quad (z_1 \neq z_2).$$

Los parámetros a y b son definidos únicamente por las relaciones recibidas.

Ejemplo 6. Mostrar que la aplicación lineal (4) se puede representar exigiendo que el punto z_1 pase al punto w_1 y para que la derivada $\frac{dw}{dz}$ en el punto z_1 tenga el valor preajulado de a .

Solución. Para representar la aplicación (4), conviene representar los valores de parámetros a y b . De la condición que el punto z_1 debe pasar al punto w_1 , obtendremos $w_1 = az_1 + b$. Restando esta igualdad de (4), obtenemos $w - w_1 = a(z - z_1)$. Es evidente que $\frac{dw}{dz} = a$ para cada z . Por eso, representando el valor de la derivada $\frac{dw}{dz}$ en el punto z_1 determinamos el parámetro a . La aplicación lineal $w - w_1 = a(z - z_1)$ debido a lo que está determinado por completo (parámetro $b = w_1 - az_1$).

Ejemplo 7. Hallar la función lineal que aplica un triángulo con los vértices en los puntos $0, 1, i$ en el plano z en el triángulo semejante con los vértices $1+i, 0, 2$ en el plano w .

Solución. Primer procedimiento. De la fig. 16 vemos que $\triangle ABC$ pasa al triángulo semejante $\triangle A_1B_1C_1$ mediante las operaciones siguientes:

- 1) el giro cerca del origen de coordenadas en el ángulo $\frac{5}{4}\pi$ que corresponde a la transformación $w_1 = e^{i\frac{5}{4}\pi} z$;

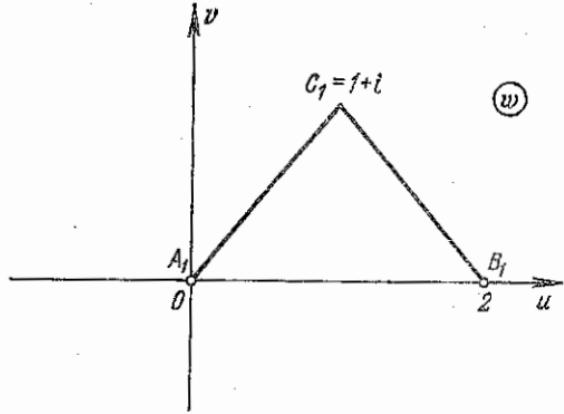
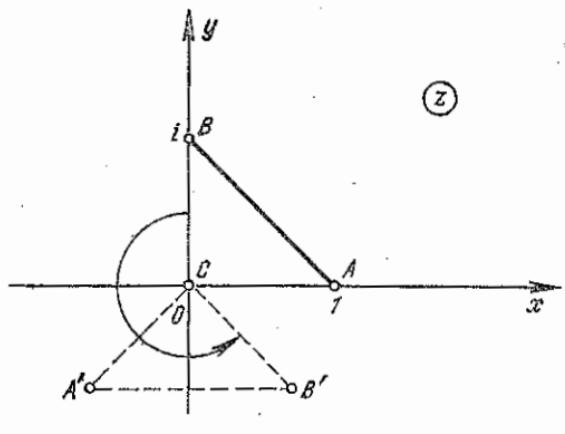


Fig. 16

- 2) la transformación de semejanza con el centro en el origen de coordenadas y con la razón $r = \sqrt{2}$ (ya que $\frac{A_1B_1}{AB} = \sqrt{2}$):

$$w_2 = \sqrt{2}w_1;$$

- 3) la traslación paralela que desplaza el punto $C(0, 0)$ al punto $C_1(1, 1)$ (obtenemos $b = 1 + i$):

$$w = w_2 + 1 + i.$$

Teniendo en cuenta que $e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ obtenemos definitivamente

$$w = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) z + 1 + i = (1-z)(1+i).$$

Segundo procedimiento. Supongamos que la función buscada es $w = az + b$, donde a y b son hasta ahora constantes indefinidas. Según la condición del problema los puntos $z_1 = 0$ y $z_2 = 1$ deben pasar respectivamente a los puntos $w_1 = 1 + i$ y $w_2 = 0$. Recibimos un sistema de ecuaciones para determinar a y b :

$$\begin{cases} 1+i=b, \\ 0=a+b. \end{cases}$$

De aquí $a = -1 - i$, $b = 1 + i$ y, por consiguiente,

$$w = (1+i)(1-z).$$

454. Indicar el sentido geométrico (desplazamiento, estiramiento, giro) de las transformaciones siguientes:

a) $w = z + 3i$; b) $w = z + 5$; c) $w = iz$;

d) $w = e^{i\frac{\pi}{6}}z$; e) $w = 3z$; f) $w = \frac{1-i}{\sqrt{2}}z$.

455. Hallar la forma general de las funciones lineales mediante las cuales se efectúan transformaciones:

a) del semiplano superior en sí;

b) del semiplano superior sobre el semiplano inferior;

c) del semiplano superior en el semiplano derecho.

456. Hallar las aplicaciones lineales $w = az + b$ que dejan el punto z_0 inmóvil y que pasan el punto z_1 al punto w_1 :

a) $z_0 = 1 - i$, $z_1 = 2 + i$, $w_1 = 4 - 3i$;

b) $z_0 = -i$, $z_1 = 1 - 2i$, $w_1 = 2 - 3i$;

c) $z_0 = -1 - i$, $z_1 = 3 - 2i$, $w_1 = 3i$.

457. Hallar la función lineal $w = f(z)$ que aplica la franja comprendida entre las rectas $x = a$, $x = a + h$, en la franja $0 < u < 1$ en el plano (w) .

2. La función

$$w = \frac{1}{z}. \quad (5)$$

Los puntos M y M' se llaman simétricas respecto a la circunferencia Γ , si

1) ellos se encuentran en una semirecta que sale del centro de la circunferencia;

2) el producto de sus distancias desde el centro de la circunferencia es igual al cuadrado del radio de la circunferencia: $OM \cdot OM' = R^2$ (fig. 17).

Observación. Los puntos de la circunferencia Γ son simétricas a sí mismos respecto a esta circunferencia.

Para el centro O de la circunferencia Γ un punto simétrico respecto Γ es un punto infinitamente alejado.

Si el centro de la circunferencia Γ se encuentra en el origen de coordenadas y uno de los puntos simétricos respecto Γ representa el

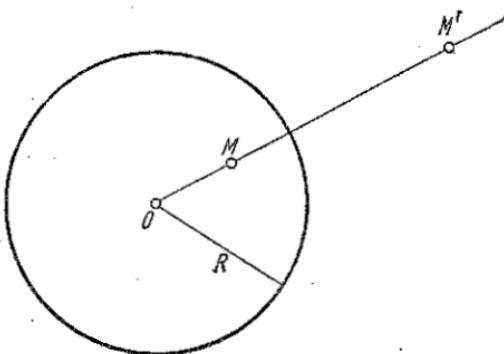


Fig. 17

número complejo z , entonces otro punto corresponde al número complejo $\frac{R^2}{z}$.

La transformación $w = \frac{1}{z}$ se compone de dos reflexiones simétricas: respecto a la circunferencia de unidad y respecto al eje real (fig. 18) y se llama la *inversión*.

La transformación $w = \frac{1}{z}$ es conforme en todo el plano extendido.

Con todo eso al punto $z = 0$ le corresponde el punto $w = \infty$, mientras que al punto $z = \infty$ le corresponde el punto $w = 0$. (Se considera que el ángulo entre las líneas en un punto infinito de uno de los planos (z o w) es igual al ángulo entre imágenes de estas líneas en el origen de coordenadas de otro plano). Las circunferencias (y las rectas también)

para la aplicación $w = \frac{1}{z}$ pasan a las circunferencias o rectas. Los puntos inmóviles son $z_1 = +1$ y $z_2 = -1$.

Ejemplo 8. Hallar la imagen de la circunferencia $|z| = 3$ para la aplicación $w = \frac{25}{z}$.

Solución. Primer procedimiento. Sea $z = x + iy$, $w = u + iv$. Entonces la relación $w = \frac{25}{z}$ la anotemos de nuevo en forma de

$$u + iv = \frac{25}{x + iy} = \frac{25x}{x^2 + y^2} - i \frac{25y}{x^2 + y^2},$$

de donde

$$u = \frac{25x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{25y}{x^2 + y^2}. \quad (\text{a})$$

La ecuación de la circunferencia $|z| = 3$ en las coordenadas car-

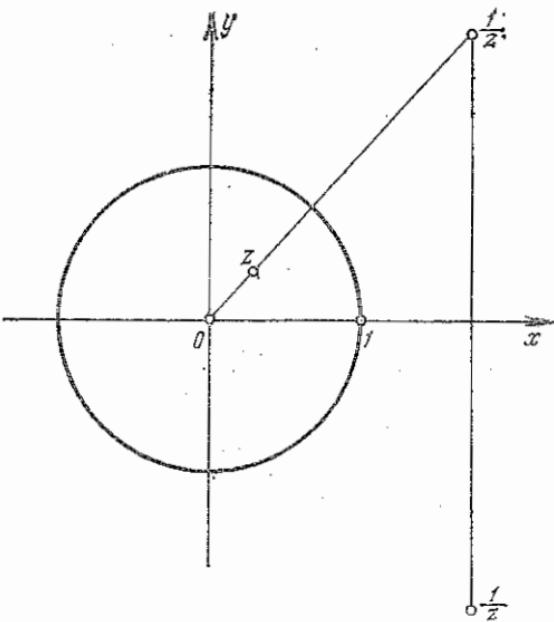


Fig. 48

tesianas se escribe en forma de

$$x^2 + y^2 = 9. \quad (\text{b})$$

Excluyendo de (a) y (b) x y y , obtendremos $u^2 + v^2 = \left(\frac{25}{3}\right)^2$, es decir, la circunferencia del radio $R = \frac{25}{3}$ con el centro en el origen de coordenadas sobre el plano w .

Segundo procedimiento. Escribiremos z y w en la forma exponencial

$$z = \rho e^{i\varphi}, \quad w = r e^{i\theta}.$$

Entonces al efectuar la aplicación $w = \frac{25}{z}$ obtendremos

$$r e^{i\theta} = \frac{25}{\rho e^{i\varphi}},$$

de donde $r = \frac{25}{\rho}$, $\theta = -\varphi$, donde $\rho = 3$ y $0 \leq \varphi < 2\pi$. Por lo tanto,

$$w = \frac{25}{3} e^{-i\varphi}$$

es la circunferencia del radio $r = 25/3$ con el centro en el origen de coordenadas que la pasan en sentido horario, cuando la circunferencia inicial la pasan de derecha a la izquierda.

Tercer procedimiento. De la igualdad $w = 25/z$ tenemos $z = 25/w$. Sustituyendo esta expresión para z en la ecuación de la circunferencia $|z| = 3$ y utilizando la propiedad del módulo, obtendremos

$$\left| \frac{25}{w} \right| = 3 \quad 6 \cdot \frac{25}{|w|} = 3,$$

de donde $|w| = 25/3$. Por consiguiente, la circunferencia $|w| = 25/3$ será la imagen de la circunferencia $|z| = 3$ para la aplicación $w = 25/z$.

458. ¿En qué dominio aplica la función $w = 1/z$ la semifranja

$$0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0?$$

459. Hallar las imágenes de los conjuntos siguientes efectuando la aplicación $w = 1/z$:

- a) $\arg z = \pi/3$; b) $|z| = 1, \frac{\pi}{4} < \arg z < \pi$;
- c) $2 \leq x \leq 4, y = 0$; d) $-2 < y < -1, x = 0$;
- e) $0 < \operatorname{Re} z < 1$.

3. Función lineal fraccional

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (6)$$

donde a, b, c, d son las constantes complejas y $ad - bc \neq 0$ aplica biunívoca y conformemente el plano extendido z en el plano extendido w . La transformación proporcionada por la función lineal fraccional se llama lineal fraccional. Cada transformación lineal fraccional puede ser recibida mediante el uso sucesivo de transformaciones lineales y de transformación de la forma $w = \frac{1}{z}$.

Ejemplo 9. Hallar las condiciones para las cuales la función lineal fraccional (6)

$$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

aplica el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ en el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$.

Solución. Empleando esa aplicación se necesita que la frontera del dominio $\operatorname{Im} z > 0$ — el eje Ox que pasa, de izquierda a derecha aplique en la frontera del dominio $\operatorname{Im} w > 0$, es decir, en el eje Ou que también pasa de izquierda a derecha. De tal manera para cualesquier valores reales de z deben ser reales y los valores w . Es evidente

que esto es posible sólo para los valores reales de los números a, b, c, d . A continuación, a cada $z = x + iy$, donde $y > 0$ debe corresponder tal $w = u + iv$, el cual tiene $v > 0$. Sustituyendo $z = x + iy$, en la fórmula (6), obtendremos

$$w = u + iv = \frac{(ax + b)(cx + d) + acy^2}{(cx + d)^2 + y^2} + i \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + y^2},$$

de donde

$$v = \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + y^2}.$$

Ya que $y > 0$ y el denominador es positivo, entonces para la positividad v es necesario y suficiente que se cumpla la condición $ad - bc > 0$. Esto es la condición buscada.

Propiedades de la transformación lineal fraccional

1. *Propiedad circular.* La transformación lineal fraccional la aplica la circunferencia en la circunferencia. (La línea recta se considera la circunferencia del radio infinito)

2. *Propiedad de simetría.* Dos puntos z_1 y z_2 simétricos respecto a la circunferencia C aplican en los puntos w_1 y w_2 , simétricos respecto a la circunferencia Γ sobre la cual aplica la circunferencia C .

Corolario. Si para la aplicación lineal fraccional $w = f(z)$ la recta o circunferencia γ pasa en la circunferencia Γ y uno de los dos puntos simétricos respecto γ pasa al centro de la circunferencia Γ , entonces otro punto necesariamente pasa al punto infinitamente alejado.

3. Existe la única función lineal fraccional que pasa los tres puntos dados z_1, z_2, z_3 del plano z a los tres puntos dados w_1, w_2, w_3 del plano w . Ella tiene la forma

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (7)$$

Ejemplo 10. Hallar la función lineal fraccional que pasa los puntos $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1$ en los puntos $w_1 = -1, w_2 = 0, w_3 = 1$.

Solución. Por medio de la fórmula (7), obtendremos

$$\frac{w+1}{w-0} \cdot \frac{1-0}{1-(-1)} = \frac{z-1}{z-i} \cdot \frac{-1-i}{-1-1}, \text{ de donde } w = i \frac{i-z}{i+z}.$$

Observación. Si uno de los puntos z_k o w_k ($k = 1, 2, 3$) es infinito, entonces en la fórmula (7) hay que sustituir todas las diferencias que contienen este punto por unidades.

Ejemplo 11. Hallar la función lineal fraccional que pasa el punto z_1 en el punto $w_1 = 0$, y el punto z_2 en el punto $w_2 = \infty$.

Solución. Tomemos un punto arbitrario z_3 distinto de los puntos z_1 y z_2 , y supongamos que él pasa al punto w_3 distinto de los puntos w_1 y w_2 . Entonces mediante la fórmula (7) teniendo en cuenta la obser-

vación obtendremos

$$\frac{w-0}{1} \cdot \frac{1}{w_3-0} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},$$

de donde

$$w = K \frac{z-z_1}{z-z_2},$$

donde

$$K = \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} w_3, \quad (8)$$

es decir, K es el número complejo arbitrario, $K \neq 0$.

Ejemplo 12. Aplicar el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ sobre el círculo de unidad $|w| < 1$ de manera que el punto z_0 ($\operatorname{Im} z_0 > 0$) pase al centro $w = 0$ del círculo.

Solución. Puesto que el punto z_0 por medio de la función lineal fraccionaria buscada $w = w(z)$ pasa al centro del círculo, es decir, $w(z_0) = 0$, entonces el punto conjugado \bar{z}_0 debe pasar al punto $w = \infty$ (según la propiedad de simetría). Despues utilizaremos la fórmula (8) y obtenemos

$$w = K \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0},$$

donde K es el multiplicador constante. Para cualquier K esta función aplica el semiplano superior en cierto círculo con el centro en el punto $w = 0$. Elijamos K de tal manera que el círculo sea de unidad. Para esto es suficiente exigir que el punto $z = 0$ (el punto de frontera del dominio $\operatorname{Im} z > 0$) pase al punto de la circunferencia de unidad $|w| = 1$. Entonces, $1 = |w| = |K| \cdot \left| \frac{z_0}{\bar{z}_0} \right|$, de donde $|K| = 1$,

puesto que $K = e^{i\alpha}$, donde α es cualquier número real. Pnes,

$$w = e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}. \quad (9)$$

Observación. Hallemos la derivada w' en el punto $z_0 = a + ib$ ($b > 0$)

$$w'(z_0) = -\frac{ie^{i\alpha}}{2b} \quad \text{ó} \quad w'(z_0) = \frac{1}{2b} e^{i\alpha} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}}{2b}.$$

Por consiguiente, $\arg w'(z_0) = \alpha - \pi/2$, entonces según el sentido geométrico de la derivada para la aplicación (9) el ángulo del giro de curvas en el punto z_0 es igual $\alpha - \pi/2$.

De acuerdo con el teorema de Riemann existe la única aplicación $w = w(z)$ del semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ en el círculo $|w| < 1$ que satisface las condiciones $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \alpha - \pi/2$. De aquí se desprende que cualquiera aplicación lineal fraccionaria del semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ en el círculo $|w| < 1$ tiene la forma (9).

Ejemplo 13. Aplicar el círculo de unidad $|z| < 1$ en el círculo de unidad $|w| < 1$.

Solución. Suponemos que la aplicación lineal fraccional buscada $w = w(z)$ pasa el punto z_0 que se encuentra dentro del círculo $|z| < 1$ al centro del círculo $|w| < 1$, así que $w(z_0) = 0$. Entonces el punto $z_0^* = \frac{1}{\bar{z}_0}$ que es simétrico respecto a la circunferencia de unidad $|z| = 1$ pasará al punto ∞ , es decir, $w(z_0^*) = \infty$. Entonces mediante la fórmula (8) obtendremos

$$w = K \frac{z - z_0}{\frac{1}{z} - \frac{z_0}{z}} \quad \text{o} \quad w = K_1 \frac{z - z_0}{1 - zz_0},$$

donde $K_1 = -K\bar{z}_0$ es cierto número complejo constante.

Escojamos la constante K_1 así que el círculo en el plano w sea de unidad. Para esto es suficiente exigir que el punto $z = 1$ pasa al punto sobre la circunferencia de unidad $|w| = 1$. Entonces obtendremos

$$1 = |w| = |K_1| \cdot \left| \frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0} \right|,$$

de donde $|K_1| = 1$, puesto que $|1 - z_0| = |1 - \bar{z}_0|$. Por lo tanto, $K_1 = e^{i\alpha}$, donde α es cualquier número real. Pues,

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - zz_0}, \quad (10)$$

donde $|z_0| < 1$, α es cualquier número real.

Observación. Ya que

$$w'(z) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - zz_0}, \quad \text{entonces } w'(z_0) = \frac{e^{i\alpha}}{1 - |z_0|^2},$$

es decir, $\arg w'(z_0) = \alpha$. Esto significa que para la aplicación (10) el ángulo de giro de curvas en el punto z_0 es igual a α .

Según el teorema de Riemann existe la única aplicación $w = w(z)$ del círculo de unidad $|z| < 1$ en el círculo $|w| < 1$ que satisface las condiciones $w(z_0) = 0$, $\arg w'(z_0) = \alpha$.

Por consiguiente, toda aplicación lineal fraccional del círculo de unidad $|z| < 1$ en el círculo $|w| < 1$ tiene la forma (10).

Ejemplo 14. Hallar la función $w = f(z)$ que aplica el círculo de unidad en sí y una tal que

$$f\left(\frac{i-1}{2}\right) = 0, \quad \arg f'\left(\frac{i-1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Solución. Según la fórmula

$$w = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{1 - zz_0}$$

(α es cualquier número real) obtenemos la aplicación del círculo de unidad $|z| < 1$ en el círculo de unidad $|w| < 1$, así que el punto $z_0 = \frac{i-1}{2}$

pasa al centro $w = 0$. Tenemos

$$w = f(z) = e^{i\alpha} \frac{z - \frac{i-1}{2}}{1 + z \cdot \frac{1+i}{2}} \quad \text{o} \quad f(z) = e^{i\alpha} \frac{2z+1-i}{2+z(1+i)}.$$

Puesto que

$$f'(z) = e^{i\alpha} \frac{2}{[2+(1+i)z]^2},$$

entonces

$$f'(z_0) f' \left(\frac{i-1}{2} \right) = 2e^{i\alpha}.$$

Conforme a la condición $\arg f' \left(\frac{i-1}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$ obtenemos $\arg(2e^{i\alpha}) = \pi/2$, de donde $\alpha = \pi/2$ y por tanto

$$f(z) = i \frac{2z+1-i}{2+(1+i)z} \quad \text{o} \quad f(z) = \frac{1+(2z+1)i}{2+z(1+i)}.$$

460. Hallar la transformación lineal fraccional que pasa el eje real en la circunferencia de unidad.

Hallar las imágenes de los dominios siguientes para las aplicaciones lineales fraccionales dadas:

461. Anillo $1 < |z| < 2$ para $w = \frac{z+1}{z+2}$.

462. Exterior del círculo $|z| > 1$ para $w = \frac{z+i}{z-i}$.

463. Círculo $|z| < 1$ para $w = \frac{z-1}{z+i}$.

464. Determinar en qué pasa el interior del círculo $|z| < 1$ para la aplicación lineal fraccional que pasa los puntos $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = \infty$ respectivamente a los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$.

465. Hallar los puntos simétricos con el punto $z = 1 + i$ respecto a las líneas siguientes:

a) $x = 0$; b) $|z| = \sqrt{2}$; c) $|z - 1 - i| = 2$.

466. Hallar el aspecto general de la función lineal fraccional que aplica:

a) el semiplano superior en el semiplano inferior;

b) el semiplano superior en el semiplano derecho.

467. Hallar la aplicación del semiplano superior en sí, si

$$w(0) = 1, \quad w(1) = 2, \quad w(2) = \infty.$$

468. Hallar la aplicación en el círculo de unidad $|w| < 1$ del semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$, así que

- a) $w(i) = 0, \arg w'(i) = -\pi/2;$
- b) $w(2i) = 0, \arg w'(2i) = 0.$

469. Hallar la función $w = f(z)$ que aplica el semiplano superior en el círculo de unidad así que los puntos $z_1 = -1, z_2 = 0, z_3 = 1$ pasen en los puntos $w_1 = 1, w_2 = i, w_3 = -1$ de la circunferencia.

470. Hallar la función $w = f(z)$ que aplica el círculo $|z| < 1$ sobre el semiplano inferior de manera que los puntos $1, i, -i$ pasen a los puntos $1, 0, -1$.

471. Hallar la función lineal fraccional que aplica el círculo $|z| < 1$ en el semiplano $\operatorname{Im} z > 0$ de tal modo que los puntos $-1, 1, i$ pasen en los puntos $\infty, 0, 1$.

472. Hallar la aplicación conforme del círculo $|z| < 5$ en el círculo $|w| < 1$ así que los puntos $-5, 4 + 3i, 5$ pasen a los puntos $-1, i, 1$.

473. Hallar la función $w = f(z)$ que aplica de modo conforme el círculo de unidad en sí y tal que

a) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2};$

b) $f(0) = 0, \quad \arg f'(0) = -\frac{\pi}{2}.$

474. Hallar la función lineal fraccional que aplica el círculo $|z - 2| < 3$ en el círculo $|w| < 1$ de tal manera que los puntos $-1, 5, i\sqrt{5}$ pasen respectivamente a los puntos $1, i, -1$.

475. ¿En qué dominio en el plano w aplicará la función $w = i \frac{1-z}{1+z}$ el semicírculo superior $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$?

476. Hallar la imagen del dominio $D: 1 \leq |z| \leq 2, 0 \leq \arg z \leq \pi/4$ para la aplicación $w = \frac{1}{z} + 1$.

IV. Aplicaciones conformes que realizan principales funciones elementales

1. Función potencial

$$w = z^n, \tag{11}$$

donde $n \geq 2$ es el número positivo.

La aplicación que proporciona la función potencial es conforme en todo el plano menos el punto $z = 0$: para $z \neq 0$ tenemos $w' = nz^{n-1}$; para $z = 0$ $w' = 0$. Para $z = 0$ se altera la conformidad, puesto que en el caso de la aplicación mediante la función (11) los ángulos se aumentan en n veces. El ángulo $0 < \varphi < 2\pi/n$ aplica por la función (11) biunívocamente en todo el plano z con el corte por la parte positiva del eje real, con todo eso al rayo $\varphi = 0$ le corresponde el extremo superior y al rayo $\varphi = \frac{2\pi}{n}$ le corresponde el extremo inferior del corte. La misma aplicación la obtendremos para cada uno de los ángulos, en los cuales parten los rayos $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ (k es el número ente-

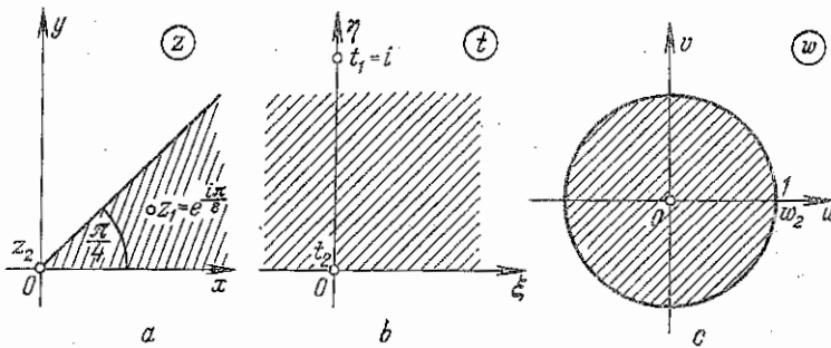


Fig. 19

ro) el plano z , además para la aplicación del ángulo $\frac{2(k-1)\pi}{n} < \varphi < \frac{2k\pi}{n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) en el plano con corte al rayo $\varphi = \frac{2(k-1)\pi}{n}$ le corresponde el extremo superior y al rayo $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ le corresponde el extremo inferior del corte.

Ejemplo 15. Aplicar el sector $0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$ en el círculo de unid-

dad $|w| < 1$ así que el punto $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ pase al centro $w_1 = 0$ y el punto $z_2 = 0$, al punto $w_2 = 1$.

Solución. El sector $0 < \arg z < \pi/4$ (fig. 19, a) le aplicaremos en el semiplano $\operatorname{Im} t > 0$ mediante la función $t = z^4$ (fig. 19, b).

El punto $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ pasará al punto $t_1 = z_1^4 = i$ y $z_2 = 0$ pasará al punto $t_2 = 0$.

Después aplicaremos el semiplano $\operatorname{Im} t > 0$ en el círculo $|w| < 1$ de manera que el punto $t_1 = i$ pase al centro del círculo (fig. 19, c).

Utilizando la fórmula (9), obtendremos

$$w = e^{i\varphi} \frac{t-i}{t+i}.$$

La exigencia que el punto $t_2 = 0$ pase al punto $w_2 = 1$, da $e^{i\varphi} = -1$. Sustituyendo en la expresión para w el valor $e^{i\varphi} = -1$ y $t = z^4$, obtendremos definitivamente

$$w = -\frac{z^4 - i}{z^4 + i},$$

Ejemplo 16. Hallar la función que aplica la mitad superior del círculo $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ sobre el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$.

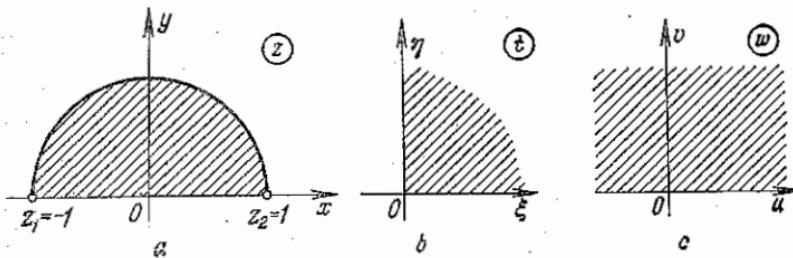


Fig. 20

Solución. El dominio dado representa por sí mismo una lúnula con los vértices en los puntos $z_1 = -1$ y $z_2 = 1$ y un ángulo para vértice $\alpha = \pi/2$ (fig. 20, a).

La función auxiliar $t = \frac{1+z}{1-z}$ realiza la aplicación conforme de

esta lúnula en el primer cuadrado del plano t (fig. 20, b). La función $w = t^2$ o $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ da la aplicación buscada (fig. 20, c).

2. *Radical.* La función $w = \sqrt[n]{z}$ que es inversa a la función potencial $z = w^n$ es de n valores, es decir, a cada $z = \rho e^{i\varphi}$ ($z \neq 0$ y $z \neq \infty$) le corresponde n valores de w por la fórmula

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k=0, 1, \dots, n-1.$$

Cada una de las funciones w_k es una rama de la función multiforme $w = \sqrt[n]{z}$. El punto $z = 0$ es un punto de ramificación de esta función.

En el z plano extendido con cualquier corte de $z = 0$ hasta $z = \infty$, en particular, con el corte a lo largo de la parte positiva del eje real se puede separar n ramas biunívocas w_k . Estas ramas de una hoja aplican el plano extendido con el corte a lo largo de la parte positiva

del eje real en sectores

$$\frac{2(k-1)\pi}{n} < \arg w < \frac{2k\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Ejemplo 17. Aplicar el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ con el corte por el segmento del punto $z_1 = 0$ hasta el punto $z_2 = ai$ ($a > 0$) en el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$ (excluir el corte).

Solución. 1) Por medio de la aplicación $t = z^2$ doblemos los ángulos en el origen de coordenadas. Con todo, el segmento $z_1 z_2$ pasará al segmento $t_1 t_2$ del plano extendido t del punto $t_1 = 0$ hasta el punto $t_2 = -a^2$, mientras que el rayo $\arg z = \pi$ (el semieje real negativo) en el rayo $\arg w = 2\pi$. De ese modo el dominio inicial aplicó en el t plano extendido con el corte desde el punto $t_2 = -a^2$ hasta el punto $t = +\infty$.

2) Con ayuda de la función lineal $\tau = t + a^2$ desplazemos el inicio del corte al origen de coordenadas. El τ plano extendido resulta ser cortado del punto $\tau = 0$ hasta el punto $\tau = +\infty$.

3) Mediante la función $w = \sqrt{\tau}$ (más exactamente su rama que toma los valores positivos en el extremo superior del corte) aplicamos τ plano cortado en el semiplano $\operatorname{Im} w > 0$. Pues

$$w = \sqrt{\tau} = \sqrt{t+a^2} = \sqrt{z^2+a^2}.$$

Hallar las aplicaciones en el semiplano superior de los dominios siguientes:

477. Del plano con el corte por el segmento $[-1, 1]$.

478. De la franja $0 < x < 1$ con el corte por el rayo $x = 1/2$, $a \leqslant y \leqslant \infty$ ($a > 0$).

479. Del plano con los cortes por los rayos $y = 0$, $-\infty < x \leqslant a$ e $y = 0$, $b \leqslant x < +\infty$ ($a < b$).

3. *Función exponencial.* La aplicación que realiza la función exponencial

$$w = e^z,$$

es conforme en todo el plano, puesto que $w' = e^z \neq 0$ en todo el punto finito del plano z .

Si el plano \tilde{z} dividir en franjas

$$2k\pi < y < 2(k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

entonces cada una de estas franjas se aplicará por la función $w = e^z$ biunívocamente en todo el plano w con el corte a lo largo de la parte positiva del eje real. En este caso consideraremos que al extremo inferior $y = 2k\pi$ de la franja le corresponde el extremo superior del corte y al extremo superior $y = 2(k+1)\pi$ el extremo inferior del corte. Con eso los puntos $z_0 = x_0 + iy_0$ y $z_k = x_0 + i(y_0 + 2k\pi)$, ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) pasan en el mismo punto del plano w . Esto significa que la función exponencial es la función infinita de hoja periódica de la variable compleja z con el período imaginario $2\pi i$. El dominio de una hoja es cualquiera franja $y_0 \leqslant y < y_0 + 2\pi$ que se aplica en el plano completo w con el corte por el rayo $\arg w_0 = y_0$ (fig. 21).

Notemos que la función exponencial $w = e^z$ no se anula para ningún valor de z .

Ejemplo 18. ¿En qué se transforma la semifranja

$$0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \quad \operatorname{Re} z < 0$$

mediante la función $w = e^{z^2}$?

Solución. Supongamos que $z = x + iy$, $w = e^z = e^x \cdot e^{iy} = \rho e^{i\varphi}$. Entonces

$\rho = e^x$, $\varphi = y$, donde $-\infty < x < 0$, $0 < y < 2\pi$, así que $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$. Es evidente, los puntos $w = \rho e^{i\varphi}$ que satis-

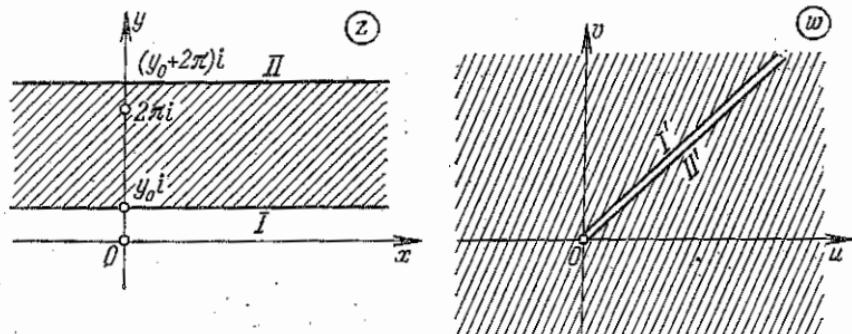


Fig. 21

facen estas condiciones llenan el círculo $|w| < 1$ con el corte por el segmento de la recta que conecta los puntos $w = 0$ y $w = 1$. De hecho recorremos el contorno γ del dominio D en la dirección positiva

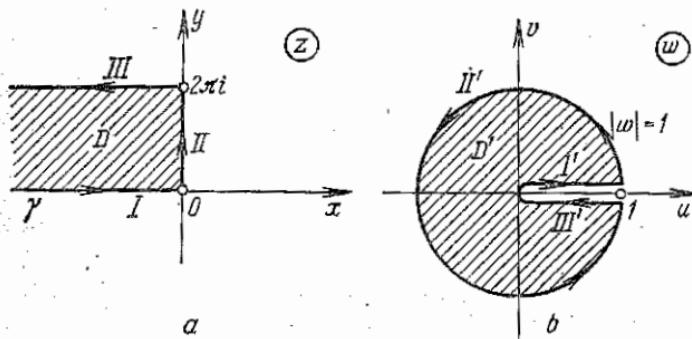


Fig. 22

empezando con la parte I ($-\infty < x < 0$, $y = 0$), más II ($x = 0$, $0 < y < 2\pi$) y por fin III ($y = 2\pi$, y y x se cambia de 0 hasta $-\infty$). Es evidente que a estas partes en el plano w las corresponden las partes I' , II' , III' , donde la parte I' coincide con el extremo superior del corte y III' coincide con el extremo inferior (fig. 22).

4. Función logarítmica

$$w = \ln z$$

se define como la función inversa a la exponencial. Para más precisión vamos a examinar el valor principal del logaritmo z , es decir, aquel valor que corresponde al valor principal del argumento

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad -\pi < \arg z \leq \pi.$$

Esta función es analítica en todos los puntos finitos $z \neq 0$ y $w' = \frac{1}{z} \neq 0$. Por consiguiente, la aplicación mediante la función $w =$

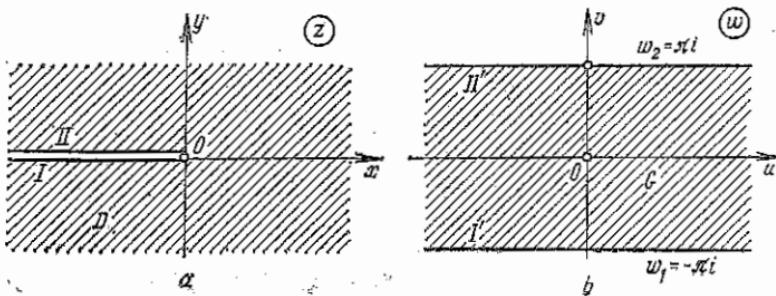


Fig. 23

$= \ln z$ es conforme en todos tales puntos. Observemos que los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ son los puntos de ramificación de la función $w = \ln z$, al mismo tiempo $\ln 0 = \infty$ y $\ln \infty = \infty$.

Cualquier número finito de recorridos (en la misma dirección) alrededor del punto $z = 0$ no conduce de nuevo a la rama inicial de la función $\ln z$. Tales puntos de ramificación se llaman logarítmicos.

Ejemplo 19. Hallar la función que aplica el plano z con el corte a lo largo de la parte negativa del eje real desde el punto $z = 0$ hasta el punto $z = -\infty$ sobre la franja $-\pi < v < \pi$ en el plano w .

Solución. Examinando la función exponencial $w = e^z$, indicamos (véase la pag. 144) que cualquiera franja $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$ se aplica por esta función en el plano completo w con el corte por el rayo $\arg w_0 = y_0$.

Examinemos la aplicación inversa, a saber, la aplicación de la franja $v_0 \leq v < v_0 + 2\pi$, donde $v_0 = -\pi$ del plano w en todo el plano z con el corte por el rayo $\arg z_0 = v_0 = -\pi$ (fig. 23). Es evidente, tal aplicación de la función $z = e^w$; por consiguiente, la aplicación buscada es $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$. Cuando el punto z recorre por el extremo inferior del corte I de $x = -\infty$ hasta $x = 0$, entonces en el plano w el punto respectivo circunscribe la línea I' desde $u = +\infty$ hasta $u = -\infty$ ($v = -\pi$). Más, cuando el punto z recorre por el extremo superior del corte II desde $x = 0$ hasta $x = -\infty$, entonces en el plano w el punto respectivo circunscribe la línea II' desde $u = -\infty$ hasta $u = +\infty$ ($v = \pi$), puesto que el dominio D y el dominio que le corresponde se quedan durante el recorrido de contornos a la derecha.

5. Funciones trigonométricas

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Para cualquier complejo z

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Ejemplo 20. ¿En qué se aplica la semifranja $0 < x < \pi, y < 0$ (fig. 24) con ayuda de la función $\cos z$?

Solución. Tenemos $\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$. Si el punto z recorre una parte de la frontera I de

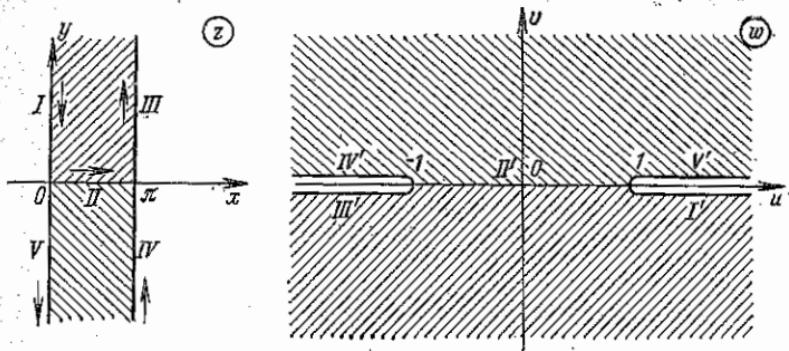


Fig. 24

$y = +\infty$ hasta $y = 0$ (para $x = 0$), entonces el punto respectivo en el plano w recorre la parte I' de $u = +\infty$ hasta $u = 1$ (para $v = 0$). Si el punto z recorre la parte II de $x = 0$ hasta $x = \pi$ (para $y = 0$), entonces $w = \cos x$ circunscribe la parte II' de $u = 1$ hasta $u = -1$ (para $v = 0$). Por fin, si el punto z recorre la parte III de $y = 0$ hasta $y = +\infty$ (para $x = \pi$), entonces $w = -\operatorname{ch} y$ recorre la parte III' desde $u = -1$ hasta $u = -\infty$ (para $v = 0$). Pues, si el punto z recorre la frontera de la semifranja $0 < x < \pi, y < 0$ de ese modo que la semifranja se queda a la izquierda, entonces el punto w recorre de derecha a izquierda todo el eje real y por lo tanto de acuerdo con el principio de la correspondencia biunívoca de fronteras se deduce que la función $w = \cos z$ aplica la semifranja que examinamos en el semiplano inferior w .

Análogamente se muestra que la semifranja $0 < x < \pi, y < 0$ por la función $w = \cos z$ se aplica en el semiplano superior w .

Al lado de la semifranja $x = \pi, y < 0$ le corresponde el segmento $-\infty < u < -1$ del eje real del plano w , al lado $0 < x < \pi, y = 0$ (que se recorre de π a 0) le corresponde el segmento $-1 < u < 1$ y al lado $x = 0, y < 0$ el segmento $1 < u < +\infty$. El segmento $-\infty < u < -1$ del eje real del plano w se recorre dos veces, a saber, sobre él se aplica el lado $x = \pi, y > 0$ de la semifranja primera y el lado $x = \pi, y < 0$ de la semifranja segunda. Para que la aplicación $w = \cos z$ sea biunívoca, es necesario en el plano w hacer el corte a lo largo del eje real de $-\infty$ hasta -1 (y de 1 hasta $+\infty$ también).

Así, la función $w = \cos z$ aplica la franja $0 < x < \pi$ en todo el plano w con el corte por el eje real de $-\infty$ hasta -1 y de 1 hasta $+\infty$.

6. Función de Zhukovski

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \quad (12)$$

es analítica en todo el plano, menos el punto $z = 0$, donde ella tiene el polo del primer orden.

La derivada de la función de Zhukovski $w' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \neq 0$ para $z \neq \pm 1$, y, por consiguiente, la aplicación que realiza esta fun-

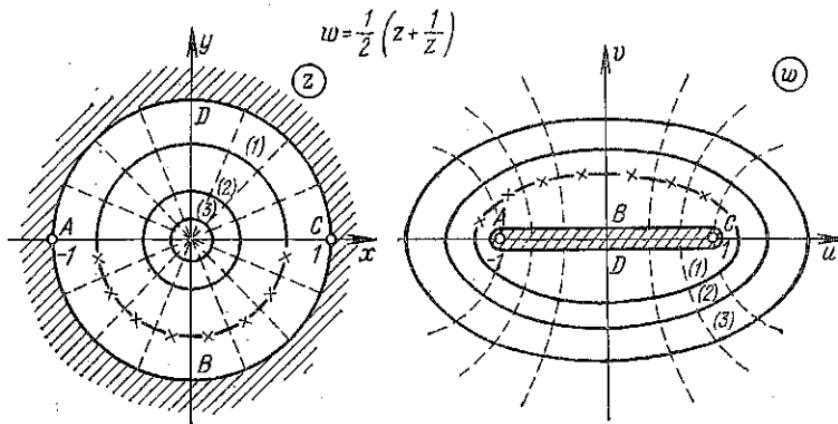


Fig. 25

ción en todas partes es conforme, menos los puntos $z = \pm 1$. La función $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ aplica de modo conforme el dominio $|z| < 1$ en todo el plano w cortado por el segmento $[-1, 1]$ del eje real. La frontera del dominio es la circunferencia $|z| = 1$, se aplica en este segmento, al mismo tiempo la semicircunferencia superior se aplica en inferior y la semicircunferencia inferior se aplica en el extremo superior del corte.

Análogamente el dominio $|z| > 1$ se aplica en el segundo ejemplar del plano w cortado por el segmento $[-1, 1]$ del eje real, al mismo tiempo la semicircunferencia superior $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ se aplica en el extremo superior y la semicircunferencia inferior $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ se aplica en el extremo inferior del corte (fig. 25).

Toda circunferencia del radio $R \neq 1$ se aplica por la función (12) en elipse con los semiejes

$$a = \frac{1}{2} \left(R + \frac{1}{R} \right), \quad b = \frac{1}{2} \left| R - \frac{1}{R} \right|$$

y con los focos en los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Los rayos $\arg z = \varphi$ (menos $\varphi = 0; \pm \frac{\pi}{2}, \pi$) se aplican en las ramas respectivas de la hipérbola

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1;$$

los rayos $\arg z = 0$, $\arg z = \pm \frac{\pi}{2}$, $\arg z = \pi$ se aplican en los segmentos infinitos que se recorren dos veces del eje real o imaginario.

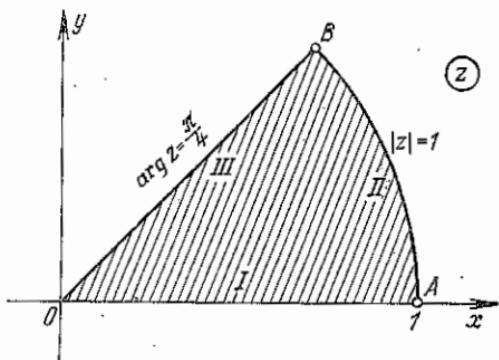


Fig. 26

Ejemplo 21. Utilizando la función de Zhukovski, hallar la imagen del dominio

$$0 < |z| < 1, \quad 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}.$$

Solución. Sustituimos $z = re^{i\varphi}$ en la función de Zhukovski

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

y sepáremos las partes real e imaginaria; obtenemos

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases}$$

Recorriendo el contorno del sector en la dirección positiva $OABO$ (fig. 26) obtenemos: el segmento OA pasará en el segmento infinito del eje real que se recorre de $u = +\infty$ hasta $u = 1$ (fig. 27); el arco AB de la circunferencia $|z| = 1$ pasará en el segmento del eje real $A'B'$ y el segmento BO pasará en la curva

$$u = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad v = \frac{\sqrt{2}}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)$$

$$\text{o } u^2 - v^2 = \frac{1}{2} \text{ (hipérbola).}$$

Según el principio de la correspondencia biunívoca de fronteras obtendremos que el sector prefijado pasa por la función de Zhukovski en el dominio

$$u^2 - v^2 > \frac{1}{2}, \quad u > \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad v < 0.$$

Ejemplo 22. Aplicar en el semiplano superior un círculo de unidad con el corte que sale del centro por el eje real.

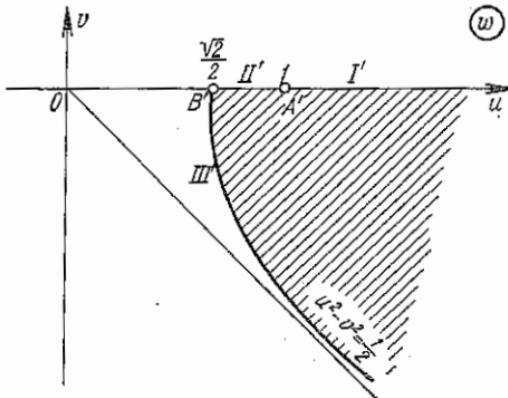


Fig. 27

Solución. 1) Con ayuda de la función $w_1 = \sqrt{z}$ aplicamos el círculo de unidad en el semicírculo superior. Al mismo tiempo el extremo superior del corte OA , es decir, el segmento $[-1, 0]$, se queda inmóvil y el extremo inferior OA' pasará en el segmento $[-1, 0]$ en el plano W_1 .

2) Mediante la función

$$w_2 = \frac{w_1 + 1}{w_1 - 1}$$

aplicamos la semicircunferencia obtenida en 1) en el primer cuadrante del plano W_2 . Al mismo tiempo, el punto $w_1 = 1$ pasará al punto $w_2 = \infty$ y el punto $w_1 = -1$ pasará en el punto $w_2 = 0$.

3) Por fin, mediante la función $w = w_2^2$ aplicamos el primer cuadrante en el semiplano superior.

Obtenemos definitivamente

$$w = w_2^2 = \left(\frac{w_1 + 1}{w_1 - 1} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{z} + 1}{\sqrt{z} - 1} \right)^2.$$

Ejemplo 23. Hallar la función que aplica el dominio comprendido entre las dos circunferencias que se intersecan en los puntos reales $z = a$ y $z = b$ ($a < b$) bajo el ángulo $\pi\lambda$, $0 < \lambda < 1$ (fig. 28) en el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$ de manera que el punto $z = a$ pase al punto $w = 0$ y el punto $z = b$ pase al punto $w = \infty$.

Solución. 1) Transformemos la lúnula ab en el ángulo del valor $\lambda\pi$, $0 < \lambda < 1$ de tal manera que el punto $z = a$ pase al punto $w = 0$, mientras que el punto $z = b$ pase al punto $w = \infty$. Lo que se realiza mediante la función $w_1 = \frac{z-a}{b-z}$ (fig. 29).

2) La transformación $w_2 = w_1 e^{i\alpha}$ gira el ángulo V_1 de la abertura $\lambda\pi$ contra el sentido horario en ángulo α . De ese modo, en el plano W

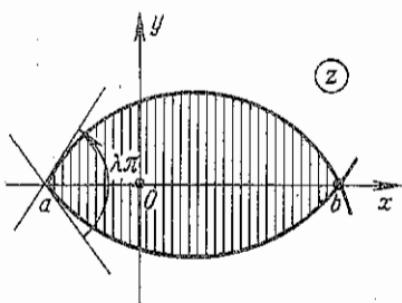


Fig. 28

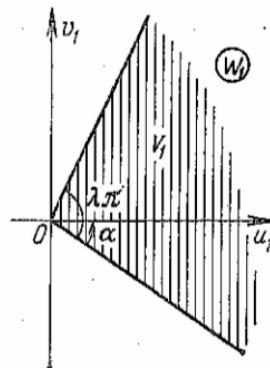


Fig. 29

obtenemos el ángulo V_2 de la misma abertura que y el ángulo V_1 (fig. 30).

3) La transformación $w = w_2^{1/\lambda}$ pasa el ángulo V_2 en el semiplano.

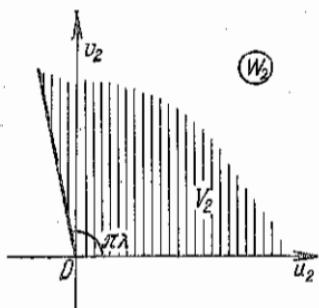


Fig. 30

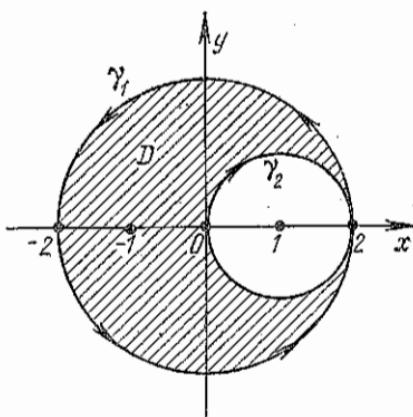


Fig. 31

De ese modo, la transformación buscada tiene la forma

$$w = c \left(\frac{z-a}{b-z} \right)^{1/\lambda},$$

donde c es una constante compleja que se elige así que la aplicación se realice en el semiplano superior.

Ejemplo 24. Hallar la función que aplica conformemente en el semiplano superior el dominio $D: |z| < 2, |z - 1| > 1$ (fig. 31).

Solución. 1) La función

$$w_1 = \frac{z}{z-2} \quad (13)$$

aplica el dominio prefijado en la franja $\Pi_1: \{0 < u < \frac{1}{2}, -\infty < v < +\infty\}$.

Realmente, suponiendo $z = 2e^{i\varphi}$, obtendremos

$$w_1 = u + iv = \frac{2e^{i\varphi}}{2e^{i\varphi} - 2} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Separando la parte real e imaginaria, obtenemos

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

De este modo, la circunferencia $|z| = 2$ se transforma por la función $w_1 = \frac{z}{z-2}$ en la recta

$$u = \frac{1}{2}, \quad v = -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}},$$

que se recorre de abajo hacia arriba (fig. 32). En particular, los puntos $z_1 = 2i$, $z_2 = -2$ y $z_3 = -2i$ pasarán en los puntos $w = \frac{1-i}{2}$, $w = \frac{1}{2}$ y $w = \frac{1+i}{2}$. Esta misma función pasa la circunferencia $|z - 1| = 1$ en la recta $u = 0$, $-\infty < v < +\infty$. Al mismo tiempo sustituyendo en (13) el valor de $z = 1 + e^{i\varphi}$, obtenemos

$$w_1 = u_1 + iv_1 = \frac{e^{i\varphi} + 1}{e^{i\varphi} - 1} = -i \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

de donde

$$u_1 = 0, \quad v_1 = -\frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

donde φ se cambia de 2π hasta 0. Por consiguiente, cuando el punto z recorre la circunferencia γ_2 , entonces el punto respectivo w_1 recorre la recta Γ_2 (el eje v_1 en el plano W_1) de arriba abajo. Para la aplica-

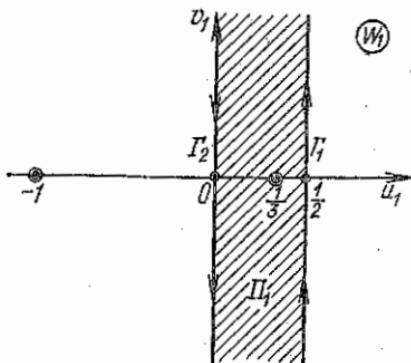


Fig. 32

ción $w_1 = \frac{z}{z-2}$ el punto inferior $z = -1$ del dominio D pasa en el punto interior $w_1 = \frac{1}{3}$ de la franja Π_1 (fig. 32). Por consiguiente, la función $w_1 = \frac{z}{z-2}$ realiza la aplicación del dominio D en la franja Π_1 .

