

# VARIABLE COMPLEJA CON APLICACIONES



**William R. Derrick**



# **VARIABLE COMPLEJA CON APLICACIONES**



**William R. Derrick**

*Traductor:*

**Dr. Marco Antonio Rosales M.**

Instituto Tecnológico  
Autónomo de México (ITAM)

*Revisora Técnica:*

**M. en C. Margarita Calleja Quevedo**

Instituto Tecnológico  
Autónomo de México (ITAM)

**Grupo Editorial Iberoamérica**

S.A. de CV



## **VARIABLE COMPLEJA CON APLICACIONES**

Versión en español de la obra *Complex Analysis and Applications* -  
Second Edition por William R. Derrick.

Edición original en inglés publicada por Wadsworth, Inc.,  
Copyright © 1984, en Estados Unidos de América.

ISBN 0-534-02853-5

D. R. © 1987 por Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V. y/o  
Wadsworth Internacional/Iberoamérica, Belmont, California 94002.  
Ninguna parte de este libro puede ser reproducida, archivada o transmitida  
en forma alguna o mediante algún sistema, ya sea electrónico, mecánico,  
de fotoreproducción, de almacenamiento en memoria o cualquier otro,  
sin el previo y expreso permiso por escrito de Grupo Editorial Iberoamérica y/o  
Wadsworth Internacional/Iberoamérica, división de Wadsworth, Inc.

ISBN 968-7270-35-7

Printed in Colombia

Impreso en Colombia

*Editor:* Nicolás Grepe P.

*Productor:* Oswaldo Ortiz R.

*Cubierta:* Miguel Ángel Richaud

### **Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.**

Nebraska 199. Col. Nápoles. C. P. 03810 México, D. F.

Teléfono: 5 23 09 94. Fax: 5 43 11 73

e-mail: [geimex@mpsnet.com.mx](mailto:geimex@mpsnet.com.mx).

<http://vitalsoft.org.org.mx/gei>

Reg. CANIEM 1382

# PRÓLOGO

El análisis de variable compleja es una de las más fascinantes y exitosas áreas de las matemáticas. Sus resultados ayudan a demostrar teoremas importantes y proporcionan los fundamentos para varios conceptos útiles en otras áreas de esta ciencia. Muchas de las técnicas matemáticas más eficaces aplicadas en la ingeniería y en otras disciplinas se basan en la teoría de funciones complejas. Por su extensa aplicabilidad, la combinación de conceptos geométricos y analíticos, y la sencillez de muchos de sus resultados, el análisis complejo proporciona una excelente introducción a las matemáticas modernas. Los recientes desarrollos en la teoría de funciones complejas y en la teoría de varias variables complejas harán factible obtener aplicaciones útiles en diferentes ramas de la ingeniería.

Uno de mis objetivos al escribir este libro ha sido tratar el tema de la integración compleja tan inmediatamente como sea posible. Lo anterior requiere posponer el estudio de las propiedades geométricas de las funciones elementales. Las ventajas de llegar rápidamente al centro del tema son obvias: El desarrollo subsecuente es más rico en aplicaciones y más amplio en su tratamiento de series, singularidades e integrales de línea cerrada o de contorno. Además, el costo de soslayar las propiedades geométricas se reduce enormemente, puesto que ahora pueden considerarse como mapeos o representaciones conformes. Por tanto, se alcanza una mayor coherencia de los temas, y el tiempo que se gana puede emplearse en el estudio de otras áreas.

Otro objetivo ha sido proporcionar una selección más amplia de aplicaciones, y una gama más extensa de técnicas que las que se hallan en los textos tradicionales. He incluido aplicaciones en óptica, flujo de corrientes, chorros y

estelas, así como ejemplos tradicionales del flujo de fluidos y del calor, y de la electrostática. Las técnicas de las integrales sobre contornos proporcionan amplias bases para el cálculo de los polos de Regge y de las transformadas de Laplace inversas. El texto comprende un desarrollo de transformadas integrales, tema que generalmente se estudia en el contexto de la variable real, pero que adquiere un significado mucho mayor cuando se analiza en términos de variable compleja. No se intenta abarcar todos estos temas; más bien, se incluye el material para que los profesores programen o adapten un curso de acuerdo con su conveniencia particular.

## ORGANIZACIÓN Y EXTENSIÓN

Los propósitos de este libro son que sirva de texto para un curso introductorio de un semestre de análisis de variable compleja a nivel básico. Se ha incluido considerablemente más material del que puede exponerse sin dificultad en un semestre; dando a los profesores, por esa razón, la oportunidad de seleccionar los temas que juzguen más importantes.

Los Capítulos del 1 al 5 abarcan la mayor parte del material que se expone en un curso semestral introductorio. Los maestros que deseen minimizar los aspectos teóricos del curso deben omitir las Secciones Opcionales 2.5 y 3.5. Quienes deseen omitir aplicaciones laboriosas deben evitar las Secciones Opcionales 1.10, 4.5, 5.7. y 5.8. Se incluye un breve estudio de las funciones armónicas en la Sección 6.1., que puede estudiarse en cualquier momento, después que se haya tratado el material de la Sección 2.3.

El Capítulo 6 es una introducción a las transformadas integrales desde el punto de vista de la variable compleja. Se espera que los profesores incluyan algunos de estos aspectos en los planes de cursos. Las transformadas integrales son técnicas extremadamente eficaces o poderosas en las ciencias y la ingeniería. Esta introducción debe preparar a los estudiantes para cursos avanzados de matemáticas aplicadas.

El plan para un curso semestral podría incluir:

*Para Estudiantes de Ingeniería*  
Capítulos 1 al 5, incluyendo la  
Sección 1.10, o la 4.5 o bien las  
5.7-5.8, más las Secciones 6.1. y  
6.3 o las 6.6-6.7

*Para Estudiantes de Matemáticas*  
Capítulos 1 al 5, incluyendo  
las Secciones 2.5. y 3.5, más las  
Secciones 6.2 y 6.4-6.5

## NIVEL

El texto ha sido elaborado para el estudiante “promedio” de ingeniería. Se ha puesto especial cuidado en explicar cada concepto tan claramente como es posible: Cada concepto está precedido por un ejemplo o un análisis que lo motivan. Así mismo, cada Sección contiene varios ejemplos totalmente resueltos. Las pruebas con mayor grado de dificultad se identifican con una cruz o daga

( † ), o han sido colocadas en las secciones señaladas como opcionales. El libro puede usarse en diferentes niveles de enseñanza, dependiendo de las secciones y los ejemplos que se elijan.

## EXACTITUD

Todos los ejemplos y las respuestas de este texto se han comprobado cuidadosamente, tanto por el autor como por varios revisores, a fin de prevenir errores. Agradeceré que me hagan saber de cualquier errata que persista, y prometo incorporar todas las sugerencias en la siguiente impresión del libro.

## CARACTERÍSTICAS DIDÁCTICAS

### EJEMPLOS

En cada sección se incluyen numerosos ejemplos resueltos, que van desde las aplicaciones más inmediatas, hasta otras moderadamente complicadas. Los ejemplos se separan del material del texto por medio de un espaciamiento.

### EJERCICIOS

Se ha puesto especial cuidado al elaborar los ejercicios a fin de asegurar la utilización de valiosas experiencias de aprendizaje en cada uno. Los ejercicios con mayor grado de dificultad se han marcado con un asterisco (\*). Cada conjunto contiene una gama completa de ejercicios presentados en orden creciente de dificultad. Muchos de éstos consisten en resultados y teoremas útiles; se recomienda al profesor que seleccione cuidadosamente los que sean de mayor beneficio para sus clases.

Se proporcionan las soluciones de los ejercicios de número impar. Estas no son simplemente las respuestas ni las soluciones completamente desarrolladas, sino sugerencias acerca del camino que puede tomarse para llegar a la respuesta dada. Se invita a los estudiantes a que pongan a prueba sus propias ideas *antes* de utilizar las sugerencias indicadas. La editorial puede proporcionar un Manual del Instructor (en inglés) que contiene las soluciones de los ejercicios pares.

## NOTAS DE CAPÍTULO

Cada capítulo concluye con una breve indicación de otros resultados y fuentes de material colateral y complementario. Los estudiantes interesados pueden examinar estas guías para lograr una comprensión más profunda del contenido.

## TABLA DE SÍMBOLOS Y APÉNDICES

En las páginas subsiguientes se presenta una tabla de los símbolos utilizados en el libro. Los apéndices al final contienen tablas de mapeos conformes, trans-

formadas de Laplace, y un breve repaso de las integrales de línea y el teorema de Green.

## RECONOCIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a las siguientes personas por sus múltiples y útiles sugerencias al revisar diferentes versiones del original de esta obra. Janos Aczel (U. of Waterloo), Eric Bedford (Princeton U.), Douglas Campbell (Brigham Young U.), Michael O'Flynn (San Jose State U.), Donald Hartig (Cal Poly San Luis Obispo), Harry Hochstadt (Polytechnic Institute of New York), William Jones (U. of Colorado), John Kogut (U. of Illinois), Steven Krantz (Pennsylvania State U.), E. Macskasy (U. British Columbia), James Morrow (U. of Washington), David Sánchez (U. of New Mexico), Franklin Schroeck, Jr. (Florida Atlantic U.), Jerry Schuur (Michigan State U.), Brian Seymour (U. British Columbia), R. O. Wells, Jr. (Rice U.), Lawrence Zalcman (U. of Maryland).

William R. Derrick

# CONTENIDO

Prolólogo	ix
Al Estudiante	xiii
Tabla de Símbolos	xiv

## 1 FUNCIONES ANALÍTICAS 1

1.1 Números complejos y su álgebra	1
1.2 Representación polar	9
1.3 Conjuntos en el plano complejo	19
1.4 Funciones continuas de una variable	24
1.5 Condiciones necesarias para la analiticidad	31
1.6 Condiciones suficientes para la analiticidad	35
1.7 Exponencial compleja	40
1.8 Las funciones trigonométricas e hiperbólicas complejas	44
1.9 Las funciones logaritmo complejo y potencia compleja	47
1.10 Aplicaciones en óptica (opcional)	53
Notas	59

<b>2 INTEGRACIÓN COMPLEJA</b>	<b>61</b>
2.1 Integrales de línea	61
2.2 El teorema de Green y sus consecuencias	71
2.3 La fórmula integral de Cauchy	78
2.4 Teorema de Liouville y principio del máximo	86
2.5 El teorema de Cauchy-Goursat (opcional)	90
Notas	99
<b>3 SERIES INFINITAS</b>	<b>101</b>
3.1 Serie de Taylor	101
3.2 Convergencia uniforme de series	108
3.3 Series de Laurent	115
3.4 Singularidades aisladas	121
3.5 Continuación analítica (opcional)	125
Notas	131
<b>4 INTEGRACIÓN EN CONTORNOS</b>	<b>133</b>
4.1 Teorema del residuo	133
4.2 Evaluación de integrales reales definidas	138
4.3 Evaluación de integrales reales impropias	141
4.4 Integrales con polos sobre el eje real	145
4.5 Integración de funciones multivaluadas (opcional)	150
4.6 El principio del argumento	156
Notas	159
<b>5 MAPEOS CONFORMES</b>	<b>161</b>
5.1 Consideraciones geométricas	161
5.2 Transformaciones fraccionales lineales	166
5.3 El principio de simetría	171
5.4 Composiciones de mapeos conformes elementales	175
5.5 Flujo de fluidos	178
5.6 La fórmula de Schwarz-Christoffel	185

5.7 Aplicaciones físicas en flujo de calor y electrostática (opcional)	194
5.8 Estelas en un flujo de fluidos (opcional)	201
Notas	205

**6****PROBLEMAS CON VALORES EN LA  
FRONTERA Y VALORES INICIALES****207**

6.1 Funciones armónicas	207
6.2 El problema de Dirichlet	211
6.3 Aplicaciones	219
6.4 Series de Fourier	228
6.5 Transformadas de Fourier	235
6.6 Transformadas de Laplace	240
6.7 La transformada inversa de Laplace	249
Notas	258

**APÉNDICES**

A.1 Tabla de mapeos conformes	259
A.2 Tabla de transformadas de Laplace	265
A.3 Integrales de línea y el teorema de Green	267
Bibliografía	277
Respuestas a problemas impares	279
Índice	299

# TABLA DE SÍMBOLOS

---

*El número indica la página en que se define el símbolo.*

$\mathcal{C}$	2	$\operatorname{senh} z$	46	PV	146
$i$	5	$\log z$	47	$V$	179
$z$	5	$\operatorname{Log} z$	49	$V_n$	179
$\operatorname{Re} z$	5	$z^a$	50	$V_s$	179
$\operatorname{Im} z$	5	spp	62, 232	$\Delta$	211
$\bar{z}$	7	$\int_{\gamma} f(z) dz$	64	$\Gamma + iQ$	222
$ z $	9	$-\gamma$	78	$U(\phi + 0)$	232
$\operatorname{Arg} z$	10	$ dz $	78	$U(\phi - 0)$	232
$\arg z$	11	$P_n(z)$	85	$U'(\phi + 0)$	232
$\operatorname{Int} S$	21	$\partial R$	90	$U'(\phi - 0)$	232
$\mathfrak{M}$	23	$L_n(z)$	98	$\hat{U}$	236
$\infty$	23	$S_n$	101	$H(\phi - a)$	240
$f(z)$	24	inf	110	$\mathcal{L}_2\{U\}$	240
$e^z$	41	$J_n(z)$	121	$\mathcal{L}\{U\}$	241
$R$	42	$(f, G)$	125	$U * V$	246
$\cos z$	44	$\Gamma(z)$	131	$Z(s)$	247
$\operatorname{sen} z$	44	$a_{-1}$	133	$\operatorname{Si}(\phi)$	249
$\cosh z$	46	$\operatorname{Res}_z f(z)$	133		

---

# AL ESTUDIANTE

*Grupo Editorial Iberoamérica en su esfuerzo permanente de producir cada vez mejores textos, pone en tus manos esta nueva obra, en la que se ha puesto la más alta calidad en los aspectos teórico y didáctico, así como en diseño y presentación, con el objetivo de proporcionarte la mejor herramienta, no sólo para facilitarte el aprendizaje sino también para hacértelo más estimulante.*

*Éste, como cualquiera de nuestros libros, ha sido cuidadosamente seleccionado para que encuentres en él un pilar de tu preparación, y un complemento ideal a la enseñanza del maestro. Lo didáctico de la presentación de sus temas hace que lo consideres el mejor auxiliar, y el que llevas a todas partes.*

*Lo anterior es parte de nuestro propósito de ser partícipes en una mejor preparación de profesionales, contribuyendo así a la urgente necesidad de un mayor desarrollo de nuestros países hispanohablantes.*

*Sabemos que esta obra será fundamental en tu biblioteca, y tal vez la más inmediata y permanente fuente de consulta.*

*Como uno de nuestros intereses principales es hacer mejores libros en equipo con profesores y estudiantes, agradeceremos tus comentarios y sugerencias o cualquier observación que contribuya al enriquecimiento de nuestras publicaciones.*

*Grupo Editorial Iberoamérica  
... presente en tu formación profesional*



# 1 FUNCIONES ANALÍTICAS

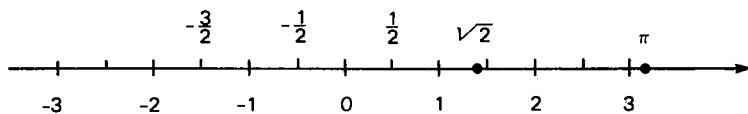
---

Los números complejos fueron propuestos inicialmente en 1545, por el matemático italiano Girolamo Cardano, en un tratado monumental acerca de la solución de las ecuaciones cúbica y cuárticas titulado *Ars Magna*. Para apreciar la dimensión de esta propuesta debe tenerse en cuenta que el concepto de números negativos apenas había tenido aceptación, y que aún había controversia en relación con sus propiedades. Las cantidades “ficticias” de Cardano fueron ignoradas por la mayoría de sus colegas, hasta que el genio matemático Carl Friedrich Gauss les dio el nombre actual y las utilizó para demostrar el Teorema Fundamental del Álgebra, el cual establece que todo polinomio que no sea constante tiene al menos un cero. En este libro, exploraremos las propiedades de los números complejos y de las funciones, con valores complejos, de una variable compleja. Veremos que la teoría de funciones de una variable compleja extiende los conceptos del cálculo al plano complejo. Al hacerlo, la derivación y la integración adquieren nueva profundidad y elegancia, y la naturaleza bidimensional del plano complejo produce muchos resultados útiles en matemáticas aplicadas.

