

Chapter 4

Vectores Aleatorios

1 Distribución conjunta de un vector aleatorio

Anteriormente estudiamos la distribución de probabilidad de una variable aleatoria. Sin embargo, en muchas ocasiones estamos interesados en estudiar más de una variable aleatoria como resultado de un experimento. En general, si X e Y son variables aleatorias, la distribución de probabilidad que las describe a las dos simultáneamente se llama **distribución de probabilidad conjunta**, y aparecen de forma natural en muchas situaciones:

- La distribución de probabilidad conjunta de las componentes x , y y z de la dirección del viento medidas en estudios sobre turbulencias atmosféricas.
- En estudios ecológicos, el número de animales de una especie se modeliza mediante una variable aleatoria. Unas especies son depredadores de otras, por lo que el número de presas está relacionado con el número de predadores.
- La intensidad y la fase de una señal aleatoria que se miden en los canales de comunicación.

1.1 Variables aleatorias discretas

Supongamos que X e Y son variables aleatorias discretas, y que toman valores x_1, x_2, \dots e y_1, y_2, \dots respectivamente. Su *función de probabilidad conjunta* es

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y).$$

Como en el caso univariante, esta función ha de satisfacer,

$$\begin{aligned} p(x, y) &\geq 0 \\ \sum_x \sum_y p(x, y) &= 1. \end{aligned}$$

La función de distribución conjunta es

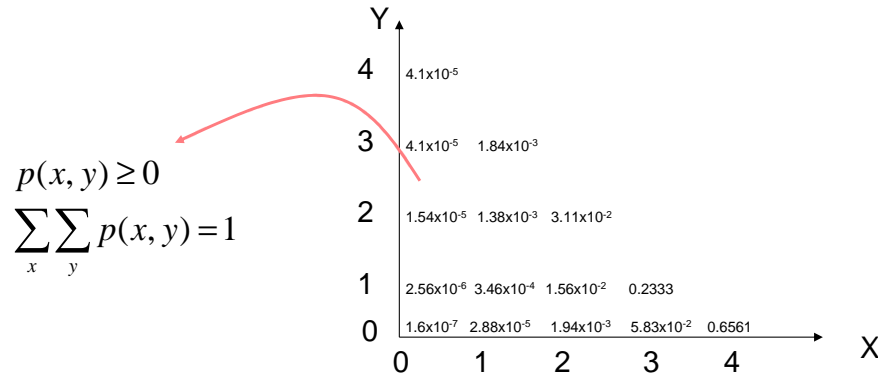
$$F(x_0, y_0)P(X \leq x_0, Y \leq y_0) = \sum_{x \leq x_0} \sum_{y \leq y_0} p(x, y)$$

Ejemplo

Un nuevo receptor de transmisiones de información digital recibe bits que se clasifican como aceptables, sospechoso, o no-aceptables, dependiendo de la calidad de la señal recibida. Se transmiten 4 bits, y se definen dos variables aleatorias:

$$X = \text{Número de bits aceptables} \quad Y = \text{Número de bits sospechosos}$$

La función de probabilidad conjunta viene dada en la siguiente tabla:



¿Cuál es la probabilidad de que haya, como mucho, 2 bits aceptables y 1 sospechoso?

$$\begin{aligned}
 P(X \leq 2, Y \leq 1) &= P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=0, Y=1) + \\
 &+ P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1)
 \end{aligned}$$

1.2 Variables aleatorias continuas

La distribución de probabilidad de dos variables aleatorias continuas X e Y se puede especificar si encontramos un método para calcular la probabilidad de que X e Y tome valor en una región de espacio bidimensional. La integral doble en un recinto nos da la probabilidad de que tomen valor en ese recinto, esta integral se puede interpretar como el volumen bajo la superficie generada por el recinto (recuerda que en el caso unidimensional era el área bajo la curva).

Dadas dos variables continuas X e Y , su función de densidad conjunta es una función $f(x, y)$ que satisface:

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &\geq 0 \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy &= 1 \\
 P([x, y] \in R) &= \int_R \int f(x, y) dx dy.
 \end{aligned}$$

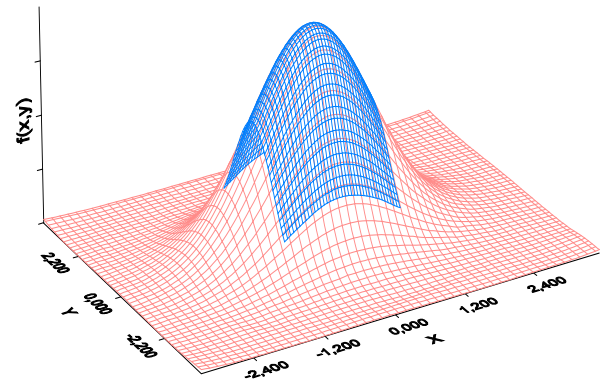
Nota: el orden de integración no afecta el cálculo, siempre que los límites de integración sean los correctos.