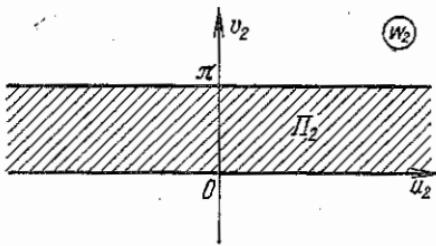


Fig. 33

- 2) La función $w_2 = 2\pi i w_1$ pasa la franja vertical
 $\Pi_1 : \left\{ 0 < u_1 < \frac{1}{2}, -\infty < v_1 < +\infty \right\}$
 a la franja horizontal

$$\Pi_2 : \{-\infty < u_2 < +\infty, 0 < v_2 < \pi\} \quad (\text{fig. 33}).$$

- 3) La función $w = e^{w_2}$ pasa la franja Π_2 al semiplano superior del Plano W .

Pues, obtenemos definitivamente

$$w = e^{w_2} = e^{2\pi i w_1} = e^{2\pi i \frac{z}{z-2}}$$

480. Hallar la función que aplica el círculo de unidad en el plano con el corte a lo largo del semieje real positivo.

481. Hallar la función que aplica el ángulo entre los rayos

$$z = z_0 + e^{i\varphi_1 t}, \quad z = z_0 + e^{i\varphi_2 t},$$

donde $t \geq 0$, $0 < \varphi_1 < \varphi_2$, en el semiplano superior.

482. Hallar la función que aplica la franja horizontal $\{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq \pi\}$ en el semicírculo superior $|z| < 1$.

483. Aplicar en el semiplano superior la semifranja $\{0 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq \pi\}$.

484. ¿En qué aplica la función $w = \ln z$ el semianillo $\{r \leq \rho \leq R, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ en el plano z ?

485. Hallar la función que aplica el dominio $\pi/2 < \arg z < \pi$ en el dominio $0 < \arg w < \pi/4$.

486. Aplicar el plano con el corte rectangular por el eje real $0 < a < x < b$ en el semiplano superior w .

487. Aplicar el plano z con las secciones rectangulares $(-\infty, b), (a, +\infty)$, donde a y b son reales, $b < a$, en el semiplano $\operatorname{Im} w > 0$.

488. Hallar la función que aplica el primer cuadrante $0 \leq \arg z \leq \pi/2$ en el círculo $|w| < 1$ así que a los puntos $z = 1 + i, z = 0$ les correspondan los puntos $w = 0, w = 1$.

En los problemas siguientes hallar el dominio del plano w , en el cual la función $w = f(z)$ aplica el dominio dado D del plano z :

489. $w = z^2 + 1$, D : es un cuarto del círculo $|z| < 1$, $0 < \arg z < \pi/2$.

490. $w = e^{2z}$, D : es la semifranja $0 < \operatorname{Im} z < \pi/4$, $\operatorname{Re} z < 0$.

491. $w = \ln z + 1$, D : la parte del anillo circular $1 < |z| < e$ comprendida en el ángulo $0 < \arg z < e$.

Hallar la función que aplica conformemente en el semiplano superior cada de los dominios indicados:

492. Sector $|z| < 2$, $0 < \arg z < \pi/4$.

493. Franja $a < \operatorname{Re} z < b$, $a > 0$.

Hallar las funciones que aplican:

494. Círculo $|z| < 1$ con la sección por el radio del punto $z = 0$ hasta el punto $z = -1$ o la semifranja $-\pi < u < \pi$, $u < 0$.

495. Semifranja $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, $\operatorname{Re} z > 0$ en el semiplano $\operatorname{Im} w > 0$.

496. Franja $-\infty < \operatorname{Re} z < +\infty$, $0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$ en el semiplano w con las secciones $-\infty < u \leq -1$, $v = 0$ y $1 \leq u < +\infty$, $v = 0$.

497. Lúnula limitada por las circunferencias $|z - 1| = 1$, $|z - 2| = 2$ en la franja $0 < \operatorname{Re} w < 1$.

498. Hallar la función lineal fraccional que aplica el dominio D : $\{|z + 1| > 1; |z + 2| < 2\}$ en la franja P : $\{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$.

499. Hallar la función que aplica la lúnula entre las dos circunferencias $|z - 1| = 1$, $|z + i| = 1$ en el semiplano $\operatorname{Re} w > 0$.

500. Utilizando la función de Zhukovski, hallar la función que aplica el anillo $1 < |z| \leq 2$ en el dominio $\frac{u^2}{25} + \frac{v^2}{9} \leq 1$ con la sección $-4 \leq u \leq 4$, $v = 0$.

501. Aplicar el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ con el semicírculo excluido $|z| < 1/2$ en el círculo $|w| < 1$.

502. Hallar la representación conforme del sector $0 < \arg z < \pi/8$ en el círculo de unidad $|w| < 1$ de tal

modo que el punto $z_1 = e^{i\frac{\pi}{16}}$ pase al centro $w_1 = 0$ y el punto $z = 0$ pase al punto $w = 1$.

503. Aplicar la franja $0 < x < \pi/4$ en el primer cuadrante $0 < \arg w < \pi/2$.

504. Hallar los dominios, en los cuales la función $w = \operatorname{tg} z$ pasa: a) la franja $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < -\frac{\pi}{4}$; b) la franja $0 < \operatorname{Re} z < \pi$.

§ 13. Potencial complejo. Su sentido hidrodinámico

Sea dado un campo plano estable vectorial

$$\mathbf{a} = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}, \quad (1)$$

donde \mathbf{i} y \mathbf{j} son los versores de los ejes de coordenadas Ox y Oy respectivamente.

Puesto que el punto (x, y) en el plano xOy y su radio vector $r = xi + yj$ son la representación del número complejo $z = x + iy$, donde i es la unidad imaginaria, entonces el vector $\mathbf{a} = P(x, y) \mathbf{i} + Q(x, y) \mathbf{j}$ son en su turno la representación del número complejo $P(x, y) + iQ(x, y)$ también. Por eso el vector \mathbf{a} junto con (1) se puede escribirlo en la forma

$$\mathbf{a} = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Por consiguiente, el campo vectorial (1) se puede representarlo indicando dos funciones reales $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ de dos variables complejas x y y o una función de la variable compleja z

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y).$$

Aplicación de funciones de variable compleja a la hidrodinámica

Una plana corriente estable no turbulento del líquido incompresible se caracteriza por la función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ que se llama el *potencial complejo* o la *función característica de la corriente*. La parte real $u(x, y)$ e imaginaria $v(x, y)$ se llaman la *función potencial* y la *de corriente*, respectivamente.

Las líneas $u(x, y) = \text{const}$ se llaman las *líneas equipotenciales* o las *líneas del nivel*. Las líneas $v(x, y) = \text{const}$ se llaman las *líneas de corriente*.

Cada partícula del líquido se mueve por la línea de corriente.

Es conocido que la velocidad V de corriente del líquido que prefiere por la función $f(z)$ en cualquier punto $z = x + iy$ se determina tanto por la magnitud como y por la dirección mediante el número complejo

$$V = Ve^{i\varphi} = V_{Ox} + iV_{Oy} = \overline{f'(z)} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y},$$

es decir, por el número conjugado con el valor de la derivada del potencial complejo en el punto z . El valor de la velocidad es igual a

$$V = |V| = |\overline{f'(z)}| = |f'(z)|,$$

y la dirección del vector de velocidad V forma con la dirección positiva del eje Ox el ángulo

$$\varphi = \arg \overline{f'(z)} = -\arg f'(z).$$

Las proyecciones V_{Ox} y V_{Oy} del vector de velocidad V en el eje de coordenadas Ox y Oy son iguales a

$$V_{Ox} = \text{pr}_{Ox} V = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad V_{Oy} = \text{pr}_{Oy} V = \frac{\partial u}{\partial y},$$

o en virtud de las condiciones de Cauchy-Riemann

$$V_{Ox} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad V_{Oy} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

De aquí sigue que

$$V = \text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Supongamos que las coordenadas $V_{Ox} = V_{Ox}(x, y)$ y $V_{Oy} = V_{Oy}(x, y)$ del vector de velocidad V en el dominio de su definición son las funciones diferenciables continuas, a excepción, puede ser, del número finito de puntos.

Definición. La circulación del vector de velocidad V , a lo largo de la curva cerrada L , el recorrido de la cual se realiza en la dirección positiva, se la llaman la magnitud

$$\begin{aligned}\Gamma_L &= \oint_L V_{Ox} dx + V_{Oy} dy = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \\ &= \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy.\end{aligned}$$

El grado de vorticidad de la corriente del líquido se caracteriza por la circulación Γ_L . Se presupone aquí que la curva L no contiene los puntos singulares de velocidad V y dentro de L puede existir el número finito de los puntos singulares.

Definición. La magnitud

$$\begin{aligned}N_L &= \oint_L V_{Ox} dy - V_{Oy} dx = \oint_L \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx = \\ &= \oint_L \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.\end{aligned}$$

se llama el flujo del vector de velocidad V a través de la curva cerrada L . La curva L se recorre en la dirección positiva, es decir, durante el recorrido de L el dominio limitado por ella se queda a la izquierda (se toma aquí la normal exterior a la curva cerrada L). Se presupone que la curva L no pasa por los puntos singulares de la velocidad V , es decir, por la derivada $f'(z)$.

El flujo N_L del vector de velocidad V determina la cantidad del líquido que pasa por la línea L por unidad de tiempo.

Las fórmulas para la circulación Γ_L y el flujo N_L del vector de velocidad V se unen en una fórmula

$$\Gamma_L + iN_L = \oint_L f'(z) dz, \quad (2)$$

que permite hallar la circulación y el flujo con ayuda de los residuos. En el caso, cuando la derivada $f'(z)$ (y, por consiguiente, la velocidad $V = f'(z)$) tiene el número finito de los puntos singulares z_k ($k = 1, 2, \dots, n$),

$$\Gamma_L + iN_L = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f'(z_k).$$

Los puntos, en los cuales $V = 0$ y, por lo tanto, $f'(z) = 0$ se llaman los *puntos críticos* de la corriente.

Ejemplo 1. El movimiento del líquido se representa por el potencial $f(z) = z^2$. Hallar el potencial de velocidades, la función de corriente, las líneas del nivel, las líneas de corriente, la magnitud y la dirección del vector de velocidad V , las proyecciones del vector de velocidad V_{Ox} y V_{Oy} en el eje de coordenadas Ox y Oy .

Solución. Suponiendo $z = x + iy$, tenemos

$$f'(z) = (x^2 - y^2) + i2xy,$$

de donde el potencial de velocidades $u(x, y) = x^2 - y^2$ y la función de corriente $v(x, y) = 2xy$. Las líneas del nivel $u(x, y) = \text{const}$, de hipérbola $x^2 - y^2 = \text{const}$. Las líneas de corriente $v(x, y) = \text{const}$, de hipérbola $xy = \text{const}$. El valor del vector de velocidad

$$V = |\overline{f'(z)}| = |2\bar{z}| = 2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

La dirección del vector de velocidad se determina por el ángulo

$$\varphi = -\arg f'(z) = -\arctg \frac{y}{x}.$$

Las proyecciones del vector de velocidad a los ejes de coordenadas Ox y Oy son

$$V_{Ox} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad V_{Oy} = \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

El origen de coordenadas $O(0, 0)$ es el punto de reposo (tranquilidad) del líquido.

Ejemplo 2. El movimiento del líquido se prefija por el potencial $f(z) = \ln \operatorname{sh} \pi z$. Hallar el valor del flujo N_L a través de la circunferencia $2|z| = 3$ y la circulación Γ_L por ella.

Solución. Hallamos la derivada del potencial complejo:

$$f'(z) = \pi \operatorname{cth} \pi z.$$

Utilizando la fórmula (2), obtenemos

$$\Gamma_L + iN_L = \pi \int_{|z|=3/2} \operatorname{cth} \pi z dz = \pi \int_{|z|=3/2} \frac{\operatorname{ch} \pi z}{\operatorname{sh} \pi z} dz.$$

La función subintegral tiene dentro de la circunferencia $2|z| = 3$ tres polos simples: $z_1 = -i$, $z_2 = 0$, $z_3 = i$. Sus residuos en estos polos son iguales a

$$\operatorname{res} f'(z_k) = \pi \frac{1}{\pi} = 1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Entonces

$$\int_{|z|=3/2} \operatorname{cth} \pi z dz = 6\pi i,$$

Por consiguiente,

$$\Gamma_L + iN_L = 6\pi^2 i.$$

De aquí la circulación $\Gamma_L = 0$, el flujo $N_L = 6\pi^2$.

Ejemplo 3. Hallar el potencial complejo $f(z)$ de la corriente del líquido, si se sabe la ecuación de las líneas equipotenciales

$$\operatorname{ch} x \operatorname{sen} y + 2xy = c,$$

donde $c = \text{const}$ y $f(0) = 0$.

Solución. De la condición se sigue que la función potencial $u(x, y)$ es decir, la parte real de la función analítica $f(z)$ del potencial complejo buscado es igual a

$$u = 2xy + \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y$$

y el problema se reduce a la reconstrucción de la función analítica a partir de su parte real.

Hallemos la función $f(z)$, conociendo su parte real $u(x, y)$. Tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y + \operatorname{sh} z \operatorname{sen} y.$$

Conforme a la primera de las condiciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, así que

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2y + \operatorname{sh} x \operatorname{sen} y.$$

De aquí hallamos

$$v(x, y) = y^2 - \operatorname{sh} x \cos y + \varphi(x),$$

donde $\varphi(x)$ es la función arbitraria diferenciable. Diferenciando $v(x, y)$ por x y utilizando la segunda de las condiciones de Cauchy-Riemann, hallemos

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\operatorname{ch} x \cos y + \varphi'(x) = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - \operatorname{ch} x \cos y,$$

de donde $\varphi'(x) = -2x$, y por consiguiente, $\varphi(x) = -x^2 + c$, $c = \text{const.}$ Pues,

$$v(x, y) = y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y + c.$$

Por consiguiente,

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y) + ic.$$

De la condición $f(0) = 0$ hallamos: $0 + i0 = c$, $c = 0$.

De tal modo el buscado potencial complejo es

$$f(z) = 2xy + \operatorname{ch} x \operatorname{sen} y + i(y^2 - x^2 - \operatorname{sh} x \cos y)$$

$$f(z) = -i(z^2 + \operatorname{sh} z).$$

La corriente del líquido se determina por el potencial complejo. Hallar el potencial de velocidades, la función de corriente, las líneas del nivel, líneas de corriente, el valor y la dirección del vector de velocidad, las proyecciones de velocidad sobre los ejes de coordenadas.

$$505. f(z) = z^2 + 2z + 2. \quad 506. f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

507. $f(z) = \ln(z - 1)$.

508. Construir el potencial complejo de corriente del líquido, si es sabida la ecuación de líneas del nivel

$$x^2 - y^2 + 2xy + x = \text{const} \text{ y } f(0) = 0.$$

509. Construir el potencial complejo de corriente del líquido, si es sabida la ecuación de líneas de la corriente

$$\cos x \operatorname{sh} y = \text{const} \text{ y } f(0) = 0.$$

510. Hallar la circulación por la circunferencia $|z \pm a| = a$, si es conocido el potencial complejo de corriente del líquido

$$f(z) = 5i \ln(z^2 - a^2).$$

Es evidente,

$$\varphi(t)\eta(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

pues, si $\varphi(t)$ satisface las condiciones 1^a y 3^a, entonces $\varphi(t)\eta(t)$ satisface todas las condiciones que se superponen en funciones originales.

511. Verificar que funciones de las indicadas son funciones originales:

- a) $f(t) = b^t \eta(t)$, $b > 0$, $b \neq 1$;
- b) $f(t) = e^{(2+4i)t} \eta(t)$; c) $f(t) = \frac{1}{t-3} \eta(t)$;
- d) $f(t) = t^2 \eta(t)$; e) $f(t) = \operatorname{ch}(3-i)t \eta(t)$;
- f) $f(t) = \operatorname{tg} t \eta(t)$; g) $f(t) = t^i \eta(t)$;
- h) $f(t) = e^{-t} \cos t \eta(t)$; i) $f(t) = e^{i^2} \eta(t)$;
- j) $f(t) = e^{-t^2} \eta(t)$; k) $f(t) = \frac{1}{t^2+2} \eta(t)$;
- l) $f(t) = \eta(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t-k)$.

A continuación para reducir anotaciones vamos, como regla, a escribir $f(t)$ en vez de $f(t)\eta(t)$, considerando que las funciones a examinar se prolongan por cero para t negativos.

La función $F(p)$ de la variable compleja $p = s + i\sigma$ que se determina por la igualdad

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (2)$$

se llama la representación de función $f(t)$ según Laplace.

Aquel hecho que $F(p)$ es la representación de $f(t)$ vamos a escribirlo simbólicamente en la forma de:

$$f(t) \rightleftharpoons F(p).$$

La función $F(p)$ está definida en el semiplano $\operatorname{Re} p = s > s_0$ y es en este semiplano la función analítica.

Ejemplo 2. Utilizando la definición, hallar la representación de la función

$$f(t) = e^{2t}.$$

Solución. Para la función $f(t) = e^{2t}$ tenemos $s_0 = 2$. Por lo tanto la representación $F(p)$ será en cada caso determinada y analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > 2$. Tenemos

$$\begin{aligned} F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{2t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-2)t} dt = \\ &= \frac{1}{-(p-2)} e^{-(p-2)t} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{p-2} \quad (\operatorname{Re} p = s > 2). \end{aligned}$$

Capítulo II Cálculo operacional

§ 14. Obtención de representaciones y originales

La función original se llama toda función de valores complejos $f(t)$ del argumento real t que satisface las condiciones:

1. $f(t)$ es integrable en cualquier intervalo finito del eje t (es localmente integrable).

2. Para todos t negativos

$$f(t) = 0.$$

3. $|f(t)|$ crece para $t \rightarrow +\infty$ no más rápidamente que la función exponencial, es decir, existen tales constantes $M > 0$ y s que para todos t

$$|f(t)| \leq M e^{st}. \quad (1)$$

La cota inferior s_0 de todos los números s , para los cuales es válida la desigualdad (1), se llama el índice del incremento de la función $f(t)$.

Ejemplo 1. Mostrar que la función

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t} \operatorname{sen} 3t, & t > 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

es la función original.

Realmente, la función $f(t)$ es localmente integrable:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t} \operatorname{sen} 3t dt$$

existe para todas t_1 y t_2 finitos.

La condición 2 está cumplida en vigor de la representación de la función.

Por fin, para todos t reales

$$|e^{2t} \operatorname{sen} 3t| \leq e^{2t},$$

puesto que en calidad de M en la condición 3 se puede tomar cualquier número ≥ 1 , $s_0 = 2$.

La más simple función original es así llamada la función unidad de Heaviside

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Pués, $F(p) = \frac{1}{p-2}$. Esta función es analizable para $\operatorname{Re} p > 2$ y, además, ella es analítica en todas partes, a excepción del punto $p = 2$. Lo que no contradice a la afirmación formulada arriba, puesto que la última garantiza analiticidad de $F(p)$ para $\operatorname{Re} p > s_0$, pero no afirma que si $\operatorname{Re} p < s_0$, entonces $F(p)$ no es analítica en todas partes.

Utilizando la definición, hallar representaciones de las funciones siguientes:

$$512. f(t) = t. \quad 513. f(t) = \operatorname{sen} 3t.$$

$$514. f(t) = te^t. \quad 515. f(t) = t^\alpha (\alpha > -1).$$

516. ¿Pudiera la función $\varphi(p) = \frac{1}{\cos p}$ servir de representación de cierto original?

Propiedades de transformación de Laplace

Teorema de unicidad. *La transformación de Laplace*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

es única en el sentido que las dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ que tienen las transformaciones de Laplace iguales coinciden en todos los puntos de continuidad para todos $t > 0$.

Distintas funciones discontinuas pueden tener la transformación de Laplace igual (se le ofrece al lector construir un ejemplo de tal función).

1. *Propiedad de linealidad.* Para cualesquiera constantes complejas α y β

$$\alpha f(t) + \beta g(t) \stackrel{?}{=} \alpha F(p) + \beta G(p)$$

(aquí y en todo lugar consideraremos $f(t) \stackrel{?}{=} F(p)$, $g(t) \stackrel{?}{=} G(p)$).

Hallar la representación de funciones:

$$517. 1+t. \quad 518. 2 \operatorname{sen} t - \cos t. \quad 519. t + \frac{1}{2} e^{-t}.$$

II. *Teorema de semejanza.* Para cualquiera constante $\alpha > 0$

$$f(\alpha t) \stackrel{?}{=} \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

Utilizando el teorema de semejanza, hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$520. f(t) = e^{at}. \quad 521. f(t) = \operatorname{sen} 4t.$$

$$522. a) f(t) = \cos \omega t; \quad b) f(t) = \operatorname{sh} 3t.$$

523. Sea $f(t) \stackrel{?}{=} F(p)$. Hallar la representación de la

función $f\left(\frac{t}{a}\right)$ ($a > 0$) directamente y mediante el teorema de semejanza.

Empleando los teoremas de linealidad y de semejanza, hallar representaciones de las funciones siguientes:

$$524. f(t) = \operatorname{sen}^2 t. \quad 525. f(t) = \operatorname{sen} mt \cos nt.$$

$$526. f(t) = \cos^3 t. \quad 527. f(t) = \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} nt.$$

$$528. f(t) = \operatorname{sen}^4 t. \quad 529. f(t) = \cos mt \cos nt.$$

III. Diferenciación del original. Si las funciones $f(t), f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$ son las funciones originales y $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, entonces

$$f'(t) \stackrel{*}{=} pF(p) - f(0),$$

$$f''(t) \stackrel{*}{=} p^2F(p) - pf(0) - f'(0),$$

.

$$f^{(n)}(t) \stackrel{*}{=} p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

donde bajo $f^{(k)}(0)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) se entiende $\lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$.

Ejemplo 3. Utilizando el teorema de la diferenciación del original, hallar la representación de la función $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$.

Solución. Sea $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$. Entonces

$$f'(t) \stackrel{*}{=} pF(p) - f(0).$$

Pero $f(0) = 0$ y $f'(t) = 2 \operatorname{sen} t \cos t = \operatorname{sen} 2t \stackrel{*}{=} \frac{2}{p^2+4}$. Por consiguiente, $\frac{2}{p^2+4} = pF(p)$, de donde

$$F(p) = \frac{2}{p(p^2+4)} \stackrel{*}{=} \operatorname{sen}^2 t.$$

Empleando el teorema de la diferenciación del original, hallar la representación de las funciones siguientes:

$$530. f(t) = \cos^3 t. \quad 531. f(t) = \operatorname{sen}^3 t.$$

$$532. f(t) = t \operatorname{sen} \omega t. \quad 533. f(t) = \cos^4 t.$$

$$534. f(t) = t \cos \omega t. \quad 535. f(t) = te^t.$$

IV. Diferenciación de representación. La diferenciación de representación se reduce a la multiplicación por $(-t)$ del original

$$F'(p) \stackrel{*}{=} -tf(t)$$

o, en general,

$$F^{(n)}(p) \stackrel{*}{=} (-t)^n f(t).$$

Ejemplo 4. Hallar la representación de la función $f(t) = t^2 e^t$.

Solución. Tenemos $e^t \stackrel{*}{=} \frac{1}{p-1}$. Según el teorema de la diferenciación de representación $\left(\frac{1}{p-1}\right) \stackrel{*}{=} -te^t$. De donde

$$\frac{1}{(p-1)^2} \stackrel{*}{=} te^t.$$

Luego

$$\left[\frac{1}{(p-1)^2} \right]' = -t(te^t) \quad \text{o} \quad \frac{2!}{(p-1)^3} = t^2 e^t.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$536. f(t) = t^2 \cos t. \quad 537. f(t) = t(e^t + \operatorname{ch} t).$$

$$538. f(t) = (t+1) \operatorname{sen} 2t. \quad 539. f(t) = t \operatorname{sh} 3t.$$

V. Integración del original. La integración del original se reduce a la división de la representación en p , es decir, si $f(t) = F(p)$, entonces

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p}.$$

Ejemplo 5. Hallar la representación de la función $\int_0^t e^\tau d\tau$.

Solución. Tenemos $e^t = \frac{1}{p-1}$. En virtud del teorema de

$$\text{integración del original } \int_0^t e^\tau d\tau = \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$540. f(t) = \int_0^t \operatorname{sen} \tau d\tau. \quad 541. f(t) = \int_0^t (\tau+1) \cos \omega \tau d\tau.$$

$$542. f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{sh} 2\tau d\tau. \quad 543. f(t) = \int_0^t \cos^3 \omega \tau d\tau.$$

$$544. f(t) = \int_0^t \operatorname{ch} \omega \tau d\tau. \quad 545. f(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau.$$

VI. Integración de representación. Si la integral $\int_p^\infty F(p) dp$ converge, entonces ella sirve de representación de la función $\frac{f(t)}{t}$:

$$\frac{f(t)}{t} = \int_p^\infty F(p) dp.$$

Ejemplo 6. Hallar la representación de la función $\frac{\sin t}{t}$.

Solución. Como se sabe, $\sin t = \frac{1}{p^2+1}$. Por lo tanto

$$\frac{\sin t}{t} = \int_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arccotg} p$$

(para las funciones multiformes $\ln z$, $\operatorname{Arctg} z$ etc., tomamos sus ramas principales, para las cuales $\ln 1 = 0$, $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$ etc.).

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

546. a) $\frac{e^t - 1}{t}$; b) $\frac{1 - e^{-t}}{t}$; c) $\frac{\sin^2 t}{t}$.

547. a) $\frac{1 - \cos t}{t}$; b) $\frac{\cos t - \cos 2t}{t}$.

548. a) $\frac{e^t - 1 - t}{t}$; b) $\frac{e^t - e^{-t}}{t}$.

Mediante el teorema de la integración de representación se calculan fácilmente ciertas integrales impropias.

Sea $f(t) = F(p)$ y se converge la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt. \text{ Entonces}$$

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(p) dp, \quad (3)$$

donde la integral del miembro segundo se puede calcular por el semieje positivo.

Ejemplo 7. Calcular la integral $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$.

Solución. Tenemos $\sin t = \frac{1}{p^2+1}$. En virtud de la fórmula (3)

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2+1} = \operatorname{arctg} z \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Calcular las integrales:

549. $\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt. \quad (a > 0, b > 0).$

550. $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} \sin at}{t} dt. \quad (\alpha > 0, a > 0).$

551. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t} \operatorname{sen} mt dt \quad (\alpha > 0, \beta > 0, m > 0).$

552. $\int_0^{\infty} \frac{Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + De^{-\delta t}}{t} dt$

$$(A + B + C + D = 0, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0).$$

553. $\int_0^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt \quad (a > 0, b > 0).$

554. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} at \operatorname{sen} bt}{t} dt \quad (a > 0, b > 0).$

VII. Teorema del desplazamiento. Si $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, entonces para cualquier complejo p_0

$$e^{p_0 t} f(t) \stackrel{*}{=} F(p - p_0). \quad (4)$$

Ejemplo 8. Hallar la representación de la función $f(t) = e^{-t} \cos 2t$.

Solución. Tenemos $\cos 2t \stackrel{*}{=} \frac{p}{p^2 + 4}$. Según el teorema del desplazamiento ($p_0 = -1$)

$$e^{-t} \cos 2t \stackrel{*}{=} \frac{p+1}{(p+1)^2 + 4}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

555. a) $e^{2t} \operatorname{sen} t$; b) $e^t \cos nt$.

556. $e^{-t} \cdot t^3$. 557. $e^t \operatorname{sh} t$. 558. $te^t \cos t$.

559. $e^{3t} \operatorname{sen}^2 t$. 560. $e^{-\alpha t} \cos^2 \beta t$.

VIII. Teorema de retardo. Si $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, entonces para cualquier positiva τ

$$f(t - \tau) \stackrel{*}{=} e^{-p\tau} F(p). \quad (5)$$

El teorema de retardo es muy cómodo utilizarlo para determinar las representaciones de funciones que en distintas partes se prefijan por distintas expresiones analíticas.

Ejemplo 9. Hallar la representación de la función

$$f(t - 1) = (t - 1)^2 \eta(t - 1).$$

Solución. Para la función $f(t) = t^2 \eta(t)$ tenemos

$$f(t) \stackrel{*}{=} \frac{2}{p^3}.$$

De acuerdo con el teorema de retardo para la función $(t - 1)^2 \eta(t - 1)$ tenemos

$$(t - 1)^2 \eta(t - 1) \stackrel{*}{=} e^{-p} \frac{2}{p^3},$$

Es esencial aquí que se busca la representación de la función $(t - 1)^2 \eta(t - 1)$, es decir, de la función que es igual a cero para $t < 1$. Si examináramos la función $f_1(t) = (t - 1)^2 \eta(t)$, entonces para ella tendríamos $f_1(t) = (t^2 - 2t + 1) \eta(t)$ y debido a la propiedad de linealidad

$$(t - 1)^2 \eta(t) \doteq \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Hallar la representación de funciones:

561. $\sin(t - b) \eta(t - b)$.

562. $\cos^2(t - b) \eta(t - b)$.

563. $e^{t-2} \eta(t - 2)$.

Ejemplo 10. Hallar la representación $F(p)$ de la función $f(t)$ que está representada por la gráfica siguiente (fig. 34):

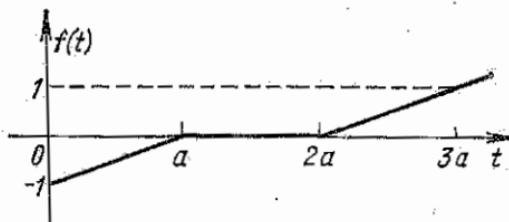


Fig. 34

Solución. Hallaremos la expresión analítica para $f(t)$.

a) Para $t \in (0, a)$ la función $f(t)$ se da por la fórmula

$$f(t) = \frac{t-a}{a} \eta(t). \quad (6)$$

b) Para $t \in (a, 2a)$ tenemos $f(t) = 0$.

c) Para $t \geq 2a$ obtenemos

$$f(t) = \frac{1-2a}{a} \eta(t-2a). \quad (7)$$

Suponiendo que la función $f(t)$ es dada por la fórmula (6) para todos $t \geq 0$, aclaremos que función $\psi_1(t)$ es necesario añadir a ella para recibir la función $f(t) = 0$ para todas $t \geq a$. Exigiendo que para $t \geq a$

$$\frac{t-a}{a} + \psi_1(t) = 0,$$

hallémos

$$\psi_1(t) = -\frac{t-a}{a} \eta(t-a).$$

Más adelante hallamos tal función $\psi_2(t)$, para que su suma con $f(t) = 0$ tener la función $\frac{t-2a}{a}$ para todas $t \geq 2a$. Lo que da

$$0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a},$$

de donde

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a).$$

De tal manera, para todos $t \geq 0$ obtenemos

$$f(t) = \frac{t-a}{a} \eta(t) - \frac{t-a}{a} \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a).$$

Utilizando la propiedad de linealidad y el teorema de retardo,

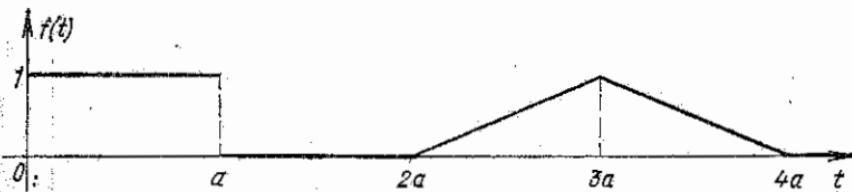


Fig. 35

hallamos la representación buscada $F(p)$ de la función dada $f(t)$:

$$F(p) = \frac{1}{ap^2} - \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2} e^{-ap} - \frac{1}{ap^2} e^{-2ap},$$

Ejemplo 11. Hallar la representación $F(p)$ de la función $f(t)$ que se da por la gráfica siguiente (fig. 35):

Solución. Hallemos la expresión analítica para la función $f(t)$

a) $f(t) = 1$ para $t \in (0, a)$,

b) $f(t) = 0$ para $t \in (a, 2a)$,

c) $f(t) = \frac{t-2a}{a}$ para $t \in (2a, 3a)$,

d) $f(t) = 1 - \frac{t-3a}{a}$ para $t \in (3a, 4a)$,

e) $f(t) = 0$ para $t \geq 4a$.

Para $t \in (0, a)$ tenemos $f(t) = 1$.

Luego hallemos la función $\psi_1(t)$ tal que para $t \geq a$ se cumple la relación $1 + \psi_1(t) = 0$, de donde $\psi_1(t) = -1 \cdot \eta(t-a)$.

Ahora hallamos la función $\psi_2(t)$ tal que para todas $t > 2a$ sea válida la igualdad $0 + \psi_2(t) = \frac{t-2a}{a}$. De aquí

$$\psi_2(t) = \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a).$$

Análogamente hallamos las funciones

$$\psi_3(t) = -2 \frac{t-3a}{a} \eta(t-3a), \quad \psi_4(t) = \frac{t-4a}{a} \eta(t-4a).$$

De ese modo,

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-a) + \frac{t-2a}{a} \eta(t-2a) - \\ - 2 \frac{t-3a}{a} \eta(t-3a) + \frac{t-4a}{a} \eta(t-4a).$$

A base de la propiedad de linealidad y el teorema de retardo, obtendremos la representación

$$F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-2ap} - \frac{2}{ap^2} e^{-3ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-4ap}.$$

Ejemplo 12. Hallar la representación de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < 1, \\ t^2 & \text{para } 1 < t < 2, \\ 0 & \text{para } t > 2. \end{cases}$$

Solución. Expresemos $f(t)$ a través de potencias de diferencias $t-1$ y $t-2$. Tenemos

$$t^2 = [(t-1) + 1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1, \\ t^2 = [(t-2) + 2]^2 = (t-2)^2 + 4(t-2) + 4.$$

Por consiguiente, la función dada $f(t)$ la escribiremos en forma de

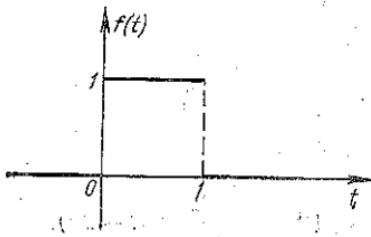
$$f(t) = [(t-1)^2 + 2(t-1) + 1] \eta(t-1) - [(t-2)^2 + \\ + 4(t-2) + 4] \eta(t-2).$$

Pasando a las representaciones, obtendremos

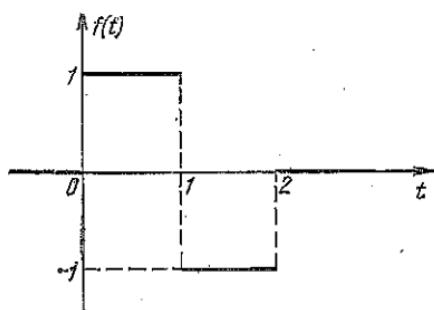
$$f(t) \rightleftharpoons F(p) = \left(\frac{2}{p^3} + \frac{2}{p^2} + \frac{1}{p} \right) e^{-p} - \left(\frac{2}{p^3} + \frac{4}{p^2} + \frac{4}{p} \right) e^{-2p}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes prefijas gráficamente:

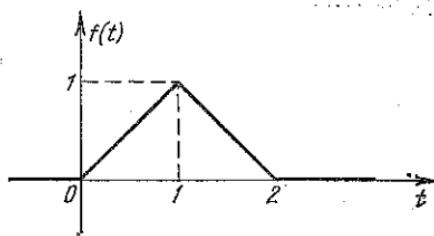
564.



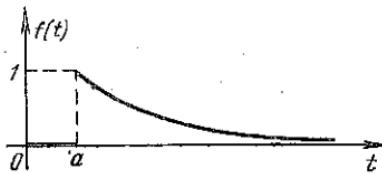
565.



566.

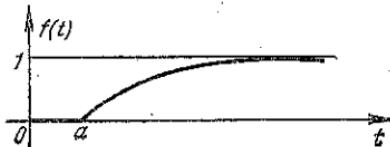


567.



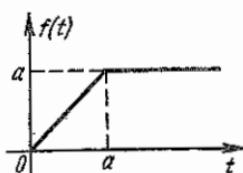
$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq a, \\ e^{-b(t-a)} & \text{para } t > a. \end{cases}$$

568.

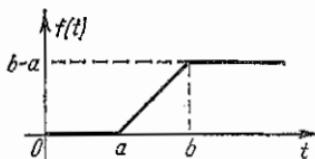


$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t \leq a, \\ 1 - e^{-b(t-a)} & \text{para } t > a. \end{cases}$$

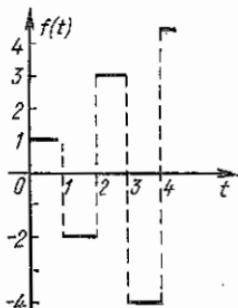
569.



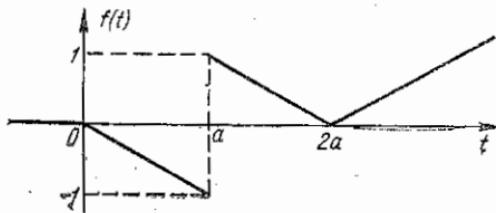
570.



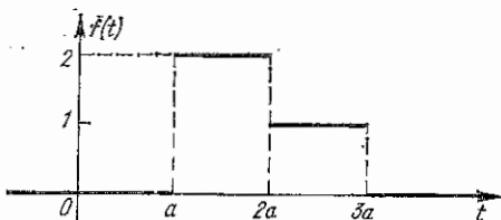
571.



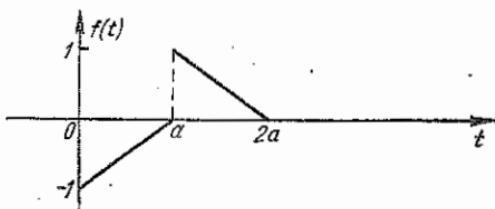
572.



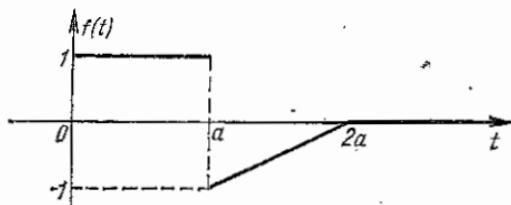
573.



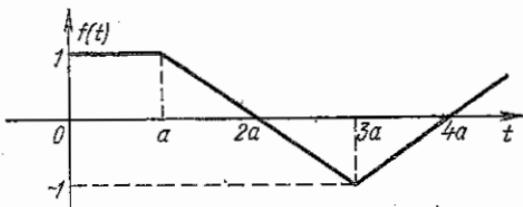
574.



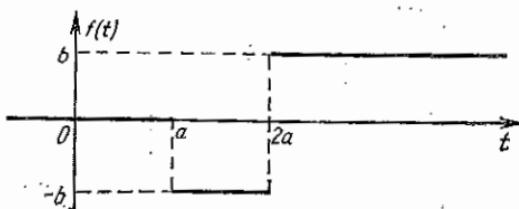
575.



576.



577.



578. Suponemos que la función $f(t)$ periódica con el período T es la función original. Mostrar que su representación según Laplace $F(p)$ se expresa mediante la fórmula

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt$$

y está determinada en el semiplano $\operatorname{Re} p = s > 0$.

Ejemplo 13. Hallar la representación de la función periódica $f(t)$ que es dada gráficamente (fig. 36).

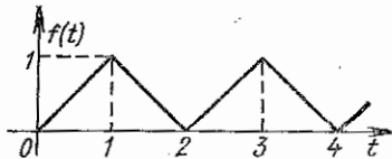


Fig. 36

Solución. La representación, la hallamos por la fórmula

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t) dt, \quad (8)$$

donde $f(t)$ es la función periódica $\operatorname{Re} p = s > 0$, con el período T . Sustituyendo en (8) la expresión

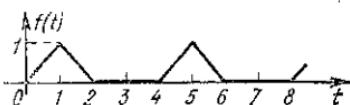
$$f(t) = \begin{cases} t & \text{para } 0 \leq t \leq 1, \\ 2-t & \text{para } 1 < t \leq 2, \end{cases}$$

teniendo en cuenta que $T = 2$, obtenemos

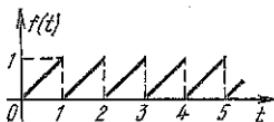
$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-2p}} \left[\int_0^1 te^{-pt} dt + \int_1^2 (2-t)e^{-pt} dt \right] = \frac{1 - e^{-p}}{p^2(1 + e^{-p})}.$$

Hallar la representación de las funciones periódicas siguientes:

579.

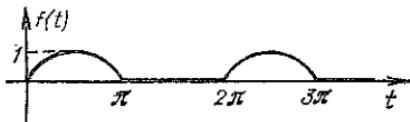


580.



581. $f(t) = |\sin t|$. 582. $f(t) = |\cos t|$.

583.



$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{para } 2k\pi < t < 2(k+1)\pi, \\ 0 & \text{para } (2k+1)\pi < t < (2k+2)\pi \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

584. Mostrar que si $f(t) \stackrel{*}{=} F(p)$, entonces

$$f(t) \eta(t-a) \stackrel{*}{=} F(p) - \int_0^a f(t) e^{-pt} dt.$$

En la práctica del cálculo operacional a veces nos encontramos con así llamadas funciones generalizadas*) que juegan un papel importante en la matemática contemporánea.

Uno de los representantes de funciones generalizadas es la función de Dirac $\delta(t)$ que se determina así:

$$1) \delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \neq 0, \\ \infty, & \text{si } t = 0, \end{cases} \quad 2) \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t) f(dt) = f(0),$$

donde (α, β) es cualquier intervalo que contiene el punto $t = 0$, mientras que $f(t)$ es la función continua en el punto $t = 0$.

*) La definición más exacta de las funciones generalizadas se puede verla en el libro de I. M. Gelfand y G. E. Shilov: Funciones generalizadas y operaciones con ellos. 1959, Fismatgis. Moscú.

Análogamente se define la función $\delta(t - \tau)$ concentrada en el punto $t = \tau$.

En la teoría de las funciones generalizadas $\delta(t)$ se considera como la derivada de función de unidad

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

$$\eta'(t) = \delta(t). \quad (9)$$

Análogamente, para cualquier τ

$$\eta'(t - \tau) = \delta(t - \tau).$$

Observemos que la derivada de la función $\eta(t)$ en el sentido común es igual a cero para todas $t \neq 0$ y para $t = 0$ no existe.

Son válidas las fórmulas

$$\left. \begin{aligned} \delta(t) &\stackrel{def}{=} 1; \\ \delta^{(m)}(t) &\stackrel{def}{=} p^m, \text{ } m \text{ es el número entero } \geq 0; \\ \delta(t - \tau) &\stackrel{def}{=} e^{-p\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Examinemos la función $f(t)$ que tiene la discontinuidad de primer género en los puntos t_k ($k = 1, 2, \dots, n$) con saltos

$$h_k = f(t_k + 0) - f(t_k - 0) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dado que $f(t)$ es continuamente diferenciable en los intervalos (t_k, t_{k+1}) ($k = 1, 2, \dots, n-1$) y para $t < t_1$ y $t > t_n$. Entonces

$$f'(t) = f'_1(t) + \sum_{k=1}^n h_k \delta(t - t_k), \quad (11)$$

donde $f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n h_k \eta(t - t_k)$ es la función «cerrada». De ese modo, la derivada de la función discontinua $f(t)$ se compone de su derivada ordinaria $f'_1(t)$ (en los intervalos de suavidad $f(t)$) y de suma de δ funciones en los puntos de discontinuidad con los saltos respectivos en calidad de coeficientes. Esta regla es muy importante para la aplicación correcta de teoremas de cálculo operacional para las funciones discontinuas.

Examinemos, verbigracia, la función $f(t)$ que se determina del modo siguiente:

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Aplicando la fórmula (11) hallamos

$$f'(t) = \delta(t) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2),$$

de donde conforme a las relaciones (10)

$$f'(t) \stackrel{def}{=} 1 - 2e^{-p} + e^{-2p}.$$

A continuación

$$f(t) \stackrel{def}{=} \frac{1}{p} - \frac{2}{p} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-2p},$$

lo que da de nuevo

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Los razonamientos no estrictos sin tomar en consideración la fórmula (11) conducirían a lo siguiente. La derivada $f'(t)$ en el sentido común es igual a cero en todas partes menos los puntos $t = 0, t = 1, t = 2$, donde ella no existe. Pero en este caso la integral de Laplace de $f'(t)$ tendría que ser también igual a cero, de donde y la representación $f(t)$ resulta ser igual a cero que claro no es correcto.

585. Resolver el problema N° 580, hallando primeramente la representación de la derivada de la función $f(t)$ y después la representación de la misma función $f(t)$.

586. Supongamos que a y b son dos números positivos y sea $f(t) \equiv F(p)$.

Mostrar que la función

$$g(t) = \begin{cases} f(at - b), & t > \frac{b}{a}, \\ 0, & t < \frac{b}{a}, \end{cases}$$

tiene la representación $\frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}p} F\left(\frac{p}{a}\right)$ (el teorema conjunto de semejanza y de retardo).

587. Hallar las representaciones de funciones:

$$a) f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right), & t > \frac{\pi}{8}, \\ 0, & t < \frac{\pi}{8}; \end{cases}$$

$$b) f(t) = \begin{cases} \cos\left(3t - \frac{\pi}{6}\right), & t > \frac{\pi}{18}, \\ 0, & t < \frac{\pi}{18}; \end{cases}$$

$$c) f(t) = \begin{cases} \operatorname{sh}(3t - 6), & t > 2, \\ 0, & t < 2. \end{cases}$$

588. Hallar la representación de la función de distribución de masas m_k en los puntos $t = k$

$$f(t) = \sum_{k=0}^n m_k \delta(t - k).$$

IX. Teorema de multiplicación (teorema de convolución). Producto de dos representaciones $F(p)$ y $\Phi(p)$ es la representación también,

al mismo tiempo

$$F(p) \Phi(p) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau. \quad (12)$$

La integral en el miembro segundo (12) se llama *la convolución* de las funciones $f(t)$ y $\varphi(t)$ y se denomina por el símbolo $f(t)^* \varphi(t)$.

Ejemplo 14. Hallar la representación de la función

$$\psi(t) = \int_0^t (t-\tau) e^\tau d\tau.$$

Solución. La función $\psi(t)$ es la convolución de funciones $f(t) = t$ y $\varphi(t) = e^t$. Según el teorema de multiplicación

$$\psi(t) = \Psi(p) = F(p) \Phi(p) = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{p-1} = \frac{1}{p^3(p-1)}.$$

Ejemplo 15. Sea $F_1(p) = \frac{1}{p^x}$, $F_2(p) = \frac{1}{p^y}$ ($x > 0$, $y > 0$ son reales). Entonces

$$f_1(t) = \frac{t^{x-1}}{\Gamma(x)}, \quad f_2(t) = \frac{t^{y-1}}{\Gamma(y)}.$$

De acuerdo con el teorema de multiplicación

$$F_1(p) F_2(p) = \frac{1}{p^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^t (t-\tau)^{y-1} \tau^{x-1} d\tau. \quad (13)$$

De otra parte

$$F_1(p) F_2(p) = \frac{1}{p^{x+y}} = \frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)}. \quad (14)$$

De (13) y (14) tenemos

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)} = \frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^t (t-\tau)^{y-1} \tau^{x-1} d\tau.$$

Suponiendo $\tau = \lambda t$, de la última igualdad obtenemos

$$\frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x+y)} = \frac{t^{x+y-1}}{\Gamma(x)\Gamma(y)} \int_0^1 \lambda^{x-1} (1-\lambda)^{y-1} d\lambda.$$

La integral en el miembro segundo es *B* función de Euler $B(x, y)$. Ahora surge la fórmula formidable que conecta *B* y Γ funciones de Euler

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Convolución reiterada. Supongamos que tenemos tres funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$. Entonces

$$F_1(p) F(p) \doteqdot \int_0^t f_2(\tau_1) f_1(t - \tau_1) d\tau_1.$$

A continuación

$$\begin{aligned} (F_1(p) \cdot F_2(p)) \cdot F_3(p) &\doteqdot \int_0^t \left\{ \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) f_1(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1 \right\} f_3(\tau_2) d\tau_2 = \\ &= \int_0^t f_3(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) f_1(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1. \end{aligned}$$

Sea

$$F_1(p) = \frac{1}{p} \doteqdot \eta(t).$$

Entonces

$$\frac{F_2(p) F_3(p)}{p} \doteqdot \int_0^t f_3(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{t-\tau_2} f_2(\tau_1) \eta(t - \tau_1 - \tau_2) d\tau_1.$$

De la definición de la función $\eta(t)$ se deduce que efectivamente la integración se realiza por el dominio $t > \tau_1 + \tau_2$, donde $\eta(t - \tau_1 - \tau_2) = 1$. De ese modo,

$$\frac{F_2(p) F_3(p)}{p} \doteqdot \iint_{\tau_1 + \tau_2 < t} f_2(\tau_1) f_3(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Utilicemos este resultado para hallar el volumen de la esfera n -dimensional. Introduzcamos el sistema rectangular de coordenadas cartesianas x_1, x_2, \dots, x_n en el espacio n -dimensional.

El volumen $V_n(R)$ de la hiperesfera del radio R se determina por la igualdad

$$V_n(R) = \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

En virtud de la simetría de la esfera respecto a su centro

$$V_n(R) = 2^n \int_0^R dx_1 \int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2}} dx_2 \dots \int_0^{\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}} dx_n.$$

Haremos la sustitución $x_k = \sqrt{\tau_k}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Entonces

$$V_n(R) = \int_{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n \leq R^2} \frac{d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n}{\sqrt{\tau_1} \sqrt{\tau_2} \dots \sqrt{\tau_n}}.$$

Esto es la convolución reiterada de n funciones idénticas

$$f_k(t) = \frac{\eta(t)}{\sqrt{t}} \quad (k=1, 2, \dots, n), \text{ donde } t=R^2.$$

La representación de cada una de estas funciones es

$$f_k(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}} \quad (\text{véase el problema 515}).$$

Por lo tanto

$$V_n(\sqrt{t}) = \frac{(\sqrt{\pi})^n}{p^{1+n/2}} = \frac{\pi^{n/2}}{p^{1+n/2}},$$

de donde

$$V_n(\sqrt{t}) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} t^{n/2} = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} = V_n(R).$$

Así,

$$V_n(R) = \frac{\pi^{n/2} R^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}.$$

En particular, para $n=2$ hallamos

$$V_2(R) = \frac{\pi R^2}{\Gamma(2)} = \pi R^2.$$

Hallar la representación de las funciones siguientes:

$$589. \int_0^t e^{t-\tau} \operatorname{sen} \tau d\tau; \quad 590. \int_0^t \cos(t-\tau) e^{2\tau} d\tau.$$

$$591. \int_0^t (t-\tau)^2 \operatorname{ch} \tau d\tau. \quad 592. \int_0^t (t-\tau)^n f(\tau) d\tau.$$

$$593. \int_0^t e^{2(\tau-t)} \tau^2 d\tau.$$

Primer teorema del desarrollo. Si $F(p)$ es la función analítica en el entorno del punto infinito y es igual en él al cero y si el desarrollo de Laurent $F(p)$ en el entorno del punto infinito tiene la fórmula $F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$, entonces la función

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1},$$

sirve del original $F(p)$, al mismo tiempo esta serie converge para todas t .

Ejemplo 16. Examinemos la función $F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$. Ella es analítica en el entorno del punto infinito y su desarrollo de Laurent en el entorno de este punto tiene la forma

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{p^2 \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \frac{1}{p \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{p^{2n}} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} = \cos t,$$

lo que coincide con el resultado conocido.

Ejemplo 17. Hallar la representación de la función $f(t) = J_0(t)$, donde $J_0(t)$ es la función del Bessel del orden nulo.

