Unidad II - Resolución Analítica E.D.O. - Separación de Variables

Msc. Lic. Víctor Rodríguez Estévez

February 5, 2022

Resolución Analítica - Separación De Variables.

El camino hasta ahora...

- Comprendimos el significado y el uso de una Ecuación Diferencial
- Aprendimos que la solución a ellas era una función.
- Dimos pautas para el modelado de fenómenos simples con Ecuación Diferencial
- Intuimos su uso dando nociones de métodos analíticos y cualitativos para su relación y análisis.

Resolución Analítica

Intuitivamente resolvimos la E.D.O. fácilmente cuando teníamos una ecuación de la forma $\frac{dy}{dt} = f(t)$, es decir en el lado derecho teníamos una función exclusivamente en términos de t (la variable independiente) :

Intuición

- Si pensamos en una E.D. como $\frac{dy}{dt} = g(t)$
- Por los conceptos básicos de Calculo aplicamos la anti derivada: $\displaystyle\int \frac{dy}{dt} dt = \int g(t) dt$
- Puede realizarse la integración en ambos miembros: $\displaystyle y = \int g(t)\, dt$

Resolución Analítica

Si por ejemplo tenemos $\frac{dy}{dx} = sin(x)$

Intuición

- Entonces $dy = sin(x)dx$
- Aplicando integrales a ambos miembros: $y = \int sin(x)\, dx$
- Resolviendo la integral $y = -cos(x) + c$
- Donce c es una constante arbitraria producida por la integración.

Resolución Analítica

Consideremos ahora $\frac{d^2y}{dx^2} = x$

Intuición

- Entonces $\frac{d^2y}{dx} = xdx$
- Aplicando integrales a ambos miembros: $\frac{dy}{dx} = \int x\,dx$
- Resolviendo la integral $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 + c$
- Debemos volver a integrar para hallar y. Entonces $y = \int (\frac{1}{2}x^2 + c)dx$
- Resolviendo la integral: $y = \frac{1}{6}x^3 + cx + d$

Resolución Analítica - Separación de Variables

TÉCNICA DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

Comprendido el concepto de la **resolución analítica de una E.D.O.**, veamos un método de resolución para E.D. un poco mas amplias. El método consiste en la separación de variables.

- Aplicaremos este método cuando las E.D. tengan la forma: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$
- Donde $g(x)$ esta perfectamente definida en terminos de x, y $h(y)$ esta perfectamente definida en términos de y.

Resolución Analítica - Separación de Variables

TÉCNICA DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

- Por ejemplo $\frac{dy}{dx} = sin(xy)$ no es una E.D. separable, la función no esta definida en términos de y o de x.
- En cambio una E.D. como $\frac{dy}{dx} = xy^2$ si es separable, pues puede definirse perfectamente $g(x)$ y $h(y)$.
- El método conciste en juntar la función $h(y)$ con dy y $g(x)$ con dx
- Es decir $\frac{dx}{y} = g(x)h(y)$ puede escribirse $\frac{1}{h(y)}dy = g(x)dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

TÉCNICA DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

- Se ha **separado y definido** perfectamente las funciones en términos de ''x'' y de ''y''.
- Integrando ambos miembros: $\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx$
- Aplicando las integrales respectivas logramos despejar la función ''y''.

Resolución Analítica - Separación de Variables

Pregunta

Dada la ecuación : $\frac{dy}{dx} = (1 + x)y$ hallar la solución general.