---

## 1.1 NÚMEROS COMPLEJOS Y SU ÁLGEBRA

Los números usados en álgebra elemental y en cálculo se llaman **números reales**. Éstos son todos aquellos que pueden representarse geométricamente por los puntos de una línea recta infinitamente larga (véase Figura 1.1). La línea se



**FIGURA 1.1.** Modelo del sistema de números reales

divide en intervalos por medio de puntos equidistantes que representan a cada uno de los enteros, con los números reales positivos a la derecha del cero y los reales negativos a la izquierda. Todo número real se representa por un solo punto sobre la línea. Estos números satisfacen las cinco reglas algebraicas siguientes, llamadas **axiomas de campo**:

**1. Leyes conmutativas**

$$a + b = b + a \quad \text{y} \quad ab = ba.$$

**2. Leyes asociativas**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad \text{y} \quad (ab)c = a(bc).$$

**3. Leyes distributivas**

$$a(b + c) = ab + ac \quad \text{y} \quad (a + b)c = ac + bc.$$

**4. Identidades.** La *identidad aditiva 0* y la *identidad multiplicativa 1* satisfacen que  $0 \neq 1$  y

$$a + 0 = a = 0 + a \quad \text{y} \quad a \cdot 1 = a = 1 \cdot a.$$

**5. Inversos.** Cada número real  $a$  tiene un *inverso aditivo*  $(-a)$  y, si  $a \neq 0$ , un *inverso multiplicativo*  $a^{-1}$  que satisface

$$a + (-a) = 0 = (-a) + a \quad \text{y} \quad aa^{-1} = 1 = a^{-1}a.$$

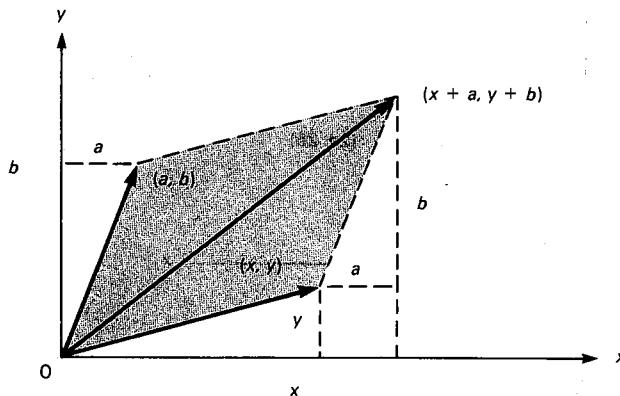
Sin embargo, los números reales tienen una deficiencia básica: no proporcionan todas las soluciones posibles de las ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, la ecuación  $x^2 + 1 = 0$  no puede resolverse usando números reales, ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. No obstante, podemos corregir este defecto si definimos el conjunto de **números complejos**  $\mathbb{C}$ , que se forma de todos los pares ordenados

$$z = (x, y)$$

de números reales  $x$  y  $y$ , con las siguientes operaciones de suma y multiplicación:

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b),$$

$$(x, y) \cdot (a, b) = (xa - yb, xb + ya).$$



**FIGURA 1.2.** Ley del paralelogramo para la suma vectorial

Como los números complejos se representan por pares ordenados de números reales, podemos asignar el punto en el plano Cartesiano con coordenadas  $x$  y  $y$  al número complejo  $z = (x, y)$ . De cualquier forma, es más útil denotar por  $z$  al vector (segmento de recta dirigido) que va desde el origen hasta el punto  $(x, y)$ . Si usamos este modelo para cada número complejo, la suma de dos números complejos

$$(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$$

corresponderá a la ley del paralelogramo para la suma vectorial descrita gráficamente en la Figura 1.2.

También se pueden utilizar los vectores para interpretar la multiplicación

$$(x, y)(a, b) = (xa - yb, xb + ya)$$

de dos números complejos. Note que

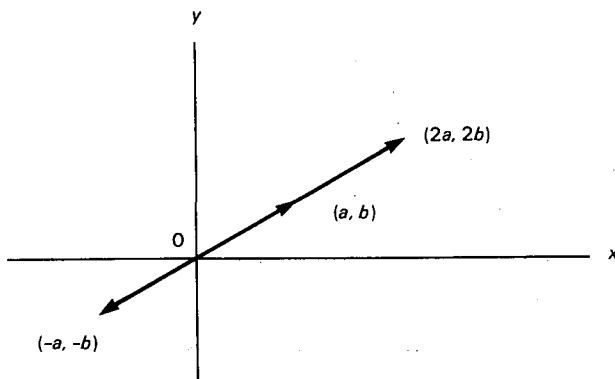
$$(x, 0)(a, b) = (xa, xb),$$

y que el vector  $(a, b)$  se alarga o se acorta por un factor  $x$  si  $x > 0$  y también se refleja con respecto al origen si  $x < 0$  (véase Figura 1.3). Observe, además, que

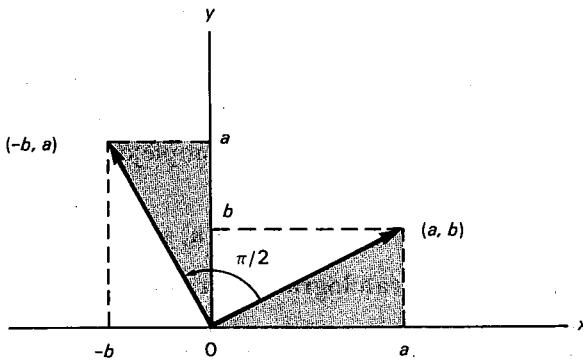
$$(0, 1)(a, b) = (-b, a).$$

Si usamos triángulos semejantes, vemos que al multiplicar cualquier número complejo por  $(0, 1)$ , el vector rota  $\pi/2$  radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj (véase Figura 1.4). Puesto que  $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$ , el producto de  $(x, y)$  y  $(a, b)$  se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} (x, y)(a, b) &= [(x, 0) + (0, 1)(y, 0)](a, b) \\ &= (x, 0)(a, b) + (0, 1)(y, 0)(a, b) \\ &= (xa, xb) + (0, 1)(ya, yb). \end{aligned}$$



**FIGURA 1.3.** Alargamiento y reflejo de un vector



**FIGURA 1.4.** Rotación de un vector:  $[0, 1](a, b) = (-b, a)$

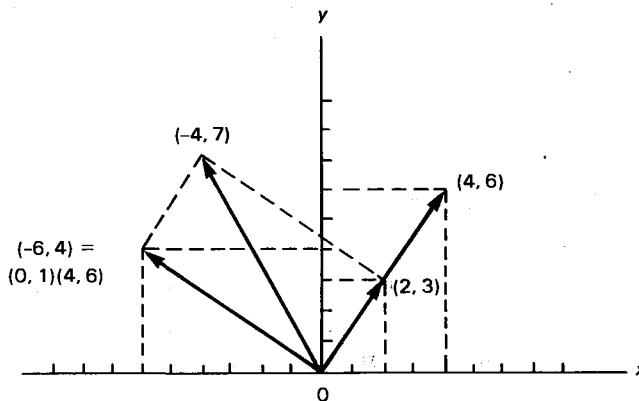
Por lo tanto, la multiplicación compleja involucra la suma de dos alargamientos de  $(a, b)$ , con el segundo de ellos rotado  $\pi/2$  radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por ejemplo, el producto

$$\begin{aligned}(1, 2)(2, 3) &= (2, 3) + (0, 1)(4, 6) \\ &= (2, 3) + (-6, 4) \\ &= (-4, 7)\end{aligned}$$

está ilustrado en la Figura 1.5.

Si identificamos el par ordenado  $(x, 0)$  con el número real  $x$ , notamos que la suma y la multiplicación de tales pares satisfacen las operaciones usuales de suma y multiplicación de números reales:

$$(x, 0) + (a, 0) = (x + a, 0) \quad \text{y} \quad (x, 0)(a, 0) = (xa, 0).$$



**FIGURA 1.5.** Multiplicación de complejos

Luego entonces, el conjunto de números complejos incluye los números reales. Como

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0),$$

si representamos  $(x, 0)$  por  $x$  y denotamos  $(0, 1)$  por el símbolo  $i$ , podemos reescribir  $z = (x, y)$  en la forma

$$z = x + iy.$$

Esta es la notación estándar para los números complejos. El símbolo  $i$  se llama **unidad imaginaria\***, y satisface la propiedad

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$$

o

$$i^2 = -1.$$

El **origen** del sistema coordenado se denota por el número complejo 0. El modelo de plano Cartesiano de los números complejos se llama **plano complejo**.

Cuando nos referimos al número complejo  $z = x + iy$ , llamamos a  $x$  **parte real** de  $z$ , y la denotamos por  $\text{Re } z$ . El número  $y$  llamado **parte imaginaria** de  $z$ , se denota por  $\text{Im } z$ . Si  $x = 0$ , tendremos  $z = iy$ , y entonces se dice que  $z$  es **imaginario puro**.

### EJEMPLO 1

Encuentre las partes real e imaginaria de  $z = 2 + 3i$ .

**SOLUCIÓN:** Tenemos  $\text{Re } z = 2$  e  $\text{Im } z = 3$ .

\* Los libros de ingeniería denotan frecuentemente la unidad imaginaria por el símbolo  $j$ .

Si usamos la notación  $z = x + iy$  para los números complejos, las definiciones de suma y multiplicación nos permiten realizar estas operaciones con números complejos de la misma manera en que lo hacemos con los polinomios, excepto que  $i^2 = -1$ :

$$(1 + 2i) + (2 + 3i) = 3 + 5i,$$

$$(1 + 2i) \cdot (2 + 3i) = 2 + (4i + 3i) + 6i^2 = -4 + 7i.$$

Es fácil verificar que las operaciones de suma y multiplicación de números complejos son commutativas, asociativas y distributivas. Los números 0 y 1 son las identidades aditiva y multiplicativa para los números complejos.

Podemos restar números complejos notando que

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = z_1 + (-1)z_2.$$

Por ejemplo,

$$(7 + 2i) - (3 - 4i) = (7 + 2i) + (-3 + 4i) \\ = 4 + 6i.$$

Por tanto,  $-z$  es el inverso aditivo de  $z$ . Para comprobar que los números complejos forman un campo (véase Ejercicio 33), se debe verificar la existencia de un inverso multiplicativo para cualquier número  $a + bi \neq 0$ . Si se multiplica  $a + bi$  por su *complejo conjugado*  $a - bi$ , tendremos

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + (abi - abi) - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Consecuentemente, el inverso multiplicativo de  $a + bi$  es

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

La división de números complejos se obtiene cuando se multiplica por el inverso multiplicativo del divisor. Por ejemplo, si dividimos  $x + yi$  por  $a + bi \neq 0$ , entonces

$$\frac{x + yi}{a + bi} = (x + yi) \left( \frac{a - bi}{a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{ax + by}{a^2 + b^2} \right) + \left( \frac{ay - bx}{a^2 + b^2} \right) i.$$

De manera alternativa, podemos multiplicar el numerador y el denominador de un cociente por el complejo conjugado del divisor:

$$\frac{x + yi}{a + bi} = \frac{x + yi}{a + bi} \frac{a - bi}{a - bi} = \left( \frac{ax + by}{a^2 + b^2} \right) + \left( \frac{ay - bx}{a^2 + b^2} \right) i.$$

### EJEMPLO 2

Exprese el cociente  $\frac{1 - 2i}{3 - 4i}$  como un número complejo.

**SOLUCIÓN:** Si multiplicamos numerador y denominador por el complejo conjugado,  $3 - (-4i) = 3 + 4i$  del denominador, tendremos

$$\begin{aligned}\frac{1-2i}{3-4i} &= \frac{(1-2i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3-6i+4i-8i^2}{9+12i-12i-16i^2} \\ &= \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i.\end{aligned}$$

El complejo conjugado de un número complejo  $z$  se denota por el símbolo  $\bar{z}$ . Dado que si  $z = x + iy$ , entonces

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z,$$

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i \operatorname{Im} z,$$

y

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

De esta forma tendremos las identidades

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

y el teorema de Pitágoras nos dice que (longitud  $z$ )<sup>2</sup> =  $z\bar{z}$ .

### EJEMPLO 3

Encuentre la longitud del vector  $z = 5 + 7i$ .

**SOLUCIÓN:** Si se multiplica  $z$  por  $\bar{z}$ , tendremos

$$\begin{aligned}(\text{longitud } z)^2 &= z\bar{z} = (5 + 7i)(5 - 7i) = 25 + 49, \\ \text{por lo tanto, longitud } z &= \sqrt{74}.\end{aligned}$$

Si  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$ , entonces

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) \\ &= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

Luego, el complejo conjugado de la suma de números complejos es la suma de sus conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

De manera semejante se muestra (véanse Ejercicios 27-29) que

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

y

$$\overline{(z_1/z_2)} = \bar{z}_1/\bar{z}_2, z_2 \neq 0.$$

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-12, encuentre la suma, diferencia, producto y cociente de cada par de números complejos.

1.  $i, 2$

3.  $1+i, i$

5.  $1+i, 1-i$

7.  $5, 2+i$

9.  $3-2i, 4+i$

11.  $4+5i, 1-i$

2.  $i, -i$

4.  $2-i, 3+i$

6.  $2+i, 3-4i$

8.  $5i, 2+i$

10.  $2+i, 2-i$

12.  $2+i, 2i$

En los Ejercicios 13-20, escriba el número dado en la forma  $x+iy$ .

13.  $(1-i)^2$

15.  $(1-2i)^2$

17.  $\frac{2+i}{3-i} - \frac{4+i}{1+2i}$

19.  $(1+i)(1+2i)(1+3i)$

21. Pruebe que  $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}z$ .

22. Verifique que  $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(iz)$ .

23. Pruebe que si  $z_1 z_2 = 0$ , entonces  $z_1 = 0$  o  $z_2 = 0$ .

24. Muestre que si  $\operatorname{Im}z > 0$ , entonces  $\operatorname{Im}(1/z) < 0$ .

\*25. Suponga que  $z_1 + z_2$  y  $z_1 z_2$  son, ambos, números reales negativos. Pruebe que  $z_1$  y  $z_2$  deben ser reales.

\*26. Pruebe el teorema binomial para números complejos,

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \binom{n}{1} z_1^{n-1} z_2 + \binom{n}{2} z_1^{n-2} z_2^2 + \dots + z_2^n,$$

donde  $n$  es un entero positivo y  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

(Sugerencia: Use inducción.)

En los Ejercicios 27-29, sean  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$ .

27. Muestre que  $z_1 - z_2 = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$ .

28. Compuebe que  $z_1 z_2 = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ .

29. Muestre que  $(z_1/z_2) = \bar{z}_1/\bar{z}_2$ , donde  $z_2 \neq 0$ .

En su libro *Ars Magna*, Girolamo Cardano incluyó un método para encontrar las raíces de la ecuación cúbica general

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0$$

que había sido descubierto por Niccoló Tartaglia.

\*30. Muestre que la sustitución  $w = z + p/3$  reduce la ecuación cúbica general a una ecuación de la forma

$$w^3 + aw + b = 0.$$

\* Un asterisco (\*) indica los ejercicios con mayor dificultad

\*31. Verifique que las raíces de la ecuación del Ejercicio 30 son

$$w = A + B, \quad -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{3}i, \quad -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{3}i,$$

$$\text{donde } A = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + D}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - D}, \quad \text{y} \quad D = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}.$$

\*32. Confirme la necesidad de los números complejos incluso para encontrar las raíces *reales* de

$$w^3 - 19w + 30 = 0$$

por el método de Tartaglia.

33. Pruebe que los números complejos satisfacen los axiomas de campo.

34. Demuestre que la identidad aditiva de  $\mathbb{C}$  es única.

35. Pruebe que la identidad multiplicativa de  $\mathbb{C}$  es única.

## 2 REPRESENTACIÓN POLAR

Hemos visto que los números complejos pueden representarse como vectores en el plano complejo. En esta sección utilizaremos el concepto de segmento de recta dirigido para determinar las propiedades de la longitud y del ángulo de inclinación de un vector en el plano complejo.