Solución. Es conocido que ([20])

$$J_0(t) = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h \frac{t^{2h}}{(k!)^2 2^{2h}}.$$

Examinemos la función $F(p) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$. Esta función es uniforme en el dominio $|p| > 1$, es analítica en el entorno del punto infinito (infinitamente alejado) y se anula en este punto. Hallemos su desarrollo de Laurent en el entorno del punto infinitamente alejado según la fórmula del desarrollo del binomio:

$$F(p) = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h (2h)!}{(k!)^2 2^{2h} p^{2h+1}}.$$

Conforme al primer teorema del desarrollo el original para $F(p)$ será la función

$$f(t) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h t^{2h}}{(k!)^2 2^{2h}} = J_0(t).$$

De tal manera

$$E_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

Ejemplo 18. Deducir la relación recurrente

$$J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t).$$

Solución. Es conocido (véase el problema 596) que

$$J_n(t) = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Utilizando el teorema de la integración de representación, obtenemos

$$\frac{J_n(t)}{t} = \int_p^\infty \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}} dp.$$

Suponemos que $\sqrt{p^2+1}-p=v$. Entonces

$$\int \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}} dp = - \int v^{n-1} dv = -\frac{v^n}{n} + c.$$

Así que

$$\frac{J_n(t)}{t} = -\frac{1}{n} [(\sqrt{p^2+1}-p)^n] \Big|_{p=p}^{p=\infty} = \frac{1}{n} (\sqrt{p^2+1}-p)^n. \quad (15)$$

De otra parte, de las expresiones

$$J_{n-1}(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1},$$

$$J_{n+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1}-p)^{n+1}$$

hallamos

$$J_{n-1}(t) + J_{n+1}(t) = 2(\sqrt{p^2+1}-p)^n. \quad (16)$$

De las relaciones (15) y (16) demostramos

$$J_{n-1} = \frac{2n}{t} J_n(t) + J_{n+1}(t) = 0.$$

594. Mostrar que

$$J'_n(t) = \frac{J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t)}{2} \quad (n=1, 2, \dots).$$

595. Hallar la representación de la función $f(t) = J_1(t)$.

596. Mostrar que

$$J_n(t) = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

597. Mostrar que

$$t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p^{n+1}} e^{-1/p} (n = 0, 1, 2, \dots).$$

598. La función de Bessel del primer género del argumento puramente imaginario $I_n(t)$ se expresa a través de la función de Bessel $J_n(t)$ mediante la relación $I_n(t) = (i)^{-n} J_n(it)$.

Mostrar que

$$I_n(t) \doteqdot \frac{(p - \sqrt{p^2 - 1})^n}{\sqrt{p^2 - 1}}.$$

599. Los polinomios de Laguerre se determinan por la fórmula

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Mostrar que

$$L_n(t) \doteqdot \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

600. Hallar la representación de la función $f(t) = \ln t$.

601. Mostrar que $\text{erf}(\sqrt{t}) \doteqdot \frac{1}{p\sqrt{p+1}}$, donde

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-u^2} du.$$

Sea necesario hallar la suma de la serie funcional $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)$, donde $\varphi_n(t)$ son las funciones-originales.

Al sustituir las funciones $\varphi_n(t)$ por sus representaciones, llegamos a una serie que se compone de las representaciones, sumar la cual es, a veces, más simple que la serie inicial. Pasando de la suma hallada a la función-original, hallamos la suma de la serie dada.

Ejemplo 19. Para los polinomios de Laguerre $L_n(t)$ tenemos

$$L_n(t) \doteqdot \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n.$$

Por eso

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(t) = \frac{1}{p} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{p} \right) + \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 - \dots \right] = \\ = \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 + 1 - \frac{1}{p}} = \frac{1}{2p-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}.$$

De ese modo

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n(t) = \frac{1}{2} e^{\frac{t}{2}}.$$

602. Mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_{2n}(2t) = \frac{1}{2} e^t (\sin t + \cos t).$$

603. Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{n!} = e J_0(2\sqrt{t})$

604. Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(t) = \frac{1}{2} \sin t$.

605. Mostrar que $J_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) = 1$, donde $J_k(t)$ es la función de Bessel del orden k .

606. Mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(t)}{2^{n+1}} = e^{-t}$, $0 < t < +\infty$.

Ejemplo 20. Calcular la integral

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos tu}{a^2 + u^2} du, \quad t > 0.$$

Solución. Para $\cos tu$ que consideramos como la función del argumento t mediante el teorema de semejanza tenemos

$$\cos tu = \frac{p}{p^2 + u^2}.$$

Por tanto

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{p \, du}{(p^2 + u^2)(a^2 + u^2)}.$$

La función subintegral como la función del argumento u admite la representación

$$\frac{p}{(p^2 + u^2)(a^2 + u^2)} = -\frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \frac{1}{p^2 + u^2} + \frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \frac{1}{a^2 + u^2}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f(t) &= \left(-\frac{1}{p^2 - a^2} \operatorname{arctg} \frac{u}{p} + \frac{p}{p^2 - a^2} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} \right) \Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \\ &= \frac{\pi}{2a} \frac{1}{p+a}. \end{aligned}$$

Pasando a las funciones originales, obtenemos definitivamente

$$f(t) = \frac{\pi}{2a} e^{-at}.$$

Calcular las integrales:

$$607. \text{ a) } f(t) = \int_0^{\infty} \frac{u \operatorname{sen} tu}{1+u^2} du, \quad t > 0;$$

$$\text{b) } f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} tu \cdot \cos u}{u} du, \quad t > 0.$$

608. Hallar los valores de la función $f(t)$ y sus dos primeras derivadas para $t \rightarrow +0$, si $f(t) = \frac{p+1}{p(p^2+p+1)}$
y $f'(t)$, $f''(t)$, $f'''(t)$ son los originales.

Determinación del original por la representación. Para hallar el original $f(t)$ por medio de la representación conocida $F(p)$ se emplean los métodos siguientes:

1. Si $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ es la fracción propia racional, entonces la descomponen en la suma de fracciones simples y hallan los originales para cada fracción simple, utilizando las propiedades I-IX de la transformación de Laplace.

Ejemplo 21. Hallar el original para la función $F(p) =$

$$=\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}.$$

Solución. Desarrollamos $F(p)$ en suma de fracciones simples:

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Hallando los coeficientes A, B, C, D obtenemos

$$F(p) = -\frac{1}{4} \frac{1}{p} + \frac{1}{5} \frac{1}{p-1} + \frac{1}{20} \frac{p}{p^2+4} - \frac{1}{5} \frac{1}{p^2+4}. \quad (17)$$

Los originales para cada fracción simple en el miembro segundo (17) se hallan fácilmente. Utilizando la propiedad de linealidad, hallamos

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t.$$

$$\text{Ejemplo 22. } F(p) = \frac{1}{(p^2+1)^3}. \text{ Hallar el original } f(t).$$

Solución. En el caso dado ya $F(p)$ es una fracción simple. Para hallar el original ampliquemos el teorema de multiplicación y lo que

$$\frac{1}{p^2+1} \stackrel{?}{=} \sin t.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \stackrel{?}{=} \\ &\stackrel{?}{=} \int_0^t \sin(t-\tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos t - \cos(2\tau-t)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{4} \sin(2t-t) \Big|_{\tau=0}^{t=t} = \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} \sin t. \end{aligned}$$

$$\text{Ejemplo 23. } F(p) = \frac{e^{-p}}{p+1} \text{ Hallar el original } f(t).$$

Solución. La presencia del factor e^{-p} indica en la necesidad de aplicación del teorema de retardo. Aquí $\tau=1$, $\frac{1}{p+1} \stackrel{?}{=} e^{\tau}$, por lo tanto

$$\frac{e^{-p}}{p+1} \stackrel{?}{=} e^{-(t-1)} \eta(t-1).$$

II. Con ayuda del segundo teorema del desarrollo que afirma que para las condiciones determinadas superpuestas en $F(p)$ la función

$$f(t) = \sum_{(p_k)} \text{res}[F(p) e^{pt}]$$

sirve de original para $F(p)$, donde la suma de residuos se toma por todos los puntos singulares p_k de la función $F(p)$.

En particular, si $F(p) = \frac{Q(p)}{R(p)}$ es la fracción racional propia, entonces la función

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \{F(p)e^{pt}(p-p_k)^{n_k}\}, \quad (18)$$

sirve de su original, donde p_k son los polos de $F(p)$ de multiplicidad n_k y la suma en (18) se toma por todos los polos de $F(p)$.

Si todos los polos de $F(p)$ son simples, entonces la fórmula (18) se simplifica y obtiene la forma

$$f(t) = \sum_{k=1}^l \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Ejemplo 24. $F(p) = \frac{p}{(p^2 - 1)^2}$. Hallar el original $f(t)$.

Solución. La función $F(p)$ tiene los polos $p_1 = 1$, $p_2 = -1$ cada polo es de segundo orden. Mediante la fórmula (18)

$$f(t) = \lim_{p \rightarrow 1} \left[\frac{pe^{pt}}{(p+1)^2} \right]'_p + \lim_{p \rightarrow -1} \left[\frac{pe^{pt}}{(p-1)^2} \right]'_p = \frac{1}{2} t \sinh t.$$

Para las representaciones dadas hallar originales y construir sus gráficas:

$$609. F(p) = \frac{2e^{-p}}{p^3}. \quad 610. F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^3}.$$

$$611. F(p) = \frac{e^{-2p}}{p-1}. \quad 612. F(p) = \frac{e^{-3p}}{p+3}.$$

Hallar los originales por la representación dada:

$$613. F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}. \quad 614. F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 3}.$$

$$615. F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}. \quad 616. F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}.$$

$$617. F(p) = \frac{1}{p+2p^2+p^3}. \quad 618. F(p) = \frac{1}{7-p+p^2}.$$

$$619. F(p) = \frac{2p^8+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}.$$

$$620. F(p) = \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

$$621. F(p) = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}.$$

$$622. F(p) = \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n)}.$$

$$623. F(p) = \frac{1}{p^4+2p^3+3p^2+2p+1}.$$

$$624. F(p) = \frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}.$$

$$625. F(p) = \frac{p}{p^3+1}. \quad 626. F(p) = \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}.$$

$$627. F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}.$$

$$628. F(p) = \frac{p^2+2p-4}{p^3-2p^2+2p-1}. \quad 629. F(p) = \frac{3p^2}{(p^3-1)^2}.$$

$$630. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-2p+5} + \frac{pe^{-2p}}{p^2+9}.$$

$$631. F(p) = \frac{e^{-3p}}{(p+1)^2}. \quad 632. F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p-1)}.$$

$$633. F(p) = \frac{1}{p^2+1}(e^{-2p} + 2e^{-3p} + 3e^{-4p}).$$

$$634. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2-1} + \frac{pe^{-2p}}{p^3-4}.$$

$$635. F(p) = \frac{e^{-p/2}}{p(p+1)(p^2+4)}.$$

$$636. F(p) = \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{2e^{-2p}}{p^3} + \frac{6e^{-3p}}{p^4}.$$

$$637. F(p) = \frac{e^{-p/8}}{p(p^2+1)}.$$

Teorema de Efros. Sea $f(t) = F(p)$ y sea $\Phi(p)$ y $q(p)$ las funciones analíticas tales que

$$\Phi(p) e^{-\tau q(p)} = \varphi(t, \tau).$$

Entonces

$$F[q(p)] \Phi(p) = \int_0^\infty f(\tau) \varphi(t, \tau) d\tau.$$

En particular, si $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $q(p) = \sqrt{p}$, entonces

$$\varphi(t, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\tau^2/4t}.$$

Por eso, si es sabido que $F(p) = f(t)$, entonces mediante el teorema de Efros hallamos el original para: $\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$:

$$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\tau^2/4t} d\tau. \quad (19)$$

Mediante el teorema de Efros hallar los originales de las funciones siguientes (a es el número real):

$$638. F(p) = \frac{e^{-\sqrt{px}/a}}{p}. \quad 639. F(p) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}}.$$

$$640. F(p) = \frac{e^{-\alpha} \sqrt{p}}{p^2}.$$

$$641. F(p) = \frac{e^{-\sqrt{p}x/a}}{\sqrt{p} \left(\frac{\sqrt{p}}{a} + h \right)}.$$

$$642. F(p) = \frac{e^{-\alpha} \sqrt{p}}{p(\sqrt{p} + a)}.$$

Utilizando el teorema de Efros, calcular las integrales siguientes:

$$643. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \operatorname{ch} \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

$$644. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \cos \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

$$645. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

$$646. I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \tau \operatorname{sen} \tau e^{-\tau^2/4t} d\tau.$$

§ 15. Solución del problema de Cauchy para las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de coeficientes constantes

Dado que tenemos la ecuación diferencial (para la simplicidad, del segundo orden)

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), \quad (1)$$

donde $a_0, a_1, a_2 = \text{const}$, $a_0 \neq 0$; $f(t)$ es la función original.

Vamos a buscar la solución de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1. \quad (2)$$

Sea $x(t) \rightleftharpoons X(p)$, $f(t) \rightleftharpoons F(p)$. Aplicando a los dos miembros (1) la transformación de Laplace y utilizando el teorema de la diferenciación del original y la propiedad de linealidad de la transformación de Laplace en vez de la ecuación diferencial (1) con las condiciones iniciales (2) obtendremos la ecuación operatoria

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) - (a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_0) = F(p). \quad (3)$$

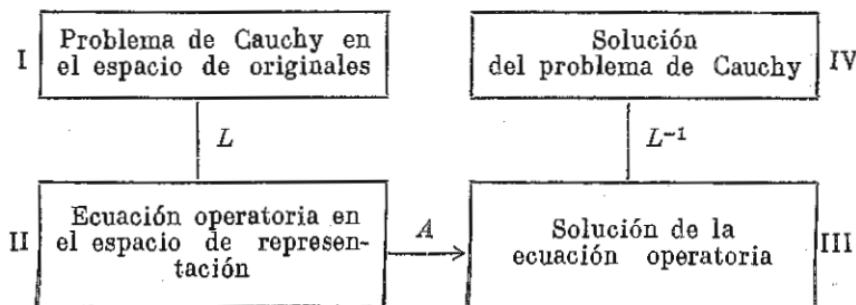
De (3) hallamos

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0px_0 + a_0x_1 + a_1x_0}{a_0p^3 + a_1p + a_2}.$$

Esto es así llamada la solución operatoria. Hallando mediante $X(p)$ el original $x(t)$, al mismo tiempo hallamos la función $x(t)$, es decir, la solución del problema de Cauchy (1) — (2).

El caso general de la solución del problema de Cauchy para la ecuación diferencial del orden n en general no se distingue del caso $n = 2$.

Esquema de solución del problema de Cauchy mediante la transformación de Laplace



Aquí L significa la aplicación de la transformación de Laplace a la I, A es la solución de la ecuación operatoria II, L^{-1} es la aplicación de la transformación inversa de Laplace a la III.

Ejemplo 1. Resolver el problema de Cauchy

$$x'' + x = 2 \cos t; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -1.$$

Solución.

$$x(t) \stackrel{def}{=} X(p), \quad x'(t) \stackrel{def}{=} pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \stackrel{def}{=} p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) + 1,$$

$$\cos t \stackrel{def}{=} \frac{p}{p^2+1},$$

así que la ecuación operatoria obtiene la forma

$$p^2X(p) + 1 + X(p) = \frac{2p}{p^2+1};$$

de aquí

$$X(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2} - \frac{1}{p^2+1}.$$

Hallamos el original para $X(p)$. El original para la función $\frac{1}{p^2+1}$:

$$\frac{1}{p^2+1} \stackrel{def}{=} \operatorname{sen} t.$$

Para hallar el original para la función $\frac{2p}{(p^2+1)^2}$ haremos uso del teorema de la diferenciación de representación (véase § 14) verbi-gracia:

$$\frac{2p}{(p^2+1)^2} = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'_p \doteq t \operatorname{sen} t.$$

Por consiguiente, $X(p) \doteq t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t = (t-1) \operatorname{sen} t$.

Pués, $x(t) = (t-1) \operatorname{sen} t$.

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales para las condiciones iniciales dadas:

647. $x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$
648. $x' - x = 1, \quad x(0) = -1.$
649. $x' + 2x = \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0.$
650. $x'' = 1, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1.$
651. $x'' + x' = 1, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1.$
652. $x'' + x = 0, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$
653. $x'' + 3x' = e^t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1.$
654. $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
655. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1.$
656. $x'' + x' = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
657. $x'' + 2x' = t \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 0.$
658. $x'' + 2x' + x = \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1.$
659. $x''' - x'' = \operatorname{sen} t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$
660. $x''' + x' = t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1; x''(0) = 0.$
661. $x'' - 2x' + x = e^t, \quad x(0) = 0, x'(0) = 1.$
662. $x''' + 2x'' + 5x' = 0, \quad x(0) = -1, x'(0) = 2, \\ x''(0) = 0.$
663. $x'' - 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
664. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, x'(0) = 0.$
665. $x'' + 2x' + x = t^2, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$
666. $x''' + x'' = \operatorname{sen} t, \quad x(0) = x'(0) = 1, x''(0) = 0.$
667. $x'' + x = \cos t, \quad x(0) = -1, x'(0) = 1.$
668. $x''' + x'' = t, \quad x(0) = -3, x'(0) = 1, x''(0) = 0.$
669. $x'' + 2x' + 5x = 3, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$
670. $x^{IV} - x'' = \cos t, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1, \\ x''(0) = x'''(0) = 0.$
671. $x'' + 2x' + 2x = 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
672. $x'' + x = 1, \quad x(0) = -1, x'(0) = 0.$
673. $x'' + 4x = t, \quad x(0) = 1, x'(0) = 0.$
674. $x'' - 2x' + 5x = 1 - t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$
675. $x''' + x = 0, \quad x(0) = 0, x'(0) = -1, x''(0) = 2.$
676. $x''' + x'' = \cos t, \quad x(0) = -2, x'(0) = x''(0) = 0$

677. $x'' + x' = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
678. $x^{IV} - x'' = 1$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.
679. $x'' + x' = \cos t$, $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.
680. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
681. $x''' + x' = \cos t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -2$,
 $x''(0) = 0$.
682. $x'' + 2x' + x = t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
683. $x'' - x' + x = e^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
684. $x'' - x = \operatorname{sen} t$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.
685. $x''' + x = e^t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$, $x''(0) = 0$.
686. $x'' + x = 2 \operatorname{sen} t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$.
687. $x'' - 2x' + x = t - \operatorname{sen} t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
688. $x'' + 2x' + x = 2 \cos^2 t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
689. $x'' + 4x = 2 \cos t \cdot \cos 3t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
690. $x'' + x = te^t + 4 \operatorname{sen} t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
691. $x'' - x' = te^t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
692. $x'' + x' = 4 \operatorname{sen}^2 t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = -4$.
693. $x''' - 2x'' + x' = 4$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$,
 $x''(0) = -2$.
694. $x'' - 3x' + 2x = e^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
695. $x'' - x' = t^2$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
696. $x''' + x = \frac{1}{2} t^2 e^t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
697. $x'' + x = t \cos 2t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
698. $x'' + n^2 x = a \operatorname{sen}(nt + \alpha)$, $x(0) = x'(0) = 0$.
699. $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 1 + t + t^2$,
 $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
700. $x^{IV} + 2x'' + x = t \operatorname{sen} t$, $x(0) = x'(0) =$
 $= x''(0) = x'''(0) = 0$.
701. $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2 + \beta^2) x = 0$, $x(0) = 0$,
 $x'(0) = 1$.
702. $x'' + 4x = \operatorname{sen} t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
703. $x''' + x' = e^{2t}$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.
704. $x^{IV} + x'' = \cos t$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$,
 $x'''(0) = \gamma$.
705. $x'' - 4x = \operatorname{sen} \frac{3}{2} t \operatorname{sen} \frac{1}{2} t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
706. $x^{IV} - 5x'' + 10x' - 6x = 0$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,
 $x''(0) = 6$, $x'''(0) = -14$.
707. $x'' + x' + x = te^t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
708. $x'' + x = t \cos t$, $x(0) = x'(0) = 0$.
709. $x''' + 3x'' - 4x = 0$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 2$.

$$710. \quad x'' + 3x'' + 3x' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = \\ = x''(0) = 0.$$

$$711. \quad x'' + x = 1, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

$$712. \quad x'' + \omega^2 x = a [\eta(t) - \eta(t-b)], \quad x(0) = x'(0) = \\ = 0.$$

La exigencia de que las condiciones iniciales estén prefijadas en el punto $t=0$, no es esencial, puesto que por la sustitución lineal de variable independiente t el problema de Cauchy para $t=t_0 \neq 0$ se reduce al problema con las condiciones iniciales en el punto $t=0$. Mostremos esto en el ejemplo de la ecuación diferencial del segundo orden.

Sea necesario hallar la solución de la ecuación

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t), \quad (4)$$

que satisface las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_1$, donde $t_0 \neq 0$.

Supongamos

$$t = \tau + t_0; \quad x(t) = x(\tau + t_0) = \tilde{x}(\tau); \quad f(t) = f(\tau + t_0) = \tilde{f}(\tau).$$

Entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= x'(\tau + t_0) = \tilde{x}'(\tau), \\ x''(t) &= x''(\tau + t_0) = \tilde{x}''(\tau), \end{aligned}$$

y la ecuación (4) y las condiciones iniciales obtienen la forma

$$a_0 \tilde{x}''(\tau) + a_1 \tilde{x}'(\tau) + a_2 \tilde{x}(\tau) = \tilde{f}(\tau), \quad (5)$$

$$\tilde{x}(0) = x_0, \quad \tilde{x}'(0) = x_1.$$

Hemos obtenido el problema de Cauchy para la ecuación (5) con las condiciones iniciales prefijadas en el punto $\tau=0$.

Ejemplo 2. Hallar la solución de la ecuación $x''(t) + x'(t) = t$ que satisface las condiciones iniciales $x(1) = 1$, $x'(1) = 0$.

Solución. Supongamos $t = \tau + 1$ y $x(t) = x(\tau + 1) = \tilde{x}(\tau)$. Entonces la ecuación dada y las condiciones iniciales obtienen la forma

$$\tilde{x}''(\tau) + \tilde{x}'(\tau) = \tau + 1, \quad \tilde{x}(0) = 1, \quad \tilde{x}'(0) = 0, \quad (6)$$

ya que al valor $t=1$ le corresponde el valor $\tau=0$.

Vamos a componer la ecuación operatoria para la ecuación diferencial (6). Sea $\tilde{x}(t) \doteq X(p)$. Entonces

$$\tilde{x}'(\tau) \doteq pX(p) - 1,$$

$$\tilde{x}''(\tau) \doteq p^2 X(p) - p$$

y la ecuación operatoria será

$$p^2 X(p) - p + pX(p) - 1 = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}.$$

Resolviéndola respecto a $X(p)$, hallamos

$$X(p) = \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}.$$

Pasando a los originales, obtendremos

$$\tilde{x}(\tau) = 1 + \frac{\tau^2}{2}.$$

Al sustituir aquí τ en $t - 1$, obtendremos la solución buscada del problema de Cauchy

$$x(t) = 1 + \frac{(t-1)^2}{2}.$$

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes con las condiciones iniciales dadas:

713. $x'' + x = 0; x(\pi) = 1, x'(\pi) = 0.$

714. $x''(t) + x'(t) = 2t; x(1) = 1, x'(1) = -1.$

715. $x''(t) - x'(t) = -2t; x(2) = 8, x'(2) = 6.$

716. $x''(t) + x(t) = -2 \operatorname{sen} t; x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$

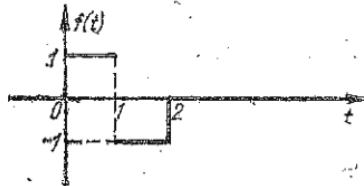
717. $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{1-t}; x(1) = 1, x'(1) = -1.$

Ejemplo 3. Resolver el problema de Cauchy

$$x'' + x = f(t),$$

$$x(0) = x'(0) = 0,$$

si la función $f(t)$ está prefijada gráficamente



Solución. Es evidente

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2),$$

por eso, utilizando la fórmula

$$f(t-\tau) = e^{-pt}F(p)$$

obtenemos

$$f(t) = \frac{1}{p} - 2 \cdot \frac{e^{-p}}{p} + 1 \cdot e^{-2p} \frac{1}{p} = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p}.$$

Suponiendo $x(t) = X(p)$ y teniendo en cuenta las condiciones iniciales, obtendremos

$$x''(t) = p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p).$$

La ecuación operatoria

$$(p^2 + 1) X(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p},$$

de donde

$$X(p) = \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \frac{2e^{-p}}{p(p^2 + 1)} + \frac{e^{-2p}}{p(p^2 + 1)}.$$

Puesto que

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \cos t) \eta(t),$$

y ya que

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 1},$$

entonces

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} e^{-p} \stackrel{\text{def}}{=} [1 - \cos(t - 1)] \eta(t - 1),$$

y

$$\frac{1}{p(p^2 + 1)} e^{-2p} \stackrel{\text{def}}{=} [1 - \cos(t - 2)] \eta(t - 2)$$

(aquí aplicamos el teorema de retardo: si $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(p)$, entonces

$$f(t - \tau) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-p\tau} F(p).$$

Por consiguiente,

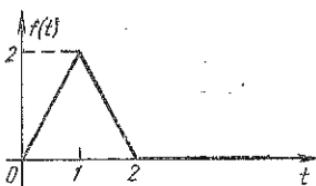
$$x(t) = (1 - \cos t) \eta(t) - 2[1 - \cos(t - 1)] \eta(t - 1) + \\ + [1 - \cos(t - 2)] \eta(t - 2)$$

6

$$x(t) = 2 \left[\sin^2 \frac{t}{2} \eta(t) - 2 \sin^2 \frac{t-1}{2} \eta(t-1) + \sin^2 \frac{t-2}{2} \eta(t-2) \right].$$

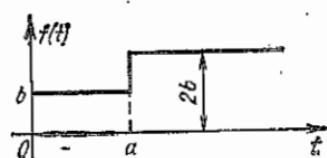
Resolver los problemas siguientes de Cauchy:

748.



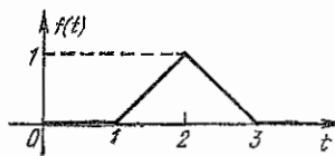
$$x'' + 4x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0.$$

719.



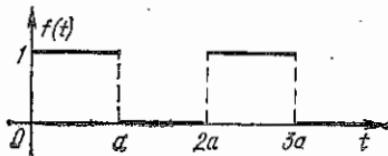
$$\begin{aligned}x'' + x &= f(t), \\x(0) &= 1, \quad x'(0) = 0.\end{aligned}$$

720.



$$\begin{aligned}x'' + 9x &= f(t), \\x(0) &= 0, \quad x'(0) = 1.\end{aligned}$$

721.



$$\begin{aligned}x'' - 2x' + x &= f(t), \\x(0) &= x'(0) = 0.\end{aligned}$$

722. Una partícula de masa m se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza de reconstrucción $m\lambda x$ que es proporcional al desplazamiento y de la fuerza de resistencia $2m\mu v$ que es proporcional a la velocidad. En el momento de tiempo $t = 0$ la partícula se encuentra a la distancia x_0 de la posición del equilibrio y tiene la velocidad v_0 . Mostrar que si existe la igualdad $n^2 = \lambda^2 - \mu^2$, entonces el desplazamiento de la partícula se determina por la expresión

$$\frac{1}{n} e^{-\mu t} [nx_0 \cos nt + (v_0 + \mu x_0) \sin nt].$$

723. Una partícula de masa m puede realizar las oscilaciones pequeñas respecto a la posición de equilibrio y se encuentra bajo la acción de la fuerza de reconstrucción mn^2x que es proporcional al desplazamiento. La fuerza constante F que actúa sobre dicha partícula durante el tiempo T la hace salir del estado de equilibrio. Mostrar que la amplitud de oscilación es igual a

$$\frac{2F}{mn^2} \operatorname{sen} \frac{nT}{2} \text{ para } t > T.$$

724. Por desviaciones pequeñas del punto de suspensión en la dirección horizontal el péndulo matemático de la longitud l le hacen salir de la posición de equilibrio. Mostrar que si el

punto de suspensión se ha movido en la distancia a , entonces la desviación del péndulo es igual a $a(1 - \cos nt)$, $n^2 = g/l$.

725. Una partícula fue tirada verticalmente arriba con la velocidad v_0 . Sobre ella actúan la fuerza de gravedad y la de resistencia $2kmv$. Mostrar que en el momento de tiempo t ella se encuentra a la distancia $-\frac{gt}{2k} + \frac{g+2kv_0}{4k^2}(1 - e^{-2kt})$ del punto de tiro.

726. Un punto material de masa 2 gramos se mueve rectilíneamente bajo la acción de la fuerza F que crece en a dinas por segundo. En el momento inicial el punto se encontraba en el origen de coordenadas y tenía la velocidad $v_0 = 10$ cm/s. Conociendo que la magnitud inicial de la fuerza $F_0 = 4$ dinas y que a la distancia de 450 sm del origen de coordenadas la velocidad $v = 105$ cm/s, determinar el valor de la magnitud a .

727. Un punto material de masa m se mueve rectilíneamente repulsando del origen de coordenadas O con la fuerza F que es directamente proporcional a la distancia ($F = 4mx$). Al punto actúa la resistencia del medio ambiente $R = 3mv$. En el momento inicial la distancia del inicio es igual a 1, y la velocidad es igual a cero. Hallar la ley de movimiento del punto.

728. Un punto pesado de masa m cae en el medio, la resistencia del cual es directamente proporcional al primer grado de velocidad. Determinar la velocidad máxima del punto si para $v = 1$ m/s la fuerza de resistencia es igual a un tercio del peso del punto y la velocidad inicial $v_0 = 0$.

729. Un punto material de masa m se mueve en el medio, la resistencia del cual es directamente proporcional al primer grado de velocidad (coeficiente de proporcionalidad es k). ¿Qué distancia pasará el punto hasta la detención si le han dado la velocidad inicial v_0 y no existen otras fuerzas menos la de resistencia?

730. Una pesada cadena homogénea de masa m y de longitud $2l$ se encuentra en la mesa plana horizontal de ese modo que su mitad baja colgada de la mesa. Determinar la ley del movimiento de cadena durante su desliz de la mesa y hallar el tiempo de su desliz.

731. Un punto de masa m se encuentra en la recta que pasa por dos centros A y B , la distancia entre los cuales es igual a $2d$. Los centros atraen el punto con las fuerzas que son directamente proporcionales a la distancia hasta el

centro; el coeficiente de proporcionalidad mk^2 es igual para los dos centros. En el momento inicial el punto se encuentra a la distancia a de la mitad O del segmento AB , sin tener la velocidad inicial. Determinar la ley del movimiento del punto.

732. Un centro inmóvil O atrae el punto de masa m con la fuerza $F = \mu mr$, donde r es la distancia del punto de este centro y μ es el coeficiente constante. En el momento inicial $r = a$ y la velocidad $v = 0$. ¿Dentro de cuánto tiempo el punto alcanzará el centro de O ?

733. Le han dado a la barca la velocidad inicial $v_0 = 6$ m/s. Dentro de 69 s después del inicio de movimiento esta velocidad disminuye en dos veces. Hallar la ley de movimiento de la barca, si la fuerza de resistencia del agua es directamente proporcional a la velocidad de la misma.

734. Un punto material de masa $m = 2$ realiza las oscilaciones rectilíneas por el eje Ox bajo la acción de la fuerza de reconstrucción que es proporcional a la distancia del punto del origen de coordenadas (coeficiente de proporcionalidad es igual a 8), y de la fuerza perturbadora $F = 4 \cos t$. Hallar la ley del movimiento del punto, si en el momento inicial $x = 0$ y $v = 0$.

735. Determinar el movimiento de un punto material de masa m que se atrae al centro inmóvil O por la fuerza que es directamente proporcional a la distancia y es igual a k^2m a distancia igual a la unidad de longitud.

En el momento inicial el punto se encontraba a la distancia a desde el centro O y tenía la velocidad v_0 perpendicular a la recta que conecta la posición inicial con el centro O .

736. Resolver el problema 735, suponiendo que el punto M se repulsa del centro con la fuerza que es directamente proporcional a la distancia para el mismo coeficiente de proporcionalidad.

737. Al circuito compuesto de la capacidad C e inducción L conectadas en serie, en el momento de tiempo $t = 0$ se aplica la fuerza electromotriz $E \cos(\omega t + \alpha)$. La corriente y carga iniciales son iguales a cero. Mostrar que la corriente en el momento t es igual a

$$E\{\omega \operatorname{sen}(\omega t + \alpha) - n \cos \alpha \operatorname{sen} nt - \omega \operatorname{sen} \alpha \cos nt\} \frac{1}{L(\omega^2 - n^2)}.$$

donde $n^2 = \frac{1}{LC}$; se presupone que $n^2 \neq \omega^2$.

738. Al circuito del ejemplo anterior, con la corriente inicial nula y la carga en el momento de tiempo $t = 0$, está aplicada la fuerza electromotriz $E \operatorname{sen} nt$ de la frecuencia resonante. Mostrar que la corriente es igual a $\frac{E}{2L} t \operatorname{sen} nt$, donde $n^2 = \frac{1}{LC}$.

739. A la resistencia R que tiene inducción L está aplicada la fuerza electromotriz $E \operatorname{sen} (\omega t + \alpha)$. La corriente inicial es igual a cero. Mostrar que la corriente es igual a

$$E \{ \operatorname{sen} (\gamma - \alpha) e^{-\frac{Rt}{L}} + \operatorname{sen} (\omega t + \alpha - \gamma) \} (R^2 + L^2 \omega^2)^{-\frac{1}{2}},$$

donde $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\omega L}{R}$.

740. Al circuito, a la cual se conectan en serie L , R , C con la corriente inicial y la carga nulas, está aplicada la fuerza electromotriz que es igual a E_1 para $0 < t \leq T$ y E_2 para $t > T$; E_1 , E_2 son constantes. Mostrar que para $t > T$ la corriente en el circuito es igual a

$$\frac{E_1}{nL} e^{-\mu t} \operatorname{sen} nt - \frac{E_1 - E_2}{nL} e^{-\mu(t-T)} \operatorname{sen} n(t-T),$$

donde $\mu = \frac{R}{2L}$ y $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, al mismo tiempo se presupone que $n^2 > 0$.

741. El circuito que se compone de la inductividad L , de resistencia R y de capacidad C conectadas en serie, conecta a la fuerza constante electromotriz E . La carga inicial y la corriente son iguales a cero. Mostrar que la corriente I en el momento de tiempo t es igual a

$$I = \begin{cases} \frac{E}{nL} e^{-\mu t} \operatorname{sen} nt & \text{para } n^2 > 0, \\ \frac{E}{L} t e^{-\mu t} & \text{para } n^2 = 0, \end{cases}$$

donde $n^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$, $\mu = \frac{R}{2L}$.

Solución de ciertas ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables

Dado que tenemos la ecuación

$$a_0(t)x^{(n)}(t) + a_1(t)x^{(n-1)}(t) + \dots + a_n(t)x(t) = f(t), \quad (7)$$

donde $a_0(t), a_1(t), \dots, a_n(t)$ son los polinomios de t de la potencia $\leq m$, mientras que $f(t)$ es la función original. Vamos a suponer que el problema de Cauchy

$$x|_{t=0} = x_0, x'|_{t=0} = x_0^1, \dots, x^{(n-1)}|_{t=0} = x_0^{(n-1)} \quad (8)$$

tiene la solución para la ecuación (7).

Sea

$$x(t) \doteq X(p).$$

En virtud del teorema de diferenciación de la representación

$$\begin{aligned} t^k x^{(s)}(t) &\doteq (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} \{L\{x^{(s)}(t)\}\} = \\ &= (-1)^k \frac{d^k}{dp^k} [p^s X(p) - p^{s-1} x_0 - \dots - x_0^{(s-1)}]. \end{aligned}$$

Aquí $L\{x^{(s)}(t)\}$ es la representación de la función $x^{(s)}(t)$.

De ese modo, aplicando a ambos miembros de la ecuación (7) la transformación de Laplace, convertimos (7) en la ecuación diferencial de m orden respecto a la representación $X(p)$ de la función $x(t)$. Si $m < n$, entonces el problema de integración de la ecuación (7) se simplifica.

Ejemplo 4. Hallar la solución general de la ecuación

$$t'' - 2x' = 0. \quad (9)$$

Solución. Sea $x(t) \doteq X(p)$. Entonces

$$x'(t) \doteq pX(p) - x(0),$$

$$x''(t) \doteq p^2 X(p) - px(0) - x'(0),$$

$$tx''(t) \doteq -\frac{d}{dp} \{p^2 X(p) - px(0) - x'(0)\} = -p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0).$$

La ecuación (9) obtiene la forma

$$-p^2 \frac{dX(p)}{dp} - 2pX(p) + x(0) - 2pX(p) + 2x(0) = 0$$

6

$$\frac{dX(p)}{dp} + \frac{4}{p} X(p) = \frac{3x(0)}{p^2}.$$

Integrando esta ecuación como la ecuación lineal heterogénea respecto de $X(p)$, hallemos

$$X(p) = \frac{x(0)}{p} + \frac{C_1}{p^4},$$

de donde

$$x(t) = x(0) + C_1 \frac{t^3}{3!}$$

es la solución de la ecuación inicial.

Ejemplo 5. Examinemos la ecuación de Bessel

$$t^2 x''(t) + t x'(t) + (t^2 - n^2) x(t) = 0 \quad (t > 0, n \text{ es el entero}) \quad (10)$$

y busquemos la solución de la ecuación (10) que satisface las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Sea $x(t) \stackrel{*}{=} X(p)$. Entonces

$$x'(t) \stackrel{*}{=} pX(p) - x_0, \quad x''(t) \stackrel{*}{=} p^2 X(p) - px_0 - x_1.$$

A continuación

$$t^2 x''(t) \stackrel{*}{=} \frac{d^2}{dp^2} [p^2 X(p) - px_0 - x_1] = \frac{d^2}{dp^2} [p^2 X(p)],$$

$$tx'(t) \stackrel{*}{=} -\frac{d}{dp} [pX(p) - x_0] = -\frac{d}{dp} [pX(p)]$$

y la ecuación (10) convertirá en la siguiente:

$$\frac{d^2}{dp^2} [p^2 X(p)] - \frac{d}{dp} [pX(p)] + \frac{d^2 X(p)}{dp^2} - n^2 X(p) = 0$$

6

$$(1 + p^2) \frac{d^2 X(p)}{dp^2} + 3p \frac{d X(p)}{dp} + (1 - n^2) X(p) = 0. \quad (11)$$

Para resolver la ecuación (11) introduzcamos una nueva variable independiente y una nueva función buscada por las fórmulas

$$p = \operatorname{sh} u, \quad X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u}.$$

La ecuación (11) convertirá en este caso, en la siguiente:

$$\frac{d^2 z}{du^2} - n^2 z = 0.$$

Su solución general es

$$z = C_1 e^{nu} + C_2 e^{-nu}.$$

Puesto que $p = \operatorname{sh} u$, obtendremos $\operatorname{ch} u = \sqrt{p^2 + 1}$. Teniendo en cuenta las expresiones para $\operatorname{sh} u$ y $\operatorname{ch} u$ a través de las funciones exponenciales hallamos

$$\frac{e^u - e^{-u}}{2} = p, \quad \frac{e^u + e^{-u}}{2} = \sqrt{p^2 + 1},$$

de donde

$$e^u = \sqrt{p^2 + 1} + p, \quad e^{-u} = \sqrt{p^2 + 1} - p,$$

así que

$$z = C_1 (\sqrt{p^2 + 1} + p)^n + C_2 (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n.$$

Para $X(p)$ obtenemos

$$X(p) = \frac{z}{\operatorname{ch} u} = \frac{C_1(\sqrt{p^2+1}+p)^n + C_2(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}. \quad (12)$$

Para $n=0$ de (12) hallamos

$$X(p) = \frac{C_1+C_2}{\sqrt{p^2+1}} \doteq (C_1+C_2) J_0(t).$$

Escogiendo $C_1+C_2=1$, obtenemos la solución $x(t)=J_0(t)$ que es la función de Bessel del primer género del orden cero.

Suponiendo $n=1$ y escogiendo $C_1=0$, $C_2=1$, obtendremos la solución $x(t)=J_1(t)$ de la ecuación (10).

Hallar las soluciones de ecuaciones:

$$742. tx'' + (2t-1)x' + (t-1)x = 0.$$

$$743. tx'' + 2x' = 0.$$

$$744. x'' + (t+1)x' + tx = 0, x(0) = 1, x'(0) = -1,$$

$$745. x'' + (t+b)x' = 0, x(0) = -1, x'(0) = 0 \quad (b \text{ es cualquier número real}).$$

$$746. x'' + tx' - (t+1)x = 0, x(0) = x'(0) = 1.$$

$$747. x'' - tx' + nx = 0, n \text{ es el entero, } n > 0 \text{ (la ecuación de Chébishev — Hermite):}$$

$$\text{a)} x(0) = 1, x'(0) = 0, n = 2k;$$

$$\text{b)} x(0) = 0, x'(0) = 1, n = 2k+1.$$

§ 16. Integral de Duhamel

Si la función $f(t)$ es continua en $[0, +\infty)$ y la función $\varphi(t)$ es continuamente diferenciable en $[0, +\infty)$ y

$$F(p) \doteq f(t), \quad \Phi(p) \doteq \varphi(t),$$

entonces

$$F(p)\Phi(p) \doteq \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau.$$

De aquí según el teorema de la diferenciación del original

$$pF(p)\Phi(p) \doteq f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau. \quad (1)$$

Esto es así llamada *fórmula de Duhamel*.

Dado que se necesita resolver la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes del n orden

$$L[x] = a_0x^{(n)}(t) + a_1x^{(n-1)}(t) + \dots + a_nx(t) = f(t), a_0 \neq 0, \quad (2)$$

para las condiciones iniciales nulas

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0, \quad (3)$$

Supongamos que es conocida la solución de la ecuación

$$L(x) = 1 \quad (4)$$

con el mismo miembro primero y el segundo que es igual a la unidad para las condiciones (3). Pasando a las ecuaciones operatorias, obtendremos ($A(p)$ es el polinomio conocido de p)

$$A(p)X(p) = F(p) \quad (5)$$

para (2) y

$$A(p)X_1(p) = \frac{1}{p} \quad (6)$$

para (4). De (5) hallamos $X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}$, y de (6) $A(p) = \frac{1}{pX_1(p)}$, de donde $X(p) = pX_1(p)F(p)$. De acuerdo con la fórmula (4)

$$pX_1(p)F(p) \stackrel{\text{def}}{=} f(t)x_1(0) + \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau. \quad (7)$$

Teniendo en cuenta que $x_1(0) = 0$, obtendremos

$$X(p) = pX_1(p)F(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau. \quad (8)$$

De aquí la solución $x(t)$ de la ecuación (2) para las condiciones iniciales nulas (3) tendrá la forma

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)x'_1(t-\tau)d\tau, \quad (9)$$

donde $x_1(t)$ es la solución del problema (4) — (3).

Ejemplo 1. Utilizando la fórmula de Duhamel, resolver la ecuación para las condiciones iniciales dadas

$$x''(t) - x(t) = \frac{1}{1+e^t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Solución. Examinemos el problema auxiliar

$$x''_1(t) - x_1(t) = 1, \quad x_1(0) = x'_1(0) = 0.$$

Empleando el método operacional, hallamos

$$X_1(p) = \frac{1}{p(p^2-1)},$$

de donde

$$x_1(t) = \int_0^t \operatorname{sh} \tau d\tau = \operatorname{ch} t - 1.$$

Mediante la fórmula (9)

$$x(t) = \int_0^t \frac{1}{1+e^\tau} \operatorname{sh}(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} (e^t - t e^t - 1) + \operatorname{sh} t \cdot \ln \frac{1+e^t}{2}.$$

La exigencia que las condiciones iniciales sean nulas, no es esencial: por medio de una sustitución simple de la función buscada, se puede reducir el problema de las condiciones iniciales no nulas al problema de las condiciones nulas. Vamos a mostrar esto en el ejemplo de la ecuación diferencial del segundo orden.

Suponemos que se busca la solución de la ecuación

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \quad (10)$$

que satisface las condiciones iniciales no nulas

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Supongamos que

$$y(t) = x(t) - x_0 - x_1 t. \quad (11)$$

Entonces

$$y'(t) = x'(t) - x_1, \quad y''(t) = x''(t)$$

y la ecuación (10) se transforma en la forma de

$$a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f_1(t),$$

donde

$$f_1(t) = f(t) - a_1 x_1 - a_2 x_0 - a_2 x_1 t.$$

Luego, en vigor de (11)

$$y(0) = x(0) - x_0 = 0, \quad y'(0) = x'(0) - x_1 = 0.$$

Dé tal manera llegamos al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) &= f_1(t), \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

de las condiciones iniciales nulas.

Ejemplo 2. Mediante la fórmula de Duhamel resolver el siguiente problema de Cauchy:

$$x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2} + t, \quad (12)$$

$$x(0) = -2, \quad x'(0) = 1. \quad (13)$$

Solución. Reducimos el problema (12) — (13) al problema de las condiciones iniciales nulas. Supongamos para esto que

$$y(t) = x(t) + 2 - t.$$

Entonces

$$y'(t) = x'(t) - 1, \quad y''(t) = x''(t),$$

y la ecuación (12) se transforma en la siguiente:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \frac{e^{-t}}{(1+t)^2},$$

donde

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Resolviendo el último problema mediante la fórmula de Duhamel, hallamos

$$y = e^{-t} [t - \ln(1+t)].$$

Solución del problema inicial (12) — (13)

$$x(t) = e^{-t} [t - \ln(1+t)] - 2 + t.$$

Mediante la fórmula de Duhamel hallar las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales dadas:

$$748. \quad x'' - x' = \frac{e^{2t}}{(1+et)^2}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$749. \quad x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{1+t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$750. \quad x'' - x' = \frac{e^{2t}}{2+et}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$751. \quad x'' - x' = \frac{1}{1+et}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$752. \quad x'' + x = \frac{1}{2+\cos t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$753. \quad x'' + x = \frac{1}{4+\operatorname{tg}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$754. \quad x'' + x = \frac{1}{1+\cos^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$755. \quad x'' + x = \frac{1}{1+\operatorname{sen}^2 t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$756. \quad x'' - x = \operatorname{th} t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$757. \quad x''' + x' = \frac{1}{2+\operatorname{sen} t}, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$$

§ 17. Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales por el método operacional

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, empleando el método operacional se efectúa por el mismo esquema que se aplica para resolver una ecuación diferencial.

Sea, por ejemplo, necesario resolver el sistema de las ecuaciones diferenciales del segundo orden

$$\sum_{k=1}^n \left(a_{ik} \frac{d^2 x_k}{dt^2} + b_{ik} \frac{dx_k}{dt} + c_{ik} x_k \right) = f_i(t) \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n),$$

donde $a_{ih}, b_{ih}, c_{ih} = \text{const}$, siendo iniciales las condiciones

$$x_k(0) = \alpha_h, \quad x'_k(0) = \beta_h. \quad (2)$$

Designando a través de $X_h(p)$ y $F_i(p)$ las representaciones $x_h(t)$ y $f_i(t)$ del sistema (1) y tomando en consideración (2), pasaremos al sistema operatorio

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^n (a_{ih}p^2 + b_{ih}p + c_{ih}) X_h(p) &= F_i(p) + \\ &+ \sum_{h=1}^n [(a_{ih}p + b_{ih}) \alpha_h + a_{ih}\beta_h] \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (3)$$

Resolviendo el sistema (3) como el sistema lineal algebraico de ecuaciones respecto a $X_h(p)$, hallamos $X_h(p)$ y luego sus originales $x_h(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Estos últimos serán las soluciones del problema de Cauchy para el sistema (1).

Ejemplo. Resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x'' = 3(y - x + z), \\ y'' = x - y, \\ z'' = -z, \\ x(0) = x'(0) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1, \\ z(0) = 1, \quad z'(0) = 0. \end{cases}$$

Solución. Pasando al sistema operatorio, obtenemos

$$\begin{cases} p^2X = 3(Y - X + Z), \\ p^2Y + 1 = X - Y, \\ p^2Z - p = -Z, \end{cases}$$

donde

$$X(p) \doteq x(t), \quad Y(p) \doteq y(t), \quad Z(p) \doteq z(t).$$

Al resolver el último sistema respecto a $X(p)$, $Y(p)$ y $Z(p)$, obtenemos

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{3(p-1)}{p^2(p^2+4)}, \quad Y(p) = \frac{(3p-1)}{p^2(p^2+1)(p^2+4)} - \frac{1}{p^2+1}, \\ Z(p) &= \frac{p}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Hallando los originales para $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$, obtenemos

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$

$$z(t) = \cos t.$$

Resolver los sistemas de ecuaciones:

758.
$$\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -1.$$

759.
$$\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

760.
$$\begin{cases} x' - y' - 2x + 2y = 1 - 2t, \\ x'' + 2y' + x = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = 0.$$

761.
$$\begin{cases} x'' - 3x' + 2x + y' - y = 0, \\ -x' + x + y'' - 5y' + 4y = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = y'(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

762.
$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1.$$

763.
$$\begin{cases} 2x'' - x' + 9x - y'' - y' - 3y = 0, \\ 2x'' + x' + 7x - y'' + y' - 5y = 0, \end{cases}$$

$$x(0) = x'(0) = 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

764.
$$\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

765.
$$\begin{cases} x' = -x + y + z + e^{3t}, \\ y' = x - y + z + e^{3t}, \\ z' = x + y + z + 4, \end{cases}$$

766.
$$\begin{cases} x' = -y - z, \\ y' = -x - z, \\ z' = -x - y, \end{cases}$$

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

767.
$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + z, \\ z' = 3x + y, \end{cases}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1.$$

768.
$$\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^{at}, \end{cases}$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 1,$$

$$769. \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y + z, \\ y' = x + z, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 0. \\ z' = -3x + y - 2z, \end{array} \right.$$

$$770. \left\{ \begin{array}{l} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \quad x(0) = y(0) = z(0) = 1. \\ z' = 5x + 2y + 7z, \end{array} \right.$$

$$771. \left\{ \begin{array}{l} tx' = -x + y + z + t, \\ ty' = x - y + z + t^3, \quad z(1) = y(1) = z(1) = 0. \\ tz' = x + y + z + 4, \end{array} \right.$$

$$772. \left\{ \begin{array}{l} x'_0 = -cx_0, \\ x'_1 = -cx_1 + cx_0, \\ \dots \\ x'_n = -cx_n + cx_{n-1}, \end{array} \right.$$

$$x_0(0) = 1, \quad x_1(0) = x_2(0) = \dots = x_n(0) = 0.$$

$$773. \left\{ \begin{array}{l} 3x' + 2x + y' = 1, \\ x' + 4y' + 3y = 0, \quad x(0) = y(0) = 0. \end{array} \right.$$

$$774. \left\{ \begin{array}{l} 3tx' = 2x + y - z, \\ 2ty' = x + 3y + z, \quad x(1) = y(1) = z(1) = 1. \\ 6tz' = -x + 7y + 5z, \end{array} \right.$$

$$775. \left\{ \begin{array}{l} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 4. \end{array} \right.$$

776. Un electrón sale del origen de coordenadas con velocidad inicial v_0 que está dirigida por el eje Ox . Hallar la ley de movimiento del electrón, suponiendo que la tensión del campo magnético H es constante y está dirigido perpendicularmente al plano xOy .

777. Un proyectil sale de un cañón con la velocidad v_0 m/seg bajo el ángulo de 45° al horizonte. Hallar, teniendo en cuenta la resistencia del aire, la máxima altura, en la cual sube el proyectil y el lugar de su caída.

778. El electrón se mueve en el campo magnético de la tensión constante H . Hallar la trayectoria, si la velocidad inicial v_0 forma el ángulo α con la dirección del campo magnético.

779. Determinar el movimiento de un punto material pesado tirado con la velocidad inicial v_0 bajo el ángulo α al horizonte en un medio, la resistencia del cual es proporcional a la primera potencia de velocidad ($F = mkv$).

780. Una partícula de masa m con la carga e sale del origen de coordenadas con la velocidad $(u, 0, 0)$. Sobre ella actúa el campo magnético constante H paralelo al eje Oz y la resistencia del medio kmv , donde v es la velocidad de partícula. Mostrar que sus coordenadas en el momento de tiempo t son iguales a

$$x = \frac{kue^{-kt}}{k^2 + \lambda^2} \left(e^{kt} - \cos \lambda t + \frac{\lambda}{k} \sin \lambda t \right),$$

$$y = -\frac{\lambda u}{k^2 + \lambda^2} + \frac{ue^{-kt}}{k^2 + \lambda^2} (\lambda \cos \lambda t + k \sin \lambda t),$$

donde $\lambda = \frac{eH}{mc}$, c es la velocidad de la luz.

781. Una partícula se mueve en el medio que resiste y que actúa sobre ésta con la fuerza $F = 2\lambda v$, donde v es la velocidad de partícula y se atrae al punto $(0, 0)$ con la fuerza $\mu^2 r$ ($m = 1$). En el punto $(a, 0)$ esta partícula tiene la velocidad v_0 paralela al eje Oy . Mostrar que para $\mu > \lambda$ la trayectoria de partícula se define por las ecuaciones

$$x = ae^{-\lambda t} \left[\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right],$$

$$y = \frac{v_0}{\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}$; r es la distancia del punto móvil a partir del punto $(0, 0)$.

782. Un punto material A con la masa m que estaba a la distancia a del eje Ox ha obtenido la velocidad inicial v_0 paralela al eje Ox . El punto A se atrae por el eje Ox con la fuerza F que es directamente proporcional a la distancia del eje; el coeficiente de proporcionalidad es igual a mk^2 . Hallar las ecuaciones de movimiento y la trayectoria del punto.