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $\frac{dy}{dx} = (1+x)y$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $\frac{1}{y}dy = (1+x)dx$ *separando las variables*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $\frac{dy}{dx} = (1 + x)y$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $\frac{1}{y}dy = (1 + x)dx$ *separando las variables*
- $\int \frac{1}{y}dy = \int (1 + x)dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = x + \frac{1}{2}x^2 + c$ *aplicando las respectivas integrales*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $\frac{dy}{dx} = (1+x)y$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $\frac{1}{y}dy = (1+x)dx$ *separando las variables*
- $\int \frac{1}{y}dy = \int (1+x)dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = x + \frac{1}{2}x^2 + c$ *aplicando las respectivas integrales*
- $y = e^{\frac{1}{2}x^2+x+c}$ *Despejando y, por definición de ln.*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $\frac{dy}{dx} = (1+x)y$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $\frac{1}{y}dy = (1+x)dx$ *separando las variables*
- $\int \frac{1}{y}dy = \int (1+x)dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = x + \frac{1}{2}x^2 + c$ *aplicando las respectivas integrales*
- $y = e^{\frac{1}{2}x^2+x+c}$ *Despejando y, por definición de ln.*
- $y = e^{\frac{1}{2}x^2+x} * e^c$ *Separamos c, definición de exponente.*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $\frac{dy}{dx} = (1+x)y$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $\frac{1}{y}dy = (1+x)dx$ *separando las variables*
- $\int \frac{1}{y}dy = \int (1+x)dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = x + \frac{1}{2}x^2 + c$ *aplicando las respectivas integrales*
- $y = e^{\frac{1}{2}x^2+x+c}$ *Despejando y, por definición de ln.*
- $y = e^{\frac{1}{2}x^2+x} * e^c$ *Separamos c, definición de exponente.*
- $\boxed{y = Ce^{\frac{1}{2}x^2+x}}$ *El término e^c sigue como una constante arbitraria, podemos anotar como C*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Pregunta

Para la ecuación $(1+x)dy - ydx = 0$ encontrar la solución general.

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $(1+x)dy - ydx = 0$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $(1+x)dy = ydx$ *separando las variables.*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $(1+x)dy - ydx = 0$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $(1+x)dy = ydx$ *separando las variables.*
- $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{(1+x)}dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $(1+x)dy - ydx = 0$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $(1+x)dy = ydx$ *separando las variables.*
- $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{(1+x)}dx$
- $$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{(1+x)}dx$$ *Integrando ambos miembros.*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $(1+x)dy - ydx = 0$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $(1+x)dy = ydx$ *separando las variables.*
- $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{(1+x)}dx$
- $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{(1+x)}dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = ln|1+x| + c$ *aplicando las respectivas integrales*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $(1+x)dy - ydx = 0$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $(1+x)dy = ydx$ *separando las variables.*
- $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{(1+x)}dx$
- $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{(1+x)}dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = ln|1+x| + c$ *aplicando las respectivas integrales*
- $ln|y| = ln|1+x| + ln|c|$ *podemos aplica a c logaritmo (seguirá siendo una constante)*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $(1+x)dy - ydx = 0$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $(1+x)dy = ydx$ *separando las variables.*
- $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{(1+x)}dx$
- $\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{(1+x)}dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = ln|1+x| + c$ *aplicando las respectivas integrales*
- $ln|y| = ln|1+x| + ln|c|$ *podemos aplica a c logaritmo (seguirá siendo una constante)*
- $ln|y| = ln|c(1+x)|$ *por propiedades de ln.*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Sea $(1+x)dy - ydx = 0$ una E.D. a resolver.

Separación de Variables

- $(1+x)dy = ydx$ *separando las variables.*
- $\frac{1}{y}dy = \frac{1}{(1+x)}dx$
- $\displaystyle\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{(1+x)}dx$ *Integrando ambos miembros.*
- $ln|y| = ln|1+x| + c$ *aplicando las respectivas integrales*
- $ln|y| = ln|1+x| + ln|c|$ *podemos aplica a c logaritmo (seguirá siendo una constante)*
- $ln|y| = ln|c(1+x)|$ *por propiedades de ln.*
- $\boxed{y = c(1+x)}$ *por propiedades de ln.*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Pregunta

Hallar la solución general de la ecuación:

$$3e^{x} tan(y)dx + (2 - e^{x})sec^{2}(y)dy = 0$$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución general de la ecuación:
$3e^{x}tan(y)dx + (2 - e^{x})sec^{2}(y)dy = 0$