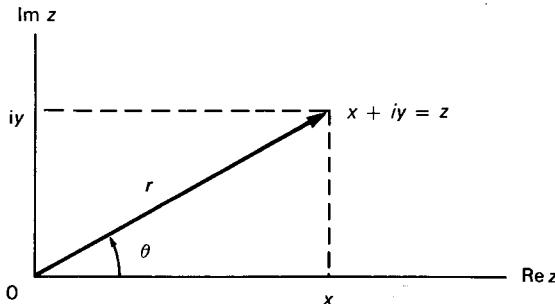
Considere el vector no nulo  $z = x + iy$  mostrado en la Figura 1.6. La longitud del vector  $z$  se puede determinar con el teorema de Pitágoras:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Llamamos a esta longitud **valor absoluto (módulo o magnitud)** del número complejo  $z$ , y la denotamos como

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Note que  $|z| \geq \operatorname{Re} z$ ,  $|z| \geq \operatorname{Im} z$  y  $|\bar{z}| = |z|$ . Además, recuerde que en la Sección 1.1 probamos que  $z\bar{z} = x^2 + y^2$ . Por tanto,  $z\bar{z} = |z|^2$ .



**FIGURA 1.6.** Representación polar

La interpretación de la suma compleja como vectorial es muy útil al probar el siguiente resultado:

### LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

**PRUEBA:** Recuerde que la longitud de un lado de cualquier triángulo es menor o igual a la suma de las longitudes de los otros dos lados. De tal forma que la desigualdad del triángulo se deduce inmediatamente al considerar el triángulo sombreado en la Figura 1.7. La desigualdad del triángulo también puede probarse algebraicamente (véase Ejercicio 38). ■

Regresando a la Figura 1.6, vemos que el ángulo que forma el vector  $z = x + iy$  con el eje real positivo, está dado por la expresión

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

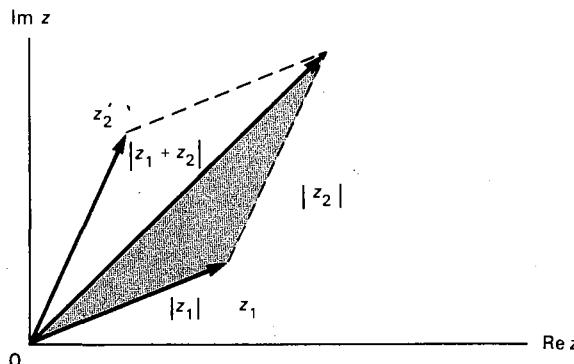
Esta expresión, sin embargo, no será válida en el segundo o tercer cuadrante, ya que los valores de arctangente caen en el intervalo  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Además, el ángulo de inclinación del vector está determinado hasta *un múltiplo de  $2\pi$* , ya que los ángulos

$$\theta + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

proporcionan todos la misma dirección en el plano complejo. El ángulo de inclinación del vector  $z$ , determinado excepto por un múltiplo de  $2\pi$ , se llama **argumento** de  $z$  y se denota por  $\arg z$ . El valor de  $\arg z$  que satisface

$$-\pi \leq \arg z < \pi$$

se llama **valor principal del argumento** y se designa  $\text{Arg } z$ . Cuando se trabaja



**FIGURA 1.7.** Desigualdad del triángulo:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

con el argumento, es conveniente acordar que la notación  $\arg z$  ignore los múltiplos de  $2\pi$ , además de utilizar la expresión

$$\operatorname{Arg} z + 2\pi k, \quad k \text{ como entero fijo,}$$

para indicar un ángulo particular.

Regresando al vector original  $z = x + iy$ ,  $z \neq 0$ , note que

$$x = r \cos \theta = |z| \cos(\arg z)$$

y que

$$y = r \sin \theta = |z| \sin(\arg z).$$

Ahora,

$$z = x + iy = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

puede reescribirse como

$$z = |z| [\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)], \quad z \neq 0.$$

Esta forma se llama **representación polar** del número complejo  $z$ .\*

### EJEMPLO 1

Encuentre la representación polar de  $1 - i$ .

**SOLUCIÓN:** Remítase a la Figura 1.8. El valor absoluto de  $1 - i$  es

$$|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

mientras que el valor principal del argumento de  $1 - i$  es

$$\operatorname{Arg}(1 - i) = -\frac{\pi}{4}.$$

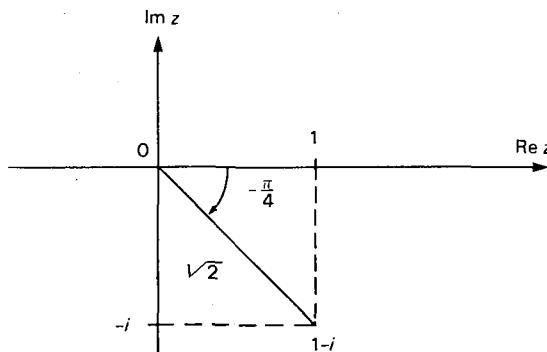


FIGURA 1.8. Representación polar de  $1 - i$

\* Los libros de ingeniería usan a menudo las notaciones  $r \angle \theta$  y  $r \operatorname{cis} \theta$  para la representación polar de  $z$ .

Como los ángulos polares no están determinados de manera única, el argumento es

$$\arg(1-i) = \frac{-\pi}{4} + 2\pi k,$$

donde  $k$  es cualquier entero. Así, la representación polar de  $1 - i$  es

$$1 - i = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) \right].$$

La multiplicación de los números complejos  $z$  y  $w$  tiene interpretaciones geométricas interesantes cuando los escribimos en sus representaciones polares. Sean  $\theta = \arg z$  y  $\phi = \arg w$ . Se tiene

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{y} \quad w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} zw &= |z| |w| (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \phi + i \sin \phi) \\ &= |z| |w| [(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) + i(\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)] \end{aligned}$$

y, por las fórmulas de suma de ángulos de trigonometría,

$$zw = |z| |w| [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)]. \quad (1)$$

Como

$$|\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)| = 1,$$

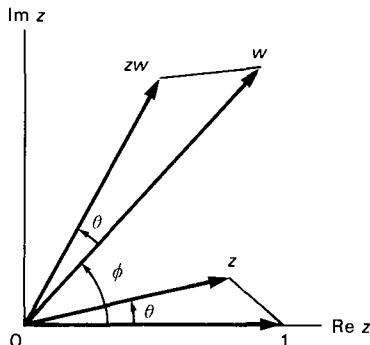
la ecuación (1) conduce a

$$|zw| = |z| |w| \quad (2)$$

y

$$\arg zw = \arg z + \arg w. \quad (3)$$

Por tanto, la longitud del vector  $zw$  es el *producto* de las longitudes de los vectores  $z$  y  $w$ , mientras que el ángulo polar del vector  $zw$  es la *suma* de los ángulos polares de los vectores  $z$  y  $w$ . Como el argumento se determina hasta un múltiplo de  $2\pi$  la ecuación (3) se interpreta diciendo que, si se asignan valores par-



**FIGURA 1.9.** Multiplicación de complejos

ticulares a dos términos cualesquiera, existe un valor del tercer término para el cual se cumple la igualdad. La construcción geométrica del producto  $zw$  se muestra en la Figura 1.9. Para la multiplicación, el ángulo entre  $w$  y  $zw$  debe ser idéntico al ángulo entre 1 y  $z$  en la Figura 1.9. De ello, los triángulos de 0 1  $z$  y 0  $zw$  son semejantes.

La división de números complejos conduce a la ecuación siguiente:

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} [\cos(\theta - \phi) + i \sin(\theta - \phi)].$$

Como  $|\bar{w}| = |w|$ , obtenemos, por las fórmulas de suma de ángulos de la trigonometría,

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{|z|(\cos \theta + i \sin \theta) |\bar{w}|(\cos \phi - i \sin \phi)}{|w|^2}, \quad w \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \quad (4)$$

y

$$\arg(z/w) = \arg z - \arg w, \quad (5)$$

con la ecuación (5) sujeta a una interpretación similar a la de la ecuación (3).

El producto

$$zw = |z| |w| [\cos(\theta + \phi) + i \sin(\theta + \phi)],$$

donde  $\theta = \arg z$  y  $\phi = \arg w$ , conduce a un resultado muy interesante cuando  $z = w$ . Como  $\theta = \phi$ , tenemos

$$z^2 = |z|^2 [\cos(2\theta) + i \sin(2\theta)].$$

Con  $w = z^2$  obtenemos

$$z(z^2) = |z| |z|^2 [\cos(\theta + 2\theta) + i \sin(\theta + 2\theta)]$$

o

$$z^3 = |z|^3 [\cos(3\theta) + i \sin(3\theta)].$$

Como  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ , hemos demostrado que

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$$

y

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos(3\theta) + i \sin(3\theta).$$

Mediante este proceso obtenemos el **teorema de De Moivre**, llamado así en honor del matemático francés Abraham de Moivre (1667-1754),

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad y \quad w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi),$$

donde  $n$  es un entero positivo. El teorema de De Moivre tiene muchas aplicaciones útiles.

**EJEMPLO 2**

Calcule  $(1 - i)^{23}$ .

**SOLUCIÓN:** Si multiplicamos  $1 - i$  por sí mismo 23 veces, obtenemos la respuesta, pero si utilizamos el teorema de De Moivre podemos encontrarla más fácilmente. Vimos en el Ejemplo 1 que

$$1 - i = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi k\right) \right].$$

Usando el valor principal del argumento, tenemos

$$(1 - i) = \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right].$$

Entonces, por el teorema de De Moivre,

$$\begin{aligned} (1 - i)^{23} &= (\sqrt{2})^{23} \left[ \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \right]^{23} \\ &= 2^{23/2} \left[ \cos\left(\frac{-23\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{-23\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

Pero como  $-23\pi/4 = \pi/4 - 6\pi$ , y  $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$ , obtenemos

$$(1 - i)^{23} = 2^{23/2} \frac{(1 + i)}{\sqrt{2}} = 2048(1 + i).$$

El teorema de De Moivre también puede utilizarse para encontrar las raíces de un número complejo. Si  $z$  es una raíz  $n$ -ésima del número complejo  $w$ , entonces

$$z^n = w.$$

Para encontrar  $z$ , establezcamos que

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad y \quad w = |w|(\cos \phi + i \sin \phi),$$

donde  $\theta = \arg z$  y  $\phi = \arg w$ . De tal forma que con el teorema de De Moivre, tenemos

$$|z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = |w|(\cos \phi + i \sin \phi).$$

Así, podemos tomar

$$|z| = |w|^{1/n}$$

y

$$\theta = \frac{1}{n} \arg w = \frac{1}{n} (\operatorname{Arg} w + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Aunque la ecuación (6) proporciona un número infinito de valores para  $\theta$ , sólo se obtienen  $n$  ángulos polares diferentes porque

$$\frac{2\pi(k+n)}{n} = \frac{2\pi k}{n} + 2\pi,$$

pues los ángulos polares se repiten cada  $n$  enteros. Por tanto, limitamos nuestra atención a los  $n$  ángulos polares

$$\theta = \frac{1}{n}(\operatorname{Arg} w + 2\pi k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

### EJEMPLO 3

Encuentre las tres raíces cúbicas de  $w = 1 - i$

**SOLUCIÓN:** Sea  $z$  una raíz cúbica de  $1 - i$ . Entonces

$$z^3 = 1 - i,$$

y, por el teorema de De Moivre,

$$|z|^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{-\pi}{4} + 2\pi k \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{4} + 2\pi k \right) \right].$$

De tal forma que

$$|z| = 2^{1/6} \quad \text{y} \quad \theta = \frac{-\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$$

En consecuencia, las tres raíces cúbicas de  $1 - i$  son

$$z_0 = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{-\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{12} \right) \right]$$

$$= \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{12} \right) \right],$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{12} \right) \right].$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{4} \right) \right].$$

Las secciones cónicas proporcionan ejemplos adicionales de los conceptos vistos hasta ahora. Aunque pueden utilizarse las fórmulas usuales de la geometría analítica (con  $x = \operatorname{Re} z$  y  $y = \operatorname{Im} z$ ), es fácil definir las secciones cónicas en términos de la distancia.

### EJEMPLO 4

Una elipse se define como el conjunto de todos los puntos de  $\mathbb{C}$  tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es constante.

¿Cuál es la ecuación de la elipse que pasa a través de  $i$  y que tiene sus focos en  $\pm 1$ ?

**SOLUCIÓN:** Como  $z - z_0$  es el vector que va de  $z_0$  a  $z$ , la definición de la elipse conduce a

$$|z - 1| + |z + 1| = c,$$

donde  $c$  es una constante real. Como  $z = i$  debe satisfacer la ecuación, se tiene (véase Figura 1.10)

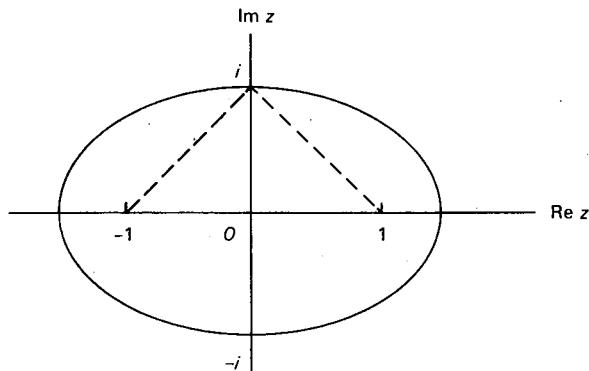


FIGURA 1.10. Elipse  $|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}$

$$c = |i - 1| + |i + 1| = 2\sqrt{2}.$$

Así, la elipse está dada por

$$|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}.$$

### EJEMPLO 5

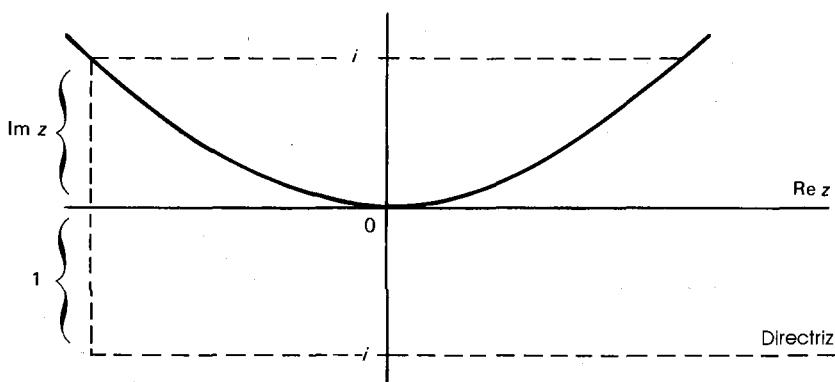
Una parábola se define como el conjunto de todos los puntos de  $\mathbb{C}$  cuya distancia a un punto dado, llamado **foco**, es igual a su distancia a una recta fija llamada **directriz**. Encuentre la ecuación de la parábola que tiene  $i$  como foco y la recta  $\text{Im } z = -1$  como directriz.

**SOLUCIÓN:** Por definición, obtenemos

$$|z - i| = \text{Im } z + 1,$$

ya que el punto de la directriz más cercano a un punto  $z$ , es el que se localiza verticalmente abajo de él (véase Figura 1.11). Si deseamos encontrar la fórmula correspondiente en geometría analítica, elevamos al cuadrado ambos lados, para obtener

$$|z|^2 + 1 + 2 \operatorname{Re} z i = (\text{Im } z + 1)^2$$



**FIGURA 1.11.** Parábola  $|z - i| = \text{Im } z + 1$

o

$$|z|^2 - 2 \text{Im } z = (\text{Im } z)^2 + 2 \text{Im } z.$$

Luego, si  $y = \text{Im } z$  y  $|z|^2 = x^2 + y^2$ , obtenemos la parábola

$$y = x^2/4.$$

### EJEMPLO 6

Una **hipérbola** está constituida de todos los puntos  $z$  de  $\mathbb{C}$  tales que el valor absoluto de la diferencia entre las distancias de  $z$  a dos puntos fijos, llamados **focos**, es una constante. ¿Cuál es la ecuación de la hipérbola con focos  $\pm 1$ , que pasa por el punto  $1 + i$ ?

**SOLUCIÓN:** Por definición, tenemos

$$||z - 1| - |z + 1|| = c,$$

donde  $c$  es una constante. Como el punto  $z = 1 + i$  satisface la ecuación, encontramos que  $c = \sqrt{5} - 1$ .

### EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-9, encuentre el valor absoluto, el argumento y la representación polar de los números complejos dados.

1.  $i$

4.  $-3 + 4i$

7.  $2 + 7i$

2.  $-i$

5.  $4 + 3i$

8.  $2 - i$

3.  $1 + i$

6.  $5 - 12i$

9.  $5 + 2i$

En los Ejercicios 10-15, use el teorema de De Moivre para expresar cada número en la forma  $x + iy$ , donde  $x$  y  $y$  son reales.

10.  $(1+i)^{2^9}$   
 12.  $(-1-i)^{3^6}$   
 14.  $(\sqrt{3}+i)^{1^5}$

11.  $(-1+i)^{1^7}$   
 13.  $(2+2i)^{1^2}$   
 15.  $(-\sqrt{3}+i)^{1^3}$

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones señaladas en los Ejercicios 16-23.

16.  $z^2 = i$   
 18.  $z^2 = 2 - i$   
 20.  $z^3 = 2 + i$   
 22.  $z^4 = i$

17.  $z^2 = 1 + i$   
 19.  $-z^2 = \sqrt{3} + i$   
 21.  $z^3 = 1 + \sqrt{3}i$   
 23.  $z^4 = -1$

24. Encuentre la ecuación de la elipse con focos  $\pm i$  que pasa por el punto  $1 + i$ . En geometría analítica, ¿cuál es la fórmula correspondiente?
25. Exprese la ecuación de la elipse con focos  $1$  e  $i$  que pasa por el origen. ¿Cuál es la fórmula correspondiente en geometría analítica?
26. Encuentre la parábola con foco  $1 + i$ , y con la recta  $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 0$  como directriz.
27. Escriba en forma compleja la ecuación general de una hipérbola con focos  $a$  y  $b$ .
28. Pruebe que  $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \leq \sqrt{2}|z|$ .
- \*29. Demuestre que, si  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$  y  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , entonces  $z_1, z_2, z_3$  son los vértices de un triángulo equilátero.  
*(Sugerencia:* Muestre que  $|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 = |z_3 - z_1|^2$ .)
- \*30. Compruebe que el triángulo con vértices  $z_1, z_2, z_3$  es equilátero si y sólo si

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1.$$

31. Verifique que  $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ .

32. Demuestre que  $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$ .

33. Muestre que  $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2$ .

34. Pruebe que  $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ .

35. Demuestre que

$$\left| \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \right| < 1$$

si  $|z| < 1$  y  $|a| < 1$ .

36. Muestre que la desigualdad del triángulo es una igualdad para los números  $z_1$  y  $z_2$  con valor diferente de cero si y sólo si  $\arg z_1 = \arg z_2$ .
37. Muestre que si  $z_0$  es una raíz del polinomio  $P(z)$  con coeficientes reales, entonces  $\bar{z}_0$  es también una raíz de  $P(z)$ .
38. Desarrolle  $|z_1 + z_2|^2$  para probar la desigualdad del triángulo.  
*(Sugerencia:*  $z_1 \bar{z}_2 \leq |z_1 \bar{z}_2| = |z_1| |z_2|$ .)
39. Las  $n$  raíces de la ecuación  $z^n = 1$  se llaman **raíces  $n$ -ésimas de la unidad**. Muestre que estas raíces están dadas por

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

40. Sea  $z_k$  cualquier raíz  $n$ -ésima de la unidad y pruebe que

$$1 + z_k + z_k^2 + \dots + z_k^{n-1} = 0, \quad \text{si } z_k \neq 1.$$

41. Si  $1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$  son las raíces  $n$ -ésimas de la unidad, muestre que

$$(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1}) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}.$$

\*42. Encuentre todos los tiempos posibles en que las manecillas de un reloj se pudieran intercambiar para obtener una posición factible en un reloj ordinario.

\*43. Minimizando la expresión  $\sum_{k=1}^n (|a_k| - \lambda |z_k|)^2$ , donde  $a_1, \dots, a_n, z_1, \dots, z_n$  son números complejos, para  $\lambda$ , real arbitraria, demuestre que

$$\left( \sum_{k=1}^n |a_k z_k| \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right).$$

\*44. Pruebe la *identidad de Lagrange*:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k z_k \right|^2 = \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right) - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |a_j \bar{z}_k - a_k \bar{z}_j|^2.$$

\*45. *Teorema de Enestrom-Kakeya*. Sea  $P(z)$  un polinomio con coeficientes reales,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

que cumplen  $a_0 > a_1 > \dots > a_n > 0$ . Pruebe que todas las raíces de  $P(z)$  satisfacen  $|z| > 1$ . (*Sugerencia*: Aplique la desigualdad del triángulo a  $(1 - z)$

$$P(z) = a_0 - [(a_0 - a_1)z + (a_1 - a_2)z^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)z^n + a_n z^{n+1}].$$

### 3 CONJUNTOS EN EL PLANO COMPLEJO

Si  $z_0$  es un número complejo, entonces, una  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$  es el conjunto de todos los puntos  $z$ , cuya distancia a  $z_0$  es menor que  $\epsilon$ , esto es, todos los  $z$  que satisfacen  $|z - z_0| < \epsilon$  (véase Figura 1.12). Gráficamente, este es el interior de un disco centrado en  $z_0$  de radio  $\epsilon$ .

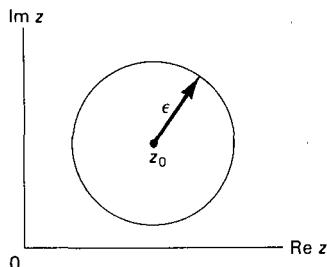
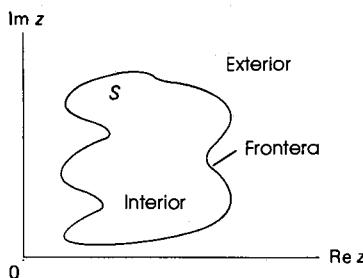


FIGURA 1.12. Una  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$ .

Sea  $S$  un conjunto de puntos del plano complejo  $\mathbb{C}$ . Se dice que  $z_0$  es un **punto interior** de  $S$  si alguna  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$  está completamente contenida en  $S$ ; el conjunto de todos los puntos interiores de  $S$  se llama **interior** de  $S$  y se denota por  $\text{Int } S$ . El **complemento** de  $S$  es el conjunto  $\mathbb{C} - S$  de todos los puntos que no están en  $S$ . El conjunto  $\text{Int } (\mathbb{C} - S)$  se denomina **exterior** de  $S$ . Un punto  $z_0$  es un **punto frontera** de  $S$  si toda  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$  contiene puntos que están en  $S$  y puntos que no lo están. Note que los puntos frontera de  $S$  no están en el interior ni en el exterior de  $S$ . El conjunto de todos los puntos frontera de  $S$  se llama **frontera** de  $S$  (véase Figura 1.13).

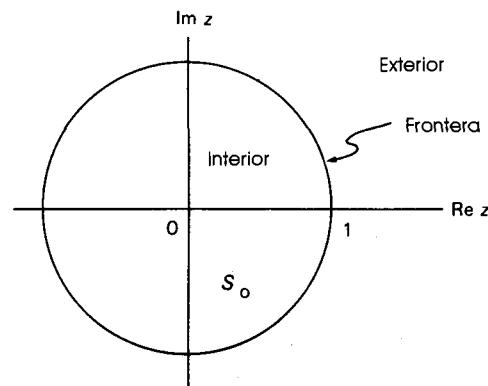


**FIGURA 1.13.** Interior, exterior y frontera de un conjunto

Un punto  $z_0$  es llamado un **punto de acumulación** de un conjunto  $S$ , si cada vecindad de  $z_0$  contiene al menos un punto de  $S$  distinto de  $z_0$ .

### EJEMPLO

Sea  $S_0$  el conjunto de todos los puntos  $z$  tales que  $|z| < 1$ . Encuentre el interior, la frontera y el exterior del conjunto  $S_0$ .



**FIGURA 1.14.** Interior, frontera y exterior del conjunto  $|z| < 1$

**SOLUCIÓN:** Sea  $z_0$  un punto cualquiera de  $S_0$ . Note que el disco  $|z - z_0| < \epsilon$  está situado completamente dentro de  $S_0$  siempre que  $\epsilon < 1 - |z_0|$ . Así, todo punto de  $S_0$  es un punto interior. Igualmente, todo punto  $z_0$  que satisfaga  $|z_0| > 1$  será exterior a  $S_0$ . Si  $|z_0| = 1$ , entonces toda  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$  contendrá puntos que están en  $S_0$  y puntos que no lo están. Por tanto, la frontera de  $S_0$  consiste en todos los puntos sobre el círculo  $|z| = 1$ : el interior es el conjunto  $|z| < 1$ , y el exterior es el conjunto de todos los puntos que satisfacen  $|z| > 1$  (véase Figura 1.14).

Un conjunto es **abierto** si todos sus puntos son interiores; esto es,  $S = \text{Int } S$  cuando  $S$  es abierto. Así, el conjunto  $S_0$  del ejemplo anterior es abierto. Al complemento de un conjunto abierto se le llama **cerrado**. Por ejemplo, el conjunto  $T$  de todos los puntos  $z$ , tales que  $|z| \geq 1$  es cerrado. De igual manera, el conjunto  $|z| \leq 1$  es cerrado.

Se dice que un conjunto  $S$  es **acotado** en caso de que exista un número real positivo  $R$  tal que todo  $z$  en  $S$  satisfaga  $|z| < R$ . Si esta condición no se cumple, decimos que  $S$  es **no acotado**. Por ejemplo, el conjunto  $S_0$  en el ejemplo anterior es acotado, pero  $T = \{z : |z| \geq 1\}$  es no acotado.

Un conjunto  $S$  es **conexo** si no puede ser representado como la unión de dos conjuntos  $A$  y  $B$  ajenos y no vacíos tales que ninguno de ellos contenga un punto frontera del otro. Intuitivamente, lo que se señala es que  $S$  está integrado por una sola pieza. Por ejemplo,  $S_0$  es conexo, pero el conjunto de todos los  $z$ , para los cuales  $|z - 2| < 1$  o  $|z + 2| < 1$  es no conexo, puesto que podemos formar el conjunto  $A$  de todos los  $z$  tales que  $|z - 2| < 1$ , y el conjunto  $B$  de todos los  $z$  para los cuales  $|z + 2| < 1$  (véase Figura 1.15). Entonces  $A$  y  $B$  son conjuntos abiertos, ajenos, y ninguno de ellos puede contener un punto frontera del otro (*¿por qué?*).

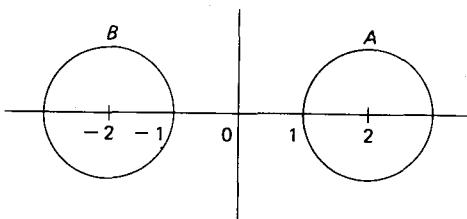


FIGURA 1.15.  $A \cup B$  es no conexo

Una **región\*** es un conjunto conexo abierto. Intuitivamente, es claro que cualesquier dos puntos de una región pueden unirse por medio de un polígono contenido en esa región, pero este hecho requiere verificación. La prueba es

\*Muchos libros llaman **dominio** a un conjunto conexo abierto. Evitaremos tal uso para evitar una posible confusión cuando se describa el dominio de definición de una función compleja.

ligeramente complicada, pero debe estudiarse porque la técnica empleada será usada posteriormente.

### TEOREMA

Cualesquiera dos puntos de una región pueden unirse por medio de un polígono contenido en la región.

**PRUEBA:**<sup>†</sup> Llamemos  $S$  a la región, y supongamos que  $z_0$  está dentro de  $S$ . Denotemos por  $S_1$  todos aquellos puntos de  $S$  que pueden unirse a  $z_0$  por medio de un polígono y denotemos por  $S_2$  aquellos puntos que no pueden unirse. Si  $z_1$  está en  $S_1$  y por tanto en  $S$ , es un punto interior de  $S$ . Así, existe una  $\epsilon$ -vecindad de  $z_1$  contenida en  $S$ :  $|z - z_1| < \epsilon$ . Todos estos puntos están en  $S_1$ , ya que cada uno puede unirse a  $z_1$  por medio de una recta que pertenece a  $S$ , y por ende puede unirse a  $z_0$  por medio de un polígono contenido en  $S$ . Entonces, todo punto de  $S_1$  es punto interior de  $S_1$ , así que  $S_1$  es abierto. Si  $z_2$  está en  $S_2$ , sea  $|z - z_2| < \epsilon$  una vecindad contenida en  $S$ . Ningún punto de esta vecindad puede estar en  $S_1$ , porque si así fuera  $z_2$  estaría en  $S_1$ . Por lo cual todo punto de  $S_2$  es punto interior de  $S_2$ , entonces  $S_2$  es abierto. Ningún conjunto puede contener un punto frontera del otro, ya que ambos son abiertos y son ajenos. Como  $S$  es conexo, uno de estos conjuntos debe ser vacío. Pero  $z_0$  está en  $S_1$ , así que  $S_2$  es vacío. Cualesquiera dos puntos pueden unirse a  $z_0$  por medio de una trayectoria poligonal contenida en  $S$  y, por tanto, pueden unirse entre sí por una trayectoria poligonal que pasa por  $z_0$ . Ahora, la prueba ha quedado completa. ■

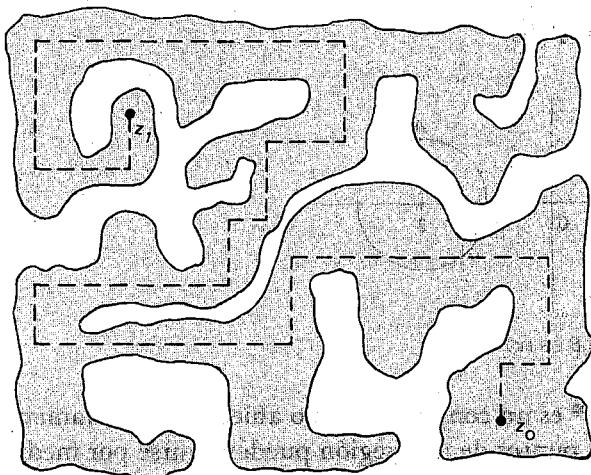


FIGURA 1.16. Polígono que une dos puntos  $z_0, z_1$

<sup>†</sup> Una daga (†) indica pruebas más difíciles u opcionales.

Más aún, es posible pedir que todas las líneas del polígono sean paralelas a los ejes coordenados. La prueba con este requisito adicional será idéntica, ya que siempre podemos unir el centro de un disco abierto a uno de sus puntos por, a lo más, dos segmentos de recta paralelos a los ejes. (Véase Figura 1.16.)

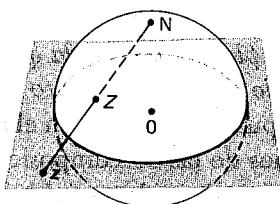
Una región es **simplemente conexa** si su complemento es conexo. Esto significa que esta región no tiene "hoyos". Por ejemplo, el conjunto  $S_0$  del ejemplo anterior es simplemente conexo, pero el conjunto de todos los  $z$  que satisfacen  $0 < |z| < 1$  no lo es, ya que el origen constituye un "hoyo" de este conjunto.

En muchas ocasiones es conveniente extender el sistema  $\mathbb{C}$  de los números complejos con la inclusión de un punto al infinito denotado con el símbolo  $\infty$ . Este nuevo conjunto se llama **plano complejo extendido**  $\mathcal{M}$  y el punto  $\infty$  satisface las siguientes reglas algebraicas:

$$a + \infty = \infty + a = \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0, \quad a \neq \infty,$$

$$b \cdot \infty = \infty \cdot b = \infty, \quad \frac{b}{0} = \infty, \quad b \neq 0.$$

Como modelo geométrico para  $\mathcal{M}$  usamos la esfera unitaria en el espacio tridimensional  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ . Asociamos cada punto  $z$  del plano al punto  $z$  en la esfera, donde el rayo que se origina en el polo norte  $N$  pasa a través de  $z$  e intersecta la esfera. Así,  $N$  corresponde a  $\infty$  (véase Figura 1.17) y las  $\epsilon$ -vecindades de  $N$  sobre la esfera unitaria corresponden a vecindades del punto al infinito. Este modelo se llama **esfera de Riemann**, y la correspondencia entre los puntos se denomina **proyección estereográfica**. Todas las líneas rectas en  $\mathbb{C}$  corresponden a círculos que pasan a través de  $\infty$  en  $\mathcal{M}$ \*. Probaremos esta afirmación en el Capítulo 5.