§ 18. Solución de las ecuaciones integrales de Volterra con nucleos de la forma especial

La ecuación que contiene función buscada bajo el signo de la integral se llama *la ecuación integral*. Por ejemplo, la solución del problema de Cauchy

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

como se sabe, se reduce a la solución de la ecuación integral siguiente:

$$y = \int_{x_0}^x f(x, y(x)) dx + y_0.$$

Si la función buscada y entra en la ecuación linealmente, entonces la ecuación integral se llama *lineal*.

La ecuación de la forma

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (1)$$

(a y b son constantes) se llama *la ecuación integral lineal de Fredholm del segundo género*. Aquí $K(x, t)$, $f(x)$ son las funciones prefijadas, $y(x)$ es la función buscada. La función $K(x, t)$ la llaman *el núcleo de la ecuación* (1).

La ecuación

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t) y(t) dt \quad (2)$$

la llaman *la ecuación integral lineal de Volterra del segundo género*.

Si en las ecuaciones (1) y (2) $f(x) = 0$, entonces las ecuaciones se llaman *homogéneas*.

Si la función buscada $y(x)$ entra sólo bajo el signo de la integral, entonces tenemos respectivamente *las ecuaciones de Fredholm o de Volterra del primer género*

$$\int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x) \quad \text{o} \quad \int_a^x K(x, t) y(t) dt = f(x).$$

Las ecuaciones que tienen la forma:

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (3)$$

con el núcleo $K(x-t)$ que depende únicamente de la diferencia de argumentos representan una clase importante de ecuaciones de Volterra. Las últimas a veces se llaman las ecuaciones del *tipo de convolución*.

Dado que tenemos la ecuación integral de Volterra del tipo de convolución

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt. \quad (4)$$

Vamos a suponer que $f(t)$ y $K(x)$ son las funciones suficientemente suaves y tienen el orden finito del incremento para $x \geq 0$. En este caso, también $\varphi(x)$ para $x \geq 0$ tiene el orden finito del incremento y,

por consiguiente, se puede hallar la representación de las funciones f , K y φ (según Laplace). Sea $\Phi(p) = \varphi(x)$, $F(p) = f(x)$, $L(p) = K(x)$. Utilizando para ambos miembros de (4) la transformación de Laplace y empleando la fórmula de convolución (véase § 14, IX), obtendremos

$$\Phi(p) = F(p) + L(p)\Phi(p), \quad (5)$$

de donde

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - L(p)}, \quad L(p) \neq 1. \quad (6)$$

Para $\Phi(p)$ hallaremos el original $\varphi(x)$ que es la solución de la ecuación integral (4).

Ejemplo 1. Resolver la ecuación integral

$$\varphi(x) = \cos x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt. \quad (7)$$

Solución. Pasando a las representaciones y examinando la integral como la convolución de funciones, obtendremos, a base de la regla de la representación de convolución

$$\Phi(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2}\Phi(p), \quad (8)$$

de donde

$$\Phi(p) = \frac{p^3}{(p^2+1)(p^2-1)}. \quad (9)$$

Hallando el original para $\Phi(p)$, obtendremos la solución de la ecuación integral (7)

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(\cos x + \operatorname{ch} x). \quad (10)$$

Resolver las ecuaciones integrales:

$$783. \quad \varphi(x) = \operatorname{sen} x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

$$784. \quad \varphi(x) = x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt.$$

$$785. \quad \varphi(x) = x + \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)\varphi(t)dt.$$

$$786. \quad \varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt.$$

$$787. \varphi(x) = 1 + x + \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$788. \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-t) e^{-(t-x)} \varphi(t) dt.$$

$$789. \varphi(x) = e^{-x} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t) dt.$$

$$790. \varphi(x) = x + 2 \int_0^x [(x-t) - \operatorname{sen}(x-t)] \varphi(t) dt.$$

$$791. \varphi(x) = \operatorname{sen} x + 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$792. \varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - \\ - 4(x-t)^2] \varphi(t) dt.$$

$$793. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^x \operatorname{sen} 2(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$794. \varphi(x) = e^x - 2 \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$795. \varphi(x) = 1 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t)^3 \varphi(t) dt.$$

$$796. \varphi(x) = x - \int_0^x \operatorname{sh}(x-t) \varphi(t) dt.$$

$$797. \varphi(x) = \operatorname{sh} x - \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \varphi(t) dt.$$

Por analogía se resuelven las ecuaciones integrales de Volterra del primer género con el núcleo $K(x, t)$ que sólo depende de la dife-

rencia $x - t$, es decir, de la ecuación de la forma

$$\int_0^x K(x-t) \varphi(t) dt = f(x), \quad (11)$$

donde $f(x)$ es la función conocida, $\varphi(x)$ es la función buscada. Al mismo tiempo supongamos $K(x, x) \neq 0$.

Sea $F(p) \stackrel{def}{=} f(x)$, $L(p) \stackrel{def}{=} K(x)$, $\Phi(p) \stackrel{def}{=} \varphi(x)$. Empleando para los dos miembros de (11) la transformación de Laplace y utilizando el teorema de convolución, obtendremos

$$L(p) \cdot \Phi(p) = F(p),$$

de donde

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{L(p)}, \quad L(p) \neq 0.$$

El original para $\Phi(p)$ será la solución $\varphi(x)$ de la ecuación integral (11).

Resolver las ecuaciones integrales:

$$798. \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = x.$$

$$799. \int_0^x J_0(x-t) \varphi(t) dt = \operatorname{sen} x.$$

$$800. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = \operatorname{sen} x.$$

$$801. \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt = \operatorname{sen} x.$$

$$802. \int_0^x \cos(x-t) \varphi(t) dt = x + x^2.$$

$$803. \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t) dt = x^2 e^x.$$

$$804. \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \varphi(t) dt = \operatorname{sh} x.$$

$$805. \int_0^x \operatorname{ch}(x-t) \varphi(t) dt = x.$$

El método indicado de resolver las ecuaciones (4), (11) aplicamos también a los sistemas de las ecuaciones integrales de Volterra que tienen la forma:

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \sum_{k=1}^s \int_0^\infty K_{ik}(x-t) \varphi_k(t) dt \quad (i=1, 2, \dots, s). \quad (12)$$

Aplicando a ambos miembros de (12) la transformación de Laplace, obtendremos

$$\Phi_i(p) = F_i(p) + \sum_{k=1}^s L_{ik}(p) \Phi_k(p) \quad (i=1, 2, \dots, s).$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones que es lineal respecto a $\Phi_i(p)$, hallamos $\Phi_i(p)$ ($i=1, 2, \dots, s$), los originales para las cuales serán al mismo tiempo la solución del sistema inicial de las ecuaciones integrales (12).

Ejemplo 2. Resolver el sistema de ecuaciones integrales

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x) = x + \int_0^\infty e^{-(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^\infty (x-t) \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 + \int_0^\infty \operatorname{sh}(x-t) \varphi_1(t) dt - \int_0^\infty e^{(x-t)} \varphi_2(t) dt. \end{array} \right.$$

Solución. Pasando a las representaciones y utilizando el teorema de convolución, obtendremos ($\Phi_1(p) \doteq \varphi_1(x)$, $\Phi_2(p) \doteq \varphi_2(x)$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+1} \Phi_1(p) + \frac{1}{p^2} \Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2-1} \Phi_1(p) - \frac{1}{p-1} \Phi_2(p), \end{array} \right.$$

de donde

$$\Phi_1(p) = \frac{p^2 + p - 1}{p(p-1)(p^2+1)}, \quad \Phi_2(p) = \frac{p^3 - p^2 + 1}{(p-1)(p+1)(p^2+1)},$$

Hallamos los originales para $\Phi_1(p)$ y $\Phi_2(p)$:

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x - \frac{3}{2} \cos x,$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2} (\cos x + \operatorname{ch} x) - \operatorname{sen} x.$$

El sistema de las funciones $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ es la solución del sistema inicial de las ecuaciones integrales.

Resolver los sistemas de ecuaciones integrales siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x) = 1 - 2 \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 4x - \int_0^x \varphi_1(t) dt + 4 \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x) = e^x + \int_0^x \varphi_1(t) dt - \int_0^x e^{(x-t)} \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = -x - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x) = x + \int_0^x \varphi_1(t) dt + \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x) = e^x - \int_0^x \varphi_1(t) dt + 4 \int_0^x e^{(x-t)} \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x) = 2x - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt + \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = -2 - 4 \int_0^x \varphi_1(t) dt + 3 \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt. \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi_1(x) = 2 - \int_0^x (x-t) \varphi_1(t) dt - 4 \int_0^x \varphi_2(t) dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x \varphi_1(t) dt - \int_0^x (x-t) \varphi_2(t) dt. \end{array} \right\}$$

§ 19. Ecuaciones diferenciales con el argumento de retardo

En una serie de problemas técnicos es necesario examinar las ecuaciones diferenciales, en las cuales la función incógnita entra siendo distintos los valores del argumento, por ejemplo:

$$\ddot{x}(t) = \varphi(t, x(t), x(t - \tau(t))), \quad (1)$$

$$\dot{\ddot{x}}(t) = \varphi(t, x(t), x(t - \tau(t)), \dot{x}(t - \tau(t))), \quad (2)$$

$$\ddot{\ddot{x}}(t) = \varphi(t, x(t), \dot{x}(t - \tau_1(t)), \dot{x}(t - \tau_2(t))), \quad (3)$$

Tales ecuaciones se llaman *las ecuaciones diferenciales con los argumentos de desviación*. Si $\tau_i(t)$ son constantes, entonces tenemos así llamada *ecuación diferencial en diferencias*. Si $\tau_i > 0$ y la derivada mayor entra en la ecuación diferencial en diferencias sólo para un valor del argumento que es no menor de todos otros argumentos de funciones y derivadas que entran en la ecuación, entonces la ecuación se llama *la ecuación diferencial con el argumento de retardo* (por ejemplo, las ecuaciones (1) y (3)).

Sea dada la ecuación diferencial con el argumento de retardo con los coeficientes constantes:

$$x^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)}(t - \tau_k) + f(t), \quad (4)$$

donde $a_k = \text{const}$, $\tau_k = \text{const} \geq 0$ ($0 < t < +\infty$). Tomemos para simplificar la solución las condiciones iniciales nulas

$$x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0. \quad (5)$$

Al mismo tiempo supongamos

$$x(t) = x'(t) = \dots = x^{(n-1)}(t) = 0 \text{ para } t < 0.$$

Aplicando para ambos miembros (4) la transformación de Laplace y utilizando para esto el teorema de retardo (véase § 14), obtendremos la ecuación operatoria para $X(p) \rightleftharpoons x(t)$:

$$p^n X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k X(p) e^{-\tau_k p} + F(p), \text{ donde } F(p) \rightleftharpoons f(t), \quad (6)$$

de donde

$$X(p) = \frac{F(p)}{p^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k p^k e^{-\tau_k p}}. \quad (7)$$

Hallando $x(t)$, el original para $X(p)$ que se determina por la fórmula (7), obtendremos la solución de la ecuación (4) que satisface las condiciones iniciales (5).

Ejemplo 1. Resolver la ecuación

$$x'(t) = x(t - 1) + 1, \quad x(0) = 0.$$

Solución. Pasando a las representaciones, obtendremos

$$pX(p) = X(p)e^{-p} + \frac{1}{p},$$

de donde

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p - e^{-p}} = \frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{-p}}{p}} = \\ &= \frac{1}{p^2} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{e^{-np}}{p^n} + \dots \right). \end{aligned}$$

Para $x(t)$ obtendremos

$$\begin{aligned} x(t) &= t\eta(t) + \frac{1}{2!}(t-1)^2\eta(t-1) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{(n+1)!}(t-n)^{n+1}\eta(t-n) + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k). \end{aligned}$$

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$812. \quad x''(t) - x(t-1) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$813. \quad x''(t) - 2x'(t-1) = t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

$$814. \quad x''(t) = 2x'(t-1) - x(t-2) + 1, \\ x(0) = x'(0) = 0.$$

$$815. \quad x''(t) + 2x'(t-2) + x(t-4) = t, \\ x(0) = x'(0) = 0.$$

Para las ecuaciones diferenciales con el argumento de retardo que describen el proceso con acción posterior se encuentran muy a menudo los problemas en la sucesión siguiente:

Hallar la solución de la ecuación $x(t)$ para $t \geq t_0$ al mismo tiempo para todos $t \leq t_0$, para las cuales los valores $x(t)$ ejercen influencia en los valores ulteriores de solución para $t \geq 0$, se da la función $x(t)$.

De ese modo, por ejemplo, se plantea el problema: hallar la solución continua $x(t)$ para $t \geq t_0$ de la ecuación

$$x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)), \quad \tau > 0 = \text{const},$$

si se da que $x(t) = \varphi(t)$ para $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$.

Aquí $\varphi(t)$ es la función continua dada que se llama *la función inicial*. El segmento $[t_0 - \tau, t_0]$, en el cual se da la función $\varphi(t)$, se llama *el conjunto inicial*.

La solución de la ecuación lineal (4) con los coeficientes constantes y el retardo constante en el caso, cuando la función inicial se distingue

del cero idéntico, también se puede buscar, utilizando la transformación de Laplace. Mostremos aquí un ejemplo.

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x'(t) = x(t-1), \quad \varphi(t) \equiv 1, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

Solución.

$$x(t) \stackrel{def}{=} X(p), \quad x'(t) \stackrel{def}{=} pX(p) - x(0) = pX(p) - 1.$$

Utilizando para ambos miembros de la ecuación inicial la transformación de Laplace, hallamos

$$pX(p) - 1 = \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1) dt.$$

Haciendo la sustitución de variables $t-1 = z$, obtendremos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-pt} x(t-1) dz &= \int_{-1}^{\infty} e^{-p(z+1)} x(z) dz = \\ &= e^{-p} \int_{-1}^0 e^{-pz} x(z) dz + e^{-p} \int_0^{\infty} e^{-pz} x(z) dz = \\ &= e^{-p} \frac{e^{-pz}}{-p} \Big|_{z=-1}^{z=0} + e^{-p} X(p), \end{aligned}$$

puesto que $x(z) \equiv 1$ para $-1 \leq z \leq 0$. Definitivamente

$$pX(p) - 1 = \frac{1 - e^{-p}}{p} + e^{-p} X(p).$$

De aquí

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p - e^{-p}} + \frac{1 - e^{-p}}{p(p - e^{-p})} = \frac{1}{p \left(1 - \frac{e^{-p}}{p} \right)} + \frac{1 - e^{-p}}{p^2 \left(1 - \frac{e^{-p}}{p} \right)} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p^2} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots \right) + \\ &\quad + \frac{(1 - e^{-p})}{p^2} \left(1 + \frac{e^{-p}}{p} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^k} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{e^{-p}}{p^3} + \dots + \frac{e^{-kp}}{p^{k+2}} + \dots \end{aligned}$$

Hallando el original para $X(p)$, obtendremos la solución de la ecuación inicial

$$x(t) = (1+t) \eta(t) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(t-k+1)^k}{k!} \eta(t-k+1).$$

Resolver las ecuaciones siguientes:

$$816. \quad x'(t) = x(t-1), \quad \varphi(t) = t, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

$$817. \quad x'(t) = x(t-1) + t, \quad \varphi(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0.$$

$$818. \quad x'(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \varphi(t) = \cos t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0.$$

§ 20. Solución de ciertos problemas de la física matemática

Limitemos por el caso, cuando la función buscada u depende de las dos variables independientes x y t . La variable x la vamos a considerar como la coordenada espacial, variable t como el tiempo.

Examinemos, por ejemplo, la ecuación de termoconductividad

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (1)$$

(a^2 es constante).

Examinemos el primer problema de contorno para la ecuación (1): hallar la solución $u(x, t)$ de la ecuación diferencial (1) para $0 \leq x \leq l$ y $t \geq 0$ que satisface la condición inicial

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2)$$

y las condiciones de frontera

$$u(0, t) = \psi_1(t), \quad u(l, t) = \psi_2(t). \quad (3)$$

Supongamos que $u(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$ y $f(x, t)$ que consideraremos como las funciones de t son los originales. Designemos a través de

$$U(p, x) = \int_0^\infty u(x, t) e^{-pt} dt \quad (4)$$

la representación de la función $u(x, t)$. Entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x} \stackrel{*}{=} \int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial x} e^{-pt} dt = \frac{dU}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \stackrel{*}{=} \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (5)$$

Según la regla de la diferenciación de originales obtenemos, teniendo en cuenta la condición inicial (2):

$$\frac{\partial u}{\partial t} \stackrel{*}{=} pU - \varphi(x). \quad (6)$$

Supongamos que $\psi_1(t)$ y $\psi_2(t)$ son los originales y

$$\Psi_1(t) \stackrel{*}{=} \Psi_1(p), \quad \Psi_2(t) \stackrel{*}{=} \Psi_2(p). \quad (7)$$

Entonces las condiciones de frontera (3) dan

$$U|_{x=0} = \Psi_1(p), \quad U|_{x=l} = \Psi_2(p). \quad (8)$$

De ese modo, el método operacional conduce la solución del problema (1), (2), (3) a la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$a^2 \frac{d^2 U}{dx^2} - pU + \varphi(x) + F(x, p) = 0 \quad (9)$$

para las condiciones de frontera (8), donde $F(x, p) = f(x, t)$. Resolviendo el problema (9), (8) e invertiendo la solución obtenida, hallamos la función $u(x, t)$ que es la solución del problema (1), (2), (3). Análogamente se resuelven y otros problemas de frontera para la ecuación de termoconductividad y otros problemas de frontera para la ecuación de vibraciones de una cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (10)$$

de ecuación de los telegrafistas (véase [2] y [9])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\alpha + \beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \beta u = 0 \quad (11)$$

y ciertas otras ecuaciones que tienen la forma más general.

Problema. Los extremos de una cuerda $x = 0$ y $x = l$ son fijos. La desviación inicial se da por la igualdad $u(x, 0) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}$ ($0 \leq x \leq l$). Las velocidades iniciales son iguales a cero. Hallar las desviaciones $u(x, t)$ para $t > 0$.

Solución. El problema se reduce a la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

para las condiciones iniciales

$$u(x, 0) = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (13)$$

y las condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \quad (14)$$

Pasando a las representaciones, vamos a tener

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - \frac{p^2}{a^2} U = -\frac{pA}{a^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}, \quad (15)$$

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \quad (16)$$

Resolviendo la ecuación (15), obtendremos

$$U(x, p) = C_1 e^{px/a} + C_2 e^{-px/a} + \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2 \pi^2}{l^2}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l}. \quad$$

Tomando en consideración las condiciones de frontera (16), obtendremos

$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

El original para $U(x, p)$ es la función

$$u(x, t) = A \cos \frac{\pi at}{l} \sin \frac{\pi x}{l}$$

que es la solución del problema dado.

Resolver los problemas siguientes:

819. $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($x > 0, t > 0$), $u(0, t) = u_0, u(x, 0) = 0$,

820. $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($x > 0, t > 0$), $u(0, t) = 0, u(x, 0) = u_1$.

821. $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($x > 0, t > 0$), $u(0, t) = a \cos \omega t,$
 $u(x, 0) = 0.$

822. $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($x > 0, t > 0$), $u(0, t) = a \sin \omega t,$
 $u(x, 0) = 0.$

823. $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($x > 0, t > 0$), $u(0, t) = \varphi(t),$
 $u(x, 0) = 0.$

824. Hallar la distribución de temperaturas en una barra $0 \leq x \leq l$ para la condición que el flujo del calor no pasa a través de la frontera $x = 0$; y otra frontera $x = l$ conserva la temperatura constante u_1 ; la temperatura inicial de la barra es igual a $u_0 = \text{const.}$

825. Hallar la distribución de temperaturas en la barra semilimitada, si en el extremo izquierdo de la barra se produce la termoradiación al medio con la temperatura de cero. La temperatura inicial de la barra $u_0 = \text{const.}$

826. Una barra de longitud l se encuentra en el estado de reposo, su extremo $x = 0$ es fijo. En un momento de tiempo $t = 0$ se aplica (por unidad del área) al extremo libre de la barra la fuerza F que está dirigida a lo largo de la barra. Hallar la oscilación de barra.

827. Una barra está colgada verticalmente y está fijada de tal manera que en todos los puntos el desplazamiento sea igual a cero. En un momento de tiempo $t = 0$ la barra se

libera, siendo fija en el punto superior. Hallar la ley de oscilaciones de la barra.

828. Resolver la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bx(x-l)$$

para las condiciones iniciales nulas y las de frontera

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

829. Una cuerda homogénea, que se fija en los extremos $x = 0$ y $x = l$, tiene en el momento inicial de tiempo la forma de una parábola simétrica respecto a la perpendicular trazada por el punto $x = l/2$. Determinar el desplazamiento de los puntos de la cuerda de la posición rectilínea del equilibrio, suponiendo que faltan las velocidades iniciales.

§ 21. Transformación discreta de Laplace

Dado que tenemos la función de valores complejos $f(t)$ del argumento real t , determinada para $t \geq 0$.

Examinemos la sucesión $\{f(n)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) que designemos brevemente $f(n)$ y la llamemos *la función de retículo*. La función $f(t)$ se llama *la función generadora* para $f(n)$. De tal manera, el argumento de la función de retículo obtiene sólo los valores enteros, al mismo tiempo, para los valores negativos del argumento la función de retículo es igual a cero.

La transformación discreta de Laplace de la función de retículo $f(n)$ se llama la función $F^*(p)$ del argumento complejo $p = s + i\sigma$ que se determina por la igualdad

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} f(n); \quad (1)$$

se presupone que la serie a la derecha converge.

A la función $f(n)$ la vamos a llamar el original y a la $F^*(p)$ la llamemos su representación y vamos a escribir

$$F^*(p) \doteq f(n) \quad o \quad f(n) \doteq F^*(p).$$

El valor $\operatorname{Re} p = s^*$, para el cual para $\operatorname{Re} p = s > s^*$ la serie (1) converge, y cuando $s < s^*$ diverge, se llama *la abscisa de convergencia*. La función $F^*(p)$ es la función periódica con el período $2\pi i$, es analítica en el semiplano $\operatorname{Re} p > s^*$.

Si la función de retículo $f(n)$ satisface la condición

$$|f(n)| \leq M e^{\lambda_0 n}, \quad (2)$$

entonces la abscisa de convergencia $s^* > \lambda_0$ y, por consiguiente, la representación de tal función existe. En general, cada función $f(t)$ que es el original para la transformación ordinaria de Laplace engendra

la función de retículo $f(n)$, para la cual está determinada la transformación discreta de Laplace $F^*(p)$.

Ejemplo 1. Utilizando la definición, hallar la representación de la función

$$f(n) = e^{-n}.$$

Solución. Es evidente que esta función satisface la condición (2) cuando $\lambda_0 = 1$ y $M > 1$ arbitrario. Por consiguiente, su representación existe. Por la fórmula (4) hallamos

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} e^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(1+p)n} = \frac{1}{1 - e^{-(1+p)}} \quad (\operatorname{Re} p > -1). \quad (3)$$

Observemos que la función de retículo $f(n) = e^{n^2}$ no tiene la representación, puesto que para ella la abscisa de convergencia s^* es igual al infinito.

Utilizando la definición, hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$830. \quad f(n) = \eta(n), \text{ donde } \eta(n) = \begin{cases} 1 & \text{para } n > 0 \\ 0 & \text{para } n < 0. \end{cases}$$

$$831. \quad f(n) = n.$$

$$832. \quad f(n) = e^{an}.$$

$$833. \quad f(n) = a^n \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Principales propiedades de la transformación discreta de Laplace

1. *La propiedad de linealidad.* Para las constantes complejas cualesquiera α y β

$$\alpha f(n) + \beta g(n) \xrightarrow{\circ} \alpha F^*(p) + \beta G^*(p).$$

(Aquí y en todas partes en lo ulterior $f(n) \xrightarrow{\circ} F^*(p)$, $g(n) \xrightarrow{\circ} G^*(p)$).

Ejemplo 2. Hallar la representación de la función $f(n) = \operatorname{sen} n$.

Solución. Por las fórmulas de Euler

$$\operatorname{sen} n = \frac{e^{in} - e^{-in}}{2i} = \frac{1}{2i} e^{in} - \frac{1}{2i} e^{-in}.$$

Tenemos

$$e^{in} \xrightarrow{\circ} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-np} e^{in} = \frac{1}{1 - e^{-(p-i)}},$$

$$e^{-in} \xrightarrow{\circ} \frac{1}{1 - e^{-(p+i)}}.$$

Según la propiedad de linealidad

$$\operatorname{sen} n \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1-e^{-(p-i)}} - \frac{1}{1-e^{-(p+i)}} \right) = \frac{e^p \operatorname{sen} 1}{e^{2p} - 2e^p \cos 1 + 1}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$834. f(n) = \cos n.$$

$$835. f(n) = \operatorname{sen} \alpha n \ (\alpha = \text{const}).$$

$$836. f(p) = \operatorname{sh} n.$$

$$837. f(n) = e^n - 2e^{n/2}.$$

$$838. f(n) = \cos^2 n.$$

II. Teoremas de anticipación y de retardo. Sea $f(n) \doteq F^*(p)$, y sea k un número positivo entero. Entonces

$$f(n+k) \doteq e^{kp} [F^*(p) - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-mp} f(m)]. \quad (4)$$

En particular, si $f(0) = f(1) = \dots = f(k-1) = 0$, entonces

$$f(n+k) \doteq e^{kp} F^*(p). \quad (5)$$

Por analogía,

$$f(n-k) \doteq e^{-kp} F^*(p) \quad (f(n-k) = 0 \text{ para } n < k). \quad (6)$$

Ejemplo 3. Hallar la representación de la función $f(n) = e^{n-2}$ ($f(n) = 0$ para $n < 2$).

Solución. Tenemos

$$e^n \doteq \frac{1}{1-e^{1-p}} = \frac{e^p}{e^p - e}.$$

En virtud del teorema de retardo de (6) hallamos

$$e^{n-2} \doteq e^{-2p} \frac{e^p}{e^p - e} = \frac{1}{e^p(e^p - e)}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$839. f(n) = \eta(n-k).$$

$$840. f(n) = e^{\alpha(n+3)}.$$

$$841. f(n) = \operatorname{sh} 2(n-1) \cdot \eta(n-1).$$

$$842. f(n) = (n+2)^2.$$

III. Teorema del desplazamiento. Si $F^*(p) \doteq f(n)$, entonces para cualquier complejo p_0

$$F^*(p-p_0) \doteq e^{p_0 n} f(n). \quad (7)$$

Ejemplo 4. Hallar la representación de la función $f(n) = ne^{2n}$. *Solución.* Tenemos

$$n \doteq \frac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}.$$

Según el teorema del desplazamiento obtenemos ($p_0 = 2$)

$$e^{2n} n \doteq \frac{e^{-(p-2)}}{[1-e^{-(p-2)}]^2}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$843. f(n) = e^{-n} \operatorname{sen} 2n.$$

$$844. f(n) = n^2 e^{2n}.$$

$$845. f(n) = e^{3n} \operatorname{ch} n.$$

IV. Diferenciación de representación. La diferenciación de representación se reduce a la multiplicación del original por $-n$:

$$\frac{d}{dp} \{F^*(p)\} \stackrel{\leftrightarrow}{=} -nf(n), \quad (8)$$

en general,

$$\frac{d^k}{dp^k} \{F^*(p)\} \stackrel{\leftrightarrow}{=} (-1)^k nkf(n). \quad (9)$$

Ejemplo 5. Hallar la representación de la función $f(n) = ne^n$.

Solución. Tenemos

$$e^n \stackrel{\leftrightarrow}{=} \frac{e^p}{e^p - e}.$$

Según el teorema de la diferenciación de representación obtendremos

$$ne^n \stackrel{\leftrightarrow}{=} -\frac{d}{dp} \left(\frac{e^p}{e^p - e} \right) = \frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$846. f(n) = n^2 e^n.$$

$$847. f(n) = n^2.$$

$$848. f(n) = n \operatorname{sen} \left(n \frac{\pi}{2} \right).$$

V. Teorema de la integración de representación.

Sea la función de retículo $f(n)$ que satisface las condiciones

$$f(0) = 0, \quad \frac{f(t)}{t} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t} = 0. \quad (10)$$

Entonces

$$\frac{f(n)}{n} \stackrel{\leftrightarrow}{=} \int_p^{\infty} F^*(p) dp, \quad (11)$$

es decir, la división del original en n corresponde a la integración de representación en los límites de p hasta ∞ .

Observaciones. a) Para $f(0) \neq 0$ la integral en el miembro segundo (11) será divergente y, por consiguiente, el teorema de la integración de representación no es válida.

b) Si

$$\frac{f(t)}{t} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t} = a \neq 0,$$

entonces

$$\frac{f(n)}{n} \doteq a + \underbrace{\int_p^\infty}_{p} F^*(p) dp. \quad (12)$$

c) Si para $m = 1, 2, \dots, k$ están cumplidas las condiciones

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t^m} = 0,$$

entonces

$$\frac{f(n)}{n^k} \doteq \underbrace{\int_p^\infty \dots \int_p^\infty}_{k} F^*(p) dp \dots dp, \quad (13)$$

es decir, la división del original en n^k corresponde a k -multiple integración de representación de p hasta ∞ .

Ejemplo 6. Hallar la representación de la función de retículo $e^n - 1 - n$.

Solución. Sea $f(n) = e^n - 1 - n$.

Verificamos si es posible cumplir las condiciones (10). Tenemos

$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{f(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{e^t - 1 - t}{t} = \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{e^t - 1}{t} - 1 \right) = 1 - 1 = 0.$$

Hallamos la representación de función

$$e^n - 1 - n \doteq \frac{e^p}{e^p - e} - \frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{(e^p - 1)^2}.$$

Puesto que las condiciones (10) están cumplidas, entonces

$$\begin{aligned} \frac{e^n - 1 - n}{n} &\doteq \int_p^\infty \left[\frac{e^p}{e^p - e} - \frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{(e^p - 1)^2} \right] dp = \\ &= \left[\ln(e^p - e) - \ln(e^p - 1) + \frac{1}{e^p + 1} \right]_p^\infty = \\ &= \left[\ln \frac{e^p - e}{e^p - 1} + \frac{1}{e^p + 1} \right]_p^\infty = \ln \frac{e^p - 1}{e^p - e} - \frac{1}{e^p - 1}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7. Hallar la representación de la función de retículo $\operatorname{sh} \frac{\alpha n}{n}$ ($\alpha \neq 0$).

Solución. Sea $f(n) = \operatorname{sh} \alpha n$. Tenemos

$$f(0) = 0; \quad \frac{f(t)}{t} \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\operatorname{sh} \alpha t}{t} = \alpha \neq 0.$$

La representación de la función $f(n)$ es

$$\operatorname{sh} \alpha n \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{e^p}{e^p - e^\alpha} - \frac{e^p}{e^p - e^{-\alpha}} \right).$$

Hallamos la representación de la función dada, empleando la relación (12):

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \alpha n}{n} &\doteq \alpha + \frac{1}{2} \int_p^\infty \left(\frac{e^p}{e^p - e^\alpha} - \frac{e^p}{e^p - e^{-\alpha}} \right) dp = \\ &= \alpha + \frac{1}{2} [\ln(e^p - e^\alpha) - \ln(e^p - e^{-\alpha})] \Big|_p^\infty = \\ &= \alpha + \frac{1}{2} \ln \frac{e^p - e^\alpha}{e^p - e^{-\alpha}} \Big|_p^\infty = \alpha + \frac{1}{2} \ln \frac{e^p - e^{-\alpha}}{e^p - e^\alpha}. \end{aligned}$$

Hallar representaciones de las funciones siguientes:

$$849. \frac{a^n - 1}{n} \quad (a > 0, a \neq 1). \quad 850. \frac{\operatorname{sen} \alpha n}{n} \quad (\alpha \neq 0).$$

$$850. \frac{1 - \cos \alpha n}{n}.$$

$$852. \frac{n - \operatorname{sh} n}{n}.$$

VI. La diferenciación respecto al parámetro. Sea que el original y la representación contienen el parámetro ε que no depende de n y p , y sea que

$$F^*(p, \varepsilon) \doteq f(n, \varepsilon).$$

Entonces

$$\frac{\partial F^*(p, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \doteq \frac{\partial f(n, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}, \quad (14)$$

es decir, la derivada por ε de la representación es la representación de la derivada por ε del original. Supongamos que todas estas derivadas existen, y $\frac{\partial f(n, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}$ es el original.

Ejemplo 8. Hallar la representación $ne^{\alpha n}$ (α es real).

Solución. Tenemos $e^{\alpha n} \doteq \frac{e^p}{e^p - e^\alpha}$. Tomemos α en calidad del parámetro. En la base del teorema de la diferenciación respecto al parámetro

$$\left(\frac{e^p}{e^p - e^\alpha} \right)'_\alpha \doteq (e^{\alpha n})'_\alpha = ne^{\alpha n}.$$

De aquí

$$ne^{\alpha n} \doteq \frac{e^p e^\alpha}{(e^p - e^\alpha)^2}.$$

Hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$853. f(n) = n \cos an.$$

$$854. f(n) = n^2 \operatorname{sh} an.$$

$$855. f(n) = (n+2) \operatorname{ch} an.$$

VII. Integración respecto al parámetro. Si $f(n, e) \stackrel{*}{=} F^*(p, e)$ donde el parámetro e no depende de n y p ($e_0 \leq e \leq \lambda$), entonces

$$\int_{e_0}^e f(n, e) de \stackrel{*}{=} \int_{e_0}^e F^*(p, e) de, \quad (15)$$

es decir, la integración respecto al parámetro e del original corresponde a la integración de la representación respecto al parámetro e .

Ejemplo 9. Mediante la integración respecto al parámetro hallar la representación de la función de retículo $\frac{1 - \cos en}{n}$.

Solución. Tenemos

$$\operatorname{sen} en \stackrel{*}{=} \frac{e^p \operatorname{sen} e}{e^{2p} - 2e^p \cos e + 1}.$$

Integramos los miembros primero y segundo de esta relación respecto al parámetro e en los límites de $e_0 = 0$ hasta e :

$$\int_0^e \operatorname{sen} en de \stackrel{*}{=} \int_0^e \frac{e^p \operatorname{sen} e de}{e^{2p} - 2e^p \cos e + 1}.$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos en}{n} &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \ln(e^{2p} - 2e^p \cos e + 1) \Big|_0^e = \\ &= \frac{1}{2} [\ln(e^{2p} - 2e^p \cos e + 1) - \ln(e^{2p} - 2e^p + 1)]. \end{aligned}$$

Pués,

$$\frac{1 - \cos en}{n} \stackrel{*}{=} \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2p} - 2e^p \cos e + 1}{(e^p - 1)^2}.$$

Empleando la integración respecto al parámetro, hallar las representaciones de las funciones siguientes:

$$856. \frac{e^{en} - e^{e_0 n}}{n}. \quad 857. \frac{\operatorname{ch} en - \operatorname{ch} n}{n}.$$

$$858. \frac{\operatorname{sen} en}{n}. \quad 859. \frac{\operatorname{sen}(e-1)n \cdot \cos(en-1)n}{n}.$$

Teorema de la multiplicación de representaciones. Sea

$$f_1(n) \stackrel{*}{=} F_1^*(p), \quad f_2(n) \stackrel{*}{=} F_2^*(p).$$

Entonces

$$F_1^*(p) \cdot F_2^*(p) = \sum_{m=0}^n f_1(n-m) f_2(m) = \sum_{m=0}^n f_1(m) f_2(n-m). \quad (16)$$

Ejemplo 10. Hallar el orginal que corresponde a la representación

$$F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(ep - e)(ep - e^{-1})}.$$

Solución. La representación $F^*(p)$ se puede representarla en forma de producto de dos representaciones

$$F_1^*(p) = \frac{e^p}{ep - e} = e^n, \quad F_2^*(p) = \frac{e^p}{ep - e^{-1}} = e^{-n}.$$

En virtud del teorema de la multiplicación

$$F^*(p) = \sum_{m=0}^n e^{-m} e^{n-m} = e^n \sum_{m=0}^n e^{-2m} = \frac{e^n \cdot e^2}{e^2 - 1} = \frac{e^{-n}}{e^2 - 1}.$$

Utilizando el teorema de la multiplicación, hallar los originales para las representaciones siguientes:

$$860. \quad F^*(p) = \frac{e^p}{(ep - 1)(ep - e)}.$$

$$861. \quad F^*(p) = \frac{e^{-p}}{(1 - e^{-p})^2} \cdot \frac{e^p}{ep - 1}.$$

$$862. \quad F^*(p) = \frac{e^p}{(ep - 1)^2(ep - e)}.$$

$$863. \quad F^*(p) = \frac{e^{2p}}{(ep - e^2)(ep - 1)}.$$

La representación de diferencias. La magnitud que se designa por el símbolo $\Delta f(n)$ y que se determina por la igualdad

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \quad (17)$$

se llama la diferencia del primer orden de la función de retículo $f(n)$.

La magnitud que es igual a

$$\Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n) \quad (18)$$

o, teniendo en cuenta (17),

$$\Delta^2 f(n) = f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) \quad (19)$$

se llama la diferencia del segundo orden $\Delta^2 f(n)$.

En general, la diferencia de k orden $\Delta^k f(n)$ se determina por la relación

$$\Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n) \quad (20)$$

o

$$\Delta^k f(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j C_k^j f(n+k-j), \quad (21)$$

donde $C_k^j = \frac{k}{j!(k-j)!}$ son los coeficientes binomiales.

Ejemplo 11. Hallar las diferencias para la función $f(n) = 2n^2$.

Solución. Según la definición la primera diferencia es

$$\Delta f(n) = 2(n+1)^2 - 2n^2 = 2(2n+1).$$

Segunda diferencia es

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(n) &= \Delta f(n+1) - \Delta f(n) = \\ &= 2[2(n+1)+1] - 2(2n+1) = 4.\end{aligned}$$

Es evidente que todas las diferencias del orden más alto son iguales a cero (comparamen con las derivadas de la función $f(t) = 2t^2$).

En los problemas siguientes hallar las diferencias del k orden:

$$864. f(n) = 3n + 2. \quad 865. f(n) = e^{2n}. \quad 866. f(n) = n^2 - n.$$

Sea $f(n) \xrightarrow{*} F^*(p)$. Entonces

$$\Delta f(n) \xrightarrow{*} (e^p - 1) F^*(p) - e^p f(0),$$

$$\Delta^2 f(n) \xrightarrow{*} (e^p - 1)^2 F^*(p) - e^p (e^p - 1) f(0) - e^p \Delta f(0),$$

etc.

En general,

$$\Delta^k f(n) \xrightarrow{*} (e^p - 1)^k F^*(p) - e^p \sum_{v=0}^{k-1} (e^p - 1)^{k-v-1} \Delta^v f(0), \quad (22)$$

donde $\Delta^0 f(0) = f(0)$. De la relación (22) hallamos

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 1} \sum_{v=0}^{k-1} \frac{\Delta^v f(0)}{(e^p - 1)^v} + \frac{1}{(e^p - 1)^k} L_D \{ \Delta^k f(n) \}, \quad (23)$$

donde $L_D \{ \Delta^k f(n) \}$ es la representación $\Delta^k f(n)$ en el sentido de la transformación discreta de Laplace.

Si, en particular, $\Delta^v f(0) = 0$ ($v = 0, 1, \dots, k-1$) o que es equivalente $f(0) = f(1) = \dots = f(k-1) = 0$, entonces la fórmula (22) adquiere la forma más simple

$$\Delta^k f(n) \xrightarrow{*} (e^p - 1)^k F^*(p),$$

es decir, las operaciones de determinar las diferencias de k orden del original, le corresponde la multiplicación de representación por $(e^p - 1)^k$.

Ejemplo 12. Hallar la representación de la función $f(n) = n^2$.

Solución. Tenemos

$$\Delta f(n) = 2n + 1,$$

$$\Delta^2 f(n) = 2n + 3 - 2n - 1 = 2,$$

$$\Delta^k f(n) = 0 \quad (k > 2).$$

En seguida $f(0) = 0$, $\Delta f(0) = 1$, $\Delta^2 f(0) = 2$. Suponiendo en la igualdad (23) $k = 3$, obtendremos

$$\begin{aligned} f(n) \stackrel{*}{\rightarrow} F^*(p) &= \frac{e^p}{e^p - 1} \sum_{v=0}^2 \frac{\Delta^v f(0)}{(e^p - 1)^v} = \\ &= \frac{e^p}{e^p - 1} \left(0 + \frac{1}{e^p - 1} + \frac{2}{(e^p - 1)^2} \right) = \frac{e^p(e^p + 1)}{(e^p - 1)^3}. \end{aligned}$$

Hallar las representaciones de funciones:

867. $f(n) = n^3$. 868. $f(n) = \frac{n(n-1)}{2!}$

869. $f(n) = (n - k)^2 \eta(n - k)$.

Representación de suma. Sea $f(n)$ la función de retículo que tiene la representación

$$f(n) \stackrel{*}{\rightarrow} F^*(p).$$

Examinemos la suma

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m).$$

Entonces

$$\sum_{m=0}^{n-1} f(m) \stackrel{*}{\rightarrow} \frac{F^*(p)}{e^p - 1},$$

es decir, a la sumación de originales le corresponde la división de la representación en $e^p - 1$.

En general, la sumación k múltiple del original corresponde a la división de la representación en $(e^p - 1)^k$.

Ejemplo 13. Utilizando el teorema de la representación de la suma, hallar la suma

$$\sum_{m=0}^{n-1} m e^m.$$

Solución. La representación $n e^n$ es igual a $\frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2}$. Por eso de acuerdo con el teorema de la representación de suma

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-1} m e^m &\stackrel{*}{\rightarrow} \frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2 (e^p - 1)} = \\ &= \frac{e}{(e-1)^2} \left[\frac{e^p}{e^p - 1} - \frac{e^p}{e^p - e} + \frac{e-1}{e} \cdot \frac{e^{p+1}}{(e^p - e)^2} \right] \stackrel{*}{\rightarrow} \\ &\stackrel{*}{\rightarrow} \frac{e}{(e-1)^2} \left[1 - e^n + \frac{(e-1)ne^n}{e} \right]. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\sum_{m=0}^{n-1} m e^m = \frac{e(1-e^n) + (e-1)n e^n}{(e-1)^2}.$$

Hallar las sumas siguientes:

$$870. \sum_{m=0}^{n-1} m^2.$$

$$871. \sum_{m=0}^{n-1} m \cos m\alpha.$$

$$872. \sum_{m=0}^{n-1} m(m-1).$$

$$873. \sum_{m=0}^{n-1} e^m \cos m\alpha \quad (n \geq 2).$$

Fórmula de inversión. Dado que la función de retículo $f(n)$ tiene como su representación la función $F^*(p)$ de la variable compleja $p = \sigma + i\tau$, donde $F^*(p)$ debido a su periodicidad: $F^*(p + 2\pi i) = F^*(p)$ se examina en la franja principal $-\pi < \operatorname{Im} p \leq \pi$.

Si es conocida la representación $F^*(p)$, entonces el original $f(n)$ se puede hallarlo según la fórmula de inversión

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\pi}^{c+i\pi} F^*(p) e^{np} dp, \quad (24)$$

donde c es cualquier número real que es más grande que la abscisa de convergencia s^* .

En el caso, cuando $F^*(p)$ es una fracción propia racional respecto e^p , tenemos

$$f(n) = \sum_v \operatorname{res}_{p_v} [F^*(p) e^{(n-1)p}], \quad (25)$$

donde la suma se toma por todos los polos de la función $F^*(p)$ que se encuentran en la franja $-\pi < \operatorname{Im} p \leq \pi$ y en su frontera $\operatorname{Im} p = \pi$. Si p_v es un polo simple, entonces

$$\operatorname{res}_{p_v} [F^*(p) e^{p(n-1)}] = \lim_{p \rightarrow p_v} [F^*(p) (e^p - e^{p_v}) e^{p(n-1)}]; \quad (26)$$

si p_v es el polo de orden r_v , entonces

$$\operatorname{res}_{p_v} [F^*(p) e^{p(n-1)}] =$$

$$= \frac{1}{(r_v-1)!} \lim_{p \rightarrow p_v} \frac{d^{r_v-1}}{dp^{r_v-1}} [F^*(p) (e^p - e^{p_v})^{r_v} e^{p(n-1)}]. \quad (27)$$

Ejemplo 14. Utilizando la fórmula (25), hallar el original que corresponde a la representación

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 3e^p + 2}.$$

Solución. Hallamos ceros del denominador. Tenemos $e^{2p} - 3e^p + 2 = 0$, de donde $e^p = 1$ y $e^p = 2$. Por consiguiente, $p_1 = 0$,

$p_1 = \ln 2$ son los ceros simples del denominador y, por consiguiente, ellos son los polos simples de la función $F^*(p)$ en la franja principal. Hallamos los residuos de la función $F^*(p) e^{p(n-1)}$ respecto a estos polos. Tenemos

$$\text{res}_{p=0} [F^*(p) e^{p(n-1)}] = \lim_{p \rightarrow 0} \left[\frac{e^p (e^p - 1)}{(e^p - 1)(e^p - 2)} e^{p(n-1)} \right] = \\ = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^{pn}}{e^p - 2} = -1;$$

$$\begin{aligned} \text{res}_{p=\ln 2} [F^*(p) e^{p(n-1)}] &= \lim_{p \rightarrow \ln 2} \frac{e^p (e^p - e^{\ln 2}) e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)(e^p - 2)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow \ln 2} \frac{e^{pn}}{e^p - 1} = \frac{e^n \ln 2}{e^{\ln 2} - 1} = \frac{e^{\ln 2^n}}{2 - 1} = 2^n. \end{aligned}$$

Por consiguiente, mediante la fórmula (25) obtenemos

$$f(n) = -1 + 2^n.$$

Ejemplo 15. Mediante la fórmula de inversión hallar el original para la función

$$F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 1}.$$

Solución. La función

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 1)(e^p + 1)}$$

tiene dos polos simples en los puntos $p_1 = 0$, $p_2 = i\pi$ de la franja principal $-\pi < \operatorname{Im} p \leq \pi$. Hallamos

$$\begin{aligned} \text{res}_{p=0} [F^*(p) e^{p(n-1)}] &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^p (e^p - 1) e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)(e^p + 1)} = \frac{1}{2}, \\ \text{res}_{p=i\pi} [F^*(p) e^{p(n-1)}] &= \lim_{p \rightarrow i\pi} \frac{e^p (e^p - e^{i\pi}) e^{p(n-1)}}{(e^p - 1)(e^p + 1)} = \\ &= \lim_{p \rightarrow i\pi} \frac{e^{pn}}{e^p - 1} = \frac{n^{i\pi n}}{e^{i\pi} - 1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

Según la fórmula (25)

$$f(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (-1)^{n-1}.$$

Hallar originales para las representaciones siguientes:

$$874. F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - 3)^2} \quad 875. F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - 7e^p + 10}.$$

$$876. F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} + 1} \quad 877. F^*(p) = \frac{e^{2p}}{e^{4p} - 1}.$$

$$878. F^*(p) = \frac{e^p}{e^{2p} + 2ae^p + 2a^2} \quad (a > 0).$$

$$879. F^*(p) = \frac{ep}{(ep - e)^3}.$$

Solución de las ecuaciones en diferencia mediante la transformación discreta de Laplace. La ecuación que tiene la forma

$$F(n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)) = 0 \quad (28)$$

o

$$F(n, f(n), \Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)) = 0, \quad (29)$$

donde $f(n)$ que es la función de retículo buscada, se llama *la ecuación en diferencias de k orden*.

La ecuación de la forma (28) se reduce a la ecuación de la forma (29) mediante la fórmula

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \Delta f(n) + C_k^2 \Delta^2 f(n) + \dots + \Delta^k f(n), \quad (30)$$

y con ayuda de la fórmula

$$\Delta^k f(n) = f(n+k) - C_k^1 f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \dots - (-1)^k f(n) \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (31)$$

donde $C_k^m = \frac{k(k-1)\dots(k-m+1)}{m!}$ son los coeficientes binomiales, la ecuación (29) se reduce a la ecuación (28).

Si la ecuación (29) es lineal respecto a $f(n)$ y sus diferencias, ella se llama la ecuación lineal en diferencias. La ecuación lineal en diferencias de k orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$b_0 \Delta^k f(n) + b_1 \Delta^{k-1} f(n) + \dots + b_k f(n) = \varphi(n), \quad (32)$$

donde $\varphi(n)$ es la función de retículo prefijado, $f(n)$ es la función de retículo buscada, b_0, b_1, \dots, b_k son constantes, al mismo tiempo $b_0 \neq 0, b_k \neq 0$.

Sustituyendo en la ecuación (32) las diferencias $\Delta^m f(n)$ ($m = 1, 2, \dots, 8$) mediante la fórmula (31), obtenemos otra forma de la ecuación lineal en diferencias:

$$a_0 f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = \varphi(n). \quad (33)$$

Si $\varphi(n) \equiv 0$, entonces las ecuaciones (32) y (33) se llaman *homogéneas*, si $\varphi(n) \not\equiv 0$, entonces estas ecuaciones llaman *no homogéneas*.

La ecuación en diferencias que contiene $f(n)$ y $f(n+k)$ se llama la ecuación en diferencias de k orden ($k > 0$). De ese modo, la ecuación (33) para $a_0 \neq 0$ y $a_k \neq 0$ es la ecuación lineal en diferencia no homogénea de k orden.

El orden de la ecuación en diferencias puede no coincidir con el orden de la diferencia más alta que entra en esta ecuación, si la ecuación en diferencias está escrita en la forma (32).

Ejemplo 16. La ecuación en diferencias

$$\Delta^8 f(n) + 4\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = 0$$

después de sustituir en ella las diferencias según la fórmula (31) se reduce a la forma

$$f(n+3) + f(n+2) = 0$$

o

$$f(n+1) + f(n) = 0,$$

es decir, es la ecuación en diferencias del primer orden.

Determinar los órdenes de las siguientes ecuaciones en diferencias

$$880. \Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - f(n) = 0.$$

$$881. \Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) + 3\Delta f(n) + f(n) = n^3 + 1.$$

$$882. \Delta^3 f(n) + 2\Delta^2 f(n) + \Delta f(n) = 2^n.$$

$$883. \Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + \\ + 2f(n) = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}.$$

Las condiciones iniciales para la ecuación en diferencias de k orden se prefijan en la forma de los valores de la función de retículo $f(n)$ y de sus diferencias hasta $(k-1)$ orden inclusive siendo $n=0$, si la ecuación tiene la forma (32) o en la forma de valores de la función de retículo $f(n)$ cuando $n=0, 1, \dots, k-1$, si la ecuación tiene la forma (33).

La solución de las ecuaciones lineales en diferencias de los coeficientes constantes empleando el método de la transformación discreta de Laplace se efectúa según el mismo esquema que en el caso de la transformación clásica de Laplace. Aplicando la transformación discreta de Laplace para tales ecuaciones y utilizando los teoremas de linealidad, de anticipación o de la representación de diferencias, llegamos a la ecuación lineal algebraica simple respecto a la representación $F^*(p)$ de la función buscada $f(n)$ (ya tomando en consideración las condiciones iniciales). Resolviendo esta ecuación algebraica respecto a $F^*(p)$, obtenemos la solución operacional de la ecuación en diferencias, para la cual el original será la solución buscada de la ecuación inicial en diferencias que satisface las condiciones iniciales dadas.

Ejemplo 17. Hallar la solución de la ecuación

$$f(n+1) - ef(n) = 1, f(0) = 0. \quad (34)$$

Solución. Sea $f(n) \rightleftharpoons F^*(p)$. Según el teorema de anticipación $f(n+1) \rightleftharpoons e^p F^*(p)$.

Aplicando a ambos miembros de (34) la transformación discreta de Laplace, obtenemos la ecuación operacional

$$e^p F^*(p) - eF^*(p) = \frac{e^p}{e^p - 1},$$

de donde

$$F^*(p) = \frac{e^p}{(e^p - e)(e^p - 1)}.$$

La función $F^*(p)$ tiene dos polos simples $p=0, p=1$:

$$\operatorname{res}_{p=0} [F^*(p) e^{(n-1)p}] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{e^p}{e^p - e} e^{(n-1)p} = \frac{1}{1-e},$$

$$\operatorname{res}_{p=1} [F^*(p) e^{(n-1)p}] = \frac{e}{e-1} e^{n-1} = \frac{e^n}{e-1}.$$

Por consiguiente, mediante la fórmula (25)

$$f(n) = \frac{e^n - 1}{e - 1}.$$

Resolver las siguientes ecuaciones lineales homogéneas en diferencias:

$$884. \quad f(n+1) - 2f(n) = 0, \quad f(0) = 1.$$

$$885. \quad f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 0, \quad f(0) = 1, \\ f(1) = 0.$$

$$886. \quad f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0, \quad f(0) = 0, \\ f(1) = 1.$$

$$887. \quad f(n+3) - 3f(n+2) + 4f(n+1) - 2f(n) = 0, \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1.$$

$$888. \quad f(n+4) + f(n) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \\ f(2) = 0, \quad f(3) = 0.$$

$$889. \quad f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0, \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1.$$

Resolver las siguientes ecuaciones lineales no homogéneas en diferencias:

$$890. \quad f(n+1) + 2f(n) = n, \quad f(0) = 0.$$

$$891. \quad f(n+2) - 4f(n) = 4^n, \quad f(0) = f(1) = 1.$$

$$892. \quad f(n+2) + f(n) = 1 - (-1)^n, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1$$

$$893. \quad f(n+2) - 6f(n+1) + 9f(n) = n \cdot 3^n, \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

$$894. \quad f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = \\ = \cos n\pi, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0.$$

$$895. \quad f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = n^2, \\ f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 0.$$

Capítulo III

Teoría de la estabilidad

§ 22. Concepto acerca de la estabilidad de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. Los más simples tipos de puntos de reposo

Supongamos que tenemos un sistema de las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy_i}{dt} = f_i(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

donde $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ ($i, k = 1, 2, \dots, n$) existen y son continuas, y sea $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) la solución de este sistema que para $t = t_0$ satisface las condiciones

$$\varphi_i(t_0) = \varphi_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

La solución $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1) se llama estable según Liapunov para $t \rightarrow +\infty$, si para cualquiera $\epsilon > 0$ se puede escoger $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquiera solución $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del mismo sistema (1), los valores iniciales del cual satisfacen las desigualdades

$|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta(\epsilon) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$
para todas $t \geq t_0$ son válidas las desigualdades

$$|y_i(t) - \varphi_i(t)| < \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

es decir, soluciones próximas por los valores iniciales se quedan próximas para todas $t \geq t_0$.