Separación de Variables

- $(2 - e^{x})sec^{(2)}ydy = -3e^{x}tan(y)dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución general de la ecuación:
$3e^x tan(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$

Separación de Variables

- $(2 - e^x)sec^{(2)}ydy = -3e^x tan(y)dx$
- $\frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución general de la ecuación:
$3e^x tan(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$

Separación de Variables

- $(2 - e^x)sec^{(2)}ydy = -3e^x tan(y)dx$
- $\frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$
- $\int \frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \int \frac{3e^x}{(2 - e^x)}dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución general de la ecuación:
$3e^x tan(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$

Separación de Variables

- $(2 - e^x)sec^{(2)}ydy = -3e^x tan(y)dx$
- $\frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$
- $\int \frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \int \frac{3e^x}{(2 - e^x)}dx$
- $ln|tan(y)| = 3ln|2 - e^x| + c$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución general de la ecuación:
$3e^x tan(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$

Separación de Variables

- $(2 - e^x)sec^{(2)}ydy = -3e^x tan(y)dx$
- $\frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$
- $\int \frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \int \frac{3e^x}{(2 - e^x)}dx$
- $ln|tan(y)| = 3ln|2 - e^x| + c$
- $ln|tan(y)| = ln|(2 - e^x)^3| + ln(c)$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución general de la ecuación:
$3e^x tan(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$

Separación de Variables

- $(2 - e^x)sec^{(2)}ydy = -3e^x tan(y)dx$
- $\frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$
- $\int \frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \int \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$
- $ln|tan(y)| = 3ln|2 - e^x| + c$
- $ln|tan(y)| = ln|(2 - e^x)^3| + ln(c)$
- $tan(y) = c(2 - e^x)^3$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución general de la ecuación:
$3e^x tan(y)dx + (2 - e^x)sec^2(y)dy = 0$

Separación de Variables

- $(2 - e^x)sec^{(2)}ydy = -3e^x tan(y)dx$
- $\frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$
- $\int \frac{sec^2 y}{tan(y)}dy = \int \frac{3e^x}{(2-e^x)}dx$
- $ln|tan(y)| = 3ln|2 - e^x| + c$
- $ln|tan(y)| = ln|(2 - e^x)^3| + ln(c)$
- $tan(y) = c(2 - e^x)^3$
- $\boxed{y = tan^{-1}(c(2 - e^x)^3)}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Problema de valor inicial

- Las soluciones obtenidas son llamadas **''Soluciones Generales''**.
- Este denominativo se debe a que la **Constante c**, es arbitraria, pudiendo ser cualquier valor.
- Esto quiere decir que podemos tener **infinitas funciones** que satisfagan la E.D., según el valor de c.

Resolución Analítica - Separación de Variables

Problema de valor inicial

- En muchas circunstancias tenemos **condiciones iniciales**, y queremos que nuestra solución contemple esta situación.
- Una E.D. junto a una condición inicial se llama **problema de valor inicial**.
- Utilizaremos la **solución general** para contemplar las **condiciones iniciales** mencionadas de tal manera de **elegir una constante adecuada para el probelma**.

Resolución Analítica - Separación de Variables

Pregunta

Sea $\frac{dy}{dx} = 4(y^2 + 1)$ la E.D. a resolver. Pero ahora queremos exclucivamente la solución pase por : $y_{(\frac{\pi}{4})} = 1$ (condición inicial).