La función de distribución viene dada por:

$$F(x_0, y_0) = P(X \leq x_0, Y \leq y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f(x, y) dx dy$$

Por ejemplo: El dibujo abajo muestra la función de densidad conjunta de dos variables normales estándar, entonces, la probabilidad $P(-1 \leq X \leq 1, -1.5 \leq Y \leq 1.5)$ sería el volumen bajo la superficie en color azul:

$$P(-1 \leq X \leq 1, -1.5 \leq Y \leq 1.5) \Rightarrow$$



Ejemplo

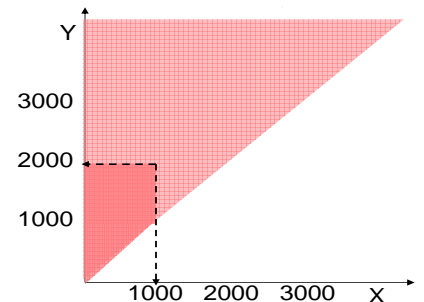
Sea X una variable aleatoria que representa el tiempo hasta que un PC se conecta a un servidor, e Y , el tiempo hasta que el servidor te reconoce como usuario. La función de densidad conjunta viene dada por:

$$f(x, y) = 6 \times 10^{-6} \exp(-0.001x - 0.002y) \quad 0 < x < y$$

Calcula $P(X < 1000, Y < 2000)$.

La región en color rosa claro es donde la función de densidad es distinta de cero, y la oscura es la región donde hemos de calcular la probabilidad.

$$\begin{aligned} P(X < 1000, Y < 2000) &= \int_0^{1000} \int_0^y f(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{1000}^{2000} \int_0^{1000} f(x, y) dx dy = 0.915 \end{aligned}$$



2 Distribuciones marginales y condicionadas

2.1 Distribución marginal

Si en un experimento se definen más de una variable aleatoria, es importante distinguir entre la distribución conjunta de X e Y , y la distribución de cada una de ellas por separado. a distribución individual de cada una de ellas se llama **distribución marginal**.

En el caso de dos variables aleatorias discretas X e Y con función de probabilidad conjunta $p(x, y)$, las funciones de probabilidad marginal son:

$$p(x) = P(X = x) = \sum_{\forall y} P(X = x, Y = y)$$

$$p(y) = P(Y = y) = \sum_{\forall x} P(X = x, Y = y).$$

Ambas son funciones de probabilidad y cumplen las propiedades que vimos en el tema anterior.

Ejemplo

Continuamos con el ejemplo de la sección anterior. La función de probabilidad marginal del número de bits aceptables es:



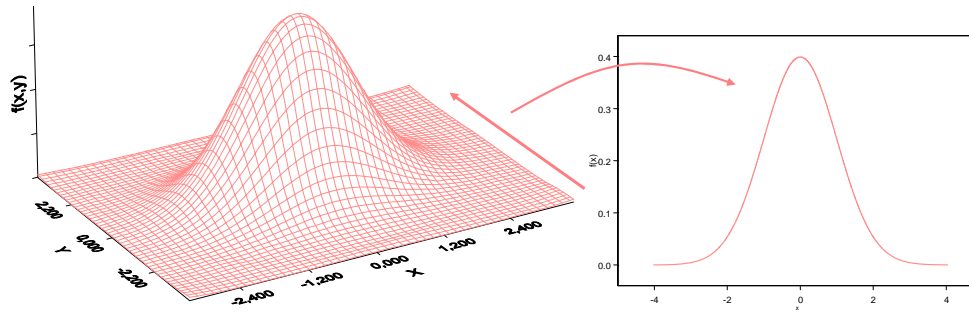
Dadas dos variable aleatorias continuas X e Y con función de densidad conjunta $f(x, y)$, las funciones de densidad maginales vienen dadas por:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Ambas satisfacen las propiedades de una función de densidad. Al integrar la función de densidad conjunta lo que hacemos es proyectar la superficie en cada dirección.

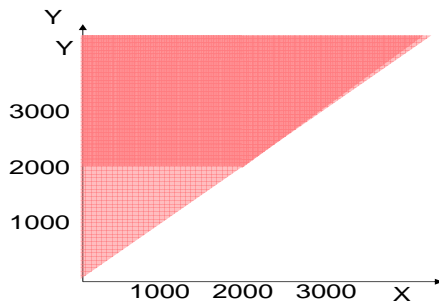
Recuerda: una vez que has calculado la integral necesitas dar el conjunto de valores que toma la variable.



Ejemplo

En el ejemplo de la sección anterior, si queremos calcular $P(Y > 2000)$, tenemos dos opciones:

1. Calcular directamente la probabilidad integrando en la región correspondiente.



$$P(Y > 2000) = \int_{2000}^{+\infty} \int_0^y f(x, y) dx dy = 0.05$$

2. Calcular primero la función de densidad marginal, y entonces la probabilidad.

$$f(y) = \int_0^y f(x, y) dx = 6 \times 10^{-3} e^{-0.002y} (1 - e^{-0.001y}) \quad y > 0$$

$$P(Y > 2000) = \int_{2000}^{+\infty} f(y) dy = 0.05$$

3 Distribuciones condicionadas

Cuando se definen dos variable aleatorias en un experimento, el conocimiento que se tiene de una de ellas puede afectar a las probabilidades asociadas con los valores que toma la otra variable. Recordemos la definición de probabilidad condicionada para los eventos A y B , $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$, que medía el tamaño de uno de los eventos con respecto al otro.