Con otras palabras, la solución $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es estable, si suficientemente próxima a ella en el momento inicial $t = t_0$ solución $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) para todas $t \geq t_0$ se contiene en tanto como se quiera estrecho e tubo construido alrededor de la solución $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Si para tanto como se quiera pequeña $\delta > 0$ por lo menos para una sola solución $y_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) las desigualdades (2) no se cumplen, entonces la solución $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) se llama inestable.

Si la solución $\varphi_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es estable, y también, además, satisface las condiciones

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \varphi_i(t)| = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

cuando $|y_i(t_0) - \varphi_i^0| < \delta_1$, entonces la solución $\varphi_i(t)$ se llama estable asintóticamente.

El problema sobre la estabilidad de solución $\varphi_i(t)$ del sistema (1) puede ser reducido al problema de la estabilidad de solución nula $x_i(t) = 0$ de cierto sistema nuevo de ecuaciones que se obtiene de (1) por la sustitución lineal de las funciones buscadas

$$x_i(t) = y_i(t) - \varphi_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

donde $x_i(t)$ son las funciones nuevas incógnitas iguales a las desviaciones de las funciones incógnitas anteriores $y_i(t)$ de las funciones $\varphi_i(t)$ que determinan la solución a examinar. Por lo tanto en lo posterior vamos a considerar que se examina a la estabilidad precisamente la solución nula $x_i(t) = 0$ o que es lo mismo el punto de reposo que se encuentra en el origen de coordenadas del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

En vez del término «solución nula» vamos a emplear el término *solución trivial*.

En la aplicación al punto de reposo $x_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) la condición de estabilidad es la siguiente:

El punto de reposo $x_1(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (5) es estable según Liapunov, si para cada $\epsilon > 0$ se puede escoger $\delta(\epsilon) > 0$ tal que de la desigualdad $|x_i(t_0)| < \delta(\epsilon)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) se desprende $|x_i(t)| < \epsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$) para todas $t \geq t_0$.

Ejemplo 1. Cada solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad (6)$$

es estable.

Realmente, la solución $x_1(t)$ de esta ecuación que satisface la condición inicial $x_1(t_0) = x_1^0$, es $x_1(t) = x_1^0 = \text{const}$.

Examinemos otra solución $x_2(t)$ de la ecuación (6) que satisface la condición inicial

$$x_2(t_0) = x_2^0. \quad (7)$$

Para estas soluciones tenemos $|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0|$ para todas t . Por consiguiente, para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, verbi gracia, $\delta = \epsilon$ tal que en cuanto $|x_2^0 - x_1^0| < \delta$, entonces para las soluciones $x_2(t)$ y $x_1(t)$ se cumple la desigualdad

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| < \epsilon \text{ para todas } t \geq t_0.$$

Por consiguiente, cualquiera solución de la ecuación (6) es estable. Sin embargo no existe la estabilidad asintótica:

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| \neq 0 \text{ para } t \rightarrow +\infty.$$

Ejemplo 2. Cada solución de la ecuación

$$\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (8)$$

es asintóticamente estable.

En realidad, la solución general de la ecuación tiene la forma

$$x(t) = Ce^{-t}. \quad (9)$$

Las soluciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ de la ecuación (8) que satisfacen las condiciones iniciales $x_1(t_0) = x_1^0$, $x_2(t_0) = x_2^0$ son

$$x_1(t) = x_1^0 e^{-(t-t_0)}, \quad x_2(t) = x_2^0 e^{-(t-t_0)}.$$

De aquí

$$|x_2(t) - x_1(t)| = |x_2^0 - x_1^0| e^{-(t-t_0)} \rightarrow 0 \text{ para } t \rightarrow +\infty$$

que significa la estabilidad asintótica de solución cualquiera de la ecuación (8).

Ejemplo 3. Solución $x(t) = -1$ de la ecuación $\frac{dx}{dt} = 1 - x^2(t)$ es estable, puesto que para $t \rightarrow +\infty$ todas las soluciones de la ecuación

$$x(t) = \frac{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} - (1-x_0)}{(1+x_0)e^{2(t-t_0)} + (1-x_0)}$$

se tienden a $+1$. La solución $x(t) = 1$ de esta ecuación según la definición es estable asintóticamente.

Empleando la definición, examinar de la estabilidad las soluciones de las ecuaciones siguientes y sistemas:

$$896. \frac{dx}{dt} + x = 1, \quad x(0) = 1.$$

$$897. \frac{dx}{dt} = -t(x-1), \quad x(0) = 1.$$

$$898. \frac{dx}{dt} - 2x = t, \quad x\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$899. \frac{dx}{dt} = 2xt, \quad x(0) = 0.$$

$$900. \frac{dx}{dt} = \cos t, \quad x(0) = 1.$$

$$901. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -3y - 2x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

$$902. \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = 2y + 3x, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0.$$

Los más simples tipos de los puntos de reposo. Suponemos que tenemos el sistema de las ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (A)$$

El punto (x_0, y_0) se llama *el punto de reposo o el punto singular del sistema (A)*, si $P(x_0, y_0) = 0, Q(x_0, y_0) = 0$.

Examinemos el sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y, \end{cases} \quad (1)$$

donde a_{ij} ($i, j = 1, 2$) son constantes. El punto $(0,0)$ es el punto de reposo del sistema (1). Examinemos la disposición de trayectorias del sistema (1) en el entorno de este punto. Buscamos la solución en la forma

$$x = \alpha_1 e^{kt}, \quad y = \alpha_2 e^{kt}. \quad (2)$$

Para definir k obtenemos la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Examinemos los casos posibles.

I. *Las raíces de la ecuación característica son reales y distintas.*
Los subcasos: 1) $k_1 < 0, k_2 < 0$. El punto de reposo es asintóticamente estable (el nudo estable). 2) $k_1 > 0, k_2 > 0$. El punto de reposo es inestable (el nudo inestable). 3) $k_1 > 0, k_2 < 0$. El punto de reposo es inestable (la ensilladura). 4) $k_1 = 0, k_2 > 0$. El punto de reposo es inestable. 5) $k_1 = 0, k_2 < 0$. El punto de reposo es estable, pero no asintóticamente.

II. *Las raíces de la ecuación característica son complejas: $k_1 = -p + qi, k_2 = p - qi$.* Los subcasos: 1) $p < 0, q \neq 0$. El punto de reposo es estable asintóticamente (el foco estable). 2) $p > 0, q \neq 0$. El punto de reposo es inestable (el foco inestable). 3) $p = 0, q \neq 0$. El punto de reposo es estable (el centro). No existe la estabilidad asintótica.

III. *Las raíces múltiples: $k_1 = k_2$.* Los subcasos: 1) $k_1 = k_2 < 0$. El punto de reposo es asintóticamente estable (el nudo estable). 2) $k_1 = k_2 > 0$. El punto de reposo es inestable (el nudo inestable). 3) $k_1 = k_2 = 0$. El punto de reposo es inestable. Es posible un caso singular, cuando todos los puntos del plano son los puntos estables de reposo.

Para el sistema de las ecuaciones lineales homogéneas de los coeficientes constantes

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

la ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

1) Si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica (5) del sistema (4) son negativas, entonces el punto de reposo $x_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es asintóticamente estable.

2) Si la parte real por lo menos de una sola raíz de la ecuación característica (5) es positiva, $\operatorname{Re} k_i = p_i > 0$, entonces el punto de reposo $x_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (4) no es estable.

3) Si la ecuación característica (5) tiene las raíces *simples* de la parte real nula (cuando las raíces son nulas o puramente imaginarias), entonces el punto de reposo $x_i(t) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (4) es estable, pero no asintóticamente.

Ejemplo 4. Determinar el carácter del punto de reposo $(0, 0)$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

Solución. En el caso dado

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = 1, \quad a_{21} = -1, \quad a_{22} = 0.$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad k^2 + 1 = 0.$$

Las raíces de la ecuación característica $k_{1,2} = \pm i$ son puramente imaginarias. El punto de reposo es estable y es el centro.

Determinar el carácter del punto de estabilidad $(0, 0)$ en los sistemas siguientes:

$$903. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$$

$$904. \begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y. \end{cases}$$

$$905. \begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$906. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x. \end{cases}$$

$$907. \begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$908. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

$$909. \begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y. \end{cases}$$

$$910. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2z, \\ \dot{y} = 5x - 3y + 3z, \\ \dot{z} = -x - 2z. \end{cases}$$

$$911. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y + 4z, \\ \dot{y} = 4x - 7y + 8z, \\ \dot{z} = 6x - 7y + 7z. \end{cases}$$

Para el sistema de dos ecuaciones lineales de los coeficientes constantes reales

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1)$$

la ecuación característica (3) se reduce a la forma

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

1) Si $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, entonces la solución nula del sistema (1) es asintóticamente estable.

2) Si $a_1 > 0$, $a_2 = 0$ ó $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, entonces la solución nula es estable, pero no asintóticamente.

3) En todos los demás casos la solución nula es inestable; sin embargo, para $a_1 = a_2 = 0$ es posible un caso singular, cuando la solución nula es estable, pero no asintóticamente.

Ejemplo 5. Determinar los valores del parámetro α , para los cuales la solución nula del sistema es estable

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (\alpha - 1)x - \alpha y. \end{cases}$$

Solución. La ecuación característica para el sistema dado tiene la forma

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ \alpha - 1 & -\alpha - k \end{vmatrix} = 0$$

o $k^2 + \alpha k + 1 - \alpha = 0$. Aquí $a_1 = \alpha$, $a_2 = 1 - \alpha$.

La estabilidad asintótica de la solución nula tendrá lugar para $\alpha > 0$, $1 - \alpha > 0$, es decir, para $0 < \alpha < 1$.

La estabilidad, pero no asintótica, la tendremos en dos casos:

a) $\alpha > 0$, $1 - \alpha = 0$; es decir, para $\alpha = 1$;

b) $\alpha = 0$, $1 - \alpha > 0$; es decir, para $\alpha = 0$.

Para todos otros valores de α la solución nula es inestable.

Determinar los valores del parámetro α , para los cuales las soluciones nulas de los sistemas siguientes son estables:

912. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

913. $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y. \end{cases}$

914. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$

915. $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

916. $\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - y, \\ \dot{y} = \alpha y - z, \\ \dot{z} = \alpha z - x. \end{cases}$

Ejemplo 6. En el plano de los parámetros α y β hallar los dominios, en los cuales la solución nula del sistema de ecuaciones es estable

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1) y, \\ \dot{y} = x - \beta y. \end{cases}$$

Solución. La ecuación característica del sistema

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0$$

$$k^2 + (\beta - \alpha)k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0.$$

Aquí

$$a_1 = \beta - \alpha, \quad a_2 = 1 + \alpha\beta - \beta;$$

a_1 y a_2 son las funciones continuas de α y β , por lo tanto los signos a_1 y a_2 van a cambiarse donde $a_1 = a_2 = 0$, es decir, en la recta

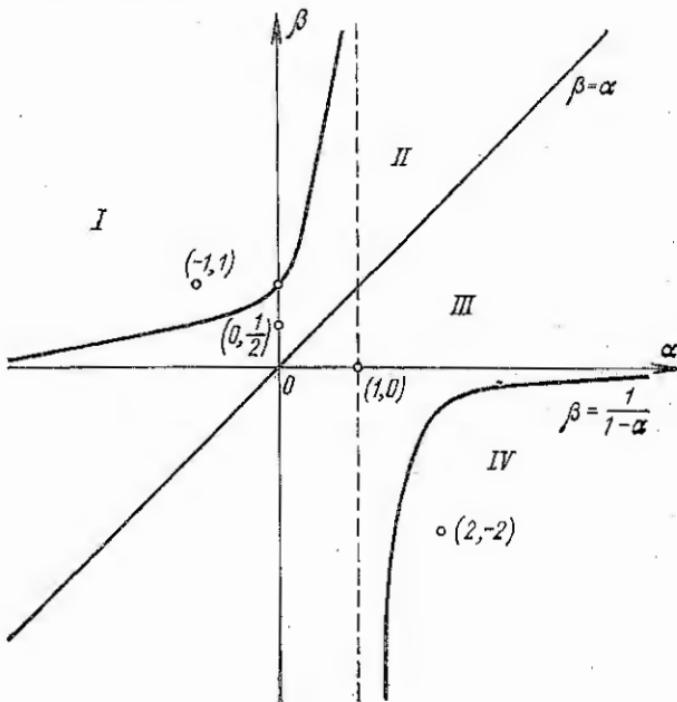


Fig. 37

$\beta - \alpha = 0$ y en la hipérbola $1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Estas líneas parten el plano de parámetros α , β en los cuatro dominios I , II , III , IV (fig. 37), en cada uno de los cuales los signos a_1 y a_2 son constantes.

Tomemos un punto arbitrario en cada dominio y determinemos en estos puntos los signos de coeficientes a_1 y a_2 .

El dominio I: en el punto $(-1; 1)$ tenemos $a_1 = 2 > 0$, $a_2 = -1 < 0$. La solución nula del sistema en este dominio es inestable.

El dominio II: en el punto $(0, \frac{1}{2})$ tenemos $a_1 = \frac{1}{2} > 0$, $a_2 = -\frac{1}{2} > 0$. La solución nula del sistema en el dominio II es asintóticamente estable.

El dominio III: en el punto $(1, 0)$ tenemos $a_1 = -1 < 0$, $a_2 = 1 > 0$. La solución nula en el dominio III es inestable.

El dominio IV: en el punto $(2, -2)$ tenemos $a_1 = -4 < 0$, $a_2 = -1 < 0$. La solución nula en este dominio es inestable.

Examinamos de la estabilidad la solución nula en las fronteras de los dominios que ya hemos examinado.

1) $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ (es la frontera entre los dominios I y II).

En esta frontera $a_1 > 0$, $a_2 = 0$, así que la solución nula en ella es estable, pero no asintóticamente.

2) $\beta = \alpha$ (es la frontera entre los dominios II y III). En ésta frontera $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, así que la solución nula en ella es estable, pero no asintóticamente.

3) $\beta = \frac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (es la frontera entre los dominios III y IV). En esta frontera $a_1 < 0$, $a_2 = 0$, así que la solución nula en ella es inestable.

Pues, la solución nula es asintóticamente estable en el dominio II y es estable, pero no asintóticamente, en la frontera del dominio II.

Hallar dominios para los sistemas siguientes en el plano de parámetros α y β , en los cuales la solución nula es estable:

$$917. \begin{cases} \dot{x} = -x + \alpha y, \\ \dot{y} = \beta x - y. \end{cases} \quad 918. \begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = x + \alpha y. \end{cases}$$

$$919. \begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y, \\ \dot{y} = -\beta x + (\alpha - 2)y. \end{cases}$$

$$920. \begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - \beta^2 y, \\ \dot{y} = (\alpha^2 - 1)x + (\beta^2 + 1)y. \end{cases}$$

$$921. \begin{cases} \dot{x} = (\alpha^2 - \beta)x + (1 + \beta)y, \\ \dot{y} = -\beta^2 x + \beta^2 y. \end{cases}$$

$$922. \begin{cases} \dot{x} = -\alpha^2 x - (\beta + 1)y, \\ \dot{y} = (4\alpha + \beta + 1)x - 4y. \end{cases}$$

§ 23. Segundo método de Liapunov

La función $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama *definitivamente positiva en n H-entorno* ($\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq H$) del origen de coordenadas, si ella es positiva en todos los puntos de este entorno, a excepción del origen de coordenadas, donde ella es igual a cero:

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0, \quad \text{si } \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0, \quad v(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

Verbigracia, la función $v = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ es definitivamente positiva en el espacio de variables x_1, x_2, x_3 . La función $u = x_1^2 - x_2^2$ es sólo de signo constante en este espacio, pero no definitivamente positiva, puesto que ella se anula en todo el eje Ox_3 , y no sólo en el punto $(0, 0, 0)$ y ella misma es definitivamente positiva en el espacio x_1, x_2 .

$$\text{Si } v(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0 \text{ para } \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \text{ y}$$

$v(0, 0, \dots, 0) = 0$, entonces la función $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama *definitivamente negativa*.

La función $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ se llama *definitivamente positiva en H-entorno del origen de coordenadas para $t \geq t_0$* , si existe tal función definitivamente positiva $w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que no depende de t que $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \geq w(x_1, x_2, \dots, x_n)$ para todos los valores indicados de argumentos y $v(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$.

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

y sea

$$v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

es la función continuamente diferenciable de sus argumentos. La derivada total por t función $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, calculada en vigor del sistema (1) (a lo largo de curvas integrales) es igual a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2)$$

Si los miembros segundos del sistema (1) no contienen explícitamente t , entonces tal sistema se llama autónomo o estacionario.

1. Teorema de A.M. Liapunov de la estabilidad. Si un sistema de ecuaciones diferenciales es tal que existe la función $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ que es definitivamente positiva para $t \geq t_0$ en cierto H-entorno del origen de coordenadas, la derivada del cual $\frac{dv}{dt}$ calculada en virtud del sistema (1) no es positiva, entonces la solución trivial del sistema (1) es estable.

II. Teorema de A.M Liapunov de la estabilidad asintótica (el caso de sistemas autónomos). Si un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

es tal que existe la función $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que es definitivamente positiva en cierto H -entorno del origen de coordenadas, la derivada de la cual $\frac{dv}{dt}$ calculada en vigor del sistema (3) es definitivamente negativa, entonces la solución trivial $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) es estable asintóticamente.

Las funciones $v(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $v(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que figuran en los teoremas citados arriba se llaman las funciones de Liapunov.

Designemos por el dominio $v > 0$ cierto dominio del entorno $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq H$ del origen de coordenadas del espacio de variables x_1, x_2, \dots, x_n , limitado por la superficie $v = 0$, en el cual la función v toma los valores positivos.

Supongamos que la función v posee las propiedades siguientes:

1) para cualesquiera que sean grandes valores de t en cualquier que sea pequeño entorno del origen de coordenadas existe el dominio $v > 0$;

2) en el dominio $v > 0$ la función v es limitada;

3) en el dominio $v > 0$ la derivada $\frac{dv}{dt}$ compuesta en virtud del sistema de ecuaciones (2) es definitivamente positiva.

III. Teorema de N. G. Chetaev de la inestabilidad. Si para el sistema de ecuaciones diferenciales (2) se puede hallar la función que satisface las condiciones 1), 2), 3), entonces la solución trivial de este sistema es inestable.

Observación. Si en el sistema (2) todas f_i no dependen explícitamente de t , entonces la función de Liapunov hay que buscar como no dependiente explícitamente de t .

Ejemplo 1. Examinar de la estabilidad la solución trivial del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x(x-2y)(1-x^2-3y^2), \\ \frac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^2-3y^2). \end{cases}$$

Solución. Tomemos en calidad de v la función $v = x^2 + 2y^2$. Ella es, en primer lugar, definitivamente positiva, y en segundo lugar, su derivada $\frac{dv}{dt}$ tomada en virtud del sistema, es igual a

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} =$$

$$= 2x(2y - x)(1 - x^2 - 3y^2) - 4y(x + y)(1 - x^2 - 3y^2) = \\ = -2(1 - x^2 - 3y^2)(x^2 + 2y^2) \leqslant 0$$

para x y y suficientemente pequeñas.

De aquí se ve que se cumplen todas las condiciones del teorema de A.M. Liapunov de la estabilidad.

Por consiguiente, la solución trivial $x = 0, y = 0$ es estable.

Ejemplo 2. Examinar de la estabilidad la solución del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

Solución. La función $v = x^2 + y^2$ satisface las condiciones del teorema de A.M. Liapunov de la estabilidad asintótica:

$$1) v(x, y) \geqslant 0, v(0, 0) = 0;$$

$$2) \frac{dv}{dt} = 2x(-5y - 2x^3) + 2y(5x - 3y^3) = -(4x^4 + 6y^4) \leqslant 0,$$

es decir, $\frac{dv}{dt} < 0$ y $\frac{dv}{dt} = 0$ sólo para $x = 0, y = 0$ y, por consiguiente, es la función definitivamente negativa. Por consiguiente, la solución $x = 0, y = 0$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 3. Examinar de la estabilidad la solución trivial del sistema autónomo

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \frac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases}$$

Solución. Tomemos en calidad de $v(x, y)$ la función

$$v = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3.$$

Aquí el dominio $v > 0$ es, por ejemplo, el dominio $x > 0, y > 0$. En el dominio $v > 0$ tenemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

En virtud del teorema de N.G. Chetaev de la inestabilidad la solución $x = 0, y = 0$ es inestable.

Mostremos en un ejemplo un método de construcción de la función de Liapunov, que se llama el método de división de variables.

Ejemplo 4. Sea dado un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = ax^3 + by, \\ \dot{y} = -cx + dy^3. \end{cases} \quad (4)$$

Hallar para el sistema (4) la función de Liapunov en la forma de

$$v(x, y) = F_1(x) + F_2(y),$$

donde $F_1(x)$, $F_2(y)$ son ciertas funciones diferenciables hasta ahora incógnitas.

Solución. En vigor del sistema (4) obtendremos

$$\dot{v} = F'_1(x)x + F'_2(y)y = F'_1(x)(ax^3 + by) - F'_2(y)(cx - dy^3).$$

Exijamos que la función \dot{v} tenga la misma forma que también la función $v(x, y)$, es decir, que ella se represente en la forma de la suma de dos funciones, de una que sólo depende de x , de otra que sólo depende de y . Para eso es necesario que exista la identidad

$$F'_1(x)by - F'_2(y)cx \equiv 0.$$

Separando las variables, obtenemos

$$\frac{cx}{F'_1(x)} = \frac{by}{F'_2(y)},$$

y, por consiguiente, cada una de las fracciones debe ser la magnitud constante, por ejemplo, ser igual a $\frac{1}{2}$. Entonces vamos a tener

$$\frac{cx}{F'_1(x)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{by}{F'_2(y)} = \frac{1}{2},$$

de donde

$$F_1(x) = cx^2, \quad F_2(y) = by^2,$$

así que

$$v(x, y) = cx^2 + by^2.$$

Examinar de la estabilidad la solución trivial de sistemas:

$$923. \quad \begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \frac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 2y^3. \end{cases} \quad 924. \quad \begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y, \end{cases}$$

$$925. \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = \frac{1}{3}x - y - x^2y - 7y^3. \end{cases} \quad 926. \quad \begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4. \end{cases}$$

$$927. \quad \begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2y - \frac{1}{2}y^3. \end{cases}$$

$$928. \quad \begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}y - x^2y - x^4y^3. \end{cases}$$

$$929. \quad \begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3y^6, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}x^2y^4 - \frac{1}{4}y^3. \end{cases}$$

$$930. \begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2y^3. \end{cases} \quad 931. \begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$$

$$932. \begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$$

$$933. \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}xy^2, \\ \dot{y} = -\frac{3}{4}y + 3xz^3, \\ \dot{z} = -\frac{2}{3}z - 2xyz^2. \end{cases} \quad 934. \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{3}y - x - \frac{7}{2}x^3, \\ \dot{y} = -x - \frac{1}{2}y - \frac{5}{2}y^3. \end{cases}$$

$$(v = x^2 + 2y^2 + 3z^2).$$

§ 24. Examinación de la estabilidad por la primera aproximación

Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

donde f_i son las funciones, diferenciables en el entorno del origen de coordenadas, $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$.

Examinamos de la estabilidad el punto de reposo $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1). Representemos el sistema (1) en el entorno del origen de coordenadas en la forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + R_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

donde R_i tienen el orden más alto que primero respecto a $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i}$ (es decir, en realidad desarrollemos los miembros segundos (1) mediante la fórmula de Taylor por potencias x en el entorno del origen de coordenadas). En vez del punto de reposo del sistema (1) examinamos de la estabilidad el punto de reposo del sistema lineal

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

que se llama *el sistema de ecuaciones de la primera aproximación o el sistema linearizado para el sistema (1)*.

Surge el problema, si provoca la estabilidad (inestabilidad) del punto de reposo del sistema (3) estabilidad (inestabilidad) del punto

de reposo del sistema inicial (1). En general no existe conexión rigurosa entre los sistemas (1) y (3).

Ejemplo 1. Examinemos la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = x^3. \quad (4)$$

Aquí $f(t, x) = x^3$. La ecuación linearizada para la ecuación (4) tiene la forma

$$\frac{dx}{dt} = 0. \quad (5)$$

La solución $x(t) = 0$ de la ecuación (5) es estable (véase la pag. 238). Ella misma, siendo la solución de la ecuación inicial (4), no es para ella estable. En realidad cada solución real de la ecuación (4) tiene la forma

$$x = \frac{x_0}{1 - tx_0}, \quad x|_{t=0} = x_0,$$

y deja de existir para $t = \frac{1}{x_0}$ (la solución es discontinua).

Ejemplo 2. Examinemos la ecuación no lineal

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 e^t. \quad (6)$$

La ecuación linearizada tiene la forma

$$\frac{dx}{dt} = x. \quad (7)$$

La solución $x(t) = 0$ de la ecuación (7) es inestable, puesto que cada solución de esta ecuación tiene la forma

$$x(t) = C e^t,$$

y es evidente que $|x(t)| \rightarrow +\infty$ para $t \rightarrow +\infty$. De otra parte, la solución $x(t) = 0$ de la ecuación (6) es asintóticamente estable. En realidad la solución general de esta ecuación tiene la forma

$$x(t) = C e^t \left[1 + \frac{2}{3} C^2 (e^{st} - 1) \right]^{-1/2}$$

y tiende a cero para $t \rightarrow +\infty$.

Sin embargo, para las condiciones definidas la estabilidad (inestabilidad) de la solución del sistema de la primera aproximación provoca la estabilidad (inestabilidad) de solución del sistema inicial (1).

Para la mayor simplicidad limitemos por el caso, cuando los coeficientes $a_{ij}(t)$ en (3) son constantes. En este caso se dice que el sistema (2) es estacionario en la primera aproximación.

Teorema 1. Si el sistema de ecuaciones (2) es estacionario en la primera aproximación, todos los términos R_i son limitados por t y se des-

rrollan en series por las potencias x_1, \dots, x_n en cierto dominio $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq H$, al mismo tiempo los desarrollos se empiezan por los términos no

menos de segundo orden y todas las raíces de la ecuación característica

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

tienen las partes reales negativas, entonces la solución trivial $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (2) es asintóticamente estable, es decir, en este caso es posible la examinación a la estabilidad por la primera aproximación.

Teorema 2. Si el sistema de ecuaciones (2) es estacionario en la primera aproximación, todas las funciones R_i satisfacen las condiciones del teorema 1 y por lo menos una de las raíces de la ecuación característica (8) tiene la parte real positiva, entonces el punto de reposo $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (2) es inestable, es decir, y en este caso es posible el examen de la estabilidad por la primera aproximación.

Observación. Si las partes reales de todas las raíces de la ecuación característica (8) no son positivas, al mismo tiempo la parte real por lo menos de una sola raíz es igual a cero, entonces es imposible examinar la estabilidad por la primera aproximación, en general, (en este caso empiezan a influir los términos no lineales R_i).

Ejemplo 3. Examinar de la estabilidad el punto de reposo $x = 0$, $y = 0$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6, \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4. \end{cases} \quad (9)$$

Solución. Los miembros no lineales satisfacen las condiciones de teoremas 1 y 2. Examinamos de la estabilidad el punto de reposo del sistema de la primera aproximación

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \quad (10)$$

La ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -1 & -k & 1 \\ 1 & -3 & -k \end{vmatrix} = 0$$

tiene las raíces negativas $k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$. Por consiguiente, de acuerdo con el teorema 1 el punto de reposo $x = 0, y = 0$ de sistemas (9) y (10) es asintóticamente estable.

Ejemplo 4. Examinemos la ecuación de oscilación de un péndulo

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = 0. \quad (11)$$

Aquí x es el ángulo de desviación del péndulo de la perpendicular. A la ecuación (11) le corresponde el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b \sin x. \end{cases} \quad (12)$$

Los puntos de reposo del sistema (12)

$$x = k\pi \quad (k \text{ es el entero}), \quad y = 0. \quad (13)$$

Examinamos de la estabilidad el punto de reposo $x = 0, y = 0$ que obtenemos de (13) para $k = 0$. Utilizando el desarrollo

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

escribiremos el sistema de la primera aproximación

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay, \end{cases} \quad (14)$$

la ecuación característica de la cual es

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (15)$$

Si $a > 0, b > 0$, entonces las raíces de la ecuación (15) tienen las partes reales negativas y, por consiguiente, el punto de reposo $x = 0, y = 0$ es estable por la primera aproximación.

Ahora examinamos de la estabilidad el punto $(\pi, 0)$ que corresponde a $k = 1$. Utilizando el desarrollo

$$\sin x = -(x - \pi) + \frac{(x - \pi)^3}{3!} - \dots$$

y trasladando el origen de coordenadas en el punto $x = \pi, y = 0$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay, \end{cases} \quad (16)$$

la ecuación característica del cual es

$$\lambda^2 + a\lambda - b = 0. \quad (17)$$

Para $a > 0, b > 0$ las raíces de esta ecuación son reales y de signos distintos. Por consiguiente, el punto de reposo $(\pi, 0)$ es el punto inestable para el sistema (16).

Ejemplo 5. Examinar de la estabilidad el punto de reposo $x = 0, y = 0$ del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - xf(x, y), \\ \dot{y} = -x - yf(x, y), \end{cases} \quad (18)$$

donde la función $f(x, y)$ se desarrolla en serie de potencias convergente y $f(0, 0) = 0$.

Solución. Un sistema linearizado tiene la forma de

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (19)$$

El punto de reposo del sistema (19) es $(0, 0)$.

La ecuación característica del sistema (19)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \delta \quad k^2 + 1 = 0 \quad (20)$$

muy a menudo tiene raíces imaginarias $k_{1,2} = \pm i$. El punto de reposo $(0, 0)$ del sistema de la primera aproximación (19) es estable (centro). Puesto que las partes reales de raíces de la ecuación característica (20) son iguales a cero, entonces según la observación en la página 251 el problema sobre la estabilidad del punto de reposo $(0, 0)$ exige el análisis complementario. Para examinar de la estabilidad el punto de reposo $(0, 0)$ del sistema (18) emplearemos el segundo método de Liapunov.

Tomando $v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, hallaremos que

$$\frac{dv}{dt} = -(x^2 + y^2)f(x, y).$$

De aquí: si $f(x, y) \geq 0$ en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, entonces el punto de reposo $(0, 0)$ es estable; si $f(x, y)$ es una función definida positiva en cierto entorno del origen de coordenadas, entonces el punto de reposo $(0, 0)$ es asintóticamente estable; si $f(x, y) < 0$ en un entorno suficientemente pequeño del origen de coordenadas, entonces el punto de reposo $(0, 0)$ es inestable. Este ejemplo muestra aquél hecho que en ciertos casos es imposible decir sobre la estabilidad del punto de reposo según la primera aproximación.

Examinar de la estabilidad por la primera aproximación el punto de reposo $x = 0, y = 0$ en los sistemas siguientes:

$$935. \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4. \end{cases}$$

$$936. \begin{cases} \dot{x} = -\operatorname{sen} x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \frac{1}{4}x - 2y - \frac{1}{6}y^3. \end{cases}$$

$$937. \begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6 \cos y - 6 - y^2. \end{cases}$$

$$938. \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \operatorname{sen}^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \operatorname{sen} y + e^y x^2. \end{cases}$$

$$939. \begin{cases} \dot{x} = x - 2 \operatorname{sen} y - y^3 \operatorname{sen} x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3. \end{cases}$$

$$940. \begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2. \end{cases}$$

941. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$

942. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \frac{7}{2} \sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3. \end{cases}$ 943. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^2. \end{cases}$

944. $\begin{cases} \dot{x} = 10 \sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14 \sin y + y^2. \end{cases}$ 945. $\begin{cases} \dot{x} = y - xy^2, \\ \dot{y} = -x^3. \end{cases}$

946. Examinar de la estabilidad los puntos de reposo del péndulo, al cual está aplicado el momento de rotación L :
 $\ddot{x} + ax + b \sin x = L$, donde $|L| < b$.

§ 25. Estabilidad asintótica en total. Estabilidad según Lagrange

Suponemos que tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales
 $\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n)$, $f_i(t, 0, \dots, 0) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (1)
y sea definido dicho sistema en el semiespacio

$$\Omega : \left\{ a < t < +\infty, \sum_{i=1}^n x_i^2 < +\infty \right\}.$$

Se considera que la solución trivial $x_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1) es *asintóticamente estable en total*, si

- 1) es asintóticamente estable según Liapunov;
- 2) cualquiera otra solución $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del sistema (1) tiene la propiedad de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Análogamente se determina la estabilidad asintótica en total de la solución no trivial del sistema (1).

Nos limitemos por los sistemas autónomos, es decir, por tales, los miembros segundos de los cuales no dependen explícitamente de tiempo t :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad f_i(0, \dots, 0) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

La función de Liapunov $v(x_1, \dots, x_n)$ la llamemos *infinitamente grande*, si para todo número positivo M existe el número positivo R

tal que fuera de la esfera $\sum_{i=1}^n x_i^2 = R^2$ existe la desigualdad $v > M$.

Teorema (de la estabilidad asintótica en total). Si existe la función infinitamente grande definitiva positiva $v(x_1, \dots, x_n)$, tal que $\frac{dv}{dt} < 0$ fuera de E y $\frac{dv}{dt} \geq 0$ en E , donde el conjunto E no contiene trayectorias completas (a excepción de la posición nula del equilibrio), entonces la solución trivial del sistema (2) es asintóticamente estable en total.

Ejemplo 1. Examinemos la ecuación

$$\ddot{x} + x^2 \dot{x} + x^3 = 0. \quad (3)$$

Escribiremos la ecuación (3) en la forma del sistema equivalente de ecuaciones

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^3 - x^2 y. \end{cases} \quad (4)$$

En calidad de la función de Liapunov $v(x, y)$ tomemos la función

$$v(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{4} x^4.$$

Tenemos

$$\frac{dv}{dt} = yy' + x^2 y' = -x^3 y - x^2 y^2 + x^3 y = -x^2 y^2.$$

Es evidente que $v(x, y) \rightarrow \infty$ para $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Más adelante, $v(x, y)$ se anula sólo en los ejes de coordenadas (conjunto E). Es evidente que ninguna solución, a excepción del punto de reposo en el origen de coordenadas, se queda en estos ejes para todas $t \geq 0$. En realidad, en todos los puntos del eje OY distintos del origen de coordenadas O el coeficiente angular

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x^3 - x^2 y}{y}$$

tiene el valor finito y , por lo tanto en este eje no puede encontrarse el arco de trayectoria. De otra parte, al aproximarse al eje OX el coeficiente angular $\frac{dy}{dx} \rightarrow \infty$ y, por eso en el eje OX no pueden encontrarse los arcos de trayectorias. Por consiguiente, el conjunto E no contiene las trayectorias completas a excepción del origen de coordenadas.

En virtud del teorema el punto de reposo $(0, 0)$ tiene la estabilidad asintótica en total.

947. Mostrar que si la solución trivial del sistema lineal autónomo es asintóticamente estable según el sentido de Liapunov, entonces ella es asintóticamente estable en total.

Examinar de la estabilidad asintótica en total las soluciones nulas de ecuaciones (véase [2]):

$$948. \ddot{x} + \dot{x}^3 + (x^2 + 1)x = 0.$$

$$949. \ddot{x} + \dot{x} + (x^2 + \dot{x} + 2)(2x + x^5) = 0.$$

$$950. \ddot{x} + x^2 e^{-x} \dot{x} + x^3 + 2x = 0.$$

Se puede resultar que el sistema (2) no tiene la estabilidad completa, pero, a pesar de esto, para él puede existir un dominio de la estabilidad asintótica.

Bajo el dominio de la estabilidad asintótica del sistema (2) se entiende el dominio que contiene el origen de coordenadas O y que posee la propiedad que todas las trayectorias que comienzan en este dominio tienden cuando $t \rightarrow \infty$ al origen de coordenadas.

En los sistemas lineales siempre existe sólo la estabilidad completa, mientras que en los sistemas no lineales ella puede ser no completa.

Teorema. Sea $v(x_1, \dots, x_n)$ es una función que tiene las derivadas parciales continuas del primer orden para todas x_i . Designemos mediante Ω_l el conjunto de todos los puntos, donde $v(x_1, \dots, x_n) < l$. Si el conjunto Ω_l es limitado y en el

$$1) v(x_1, \dots, x_n) > 0 \text{ para } x_i \neq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$2) v(x_1, \dots, x_n) < 0 \text{ para } x_i \neq 0$$

entonces el origen de coordenadas es la posición estable asintóticamente del equilibrio del sistema (2) mientras que Ω_l es el dominio de la estabilidad asintótica.

Ejemplo 2. Indicar el dominio de estabilidad asintótica de la ecuación

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\varepsilon < 0)$$

(ecuación de Van-der-Paul).

Solución. Rescribiremos la ecuación en la forma del sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon \left(\frac{x^3}{3} - x \right), \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

El único punto de reposo es el origen de coordenadas. Tomemos $v(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$. Entonces $\dot{v}(x, y) = yy' + xx' = -\varepsilon x^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1 \right)$.

Es evidente, $\dot{v} \leq 0$ para $x^2 \leq 3$ ($\varepsilon < 0$). De ese modo, en el círculo $x^2 + y^2 < 3$ tenemos: $\dot{v} > 0$ para $x^2 + y^2 \neq 0$ y $\dot{v} < 0$ para $x^2 + y^2 \neq 0$, es decir, este círculo se encuentra en el dominio de la estabilidad asintótica.

Estabilidad según Lagrange. Supongamos que tenemos el sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

donde $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ satisfacen las condiciones del teorema de existencia y de unicidad de la solución del sistema (5) para todos $t \in [t_0, +\infty)$ y cualesquiera x_1, \dots, x_0 .

Definición. El sistema (5) se llama estable según Lagrange, si todas las soluciones de este sistema están definidas y limitadas en $[t_0, +\infty)$.

951. Mostrar que todas las soluciones de la ecuación

$$\ddot{x}(t) + \left(a^2 + \frac{1}{1+t^2} \right) x(t) = 0$$

están limitadas en $[1, +\infty)$.

952. Mostrar que todas las soluciones de la ecuación

$$\ddot{x}(t) + \left(1 + e^{-t^2} - \frac{1}{t+2} \right) x(t) = 0$$

están limitadas en $[1, +\infty)$.

953. En el ejemplo de ecuaciones

a) $\ddot{x}(t) - \frac{2}{t} \dot{x}(t) + x(t) = 0;$

b) $\ddot{x}(t) + \frac{2}{t} \dot{x}(t) + x(t) = 0$

mostrar que de la restricción de todas las soluciones de la ecuación «límite» $\ddot{x}(t) + x(t) = 0$ no se siguen las restricciones de soluciones de la ecuación inicial.

§ 26. Criterio de Rauss-Hurwitz

Una importancia grande para la práctica tienen las condiciones necesarias y suficientes para que todas las raíces de la ecuación algebraica de coeficientes reales $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (1)$$

tengan las partes reales negativas. Sin alterar la comodidad, se puede suponer que $a_0 > 0$.

La positividad de todos los coeficientes es la condición necesaria, pero no suficiente para que todas las raíces de la ecuación (1) se encuentren a la izquierda del eje imaginario (en el caso de las ecuaciones de 1^a y 2^a potencias esta condición es también suficiente). Las condiciones necesarias y suficientes para que sean negativas las partes reales de raíces de la ecuación (1) las dieron Rauss y independiente de él Hurwitz.

Las condiciones de Rauss-Hurwitz. Para que todas las raíces de la ecuación (1) tengan las partes reales negativas es necesario y suficiente que sean positivos todos los menores principales diagonales de la matriz de Hurwitz

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

El polinomio $f(\lambda)$ de potencia $n \geq 4$ se llama el *polinomio estable*, si todas sus raíces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tienen las partes reales negativas: $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ ($j = 1, 2, \dots, n$), es decir, todas las raíces del polinomio estable se encuentran en el semiplano izquierdo.

La matriz de Hurwitz se compone del modo siguiente. Por la diagonal principal se sitúan los coeficientes del polinomio (1), a partir de a_1 hasta a_n .

Las columnas se componen consecutivamente de los coeficientes sólo con los índices impares o sólo pares, al mismo tiempo al número de los últimos se incluye el coeficiente a_0 . Todos los elementos que faltan, es decir, los coeficientes con los índices que son más de n o menos de 0 se sustituyen por ceros.

Los menores principales diagonales de matriz de Hurwitz son

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (3)$$

De esa manera, la condición de Hurwitz tiene la forma siguiente:

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0. \quad (4)$$

Notemos que puesto que $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cdot a_n$ entonces la última de las condiciones $\Delta_n > 0$ se puede sustituirla por la exigencia $a_n > 0$.

Ejemplo 1. Examinar de la estabilidad la solución trivial de la ecuación

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Solución. Componemos la ecuación característica

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Aquí

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 10, \quad a_5 = 3.$$

Apuntamos los menores diagonales de Hurwitz

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_1 = 1 > 0.$$

Pues, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, $\Delta_4 > 0$, $\Delta_5 > 0$. Por consiguiente, la solución trivial $y = 0$ de la ecuación es asintóticamente estable.

Se puede efectuar los cálculos del modo siguiente. Al principio componemos el menor Δ_n . Después, calculamos sucesivamente los menores Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , etc. Si nos encontramos con el menor negativo, entonces el sistema es inestable y los cálculos posteriores son innecesarios.

Si los coeficientes de la ecuación (4) son prefijadas como números, entonces las condiciones (4) se verifican fácilmente. Si los coeficientes de la ecuación (2) contienen los parámetros literales, entonces el cálculo de los determinantes para grandes k es bastante difícil.

Se puede mostrar que si las condiciones (4) están cumplidas, entonces todos los coeficientes del polinomio (1) son positivos

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0. \quad (5)$$

Como hemos mostrado, las condiciones (5) son necesarias, pero no suficientes para que todas las raíces $f(\lambda)$ se sitúen en el semiplano izquierdo $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Sin embargo, al cumplirse las condiciones (5) las desigualdades (4) ya no son independientes. Así, por ejemplo, para $n = 5$ las condiciones de Rauss-Hurwitz se reducen a dos desigualdades: $\Delta_2 > 0$, $\Delta_4 > 0$. Lo que dio la posibilidad a Lienard y Chipard de determinar otras condiciones de estabilidad, en las cuales el número de las desigualdades determinantes es en dos veces menos que en las condiciones (4).

Las condiciones de Lienard — Chipard. Para que el polinomio

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (1')$$

tenga todas las raíces con las partes reales negativas, es necesario y suficiente que:

1) todos los coeficientes del polinomio $f(\lambda)$ sean positivos:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad \dots, \quad a_n > 0;$$

2) tengan lugar las desigualdades determinantes

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_{n-3} > 0, \quad \dots \quad (6)$$

(aquí, como antes Δ_k es el determinante de Hurwitz de k orden).

Ejemplo 2. Examinemos la misma ecuación que en la página 258:

$$y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Aquí

$$a_0 = a_1 = 1 > 0, \quad a_2 = 7 > 0, \quad a_3 = 4 > 0, \quad a_4 = 10 > 0,$$

$$a_5 = 3 > 0,$$

es decir, está cumplida la primera condición de Lienard—Chipard.

Luego

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

es decir, está cumplida la condición 2.

De esa manera, la condición trivial de la ecuación es estable asintóticamente.

Examinar de la estabilidad las soluciones triviales de las ecuaciones:

$$954. y^{IV} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$$

$$955. y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$$

$$956. y^{IV} + y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

$$957. y^V + 2y^{IV} + 3y''' + 2y'' + y' + y = 0.$$

¿Para qué valores de α serán estables las soluciones triviales de las ecuaciones siguientes:

$$958. y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0?$$

$$959. y^{IV} + 2y''' + y'' + \alpha y' + 3y = 0?$$

$$960. y^{IV} + 3y''' + \alpha y'' + 2y' + y = 0?$$

¿Para qué valores de α y β serán estables las soluciones triviales de las ecuaciones siguientes:

$$961. y''' + \alpha y'' + 2y' + \beta y = 0?$$

$$962. y''' + \alpha y'' + \beta y' + 3y = 0?$$

$$963. y^{IV} + \alpha y''' + 2y'' + \beta y' + y = 0?$$

964. ¿Qué aspecto tienen las condiciones de Hurwitz para la ecuación recurrente

$$\lambda^4 + p\lambda^3 + q\lambda^2 + p\lambda + 1 = 0$$

(p y q son reales)?

§ 27. Criterio geométrico de estabilidad (criterio de Mijailov)

Suponemos que tenemos una ecuación diferencial de n orden de los coeficientes constantes reales

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0. \quad (1)$$

El problema sobre la estabilidad de una solución de la ecuación diferencial (1) se reduce al problema de disposición de raíces de la ecuación característica

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

en el plano complejo. El último problema se resuelve mediante el criterio de Mijailov que citamos abajo.

Sea dado el polinomio característico

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n. \quad (3)$$

Al sustituir en él $\lambda = i\omega$, obtendremos

$$f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega), \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} u(\omega) &= a_n - a_{n-2}\omega^3 + a_{n-4}\omega^5 - \dots, \\ v(\omega) &= a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 - \dots \end{aligned} \quad (5)$$

La magnitud $f(i\omega)$ conforme a (4) y (5) para el parámetro dado ω se puede representarla en el plano complejo uOv en forma del vector.

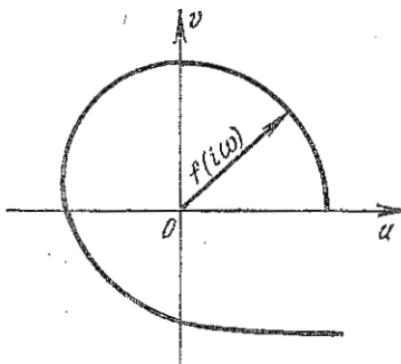


Fig. 38

Si vamos a cambiar el parámetro ω en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, entonces el extremo de este vector circunscribirá cierta curva, cada punto de la cual corresponde al valor definitivo de ω .

La hodógrafa del vector $f(i\omega)$, obtenida de esa manera, se llama *la curva de Mijailov* para el polinomio $f(\lambda)$ (fig. 38).

Al variar ω de $-\infty$ hasta $+\infty$ el vector $f(i\omega)$ gira a cierto ángulo φ . Si el polinomio $f(\lambda)$ tiene m raíces con las partes reales positivas y las demás $n-m$ raíces con las negativas, entonces

$$\varphi = (n - m)\pi + m(-\pi) = (n - 2m)\pi. \quad (6)$$

Observación. Puesto que la función $u(\omega)$ es par, entonces la curva de Mijailov es simétrica respecto al eje Ou y por lo tanto es suficiente construir una parte de la curva de Mijailov que corresponda a la variación del parámetro ω de 0 hasta $+\infty$. Entonces la fórmula (6) obtendrá la forma de

$$\varphi = (n - m)\frac{\pi}{2} + m\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (n - 2m)\frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

Para la estabilidad de solución de la ecuación (1) es necesario y suficiente que todas las raíces de la ecuación característica $f(\lambda) = 0$ tengan las partes reales negativas, es decir, en la fórmula (7) debe ser $m = 0$.

De aquí se sigue la siguiente definición del criterio de Mijailov: para la estabilidad de solución trivial de la ecuación (1) es necesario y suficiente que:

1) el vector $f(i\omega)$ para el cambio de ω de 0 hasta $+\infty$ realice un giro en el ángulo $\varphi = n \frac{\pi}{2}$, es decir, haga $\frac{n}{4}$ revoluciones de derecha a la izquierda;

2) la hodógrafa $f(i\omega)$ para el cambio de ω de 0 hasta $+\infty$ no pase por el punto nulo.

De otra forma, para la estabilidad de solución de la ecuación (1) es necesario y suficiente que la curva de Mijailov recorra consecutivamente

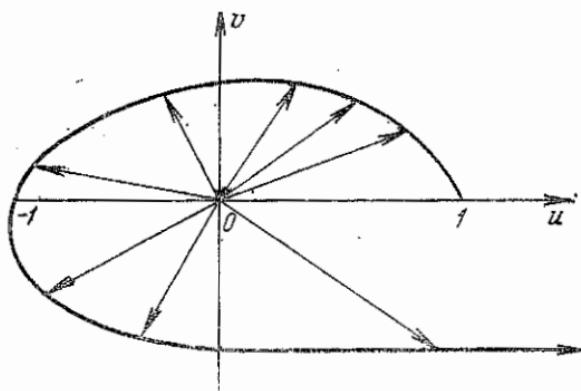


Fig. 39

mente n cuadrantes de derecha a la izquierda, rodeando siempre el origen de coordenadas.

El recorrido consecutivo de cuadrantes significa que la curva consecutivamente interseca los ejes de coordenadas. Por consiguiente, las coordenadas $u(\omega)$ y $v(\omega)$ de los puntos de la curva de Mijailov para la estabilidad de solución deben consecutivamente auularse. De aquí se desprende la segunda definición del criterio de estabilidad de Mijailov.

Para la estabilidad de solución de la ecuación (1) es necesario (y cuando la curva se recorre de derecha a la izquierda también es suficiente) que todas las raíces de las ecuaciones $u(\omega) = 0$, $v(\omega) = 0$ sean reales e intermitentes uno con el otro, es decir, que entre las dos raíces cualesquiera de una de estas ecuaciones se encuentre la raíz de otra ecuación.

Ejemplo. Examinar de la estabilidad la solución trivial de ecuación

$$y^{IV} + 2y'' + 3y'' + 2y' + y = 0.$$

Solución. Componemos el polinomio característico

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

A continuación

$$f(i\omega) = \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^2 + 2i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 3\omega^2 + 1,$$

$$v(\omega) = -2\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1 - \omega^2) = 2\omega(1 - \omega)(1 + \omega).$$

Vamos a cambiar ω de 0 hasta $+\infty$ y construimos la curva (fig. 39)

$$\begin{cases} u = u(\omega), \\ v = v(\omega), \end{cases}$$

ω	0	$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$
u	1	0	-1	0
v	0	+	0	-

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{v}{u} = 0.$$

El ángulo de giro del radio vector es

$$\varphi = 4 \frac{\pi}{2} = (n - 2m) \frac{\pi}{2}.$$

De aquí $n - 2m = 4$; $n = 4$; por consiguiente, $m = 0$. De esa manera, todas las raíces de la ecuación característica se encuentran en el semiplano izquierdo, es decir, la solución trivial $y = 0$ es asintóticamente estable. A esta misma deducción podríamos llegar partiendo del criterio de Lienard—Chipard, ya que todos los coeficientes de la ecuación característica son positivos y

$$\Delta_{n-1} = \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_{n-3} = \Delta_1 = 2 > 0.$$

Examinar de la estabilidad las soluciones triviales de ecuaciones:

$$965. \quad 2y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

$$966. \quad 3y^{IV} + 4y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

$$967. \quad y^V + 5y^{IV} + 10y''' + 11y'' + 7y' + 2y = 0.$$

$$968. \quad y^{IV} + 5y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0.$$

$$969. \quad y^V + 2y^{IV} + 2y''' + 46y'' + 89y' + 260y = 0.$$

$$970. \quad y^V + y^{IV} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

971. $y^{\text{VII}} + 7y^{\text{VI}} + 23y^{\text{V}} + 37y^{\text{IV}} + 56y''' + 36y'' + 12y' + 4y = 0.$
 972. $y^{\text{IV}} + 3y''' + 4y'' + 3y' + y = 0.$
 973. $y^{\text{IV}} + 7y''' + 18y'' + 22y' + 12y = 0.$
 974. $y^{\text{IV}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0.$
 975. $y^{\text{IV}} + 11y''' + 59y'' + 107y' + 60y = 0.$
 976. $y^{\text{IV}} + 5y''' + 18y'' + 53y' + 60y = 0.$
 977. $y^{\text{IV}} + 6y''' + 15y'' + 18y' + 10y = 0.$
 978. $y^{\text{IV}} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0.$
 979. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0.$
 980. $y^{\text{IV}} + 7y''' + 12y'' + 23y' + 10y = 0.$
 981. $y^{\text{IV}} + 3y''' + 3y'' + 3y' + 2y = 0.$
 982. $y^{\text{IV}} + 2y''' + 4y'' + 2y' + 5y = 0.$
 983. $y^{\text{IV}} + 2y'' + 8y' + 5y = 0.$
 984. $y^{\text{V}} + 4y^{\text{IV}} + 5y''' + 2y' + 4y = 0.$

§ 28. D-particiones

Supongamos que tenemos la ecuación lineal diferencial de coeficientes constantes reales

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0. \quad (1)$$

Su ecuación característica tiene la forma de

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

Para poder determinar la estabilidad de solución de la ecuación (1) no hay necesidad de calcular las raíces de la ecuación característica. Es suficiente sólo determinar que todas ellas se encuentran en el semiplano izquierdo. Por lo común se encuentran dos planteamientos de este problema.