Resolución Analítica - Separación de Variables

Separación de Variables

- Resolvemos:
  - $dy = 4(y^2 + 1)dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Separación de Variables

- Resolvemos:
    - $dy = 4(y^2 + 1)dx$
    - $\frac{1}{y^2+1} dy = 4dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Separación de Variables

- Resolvemos:
  - $dy = 4(y^2 + 1)dx$
  - $\frac{1}{y^2+1} dy = 4dx$
  - $\int \frac{1}{y^2+1} dy = \int 4dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Separación de Variables

- Resolvemos:
    - $dy = 4(y^2 + 1)dx$
    - $\frac{1}{y^2+1}dy = 4dx$
    - $\int \frac{1}{y^2+1}dy = \int 4dx$
    - $tan^{-1}(y) = 4x + c$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Separación de Variables

- Resolvemos:
  - $dy = 4(y^2 + 1)dx$
  - $\frac{1}{y^2+1}dy = 4dx$
  - $\int \frac{1}{y^2+1}dy = \int 4dx$
  - $tan^{-1}(y) = 4x + c$
  - $y = tan(4x + c)$ *Solución General*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Para la solución particular:

Separación de Variables

- Solución que cumpla la condición inicial: $y_{(\frac{\pi}{4})} = 1$
  - $1 = tan(4 * \frac{\pi}{4} + c)$ *reemplazando en la sol. gral* $y = 1$ cuando $x = \frac{\pi}{4}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Para la solución particular:

Separación de Variables

- Solución que cumpla la condición inicial: $y_{(\frac{\pi}{4})} = 1$
  - $1 = tan(4 * \frac{\pi}{4} + c)$ *reemplazando en la sol. gral* $y = 1$ cuando $x = \frac{\pi}{4}$
  - $1 = tan(\pi + c)$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Para la solución particular:

Separación de Variables

- Solución que cumpla la condición inicial: $y_{(\frac{\pi}{4})} = 1$
  - $1 = tan(4 * \frac{\pi}{4} + c)$ *reemplazando en la sol. gral* $y = 1$ cuando $x = \frac{\pi}{4}$
  - $1 = tan(\pi + c)$
  - $\pi + c = \frac{\pi}{4}$ entonces $c = -\frac{3}{4}\pi$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Para la solución particular:

Separación de Variables

- Solución que cumpla la condición inicial: $y_{(\frac{\pi}{4})} = 1$
  - $1 = tan(4 * \frac{\pi}{4} + c)$ *reemplazando en la sol. gral* $y = 1$ cuando $x = \frac{\pi}{4}$
  - $1 = tan(\pi + c)$
  - $\pi + c = \frac{\pi}{4}$ entonces $c = -\frac{3}{4}\pi$
  - $\boxed{y = tan(4x - \frac{3}{4}\pi)}$ *Solución Particular*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Pregunta

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0)=1$

Separación de Variables

- $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$
- $ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$
- $ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$
- $\int ydy = \int (\frac{e^x}{1+e^x})dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$
- $ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$
- $\displaystyle\int ydy = \int(\frac{e^x}{1+e^x})dx$
- $\frac{1}{2}y^2 = ln|1+e^x| + c$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$
- $ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$
- $\int ydy = \int (\frac{e^x}{1+e^x})dx$
- $\frac{1}{2}y^2 = ln|1+e^x| + c$
- $y = \sqrt{2ln|1+e^x| + c}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $(1+e^x)y\frac{dy}{dx} = e^x$
- $ydy = \frac{e^x}{1+e^x}dx$
- $\int ydy = \int (\frac{e^x}{1+e^x})dx$
- $\frac{1}{2}y^2 = ln|1+e^x| + c$
- $y = \sqrt{2ln|1+e^x| + c}$
- $y = \sqrt{ln|(1+e^x)^2| + c}$ *Solución General*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $1 = \sqrt{ln|(1+e^0)^2| + c}$ *con* $x = 0$ *tenemos* $y = 1$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $1 = \sqrt{ln|(1+e^0)^2| + c}$ *con* $x = 0$ *tenemos* $y = 1$
- $1 = ln|4| + c$ entonces $c = 1 - ln|4|$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $1 = \sqrt{ln|(1+e^0)^2| + c}$ $\scriptstyle con\ x = 0\ tenemos\ y = 1$
- $1 = ln|4| + c$ entonces $c = 1 - ln|4|$
- $y = \sqrt{ln|(1+e^x)^2| - ln|4| + 1}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $(1+e^x)yy' = e^x$ que satisface a la condicón inicial $y(0) = 1$