Dadas dos v.a. discretas X e Y con función de probabilidad conjunta $p(x, y)$, la función de probabilidad condicionada de Y dado $X = x$:

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)} = \frac{P(\overbrace{X=x, Y=y}^{A \cap B})}{P(\underbrace{X=x}_A)} \Rightarrow \boxed{p(x, y) = p(y|x)p(x)}$$

Es una función de probabilidad, por lo tanto, podemos calcular la media, varianza, etc., de $Y|X = x$

Ejemplo

En el ejemplo de los bits, calcular la función de probabilidad de $Y|X = 3$, y el número esperado de bit sospechosos si hay 3 bits aceptables.

Dado que se envía 4 bits y $X = 3$, entonces, $Y|X = 3$ sólo puede tomar valores 0 ó 1:

$$\begin{aligned} P(Y = 0|X = 3) &= \frac{P(Y = 0, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0.05832}{0.2916} = 0.2 \\ P(Y = 1|X = 3) &= \frac{P(Y = 1, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0.2333}{0.2916} = 0.8 \\ E[Y|X = 3] &= 0 \times 0.2 + 1 \times 0.8 = 0.8 \end{aligned}$$

Análogamente al caso de variables discretas, podemos definir la función de densidad condicionada de Y dado $X = x$, para dos variable continuas X e Y :

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \implies f(x, y) = f(y|x)f(x)$$

Ejemplo

En el ejemplo de la sección anterior, calculamos $P(Y > 2000|X = 1500)$.

Primero calculamos la función de densidad condicionada, y después la probabilidad:

$$\begin{aligned} f(y|x) &= \frac{f(x, y)}{f(x)} \\ f(x) &= \int_x^{+\infty} f(x, y)dy = 0.003e^{-0.003x} \quad x > 0 \\ f(y|x) &= \frac{6 \times 10^{-6} \exp(-0.001x - 0.002y)}{0.003e^{-0.003x}} = 0.002e^{0.002x - 0.002y} \quad 0 < x < y \end{aligned}$$

$$P(Y > 2000|X = 1500) = \int_{2000}^{+\infty} f(y|X = 1500)dy = \int_{2000}^{+\infty} 0.002e^{3 - 0.002y}dy = 0.368$$

3.1 Independencia de variables aleatorias

En algunos experimentos, el conocimiento de una variable X no afecta a la probabilidad asociada con los valores de Y . Recuerda (del Capítulo 1) que dos sucesos A y B son inde-

pendientes si:

$$\begin{aligned}P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\P(A|B) &= P(A) \\P(B|A) &= P(B).\end{aligned}$$

Por analogía, decimos que dos variables son independientes si :

Variables Discretas

Variables Continuas

$$\begin{aligned}p(x, y) &= p_X(x)p_Y(y) & f(x, y) &= f_X(x)f_Y(y) \\p(x|y) &= p_X(x) \quad p(y|x) = p(y) & f(x|y) &= f_X(x) \quad f(y|x) = f_Y(y)\end{aligned}$$

Ejemplo

En el ejemplo de variables continuas la sección anterior, ¿son X e Y independientes?.

En las secciones 2 y 3 hemos calculado las funciones de densidad marginales y condicionadas:

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \int_0^y f(x, y)dx = 6 \times 10^{-3}e^{-0.002y}(1 - e^{-0.001y}) \quad y > 0 \\f(y|x) &= \frac{6 \times 10^{-6} \exp(-0.001x - 0.002y)}{0.003e^{-0.003x}} = 0.002e^{0.002x - 0.002y} \quad 0 < x < y.\end{aligned}$$

No son iguales para todos los valores x de X , por lo tanto X e Y no son independientes.

4 Características de vectores aleatorios

Al ser variables aleatorias, los vectores aleatorios están caracterizados por unas cantidades que resumen la información sobre ellos:

- Media o Esperanza

Dado un vector aleatorio $\mathbf{X}' = (X_1, X_2)$, la media o valor esperado del vector es otro vector cuyos componentes son los valores esperados de cada uno de los componentes:

$$\mu = E[\mathbf{X}] = \begin{pmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \end{pmatrix}$$

- Covarianza

Es una medida de la *relación lineal* entre dos variables aleatorias. Para definir la covarianza, necesitamos definir la esperanza de una función de dos variables aleatorias $h(X, Y)$. La definición es simplemente una extensión de la usada en el caso de una variable aleatoria: variable.

$$E[h(X, y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y h(x, y)p(x, y) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y)f(x, y)dxdy \end{cases}$$