Primero. Considerando dados todos los coeficientes de la ecuación (1), determinar si es estable la solución para estos valores de coeficientes.

Segundo. Considerando dados ciertos coeficientes de la ecuación (1), determinar para qué valores de otros coeficientes la solución de ecuación es estable.

Construcción de los dominios de estabilidad

Concepto sobre D-partición. Dado que tenemos la ecuación característica

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

El conjunto de valores de los coeficientes de la ecuación (1) se puede considerarlo como el punto $n+1$ dimensional del espacio R_{n+1} . A cada punto del espacio R_{n+1} le corresponde un valor determinado de los coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n , y por consiguiente, el valor determinado de todas las raíces z_1, z_2, \dots, z_n de la ecuación caracterís-

tica (2). Si en R_{n+1} existe tal dominio que a cada su punto le corresponde la ecuación característica, todas las raíces de la cual se encuentran en el semiplano izquierdo, entonces este dominio se llama *el*

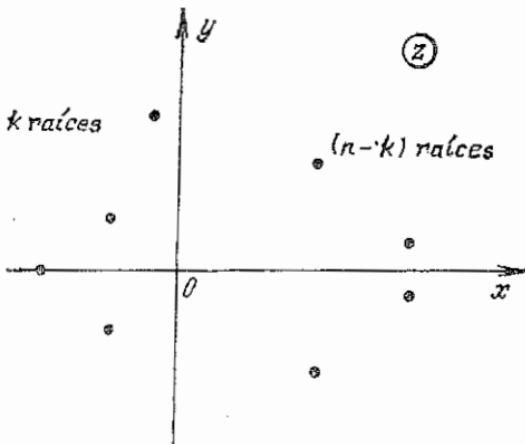


Fig. 40

dominio de estabilidad y la hipersuperficie que lo limita se llama *la frontera del dominio de estabilidad*. Sea, por ejemplo, que en la ecuación característica (2) todos los coeficientes a excepción de dos, verbigracia, a_1 y a_2 son los números concretos.

Supongamos que para ciertos valores definidos a_1 y a_2 la ecuación dada en el plano de raíces (es decir, en el plano z) tiene k raíces que se encuentran a la izquierda, y $(n - k)$ raíces que se encuentran a la derecha del eje imaginario (fig. 40).

En el plano A (el plano de parámetros a_1 y a_2) hay una curva que limita tal dominio fig. (41), cada punto del cual determina el polinomio que también tiene k raíces que se encuentran a la izquierda, y $n - k$ raíces que se encuentran a la derecha del eje imaginario. Designemos este dominio mediante $D(k, n - k)$ (k es el entero, $0 \leq k \leq n$).

Por ejemplo, si la ecuación característica tiene la tercera potencia, es decir, $n = 3$, entonces en el caso general en el espacio de coeficientes pueden ser indicados los dominios

$$D(0, 3), \quad D(1, 2), \quad D(2, 1), \quad D(3, 0).$$

El dominio $D(3, 0)$ y es el dominio de estabilidad.

Observemos que ciertos dominios, en particular, $D(3, 0)$ pueden faltar.

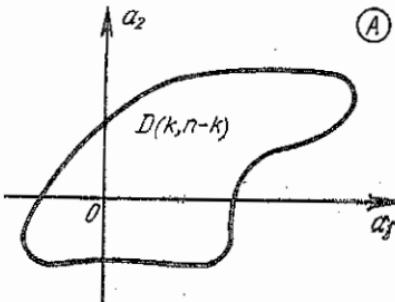


Fig. 41

La partición del espacio de coeficientes de la ecuación característica en los dominios que corresponden al mismo número de raíces que se encuentran en el semiplano izquierdo del plano z se llama D -partición del espacio de coeficientes.

Por analogía se puede construir D -partición del espacio de los parámetros cualesquiera, de los cuales pueden depender los coeficientes de la ecuación característica.

Supongamos que en la ecuación característica (2) los coeficientes dependen sólo de dos parámetros ξ y η (en particular dos coeficientes de la ecuación que consideramos pueden ser estos parámetros).

Vamos a considerar una familia de polinomios

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z), \quad (3)$$

donde (ξ, η) son los parámetros reales y P, Q, R , los polinomios de z con los coeficientes reales.

El problema se plantea así:

En el plano de parámetros (ξ, η) (plano w) hallar el dominio $D(n, 0)$ tal que para cualquier punto $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$ el polinomio (3) va a tener todas las raíces z en el semiplano izquierdo o convencerse que tal dominio no existe.

La construcción de los dominios $D(k, n - k)$ se basa sobre los razonamientos siguientes:

1. Las raíces de la ecuación algebraica dependen continuamente de sus coeficientes, es decir, si los coeficientes del polinomio $f(z, \xi, \eta)$ se cambian poco, entonces y sus raíces se cambian poco.

2. Si el punto (ξ, η) se encuentra en la frontera del dominio $D(k, n - k)$, entonces por lo menos una raíz del polinomio (3) se encuentra en el eje imaginario, es decir, la frontera de D -partición es la imagen del eje imaginario del plano z .

En realidad, si, por ejemplo, el punto $(\xi, \eta) \in D(n, 0)$, entonces el polinomio (3) tiene al mismo tiempo todas las raíces en el semiplano izquierdo.

Si (ξ, η) se encuentra fuera de $D(n, 0)$, entonces el polinomio (3) tiene por lo menos una raíz en el semiplano derecho.

Para el movimiento continuo del punto (ξ, η) del dominio $D(n, 0)$ al próximo se cambian continuamente las raíces del polinomio $f(z, \xi, \eta)$. Puesto que al mismo tiempo aparece por lo menos una raíz en el semiplano derecho, entonces en el proceso del cambio de (ξ, η) ella debe intersecar el eje imaginario (el eje Oy). Esto sucede, cuando el punto (ξ, η) interseca la frontera del dominio $D(n, 0)$.

Sea $z = x + iy$ la raíz del polinomio $f(z, \xi, \eta)$. La igualdad $(z, \xi, \eta) = 0$ es equivalente a las igualdades

$$\begin{cases} \xi u_1(x, y) + \eta u_2(x, y) + u_3(x, y) = 0, \\ \xi v_1(x, y) + \eta v_2(x, y) + v_3(x, y) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

donde u_1, u_2, u_3 y v_1, v_2, v_3 son las partes reales e imaginarias de polinomios P, Q y R respectivamente.

Si el determinante del sistema (4)

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces el sistema (4) es resoluble unívocamente respecto a ξ y η :

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \quad (5)$$

Las ecuaciones (5) en los puntos, donde $\Delta \neq 0$, determinan la aplicación unívoca del plano de raíces del polinomio $f(z, \xi, \eta)$ sobre el plano de parámetros (ξ, η) .

La aplicación inversa es multiforme: a un par fijo de valores (ξ, η) le corresponden en general, n raíces. Si el determinante del sistema (4) en el punto $z_0 = x_0 + iy_0$ se anula, entonces el sistema es incompatible o una ecuación es la consecuencia de la otra.

En este último caso en el plano de parámetros w existe una recta completa que se compone de los puntos (ξ, η) , para los cuales $z_0 = x_0 + iy_0$ es la raíz del polinomio $f(z, \xi, \eta)$. A tal punto (x_0, y_0) y a la recta que le corresponde los vamos a llamar *exclusivos*.

Hallemos en el plano de parámetros (ξ, η) aquellos puntos, para los cuales el polinomio (3) tiene por lo menos una raíz puramente imaginaria $z = iy$.

El lugar geométrico de tales puntos se compone de una línea, las ecuaciones geométricas de la cual son

$$\begin{cases} \xi = \xi(0, y), \\ \eta = \eta(0, y) \end{cases} \quad (-\infty < y < +\infty) \quad (6)$$

y la cual se puede obtener, suponiendo $x = 0$ en las ecuaciones (5) y también de las rectas exclusivas que corresponden a los puntos exclusivos del eje Oy (si tales existen).

Observemos que las ecuaciones (6) dan la imagen del eje Oy para la aplicación (5).

Este lugar geométrico de los puntos lo vamos a llamar *la línea L*.

La línea L parte el dominio de parámetros a cierto número de los dominios conexos.

Cada uno de tal dominios obtiene la propiedad siguiente: para cualquier de su punto (ξ, η) el polinomio $f(z, \xi, \eta)$ tiene el mismo número de raíces que se encuentran en el semiplano izquierdo, es decir, es el dominio del tipo $D(k, n - k)$ ($0 \leq k \leq n$).

De esa manera, la línea L es la frontera de D-partición buscada.

Consideremos la aplicación (5) del plano de raíces sobre el plano de parámetros

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases}$$

Trazamos por el punto (x_0, y_0) dos líneas: horizontal I y vertical II.

Definición. Si la dirección del giro de I a II sigue siendo constante para la aplicación (5), entonces se dice que la aplicación *conserva la orientación* en el punto (x_0, y_0) ; en el caso contrario se dice que la aplicación *no conserva la orientación* (fig. 42 y 43).

Si el determinante

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} > 0$$

en el punto (x_0, y_0) , entonces la aplicación (5) en el punto (x_0, y_0) conserva su orientación. Para $I < 0$ la orientación se altera. Si $I = 0$, entonces el problema de la conservación o no conservación de la orientación lo resuelvan las derivadas mayores. Se puede mostrar (véase [10]) que el signo del determinante I coincide con el signo del determinante Δ , donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix},$$

así que si $\Delta > 0$, entonces la aplicación del plano de raíces sobre el plano de parámetros conserva la orientación, si $\Delta < 0$, entonces se cambia la orientación.

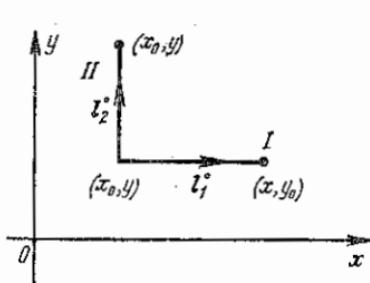


Fig. 42

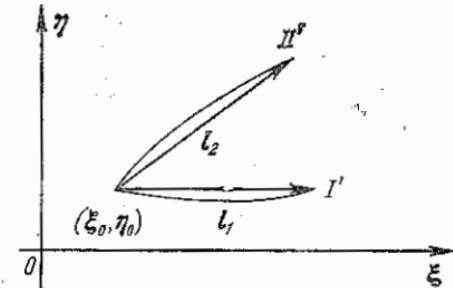


Fig. 43

Vamos a examinar de nuevo la partición del plano w (el plano de parámetros) en los dominios D ($k, n - k$) ($k \leq n$) y designemos mediante L la frontera de estos dominios. Vamos a considerar como la dirección positiva hacia L la dirección la cual corresponde al incremento de y (a partir de $y = -\infty$); en este caso, la curva L puede componerse de unas ramas y durante siendo completo el recorrido del eje Oy sus partes pueden ser recorridas varias veces (no más de n , donde n es el grado del polinomio $f(z, \xi, \eta)$).

Vamos a examinar cierto segmento w_1w_2 de la curva L y suponemos que en el caso del recorrido completo del eje Oy ese segmento se recorre r veces, es decir, que a este segmento le corresponde r partes $y_{1\mu}^{\mu}$ ($\mu = 1, 2, \dots, r$) del eje Oy . Suponemos $\varepsilon_{\mu} = 1$, si la dirección de $y_{1\mu}^{\mu} y_{2\mu}^{\mu}$ coincide con la dirección del eje Oy , y $\varepsilon_{\mu} = -1$ en el caso contrario. Suponemos también que $\delta_{\mu} = 1$ cuando en $y_{1\mu}^{\mu}$ el determinante es $\Delta > 0$, y $\delta_{\mu} = -1$ en el caso contrario. Dado que el punto w moviéndose continuamente por una vía suficientemente pequeña, corta el arco w_1w_2 de izquierda a derecha (fig. 44). A esta vía en el plano z le corresponde r vías que intersecan los segmentos $y_{1\mu}^{\mu} y_{2\mu}^{\mu}$ del eje Oy . Si $\varepsilon_{\mu} \cdot \delta_{\mu} > 0$, entonces la vía respectiva va del semiplano izquierdo al derecho y el polinomio

$$f(z, \xi, \eta) = \xi P(z) + \eta Q(z) + R(z)$$

adquiere en ella una raíz con la parte real positiva y pierde la raíz con la parte real negativa; en el caso $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$ a la inversa.

Realmente, sea $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu > 0$. Esto puede suceder en dos casos:
1) $\varepsilon_\mu = 1$, $\delta_\mu = 1$; 2) $\varepsilon_\mu = -1$, $\delta_\mu = -1$. En el primer caso la

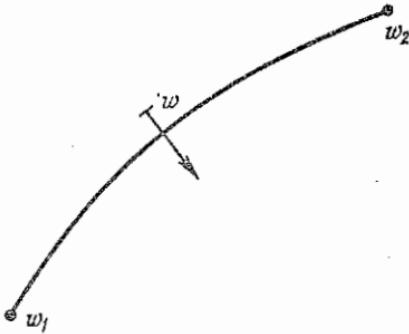


Fig. 44

dirección del segmento $y_1^\mu y_2^\mu$ del eje Oy coincide con la dirección positiva de este eje ($\varepsilon_\mu = 1$) y se conserva la orientación ($\delta_\mu = 1$), o sea, si en el plano w el arco $w_1 w_2$ se pasa de izquierda a derecha, en-

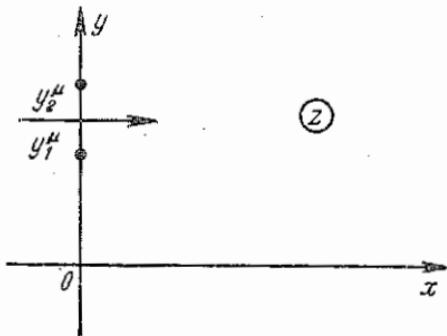


Fig. 45

tonces y en el plano z pasamos del semiplano izquierdo en el derecho (es decir, el eje Oy se interseca también de izquierda a derecha, (fig. 45)).

En el segundo caso el vector $y_1^\mu y_2^\mu$ está dirigido en la dirección contraria a la dirección de \overrightarrow{Oy} ($\varepsilon_\mu = -1$). Puesto que $\delta_\mu = -1$, entonces en este caso se cambia la orientación y durante el paso de izquierda a derecha en el plano w de nuevo obtenemos el paso de izquierda a derecha en el plano z a través del eje Oy .

Análogamente se examina el caso $\varepsilon_\mu \cdot \delta_\mu < 0$.

Pués, durante el paso de la parte izquierda del arco w_1w_2 de la curva L al lado derecho el polinomio $f(z, \xi, \eta)$ pierde

$$N = \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2 + \dots + \varepsilon_r\delta_r$$

raíces con la parte negativa real.

El ejemplo de Vishnegradski. Dado un polinomio $f(z) = z^3 + \frac{1}{z}z^2 + \eta z + 1$. Hallar el dominio $D(3, 0)$.

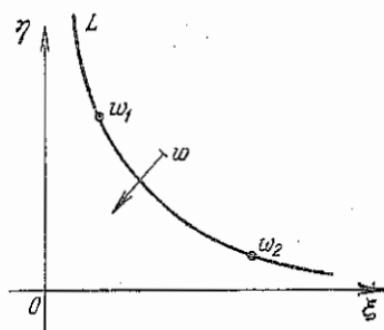


Fig. 46

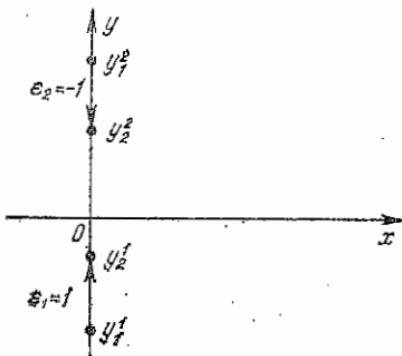


Fig. 47

Solución. Suponiendo $z = iy$ y separando la parte real e imaginaria, hallamos las ecuaciones paramétricas de la ecuación de la curva L :

$$\xi = \frac{1}{y^2}, \quad \eta = y^2.$$

Esto es la rama de hipérbola $\xi\eta = 1$ que se encuentra en el primer cuadrante. Para el recorrido completo del eje Oy (y se cambia de $-\infty$ hasta $+\infty$) la hipérbola se circunscribe dos veces, es decir, $r = 2$; con esto una vez la hipérbola se recorre en una dirección para el cambio de y de $-\infty$ hasta 0.

Para el cambio posterior de y de 0 hasta $+\infty$ la hipérbola se recorre la segunda vez, pero ya en la dirección contraria. De esa manera al segmento w_1w_2 de la curva L le corresponden dos segmentos del eje Oy : $y_1^1y_2^1$ y $y_1^2y_2^2$ (fig. 46 y 47). El determinante Δ en el eje Oy es igual a $\Delta = -y^3$. Por consiguiente, $\delta_1 = 1$ (ya que para $\mu = 1$, $y < 0$), $\delta_2 = -4$ (ya que para $\mu = 2$, $y > 0$). Al pasar el punto w a través de w_1w_2 de izquierda a derecha se pierde N raíces con la parte negativa, donde

$$N = \epsilon_1 \delta_1 + \epsilon_2 \delta_2 = 2.$$

En el origen de coordenadas $\xi = \eta = 0$ el polinomio $f(z)$ obtiene la forma de $z^3 + 1$ y tiene las raíces $z_1 = -1$, $z_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, por consiguiente, el dominio debajo de la hipérbola es $D(1, 2)$. El dominio sobre la hipérbola es el dominio $D(3, 0)$. De hecho, para el paso de este dominio a $D(1, 2)$ el polinomio $f(z)$ ha perdido dos raíces con la

parte real negativa y se convirtió en el polinomio que tiene una sola raíz con la parte real negativa. Por consiguiente, en el dominio sobre la hipérbola existían tres raíces con el dominio real negativo (fig. 48). Para verificar esto se puede tomar el punto $\xi = \eta = 3$, en el cual el polinomio obtiene la forma $z^3 + 3z^2 + 3z + 1$ y tiene la raíz de tercer grado de multiplicidad $z = -1$.

De esa manera, para construir D -dominios vamos a hacer lo siguiente:

1. En el polinomio $f(z, \xi, \eta)$ suponemos $z = iy$, separamos las partes real e imaginaria e igualámoslas a cero:

$$\begin{cases} \xi u_1(y) + \eta u_2(y) + u_3(y) = 0, \\ \xi v_1(y) + \eta v_2(y) + v_3(y) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Resolviendo (7) respecto a ξ y η , obtenemos

$$\begin{cases} \xi = \xi(y), \\ \eta = \eta(y) \end{cases}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la línea L .

2. Construimos la curva L en el plano de parámetros, cambiando y en los límites de $-\infty$ hasta $+\infty$, al mismo tiempo, si en las ecuaciones (7) ξ es la primera variable según el orden de anotar, y η es la segunda, entonces para la construcción de la curva L el sistema de coordenadas $\xi\eta$ debe ser derecho.

Si para cierto valor de y el determinante del sistema (7) y los determinantes

$$\Delta_\xi = \begin{vmatrix} -u_3 & u_2 \\ -v_3 & v_2 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \Delta_\eta = \begin{vmatrix} u_1 & -u_3 \\ v_1 & -v_3 \end{vmatrix}$$

se anulan, entonces para este valor de y una de las ecuaciones (7) es el corolario de la otra y para este valor de y obtenemos en el plano $\xi\eta$ no el punto, sino la recta (es la recta singular o exclusiva). La incluimos en la frontera de D -partición también.

Si el coeficiente del término mayor de la ecuación característica depende de los parámetros ξ y η , entonces, igualando este coeficiente a cero, obtenemos la ecuación de una recta singular más, que corresponde a $y = \infty$.

Si, por fin, el determinante del sistema (7) $\Delta = 0$, entonces de frontera de D -partición sirven sólo las rectas singulares.

3. Separamos los dominios conexos, en los cuales L parte el dominio de parámetros, los cuales serán los dominios $D(k, n-k)$ ($0 \leq k \leq n$).

4. Determinamos el carácter de estos dominios, es decir, hallamos k y $n-k$. Para esto escogemos en cada de los dominios $D(k, n-k)$ un punto (ξ_0, η_0) y examinamos de la estabilidad el polinomio obtenido

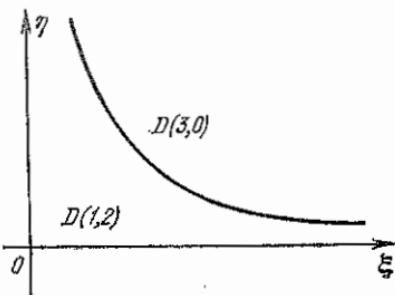


Fig. 48

$f(z, \xi_0, \eta_0)$ de coeficientes numéricos mediante los criterios citados arriba de la estabilidad de Rauss-Hurwitz o de Mijailov (véase §§ 26 y 27).

Construir D -dominios para los polinomios siguientes:

$$985. z^3 + \xi z^2 + \eta z + 6. \quad 986. z^4 + \xi z^3 + \eta z^2 + 4z + 1$$

$$987. z^3 + \xi z^2 + 11z + \eta. \quad 988. z^3 + (z^2 + 2) \xi + \eta z - 4.$$

$$989. z^4 + 2z^3 + \xi z^2 + z + \eta. \quad 990. z^3 + 3z^2 + \xi z + \eta.$$

$$991. z^3 + \xi z^2 + (z + 1) \eta + 1. \quad 992. z^3 + \eta z^2 + \xi z + 6.$$

$$993. z^3 + 2z^2 + \xi(z - 1) + \eta. \quad 994. z^3 + \xi(z^2 + z) + \\ + z + 2\eta.$$

$$995. \xi z^2 + 3z^2 + \eta z + 1.$$

$$996. \xi(z^3 + z^2) + \eta(z^2 + 1) + 2z.$$

$$997. \xi(z^3 - z) + \eta(z^2 + z - 1) + 1.$$

§ 29. Estabilidad de soluciones de las ecuaciones en diferencias

1. *Solución de las ecuaciones lineales homogéneas en diferencias de coeficientes constantes.* Sea que tenemos la ecuación en diferencias del orden k :

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = 0, \quad (1)$$

donde $a_k \neq 0$; $f(n)$ es la función buscada del argumento numérico entero; a_1, \dots, a_k son las constantes reales.

Para hallar las soluciones no triviales (no nulas) de la ecuación (1) componemos la ecuación característica

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k = 0. \quad (2)$$

Sea $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ las raíces de la ecuación (2).

Son posibles los casos siguientes:

1) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ son reales y distintas.

La solución general de la ecuación (1) será

$$f(n) = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n, \quad (3)$$

donde C_1, C_2, \dots, C_k son las constantes arbitrarias que pueden ser determinadas, si están dadas las condiciones iniciales

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \dots, f(k-1) = f_{k-1}.$$

2) Las raíces de la ecuación característica son reales, pero entre ellas existen múltiples. Sea, por ejemplo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_j = \tilde{\lambda}$, es decir, $\tilde{\lambda}$ es la raíz j -múltiple de la ecuación (2) y todas las demás de k raíces son distintas.

La solución general de la ecuación (1) será

$$f(n) = C_1 \tilde{\lambda}^n + C_2 n \tilde{\lambda}^n + \dots + C_j n^{j-1} \tilde{\lambda}^n + C_{j+1} \lambda_{j+1}^n + \dots + C_k \lambda_k^n. \quad (4)$$

3) Entre las raíces de la ecuación característica (2) hay las raíces complejas simples. Suponemos por ejemplo, que para la precisión

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \alpha + i\beta, & \lambda_2 &= \alpha - i\beta, \\ \lambda_3 &= \gamma + i\delta, & \lambda_4 &= \gamma - i\delta,\end{aligned}$$

las demás raíces son reales y distintas.

La solución general (1) entonces tiene la forma

$$\begin{aligned}f(n) = C_1 |\lambda_1|^n \cos(n \arg \lambda_1) + C_2 \lambda_1^n \sin(n \arg \lambda_1) + \\ + C_3 |\lambda_3|^n \cos(n \arg \lambda_3) + C_4 \lambda_3^n \sin(n \arg \lambda_3) + \\ + C_5 \lambda_5^n + \dots + C_k \lambda_k^n.\end{aligned}\quad (5)$$

4) En el caso, cuando $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ es la raíz j -múltiple de la ecuación (2) ($j \leq \frac{k}{2}$), entonces $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ también es la raíz de j -múltiple y la solución general (1) tiene la forma de

$$\begin{aligned}f(n) = (C_1 + C_2 n + \dots + C_j n^{j-1}) |\lambda_1|^n \cos(n \arg \lambda_1) + \\ + (C_{j+1} + C_{j+2} n + \dots + C_{2j} n^{j-1}) |\lambda_1|^n \sin(n \arg \lambda_1) + \\ + C_{2j+1} \lambda_{2j+1}^n + \dots + C_k \lambda_k^n.\end{aligned}\quad (6)$$

Observación. La raíz $\lambda = 0$ corresponde a la solución trivial (nula) $f(n) = 0$.

Ejemplo 1. Hallar la solución general de la ecuación

$$f(n+2) + 4f(n+1) + f(n) = 0.$$

Solución. Componemos la ecuación característica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0.$$

Sus raíces $\lambda_1 = -2 - \sqrt{3}$, $\lambda_2 = -2 + \sqrt{3}$ son distintas y reales; por consiguiente,

$$f(n) = C_1 (-2 - \sqrt{3})^n + C_2 (-2 + \sqrt{3})^n.$$

Ejemplo 2. Hallar la solución general de la ecuación

$$f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = 0.$$

Solución. La ecuación característica tiene la forma

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad 6 \quad (\lambda - 1)^3 = 0.$$

De aquí $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. La solución general será

$$f(n) = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2) \cdot 1^n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2.$$

Ejemplo 3. Hallar la solución general de la ecuación

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Solución. La ecuación característica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

tiene las raíces simples

$$\lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i.$$

Hallamos

$$|1 \pm i| = \sqrt{2}, \quad \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

La solución general tiene la forma

$$f(n) = C_1 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} = 2^{\frac{n}{2}} \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

Ejemplo 4. Hallar la solución general de la ecuación

$$f(n+4) + 2f(n+3) + 4f(n+2) - 2f(n+1) - 5f(n) = 0.$$

Solución. Componemos la ecuación característica

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda - 5 = 0.$$

La reescribiremos en la forma de

$$(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = -1 + 2i, \quad \lambda_4 = -1 - 2i.$$

Aquí

$$|-1 \pm 2i| = \sqrt{5}, \quad \arg(-1+2i) = \pi - \arctg 2.$$

La solución general de esta ecuación es

$$f(n) = C_1 + C_2 (-1)^n +$$

$$+ [C_3 \cos n(\pi - \arctg 2) + C_4 \sin n(\pi - \arctg 2)] 5^{\frac{n}{2}}$$

ó

$$f(n) = C_1 + C_2 (-1)^n +$$

$$+ (-1)^n 5^{\frac{n}{2}} [C_3 \cos(n \arctg 2) - C_4 \sin(n \arctg 2)].$$

Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$998. \quad 3f(n+2) - 2f(n+1) - 8f(n) = 0.$$

$$999. \quad f(n+3) + 3f(n+2) + 3f(n+1) + f(n) = 0,$$

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 3.$$

$$1000. \quad 4f(n+2) - 8f(n+1) + 5f(n) = 0.$$

$$1001. \quad f(n+3) - 8f(n) = 0.$$

$$1002. \quad f(n+4) - f(n+2) + 2f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

II. Solución de las ecuaciones no homogéneas lineales en diferencias de coeficientes constantes

Suponemos que tenemos la ecuación lineal no homogénea en diferencias de k orden

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = g(n) \quad (7)$$

de coeficientes constantes a_1, \dots, a_k . La solución general de esta ecuación representa por si misma la suma de solución general de la

ecuación homogénea respectiva y de cualquiera solución particular de la ecuación no homogénea.

1) Sea que el miembro segundo $g(n)$ de la ecuación (7) tiene la forma siguiente

$$g(n) = r^n u(n),$$

donde $u(n)$ es el polinomio de n de grado m , mientras que r es el número real.

Si r no es la raíz de la ecuación característica (2), entonces la solución particular $\tilde{f}(n)$ se busca en forma de

$$\tilde{f}(n) = r^n \tilde{u}(n),$$

donde $\tilde{u}(n)$ es el polinomio de grado m ; si r es la raíz j -múltiple de la ecuación (2), entonces $\tilde{u}(n)$ es el polinomio de grado $m+j$.

2) Si el miembro segundo $g(n)$ de la ecuación tiene la forma

$$g(n) = u(n) \operatorname{sen} \alpha n \quad \text{o} \quad g(n) = u(n) \cos \alpha n,$$

entonces la solución particular se busca en forma

$$\tilde{f}(n) = \tilde{u}(n) \operatorname{sen} \alpha n + \tilde{\tilde{u}}(n) \cos \alpha n.$$

3) Si $g(n) = u(n) \operatorname{sh} \alpha n$ o $g(n) = u(n) \operatorname{ch} \alpha n$, entonces la solución particular se busca en forma

$$\tilde{f}(n) = \tilde{u}(n) \operatorname{sh} \alpha n + \tilde{\tilde{u}}(n) \operatorname{ch} \alpha n.$$

Aquí y en el p. 2) $\tilde{u}(n)$ y $\tilde{\tilde{u}}(n)$ son los polinomios, el grado de los cuales se determina por la regla indicada en el p. 4).

Ejemplo 5. Hallar la solución general de la ecuación

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 3f(n) = 2(n+1). \quad (8)$$

Solución. La ecuación característica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ tiene las raíces $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. La solución general de la ecuación homogénea respectiva es

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2.$$

Puesto que el número 2 no es la raíz de la ecuación característica, entonces la solución particular de la ecuación no homogénea la buscamos en la forma de

$$\tilde{f}(n) = 2^n (An + B), \quad (9)$$

donde A y B son los coeficientes indefinidos. Sustituyendo (9) en (8), obtenemos

$$2^{n+2} (An + 2A + B) - 4 \cdot 2^{n+1} (An + A + B) + 3 \times \\ \times 2^n (An + B) = 2^n (n + 1)$$

6

$$4(An + 2A + B) - 8(An + A + B) + 3(An + B) = n + 1.$$

De aquí hallamos

$$4A - 8A + 3A = 1,$$

$$8A + 4B - 8A - 8B + 3B = 1$$

así que $A = -1$, $B = -1$.

De esa manera, la solución particular de la ecuación dada es

$$\tilde{f}(n) = -2^n(n+1);$$

la solución general es

$$f(n) = C_1 \cdot 3^n + C_2 - 2^n(n+1).$$

En los problemas siguientes hallar las soluciones generales de las ecuaciones lineales no homogéneas en diferencias:

$$1003. f(n+2) - 2f(n+1) - f(n) = n.$$

$$1004. f(n+2) + 2f(n+1) + f(n) = 3^n \cdot 32,$$

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0.$$

$$1005. f(n+2) + f(n) = \operatorname{sen} 2n, \quad f(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

$$1006. f(n+3) - 3f(n+2) + 3f(n+1) - f(n) = e^n.$$

$$1007. f(n+3) + 8f(n) = 2^n.$$

III. Estabilidad de soluciones de las ecuaciones en diferencias.

La solución $f^*(n)$ de la ecuación en diferencias del orden k que satisface las condiciones iniciales

$$f^*(0) = f_0^*, \quad f^*(1) = f_1^*, \dots, \quad f^*(k-1) = f_{k-1}^*,$$

se llama *estable*, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para cualquiera solución $f(n)$ de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales

$$f(0) = f_0, \quad f(1) = f_1, \dots, \quad f(k-1) = f_{k-1},$$

del conjunto de desigualdades

$$|f_0 - f_0^*| < \delta, \quad |f_1 - f_1^*| < \delta, \dots, \quad |f_{k-1} - f_{k-1}^*| < \delta$$

sigue la desigualdad $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ para cualquiera $n \geq 0$.

Si para cualquiera que sea pequeña $\delta(\varepsilon) > 0$ la desigualdad $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ no se cumple para cualquiera solución $f(n)$, entonces la solución $f^*(n)$ se llama *inestable*.

Si además del cumplimiento de la desigualdad $|f(n) - f^*(n)| < \varepsilon$ se cumple también la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) - f^*(n)] = 0,$$

entonces la solución $f^*(n)$ se llama *asintóticamente estable*.

La examinación de la estabilidad de la solución $f^*(n)$ de la ecuación no homogénea lineal en diferencias

$$f(n+k) + a_1 f(n+k-1) + \dots + a_k f(n) = g(n)$$

mediante la sustitución $\varphi(n) = f(n) - f^*(n)$ se reduce a la examinación de la estabilidad de la solución nula (trivial) de la ecuación homogénea

$$\varphi(n+k) + a_1 \varphi(n+k-1) + \dots + a_k \varphi(n) = 0.$$

En el posterior nos limitemos por la examinación de la estabilidad sólo de las soluciones triviales de ecuaciones homogéneas.

Ejemplo 6. Partiendo de la definición de la estabilidad de la ecuación en diferencias, examinar de la estabilidad la solución de la ecuación

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0, \quad (10)$$

que satisface las condiciones iniciales $f(0) = 0, f(1) = 0$.

Solución. La solución de la ecuación dada que satisface las condiciones iniciales $f(0) = 0, f(1) = 0$ es

$$f(n) = 0,$$

porque de (10)

$$f(n+2) = f(n+1) - \frac{1}{2}f(n).$$

Cualquiera solución de esta ecuación que satisface las condiciones $f(0) = f_0, f(1) = f_1$ tiene la forma

$$f^*(n) = \frac{1}{2^{n/2}} \left[f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4} \right].$$

Tomemos arbitraria $\varepsilon > 0$ y mostremos que existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $|f_0 - 0| < \delta$ y $|f_1 - 0| < \delta$ tiene lugar la desigualdad

$$|0 - f^*(n)| = \frac{1}{2^{n/2}} \left| f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4} \right| < \varepsilon$$

para todas $n \geq 0$. Lo que significa de acuerdo con la definición que la solución nula $f^*(n) = 0$ es estable.

Es evidente que

$$\left| \frac{f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}} \right| \leq \frac{|f_0| + |f_1 - f_0|}{2^{n/2}} \leq$$

$$\leq |f_0| + |f_1 - f_0| \leq |f_0| + |f_1| + |f_0| \leq 2(|f_0| + |f_1|)$$

para todas $n \geq 0$. Por lo tanto, si $|f_0| + |f_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces y tanto mejor $|0 - f^*(n)| < \varepsilon$ para todas $n \geq 0$. Por consiguiente, si, por ejemplo, tomar $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{4}$, entonces para $|f_0| < \delta$ y $|f_1| < \delta$ será válida la desigualdad $|0 - f^*(n)| < \varepsilon$ para todas $n \geq 0$, así que la solución nula de la ecuación dada es estable. Esta estabilidad es asintótica, puesto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [0 - f^*(n)] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_0 \cos \frac{n\pi}{4} + (f_1 - f_0) \sin \frac{n\pi}{4}}{2^{n/2}} = 0.$$

Partiendo de la definición de la estabilidad, examinar de la estabilidad las soluciones nulas de las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$1008. \quad 8f(n+2) + 2f(n+1) - f(n) = 0.$$

$$1009. \quad f(n+2) + f(n) = 0.$$

$$1010. \quad 4f(n+2) - 4f(n+1) + f(n) = 0.$$

$$1011. \quad f(n+2) - 6f(n+1) + 7f(n) = 0.$$

Para examinar de la estabilidad la solución nula $f(n) = 0$ de la ecuación (1) se emplea la regla general siguiente:

1. Si todas las raíces de la ecuación característica (2) por módulo son menores que la unidad, entonces la solución $f(n) = 0$ de la ecuación (1) es asintóticamente estable.

2. Si por lo menos una sola raíz de la ecuación característica por el módulo es mayor que la unidad, entonces la solución $f(n) = 0$ es inestable.

3. Si la ecuación característica tiene las raíces simples de módulos que son iguales a la unidad y las demás raíces, si tales existen, por el módulo son menores que la unidad, entonces la solución $f(n) = 0$ es estable, pero no asintóticamente.

4. Si la ecuación característica tiene por lo menos una raíz múltiple con el módulo que es igual a la unidad, entonces la solución $f(n) = 0$ es inestable.

La regla indicada reduce el problema sobre la estabilidad de la solución nula de la ecuación (1) a la aclaración de cuales son los módulos de raíces de la ecuación característica (2).

Ejemplo 7. Examinar de la estabilidad la solución nula $f(n) = 0$ de la ecuación

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

Solución. Componemos la ecuación característica

$$2\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Sus raíces $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i}{2}$. Tenemos

$$|\lambda_{1,2}| = \left| \frac{1 \pm i}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Por consiguiente, la solución $f(n) = 0$ de esta ecuación es asintóticamente estable.

Ejemplo 8. Examinar de la estabilidad la solución nula de la ecuación

$$f(n+2) - 2f(n+1) + 5f(n) = 0.$$

Solución. La ecuación característica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

tiene las raíces

$$\lambda_1 = 1 + 2i, \quad \lambda_2 = 1 - 2i.$$

Tenemos

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |1 \pm 2i| = \sqrt{5} > 1.$$

Las dos raíces son más que unidad que significa que la solución $f(n) = 0$ es inestable.

Es conocido que la función

$$\lambda = \frac{w+i}{w-1}$$

aplica el interior del círculo de unidad del plano λ sobre el semiplano izquierdo del plano w . A las raíces de la ecuación característica (2) que se encuentran dentro del círculo de unidad $|\lambda| < 1$ (es decir, los cuales por el módulo son menores que la unidad) les corresponderán las raíces de la ecuación transformada

$$(w+1)^k + a_1(w+1)^{k-1}(w-1) + \dots + a_k(w-1)^k = 0. \quad (6)$$

$$b_0w^k + b_1w^{k-1} + \dots + b_n = 0, \quad (11)$$

que se encuentran en el semiplano izquierdo del plano w .

El problema acerca de la posición de raíces de la ecuación (11) puede ser resuelto mediante el criterio de Rauss-Hurwitz o el criterio de Mijailov.

Ejemplo 9. Hallar las condiciones necesarias y suficientes de lo que las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (12)$$

se encuentran en el círculo de unidad $|\lambda| < 1$.

Solución. Supongamos que $\lambda = \frac{w+1}{w-1}$. Entonces la ecuación (12) obtendrá la forma

$$(w+1)^2 + a_1(w+1)(w-1) + a_2(w-1)^2 = 0$$

$$(1+a_1+a_2)w^2 + (2-2a_2)w + (1-a_1+a_2) = 0. \quad (13)$$

Para el polinomio (13) empleamos el criterio de Rauss-Hurwitz (véase § 26). La matriz de Hurwitz tiene la forma

$$\begin{pmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{pmatrix}.$$

Los menores diagonales principales de la matriz de Hurwitz son

$$\Delta_1 = 2 - 2a_2, \quad \Delta_2 = (2 - 2a_2)(1 - a_1 + a_2).$$

En virtud del criterio indicado debe ser

$$1 + a_1 + a_2 > 0, \quad 1 - a_2 > 0, \quad 1 - a_1 + a_2 > 0. \quad (14)$$

Pués, la ecuación característica (12) tiene en el círculo $|\lambda| < 1$ las raíces cuando y sólo cuando se cumplen las condiciones (14).

Corolario. La ecuación lineal homogénea en diferencias del segundo orden de coeficientes constantes

$$f(n+2) + a_1f(n+1) + a_2f(n) = 0$$

tiene la solución nula que es asintóticamente estable $f(n) = 0$ cuando y sólo cuando sus coeficientes satisfacen las condiciones (14).

Ejemplo 10. Examinar de la estabilidad la solución nula $f(n) = 0$ de la ecuación

$$2f(n+2) - 2f(n+1) + f(n) = 0.$$

Solución. Reescribiremos esta ecuación en la forma

$$f(n+2) - f(n+1) + \frac{1}{2}f(n) = 0,$$

Aquí $a_1 = -1$, $a_2 = 0,5$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 &= 0,5 > 0, \\ 1 - a_2 &= 0,5 > 0, \\ 1 - a_1 + a_2 &= 2,5 > 0. \end{aligned}$$

Las condiciones (14) del criterio de Rauss-Hurwitz están cumplidas. Esto significa que la solución $f(n) = 0$ es asintóticamente estable.

Ejemplo 11. Examinar de la estabilidad la solución nula de la ecuación

$$f(n+2) + f(n+1) + 2f(n) = 0.$$

Solución. Aquí $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Tenemos

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 &= 4 > 0, \\ 1 - a_2 &= -1 < 0. \end{aligned}$$

La solución nula es inestable.

Para las ecuaciones en diferencias siguientes hallar las condiciones necesarias y suficientes de la estabilidad asintótica de solución nula:

$$1012. a_0f(n+3) + a_1f(n+2) + a_2f(n+1) + \\ + a_3f(n) = 0.$$

$$1013. f(n+4) + pf(n+2) + qf(n) = 0.$$

$$1014. f(n+5) + pf(n) = 0.$$

$$1015. af(n+5) - bf(n) = 0, a \neq 0, b > 0.$$

Utilizando el criterio de Rauss-Hurwitz, examinar de la estabilidad la solución nula de las ecuaciones en diferencias siguientes:

$$1016. 11f(n+4) - 8f(n+3) + 8f(n+2) - \\ - 4f(n+1) + f(n) = 0.$$

$$1017. f(n+4) + f(n+3) + f(n) = 0.$$

$$1018. 12f(n+4) - 3f(n+3) + 2f(n+2) + \\ + 2f(n+1) - 2f(n) = 0.$$

$$1019. 7f(n+4) - 4f(n+3) + 30f(n+2) - \\ - 4f(n+1) + 3f(n) = 0.$$

$$1020. f(n+5) - f(n+4) + f(n) = 0.$$

$$1021. f(n+5) - f(n+2) - f(n) = 0.$$

$$1022. f(n+5) + f(n+1) - f(n) = 0.$$

Respuestas

2. $x = \frac{20}{17}$, $y = -\frac{36}{17}$. 3. $x = \frac{-b}{a^2 + b^2}$, $y = \frac{-a}{a^2 + b^2}$.

4. No existe la solución real. 5. $\frac{2(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)^2}$.

7. $x = \frac{u^2 + v^2 - u}{(1-u)^2 + v^2}$, $y = -\frac{v}{(1-u)^2 + v^2}$.

8. $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_4 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$.

9. a) $\rho = 5$, $\varphi = \arctg \frac{3}{4}$; b) $\rho = 4$, $\varphi = \frac{2}{3}\pi$; c) $\rho = 5\sqrt{2}$,

$\varphi = \arctg \frac{1}{7}\pi$; d) $\rho = 4$, $\varphi = \frac{4}{5}\pi$; e) $\rho = 5$, $\varphi = -\arctg \frac{3}{4}$;

f) $\rho = 1$, $\varphi = 2\pi - \alpha$.

10. a) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$; b) $2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$;

c) $2 \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right)$; d) $\sqrt{2(1-\sin \alpha)} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) \right]$; e) $1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; f) $2e^{i\pi}$; g) $1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$;

h) $1 \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$; i) $2e^{-\frac{2\pi}{3}i}$; j) $1 \cdot e^{(\alpha - \frac{\pi}{2})i}$; k) $\sqrt{34} e^{i \arctg \frac{3}{5}}$.

11. *Indicación.* Puesto que $x^2 - 2\lambda x \cos \alpha + \lambda^2 = [x - \lambda(\cos \alpha + i \sin \alpha)][x - \lambda(\cos \alpha - i \sin \alpha)]$, entonces es necesario mostrar que $f[\lambda(\cos \alpha \pm i \sin \alpha)] = 0$.

12. a) $-2^{10}(1 + i\sqrt{3})$; b) $2^{10}(1 + i)$; c) 1728, d) 1.

13. *Indicación.* Apliquemos la relación

$$\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha - i \sin \alpha}{\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)}$$

y utilizemos la fórmula de Moivre para el numerador y denominador.

15. a) $3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi$; b) $\cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi$;
 c) $4 \sin \varphi \cos^3 \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi$; d) $\cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$; e) $5 \sin \varphi \cos^4 \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi$; f) $\cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi$.

16. a) $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$; b) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$; c) $\frac{1}{2}(\pm \sqrt{3} + i)$, $-i$;

d) $\pm \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right)$, $\pm \left(\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi \right)$.

17. a) $\pm 1, \pm i$; b) $\frac{\sqrt[6]{4}}{2}(1+i)$, $\sqrt[6]{2} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$,
 $\sqrt[6]{12} \left(\sin \frac{\pi}{12} - i \cos \frac{\pi}{12} \right)$; c) $\pm (\sqrt{3}-i)$.

18. $\sqrt[10]{2}(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 78^\circ + i \sin 78^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 222^\circ + i \sin 222^\circ)$; $\sqrt[10]{2}(\cos 294^\circ + i \sin 294^\circ)$.

19. a) Todo el plano complejo, del cual está cortado el círculo del radio 2 con el centro en el origen de coordenadas. b) El círculo del radio $r = 1$ con el centro en el origen de coordenadas, al mismo tiempo el centro de este círculo está excluido (el círculo está «punzado»). c) Todo el plano complejo, del cual está cortado el círculo del radio $r = 1/2$ con el centro en el origen de coordenadas.

20. a) La circunferencia del radio $r = 8$ con el centro en el punto $z = 5t$. b) El círculo junto con la frontera del radio $r = 4$ con el centro en el punto $z = 1 + i$.

21. a) La parte del anillo limitado por dos rayos $\arg z = \pi/4$ y $\arg z = \pi/2$ y por las circunferencias de los radios $r = 1$ y $r = 2$ con el centro en el punto $z = -i$. b) La parte del anillo limitado por dos rayos $\arg z = \frac{\pi}{8}$ y $\arg z = \frac{4}{3}\pi$ y por las circunferencias de los radios $r = 2$ y $r = 3$ con el centro en el punto $z = 0$. El conjunto incluye también la parte del rayo $\arg z = \frac{4}{3}\pi$ entre las circunferencias indicadas y una parte de la circunferencia del radio 3 entre los rayos indicados.

22. a) El semiplano derecho, incluyendo y el eje OY ; b) la franja entre las rectas $y = 0$ y $y = 1$, incluyendo estas rectas.

23. a) El anillo concéntrico limitado por las circunferencias de los radios $R_1 = 1$ y $R_2 = 2$ con el centro en el punto $z_0 = -(2+i)$. Las dos circunferencias pertenecen al conjunto; b) la parte del plano que se encuentra más bajo de la recta $y = x$; c) la franja entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

24. El interior de la circunferencia de unidad.

25. a) El exterior de parábola $y = \frac{x^2}{4} - 1$; b) el semieje real, incluso y al punto $(0, 0)$.

26. El interior de la hipérbola $xy = -\frac{1}{2}$.

27. El dominio circular entre las elipses $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ y $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$, inclusive y las mismas elipses.

28. a) El interior de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 1$; b) el dominio comprendido entre las circunferencias $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ y $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$.

29. La recta $x = -2$.

30. La recta $y = 2$.

31. a) La hipérbola $xy = 1$; b) la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$; c) la circunferencia $x^2 + (y + 1)^2 = 1$.

32. a) La circunferencia $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$; b) la hipérbola $xy = -1$.

33. La hipérbola $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$.

34. La circunferencia $(x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

35. a) La elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$; b) el rayo en el eje OY de -1 hasta $-\infty$.

36. a) La hipérbola $\frac{\left(y + \frac{9}{4}\right)^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$; b) la elipse

$\frac{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{(3\sqrt{2})^2} = 1$.

37. a) La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$; b) la recta que es perpendicular al segmento $z_1 z_2$ y que pasa por su punto medio; c) la hipérbola $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - y^2 = \frac{1}{4}$; d) la parábola $y^2 = 2x + 1$.

38. a) $\bar{z} - z = 0$ y $\bar{z} + z = 0$; b) $z + \bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$; c) $k(z + \bar{z}) + 2b + i(z - \bar{z}) = 0$.

39. a) $z^2 + \bar{z}^2 = 2a^2$; b) $\bar{z}z + z + \bar{z} = 0$.

40. $(-1 + \sqrt[3]{2})$; $-1 + \frac{\sqrt[3]{2}}{2} \pm i \frac{\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}{2}$.

41. -1 ; 3 ; $1 \pm 2i$. 42. $z = \frac{2z_1 + z_2}{3}$. 43. $b \pm ai$.

44. $-3 - i\sqrt{3}$. 45. $\sqrt{3} - i$.

46. Solución. Según la condición del problema tenemos

$$(4 - 3i)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{5}{\sqrt{2}}(-1 + i)$$

$$\begin{cases} 4 \cos \varphi + 3 \sin \varphi = -\frac{5}{\sqrt{2}}, \\ -3 \cos \varphi + 4 \sin \varphi = \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

De aquí $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos \varphi = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$, es decir, $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{7}$, y por consiguiente, $\varphi = -\arctg \frac{1}{7}$.

$$47. \varphi = \frac{3}{4}\pi. \quad 48. x_k = \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n} \quad (k=1, 2, \dots, n-1).$$

$$49. x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad 50. -\sqrt{2} + i7\sqrt{2}.$$

$$51. z_1 = 3 + i, z_2 = 1 + 3i, z_3 = -1 + i.$$

53. *Solución.* Examinemos la suma

$$S_n = (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx).$$

Utilizando la fórmula de Moivre, obtendremos

$$S_n = (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n.$$

Esto es la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica con el denominador $q = \cos x + i \sin x$ y el primer término $a_1 = \cos x + i \sin x$. Ella es igual a

$$S_n = \frac{(\cos x + i \sin x) - (\cos nx + i \sin nx)(\cos x + i \sin x)}{1 - (\cos x + i \sin x)}.$$

Separando la parte real e imaginaria, hallamos

$$S_n = \frac{\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(n+1)x}{2} + i \frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{1 - (\cos x + i \sin x)}.$$

De aquí

$$\text{a) } \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{1 - (\cos x + i \sin x)};$$

$$\text{b) } \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\frac{\sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cos \frac{(n+1)x}{2}}{1 - (\cos x + i \sin x)}.$$

$$54. \text{a) } \frac{\sin^2 nx}{\sin x}; \quad \text{b) } \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

$$55. \text{a) } u = x + 2xy, v = y^2 - x^2 - y; \quad \text{b) } u = x^3 - y^3, v = 1 + 2xy;$$

$$\text{c) } u = 3xy^2 - x^3, v = 1 - 3x^2y + y^3; \quad \text{d) } u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

e) $u = \frac{x - 2xy - y + 1}{(x+1)^2 + y^2}$, $v = \frac{x^2 + y - y^2 + x}{(x+1)^2 + y^2}$; f) $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,
 $v = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

56. a) $w = -1$; b) $w = -3 - 4i$; c) $w = \frac{1+i}{2}$; d) $w = -\frac{5+12i}{13}$.

57. a) La circunferencia $u^2 + v^2 = 4$ que se recorre en el sentido horario; b) el eje Ov (a excepción del punto O) que se recorre del modo siguiente: primeramente de 0 hasta $+\infty$, y luego de $-\infty$ hasta 0; c) el rayo que pasa por la bisectriz III del ángulo de coordenadas de ∞ a 0; d) el rayo que pasa por la bisectriz I del ángulo de coordenadas de ∞ a 0; e) la bisectriz II del ángulo de coordenadas que se recorre de 0 hasta ∞ y la bisectriz IV del ángulo de coordenadas que se recorre de ∞ a 0; f) el semieje real positivo que se recorre de $+\infty$ a 0.

58. a) El eje OX pasa en el eje OU , al mismo tiempo para el cambio de x de $-\infty$ hasta $+\infty$ el eje OU se recorre de $+1$ hasta $-\infty$ y de $+\infty$ hasta $+1$ (el punto 1 se excluye). El eje OY pasa en la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$. b) El eje OX pasa en el eje OU del mismo modo que y en el p. a). El eje OY pasa en la recta $u = 1$ que se recorre del punto $+1$ hasta $1 + i\infty$ y del $1 - i\infty$ hasta $+1$ (el punto 1 se excluye).