Separación de Variables

- $1 = \sqrt{ln|(1+e^0)^2| + c}$ *con* $x = 0$ *tenemos* $y = 1$
- $1 = ln|4| + c$ entonces $c = 1 - ln|4|$
- $y = \sqrt{ln|(1+e^x)^2| - ln|4| + 1}$
- $\boxed{y = \sqrt{ln|\frac{(1+e^x)^2}{4}| + 1}}$ *Solución Particular*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Pregunta

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$ que satisface las condiciones iniciales:
a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ b) $y(\frac{\pi}{2}) = 1$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$

Separación de Variables

- $sin(x)\frac{dy}{dx} = yln(y)$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$

Separación de Variables

- $sin(x)\frac{dy}{dx} = yln(y)$
- $\frac{1}{yln(y)}dy = \frac{1}{sin(x)}dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$

Separación de Variables

- $sin(x)\frac{dy}{dx} = yln(y)$
- $\frac{1}{yln(y)}dy = \frac{1}{sin(x)}dx$
- $\int \frac{1}{yln(y)}dy = \int \frac{1}{sin(x)}dx$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$

Separación de Variables

- $sin(x)\frac{dy}{dx} = yln(y)$
- $\frac{1}{yln(y)}dy = \frac{1}{sin(x)}dx$
- $\int \frac{1}{yln(y)}dy = \int \frac{1}{sin(x)}dx$
- $ln|ln(y)| = ln|tan(\frac{1}{2}x)| + ln(c)$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$

Separación de Variables

- $sin(x)\frac{dy}{dx} = yln(y)$
- $\frac{1}{yln(y)}dy = \frac{1}{sin(x)}dx$
- $\int \frac{1}{yln(y)}dy = \int \frac{1}{sin(x)}dx$
- $ln|ln(y)| = ln|tan(\frac{1}{2}x)| + ln(c)$
- $ln|ln(y)| = ln|c(tan(\frac{1}{2}x))|$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$

Separación de Variables

- $sin(x)\frac{dy}{dx} = yln(y)$
- $\frac{1}{yln(y)}dy = \frac{1}{sin(x)}dx$
- $\int \frac{1}{yln(y)}dy = \int \frac{1}{sin(x)}dx$
- $ln|ln(y)| = ln|tan(\frac{1}{2}x)| + ln(c)$
- $ln|ln(y)| = ln|c(tan(\frac{1}{2}x))|$
- $ln(y) = c(tan(\frac{1}{2}x))$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación: $y' \sin(x) = y \ln(y)$

Separación de Variables

- $sin(x)\frac{dy}{dx} = yln(y)$
- $\frac{1}{yln(y)}dy = \frac{1}{sin(x)}dx$
- $\int \frac{1}{yln(y)}dy = \int \frac{1}{sin(x)}dx$
- $ln|ln(y)| = ln|tan(\frac{1}{2}x)| + ln(c)$
- $ln|ln(y)| = ln|c(tan(\frac{1}{2}x))|$
- $ln(y) = c(tan(\frac{1}{2}x))$
- $y = e^{c(tan(\frac{1}{2}x))}$ *Solución general*

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $1 = c \cdot tan(\frac{\pi}{4})$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $1 = c \cdot tan(\frac{\pi}{4})$
- $c = 1$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $1 = c \cdot tan(\frac{\pi}{4})$
- $c = 1$
- $\boxed{y = e^{(tan(\frac{1}{2}x))}}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $1 = c \cdot tan(\frac{\pi}{4})$
- $c = 1$
- $\boxed{y = e^{(tan(\frac{1}{2}x))}}$
- **para b)** $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ tenemos:
- $1 = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $1 = c \cdot tan(\frac{\pi}{4})$
- $c = 1$
- $\boxed{y = e^{(tan(\frac{1}{2}x))}}$
- **para b)** $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ tenemos:
- $1 = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $c(tan(\frac{\pi}{4})) = 0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $1 = c \cdot tan(\frac{\pi}{4})$
- $c = 1$
- $\boxed{y = e^{(tan(\frac{1}{2}x))}}$
- **para b)** $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ tenemos:
- $1 = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $c(tan(\frac{\pi}{4})) = 0$
- $c = 0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Condicón inicial a) $y(\frac{\pi}{2}) = e$ y b) $y(\frac{\pi}{2} = 1)$