**FIGURA 1.17.** La esfera de Riemann

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-10, clasifique los conjuntos de acuerdo a los términos *abierto*, *cerrado*, *acotado*, *conexo* y *simplemente conexo*.

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $ z + 3  < 2$               | 2. $ \operatorname{Re} z  < 1$ |
| 3. $ \operatorname{Im} z  > 1$ | 4. $0 <  z - 1  \leq 1$        |

\* Otras notaciones comunes para  $\mathcal{M}$  son  $S$ ,  $\Sigma$ ,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

5.  $|z| \leq \operatorname{Re} z + 2$
6.  $|z - 1| - |z + 1| > 2$
7.  $|z + 1| + |z + i| \geq 2$
8.  $|z - 1| < \operatorname{Im} z$
9.  $2\sqrt{2} < |z - 1| + |z + 1| < 3$
10.  $||z - i| - |z + i|| < 1$
11. ¿Cuáles son las fronteras de los conjuntos señalados en los Ejercicios 1-10? En los Ejercicios 12-15, pruebe las propiedades indicadas de los conjuntos abiertos y cerrados.
12. La intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierta.
13. La unión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrada.
14. La intersección de cualquier colección de conjuntos cerrados es cerrada.
15. La unión de cualquier colección de conjuntos abiertos es abierta.
16. Pruebe que, si cualesquiera dos puntos de un conjunto abierto pueden unirse mediante un polígono contenido en el conjunto, entonces éste es una región.
17. La **cerradura** de un conjunto  $S$  es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a  $S$ . Pruebe que la cerradura de un conjunto conexo es conexa.
18. Pruebe que  $S$  es cerrado si y sólo si contiene todos sus puntos de acumulación.
19. ¿Cuál es el punto de acumulación del conjunto que consiste en todos los puntos  $z = 1/n$ , siendo  $n$  un entero positivo? (Este ejercicio muestra que un punto de acumulación no necesariamente pertenece al conjunto.)
20. Sea  $S$  el conjunto de todos los  $z$  que satisfacen  $|z| \geq 1$  o  $z = 0$  y muestre que  $z = 0$  no es un punto de acumulación de  $S$ .
21. ¿Cuál es el punto de acumulación del conjunto de todos los puntos  $z = -in$ , siendo  $n$  un entero positivo, en el plano extendido  $\mathfrak{M}$ ? ¿Este conjunto tiene un punto de acumulación en  $\mathbb{C}$ ?
22. Muestre que cualquier punto de una región es un punto de acumulación de dicha región.

## 1.4 FUNCIONES CONTINUAS DE UNA VARIABLE

Una función compleja de una variable compleja es una regla que asigna un número complejo  $w$  a cada número complejo  $z$  de un conjunto  $S$ . Si escribimos  $w = f(z)$ ,  $w$  es el valor de la función en el punto  $z$  que está en el dominio de definición  $S$ . Al escribir  $w = f(z)$  en términos de las descomposiciones en partes real e imaginaria  $z = x + iy$  y  $w = u + iv$  de cada variable compleja,

$$w = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

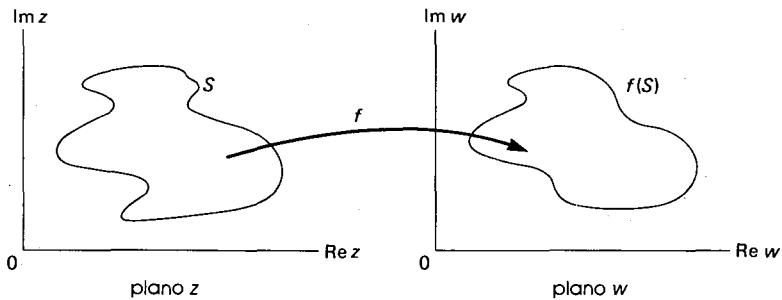
notamos que una función compleja de una variable compleja consiste en un *par* de funciones reales de dos variables reales.

### EJEMPLO 1

Exprese  $w = z^2$  como un par de funciones reales de dos variables reales.

**SOLUCIÓN:** Con  $z = x + iy$  obtenemos

Las funciones reales de una variable real  $y = f(x)$  pueden describirse geométricamente por medio de una gráfica en el plano  $xy$ . No es posible una representación tan cómoda para  $w = f(z)$ , ya que ésta requeriría cuatro dimensiones, dos para cada variable compleja. En lugar de esto, la información acerca de la función se expresa dibujando planos complejos separados para las variables  $z$  y  $w$ , e indicando la correspondencia existente entre puntos, o conjuntos de puntos, en los dos planos (véase Figura 1.18). Se dice que la función  $f$  es un **mapeo** del conjunto  $S$  contenido en el plano  $z$  en el plano  $w$ . Una función  $f$  que mapea un conjunto  $S$  en un conjunto  $S'$ ,  $f:S \rightarrow S'$ , se llama **uno a uno** si  $f(z_1) = f(z_2)$  sólo para  $z_1 = z_2$ ; se le llama **sobre** si  $S' = f(S)$ , donde  $f(S)$  es el conjunto de todos los valores tomados por  $f$  en el conjunto  $S$ .\* Llamamos a  $f(S)$  el conjunto **imagen** de  $S$  bajo el mapeo  $f$ .



**FIGURA 1.18.** Un mapeo  $w = f(z)$

## EJEMPLO 2

Analice la función  $w = 3z$ .

**SOLUCIÓN:** Con  $z = x + iy$ , obtenemos

$$w = u + iv = 3x + i(3y).$$

Así,  $u = 3x$ ,  $v = 3y$ , y todo vector no nulo del plano  $z$  se alarga en un vector que tiene el mismo argumento, pero tres veces su longitud, en el plano  $w$ . Como cualquier punto  $a + ib$  del plano  $w$  es la imagen del punto  $(a/3) + i(b/3)$  en el plano  $z$ , la función  $w = 3z$  es sobre. Además, la función es también uno a uno, ya que  $3z_1 = 3z_2$  sólo cuando  $z_1 = z_2$ .

\* A las funciones uno a uno se les llama frecuentemente **inyecciones** y a las funciones sobre se les denomina **suryecciones**. Una función que es tanto inyección como suryección se llama **biyección**.

**EJEMPLO 3**

Describa el conjunto imagen de la función  $w = z^2$  definida en el disco  $|z| < 2$ , y establezca si este mapeo es uno a uno.

**SOLUCIÓN:** Si escribimos cada punto del disco en su representación polar

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

donde  $0 \leq r = |z| < 2$  y  $0 \leq \theta < 2\pi$ , obtenemos

$$w = z^2 = r^2 (\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta).$$

Por tanto, cada argumento se duplica, indicando que el disco  $|z| < 2$  se mapea sobre  $|w| < 4$  y cada punto de  $0 < |w| < 4$  es imagen de dos puntos de  $0 < |z| < 2$ . Por ejemplo,  $z = \pm i$  ambos se mapean en  $w = -1$ . Por tanto, el mapeo no es uno a uno. (Véase Figura 1.19.)

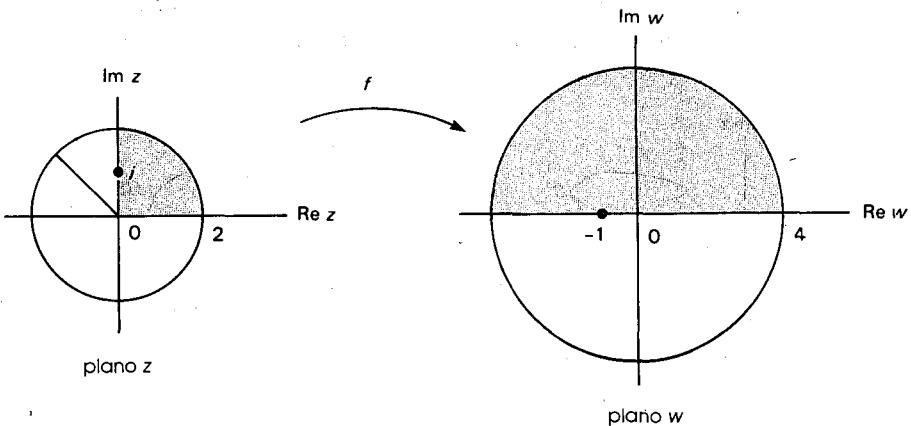


FIGURA 1.19. El mapeo  $w = z^2$

**EJEMPLO 4**

Determine si la función

$$w = \frac{z - 1}{z - 2}$$

es uno a uno, y establezca dónde puede definirse la función.

ción no está definida en  $z = 2$ , ya que el denominador se anula. No obstante, si permitimos que  $w$  tome todos los valores en el plano extendido  $\mathbb{M}$ , entonces la función se puede definir en  $\mathbb{M}$ , con  $z = 2$  mapeado en  $w = \infty$ . La imagen del punto en  $\infty$  se obtiene al evaluar

$$w = \frac{z-1}{z-2} = \frac{1 - \frac{1}{z}}{1 - \frac{2}{z}}$$

cuando  $z$  tiende hacia  $\infty$ . Así,  $z = \infty$  se mapea en  $w = 1$  (véase Ejercicio 26).

Suponga que  $f$  está definida en una región  $G$ , y  $a$  es un punto de  $G$ . Entonces, el límite y la continuidad se definen de la misma manera que en el caso de variable real.

## DEFINICIÓN

Se dice que la función  $f(z)$  tiene límite  $A$  cuando  $z$  tiende hacia  $a$ ,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A,$$

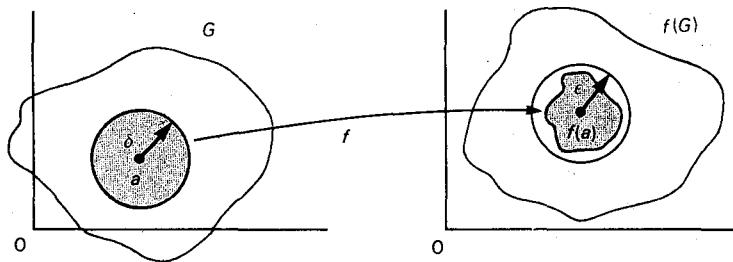
si para todo  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$|f(z) - A| < \epsilon$$

siempre que  $0 < |z - a| < \delta$ . Además, la función  $f(z)$  es continua en  $a$  si y sólo si

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$$

(véase Figura 1.20). Una función continua es aquella que es continua en todos los puntos donde está definida.



**FIGURA 1.20.** Continuidad de  $f$  en  $a$

Geométricamente, la definición de límite establece que *cualquier*  $\epsilon$ -vecindad de  $A$  contiene todos los valores que  $f$  toma en alguna  $\delta$ -vecindad de  $a$ , excepto posiblemente el valor  $f(a)$ . El siguiente ejemplo ilustrará el procedimiento usual para determinar  $\delta$  con un  $\epsilon > 0$  dado.

### EJEMPLO 5

Pruebe que  $\lim_{z \rightarrow 3} \frac{z-1}{z-2} = 2$ .

**SOLUCIÓN:** Con la expresión  $|f(z) - A|$ , simplificada, obtenemos

$$\left| \frac{z-1}{z-2} - 2 \right| = \left| \frac{3-z}{z-2} \right| < \frac{\delta}{|z-2|},$$

pues suponemos que  $0 < |z-3| < \delta$  donde  $\delta$  debe todavía expresarse en términos de  $\epsilon$ . Si  $\delta < \frac{1}{2}$ , mediante la desigualdad del triángulo, tenemos

$$|z-2| = |1-(3-z)| \geqslant 1 - |3-z| > 1 - \delta > \frac{1}{2}$$

de tal forma que

$$\left| \frac{z-1}{z-2} - 2 \right| < 2\delta.$$

Así, dado cualquier número pequeño  $\epsilon > 0$ , si elegimos  $\delta < \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\epsilon)$ , obtenemos

$$\left| \frac{z-1}{z-2} - 2 \right| < \epsilon.$$

Al igual que la definición de límite de una función compleja de una variable compleja es idéntica a la de una función real de una variable real, y puesto que los valores absolutos se comportan como en el caso real, se aplican exactamente las mismas reglas de los límites. La verificación de las propiedades siguientes son análogos exactos de las pruebas usuales del cálculo elemental.

### REGLAS DE LÍMITES

Sean  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A$  y  $\lim_{z \rightarrow a} g(z) = B$ .

$$\leq |f(z) - A| + |g(z) - B| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

y

$$\begin{aligned} |[f(z) - g(z)] - (A - B)| &= |[f(z) - A] + [B - g(z)]| \\ &\leq |f(z) - A| + |B - g(z)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned}$$

Como  $\epsilon > 0$  es arbitrario, se muestra que  $f(z) \pm g(z)$  puede estar arbitrariamente cercano a  $A \pm B$  eligiendo a  $z$  suficientemente cercano a  $a$ . Por tanto, la regla (i) se cumple. Además

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - AB| &= |f(z)g(z) - f(z)B + f(z)B - AB| \\ &= |f(z)[g(z) - B] + B[f(z) - A]| \\ &\leq |f(z)| |g(z) - B| + |B| |f(z) - A| \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{B} \right| &= \left| \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{f(z)}{B} + \frac{f(z)}{B} - \frac{A}{B} \right| \\ &= \left| \frac{f(z)[B - g(z)]}{Bg(z)} + \frac{f(z) - A}{B} \right| \\ &\leq \frac{|f(z)|}{|B| |g(z)|} |B - g(z)| + \frac{|f(z) - A|}{|B|}. \end{aligned}$$

si  $0 < \epsilon < \frac{1}{2} |B|$ , tenemos

$$|B| = |B - g(z) + g(z)| \leq \epsilon + |g(z)|,$$

de tal forma que

$$|g(z)| \geq |B| - \epsilon > \frac{1}{2} |B|$$

$$|f(z)| = |f(z) - A + A| \leq |A| + \epsilon.$$

Por tanto,

$$|f(z)g(z) - AB| \leq \epsilon (|A| + |B| + \epsilon)$$

y

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - \frac{A}{B} \right| < \frac{\epsilon}{|B|} \left( \frac{|A| + \epsilon}{\frac{1}{2}|B|} + 1 \right),$$

así que podemos hacer  $f(z)g(z)$  y  $f(z)$  arbitrariamente cercanos a  $AB$  y  $A/B$ , respectivamente, con  $z$  suficientemente cercano a  $a$ . Esto comprueba las reglas (ii) y (iii). ■

Las reglas de los límites pueden usarse para probar que toda función polinomial en  $z$

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

es continua en  $\mathbb{C}$ . Note que la función identidad

$$f(z) = z$$

es claramente continua en cualquier punto si  $\delta = \epsilon$ . Al aplicar la segunda regla de los límites repetidamente, vemos que  $f(z) = z^n$  es continua para todo entero positivo  $n$ . Toda función constante  $f(z) = c$  es trivialmente continua, ya que todas las  $\epsilon$ -vecindades de cualquier punto se mapean dentro de cualquier  $\delta$ -vecindad de  $c$ . Nuevamente, aplicando la segunda regla de los límites, vemos que  $f(z) = a_n z^n$  es continua. Finalmente, cuando usamos la primera regla de los límites repetidamente, vemos que todos los polinomios son continuos. Ciertamente, con la tercera regla de límites encontramos que todos los cocientes de polinomios

$$\frac{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0}$$

son continuos en aquellos puntos en que el denominador no se anula. Mediante las reglas de los límites, se muestra que la suma  $f(z) + g(z)$  y el producto  $f(z)g(z)$  de dos funciones continuas son continuas, y que el cociente  $f(z)/g(z)$  se define y es continuo en todos los puntos donde  $g(z)$  no se anula.

### EJEMPLO 6

Determine si la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 1}{z - 1}, & z \neq 1 \\ 3, & z = 1 \end{cases}$$

es continua.