59. a) $u = 2x - 1$, $v = 2y$; b) $u = x^2 - y^2 + x$, $v = (2x + 1)y$; c) $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$;

60. a) $u = e^{-x} \cos y$, $v = -e^{-x} \sin y$; b) $u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy$, $v = -e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$; c) $u = \sin x \operatorname{ch} y$, $v = \cos x \operatorname{sh} y$; d) $u = \operatorname{ch} x \cos(y - 1)$, $v = \operatorname{sh} x \sin(y - 1)$.

61. a) $\begin{cases} u = e^{(x^2 - y^2)} \ln 2 - 4k\pi xy \cos [2k\pi(x^2 - y^2) + 2 \ln 2 \cdot xy], \\ v = e^{(x^2 - y^2)} \ln 2 - 4k\pi xy \sin [2k\pi(x^2 - y^2) + 2 \ln 2 \cdot xy] \end{cases}$
 $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$

b) $u = \operatorname{ch} x \cos y$, $v = \operatorname{ch} x \sin y$; c) $u = \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sen}^2 x}$,
 $v = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} v}{\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sen}^2 x}$.

62. a) $\rho = 3/4$, $\varphi_0 = -\pi/2$; b) $\rho = 5/4$, $\varphi_0 = \pi$.

63. $\rho = \operatorname{ch} 1$, $\varphi_0 = \pi/2$. 64. $\rho = \pi$, $\varphi_0 = -\pi/2$.

65. $\rho = \cos^2(\ln 3)$, $\varphi_0 = 0$.

66. a) $1 + 2k\pi i$. Aquí y en lo posterior, se hacen referencias a lo contrario, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$;

b) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi i$; c) $\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi i$; d) $\ln \sqrt{2} + \left(2k - \frac{3}{4}\right)\pi i$;

e) $\ln \sqrt{13} + \left(2k\pi - \operatorname{arctg} \frac{2}{3}\right)i$; f) $-(2k + \frac{1}{2})\pi + 2m\pi \cdot i$ ($k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

67. a) $e^{-\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; b) $e^{\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; c) $e^{-2k\pi}$; d) $e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$; e) $e^{-\left(4k+\frac{1}{2}\right)\pi}$; f) $e^{(i-1)\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi}$;

g) $2^{3/2}e^{3\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)-3\left(\frac{\pi}{4}+\ln\sqrt{2}-2k\pi\right)i}$.

68. a) $\rho=0$, φ no está definido; b) $\rho=e^{-2k\pi}$, $\varphi=\ln 10+2m\pi$ ($k, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); c) $\rho=9e^{2k\pi}$, $\varphi=-\ln 3+2m\pi$ ($k, m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

69. a) $\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{3}{4}\pi i$.

70. a) $i \operatorname{sh} \pi$; b) $\operatorname{ch} \pi$; c) $i \operatorname{th} \frac{\pi}{2}$.

71. a) $-i \operatorname{cth} \pi$; b) $2k\pi-i \ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi-i \ln(\sqrt{2}+1)$; c) $\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi-i \ln(\sqrt{2}+1)$, $\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi-i \ln(\sqrt{2}-1)$.

72. a) $k\pi+i\frac{\ln 2}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$); b) i ; c) 0.

73. $z_k=(2k+1)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

74. $z_k=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

75. $z_k=(2k+1)\pi+i \ln 2$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

76. $z_k=\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

77. $z_{2k}=2k\pi-i \ln(\sqrt{\pi^2+1}-\pi)$, $z_{2k+1}=(2k+1)\pi-i \ln(\sqrt{\pi^2+1}+\pi)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

78. $x=0$.

79. $z_{2k}=2k\pi i$, $z_{2k+1}=(2k+1)\pi i+\ln 3$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

80. $z_k=\ln(1+\sqrt{2})+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i$, $z_k=\ln(\sqrt{2}-1)+\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi i$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

81. a) $z=1-i$; b) $z=-e+i$. 82. 1.

83. 0. 84. No existe. 85. 0. 86. $1/3$.

87. $-i$. 88. i . 89. No existe. 90. 0. 94. i .

95. $\sqrt{2}$. 96. $-i$. 97. $-2i$.

104. a) no; b) si; c) no; d) si; e) no; f) si.

105. a) no; b) no; c) no; d) si.

109. *Indicación.* Para las dos direcciones cualesquiera que se caracterizan por los vectores unitarios s^0 y n^0 , debido a la condición

$n^0 = is^0$, existen las condiciones generalizadas de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{\partial u}{\partial n}. \quad (1)$$

Para obtener las condiciones de Cauchy-Riemann en las coordenadas polares

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (2)$$

es necesario en calidad de s^0 tomar el vector unitario tangente a la circunferencia $|z| = \rho$, dirigido en el sentido antihorario y por n^0 tomar el vector de la normal interior a la circunferencia. Además, hay que tener en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Entonces muy fácilmente de (1) obtendremos (2). Notemos que las condiciones de Cauchy-Riemann en las coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

se obtienen de (1) para

$$s^0 = 1, \quad n^0 = i.$$

114. a) $f(z) = \frac{1}{z}$; b) $f(z) = \ln z$; c) $f(z) = z^2 + 2z$.

115. a) $f(z) = 2 \operatorname{sh} z - z^2$; b) $f(z) = 2 \operatorname{sen} z - z$; c) $f(z) = 4 \operatorname{ch} z + z^2 - 1$.

116. a) $f(z) = 2 \cos 2z + z$; b) $f(z) = 2i(\cos z - 1) - iz^2 + 2$.

118. a) si; b) no; c) si; d) no.

119. $a + c = 0$.

120. a) no; b) si; c) no; d) si.

122. $f(u) = c_1 u + c_2$; c_1 y c_2 = const.

123. a) no; b) si; c) si. *Indicación.* Mostrar que la función $\ln w$ es analítica en el dominio D .

125. a) si; b) no; c) no. 126. $u = c_1(ax + by) + c_2$.

127. $u = c_1 xy + c_2$. 128. $u = c_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_2$.

129. $u = c_1(x^2 - y^2) + c_2$.

130. $u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2$, c_1 y c_2 son las constantes arbitrarias.

131. $u = c_1 \frac{x}{x^2 + y^2} + c_2$.

132. a) $r_1 = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $r_2 = \frac{1}{e}$; $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$; b) $r_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$; $r_2 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 1 - \operatorname{sen}^2 1}$, $\varphi_2 = -\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$; c) $r_1 = 15$, $\varphi_1 = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3}$;

$$r_2 = 3 \left(1 + \frac{\pi^2}{4} \right), \quad \varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} \frac{4\pi}{\pi^2 - 4}.$$

133. a) El semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ se estira, el semiplano $\operatorname{Re} z < 0$ se contrae.

b) En cualquier punto z (además de $z = 0$) que se encuentra en el interior de la circunferencia $|z| = 1$ existe el estiramiento y para los puntos que se encuentran fuera de esta circunferencia existe la contracción.

c) Lo mismo que en el p. b).

d) La parte del plano complejo que se encuentra en el interior de la circunferencia $|z| = 1/\sqrt{3}$ se contrae; la parte del plano que se encuentra fuera de esta circunferencia se estira.

134. $S_D \sim 8/3$, $l_w = 2(1 + \sqrt{2}) + \ln(3 + 2\sqrt{2})$.

135. $S_D = \frac{x_2 - x_1}{4} (\operatorname{sh} 2y_2 - \operatorname{sh} 2y_1) - \frac{y_2 - y_1}{4} (\operatorname{sen} 2x_2 - \operatorname{sen} 2x_1)$.

136. $7,5\pi$.

137. $\sqrt{2}(e^{2\pi} - 1)$.

138. El rectángulo dado se aplica en el anillo $e \leq |w| \leq e^2$, el área del cual es igual a $\pi(e^4 - e^2)$. Según la fórmula (9) obtenemos $4(e^4 - e^2)$. El error surge debido a lo que para las condiciones dadas la aplicación no es biúnica.

139. $1/2$. 140. $-\frac{\pi}{2}$. 141. $\frac{1}{4}(e^2 - 1)(1 + i)$.

142. a) $2\pi i$; b) $-2\pi i$. 143. 0. 144. 0.

145. $(i - 1)e^i$.

146. a) $2 + i$; b) $6 + 2i$. 147. $-2(1 + i)$. 148. -1 .

149. $\frac{3}{5}(i - 1)$.

150. a) $e \cos 1 - 1 + ie \operatorname{sen} 1$; b) $e \cos 1 - 1 + ie \operatorname{sen} 1$.

151. $-(1 + i \operatorname{sh} 1)$. 152. a) $2(i - 1)$; b) $2\sqrt{2}i$.

153. $2\sqrt{2} - 4 + i2\sqrt{2}$. 154. $-7e^{-2} + (3 - 2i)e^i$.

155. $e^{-1} - 1$.

156. $\cos 1 - \operatorname{sen} 1 - ie^{-1}$. 157. $1 - \cos 1 + i(\operatorname{sen} 1 - 1)$.

158. $-\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^2}{4} + 3\ln^2 2\right) + i\frac{\pi}{8}\ln 2$. 159. $-\frac{\pi^2}{8}$.

160. $\frac{1}{4}[1 - \cos(2 + 2i)]$. 161. $-\left(\operatorname{tg} 1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 1 + \frac{1}{2}\operatorname{th}^2 1\right) + i\operatorname{th} 1$.

162. $\sqrt{2}\operatorname{sh} 1 + i(\sqrt{2}\operatorname{sh} 1 - 2\sqrt{\operatorname{sen} 1})$.

163. $\left(\frac{1}{4}\operatorname{sh} 2 + \frac{1}{2}\right)i$. 164. $-\frac{4}{3}$. 165. 0.

166. $-\ln\sqrt{\operatorname{sh}^2 1 + \operatorname{cos}^2 1} + i\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 1 \cdot \operatorname{th} 1)$.

167. πi . 168. πe^{-1} . 169. $\frac{\pi}{2}i$. 170. $\pi \operatorname{sh} 1$.

171. 0. 172. $\frac{2}{3}\pi \operatorname{ch} \pi \cdot i$. 173. 0. 174. $-\frac{\pi}{45}i$.

175. π . 176. 0. 177. $-\pi i$. 178. $2\pi i$.

179. $-\frac{\pi(\pi+2)\sqrt{2}}{8}i$. 180. 0. 181. $-\frac{\pi i}{27}$.

182. $-\frac{\pi^2}{2} \operatorname{sh} 1$. 183. $\pi^3 i$. 184. 0. 185. $-2\pi i$.

186. $-\frac{1+i}{2} e^i$. 187. Diverge. 188. Converge.

189. Converge. 190. Converge. 191. Diverge.

192. Converge absolutamente. 193. Converge. 194. Diverge.

195. Converge. 196. Diverge. 197. $R = 1$. 198. $R = 1$.199. $R = \sqrt{2}$. 200. $R = \infty$. 201. $R = 1$. 202. $R = \infty$.203. $R = 1$. 204. $R = 1$. 205. $R = 1$. 206. $R = \infty$.207. $R = 1$. 208. e^{-1} .

209. a) y b) $R \geq \frac{r+r'-|r-r'|}{2}$; c) $R \geq rr'$; d) $R \leq \frac{r}{r'}$.

210. $-\sin 1 + 2(z+1) \cos 1 + \frac{2^2}{2!}(z+1)^2 \sin 1 - \frac{2^3}{3!}(z+1)^3 \times$
 $\times \cos 1 - \dots, R = \infty$.

211. $\frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(z + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2!} \left(z + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(z + \frac{\pi}{4} \right)^3 + \dots \right], R = \infty$.

212. $\sqrt{e} \left[1 + \frac{1}{2}(2z-1) + \frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2 + \frac{1}{3!2^3}(2z-1)^3 + \dots \right],$
 $R = \infty$.

213. $-\frac{1}{5} \left[1 + \frac{3}{5}(z+2) + \frac{3^2}{5^2}(z+2)^2 + \frac{3^3}{5^3}(z+2)^3 + \dots \right],$
 $R = \frac{5}{3}$.

214. $-\frac{4}{5} - \frac{9}{25}z - \frac{41}{125}z^2 - \dots, R = 1$.

215. $-iz + z^3 + iz^5 - z^7 - \dots, R = 1$.

216. $1 + \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \right), R = \infty$.

217. $\frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \right), R = \infty$.

218. $\ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2 \cdot 4} + \frac{z^3}{3 \cdot 8} + \dots \right), R = 2$.

219. $\ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{5z^2}{2 \cdot 4} + \frac{7z^3}{3 \cdot 8} - \dots, R = 1$.

220. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}z + \frac{1}{3!2^3}z^3 + \frac{3}{5!2^3}z^5 + \dots, R = \pi$.

221. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} z + \frac{1}{2!2^2} z^2 - \frac{1}{3!2^3} z^3 + \dots,$

$R = \sqrt{\ln^2(2 - \sqrt[4]{3}) + \pi^2}.$

222. $\frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} z - \frac{4}{2!6^3} z^2 + \frac{1}{3!6^3} z^3 + \dots, R = \sqrt{\ln^2 5 + \pi^2},$

223. $\ln 2 - \frac{1}{2} z + \frac{1}{2!2^2} z^2 - \frac{1}{4!2^3} z^4 + \dots, R = \pi,$

224. $-\frac{1}{2!} z^2 - \frac{2}{4!} z^4 - \frac{16}{6!} z^6 \dots, R = \frac{\pi}{2}.$

225. $\ln 2 - \frac{z^2}{4} - \frac{z^4}{4 \cdot 4!} - \frac{1}{2 \cdot 6!} z^6 + \dots, R = \pi.$

226. $e \left(1 + z + \frac{3}{2!} z^2 + \frac{13}{3!} z^3 + \dots \right), R = 1.$

227. $f(z) = \frac{1}{a-z}, |z| < 1. 229. |z| > 1/\sqrt{2}.$

230. $|z| > 2. 231. |z| > e^{-1}. 232. |z| > e.$

233. $|z+1| > 1/4. 234. |z-2-i| > 1/2. 235. |z+2i| > 3.$

236. $|z+1-i| > 1. 237. |z+1+i| < 1.$

238. $|z-i| < 2. 239. 0 < |z-2+i| < 1.$

240. $2 < |z| < 4. 241. \text{Diverge en todas partes.}$

242. $1 < |z| < 2. 243. |z-i| > e. 244. 1 < |z| < 2.$

245. $|z+1| > 2. 246. 0 < |z-i| < 2. 247. 0 < |z| < 1.$

248. $0 < |z-1| < 1.$

249. 1) Si $|a| > |b|$, entonces diverge en todas partes; 2) si $|a| < |b|$, entonces converge en el anillo $|a| < |z| < |b|$.

250. $\frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} - \frac{z^5}{7!} + \dots$

251. $\frac{2}{2!} z - \frac{8}{4!} z^3 + \frac{32}{6!} z^5 - \dots$

252. $\frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots$

253. $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \dots$

254. $z^3 + z^2 + \frac{z}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!z} + \dots$

255. $z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!z^2} + \dots$

256. $\frac{4^2}{2!2z^3} - \frac{4^4}{4!2z^5} + \frac{4^6}{6!2z^7} - \dots$

257. $\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \dots$

258. $4 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$

259. $\frac{2}{z^4} - \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{4!} - \frac{z^2}{6!} + \dots$

260. $\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} - \frac{z}{4!} + \dots$

261. $\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}.$

262. $\frac{\operatorname{sen} 2}{z-2} - \frac{\operatorname{sen} 2}{2!} (z-2) - \frac{\cos 2}{3!} (z-2)^2 + \frac{\operatorname{sen} 2}{4!} (z-2)^3 +$
 $+ \frac{\cos 2}{5!} (z-2)^4 - \dots$

263. $(1-i) + (z+i) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{i}{4!}\right) \frac{1}{z+i} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{i}{2!}\right) \frac{1}{(z+i)^2} + \dots$
 $\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{i}{n!} \right] (z+i)^{-n}.$

264. a) $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n;$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 2^{n-1}}{z^n}.$

265. a) $\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n;$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+2}}.$

266. a) No se desarrolla;

b) $\frac{1}{5} \left(\frac{2^2+1}{z^3} - \frac{2^3+2}{z^4} + \frac{2^4-1}{z^5} - \frac{2^5-2}{z^6} + \dots \right).$

267. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n.$

268. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n - \frac{(-1)^n}{2^n} \right] z^{n-1};$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^n;$ c) $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+(-2)^n}{z^{n+1}}.$

269. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(z+2)^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}.$

270. No se desarrolla

271. $\frac{1}{z-1} + 5 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{n-2}}{(z-1)^n}.$ 272. $z + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2) \cdot 4^{n+1}}{z^{2n+1}}.$

273. $-\frac{1}{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}}.$

274. $-\frac{l}{2(z-i)} + \frac{l}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^n} (z-i)^n.$

275. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}.$

276. a) $z = 0$ es de segundo orden, $z_{1,2} = \pm 2i$ son simples; b) $z_n = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) son simples.

277. a) $z = 0$ es del tercer orden, $z_n = n\pi$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) son simples. b) $z = 0$ es simples, $z_n = n\pi i$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) son del segundo orden.

278. a) $z_n = (2n+1)\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son del segundo orden; b) $z_n = (4n+1)\frac{\pi}{2}i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son del segundo orden.

279. a) $z = -\pi i$ es del segundo orden; $z_n = n\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son simples; b) $z_n = \sqrt[3]{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), $z_n = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ son simples.

280. a) $z_{1,2} = \pm \pi i$ son del segundo orden, $z_n = (2n+1)\pi i$ ($n = 1, \pm 2, \pm 3, \dots$) son simples; b) ceros no existen.

281. Del segundo orden. 282. Del tercer orden.

283. Cero simple. 284. Del cuarto orden.

285. Del primer orden. 286. Del segundo orden.

287. Del cuarto orden. 288. Del decimoquinto orden.

289. a) El cero, el orden del cual es no menos que $\min(n, m)$; b) El cero del $n+m$ orden; c) el cero de $n-m$ orden, si $n > m$; el punto correcto que no es cero, si $n = m$; el punto singular, si $n < m$.

290. a) El polo del tercer orden; b) el polo del cuarto orden; c) el polo del segundo orden.

291. a) El polo simple; b) el polo del segundo orden.

292. a) $z_n = (4n+1)\frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son los polos del segundo orden; b) $z = 0$ es el punto evitable singular.

293. a) $z = -2$ es el punto singular esencial; b) $z = 0$ es el punto singular esencial.

294. a) $z = 0$ es el polo del segundo orden, $z = -1$ es el polo del segundo orden; b) $z = 0$ es el polo del segundo orden, $z = 2n\pi i$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) son los polos simples.

295. a) $z = 0$ es el punto singular esencial; b) $z = -1$ es el punto singular esencial; c) $z = 0$ es el punto singular especial.

296. a) $z = 0$ es el punto singular evitable; $z = 2\pi k$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) son los polos del segundo orden; b) $z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son los puntos singulares evitables; $z = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) son los polos simples; c) $z = \pi$ es el polo simple; $z = k\pi$ ($k = 0, -1, \pm 2, \pm 3, \dots$) son los polos del segundo orden.

297. El punto singular evitable. 298. El polo simple.

299. El polo simple. 300. El punto singular evitable.

301. El punto singular esencial.

302. $z = 0$ es el polo del cuarto orden, $z = -1$ es el polo simple.

303. El punto singular evitable. 304. El punto singular evitable.

305. El polo simple. 306. El punto singular evitable.

307. El punto singular esencial. 308. 1. 309. $-16/3$.

310. 1. 311. -1 . 312. 0. 313. 0.

$$314. \operatorname{res} f(0)=0, \operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}, \quad \operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}+in\right)=\frac{-8}{\pi^2(2n+1)(4n+1)} \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$315. \operatorname{res} f(0)=1/24.$$

$$316. \operatorname{res} f(-i)=-\frac{1+3i}{20} \cos 1, \quad \operatorname{res} f(i)=-\frac{1-3i}{20} \cos 1,$$

$$\operatorname{res} f(3)=\frac{\operatorname{ch} 3}{10}.$$

$$317. \operatorname{res} f\left[(-1)^n \frac{\pi}{6} + in\right] = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/6+2n\pi}, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\pi/6+(2n-1)\pi}, \end{cases}$$

$$\operatorname{res} f\left[(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + in\right] = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\pi/6+2n\pi}, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{\pi/6+(2n-1)\pi} \end{cases}$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$318. \operatorname{res} f(0)=-\frac{5}{2}, \quad \operatorname{res} f(1)=e.$$

$$319. \operatorname{res} f(-1)=\frac{1}{27}, \quad \operatorname{res} f(2)=-\frac{1}{27}.$$

$$320. \operatorname{res} f(0)=0, \quad \operatorname{res} f(z_1)=-\frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^i, \quad \operatorname{res} f(z_2)=\frac{(1-i)e^{-i}}{4\sqrt{2}},$$

$\text{res } f(z_3) = \frac{(1+i)e^i}{4\sqrt{2}}$, $\text{res } f(z_4) = -\frac{(1-i)e^{-i}}{4\sqrt{2}}$, donde z_k ($k=1, 2, 3, 4$) son las raíces de la ecuación $z^4+1=0$.

321. $\text{res } f(0) = -\frac{1}{6}$. 322. $\text{res } f(0) = 0$.

323. $\text{res } f(-i) = \frac{4}{9} \sinh 2 \cdot i$, $\text{res } f\left(\frac{i}{2}\right) = -\frac{4}{9}(e+2e^{-1})i$.

324. $\text{res } f(0) = -\frac{1}{6}$, $\text{res } f(3) = \frac{2}{27} \sin^2\left(\frac{3}{2}\right)$.

325. $\text{res } f(0) = 0$.

326. $\text{res } f(-3) = \frac{1}{8} e^{-3i}$, $\text{res } f(-1) = -\frac{e^{-i}}{4}$, $\text{res } f(1) = \frac{e^i}{8}$.

327. $\text{res } f(0) = -\frac{4}{\pi^2}$, $\text{res } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

328. $\text{res } f(i) = -1$.

329. $\text{res } f(1) = \frac{2n(2n-1)(2n-2)\dots[2n-(n-2)]}{(n-1)!}$.

330. $\text{res } f(n\pi) = 0$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

331. $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!(2n)!}$ en el punto $z=0$.

332. e en el punto $z=1$.

333. $\sin 1$ en el punto $z=0$; $-\sin 1$ en el punto $z=1$.

334. $1-e^{-1}$ en el punto $z=0$; e^{-1} en el punto $z=-1$.

335. $e^{-1}-1$ en el punto $z=0$.

336. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(2n+1)!}$ en el punto $z=0$.

337. 0. 338. 0. 339. $(1-2e^{-1})\pi i$.

340. $2(1-e^{-1})\pi i$. 341. $-\frac{1}{3}\pi i$. 342. 0.

343. $-\frac{4}{3} \ln 3 \cdot \pi i$. 344. $2\pi i$.

345. $[\cos 1 + \sin 1 + i(\sin 1 - \cos 1)] \frac{\pi}{2}$. 346. πi .

347. 0. 348. $2\pi i \frac{e^3}{3}$. 349. $-\pi^2 i$. 350. $2\pi i$.

351. $\frac{\sin 1 - 4 \cos 1}{12} \pi i$. 352. $-\frac{\pi i}{\sqrt{2}}$. 353. 0.

354. $3\pi i$. 355. 0. 356. $z=\infty$ es el polo simple.

357. $z=\infty$ es el punto singular evitable.

358. $z=\infty$ es el punto singular esencial.

359. $z = \infty$ es el punto singular evitable.

360. $z = \infty$ es el punto singular evitable.

361. $z = \infty$ es el polo del tercer orden.

363. $2\pi i$. 364. 0. 365. 0. 366. $2\pi ei$.

$$367. -\frac{\pi}{3} i. \quad 368. 2\pi i. \quad 369. \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \quad 370. \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

$$371. \frac{3}{8}\pi. \quad 372. \frac{(2n)!}{(n!)^2} 2^{-2n}\pi. \quad 373. -\frac{\pi}{27}. \quad 374. \frac{\pi}{2(b^2-a^2)^3} \times \\ \times \left(\frac{5b^2-a^2}{b^3} + \frac{b^2-5a^2}{a^3} \right). \quad 375. \frac{2}{3}\pi.$$

$$376. \frac{\pi}{n \operatorname{sen} \frac{2m+1}{n}}. \quad 377. \frac{2}{3}\pi. \quad 378. \frac{\pi}{2}.$$

$$379. \frac{\pi}{16a^{3/2}b^{5/2}}. \quad 381. \frac{\pi}{3} e^{-3} (\cos 1 - 3 \operatorname{sen} 1).$$

$$382. \frac{\pi}{2} e^{-4} (2 \cos 2 + \operatorname{sen} 2).$$

$$383. \frac{\pi}{12} e^{-2} (2e-1). \quad 384. \frac{\pi}{3} e^{-3}.$$

$$385. \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-a/\sqrt{2}} \left(\cos \frac{a}{\sqrt{2}} + \operatorname{sen} \frac{a}{\sqrt{2}} \right). \quad 386. \frac{\pi}{2a} e^{-a}.$$

$$387. \frac{\pi}{2a} e^{-ma}. \quad 388. \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{sen} \frac{1}{2}.$$

$$389. \frac{-\pi}{16} \left(e^{-\lambda} - \frac{1}{3} e^{-3\lambda} \right). \quad 390. \frac{\pi}{4} (2-a) e^{-a}.$$

$$391. 0. \quad 392. \frac{\pi}{4b^3} e^{-bm} [3b^2 - a^2 - mb(3b^2 + a^2)].$$

$$393. \frac{\pi}{2}. \quad 394. \frac{\pi}{2} (1 - e^{-1}). \quad 395. \frac{b-a}{2}\pi.$$

$$396. \frac{\pi}{2a^4} - \frac{\pi e^{-ma}}{4a^3} \left(m + \frac{2}{a} \right). \quad 397. \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

$$398. \pi \left(\frac{1}{\operatorname{sen} a\pi} - \frac{1}{\operatorname{sen} b\pi} \right). \quad 399. \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

$$400. \frac{\pi(1-p+p^2)}{1-p}. \quad 401. \frac{2\pi}{p^2(p^2-1)}. \quad 402. 0.$$

$$403. \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \quad 404. \pi i. \quad 405. \frac{2\pi}{b^2} (a - \sqrt{a^2-b^2}).$$

$$406. \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}. \quad 407. \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}. \quad 408. \frac{1-\pi a \operatorname{ctg} \pi a}{2a^2}.$$

409. $\frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3} (\operatorname{ctg} \pi a + \operatorname{ctg} \pi a)$. 410. $\frac{\pi^2}{\operatorname{sen}^2 \pi a}$.

411. $\frac{\pi^2}{8}$. 412. $\frac{\pi^2 \operatorname{ctg} \pi a}{\operatorname{sen} \pi a}$. 413. $\frac{\pi^3}{32}$.

414. $\frac{\pi \operatorname{ch} \alpha a}{2a \operatorname{sh} \pi a} + \frac{1}{2a^2}$. 415. $\frac{1}{4a^4} \left(\frac{\pi^2 a^2 \operatorname{ch} \pi a}{\operatorname{sh}^2 \pi a} + \frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} - 2 \right)$.

416. $\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$).

417. $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 3$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

418. a) $\operatorname{res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -1$, b) $\operatorname{res}_{z=\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1$

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); b) $\operatorname{res}_{z=k\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} = 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

419. -2. 420. 3. 421. 6. 422. -1. 423. -3. 424. -4.

425. 2. 426. 1. 427. 1. 428. 1. 429. 2. 430. 6.

431. 3. 432. No hay. 433. 5. 434. No hay. 435. 11. 436. 6.

437. 2. 438. 3. 439. 4. 440. 1. 441. n. 442. 2.

443. 4. 444. No hay. 445. 1. 446. 1.

450. a) Todo el plano; b) todo el plano, menos el punto $z = 2$; c) todo el plano, menos el punto $z = 0$; d) todo el plano menos los puntos $z_k = 1 - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ e) todo el plano, menos el punto $z = -2i$.

454. a) y b) es el paso paralelo; c), d) y e) es el giro; f) es el alargamiento.

455. a) $w = az + b$; b) $w = -az + b$; c) $w = -i(az + b)$, donde a y b son los números reales, $a > 0$.

456. a) $w = -\frac{1+8i}{5}z + \frac{14+2i}{5}$; b) $w = 2z + i$; c) $w = iz - 2$.

457. $w = \frac{z-a}{h}$.

458. *Indicación.* Suponiendo $z = x + iy$, $w = u + iv$, obtenemos

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Recorriendo la frontera de la semifranja, verbigracia, de tal manera que el dominio se queda a la izquierda, en vigor del principio de correspondencia de fronteras, hallamos que el cuarto cuadrante con el semicírculo eliminado $|z - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi i| \leq \frac{1}{2}$ será la imagen de la semifranja.

459. a) $\arg w = -\frac{\pi}{3}$; b) $|w| = 1$, $-\pi < \arg w < -\frac{\pi}{4}$;

c) $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{2}$, $v = 0$; d) $\frac{1}{2} < v < 1$, $u = 0$; e) $\left|w - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}$, $u > 0$.

460. $w = \frac{z-i}{iz-i}$. 461. $\left|w - \frac{1}{3}\right| > \frac{1}{3}$, $u < \frac{3}{4}$.

462. $\operatorname{Re} w > 0$. 463. $u < v$. 464. $u + v < 0$.

465. a) $-1+i$; b) $1+i$; c) ∞ .

466. a) $w = -az + b$; b) $w = -i(az + b)$, donde a y b son los números reales, $a > 0$.

467. $w = \frac{2}{2-z}$. 468. a) $w = \frac{z-i}{z+i}$; b) $w = i \frac{z-2i}{z+2i}$.

469. $w = \frac{z-i}{iz-1}$. 470. $w = \frac{i-1-(1+i)z}{(3i-1)z-1-3i}$.

471. $w = i \frac{1-z}{1+z}$. Utilizar la fórmula (7).

472. $w = \frac{2z-5}{10-z}$. Utilizar la fórmula (7).

473. Solución. Utilizar la fórmula $w = e^{i\varphi} \frac{z-z_0}{1-zz_0}$, donde z_0 es el punto del primer círculo que pasa al centro del segundo. En el caso a) tenemos $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, es decir $z_0 = \frac{1}{2}$. Utilizando la condición $\arg f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, obtenemos $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Pues, $w = i \frac{2z-1}{2-z}$. En el caso b) análogamente obtenemos $w = -iz$.

474. $w = \frac{5-z+\sqrt{5}(i-1)(z+1)}{5-z+\sqrt{5}(i+1)(z+1)}$.

475. El primer cuadrante del plano w .

476. El dominio $\frac{1}{2} \leq |w-1| \leq 1$, $-\frac{\pi}{4} \leq \arg(w-1) \leq 0$.

477. $w = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$. 478. $w = \sqrt{e^{2\pi zi} + e^{-2\pi a}}$.

479. $w = \sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$. 480. $w = \left(\frac{z-i}{iz-1}\right)^2$.

Indicación. Primeramente aplicar el círculo sobre el semiplano superior y luego transformarlo en el plano con el corte.

481. $w = [(z-z_0)e^{-i\varphi_1}]^{\frac{\pi}{\varphi_2-\varphi_1}}$.

482. $w = -e^{-z}$. 483. $w = \left(\frac{e^{-z}-1}{e^{-z}+1}\right)^2$.

484. Sobre el rectángulo $\{\ln r \leq u \leq \ln R, 0 \leq v \leq \pi\}$.

485. $w_1 = ze^{-i\frac{\pi}{2}}$, $w = \sqrt{w_1} = \sqrt{ze^{-i\frac{\pi}{4}}} (\sqrt{1}=1)$.

486. $w_1 = \frac{z-a}{b-z}$, $w = \sqrt{w_1} = \sqrt{\frac{z-a}{b-z}}$.

487. $w_1 = z - a$, $w_2 = \frac{w_1}{w_1 - (b-a)}$, $w = \sqrt{w_2} = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$.

488. $w_1 = z^2$, entonces $w_1|_{z=1+i}$. Según la fórmula (9) $w = e^{i\varphi} \frac{w_1 - 2i}{w_1 + 2i} = e^{i\varphi} \frac{z^2 - 2i}{z^2 + 2i}$. De la condición $w(0) = 1$ hallamos que $e^{i\varphi} = -1$. Definitivamente $w = \frac{2i - z^2}{2i + z^2}$.

489. El semicírculo superior $|w - 1| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.

490. Un cuarto del círculo $|w| < 1$, $0 < \arg w < \frac{\pi}{2}$.

491. El rectángulo con los vértices en los puntos 1, 2, $2 + ie$, $1 + ie$.

492. $w_1 = z^4$, $w_2 = \frac{16 + w_1}{16 - w_1}$, $w = w_2^2 = \left(\frac{16 + z^4}{16 - z^4}\right)^2$.

493. $w_1 = z - a$, $w_2 = \frac{\pi i}{b-a} w_1$, $w = e^{w_2} = e^{\frac{\pi i(z-a)}{b-a}}$.

494. $w = \ln z$.

495. $w_1 = e^{-z}$, $w_2 = -w_1$, $w_3 = \frac{w_2 + 1}{1 - w_2}$, $w = w_3^2 = \left(\frac{1 - e^{-z}}{1 + e^{-z}}\right)^2$.

496. $w_1 = 2iz$, $w_2 = w_1 + \frac{\pi}{2}$, $w = \operatorname{sen} w_2 = \operatorname{sen}\left(2iz + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ch} 2z$.

497. $w = 2 \cdot \frac{z-2}{z}$. 498. $w = 2i \frac{z+2}{z}$.

499. $w = \left(\frac{z}{z-1+i}\right)^2$. 500. $w = 2\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

501. $w_1 = 2z$, $w_2 = \frac{1}{2} \left(w_1 + \frac{1}{w_1}\right)$, $w = \frac{w_2 - i}{w_2 + i} = \frac{4z^2 - 4iz + 1}{4z^2 + 4iz + 1}$.

502. $w = -\frac{z^8 - i}{z^8 + i}$. 503. $w = e^{iz}$.

504. a) el círculo de unidad $|w| < 1$; b) todo el plano w con el corte a lo largo del segmento $u = 0$, $-1 \leq v \leq 1$.

505. El potencial de velocidades $u = x^2 - y^2 + 2x + 2$; la función de corriente $v = 2(x+1)y$; las líneas del nivel $x^2 - y^2 + 2x = c_1$ son hipérbolas; las líneas de corriente $xy + y = c_2$ son hipérbolas; la magnitud de velocidad $V = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$; es la dirección de velocidad.

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{y}{x+1} + m\pi, m = -1, 0, 1$$

(véase la fórmula (1) en la página 10); las proyecciones de velocidad en el eje Ox y Oy : $V_{Ox} = 2(x+1)$, $V_{Oy} = -2y$.

506. El potencial de velocidades $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$; la función de corriente $v = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$; las líneas del nivel $x^2 - y^2 = c_1(x^2 + y^2)^2$; las líneas de corriente $xy = c_2(x^2 + y^2)^2$; la magnitud de velocidad $V = \frac{2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$; la dirección de velocidad

$$\varphi = 3 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (3m - 1)\pi, \quad m = -1, 0, 1;$$

son las proyecciones de velocidad en el eje Ox y Oy :

$$V_{Ox} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad V_{Oy} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}.$$

507. El potencial de velocidades $u = \frac{1}{2} \ln [(x-1)^2 + y^2]$ la función de corriente $v = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-1}$; las líneas del nivel $(x-1)^2 + y^2 = c_1$ son las circunferencias; las líneas de corriente $y = c_2(x-1)$ son las rectas; la magnitud de velocidad $V = \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}}$; la dirección de velocidad

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-1} + m\pi, \quad m = -1, 0, 1;$$

proyecciones de velocidad en el eje Ox y Oy :

$$V_{Ox} = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}, \quad V_{Oy} = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}.$$

508. $f(z) = (1-i)z^2 + z$. 509. $f(z) = \operatorname{sen} z + c$.

510. $\Gamma_L = -10\pi$ por las dos circunferencias.

511. a) si; b) si; c) no; d) si; e) si; f) no; g) no; h) si; i) no; j) si; k) si; l) si.

$$512. \frac{1}{p^2}. \quad 513. \frac{3}{p^2+9}. \quad 514. \frac{1}{(p-1)^2}. \quad 515. \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

$$516. \text{No. } 517. \frac{p+1}{p^2}. \quad 518. \frac{2-p}{p^2+1}. \quad 519. \frac{p^2+2p+2}{2p^2(p+1)}.$$

$$520. \frac{1}{p-a}. \quad 521. \frac{4}{p^2+16}. \quad 522. \text{a) } \frac{p}{p^2+\omega^2}; \text{ b) } \frac{3}{p^2-9}.$$

$$523. aF(pa). \quad 524. \frac{2}{p(p^2+4)}. \quad 525. \frac{m(p^2+m^2-n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}.$$

$$526. \frac{p^3+7p}{(p^2+9)(p^2+1)}. \quad 527. \frac{2mnp}{(p^2+m^2-n^2)^2-4m^2n^2}.$$

$$528. \frac{1}{8} \left(\frac{3}{p} + \frac{p}{p^2+16} - \frac{4p}{p^2+4} \right). \quad 529. \frac{p(p^2+m^2+n^2)}{(p^2+m^2+n^2)^2-4m^2n^2}.$$

530. $\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}$. 531. $\frac{6}{(p^2+1)(p^2+9)}$. 532. $\frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$.
533. $\frac{p^4+16p^2+24}{p^2(p^2+4)(p^2+16)}$. 534. $\frac{p^3-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$. 535. $\frac{1}{(p-1)^2}$.
536. $\frac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. 537. $\frac{2(p^2+p+1)}{(p^2-1)^2}$. 538. $\frac{2p^2+4p+8}{(p^2+4)^2}$.
539. $\frac{6p}{(p^2-1)^2}$. 540. $\frac{1}{p(p^2+1)}$. 541. $\frac{p^3+p^2+p\omega^2-\omega^2}{p(p^2+\omega^2)^2}$.
542. $\frac{4}{(p^2-4)^2}$. 543. $\frac{p^2+2\omega^2}{p^2(p^2+4\omega^2)}$. 544. $\frac{1}{p^2-\omega^2}$.
545. $\frac{2}{p(p+1)^3}$. 546. a) $\ln \frac{p}{p-1}$; b) $\ln \frac{p+1}{p}$; c) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2+4}}{p}$.
547. a) $\ln \frac{\sqrt{p^2+1}}{p}$; b) $\frac{1}{2} \ln \frac{p^2+4}{p^2+1}$.
548. a) $\ln \frac{p}{p-1} - \frac{1}{p}$; b) $\ln \frac{p+1}{p-1}$.
549. $\ln \frac{b}{a}$. 550. $\operatorname{arctg} \frac{a}{\alpha}$. 551. $\operatorname{arctg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{m}$.
552. $A \ln \frac{\delta}{\alpha} + B \ln \frac{\delta}{\beta} + C \ln \frac{\delta}{\gamma}$. 553. $\ln \frac{b}{a}$.
554. $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$. 555. a) $\frac{1}{(p-2)^2+1}$; b) $\frac{p-m}{(p-m)^2+n^2}$.
556. $\frac{3!}{(p+1)^4}$. 557. $\frac{1}{(p-1)^2-1}$. 558. $\frac{p^2-2p}{(p^2-2p+2)^2}$.
559. $\frac{1}{2(p-3)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p-3}{(p-3)^2+4}$.
560. $\frac{1}{2(p+\alpha)} + \frac{p+\alpha}{2[(p+\alpha)^2+4\beta^2]}$.
561. $\frac{e^{-bp}}{p^2+1}$. 562. $\frac{e^{-bp}}{2p} + \frac{pe^{-bp}}{2(p^2+4)}$. 563. $\frac{e^{-ap}}{p-1}$.
564. $\frac{1-e^{-p}}{p}$. 565. $\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p}$. 566. $\frac{1-2e^{-p}+e^{-2p}}{p^2}$.
567. $\frac{e^{-ap}}{p+b}$. 568. $\frac{be^{-ap}}{p(p+b)}$. 569. $\frac{1-e^{-ap}}{p^2}$.
570. $\frac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p^2}$. 571. $\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{e^{kp}}$.
572. $F(p) = \frac{1}{ap^2} (2e^{-2ap} - 1) + \frac{2}{p} e^{-ap}$.
573. $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p} (2 - e^{-ap} - e^{-2ap})$.

574. $F(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{ap^2} + \frac{ap-2}{ap^2} e^{-ap} + \frac{1}{ap^2} e^{-2ap}.$

575. $F(p) = \frac{1}{p} + \frac{1-2ap}{ap^2} e^{-ap} - \frac{1}{ap^2} e^{-2ap}.$

576. $F(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{ap^2} e^{-ap} + \frac{2}{ap^2} e^{-sap}.$

577. $F(p) = -\frac{b}{p} e^{-ap} + \frac{2b}{p} e^{-2ap}. 579. F(p) = \frac{(1-e^{-p})^2}{p^2(1-e^{-4p})}.$

580. $\frac{1+p-e^{-p}}{p^2(e^p-1)}. 581. \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-\pi p}}.$

582. $\frac{1}{p^2+1} \left(p + \frac{2e^{-\frac{\pi}{2}p}}{1-e^{-\pi p}} \right). 583. \frac{1}{(p^2+1)(1-e^{-\pi p})}.$

587. a) $\frac{2e^{-\frac{\pi}{8}p}}{p^2+4};$ b) $\frac{pe^{-\frac{\pi}{18}p}}{p^2+9};$ b) $\frac{3e^{-2p}}{p^2-9}.$

588. $\sum_{k=0}^n m_k e^{-kp}. 589. \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}.$

590. $\frac{p}{(p-2)(p^2+1)}.$ 591. $\frac{2}{p^2(p^2-1)}.$ 592. $\frac{n!F(p)}{p^{n+1}}.$

593. $\frac{2}{p^8(p+2)}.$

595. *Solución.* Es conocido que $J_1(t) = -J'_0(t).$ Utilizando los resultados del problema anterior y el teorema de la diferenciación del original, hallamos

$$\begin{aligned} J_1(t)^{\frac{d}{dt}} - p \frac{1}{\sqrt{p^2+1}} + J_0(0) &= - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} + 1 = \\ &= \frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}}. \end{aligned}$$

596. *Solución.* Para $n = 0$ y $n = 1$ la fórmula

$$J_n(t) \stackrel{?}{=} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

es válida. Utilicemos el método de la inducción matemática. Puesto que

$$2J'_n(t) = J_{n-1}(t) - J_{n+1}(t) \quad \text{y} \quad J_{n-1}(0) = 0 \quad (n \geq 2),$$

entonces

$$J_n(t) = J_{n-2}(t) - 2J'_{n-1}(t) \stackrel{?}{=}$$

$$\stackrel{?}{=} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-2}}{\sqrt{p^2+1}} - \frac{2p(\sqrt{p^2+1}-p)^{n-1}}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}.$$

597. *Solución.* Examinemos la función

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Tenemos

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! p^{n+k+1}}.$$

Por consiguiente, $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{n+k}}{k! (n+k)!}$. Subrayando que

$$J_n(2\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{\frac{n}{2}+k}}{k! (n+k)!},$$

obtenemos $f(t) = t^{n/2} J_n(2\sqrt{t})$.

En particular, para $n=0$ tenemos $J_0(2\sqrt{t}) \doteq \frac{1}{p} e^{-1/p}$.

599. Supongamos $\varphi(t) = t^n e^{-t}$. De acuerdo con el teorema del desplazamiento

$$t^n e^{-t} \doteq \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Es muy fácil verificar que $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-1)}(0) = 0$. Según el teorema de la diferenciación de los originales

$$\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \doteq \frac{p^n \cdot n!}{(p+1)^{n+1}}.$$

Utilizando el teorema del desplazamiento, hallamos

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}) \doteq \frac{(p-1)^n \cdot n!}{n! p^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n \quad (n=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

600. $-\frac{\ln p}{p} - \frac{C}{p}$, donde $C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$

es la constante de Euler (véase [15]).

601. *Solución.* Examiniemos la función $f(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t})$ y sea $F(p)$ la representación de $f(t)$. Tenemos $(\operatorname{erf} t)' = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$,

$$f'(t) = e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = f(t) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \quad (4)$$

Pasando a las representaciones y teniendo en cuenta que $f(0) = 0$, de (1) hallamos $pF(p) = F(p) + \frac{1}{\sqrt{p}}$, de donde

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Aquí utilizamos el resultado del problema 515 y que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Pues,

$$e^t \operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{1}{(p-1)\sqrt{p}}.$$

Empleando el teorema del desplazamiento, definitivamente, hallamos

$$\operatorname{erf}(\sqrt{t}) = \frac{1}{p\sqrt{p+1}}.$$

607. a) $\frac{\pi}{2} e^{-t}$; b) $\frac{\pi}{2} \eta(t-1)$.

608. $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$.

609. $(t-1)^2 \eta(t-1)$. 610. $(t-2) \eta(t-2)$.

611. $e^{t-2} \eta(t-2)$. 612. $e^{-3(t-3)} \eta(t-3)$.

613. $e^{-2t} \sin t$. 614. $\frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})$.

615. $(1-t)e^{-t}$. 616. $\frac{1}{2}t \sin t$. 617. $1 - e^{-t} - te^{-t}$.

618. $\frac{2\sqrt{3}}{9} e^{\frac{t}{2}} \sin \frac{3\sqrt{3}}{2} t$. 619. $\frac{t^2}{2} + 2e^{-t} \sin t$,

620. $t - \sin t$.

621. $\frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{15}e^{-t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t$,

622. $1 - ne^{-t} + \frac{1}{2}n(n-1)e^{-2t} - \dots + (-1)^n e^{-nt}$.

623. $\frac{2}{3}e^{-t/2} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - t \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right]$.

624. $e^{-t}(1-t^2)$.

625. $\frac{1}{3}et^{1/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) - \frac{1}{3}e^{-t}$.

626. $\frac{3}{5} + \frac{e^{-2t}}{5}(4 \sin t - 3 \cos t)$. 627. $\frac{1}{9}(e^{-2t} - e^t + 3te^t)$.

628. $2e^t + et^{1/2} \left(\frac{5\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$.

629. $\frac{1}{3} te^t - \frac{1}{3} te^{-t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$.

630. $\frac{1}{2} e^{t-1} \sin 2(t-1) \eta(t-1) + \cos 3(t-2) \eta(t-2)$.

631. $(t-3) e^{-(t-8)} \eta(t-3)$. 632. $e^{t-1} \eta(t-1) - \eta(t-1)$.

633. $\sin(t-2) \eta(t-2) + 2 \sin(t-3) \eta(t-3) + 3 \sin(t-4) \eta(t-4)$.

634. $\sin(t-1) \eta(t-1) + \cosh 2(t-2) \eta(t-2)$.

635. $\frac{1}{4} \eta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5} e^{-\left(t-\frac{1}{2}\right)} \eta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{20} \cos 2\left(t-\frac{1}{2}\right) \eta\left(t-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{10} \sin 2\left(t-\frac{1}{2}\right) \eta\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

636. $(t-1) \eta(t-1) + (t-2)^2 \eta(t-2) + (t-3)^3 \eta(t-3)$.

637. $\eta\left(t-\frac{1}{3}\right) - \cos\left(t-\frac{1}{3}\right) \eta\left(t-\frac{1}{3}\right)$.