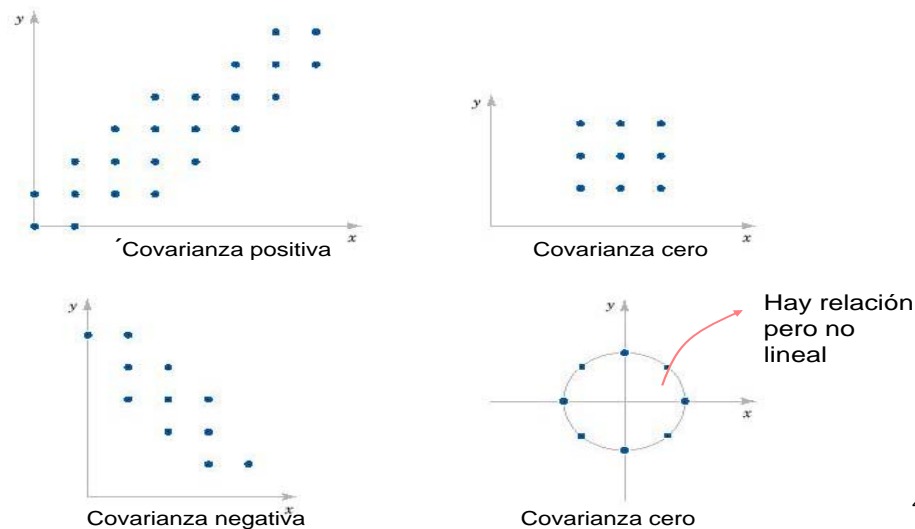
El valor de $E[h(X, Y)]$ representa el valor medio de $h(X, Y)$ que se esperaría si se repite el experimento un gran número de veces.

Importante:

Si dos variables X e Y son independientes $\Rightarrow E[XY] = E[X]E[Y]$

Entonces, la covarianza entre dos variables X e Y se define como:

$$\sigma_{XY} = \text{Cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$



La covarianza tiene las siguientes propiedades:

- Si X e Y son independientes $\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = 0$ (ya que $E[XY] = E[X]E[Y]$)
- Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, X e Y no tienen por que ser independientes (a menos que sean variables aleatorias Normales).
- Si $Z = aX + b$ y $W = cY + d$, entonces, $\text{Cov}(Z, W) = ac\text{Cov}(X, Y)$. Es decir, la covarianza sólo se ve afectada por los cambios de escala (al igual que ocurre con la varianza).

• Correlación

Hay otra medida de la relación lineal entre dos variables aleatorias y que tiene una interpretación más sencilla que la covarianza (ya que la magnitud de la covarianza se ve afectada por los cambios de escala):

$$\rho_{XY} = \text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}[X]\text{Var}[Y]}}$$

La correlación tiene las siguientes propiedades:

- $|\rho_{X,Y}| \leq 1$

- Si X e Y son independientes $\rho_{XY} = 0$, ya que $Cov(X, Y) = 0$.
- Si $Y = aX + b \Rightarrow \rho_{X,Y} = 1$
- Si $Z = aX + b$ y $W = cY + d$, entonces, $\rho_{ZW} = \rho_{XY}$.

• Matriz de varianzas-covarianzas

Dado un vector aleatorio $\mathbf{X}' = (X_1, X_2)$, la matriz de varianzas-covarianzas del vector es una matriz 2×2 (simétrica y definida positiva) cuyos elementos diagonales son $Var[X_i]$, $i = 1, 2$ y los elementos fuera de la diagonal son $Cov(X_i, X_j)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$.

$$\mathbf{M}_X = E[(\mathbf{X} - \mu)(\mathbf{X} - \mu)'] = \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) \end{pmatrix}$$

Todos los resultados de esta sección se pueden extender al caso en el que el vector tenga una dimensión mayor a 2.

Ejemplo

Sea (X, Y) un vector bidimensional con matriz de varianzas-covarianzas dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & a \end{pmatrix}$$

Probar que $Corr(X, Y) = \frac{-2}{\sqrt{a}}$, y por lo tanto, $a \geq 4$.

Primero, observamos que $a \geq 0$ para que pueda ser la varianza. Segundo, tenemos que,

$$Corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X]Var[Y]}} = \frac{-2}{1 \cdot \sqrt{a}}$$

Ya que siempre se satisface que

$$|Corr(X, Y)| \leq 1.$$

Entonces, esto es equivalente a

$$2 \leq \sqrt{a} \Leftrightarrow 4 \leq a$$

ya que $a \geq 0$.

Otra forma de resolver este ejercicio es recordar que la matriz de varianzas-covarianzas ha de ser definida positiva. Por lo tanto, necesitamos imponer que todos los menores principales son mayores o iguales a cero. Es decir:

$$|1| \geq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & a \end{vmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow a - 4 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 4$$

5 Transformación de vectores aleatorios

Al igual que en caso unidimensional, algunas veces necesitamos obtener la función de probabilidad o densidad de una función de dos o más variables aleatorias.