**SOLUCIÓN:** Claramente,  $f$  es continua en el conjunto  $z \neq 1$ , ya que el denominador es diferente de cero. Así, el único punto donde todavía necesitamos verificar la continuidad es  $z = 1$ . Sin embargo,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^2 - 1}{z - 1} = 2$$

porque

$$\frac{z^2 - 1}{z - 1} = z + 1,$$

$$9. \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^3 - 1}{z - 1} = 3$$

$$10. \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 3z + 2}{z - 2} = 1$$

Pruebe que las funciones en los Ejercicios 11-14 son continuas en  $\mathbb{C}$ :

$$11. w = \operatorname{Re} z$$

$$12. w = \operatorname{Im} z$$

$$13. w = \bar{z}$$

$$14. w = |z|$$

Suponga que  $f(z)$  es una función continua en un dominio  $G$ . Pruebe que las funciones de los Ejercicios 15-18 son continuas en  $G$ .

$$15. \operatorname{Re} f(z)$$

$$16. \operatorname{Im} f(z)$$

$$17. |f(z)|$$

$$18. f(\bar{z})$$

19. ¿En qué puntos la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3 - 1}{z^2 - 1}, & z \neq \pm 1 \\ \frac{3}{2}, & z = \pm 1 \end{cases}$$

es continua?

Demuestre que las funciones en los Ejercicios 20-23 son continuas para  $z \neq 0$ . ¿Puede definirse la función como para hacerla continua en  $z = 0$ ?

$$20. f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|^2}$$

$$21. f(z) = \frac{|z|^2}{z}$$

$$22. f(z) = \frac{(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)}{|z|^2}$$

$$23. f(z) = \frac{(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{|z|^2}$$

24. Verifique que toda función de la forma

$$w = \frac{z - a}{z - b}, \quad a \neq b$$

es un mapeo uno a uno del plano extendido  $\mathfrak{M}$  sobre sí mismo.

25. Compruebe que toda función de la forma

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad \neq bc$$

es un mapeo uno a uno de  $\mathfrak{M}$  sobre sí mismo.

26. La función  $f(z)$  tiene límite  $A$  cuando  $z$  tiende hacia  $\infty$ ,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A,$$

si para todo  $\epsilon > 0$  existe un número  $\delta > 0$  tal que

$$|f(z) - A| < \epsilon \quad \text{siempre que } |z| > \delta.$$

Use esta definición para probar que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z - 1}{z - 2} = 1.$$

27. Suponga que los coeficientes del polinomio

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

satisfacen  $|a_0| \geq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ . Pruebe que  $P(z)$  no tiene raíces en el disco unitario  $|z| < 1$ . (Sugerencia: Note que

$$|P(z)| \geq |a_0| - [|a_1| |z| + \dots + |a_n| |z|^n].$$

## 1.5 CONDICIONES NECESARIAS PARA LA ANALITICIDAD

La derivada de una función compleja de una variable compleja se define, exactamente, de la misma manera que el caso real del cálculo elemental.

### DEFINICIÓN

La derivada  $f'$  de  $f$  en  $a$  está dada por

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

cuando el límite existe. Se dice que la función  $f$  es analítica (u holomorfa) en la región  $G$  si tiene derivada en cada punto de  $G$ , y se dice que  $f$  es entera si es analítica en todo  $\mathbb{C}$ .

Observe que, en la definición anterior,  $h$  es un número complejo, como también lo es el cociente  $[f(a + h) - f(a)]/h$ . Así, para que exista la derivada, es necesario que ese cociente tienda a un número complejo único  $f'(a)$  independiente de la manera en que  $h$  tienda hacia cero.

**LEMA:** Si  $f$  tiene derivada en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

mental. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
 (fg)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a+h)g(a) + f(a+h)g(a) - f(a)g(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ f(a+h) \cdot \frac{g(a+h) - g(a)}{h} + g(a) \cdot \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right] \\
 &= f(a)g'(a) + g(a)f'(a).
 \end{aligned}$$

Los polinomios y las funciones racionales se derivan de la misma manera que en cálculo elemental. Por ejemplo, sea  $f(z) = z^n$  con  $n$  un entero positivo. Si usamos el teorema del binomio, tendremos

$$\begin{aligned}
 f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z^n + nz^{n-1}h + \dots + h^n) - z^n}{h} = nz^{n-1}.
 \end{aligned}$$

En particular, todo polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$$

es entero, porque en cada punto  $z$  de  $\mathbb{C}$  tiene derivada

$$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \dots + na_n z^{n-1}.$$

No obstante estas similitudes, hay una diferencia fundamental entre la derivación para funciones de variables reales y la derivación para funciones de una variable compleja. Sea  $z = (x, y)$ , suponga que  $h$  es real y entonces

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = f_x(z).$$

Pero entonces si  $h = ik$  es puramente imaginario, entonces

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{ik} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z) = -if_y(z).$$

Así, la existencia de una derivada compleja obliga a la función a satisfacer la ecuación diferencial parcial

$$f_x = -if_y.$$

Si  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , donde  $u$  y  $v$  son funciones reales de una variable compleja, y si igualamos las partes reales y las imaginarias de

$$u_x + iv_x = f_z = -if_y = v_y - iu_y,$$

obtenemos las ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y.$$

Hemos probado el teorema siguiente:

### TEOREMA:

Si la función  $f(z) = u(z) + iv(z)$  tiene derivada en el punto  $z$ , las primeras derivadas parciales de  $u$  y  $v$ , con respecto a  $x$  y  $y$ , existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

### EJEMPLO

Sea  $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ . Como  $f$  es entera,  $u = x^2 - y^2$  y  $v = 2xy$  deben satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Observe que

$$u_x = 2x = v_y \quad y \quad -u_y = 2y = v_x.$$

Por otra parte, si  $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ , entonces  $u = x^2 + y^2$ ,  $v = 0$  y  $u_x = 2x$ ,  $u_y = 2y$ ,  $v_x = 0 = v_y$ , así que  $f$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann sólo en  $0$ . Aún más,  $f$  tiene derivada cuando  $z = 0$  porque

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{h} = 0.$$

### EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-4, pruebe que cada función satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

1.  $f(z) = e^x (\cos y + i \sin y)$

2.  $f(z) = \frac{1}{z}$

10.  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}, \quad \text{con } g(z) \neq 0 \text{ para cualquier } z \text{ en } G$

11. Muestre que el cociente  $P(z)/Q(z)$  de dos polinomios tiene derivada en todo punto  $z$  donde  $Q(z) \neq 0$ .

Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pruebe que las funciones de los Ejercicios 12-15 no son derivables en todo  $\mathbb{C}$ .

12.  $f(z) = \bar{z}$

13.  $f(z) = \operatorname{Re} z$

14.  $f(z) = \operatorname{Im} z$

15.  $f(z) = |z|$

Use las ecuaciones de Cauchy-Riemann y la definición de derivada para determinar dónde tienen derivada las funciones de los Ejercicios 16-19.

16.  $f(z) = \bar{z}^2$

17.  $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$

18.  $f(z) = \bar{z} \operatorname{Re} z$

19.  $f(z) = z \operatorname{Im} z$

20. Pruebe la regla de la cadena para la derivada  $[f(g(z))]' = f'(g(z))g'(z)$ , suponiendo que  $f$  y  $g$  son enteras.

21. Utilice la regla de la cadena para probar que una función entera de una función entera es entera.

- \*22. Si todos los ceros de un polinomio  $P(z)$  tienen partes reales negativas, pruebe que lo mismo se cumple para todos los ceros de  $P'(z)$ : (Sugerencia: Factorice  $P(z)$  y considere  $P'(z)/P(z)$ .)

23. Si  $u$  y  $v$  se expresan en términos de las coordenadas polares  $(r, \theta)$ , muestre que las ecuaciones de Cauchy-Riemann pueden escribirse en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = - \frac{\partial v}{\partial r}, \quad r \neq 0.$$

24. Pruebe que la función

$$f(z) = r^5 (\cos 5\theta + i \sin 5\theta)$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar para todo  $z \neq 0$ .

## 6 CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA ANALITICIDAD

En este punto, uno se podría preguntar si las ecuaciones de Cauchy-Riemann son suficientes para garantizar la existencia de la derivada en un punto dado. El ejemplo siguiente, de D. Menchhoff, muestra que no es así. Sea

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\frac{f(z)}{z} = \left( \frac{z}{|z|} \right)^4, \quad z \neq 0,$$

que tiene valor 1 sobre el eje real y valor  $-1$  sobre la línea  $y = x$ . Así,  $f$  no tiene derivada en  $z = 0$ ; pero si se desarrolla la expresión para  $f$  se tiene

$$u(x, 0) = x, \quad u(0, y) = 0 = v(x, 0), \quad v(0, y) = y.$$

Por lo que,

$$u_x(0, 0) = 1 = v_y(0, 0), \quad -u_y(0, 0) = 0 = v_x(0, 0),$$

y se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Sin embargo, tenemos el siguiente teorema:

### TEOREMA

Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , definida en alguna región  $G$  que contiene al punto  $z_0$ , y que tiene primeras derivadas parciales *continuas*, con respecto a  $x$  y  $y$ , que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $z_0$ . Entonces  $f'(z_0)$  existe.

**PRUEBA:** Si  $x \neq x_0$  y  $y \neq y_0$ , el cociente de diferencias se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y) - u(x_0, y_0)}{z - z_0} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y_0)}{z - z_0} \\ &= \frac{x - x_0}{z - z_0} \left[ \frac{u(x, y) - u(x_0, y)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y) - v(x_0, y)}{x - x_0} \right] \\ &\quad + \frac{y - y_0}{z - z_0} \left[ \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0} + i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} \right] \\ &= \frac{x - x_0}{z - z_0} \left\{ u_x(x_0 + t_1(x - x_0), y) + iv_x(x_0 + t_2(x - x_0), y) \right\} \\ &\quad + \frac{y - y_0}{z - z_0} \left\{ u_y(x_0, y_0 + t_3(y - y_0)) + iv_y(x_0, y_0 + t_4(y - y_0)) \right\}, \end{aligned}$$

donde  $0 < t_k < 1$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ , según el teorema del valor medio del cálculo diferencial. Este resultado también se cumple si  $x = x_0$  o  $y = y_0$ .

Como  $|x - x_0|$ ,  $|y - y_0| \leq |z - z_0|$ , la desigualdad del triángulo conduce a

$$\left| \frac{(x - x_0)\epsilon_1 + (y - y_0)\epsilon_2}{z - z_0} \right| \leq |\epsilon_1| + |\epsilon_2| \rightarrow 0, \text{ cuando } z \rightarrow z_0.$$

Por tanto, el último término tiende a cero cuando  $z$  tiende a  $z_0$  así que al tomar el límite, tenemos

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = u_x(z_0) + i v_x(z_0)$$

En particular, si las hipótesis del teorema se cumplen en todos los puntos de la región  $G$ , entonces  $f$  es analítica en  $G$ . ■

### EJEMPLO 1

Muestre que la función

$$f(z) = e^{x^2 - y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy)$$

es entera.

**SOLUCIÓN:** Debemos verificar que las primeras parciales de

$$u = e^{x^2 - y^2} \cos 2xy \quad y \quad v = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy$$

son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todos los puntos de  $\mathbb{C}$ . Claramente,

$$u_x = 2e^{x^2 - y^2} (x \cos 2xy - y \sin 2xy) = v_y$$

y

$$-u_y = 2e^{x^2 - y^2} (y \cos 2xy + x \sin 2xy) = v_x$$

son funciones continuas en  $\mathbb{C}$  así que  $f(z)$  es entera.

### EJEMPLO 2

Describa la región de analiticidad de la función

$$f(z) = \frac{(x - 1) - iy}{(x - 1)^2 + y^2}.$$

**SOLUCIÓN:** Las primeras parciales de  $u = \operatorname{Re} f$  y  $v = \operatorname{Im} f$  satisfacen

$$u_x = \frac{y^2 - (x-1)^2}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = v_y$$

y

$$u_y = \frac{-2y(x-1)}{[(x-1)^2 + y^2]^2} = -v_x.$$

Estas funciones son continuas para todo  $z \neq 1$ . Note que  $f(z)$  no está definida en  $z = 1$ . Por tanto,  $f(z)$  es analítica para todo  $z \neq 1$ .

En el caso de variable real del cálculo elemental, sabemos que cuando la derivada de una función es cero en algún intervalo, la función es constante en ese intervalo. Para variables complejas se obtiene un resultado semejante.

### TEOREMA DE LA DERIVADA NULA

Sea  $f$  analítica en una región  $G$  y  $f'(z) = 0$  en todo  $z$  de  $G$ . Entonces  $f$  es constante en  $G$ . Se tiene la misma conclusión si  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$ ,  $|f|$  o  $\arg f$  es constante en  $G$ .

**PRUEBA:** Como  $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$ , si la derivada se anula implica que  $u_x = v_y$ ,  $v_x = -u_y$  son todas cero. Así,  $u$  y  $v$  son constantes a lo largo de cualquier recta paralela a los ejes coordenados y como  $G$  es conexo mediante un polígono (véase el teorema y las observaciones después de su prueba en la Sección 1.3),  $f = u + iv$  es constante en  $G$ .

Si  $u$  (o  $v$ ) es constante  $v_x = -u_y = 0 = u_x = v_y$ , lo cual implica que  $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = 0$  y  $f$  es constante.

Si  $|f|$  es constante, también  $|f|^2 = u^2 + v^2$ , lo es; esto implica que

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = vu_x - uv_x = 0.$$

Resolviendo estas dos ecuaciones para  $u_x$ ,  $v_x$ , tenemos  $u_x = v_x = 0$  a menos que el determinante  $u^2 + v^2$  se anule. Como  $|f|^2 = u^2 + v^2$  es constante, si  $u^2 + v^2 = 0$  en un punto, entonces es constantemente cero, y  $f$  se anula idénticamente. De otra manera, las derivadas se anulan y  $f$  es constante.

Si  $\arg f = c$ ,  $f'(z)$  estará contenido en la recta

$$4. f(z) = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$$

$$5. f(z) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)\cosh(2xy) + i \cos(x^2 - y^2)\operatorname{senh}(2xy)$$

En los Ejercicios 6-8, diga si las funciones son analíticas.

$$6. f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$7. f(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \cosh\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$- i \cos\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

$$8. f(z) = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$$

9. Muestre que, en  $z = 0$ , la función

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 0 & z = 0. \end{cases}$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann, pero no tiene derivada en ese punto.

10. Muestre que la función

$$f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $z = 0$ , pero no tiene derivada en ese punto.

11. Si  $f(z) = u + iv$  y  $\bar{f} = u - iv$  son analíticas, pruebe que  $f$  es constante.

12. Sea  $f(z) = u + iv$  entera, y suponga que  $u \cdot v$  es constante. Pruebe que  $f$  es constante.

13. Si  $f(z) = u + iv$  es entera y  $v = u^2$ , muestre que  $f$  es constante.

14. Si  $f = u + iv$  es entera y  $u^2 = v^2$  pruebe que  $f$  es constante.

15. Suponga que la función analítica  $f$  definida en la región  $G$ , toma valores reales. Pruebe que  $f$  es constante en  $G$ .

16. Sean  $f(z) = z^3$ ,  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = i$ . Pruebe que no existe un punto  $z_0$  sobre el segmento de recta que une a  $z_1$  y  $z_2$  tal que

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1).$$

Esto demuestra que el teorema del valor medio para funciones reales no se extiende a las funciones complejas.

17. Si  $z = x + iy$ , muestre que no existe una función entera cuya derivada sea la función  $f(z) = x$

## 1.7 EXPONENCIAL COMPLEJA

Hemos visto en la Sección 1.4 que los polinomios y las funciones racionales en una variable real producen funciones analíticas cuando la variable real se reemplaza por  $z$ . Esto de ninguna manera es un ejemplo aislado. De hecho, todas las funciones elementales del cálculo, tales como exponenciales, logaritmos y funciones trigonométricas, dan lugar a funciones analíticas cuando se extienden apropiadamente al plano complejo. En las siguientes tres secciones, definiremos las extensiones de estas funciones elementales e indicaremos algunas de sus propiedades.