Separación de Variables

- **para a)** $y(\frac{\pi}{2}) = e$ tenemos:
- $e = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $1 = c \cdot tan(\frac{\pi}{4})$
- $c = 1$
- $\boxed{y = e^{(tan(\frac{1}{2}x))}}$
- **para b)** $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ tenemos:
- $1 = e^{c(tan(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2})))}$
- $c(tan(\frac{\pi}{4})) = 0$
- $c = 0$
- $\boxed{y = 1}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Pregunta

Hallar la solución particular de la ecuación: $(t^2y^2+1)dt + 2t^2dy = 0$

En algunos casos las funciones no pueden separase directamente, puede sin embargo, mediante un cambio de variable hacerse posible la separación.

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2 + 1)dt + 2t^2dy = 0$

Separación de Variables

- Sea $z = ty$ entonces $y = \frac{z}{t}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- Sea $z=ty$ entonces $y=\frac{z}{t}$
- además $\frac{dy}{dt}=\frac{t\frac{dz}{dt}-z}{t^2}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt + 2t^2dy = 0$

Separación de Variables

- Sea $z = ty$ entonces $y = \frac{z}{t}$
- además $\frac{dy}{dt} = \frac{t\frac{dz}{dt} - z}{t^2}$
- $(t^2y^2+1) + 2t^2\frac{dy}{dt} = 0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- Sea $z=ty$ entonces $y=\frac{z}{t}$
- además $\frac{dy}{dt}=\frac{t\frac{dz}{dt}-z}{t^2}$
- $(t^2y^2+1)+2t^2\frac{dy}{dt}=0$
- $(z^2+1)+2t^2\frac{t\frac{dz}{dt}-z}{t^2}=0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2 + 1)dt + 2t^2dy = 0$

Separación de Variables

- Sea $z = ty$ entonces $y = \frac{z}{t}$
- además $\frac{dy}{dt} = \frac{t\frac{dz}{dt} - z}{t^2}$
- $(t^2y^2 + 1) + 2t^2\frac{dy}{dt} = 0$
- $(z^2 + 1) + 2t^2\frac{t\frac{dz}{dt} - z}{t^2} = 0$
- $(z^2 + 1) + 2(t\frac{dz}{dt} - z) = 0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt + 2t^2dy = 0$

Separación de Variables

- Sea $z = ty$ entonces $y = \frac{z}{t}$
- además $\frac{dy}{dt} = \frac{t\frac{dz}{dt} - z}{t^2}$
- $(t^2y^2+1) + 2t^2\frac{dy}{dt} = 0$
- $(z^2+1) + 2t^2\frac{t\frac{dz}{dt} - z}{t^2} = 0$
- $(z^2+1) + 2(t\frac{dz}{dt} - z) = 0$
- $(z^2+1) + 2t\frac{dz}{dt} - 2z = 0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- Sea $z=ty$ entonces $y=\frac{z}{t}$
- además $\frac{dy}{dt}=\frac{t\frac{dz}{dt}-z}{t^2}$
- $(t^2y^2+1)+2t^2\frac{dy}{dt}=0$
- $(z^2+1)+2t^2\frac{t\frac{dz}{dt}-z}{t^2}=0$
- $(z^2+1)+2(t\frac{dz}{dt}-z)=0$
- $(z^2+1)+2t\frac{dz}{dt}-2z=0$
- $(z^2+1)dt+2tdz-2zdt=0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt + 2t^2dy = 0$