Supongamos que tenemos un vector bidimensional $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ con función de densidad conjunta $f_X(x_1, x_2)$, y lo transformamos en otro vector \mathbf{Y} de la misma dimensión, mediante una transformación g (cuya inversa existe y es única):

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, x_2) \\ y_2 &= g_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Entonces, la función de densidad de \mathbf{Y} viene dada por:

$$f_Y(y_1, y_2) = f_X(g_1^{-1}(Y_1, y_2), g_2^{-1}(Y_1, y_2))|J|$$

donde $|J|$ es el Jacobiano, que viene dado por el determinante:

$$J = \begin{vmatrix} dx_1/dy_1 & dx_1/dy_2 \\ dx_2/dy_1 & dx_2/dy_2 \end{vmatrix}$$

y lo que usamos es el valor absoluto del determinante.

La demostración de este resultado se puede encontrar en la sección 5.4 del libro *Principios de probabilidad, variables aleatorias y señales aleatorias* Probability, random variables and random signals de Peyton y Peebles (McGraw hill).

Si el vector \mathbf{Y} tiene una dimensión menor que la de \mathbf{X} , completamos \mathbf{Y} con elementos de \mathbf{X} hasta que ambos tengan la misma dimensión.

Si $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ es un vector aleatorio discreto con función de probabilidad conjunta $p_X(x_1, x_2)$, y definimos $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)' = h(X_1, X_2)$. Entonces la función de distribución conjunta de Y_1 e Y_2 es

$$p_Y(y_1, y_2) = p_X(h^{-1}(y_1, y_2))$$

Ejemplo

Dado un vector aleatorio $(X_1, X_2)'$ con función de densidad conjunta:

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2 & 0 < x_1 < 1; 0 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

Calcula la función de densidad conjunta de $Y_1 = X_1 + X_2$.

Para resolver este problema, primero necesitamos definir otro componente de la transformación, por ejemplo: $Y_2 = X_2$. Entonces, necesitamos calcular la función de densidad conjunta de $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$, y entonces, calculamos la densidad marginal de $Y_1 = X_1 + X_2$. Para calcular la función de densidad de \mathbf{Y} seguimos los mismos tres pasos que en el caso unidimensional:

1. Escribir \mathbf{X} como una función de \mathbf{Y} :

$$Y_2 = X_2 \Rightarrow X_2 = Y_2$$

$$Y_1 = X_1 + X_2 \Rightarrow X_1 = Y_1 - X_2 = Y_1 - Y_2$$

2. Sustituir lo obtenido en el paso 1 en la función de densidad conjunta $f_X(x_1, x_2)$:

$$4(y_1 - y_2)y_2$$

3. Calcular el Jacobiano

$$\begin{vmatrix} dx_1/dy_1 & dx_1/dy_2 \\ dx_2/dy_1 & dx_2/dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Entonces, la función de densidad de \mathbf{Y} es:

$$f_Y(y_1, y_2) = 4(y_1 - y_2)y_2.$$

Pero, además, necesitamos calcular la región donde esta función está definida:

$$0 < x_2 < 1 \Rightarrow 0 < y_2 < 1$$

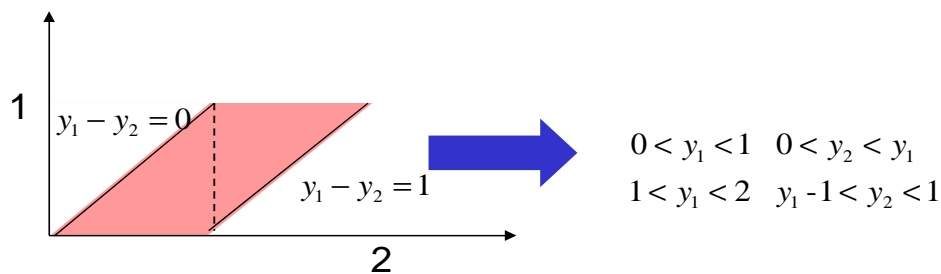
$$0 < x_1 < 1 \Rightarrow 0 < y_1 - y_2 < 1 \Rightarrow y_2 < y_1 < 1 + y_2$$

Por lo tanto, la función de densidad es:

$$f_Y(y_1, y_2) = 4(y_1 - y_2)y_2 \quad 0 < y_2 < 1 \quad y_2 < y_1 < 1 + y_2$$

Ahora, necesitamos calcular la función de densidad marginal de Y_1 , entonces, necesitamos integrar con respecto a y_2 . Para calcular los límites de integración, dibujamos la región donde está definida la función de densidad conjunta:

Entonces,



$$f_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \int_0^{y_1} 4(y_1 - y_2)y_2 dy_2 = \frac{3}{2}y_1^3 & 0 < y_1 < 1 \\ \int_1^{y_1-1} 4(y_1 - y_2)y_2 dy_2 = \frac{8}{2} + \frac{3}{2}y_1^3 & 1 < y_1 < 2 \end{cases}$$

Ejemplo

Supongamos que X_1 y X_2 son variables exponenciales, independientes, con funciones de densidad $f_{X_1}(x_1) = 2e^{-2x_1}$ y $f_{X_2}(x_2) = 2e^{-2x_2}$. Calcular la función de densidad de $Y_1 = X_1/X_2$.