Empecemos con la exponencial  $e^x$ . Deseamos definir una función  $f(z) = e^z$  que sea analítica y que coincida con la función exponencial real cuando  $z$  sea real. Recordando que la exponencial real se determina por la ecuación diferencial

$$f'(x) = f(x), \quad f(0) = 1,$$

nos preguntamos si existe una solución analítica de la ecuación

$$f'(z) = f(z), \quad f(0) = 1.$$

Si tal solución existe, necesariamente deberá coincidir con  $e^x$  cuando  $z = x$ , pues sólo así satisfará la ecuación que la determina sobre el eje real. De la definición de  $f'$ , tenemos

$$u_x + iv_x = u + iv, \quad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

Como  $u_x = u$ ,  $v_x = v$ , al separar variables, tenemos

$$u(x, y) = p(y)e^x, \quad v(x, y) = q(y)e^x,$$

con  $p(0) = 1$ ,  $q(0) = 0$  por las condiciones iniciales. Derivemos estas dos ecuaciones con respecto a  $y$  y apliquemos las ecuaciones de Cauchy-Riemann, para obtener

$$p'(y)e^x = u_y = -v_x = -q(y)e^x, \quad q'(y)e^x = v_y = u_x = p(y)e^x.$$

Por tanto,  $p' = -q$ ,  $q' = p$ , así que

$$q'' = p' = -q, \quad p'' = -q' = -p,$$

y  $p$ ,  $q$  son soluciones de la ecuación diferencial real  $\phi''(y) + \phi(y) = 0$ . Todas las soluciones de esta ecuación son de la forma  $A \cos y + B \operatorname{sen} y$ , con  $A$  y  $B$  constantes. Como  $q'(0) = p(0) = 1$ ,  $p'(0) = -q(0) = 0$ , debemos tener  $p(y) =$

rencia

$$f'(z) = f(z), \quad f(0) = 1.$$

Que  $e^z \neq 0$  se sigue de que ni  $e^x$  ni  $\cos y + i \sin y$  se anulan. Además, observe que como  $z = x + iy$ , la notación conduce a

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \quad |e^{iy}| = 1.$$

Así, la representación polar de un número complejo se transforma (véase Sección 1.2) en

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

Si  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$ , entonces las fórmulas trigonométricas para las sumas implican que

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1) (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} [(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + \\ &\quad i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} [\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Ya que

$$e^{z_1-z_2} e^{z_2} = e^{z_1-z_2+z_2} = e^{z_1},$$

Se sigue que

$$e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}.$$

Si usamos repetidamente la fórmula para la suma de exponentes, obtenemos  $e^{nz} = (e^z)^n$ . Esta identidad proporciona una prueba rápida del teorema de De Moivre cuando  $z = e^{i\theta}$ :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

para  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Con esta versión del teorema de De Moivre, tenemos

$$\begin{aligned} (1-i)^{23} &= (\sqrt{2} e^{-\pi i/4})^{23} = 2^{23/2} e^{-23\pi i/4} \\ &= 2^{23/2} e^{\pi i/4} = 2^{11} (\sqrt{2} e^{\pi i/4}) \\ &= 2^{11} (1+i). \end{aligned}$$

La exponencial compleja jugará un papel esencial en las aplicaciones. Con el fin de entender completamente la exponencial compleja, necesitamos estudiar sus propiedades como mapeo. Para visualizar el mapeo

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

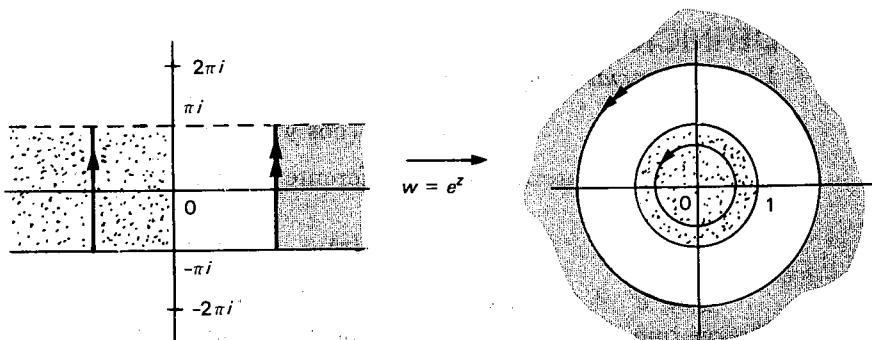
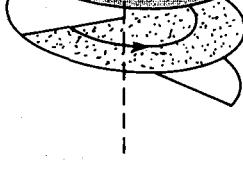
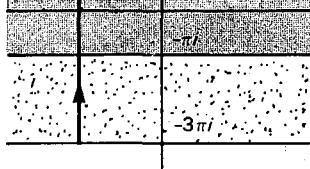


FIGURA 1.21. La exponencial

observemos que la franja infinita  $-\pi \leq y < \pi$  se mapea en  $\mathbb{C} - \{0\}$ : los puntos sobre el segmento de recta  $x = 0$ ,  $-\pi \leq y < \pi$  se mapean de manera uno a uno en el círculo  $|w| = 1$ , las rectas verticales a la izquierda del eje imaginario se mapean en círculos de radio  $r < 1$ , las rectas verticales a la derecha del eje imaginario sobre círculos de radio  $r > 1$ , la mitad izquierda de la franja en la Figura 1.21 se mapea en  $0 < |w| < 1$ , y la mitad derecha va a  $|w| > 1$ . Observe que  $e^z$  tiene periodo  $2\pi i$ , porque

$$e^{z+2\pi i} = e^{x+(2\pi+y)i} = e^x [\cos(2\pi + y) + i \sin(2\pi + y)] = e^z,$$

así que los valores complejos  $e^z$  y  $e^{z+2\pi ik}$ , con  $k$  entero, son idénticos. Por tanto, cada franja infinita  $-\pi - 2\pi k \leq y < \pi - 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , también se mapea en  $\mathbb{C} - \{0\}$ , y el mapeo  $e^z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} - \{0\}$  manda un número infinito de puntos de  $\mathbb{C}$  al mismo punto en  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Este es un resultado indeseable, en vista de que no permite la discusión de una función inversa, excepto sobre cada una de las franjas infinitas descritas anteriormente. La función inversa es verdaderamente importante, porque la inversa de la exponencial real es el logaritmo. Para eliminar esta dificultad, imagine que el contradominio del mapeo consiste en un número infinito de copias de  $\mathbb{C} - \{0\}$  apiladas en capas unas sobre otras, cada una cortada a lo largo del eje real negativo con el borde superior de una capa "pegada" al borde inferior de la capa superior, produciendo un conjunto  $\mathcal{R}$  que asemeja una rampa infinita en espiral (véase Figura 1.22). El conjunto  $\mathcal{R}$  difiere de  $\mathbb{C} - \{0\}$  en que cada punto de  $\mathcal{R}$  queda determinado únicamente en coordenadas polares, mientras que los puntos de  $\mathbb{C} - \{0\}$  no se pueden determinar en la misma forma, porque el argumento es multivaluado. Si utilizamos a  $\mathcal{R}$  como el contradominio de la función  $e^z$  y medimos distancias cortas en  $\mathcal{R}$  de la manera obvia, el mapa  $w = e^z$  es un homeomorfismo.



**FIGURA 1.22.** La superficie de Riemann de  $w = e^z$

y la cantidad entre paréntesis tiende a  $e^0$  cuando  $h \rightarrow 0$ , si  $e^h$  pertenece a la misma capa de  $\mathcal{R}$  que  $e^0$ . De manera alternativa, si  $\operatorname{Im} z \neq (2k + 1)\pi$  y  $h$  es pequeño,  $z$  y  $z + h$  pertenecerán a la misma franja, de tal forma que  $e^z$  y  $e^{z+h}$  se encuentren en la misma copia de  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

El conjunto  $\mathcal{R}$  se llama **superficie de Riemann**; las líneas de corte en cada copia de  $\mathbb{C} - \{0\}$  **cortes de ramificación**; los extremos de los cortes de ramificación  $0, \infty$  **puntos de ramificación**; y cada copia de  $\mathbb{C} - \{0\}$  se llama **rama** de  $\mathcal{R}$ .

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-7, exprese cada número en la forma  $x + iy$ .

1.  $e^{i\pi}$

3.  $e^{-1+(\pi i)/4}$

5.  $e^{3i\pi/2}$

7.  $e^{7\pi i/2}$ .

2.  $e^{(1+\pi i)/2}$

4.  $e^{(-1+\pi i)/4}$

6.  $e^{-i\pi/2}$

En los Ejercicios 8-10, encuentre todos los números complejos  $z$  que satisfacen las condiciones dadas.

8.  $e^{2z} = -1$

9.  $e^{iz} = 2$

10.  $e^{iz} = -1$

11. Obtenga todos los valores de  $e^{\pi ik/2}$ , con  $k$  entero

12. Muestre que  $(e^z) = e^{\bar{z}}$ .

En los Ejercicios 13-20, utilice el teorema de De Moivre y calcule cada número

13.  $(1+i)^{29}$

14.  $(-1+i)^{17}$

15.  $(-1-i)^{36}$

16.  $(2+2i)^{12}$

17.  $(\sqrt{3}+i)^{15}$

18.  $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

19.  $(1-\sqrt{3}i)^{14}$

20.  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{19}$

En los Ejercicios 21-24, encuentre las sumas mediante el teorema de De Moivre.

21.  $1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$

22.  $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n-1)x$

23.  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \dots + \operatorname{sen} nx$   
 24.  $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x + \dots + \operatorname{sen}(2n-1)x$   
 25. Si  $f(z)$  es entera, muestre que  $e^{f(z)}$  es entera y encuentre su derivada.  
 26. Pruebe que  $e^z$  es la única solución analítica de la ecuación diferencial compleja  $f'(z) = f(z), f(0) = 1$ .

¿Cuál es la imagen del conjunto  $\{z: |x| < 1, |y| < 1\}$  bajo los mapeos dados en los Ejercicios 27 y 28?

$$27. w = e^{\pi z}$$

$$28. w = e^{\pi z/2}$$

29. Encuentre una función analítica que mapee  $\{z: 0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$  de manera uno a uno y dentro de  $1 < |w| < e^{2\pi}$ .

## 1.8 LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS E HIPERBÓLICAS COMPLEJAS

La exponencial compleja puede utilizarse para definir las funciones trigonométricas complejas. Como  $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$  y  $e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y$ , entonces

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Extendemos estas definiciones a los planos complejos como sigue:

### DEFINICIÓN

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Estas funciones son enteras, pues son sumas de funciones enteras y satisfacen

$$(\cos z)' = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\operatorname{sen} z,$$

$$(\operatorname{sen} z)' = \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Las otras cuatro funciones trigonométricas, definidas en términos de las funciones seno y coseno por medio de las relaciones usuales

Todas las identidades trigonométricas usuales son válidas en variables complejas, y sus demostraciones dependen de las propiedades de la exponencial. Por ejemplo,

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = \frac{1}{4} [(e^{iz} + e^{-iz})^2 - (e^{iz} - e^{-iz})^2] = 1,$$

y

$$\begin{aligned} & \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2 \\ &= \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} - \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} \\ &= \frac{2e^{iz_1}e^{iz_2} + 2e^{-iz_1}e^{-iz_2}}{4} = \cos(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

De la definición de  $\cos z$ , tenemos

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(x + iy) = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x) \\ &= \left( \frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) \cos x - i \left( \frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

Así,

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y.$$

De manera semejante encontramos

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

### TEOREMA

Los ceros reales de  $\operatorname{sen} z$  y  $\cos z$  son sus únicos ceros.

**PRUEBA:** Si  $\operatorname{sen} z = 0$ , la última ecuación muestra que debemos tener

$$\operatorname{sen} x \cosh y = 0, \quad \cos x \operatorname{senh} y = 0.$$

Pero  $\cosh y \geq 1$ , lo cual implica que el primer término se anula solamente cuando  $\operatorname{sen} x = 0$ , esto es,  $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ . Sin embargo, para estos valores  $\cos x$  no se anula. Por tanto, debemos tener  $\operatorname{senh} y = 0$ , sea  $y = 0$ . Así,

$$\operatorname{sen} z = 0 \quad \text{implica} \quad z = n\pi, \quad \text{con } n \text{ entero.}$$

Esta aseveración también se aplica a  $\tan z$ , y de igual forma encontramos que

$$\cos z = 0 \quad \text{implica} \quad z = (n + \frac{1}{2})\pi, \quad \text{con } n \text{ entero.} \blacksquare$$

Las funciones hiperbólicas complejas se definen al extender las definiciones reales al plano complejo.

## DEFINICIÓN

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Nuevamente, todas las identidades y reglas usuales de derivación se aplican a las funciones hiperbólicas complejas (véase Ejercicios 23-30). Note, además, que

$$\operatorname{senh} iz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \operatorname{sen} z$$

y

$$\cosh iz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Así, las funciones hiperbólicas complejas están íntimamente relacionadas con las funciones trigonométricas complejas, ya que al multiplicar por  $i$ , simplemente se rota todo vector en  $\mathbb{C}$  por  $90^\circ$ , en sentido contrario a la dirección que llevan las manecillas del reloj. Por tanto, los ceros de  $\operatorname{senh} z$  y  $\cosh z$  son imaginarios puros.

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-8, exprese cada número en la forma  $x + iy$ .

- |                                    |                                |
|------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\operatorname{sen} i$          | 2. $\cos (-i)$                 |
| 3. $\cosh (1+i)$                   | 4. $\operatorname{senh} \pi i$ |
| 5. $\cos (1+i)$                    | 6. $\tan 2i$                   |
| 7. $\operatorname{senh} (1+\pi i)$ | 8. $\cosh (\pi i/4)$           |

En los Ejercicios 9-12, encuentre todos los números complejos  $z$  que cumplan las condiciones dadas.

- |  |  |
|--|--|
| 9. $\cos z = \operatorname{sen} z$   | 10. $\cos z = -i \operatorname{sen} z$ |
| 11. $\cosh z = 2$  | 12. $\cosh z = i$                      |
| 13. ¿Existen puntos $z$ donde $\operatorname{senh} z = \cosh z$ ?                |  |
| 14. Muestre que $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \bar{z}$ . |  |
| 15. Pruebe que $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$ .                              |  |

23.  $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ ,  $\cosh(-z) = \cosh z$ ,  $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$   
 24.  $\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2$   
 25.  $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$   
 26.  $i \operatorname{senh} z = \operatorname{sen} iz$ ,  $\cosh z = \cos iz$ ,  $i \tanh z = \tan iz$   
 27.  $|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y$ ,  $|\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y$

Pruebe las reglas de derivación dadas en los Ejercicios 28-30.

28.  $(\operatorname{senh} z)' = \cosh z$ ,  $(\cosh z)' = \operatorname{senh} z$   
 29.  $(\tanh z)' = \operatorname{sech}^2 z$ ,  $(\coth z)' = -\operatorname{csch}^2 z$   
 30.  $(\operatorname{sech} z)' = -\operatorname{sech} z \tanh z$ ,  $(\operatorname{csch} z)' = -\operatorname{csch} z \coth z$   
 31. Encuentre todos los ceros de  $\operatorname{senh} z$  y  $\cosh z$ .  
 32. Verifique que  $e^z = \cosh z + \operatorname{senh} z$ .  
 33. Verifique que  $e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$ .

Muestre que la función  $w = \operatorname{sen} z$  mapea cada una de las franjas en los Ejercicios 34-36 en el conjunto dado, indicando qué les sucede a los segmentos de recta horizontales y verticales bajo la transformación

$$w = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y.$$

34. La franja  $|x| < \pi/2$  en  $\mathbb{C} - \{z: y = 0, |x| \geq 1\}$   
 35. La franja semiinfinita  $|x| < \pi/2, y > 0$  en el semiplano superior.  
 36. La franja semiinfinita  $0 < x < \pi/2, y > 0$  en el primer cuadrante.  
 37. Describa la función  $w = \cos z$ , al considerar el mapeo de segmentos de recta verticales y horizontales bajo la transformación.

$$w = \cos z = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y.$$

## 9 LAS FUNCIONES LOGARITMO COMPLEJO Y POTENCIA COMPLEJA

Como  $e^z: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  es uno a uno, con  $\mathbb{R}$  como la superficie de Riemann definida en la Sección 1.7, podemos definir su función inversa que mapea  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{C}$ . Imitando el caso real, llamamos a este mapeo inverso **logaritmo** y lo denominamos por

$$\log z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Como la exponencial compleja y el logaritmo son funciones inversas, se tiene que

$$\log e^z = z, \text{ para todo } z \text{ en } \mathbb{C},$$

y

$$e^{\log z} = z, \text{ para todo } z \text{ en } \mathbb{R}.$$

La única tarea pendiente es obtener una expresión para  $\log z$  en términos de funciones conocidas. Una complicación se presenta cuando el logaritmo se define en la superficie de Riemann  $\mathcal{R}$ , ilustrada en la Figura 1.22. Como  $\mathcal{R}$  consiste en un número infinito de copias de  $\mathbb{C} - \{0\}$  apiladas hasta parecer una rampa infinita en espiral, debemos encontrar una forma para identificar los puntos de cada rama de la superficie de Riemann. Es en este punto donde una complicación anterior se convierte en ventaja: aunque el argumento  $\arg z$  es multivalorado en  $\mathbb{C} - \{0\}$ , es *univalorado* en  $\mathcal{R}$ . Así, podemos distinguir entre diferentes ramas de  $\mathcal{R}$  si utilizamos la representación polar  $z = |z|e^{i\arg z}$  para cada  $z$  en  $\mathcal{R}$ . La representación polar y la naturaleza inversa de las funciones logaritmo y exponencial proporcionan una definición natural para el logaritmo complejo:

$$\begin{aligned}\log z &= \log(|z|e^{i\arg z}) = \log(e^{\log|z|+i\arg z}) \\ &= \log|z| + i\arg z,\end{aligned}$$

donde  $\log|z|$  es el logaritmo natural del cálculo elemental.