Separación de Variables

- $(z^2 - 2z + 1)dt + 2tdz = 0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- $(z^2-2z+1)dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt+2tdz=0$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- $(z^2-2z+1)dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt=-2tdz$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2 + 1)dt + 2t^2dy = 0$

Separación de Variables

- $(z^2 - 2z + 1)dt + 2tdz = 0$
- $(z-1)^2dt + 2tdz = 0$
- $(z-1)^2dt = -2tdz$
- $\frac{1}{(z-1)^2}dz = -2tdt$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- $(z^2-2z+1)dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt=-2tdz$
- $\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2tdt$
- $\int\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2\int tdt$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- $(z^2-2z+1)dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt=-2tdz$
- $\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2tdt$
- $\int\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2\int tdt$
- $-\frac{1}{z-1}=-t^2+c$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- $(z^2-2z+1)dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt=-2tdz$
- $\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2tdt$
- $\int\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2\int tdt$
- $-\frac{1}{z-1}=-t^2+c$
- $-\frac{1}{-t^2+c}=z-1$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Hallar la solución particular de la ecuación:
$(t^2y^2+1)dt+2t^2dy=0$

Separación de Variables

- $(z^2-2z+1)dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt+2tdz=0$
- $(z-1)^2dt=-2tdz$
- $\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2tdt$
- $\int\frac{1}{(z-1)^2}dz=-2\int tdt$
- $-\frac{1}{z-1}=-t^2+c$
- $-\frac{1}{-t^2+c}=z-1$
- $\boxed{z=-\frac{1}{c-t^2}+1}$

Resolución Analítica - Separación de Variables

Modelo de Crecimiento Poblacional

Población de Peces

Supongamos que una especie de peces en un lago particular tiene una población P que es modelada por el modelo de población logística. Si la tasa de crecimiento $k = 0.3$, capacidad de carga $N = 2500$, con población inicial de $P_0 = 500$ peces.

- **Determine la expresión para:** $\frac{dP}{dt}$
- Encontrar la solución general.
- Encontrar la función para predecir el número de peces en un determinado tiempo.
-

Resolución Analítica - Separación de Variables

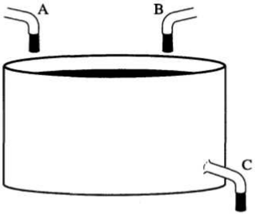
Modelo de Ahorro

Modelo de Ahorro

Sabemos que la velocidad de aumento de dinero es proporcional al monto depositado. Supongamos que depositamos Bs. 5 000 en una cuenta de ahorro con interés incrementado a una tasa de 5% compuesto en forma continua. Si $A(t)$ denota la cantidad de dinero en la cuenta en el tiempo t. a) Formular la E.D.O. y generar el modelo (solución particular). Decidimos retirar Bs. 1000 de la cuenta cada año, en forma continua, comenzando en el año 10. ¿Cuánto nos durará el dinero? ¿Perderemos alguna vez todo nuestro capital?

Resolución Analítica - Separación de Variables

Modelo de Mezcla



? Tanque de mezcla

Consideremos un gran tanque que contiene azúcar y agua con lo que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que:

- El tanque contiene 100 galones de líquido. Además, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque.
- El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque.
- El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo A a razón de 2 galones por minuto.
- El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón entra al tanque a través del tubo B a razón de 1 galón por minuto.
- El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.

Generar el modelo para calcular la cantidad de azucar con respecto del tiempo.

Resolución Analítica - Separación de Variables

Modelo de Temperatura

Cambio de temperatura

Según la ley de Newton, la velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire, es proporcional a la diferencia entre la Temperatura T del cuerpo y la Temperatura T_0 del aire. Si la temperatura del aire de 20º C y el cuerpo se enfria en 20 minutos desde 100ºC hasta 60ºC. ¿Dentro de cuanto tiempo su temperatura descenderá hasta 30ºC?