Primero, es necesario calcular la función de densidad conjunta de X_1 y X_2 : dado que son independientes:

$$f(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \times f_{X_2}(x_2) = 4e^{-2(x_1+x_2)} \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0$$

De nuevo, necesitamos definir otra componente de la transformación, podría ser cualquiera, en este caso tomamos $Y_2 = X_2$, y seguimos los tres pasos del ejemplo anterior:

1. Excribir \mathbf{X} como una función de \mathbf{Y} :

$$\begin{aligned} Y_2 &= X_2 \Rightarrow X_2 = Y_2 \\ Y_1 &= X_1/X_2 \Rightarrow X_1 = Y_1 X_2 = Y_1 Y_2 \end{aligned}$$

2. Sustituir lo obtenido en el paso 1 en la función de densidad conjunta $f_X(x_1, x_2)$:

$$4e^{-2y_2(1+y_1)}$$

3. Calcular el Jacobiano

$$\begin{vmatrix} dx_1/dy_1 & dx_1/dy_2 \\ dx_2/dy_1 & dx_2/dy_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & y_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = y_2$$

entonces la función de densidad de \mathbf{Y} es:

$$f_Y(y_1, y_2) = 4y_2 e^{-2y_2(1+y_1)}$$

Necesitamos calcular la región donde esta función está definida:

$$\begin{aligned} x_2 > 0 &\Rightarrow y_2 > 0 \\ x_1 > 0 &\Rightarrow y_1/y_2 > 0 \Rightarrow y_1 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función de densidad es:

$$f_Y(y_1, y_2) = 4y_2 e^{-2y_2(1+y_1)} \quad 0 < y_2 \quad 0 < y_1 <$$

Ahora calculamos la función de densidad marginal de Y_1 :

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{+\infty} 4y_2 e^{-2y_2(1+y_1)} dy_2 = \frac{1}{(1+y_1)^2} \quad y_1 > 0$$

5.1 Convolución

Este es un método para calcular la función de densidad (o probabilidad) de la suma de dos variables aleatorias independientes a partir de la integral (o suma) de funciones de densidad (o probabilidad).

Si X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con funciones de densidad $f_{X_1}(x_1)$ y $f_{X_2}(x_2)$, la función de densidad de $Y = X_1 + X_2$ es:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(y-x)f_{X_2}(x)dx$$

La función de densidad de Y es la **convolución** de las funciones de densidad de X_1 y X_2 . Este concepto se usa de forma frecuente en matemáticas (transformaciones de Fourier). Es un problema que aparece mucho en la práctica ya que X_1 puede representar una señal, X_2 el ruido aleatorio, e Y es la señal más el ruido que llega a un receptor.

5.2 Combinación lineal de variables aleatorias

Un caso particular (y muy útil) es el caso particular en el que la transformación es lineal, es decir:

$$\mathbf{Y}_{m \times 1} = \mathbf{A}_{m \times n} \mathbf{X}_{n \times 1} \quad m < n$$

Entonces, es fácil probar (debido a las propiedades de la esperanza y varianza de variables aleatorias) que:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y}] &= \mathbf{A}E[\mathbf{X}] \\ Var[\mathbf{Y}] &= \mathbf{A}Var[\mathbf{X}]\mathbf{A}' \end{aligned}$$

Ejemplo

Supongamos que tenemos la siguiente transformación:

$$Y = X_1 + X_2 = (1, 1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X_1] + E[X_2] \\ Var[Y] &= (11) \begin{pmatrix} Var[X_1] & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & Var[X_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Var[X_1] + Var[X_2] + 2Cov(X_1, X_2) \end{aligned}$$

Ejercicio

¿Cuál es la varianza de $Y = X_1 - X_2$? ¿Cuál sería si X_1 y X_2 son independientes?

Un caso interesante es cuando las variables implicadas son Normales. Supongamos que tenemos n variables Normales independientes $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Entonces:

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \quad \text{is Normal}$$

and

$$E[Y] = \sum_{i=1}^n a_i \mu_i \quad \text{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2$$

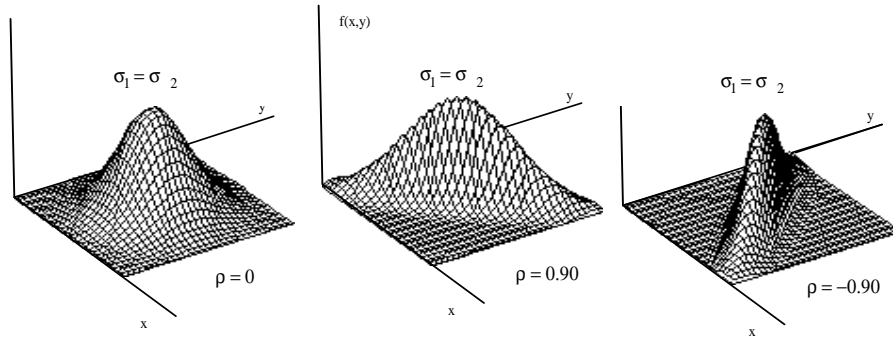
6 Distribución Normal Multivariante

La extensión de una distribución Normal al caso de varias variables aleatorias es el ejemplo más importante de distribución de probabilidad multivariante. Aquí, nos centramos en el caso bidimensional, pero los resultados se pueden extender a cualquier número de variables.