638. $1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

639. Solución. $\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. Supongamos $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, $F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{(\sqrt{p})^2}$. De aquí $F(p) = \frac{e^{-ap}}{p^2}$ y de acuerdo con el teorema de retardo

$$F(p) \stackrel{def}{=} (t-a) \eta(t-a) = f(t).$$

En vigor del teorema de Efros

$$\begin{aligned} \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty (\tau-a) \eta(t-a) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty (\tau-a) \frac{-\tau^2}{4t} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau - \\ &\quad - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^\infty e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = I_1(t) + I_2(t). \end{aligned}$$

Aquí

$$I_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^{\infty} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (-2t) e^{-\frac{\tau^2}{4t}} \Big|_{\tau=a}^{\infty} = \\ = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}},$$

$$I_2(t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = -\frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^a e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau - \\ - \frac{a}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = a \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds - \right. \\ \left. - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds \right), \text{ donde } s = \frac{\tau}{2\sqrt{t}}.$$

Por consiguiente $I_2(t) = a \left[\operatorname{erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) - 1 \right] = -a \operatorname{Erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$
y definitivamente

$$\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p\sqrt{p}} = 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}} - a \operatorname{Erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right).$$

$$640. \left(t + \frac{a^2}{2} \right) \operatorname{Erf} \left(\frac{a}{2\sqrt{t}} \right) - a \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{a^2}{4t}}.$$

$$641. ae^{hx+a^2h^2t} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t} \right).$$

$$642. \text{Solución. } \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{p(a+\sqrt{p})} = \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}. \text{ Supongamos}$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad F(\sqrt{p}) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(a+\sqrt{p})}.$$

De aquí

$$F(p) = \frac{e^{-\alpha p}}{p(a+p)} = \frac{1}{a} \left(\frac{e^{-\alpha p}}{p} - \frac{e^{-\alpha p}}{p+a} \right) \doteq$$

$$\doteq \frac{1}{a} [\eta(t-\alpha) - e^{-a(t-\alpha)} \eta(t-\alpha)] = f(t).$$

Debido al teorema de Efros tenemos

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{-\alpha} \sqrt{p}}{p(a + \sqrt{p})} &= \frac{1}{a \sqrt{\pi t}} \int_a^\infty [1 - e^{-a(\tau-\alpha)}] e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau = \\
 &= \frac{1}{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-s} ds = \frac{1}{a \sqrt{\pi t}} \times \\
 &\quad \times \int_a^\infty e^{-[\alpha\tau - \alpha a + \frac{\tau^2}{4t}]} d\tau = \\
 &= \frac{1}{a} \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{1}{a \sqrt{\pi t}} \times \\
 &\quad \times \int_a^\infty e^{a\alpha + a^2 t} e^{-\left(\frac{\tau}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right)^2} d\tau = \\
 &= \frac{1}{a} \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{e^{a(at+\alpha)}}{a} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}}^\infty e^{-z^2} dz,
 \end{aligned}$$

donde $z = \frac{\tau}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}$. Pues,

$$\frac{e^{-\alpha} \sqrt{p}}{p(a + \sqrt{p})} = \frac{1}{a} \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{e^{a(at+\alpha)}}{a} \operatorname{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}} + a\sqrt{t}\right).$$

643. *Solución.* $I(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \operatorname{ch} \tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}} d\tau$. Comparando $I(t)$ con la fórmula (19), la página 188, vemos que $f(t) = \operatorname{ch} t$ y resulta que $F(p) = \frac{p}{p^2 - 1}$. Por consiguiente, $F(\sqrt{p}) = \frac{\sqrt{p}}{p - 1}$. Al tomar $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$, obtenemos $\Phi(p)F(\sqrt{p}) = \frac{1}{p - 1} = I(t)$, de donde $I(t) = e^t$.

$$644. I(t) = e^{-t}, \quad 645. I(t) = 2te^{at}, \quad 646. I(t) = 2te^{-t}.$$

$$647. x(t) = (t+1)e^{-t}, \quad 648. x(t) = -1.$$

$$649. x(t) = \frac{e^{-2t} - \cos t + 2 \sin t}{5}, \quad 650. x(t) = t + \frac{1}{2}t^2.$$

$$651. x(t) = t, \quad 652. x'(t) = \cos t.$$

653. $x(t) = \frac{1}{4} e^t + \frac{5}{12} e^{-3t} - \frac{2}{3}.$

654. $x(t) = \frac{1}{4} (1 - e^{2t} + 2te^{-t}).$

655. $x(t) = \frac{1}{8} (3e^t - e^{-3t} - 2e^{-t}).$ 656. $x(t) = t - \operatorname{sen} t.$

657. $x(t) = \frac{2}{25} e^{-2t} - \frac{2}{25} \cos t + \frac{14}{25} \operatorname{sen} t - \frac{1}{5} t \operatorname{sen} t - \frac{2}{5} t \cos t$

658. $x(t) = \frac{1}{2} (e^{-t} - te^{-t} - \cos t).$

659. $x(t) = \frac{1}{2} e^t - t - 1 + \frac{1}{2} (\cos t + \operatorname{sen} t).$

660. $x(t) = \frac{1}{2} t^2 - t + \cos t - \operatorname{sen} t.$

661. $x(t) = \frac{1}{2} t^3 e^t + te^t.$

662. $x(t) = \frac{3}{5} e^{-t} \operatorname{sen} 2t - \frac{4}{5} e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{5}.$

663. $x(t) = \frac{1}{2} (1 - e^t \cos t + e^t \operatorname{sen} t).$

664. $x(t) = 2 + \frac{1}{2} (e^{-t} - \cos t + \operatorname{sen} t).$

665. $x(t) = t^2 - 4t + 6 - 5e^{-t} - te^{-t}.$

666. $x(t) = 2t + \frac{1}{2} (e^{-t} + \cos t - \operatorname{sen} t).$

667. $x(t) = \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t - \cos t + \operatorname{sen} t.$

668. $x(t) = \frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 2t - 4 + e^{-t}.$

669. $x(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{5} e^{-t} \operatorname{sen} 2t.$

670. $x(t) = \frac{1}{2} (\cos t + \operatorname{ch} t) - t - 1.$

671. $x(t) = \frac{1}{2} (1 - e^{-t} \cos t - e^{-t} \operatorname{sen} t).$

672. $x(t) = 1 - 2 \cos t.$

673. $x(t) = \frac{1}{4} t + \cos 2t - \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2t.$

674. $x(t) = \frac{3}{25} - \frac{t}{5} - \frac{3}{25} e^t \cos 2t + \frac{4}{25} e^t \sin 2t.$

675. $x(t) = e^{-t} - e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.$

676. $x(t) = 1 - \frac{1}{2} (\sin t + \cos t + e^{-t}).$

677. $x(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t - 1.$

678. $x(t) = \operatorname{ch} t - \frac{1}{2} t^2 - 1.$

679. $x(t) = 2 + \frac{1}{2} (e^t + \sin t - \cos t).$

680. $x(t) = e^t \left(1 - t + \frac{1}{2} t^2 \right) - 1.$

681. $x(t) = -\frac{3}{2} \sin t - \frac{1}{2} t \cos t.$

682. $x(t) = 2e^{-t} + te^{-t} + t - 2.$

683. $x(t) = \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{1}{3} e^{t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - 3 \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right).$

684. $x(t) = -\frac{1}{4} e^t - \frac{3}{4} e^{-t} - \frac{1}{2} \sin t.$

685. $x(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{5}{6} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t.$

686. $x(t) = \cos t - t \cos t.$

687. $x(t) = 2 + t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} t e^t - \frac{3}{2} e^t.$

688. $x(t) = 1 - \frac{22}{25} e^{-t} - \frac{6}{5} t e^{-t} - \frac{3}{25} \cos 2t + \frac{4}{25} \sin 2t.$

689. $x(t) = \frac{t}{4} \sin 2t + \frac{1}{12} (\cos 2t - \cos 4t).$

690. $x(t) = \frac{1}{2} (t-1) e^t + \frac{1}{2} \cos t + 2 \sin t - 2t \cos t.$

691. $x(t) = e^t \left(\frac{t^2}{2} - t + 1 \right).$

692. $x(t) = 2t - 3 + 3e^{-t} - \frac{1}{5} (\sin 2t - 2 \cos 2t + 2e^{-t}).$

693. $x(t) = 4t + 3 - 2e^t \quad 694. \quad x(t) = e^{2t} - e^t - t e^t.$

695. $x(t) = 3e^t - 3 - 2t - t^2 - \frac{t^3}{3}.$

696. $x(t) = \frac{1}{4} e^t \left(t^2 - 3t + \frac{3}{2} \right) +$
 $+ \frac{1}{3} e^{\frac{t}{2}} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \frac{1}{24} e^{-t}.$

697. $x(t) = \frac{4}{9} \sin 2t - \frac{5}{9} \sin t - \frac{4}{3} t \cos 2t.$

698. $x(t) = \frac{a}{2n^2} [\sin nt \cos \alpha - nt \cos(nt + \alpha)].$

699. $x(t) = \frac{1}{6} t^2 - \frac{4}{9} t + \frac{35}{54} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} - \frac{4}{27} e^{-3t}.$

700. $x(t) = -\frac{t}{24} [3t \cos t + (t^2 - 3) \sin t].$

701. $x(t) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \sin \beta t. \quad 702. \quad x(t) = \frac{1}{3} \sin t - \frac{1}{6} \sin 2t.$

703. $x(t) = \frac{1}{10} e^{2t} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t.$

704. $x(t) = \frac{\gamma}{2} t^2 + (1 - \gamma) t + (\gamma - 1) +$
 $+ \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) e^{-t} + \frac{1}{2} (\cos t - \sin t).$

705. $x(t) = \frac{83}{80} \operatorname{ch} 2t - \frac{1}{10} \cos t + \frac{1}{16} \cos 2t.$

706. $x(t) = e^t \left(\cos t + \sin t - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-st}.$

707. $x(t) = \frac{1}{3} e^{-t/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{1}{3} (t - 1) e^t.$

708. $x(t) = \frac{1}{4} (t^2 \sin t + t \cos t - \sin t).$

709. $x(t) = \frac{2}{9} [et - e^{-2t} (3t + 1)]. \quad 710. \quad x(t) = 1 - e^{-t} \left(\frac{t^2}{2} + t + 1 \right).$

711. $x(t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t.$

712. $x(t) = \frac{2a}{\omega^2} \left[\sin^2 \frac{\omega t}{2} \eta(t) - \sin^2 \frac{\omega(t-b)}{2} \eta(t-b) \right].$

713. $x(t) = -\cos t. \quad 714. \quad x(t) = (t-1)^2 + e^{1-t}.$

$$715. \quad x(t) = t^2 + 2t. \quad 716. \quad x(t) = \left(t - 1 - \frac{\pi}{2} \right) \cos t.$$

$$717. \quad x(t) = (t^2 - 2t + 2) e^{1-t}.$$

$$718. \quad x(t) = \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \eta(t) - \\ - \left[(t-1) - \frac{1}{2} \sin 2(t-1) \right] \eta(t-1) + \\ + \frac{1}{2} \left[(t-2) - \frac{1}{2} \sin 2(t-2) \right] \eta(t-2).$$

$$719. \quad x(t) = [b + (1-b) \cos t] \eta(t) + [b - b \cos(t-a)] \eta(t-a).$$

$$720. \quad x(t) = \frac{1}{3} \sin 3t \eta(t) + \frac{1}{9} \left[(t-1) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \sin 3(t-1) \right] \eta(t-1) - \\ - \frac{2}{9} \left[(t-2) - \frac{1}{3} \sin 3(t-2) \right] \eta(t-2) + \\ + \frac{1}{9} \left[(t-3) - \frac{1}{3} \sin 3(t-3) \right] \eta(t-3).$$

$$721. \quad x(t) = \sum_{k=0}^3 (-1)^k [1 - e^{t-ka} + e^{t-ka}(t-ka)] \eta(t-ka).$$

722. Solución. La ecuación de movimiento $\ddot{mx} = -m\lambda\dot{x} - 2\mu x$; $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$. La ecuación operatoria tiene la forma de

$$p^2X - px_0 - v_0 + 2\mu pX - 2\mu x_0 + \lambda X = 0,$$

$$\text{de donde } X(p) = \frac{2\mu x_0 + v_0 + px_0}{p^2 + 2\mu p + \lambda}$$

$$X(p) = \frac{x_0(p+\mu) + \mu x_0 + v_0}{(p+\mu)^2 + (\sqrt{\lambda - \mu^2})^2} = \frac{x_0(p+\mu)}{(p+\mu)^2 + n^2} + \frac{\mu x_0 + v_0}{(p+\mu)^2 + n^2},$$

$$\text{donde } n^2 = \lambda - \mu^2.$$

Hallando el original para $X(p)$, obtenemos

$$x(t) = \frac{1}{n} e^{-\mu t} [nx_0 \cos nt + (\mu x_0 + v_0) \sin nt].$$

723. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = -mn^2x + F\eta(t) - F\eta(t-T), \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

724. La ecuación del movimiento es $\ddot{x} = an^2 - n^2x$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

725. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = -mg - 2km\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

726. *Solución.* La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = F. \quad (1)$$

En nuestro caso $m = 2$, $F = F_0 + at = 4 + at$ entonces la ecuación (1) obtiene la forma de

$$2\ddot{x} = 4 + at, \quad (2)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 10. \quad (3)$$

La ecuación operatoria tiene la forma de $2(p^2X - 10) = \frac{4}{p} + \frac{a}{p^2}$, de donde

$$X = \frac{1}{p^2} \left(\frac{a}{2p^2} + \frac{2}{p} + 10 \right).$$

Hallando el original para $X(p)$, obtenemos

$$x(t) = \frac{a}{12} t^3 + t^2 + 10t.$$

Para determinar la magnitud a tenemos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 450 = \frac{at_0^3}{12} + t_0^2 + 10t_0, \\ 105 = \frac{at_0^2}{4} + 2t_0 + 10, \end{cases}$$

de donde hallamos que $t_0 = 10$, $a = 3$.

727. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = 4\dot{mx} - 3\ddot{x}.$$

$$x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = \frac{1}{5} (4e^{4t} + e^{-4t}).$$

728. La ecuación del movimiento $\ddot{mx} = mg - \lambda\dot{x}$.

En vigor de la condición del problema $\lambda = \frac{1}{3}mg$ para $v = 1$ m/s, entonces definitivamente obtenemos la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{3} gv, \quad v(0) = 0,$$

de donde

$$v(t) = 3 \left(1 - e^{-\frac{gt}{3}} \right), \quad v_{\max} = 3 \quad \text{para } t = \infty.$$

729. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = -k\dot{x}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right), \quad x_{\max} = \frac{mv_0}{k} \quad \text{para } t = \infty.$$

730. *Solución.* Circunscribiremos el movimiento del extremo inferior de la cadena. Elijamos el origen de coordenadas en el punto O (véase la figura) y dirijamos el eje Ox abajo. Entonces las condiciones iniciales son

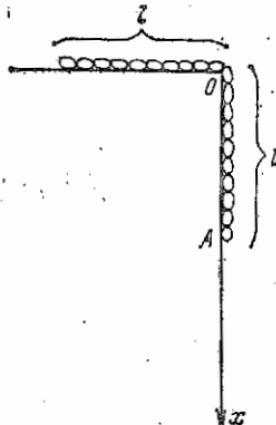


Fig. a la respuesta 730

$x(0) = l, \dot{x}(0) = 0$ (la cadena es inmóvil).

Si la abscisa del extremo es x , entonces la fuerza motriz es igual al peso de aquella parte de la cadena que cuelga de la mesa, es decir

$$F = \frac{mg}{2l}x.$$

De esa manera, la ecuación diferencial del movimiento es la siguiente:

$$m\ddot{x} = \frac{mg}{2l}x, \quad x(0) = l, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

$$x(t) = \frac{l}{2} \left(e^{t\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-t\sqrt{\frac{g}{2l}}} \right).$$

Según esta ley el movimiento se efectúa hasta aquel momento T , en que la cadena se deslice completamente de la mesa. Hallamos este momento, suponiendo $x = 2l$:

$$4 = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}} + e^{-T\sqrt{\frac{g}{2l}}}.$$

Denominando $z = e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}}$, obtenemos la ecuación $z^2 - 4z + 1 = 0$,

de donde $z_1 = 2 - \sqrt{3} < 1$, $z_2 = 2 + \sqrt{3}$. z_1 lo excluimos, porque le corresponde el valor negativo de T . Así, para determinar T hemos obtenido la ecuación

$$e^{T\sqrt{\frac{g}{2l}}} = 2 + \sqrt{3}, \text{ de donde } T = \sqrt{\frac{2l}{g}} \ln(2 + \sqrt{3}).$$

731. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = -2mzxk^2, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = a \cos \sqrt{(2k)}t.$$

732. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = -\mu mx, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}.$$

733. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{mx} = -kx, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 6, \quad x(t) = 600(1 - e^{-0.01t}).$$

734. La ecuación del movimiento es

$$\ddot{x} + 4x = 2 \cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad x(t) = \frac{2}{3} (\cos t - \cos 2t).$$

735. La ecuación del movimiento es $\ddot{mr} = -mk^2r$ ó

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -k^2x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0; \\ \ddot{y} &= -k^2y, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.\end{aligned}$$

La trayectoria del punto es la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{v_0^2} = \frac{1}{k^2}$.

736. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= k^2x, \quad x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0; \\ \ddot{y} &= k^2y, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0.\end{aligned}$$

La trayectoria del punto es la hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{v_0^2} = \frac{1}{k^2}$.

737. Ecuación diferencial: $L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = E \cos(\omega t + \alpha)$, $Q|_{t=0} = 0$, $\frac{dQ}{dt}|_{t=0} = 0$.

738. Ecuación diferencial: $L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{C} Q = E \operatorname{sen} nt$, $Q|_{t=0} = 0$, $\frac{dQ}{dt}|_{t=0} = 0$,

739. Ecuación diferencial: $L \frac{dI}{dt} + RI = E \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$, $I|_{t=0} = 0$.

740. Ecuación diferencial: $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E_1 \eta(t) + (E_2 - E_1) \eta(t - T)$, $Q|_{t=0} = 0$, $\frac{dQ}{dt}|_{t=0} = 0$.

741. Ecuación diferencial: $L \frac{d^2Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E$, $Q|_{t=0} = 0$, $\frac{dQ}{dt}|_{t=0} = 0$.

742. $x(t) = (C_1 + C_2 t^2) e^{-t}$. 743. $x(t) = C_1$.

744. $x(t) = e^{-t}$. 745. $x(t) \equiv -1$. 746. $x(t) = e^t$.

747. a) $x(t) = \sum_{s=0}^k (-1)^s 2^s s! C_k^s \frac{t^{2s}}{(2s)!};$

b) $x(t) = \sum_{s=0}^k (-1)^s 2^s s! C_k^s \frac{t^{2s+1}}{(2s+1)!}.$

748. $x(t) = \frac{1}{2} (e^t - 1) - \ln \frac{1+e^t}{2}.$

749. $x(t) = e^{-t} [(t+1) \ln(t+1) - t].$

750. $x(t) = (e^t + 2) \ln \frac{e^t + 2}{3} - e^t + 1.$

751. $x(t) = e^t - 1 - (t + \ln 2)(e^t + 1) + (e^t + 1) \ln(e^t + 1).$

752. $x(t) = \operatorname{sen} t \left(t - \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2}}{\sqrt{3}} \right) + \cos t \ln(2 + \cos t) - \ln 3 \cos t.$

753. $x(t) = \frac{1}{3} - \frac{9 - \pi \sqrt{3}}{27} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{36} \operatorname{sen} t \ln \left| \frac{\sqrt{3} \operatorname{sen} t - 2}{\sqrt{3} \operatorname{sen} t + 2} \right| - \frac{\sqrt{3}}{9} \cos t \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \cos t).$

754. $x(t) = \cos t \operatorname{arctg}(\cos t) - \frac{\pi}{4} \cos t - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{sen} t \times \times \ln \left| \frac{\operatorname{sen} t - \sqrt{2}}{\operatorname{sen} t + \sqrt{2}} \right|.$

755. $x(t) = \operatorname{sen} t \operatorname{arctg}(\operatorname{sen} t) + \cos t \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right| - \ln(3 + 2\sqrt{2}) \right\}.$

756. $x(t) = -\operatorname{sh} t + 2 \operatorname{ch} t \left(\operatorname{arctg} e^t - \frac{\pi}{4} \right).$

757. $x(t) = \ln 2 \cos t - \cos t \ln(2 + \operatorname{sen} t) - t \operatorname{sen} t + \frac{2}{\sqrt{3}} (2 \operatorname{sen} t + 1) \left(\operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \right).$

758. $x(t) = e^t, y(t) = -e^t.$

759. $x(t) = e^t, y(t) = e^t.$

760. $x(t) = 2(1 - e^{-t} - te^{-t}), y(t) = 2 - t - 2e^{-t} - 2te^{-t}.$

761. $x(t) = \frac{1}{4}(e^t - e^{3t} + 2te^{3t}), y(t) = \frac{1}{4}(5e^t - e^{3t} - 2te^{3t}).$

762. $x(t) = e^t (\cos t - 2 \sin t)$, $y(t) = e^t (\cos t + 3 \sin t)$.

763. $x(t) = \frac{1}{3} (e^t + 2 \cos 2t + \sin 2t)$, $y(t) =$
 $= \frac{2}{3} \left(e^t - \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t \right)$.

764. $x(t) = e^t - \frac{11}{34} e^{4t} - \frac{3}{17} \cos t + \frac{5}{17} \sin t - \frac{1}{2}$,

$$y(t) = -\frac{2}{3} e^t + \frac{22}{51} e^{4t} + \frac{4}{17} \cos t - \frac{1}{17} \sin t.$$

765. $x(t) = -\frac{1}{15} e^{-2t} + \frac{13}{12} e^{-t} - 2 + \frac{1}{6} e^t + \frac{2}{3} e^{2t} + \frac{3}{20} e^{3t}$,

$$y(t) = \frac{1}{15} e^{-2t} + \frac{13}{12} e^{-t} - 2 - \frac{1}{6} e^t + \frac{2}{3} e^{2t} + \frac{7}{20} e^{3t},$$

$$z(t) = -\frac{13}{12} e^{-t} - \frac{1}{2} e^t + \frac{4}{3} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{3t}.$$

766. $x(t) = -e^t$, $y(t) = 0$, $z(t) = e^t$.

767. $x(t) = \frac{2}{5} (e^{3t} - e^{-2t})$, $y(t) = \frac{1}{5} (3e^{3t} + 2e^{-2t})$, $z(t) = \frac{1}{5} \times$
 $\times (3e^{3t} + 2e^{-2t})$.

768. $x(t) = \frac{3e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{3ae^{at}}{a^2-4}$.

$$y(t) = -\frac{e^{-2t}}{4(2+a)} + \frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)} + \frac{(a+4)e^{at}}{a^2-4}.$$

769. $x(t) = 2 - e^{-t}$, $y(t) = 2 - e^{-t}$, $z(t) = 2e^{-t} - 2$.

770. $x(t) = 6e^t - e^{2t} - 4e^{3t}$, $y(t) = 3e^t - 2e^{3t}$, $z(t) = 6e^{3t} +$
 $+ e^{2t} - 6e^t$.

771. $x(t) = -\frac{1}{15t^2} + \frac{13}{12t} - 2 + \frac{1}{6} t + \frac{2}{3} t^2 + \frac{3}{20} t^3$,

$$y(t) = \frac{1}{15t^2} + \frac{13}{12t} - 2 - \frac{1}{6} t + \frac{2}{3} t^2 + \frac{7}{20} t^3,$$

$$z(t) = -\frac{13}{12t} - \frac{1}{2} t + \frac{4}{3} t^2 + \frac{1}{4} t^3.$$

772. $x_m(t) = e^{-ct} \frac{(ct)^m}{m!}$ ($m = 0, 1, 2, \dots, n$).

773. $x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} e^{-t} - \frac{3}{10} e^{-6t/11}$, $y(t) = \frac{1}{5} (e^{-t} - e^{-6t/11})$.

774. $x(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} t$, $y(t) = \frac{5}{4} t^2 - \frac{1}{4}$, $z(t) = \frac{5}{4} t^2 - \frac{2}{3} t + \frac{5}{12}$.

$$775. \quad x(t) = \frac{28}{9} e^{3t} - e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}, \quad y(t) = \frac{28}{9} e^{3t} + e^{-t} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9}.$$

776. Las ecuaciones del movimiento del electrón son

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{eH}{c}\dot{y}, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \\ m\ddot{y} = \frac{eH}{c}\dot{x}, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{v_0 mc}{eH} \operatorname{sen} \frac{eHt}{mc}, \quad y(t) = \frac{mc v_0}{eH} \left(1 - \cos \frac{eHt}{mc} \right).$$

La trayectoria del electrón es $x^2 + y^2 - \frac{2mc v_0}{eH} y = 0$.

777. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}, \\ m\ddot{y} = -gm, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = \frac{v_0}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

La más alta altura es $H = \frac{v_0^2}{4g}$; el punto de caída es $x = \frac{v_0^2}{g}$.

778. Sea que un electrón sale del origen de coordenadas. Elijamos el eje Ox paralelamente a la dirección del campo magnético H y el eje Oy lo elijamos de tal manera que el vector v_0 se encuentre en el plano de coordenadas xOy .

Entonces las ecuaciones del movimiento serán

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \\ m\ddot{y} = -\frac{eH}{c}\dot{z}, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, \\ m\ddot{z} = \frac{eH}{c}\dot{y}, & z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

La trayectoria del electrón es

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - \frac{2v_0 cm \sin \alpha}{eH} z = 0, \\ x = tv_0 \cos \alpha. \end{cases}$$

779. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -km\dot{x}, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha, \\ m\ddot{y} = -mg - kmy, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha. \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{v_0 \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt}), \quad y(t) = \frac{v_0 k \sin \alpha + g}{k^2} (1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}.$$

780. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} \ddot{mx} = -\frac{eH}{c} \dot{y} - km \dot{x}, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = u, \\ \ddot{my} = \frac{eH}{c} \dot{x} - km \dot{y}, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0, \\ \ddot{mz} = -kmz, & z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) = 0. \end{cases}$$

781. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} \ddot{mx} = -2\lambda \dot{x} - \mu^2 x, & x(0) = a, \quad \dot{x}(0) = 0, \\ \ddot{my} = -2\lambda \dot{y} - \mu^2 y, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0. \end{cases}$$

782. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} \ddot{mx} = 0, & x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = v_0, \\ \ddot{my} = -mk^2 \dot{y}, & y(0) = a, \quad \dot{y}(0) = 0, \\ x(t) = v_0 t, & y(t) = a \cos kt. \end{cases}$$

La trayectoria del punto es $y = a \cos \left(\frac{kx}{v_0} \right)$.

$$783. \varphi(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} x.$$

$$784. \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(e^x - e^{-x/2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \sqrt{3} e^{-x/2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}x}{2} \right).$$

$$785. \varphi(x) = x + \frac{1}{6} x^3.$$

$$786. \varphi(x) = \frac{2}{5} e^{2x} + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} x.$$

$$787. \varphi(x) = 2 + x - e^{\frac{x}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}x}{2} \right).$$

$$788. \varphi(x) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{8} x + \frac{3}{8} x^3 + \frac{1}{16} e^{2x} - \frac{1}{12} x^3.$$

$$789. \varphi(x) = \frac{1}{2} e^{-x} + \frac{1}{6} e^x + \frac{1}{3} e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}x}{2} \right).$$

$$790. \varphi(x) = \frac{1}{3} \left(e^x - e^{-x} + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}x \right). \quad 791. \varphi(x) = x e^x.$$

792. $\varphi(x) = e^x.$ 793. $\varphi(x) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cos \sqrt{3}x.$

794. $\varphi(x) = \operatorname{ch} x - xe^{-x}.$ 795. $\varphi(x) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} x + \cos x).$

796. $\varphi(x) = x - \frac{1}{6}x^3.$ 797. $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{5}}{2}x.$

798. $\varphi(x) = 1 - x.$

799. $\varphi(x) = J_0(x),$ entonces $\int_0^x J_0(x-t) J_0(t) dt = \operatorname{sen} x.$

800. $\varphi(x) \equiv 1$ 801. $\varphi(x) = e^{-x}.$

802. $\varphi(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$ 803. $\varphi(x) = 2xe^x - x^2e^x.$

804. $\varphi(x) \equiv 1.$ 805. $\varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2}.$

806. $\varphi_1(x) = e^{-x}(1-x),$ $\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x}.$

807. $\varphi_1(x) = e^{2x},$ $\varphi_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2x}.$

808. $\varphi_1(x) = \frac{1}{3}e^{3/2x} \left(\sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) - \frac{1}{3},$

$$\varphi_2(x) = e^{3/2x} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

809. $\varphi_1(x) = (x+2) \operatorname{sen} x + (2x+1) \cos x,$

$$\varphi_2(x) = \left(1 + \frac{x}{2} \right) \cos x - \left(\frac{1}{2} + x \right) \operatorname{sen} x.$$

810. $\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \sqrt{3}x - \frac{3}{2} \operatorname{sh} x,$ $\varphi_2(x) = \cos \sqrt{3}x - 3 \operatorname{ch} x$

811. $\varphi_1(x) = 2(1-x)e^{-x},$ $\varphi_2(x) = (1-x)e^{-x}.$

812. $x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-k)^{2k+3}}{(2k+3)!} \eta(t-k).$

813. $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (t-k)^{k+3}}{(k+3)!} \eta(t-k).$

$$814. \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(t-k)$$

$$815. \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(t-2k)^{k+3}(k+1)}{(k+3)!} \eta(t-2k)$$

$$816. \quad x(t) = \left(-t + \frac{1}{2} t^2 \right) \eta(t) + \\ + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(t-k+2)^{k-1}}{k!} (t-3k+2) \eta(t-k+2).$$

$$817. \quad x(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2!} \right) \eta(t) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+1}}{(k+1)!} \eta(t-k) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t-k)^{k+2}}{(k+2)!} \eta(t-k).$$

$$818. \quad x(t) = \cos t.$$

$$819. \quad u(x, t) = u_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz \right),$$

$$820. \quad u(x, t) = u_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{kt}}} e^{-z^2} dz$$

$$821. \quad u(x, t) = ae^{-x} \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \cos \left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) - \\ - \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \sin x \sqrt{\frac{\rho}{k}} \frac{\rho d\rho}{\rho^2 + \omega^2}.$$

$$822. \quad u(x, t) = a \left[e^{-x} \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \sin \left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \sin x \sqrt{\frac{\rho}{k}} \frac{d\rho}{\rho^2 + \omega^2} \right].$$

823. $u(x, t) = \frac{x}{g \sqrt{\pi k}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau.$

824. Ecuación diferencial: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l,$

$$t > 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = u_1,$$

$$u(x, t) = u_1 + \frac{4(u_1 - u_0)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} e^{-a^2 \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2} t} \times \\ \times \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l}.$$

825. Ecuación diferencial: $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0,$

$$t > 0, \quad u|_{t=0}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = hu|_{x=0}, \quad h = \text{const},$$

$$u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} + e^{hx+h^2a^2t} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t} \right) \right].$$

Para resolver el problema utilízense el teorema de Efros (véase el § 14).

826. Ecuación diferencial: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq l,$

$$t > 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \frac{F}{E}, \quad u(x, t) =$$

$$= \frac{Fx}{E} - \frac{8Fl}{\pi^2 E} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \operatorname{sen} \frac{(2k+1)\pi x}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^2}.$$

827. Ecuación diferencial: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{g}{c^2}, \quad 0 \leq x \leq l, t > 0,$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

$$u(r, t) = \frac{gx(2l-x)}{2c^2} -$$

$$- \frac{16gl^2}{\pi^3 c^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{(2k+l)(x-l)\pi}{2l} \cos \frac{(2k+1)\pi ct}{2l}}{(2k+1)^3}.$$

828. $u(x, t) = -\frac{bx}{12} (x^3 - 2lx^2 + l^3) +$

$$+ \frac{8bl^4}{\pi^5} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi t}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^5}.$$

829. Ecuación diferencial: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0,$

$$u(x, 0) = \frac{4hx(l-x)}{l^2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(0, l) = u(l, t) = 0,$$

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2k+1)\pi x}{l}}{(2k+1)^3}.$$

830. $\frac{1}{1-e^{-p}}.$ 831. $\frac{e^{-p}}{(1-e^{-p})^2}.$ 832. $\frac{1}{1-e^{\alpha-p}}.$

833. $\frac{e^p}{e^p-\alpha}.$ 834. $\frac{e^p(e^p-\cos 1)}{e^{2p}+2e^p \cos 1+1}.$

835. $\frac{e^p \sin \alpha}{e^{2p}-2e^p \cos \alpha+1}.$ 836. $\frac{e^p \sinh 1}{e^{2p}-2e^p \cosh 1+1}.$

837. $\frac{e^p}{e^p-e} - \frac{2ep}{e^p-\sqrt{e}}.$

838. $\frac{1}{2} \frac{e^p}{e^p-1} + \frac{1}{2} \frac{e^p(e^p-\cos 2)}{e^{2p}-2e^p \cos 2+1}.$ 839. $\frac{e^{(1-h)p}}{e^p-1}.$

840. $\left(\frac{e^p}{e^p-e^3} - 1 - e^{\alpha-p} - e^{2\alpha-2p} \right) e^{3p}.$

841. $\frac{e^p(2 \operatorname{ch} 2 - e^p) \operatorname{sh} 2}{e^{2p}-2e^p \operatorname{ch} 2+1}.$ 842. $\frac{e^p(4e^{2p}-3e^p+1)}{(e^p-1)^3}.$

843. $\frac{e^{p-1} \sin 2}{e^{2p}-2e^{p-1} \cos 2+e^{-2}}.$ 844. $\frac{e^{p+2}(e^p+e^2)}{(e^p-e^2)^3}.$

845. $\frac{e^p(e^p-e^3 \operatorname{ch} 1)}{e^{2p}-2e^{p+3} \operatorname{ch} 1+e^6}.$ 846. $\frac{e^{p+1}(e^p+e)}{(e^p-e)^3}.$

847. $\frac{e^p(e^p+1)}{(e^p-1)^3}.$ 848. $\frac{(e^{2p}-1)e^p}{(e^{2p}+1)^2}.$ 849. $\ln a + \ln \frac{e^p-1}{e^p-a}.$

850. $\alpha + \operatorname{arctg} \frac{\sin \alpha}{e^p-\cos \alpha}.$ 851. $\ln \frac{\sqrt{e^{2p}-2e^p \cos \alpha-1}}{e^p-1}.$

852. $\frac{1}{e^p - 1} - \ln \sqrt{\frac{e^p - e^{-1}}{e^p - e}}$. 853. $\frac{e^p [(1 + e^{2p}) \cos \alpha - 2e^p]}{(e^{2p} - 2e^p \cos \alpha + 1)^2}$.

854. $\frac{e^p (e^{4p} + 2e^{3p} \operatorname{ch} \alpha - 6e^{2p} + 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1) \operatorname{sh} \alpha}{(e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1)^3}$.

855. $\frac{e^p (2e^{3p} - 5e^{2p} \operatorname{ch} \alpha + 4e^p \operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{ch} \alpha)}{(e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} \alpha + 1)^2}$.

856. $e - e_0 + \ln \frac{e^p - e^{e_0}}{e^p - e^e}$. 857. $\frac{1}{2} \ln \frac{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} 1 + 1}{e^{2p} - 2e^p \operatorname{ch} e + 1}$.

858. $e + \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{e^p - \cos \varepsilon}$.

859. $e - 1 + \frac{1}{2} \left(\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 2\varepsilon}{e^p - \cos 2\varepsilon} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sen} 2}{e^p - \cos 2} \right)$.

860. $\frac{1 - e^n}{1 - e}$. 861. $\frac{n(n+1)}{2}$. 862. $\frac{n}{1 - e} - \frac{1 - e^n}{(1 - e)^2}$.

863. $\frac{1 - e^{2(n-1)}}{1 - e^2}$. 864. $\Delta f(n) = 3$. $\Delta^k f(n) = 0$ ($k = 2, 3, 4, \dots$).

865. $\Delta^k f(n) = (e^4 - e^2)^k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).
866. $\Delta f(n) = 2n$, $\Delta^2 f(n) = 2$, $\Delta^k f(n) = 0$ ($k = 3, 4, \dots$).

867. $\frac{e^p (e^{2p} + 4e^p + 1)}{(e^p - 1)^4}$. 868. $\frac{e^p}{(e^p - 1)^3}$. 869. $\frac{2e^{(1-k)p}}{(e^p - 1)^3}$.

870. $\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$. 871. $\frac{(n-1) \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} \alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{n-1}{2} \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}$.

872. $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$.

873. $\frac{(1 - e \cos \alpha)(1 - e^n \cos n\alpha) + e^{n+1} \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} n\alpha}{e^2 - 2e \cos \alpha + 1}$.

874. $n3^{n-1}$. 875. $\frac{5^n - 3^n}{3}$. 876. $\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}$.

877. $\frac{1 + (-1)^n}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{n+1}{2} \pi$.

878. $a^{n-1} 2^{n/2} \operatorname{sen} \frac{3n\pi}{4}$. 879. $\frac{n(n-1)}{2} e^{n-2}$.

880. Es del segundo orden. 881. Es del orden nulo.
882. Es del primer orden. 883. Es del tercer orden.

884. 2^n . 885. $(-1)^n (1-n)$. 886. $2^{n/2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$.

887. $1 - 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$. 888. $\sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{(n-1)\pi}{4}$.

889. $(-1)^n \frac{n^2 - n}{2}$. 890. $\frac{3n - 1 + (-2)^n}{9}$.

891. $\frac{4^{n-1} + 15 \cdot 2^{n-3} - 7(-2)^{n-3}}{3}$. 892. $\frac{1 - (-1)^n}{2}$.

893. $\frac{n(n-1)(n-2)}{2} \cdot 3^{n-3}$. 894. $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot (-1)^{n-1}$.

895. $\frac{n^5}{60} - \frac{n^4}{8} + \frac{n^3}{3} - \frac{3n^2}{8} + \frac{3n}{20}$.

896. Es asintóticamente estable. 897. Es asintóticamente estable.

898. Es inestable. 899. Es inestable.

900. Es estable, pero no asintóticamente.

901. Es asintóticamente estable. 902. Es inestable.

903. El foco inestable. 904. El centro.

905. El foco estable. 906. La ensilladura.

907. El nudo inestable. 908. El nudo inestable.

909. El nudo estable. 910. El punto $(0, 0, 0)$ es estable.

911. El punto $(0, 0, 0)$ es inestable.

912. Es asintóticamente estable para $\alpha < 0$. En todos los demás casos es inestable.

913. Es asintóticamente estable para $\alpha < 0$ y $\alpha > 1$; es estable, pero no asintóticamente para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$; es inestable para $0 < \alpha < 1$.

914. Es inestable para todos α . 915. $\alpha \leq 0$. 916. $\alpha \leq -1/2$.

917. Es asintóticamente estable para $\alpha\beta < 1$; es estable, pero no asintóticamente para $\alpha\beta = 1$.

918. Es asintóticamente estable para $\beta < \alpha^2$ ($\alpha < 0$); es estable, pero no asintóticamente para: 1) $\alpha = 0$ ($\beta < 0$); 2) $\beta = \alpha^2$ ($\alpha < 0$).

919. Es estable asintóticamente para $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha > 0$ ($\alpha < 1$); es estable, pero no asintóticamente para: 1) $\alpha = 1$ ($|\beta| > 1$); 2) $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 0$ ($0 \leq \alpha < 1$).

920. Es inestable para todos los valores de α y β .

921. Es asintóticamente estable para $\alpha^2 + \beta^2 - \beta < 0$; es estable, pero no asintóticamente para $\alpha^2 + \beta^2 - \beta = 0$ ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$).

922. Es estable, pero no asintóticamente para $\beta + 2\alpha + 1 = 0$; es asintóticamente estable para todos los demás valores de α y β .

923. Es asintóticamente estable. 924. Es asintóticamente estable.

925. Es asintóticamente estable. 926. Es estable.

927. Es asintóticamente estable.

928. Es asintóticamente estable.

929. Es asintóticamente estable. 930. Es inestable.

931. Es inestable. 932. Es asintóticamente estable.

933. Es asintóticamente estable.

934. Es asintóticamente estable.

935. Es inestable. 936. Es estable. 937. Es inestable.

938. Es estable. 939. Es inestable. 940. Es inestable.

941. Es asintóticamente estable. 942. Es estable.

943. Examinación por la primera aproximación es imposible.

Mediante la función de Liapunov demostramos que el punto $(0, 0)$ es asintóticamente estable.

944. El punto de reposo es estable.

945. La solución nula del sistema de la primera aproximación es inestable, mientras que para el sistema completo es asintóticamente estable.

946. Si $a > 0, b > 0$, entonces la condición de la estabilidad tiene la forma de $\cos T > 0$, donde $T = (-1)^k x_0 + k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), $x_0 = \arcsen \frac{L}{b}$ (véase [2]).

954. Es estable. 955. Es inestable. 956. Es estable.

957. Es inestable. 958. Para $\alpha > 1/2$.

959. La solución es inestable para todo α .

960. Para $\alpha > 13/6$.

961. Para cualesquiera (α, β) del dominio G (véase la fig.).

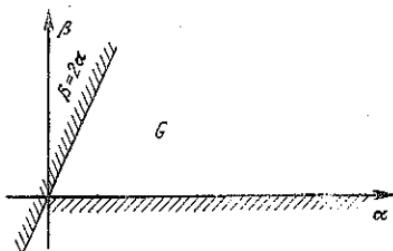


Fig. a la respuesta 961

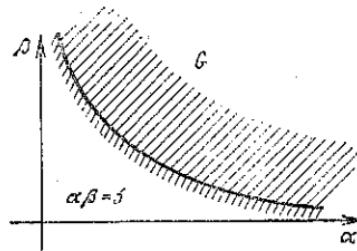


Fig. a la respuesta 962

962. Para cualesquiera (α, β) del dominio G : $\alpha\beta > 3$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ (véase la fig.).

963. La solución es inestable para todos (α, β) .

964. $p > 0, q > 2$.

965. Todas las raíces en el semiplano izquierdo; la solución es estable (véase la fig.).

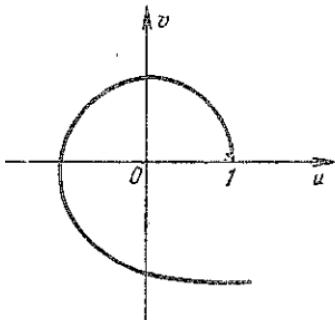


Fig. a la respuesta 965

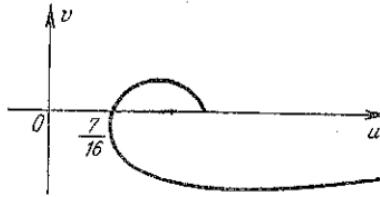


Fig. a la respuesta 966

966. Las dos raíces en el semiplano izquierdo, las dos raíces en el derecho; la solución es inestable (véase la fig.).

967. Es estable. 968. Es estable.

969. Las dos raíces en el semiplano derecho; la solución es inestable (véase fig.).

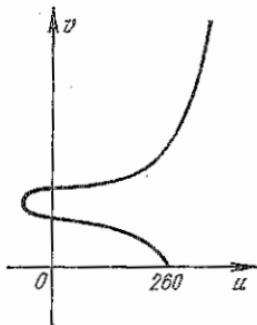


Fig. a la respuesta 969

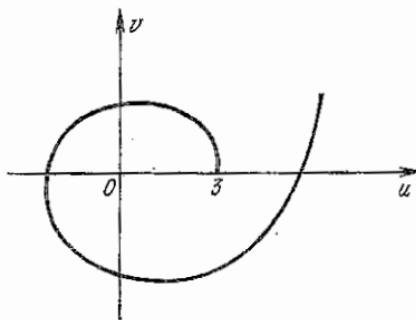


Fig. a la respuesta 970

970. Es estable. (véase la fig.). 971. Es estable.

972. Es estable. 973. Es estable.

974. La solución es estable. 975. Es estable.

976. Es estable. 977. Es estable. 978. Es estable.

979. Es estable (véase la fig.). 980. Es estable.

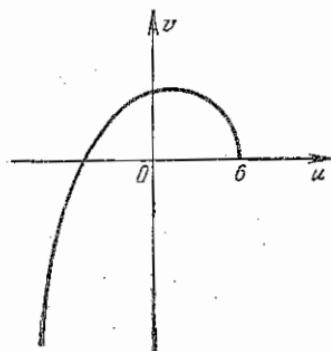


Fig. a la respuesta 979

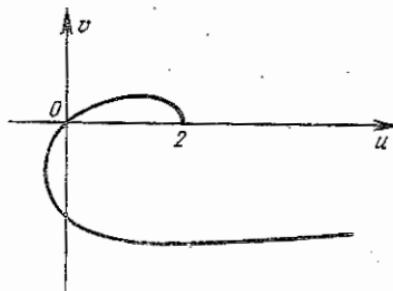


Fig. a la respuesta 981

981. Son las raíces puramente imaginarias; la solución es inestable (véase la fig.).

982. Las dos raíces en el semiplano derecho; la solución es inestable.

983. Las dos raíces en el semiplano derecho; la solución es inestable (véase la fig.).

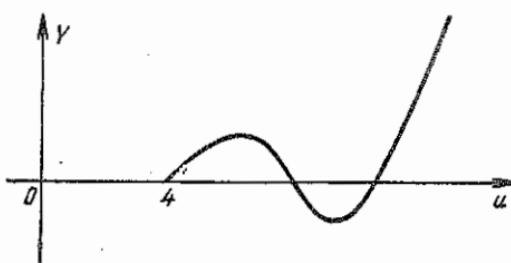
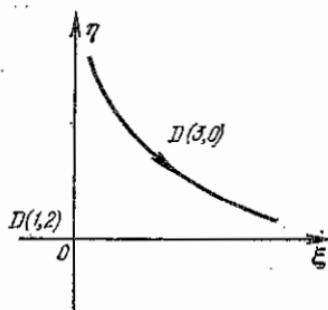


Fig. a la respuesta 983

984. Las dos raíces en el semiplano derecho; la solución es inestable.



985.



Fig. a la respuesta 985

986.

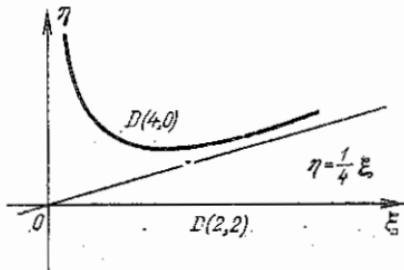


Fig. a la respuesta 986

987.

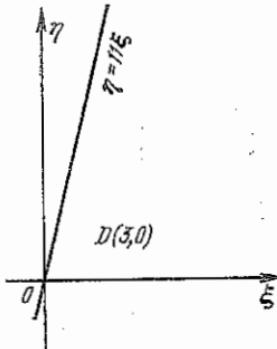


Fig. a la respuesta 987

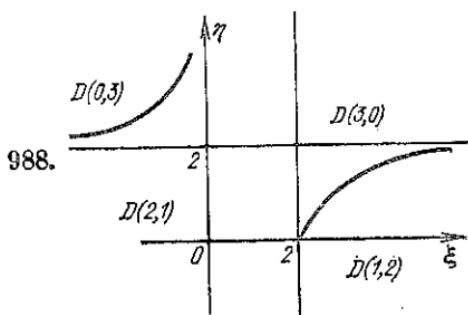


Fig. a la respuesta 988

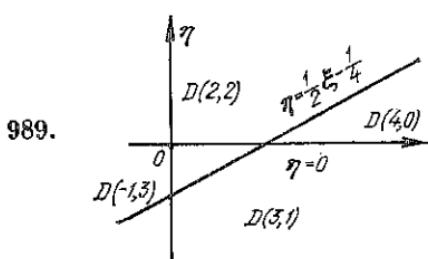


Fig. a la respuesta 989

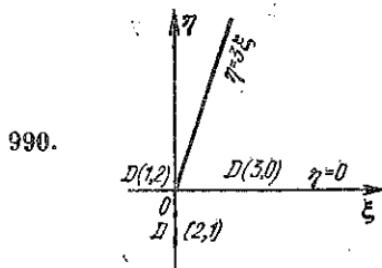


Fig. a la respuesta 990

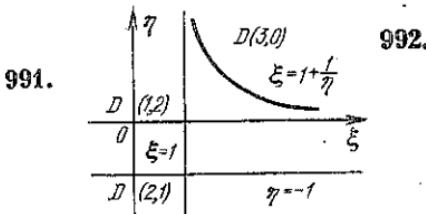


Fig. a la respuesta 991

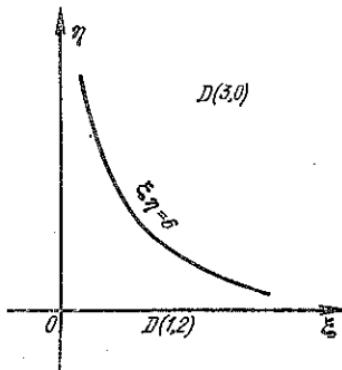


Fig. a la respuesta 992

993.

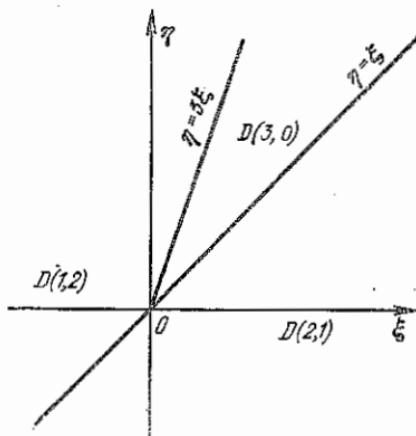


Fig. a la respuesta 993

994.

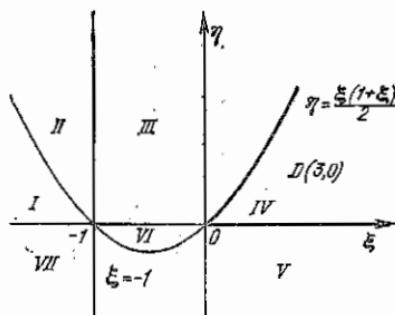


Fig. a la respuesta 994

995.

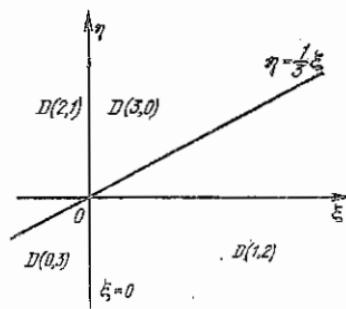
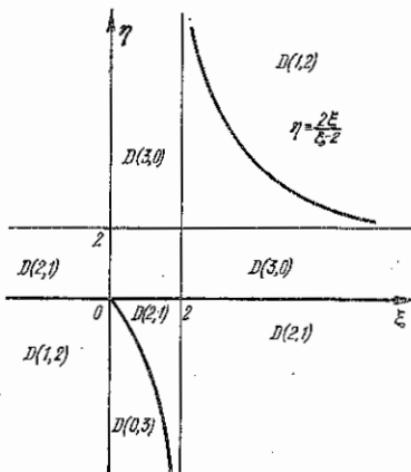


Fig. a la respuesta 995

996.



997.

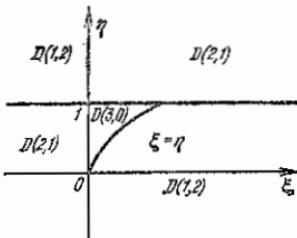


Fig. a la respuesta 997

Fig. a la respuesta 996

998. $f(n) = C_1 \cdot 2^n + C_2 \left(-\frac{4}{5}\right)^n.$

999. $f(n) = (-1)^n (4n^2 - 7n + 1).$

1000. $f(n) = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[C_1 \cos\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) + C_2 \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) \right].$

1001. $f(n) = 2^n \left(C_1 + C_2 \cos \frac{2n\pi}{3} + C_3 \sin \frac{2n\pi}{3} \right).$

1002. $f(n) = (-1)^n (C_1 + C_2 n) + 2^{n/2} \left(C_3 \cos \frac{n\pi}{4} + C_4 \sin \frac{n\pi}{4} \right).$

1003. $f(n) = C_1 (1 - \sqrt{2})^n + C_2 (1 + \sqrt{2})^n - \frac{n}{2}.$

1004. $f(n) = 2 \cdot 3^n + (-1)^n (8n - 2).$

1005. $f(n) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2 \cdot \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{\sin 2(n-1)}{2 \cos 2}.$

1006. $f(n) = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{e^n}{(e-1)^3}.$

1007. $f(n) = 2^n \left(\frac{1}{16} + C_1 \cos \frac{n\pi}{3} + C_2 \sin \frac{n\pi}{3} \right) + C_3 (-2)^n.$

1008. Es asintóticamente estable. 1009. Es estable, pero no asintóticamente.

1010. Es asintóticamente estable. 1011. Es inestable.

1012. $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 > 0,$
 $3(a_0 - a_3) + a_1 - a_2 > 0, \quad 3(a_0 + a_3) - a_1 - a_2 > 0, \quad a_0^2 - a_3^2 - a_0 a_2 + a_1 a_3 > 0.$

1013. $1 - q > 0, \quad 1 + p + q > 0, \quad 1 - p + q > 0.$

1014. $-1 < p < 1. \quad 1015. |a| > b.$

1016. Es asintóticamente estable. 1017. Es inestable.

1018. Es asintóticamente estable. 1019. Es inestable.

1020. Es inestable. 1021. Es inestable. 1022. Es inestable.

Suplemento

Principales originales y sus representaciones

| Oribinal $f(t)$ | Representación $F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ |
|---|---|
| 1. | $\frac{1}{p}$ |
| 2. t^n ($n=1, 2, \dots$) | $\frac{n!}{p^{n+1}}$ |
| 3. t^α ($\alpha > -1$) | $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$ |
| 4. $e^{\lambda t}$ ($\lambda = a+bi$) | $\frac{1}{p-\lambda}$ |
| 5. $t^n e^{\lambda t}$ | $\frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$ |
| 6. $t^\alpha e^{\lambda t}$ ($\alpha > -1$) | $\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\lambda)^{\alpha+1}}$ |
| 7. $\sin \omega t$ ($\omega > 0$) | $\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$ |
| 8. $\cos \omega t$ | $\frac{p}{p^2 + \omega^2}$ |
| 9. $\operatorname{sh} \omega t$ | $\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$ |
| 10. $\operatorname{ch} \omega t$ | $\frac{p}{p^2 - \omega^2}$ |
| 11. $e^{\lambda t} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(p-\lambda)^2 + \omega^2}$ |

Continuación

| Original $f(t)$ | Representación $F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$ |
|--|--|
| 12. $e^{\lambda t} \cos \omega t$ | $\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$ |
| 13. $e^{\lambda t} \sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$ |
| 14. $e^{\lambda t} \cosh \omega t$ | $\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$ |
| 15. $t \sin \omega t$ | $\frac{2p\omega}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |
| 16. $t \cos \omega t$ | $\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$ |
| 17. $t \sinh \omega t$ | $\frac{2p\omega^3}{(p^2 - \omega^2)^2}$ |
| 18. $t \cosh \omega t$ | $\frac{p^2 + \omega^2}{(p^2 - \omega^2)^2}$ |
| 19. $\sin(t - \tau) \ (\tau > 0)$ | $\frac{e^{-\tau p}}{p^2 + 1}$ |
| 20. $\cos(t - \tau)$ | $\frac{pe^{-\tau p}}{p^2 + 1}$ |
| 21. $t^n \sin \omega t$ | $\frac{\text{Im } (p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$ |
| 22. $t^n \cos \omega t$ | $\frac{\text{Re } (p + i\omega)^{n+1}}{(p^2 + \omega^2)^{n+1}} n!$ |
| 23. $J_n(t) \ (n=1, 2, \dots)$ | $\frac{(\sqrt{p^2 + 1} - p)^n}{\sqrt{p^2 + 1}}$ |
| 24. $\text{Erf}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t}}\right) =$
$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-x^2} dx$ | $\frac{1}{p} e^{-\alpha} \sqrt{p}$ |
| 25. Si $t = \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx$ | $\frac{\text{arcctg } p}{p}$ |

Continuación

| Original $f(t)$ | Representación $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$ |
|--|--|
| 26. $\text{Ci } t = - \int_t^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ | $\frac{1}{p} \ln \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$ |
| 27. $\frac{ebt - eat}{t}$ | $\ln \frac{p-a}{p-b}$ |
| 28. $\frac{I_n(\alpha t)}{t}$ ($\alpha > 0$) | $\frac{1}{n\alpha^n} (\sqrt{p^2 + \alpha^2} - p)^n$ |
| 29. $\ln t$ | $\frac{1}{p} \left(\ln \frac{1}{p} - \gamma \right)$, $\gamma = 0,57722 \dots$ |

Bibliografía

1. Араманович И. Г., Лунц Г. Л., Эльсгольц Л. Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. — М.: Наука, 1968.
(I.G. Aramanovich, G.L. Lunts, L.E. Elsgoltz, Funciones de variable compleja. Cálculo operacional. Teoría de la estabilidad)
2. Барбашин Е. А. Введение в теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
(E.A. Barbashin, Introducción a la teoría de la estabilidad)
3. Л.И. Volkovyski, G.L. Lunts, I.G. Aramanovich, Problemas sobre la teoría de las funciones de variable compleja, Editorial Mir», Moscú, 1977.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
(B.P. Demidovich, Lecciones acerca de la teoría matemática de la estabilidad)
5. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965.
(M.A. Evgrafov, Funciones analíticas)
6. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Бежанов К. А. Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Наука, 1969.
(M.A. Evgrafov, Yu.V. Sidorov, M.V. Fedoriuk, M.I. Shabunin, K.A. Bezhannov, Problemas de la teoría de las funciones analíticas)
7. Carslaw H., Jaeger D., Operational Methods in Applied Mathematics, London, 1943.
8. Краснов М. Л., Макаренко Г. И. Операционное исчисление. Устойчивость движения (задачи и упражнения). — М.: Наука, 1964.
(M.L. Krasnov, G.I. Makarenko, Cálculo operacional. Estabilidad del movimiento (problemas y ejercicios))
9. Кручкович Г. И., Мордасова Г. М., Подольский В. А., Римский-Корсаков Б. С., Сулейманова Х. Р., Чегис И. А. Сборник задач и упражнений по специальным главам высшей математики. — М.: Наука, 1973.
(G.I. Kruchkovich, G.M. Mordasova, V.A. Podolski, B.S. Rimski-Korsakov, Suleimanova H.R., I.A. Chegis, Problemas y ejercicios para los capítulos especiales de matemática superior)
10. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
(M.A. Lavrentiev, B.V. Shabat, Métodos de la teoría de las funciones de variable compleja)
11. Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. — М.: Просвещение, 1977.
(A.I. Markushevich, L.A. Markushevich, Introducción a la teoría de las funciones analíticas)
12. Мышикин А. Д. Математика для вузов (специальные курсы). — М.: Наука, 1971.