Si un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ sigue una distribución Normal Bivalente (o bidimensional) con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$, y matriz de varianzas covarianzas: $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$. Entonces, la función de densidad conjunta es:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\}$$

En la siguiente figura podemos ver diferentes ejemplos de distribuciones Normales bivariantes.



Estas son algunas de las propiedades más importantes de una distribución Normal bivalente:

- Las distribuciones marginales son: $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ and $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$.
- Si $\rho = 0$ X_1 y X_2 son independientes.
- Las distribuciones condicionadas $X_1|X_2$ y $X_2|X_1$ también son Normales.

7 Ejercicios

Los siguientes ejercicios son fáciles de resolver y tienen el objetivo de ayudarte a comprender los conceptos explicados en este tema. Para poder aprobar debes saber resolver los ejercicios de exámenes que aparecen al final de la lista y que encontrarás en la página web de la asignatura:

- En una urna hay 5 bolas blancas y 2 negras y se sacan tres bolas sin reemplazamiento.
 - Calcular la distribución conjunta del número de bolas blancas y negras de entre las que se sacaron.
 - Calcular la distribución marginal de número de bolas blancas de entre las que se sacaron.
- Calcular la función de densidad conjunta y las marginales correspondientes a la siguiente función de distribución conjunta:

$$F(x, y) = (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta y}), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

- Dada la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x+y)^2 & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

- Calcular, integrando en la región apropiada, $\Pr(X > Y)$, $\Pr(X + Y \leq 1)$ y $\Pr(X \leq 1/2)$.
 - Calcular las dos distribuciones marginales.
- Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$, es decir, la función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/4 & -1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

- $X^2 + Y^2 < 1$
 - $2X - Y > 0$
 - $|X + Y| < 2$
- El tiempo total que un camión permanece en una estación de descarga está definido por la variable aleatoria X , siendo Y la variable aleatoria que representa el tiempo de espera en la cola y Z el tiempo de descarga ($X = Y + Z$). Sabiendo que la distribución conjunta de X e Y es

$$f(x, y) = \begin{cases} (1/4)e^{-x/2} & 0 \leq y \leq x < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (a) Calcular el tiempo medio total que permanece el camión en la estación.
 (b) Calcular el tiempo medio que dura la descarga.
6. El vector aleatorio (X, Y) está definido en el rectángulo $OBCD$.

$$O = (0, 0) \quad B = (1, 0) \quad C = (1, 2) \quad D = (0, 2) .$$

con función de densidad $f(x, y) = ky^2$.

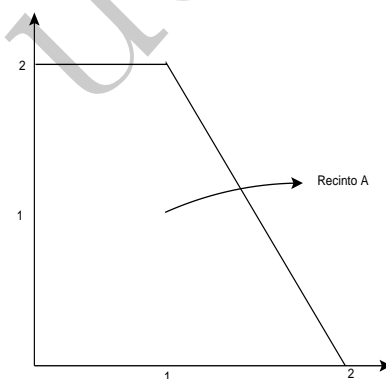
- (a) Determinar el valor de k .
 (b) Calcular las densidades marginales.
 (c) Calcular las densidades condicionadas $f(x|y)$, $f(y|x)$.
 (d) Son X e Y independientes?.
 (e) Calcular $\Pr(Y - 2X < 0)$.
7. Dada la variable aleatoria bidimensional (X, Y) , cuya función de densidad es

$$f(x, y) = 24y(1 - x - y).$$

definida en el triángulo limitado por los ejes y la recta $x + y = 1$, y cero en otro caso. Hallar el valor de $E[Y|X]$.

8. Dada la siguiente función de densidad:

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{para } x \text{ e } y \text{ en el recinto A} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$



- (a) Determinar k para que $f(x, y)$ sea función de densidad.
 (b) Hallar la función marginal de Y .
9. Un equipo de radio tiene dos partes, el receptor y el amplificador. La duración del receptor es una v.a. exponencial de media 500 días, y la duración del amplificador, una v.a. exponencial de media 1000 días. Cuál es la probabilidad de que el fallo del equipo (cuando se produzca) sea debido a un fallo del receptor? (se supone que las variables son independientes).

10. La v.a. bivalente (X, Y) tiene función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1.5x & 0 \leq y \leq 2x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

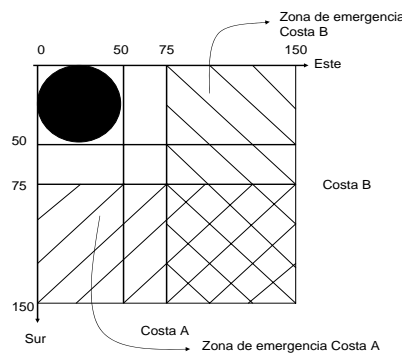
Calcular:

- (a) $Pr(Y > X | Y < 1)$
 - (b) $E[\sqrt{X} | Y = 1.5]$
 - (c) $E[XY]$
11. Una compañía fabrica miras telescópicas cuya desviación del objetivo en mms se mide a través de dos VAs (X, Y) con distribución

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \sim N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \right).$$

que indican las dos coordenadas en el plano (y el objetivo es el punto $(0,0)$). El ejército considera rechazable cualquier mira que no pasa la siguiente prueba: se efectúan tres disparos independientes y si alguno se desvía del objetivo en valor absoluto en más de $1mm$ en cualquiera de las dos coordenadas, se considera que es una mira defectuosa.

- a) Calcula la probabilidad de que el ejército considere defectuosa una mira.
 - b) El proveedor vende al ejército cajas de 20 miras. El ejército considera rechazable cualquier caja con más de dos miras defectuosas. Calcula la probabilidad de que el ejército considere defectuosa una caja.
12. Una mancha de fuel debido a un vertido se encuentra en la situación mostrada en la figura. El avance diario de la mancha en dirección Este viene caracterizado por una Normal con media 20 km y desviación típica 5 km, mientras que el avance diario en dirección Sur viene caracterizado por una Normal con media 26 km y desviación típica 10 km.



- a) ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de tres días la mancha haya alcanzado la costa A?

Si tomamos la v.a. bidimensional normal formada por los avances en ambas direcciones y con coeficiente de correlación ρ ,

- b) Considerando $\rho = 0$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha haya llegado a la zona de emergencia de las dos costas?.
- c) Considerando $\rho = 0.25$, ¿cuál es la probabilidad de que en un día la mancha esté más cerca de la costa A que de la costa B?

13. Sea (X, Y) una v.a. bidimensional con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-y} & \text{si } 0 < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- (a) Calcular el valor de k .
- (b) Son X e Y independientes?
- (c) Son X y $Z = Y - X$ independientes?.
- (d) Calcular la esperanza de las v.a. $X + Y$, $X + Z$, $Y \cdot Z$, $X \cdot Z$.
14. Se elige un punto X al azar en el intervalo $(0, 1)$. Supuesto que $X = x$, Y es una variable aleatoria exponencial de media $\frac{1}{x}$, cuya densidad viene definida por

$$f_{Y|X}(y | x) = \begin{cases} xe^{-xy} & \text{si } y > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Calcular:

- a) La función de densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) .
- b) La densidad marginal de Y y la esperanza de Y sabiendo que $X = x$.
- c) La probabilidad condicionada $P(Y > 1 | X < \frac{1}{2})$.
15. Sean X, Y dos variables aleatorias continuas, uniformemente distribuidas en el triángulo OAB con

$$O = (0, 0) \quad A = (1, 0) \quad B = (0, 1)$$

Sea f la función de densidad conjunta de X e Y definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{si } (x, y) \in \text{OAB} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- a) Calcular k . para que f sea función de densidad.
- b) Calcular las densidades marginales de X e Y .
- c) Calcular las densidades condicionales de $X|Y$ y de $Y|X$.

- d) ¿Son X e Y independientes ?
- e) Calcular $\Pr(X + Y < 0.5)$
16. Sean Z_1 y Z_2 dos v.a. con función de densidad exponencial de media $1/\lambda$. Calcular la función de densidad de $Z_1 + Z_2$
17. Sean $X_1 \sim U(0, 2)$ y $X_2 \sim U(0, 2)$ dos v.a. independientes.
- a) Determina el qué tipo de variable es $Y_1 = X_1 X_2$.
- b) Calcula $P(Y_1 < 2)$ usando a) y el hecho de que $\int \ln x dx = x \ln x - x$.
- c) Qué valor se espera que tenga a en el siguiente código de MATLAB (justifica tu respuesta)
- ```
x1=2*rand(1000,1);
x2=2*rand(1000,1);
y1=x1.*x2;
a=sum(y1<2)/1000
```
18. Sean  $X$  e  $Y$  dos v.a. independientes,  $X$  es discreta e  $Y$  es continua:

$$\Pr(X = 1) = 1/3 \quad \Pr(X = 2) = 2/3$$

$$Y \sim U(-1, 1)$$

Definimos  $R = X.Y$ :

- (a) Calcula la función de distribución y de densidad de  $R$
- (b) Calcula  $E[R]$

**DEBES HACER:** P2 Junio (2010); C3 y P1 Mayo (2011); C1 y P1 Junio (2011); C2 y P2 Mayo (2012); C2 y P2 Junio (2012); C2 c) Mayo (2013); P1 Mayo (2013); P1 Junio (2013); C3 b) y P2 Mayo 2014; C3 b) y P2 Junio 2014