Para completar la descripción de la superficie de Riemann  $\mathcal{R}$  definimos las  $\epsilon$ -vecindades para los puntos en  $\mathcal{R}$ . Si  $z$  pertenece a una rama de  $\mathcal{R}$  y  $|z| > \epsilon$ , entonces el conjunto de todos los puntos sobre esa rama cuya distancia desde  $z$  es menor que  $\epsilon$  constituye una  $\epsilon$ -vecindad de  $z$ . Este concepto es importante porque los límites se definen en términos de  $\epsilon$ -vecindades. Al definir una  $\epsilon$ -vecindad en una superficie de Riemann, podemos extender las nociones de continuidad, derivabilidad y analiticidad de una función definida en esa superficie, ya que estas nociones dependen sólo del comportamiento local de la función. Esto es, la continuidad en  $z$  depende únicamente de la diferencia  $f(z) - f(w)$  para cualquier  $w$  en cualquier  $\epsilon$ -vecindad de  $z$ , mientras que la derivada en  $z$  depende únicamente del cociente de las diferencias  $[f(z) - f(w)]/(z - w)$ . Con estos conceptos, no es difícil verificar que  $\log z$  es continua ya que

$$\begin{aligned}\log z - \log w &= \log|z| + i\arg z - \log|w| - i\arg w \\ &= [\log|z| - \log|w|] + i[\arg z - \arg w],\end{aligned}$$

y el logaritmo natural y la función argumento son continuas.

### TEOREMA

La función  $\log z = \log|z| + i\arg z$  es analítica para todo  $z$  en  $\mathcal{R}$ .

$$\log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2.$$

Note que en estas dos identidades suponemos que  $z_1$  y  $z_2$  son puntos de la superficie de Riemann  $\mathcal{R}$ . Como

$$z = e^{\log z}$$

para cualquier  $z$  en  $\mathcal{R}$ , aplicamos la regla de la cadena para la derivación para obtener

$$1 = e^{\log z} (\log z)'$$

o

$$(\log z)' = 1/z; \quad \text{para } z \text{ en } \mathcal{R}.$$

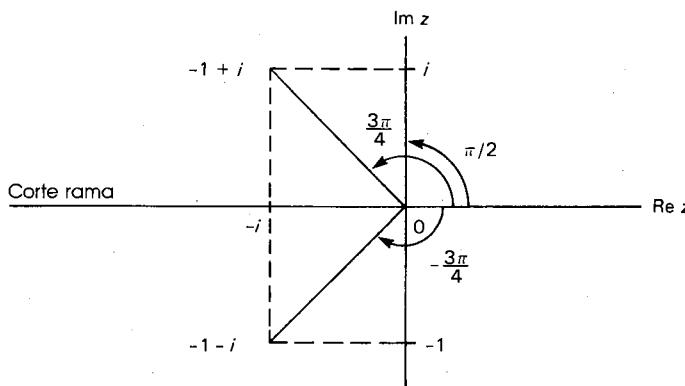
Así, la fórmula usual de la derivada se cumple en  $\mathcal{R}$ .

De la misma manera que definimos el valor principal  $\operatorname{Arg} z$  del argumento  $\arg z$ , podemos extender este concepto al logaritmo. Al visualizar al logaritmo como el mapeo inverso de la exponencial, llamamos a la rama de  $\mathcal{R}$  cortada a lo largo del eje real negativo, que se mapea en la franja semiinfinita  $-\pi \leq y < \pi$ , **rama principal** del logaritmo (véase Figura 1.23). Denotamos  $\log z$  cuando se restringe la rama principal, por

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

y llamamos a éste **valor principal** de  $\log z$ .

Note que el valor principal  $\log z$  se define sólo en aquella rama de  $\mathcal{R}$  para la cual  $\operatorname{Arg} z$  existe. Debe tenerse cuidado cuando se trabaje con la rama princi-



**FIGURA 1.23.** Rama principal de  $\mathcal{R}$

pal del logaritmo  $\text{Log } z$ , ya que las propiedades usuales de los logaritmos pueden no cumplirse. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\text{Log } i &= \log |i| + i \operatorname{Arg} i = i\pi/2, \\ \text{Log } (-1+i) &= \log |-1+i| + i \operatorname{Arg} (-1+i) \\ &= \log \sqrt{2} + i \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\text{Log } [i(-1+i)] &= \text{Log}(-1-i) \\ &= \log |-1-i| + i \operatorname{Arg} (-1-i) \\ &= \log \sqrt{2} - i \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

así que

$$\text{Log } [i(-1+i)] \neq \text{Log } i + \text{Log}(-1+i).$$

Por el contrario, las dos expresiones difieren por un múltiplo de  $2\pi i$ . (¿Por qué?)

Las funciones logaritmo y exponencial complejas se pueden usar para definir las funciones potencia.

## DEFINICIÓN

$$z^a = e^{a \operatorname{Log} z}, \quad a \text{ complejo} \neq 0, \quad z \neq 0.$$

La función  $z^a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es analítica y uno a uno porque es la composición de funciones de esos tipos. Por la regla de la cadena,

$$(z^a)' = e^{a \operatorname{Log} z} \cdot \frac{a}{z} = az^{a-1}.$$

El *valor principal* de la función potencia está dado por

$$z^a = e^{a \operatorname{Log} z}.$$

A menudo estamos interesados en el caso donde  $a = m/n > 0$ ,  $m, n$  enteros positivos son factores comunes. Considere ahora el conjunto de números  $e^{\operatorname{Log}(z)} + 2\pi k i$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , esto es, aquellos puntos en  $\mathbb{R}$  situados directamente "arriba" y "abajo" del punto  $e^{\operatorname{Log} z}$ . Entonces  $(e^{\operatorname{Log}(z)} + 2\pi k i)^{m/n} = e^{(m/n)\operatorname{Log} z} e^{(m/n)2\pi k i}$  y si escribimos  $k = pn + q$  con  $p$  y  $q$  enteros,  $0 \leq q < n$ , tenemos

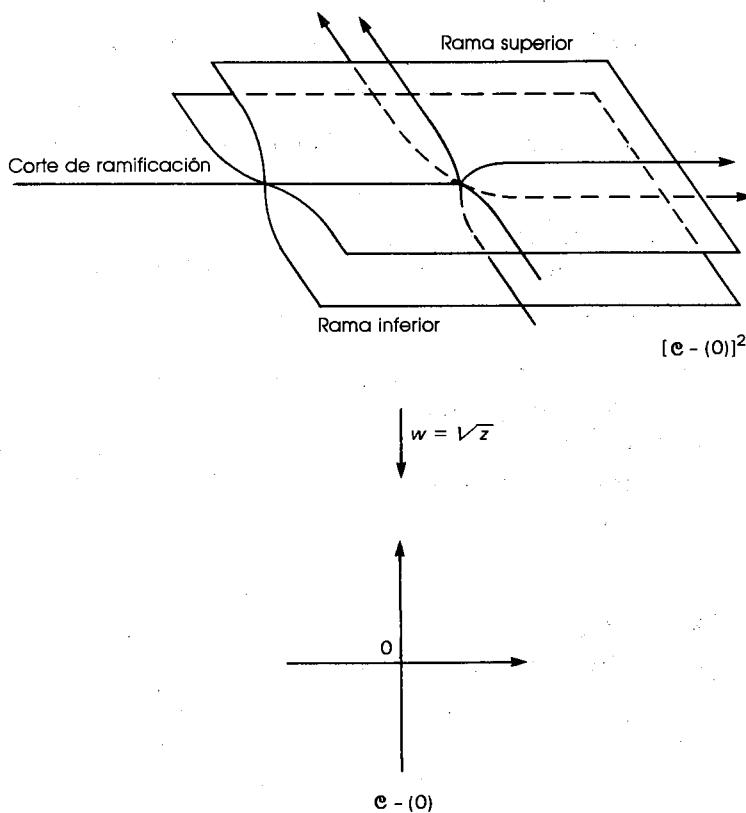
Rama de arriba se "pegó" al borde inferior de la rama de abajo.

## EJEMPLO 1

Describa la superficie de Riemann modificada de la función

$$w = \sqrt{z}.$$

**SOLUCIÓN:** De la discusión anterior, la función mapea  $[\mathbb{C} - \{0\}]^2$  en  $[\mathbb{C} - \{0\}]$ , como se ilustra en la Figura 1.24. Podemos observar que la rama de arriba está mapeada en la mitad derecha del plano, y la rama de abajo está mapeada en la mitad izquierda del plano.



**FIGURA 1.24.** La superficie de Riemann para  $w = z^{1/2}$

El mapeo  $z^m = [\mathbb{C} - \{0\}] \rightarrow [\mathbb{C} - \{0\}]^m$  es el inverso del mapeo  $z^{1/m}$ . Por tanto, la función compuesta

$$(z^{1/n})^m = z^{m/n} : [\mathbb{C} - \{0\}]^n \rightarrow [\mathbb{C} - \{0\}]^m$$

es analítica y uno a uno en las superficies modificadas de Riemann, descritas anteriormente.

El logaritmo también se puede usar para definir las funciones trigonométricas inversas.

### EJEMPLO 2

Muestre que

$$\operatorname{sen}^{-1} z = -i \log [iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}].$$

**SOLUCIÓN:** La función  $w = \operatorname{sen}^{-1} z$  revierte la acción del mapeo

$$z = \operatorname{sen} w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

Si multiplicamos ambos extremos de esta ecuación por  $2ie^{iw}$ , tenemos

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Cuando utilizamos la fórmula cuadrática en la solución de  $e^{iw}$ , obtenemos

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}},$$

donde la raíz cuadrada mapea  $[\mathbb{C} - \{0\}]^2$  en  $[\mathbb{C} - \{0\}]$  (o es bivaluada en  $\mathbb{C}$ ). El resultado se sigue ahora al tomar logaritmos de ambos lados.

Las identidades y reglas usuales para la derivación de funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas también se aplican aquí. De hecho, la mayoría de las funciones matemáticas que surgen en problemas de física e ingeniería son analíticas. Así, el concepto de analiticidad se aplica a una clase, grande y útil, de funciones.

### EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-6, encuentre todos los valores de las expresiones dadas.

en el disco  $|z - 1| < 1$ .

13. Muestre que  $\log z_1 + \log z_2 = \log z_1 z_2$ .

14. Verifique que  $\log z_1 - \log z_2 = \log \frac{z_1}{z_2}$ .

15. Compruebe que  $z^a z^b = z^{a+b}$ .

16. Muestre que  $\frac{z^a}{z^b} = z^{a-b}$ .

17. Confirme que  $\text{Log}(-1 - i) - \text{Log } i \neq \text{Log} \left( \frac{-1 - i}{i} \right)$ .

18. Exprese que  $\text{Log}(i^3) \neq 3 \text{ Log } i$ .

19. Pruebe que  $\log z^a = a \log z$ , complejo  $\neq 0$ ,  $z \neq 0$ .

20. ¿Es 1, elevado a cualquier potencia, siempre igual a 1?

21. Demuestre que  $\cos^{-1} z = -i \log [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$ .

22. Corrobore que  $\tan^{-1} z = \frac{i}{2} \log \left( \frac{i+z}{i-z} \right)$ ,  $z \neq \pm i$ .

23. Pruebe que  $\cot^{-1} z = \frac{i}{2} \log \left( \frac{z-i}{z+i} \right)$ ,  $z \neq \pm i$ .

24. Muestre que  $\text{senh}^{-1} z = \log [z + (z^2 + 1)^{\frac{1}{2}}]$ .

25. Verifique que  $\cosh^{-1} z = \log [z + (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}]$ .

26. Compruebe que  $\tanh^{-1} z = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1+z}{1-z} \right)$ ,  $z \neq \pm 1$ .

27. Pruebe que  $(\text{sen}^{-1} z)' = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $z \neq \pm 1$ .

28. Confirme que  $(\cos^{-1} z)' = -(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $z \neq \pm 1$ .

29. Pruebe que  $(\tan^{-1} z)' = \frac{1}{1+z^2}$ ,  $z \neq \pm i$ .

30. Exprese que  $(\text{senh}^{-1} z)' = (1 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $z \neq \pm i$ .

31. Confirme que  $(\cosh^{-1} z)' = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $z \neq \pm 1$ .

32. Muestre que  $(\tanh^{-1} z)' = \frac{1}{1-z^2}$ ,  $z \neq \pm 1$ .

33. Encuentre la falla en el argumento siguiente:

$$i = (-1)^{1/2} = [(-1)^3]^{1/2} = (-1)^{3/2} = i^3 = -i.$$

## 10 APLICACIONES EN ÓPTICA (opcional)

Uno de los modelos que se han sugerido para interpretar las propiedades empíricas de la luz supone que cierta fuente luminosa crea una perturbación que

produce ondas esféricas en determinado medio homogéneo. Este modelo es análogo al siempre creciente círculo de olas que ocurre cuando la superficie de un volumen de agua se perturba. El análisis matemático de este modelo (usando las ecuaciones de James Maxwell de electromagnetismo) conduce a la **ecuación de onda unidimensional**

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2},$$

donde  $E$  es la perturbación óptica,  $x$  es la dirección de propagación de la onda,  $c$  es la velocidad de propagación de la luz, y  $t$  es el tiempo (véase Ejercicio 4). Es fácil probar que cualquier función de la forma  $E = f(ct - x)$  es solución de la ecuación de onda, ya que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} [-f'(ct - x)] = f''(ct - x)$$

y

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} [cf'(ct - x)] = c^2 f''(ct - x).$$

La observación de efectos de **interferencia**, que ocurren cuando dos rayos de luz de una fuente común llegan al mismo punto a través de diferentes caminos, sugiere que la perturbación óptica consiste en una suma de funciones casi sinusoidales. Esto es,  $E$  puede muy bien aproximarse por una suma de **ondas sinusoidales** de la forma

$$A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \phi \right],$$

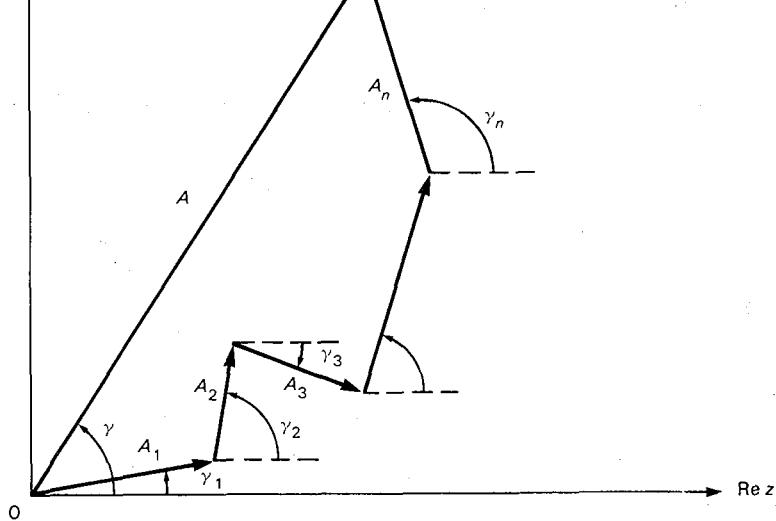
donde  $A$  es la **amplitud**,  $\omega/2\pi$  es la **frecuencia**, y  $\alpha = \phi - \omega x/c$  es el **corrimiento de fase** de la onda.

Podemos fácilmente sumar ondas sinusoidales de la misma frecuencia si utilizamos la exponencial compleja:

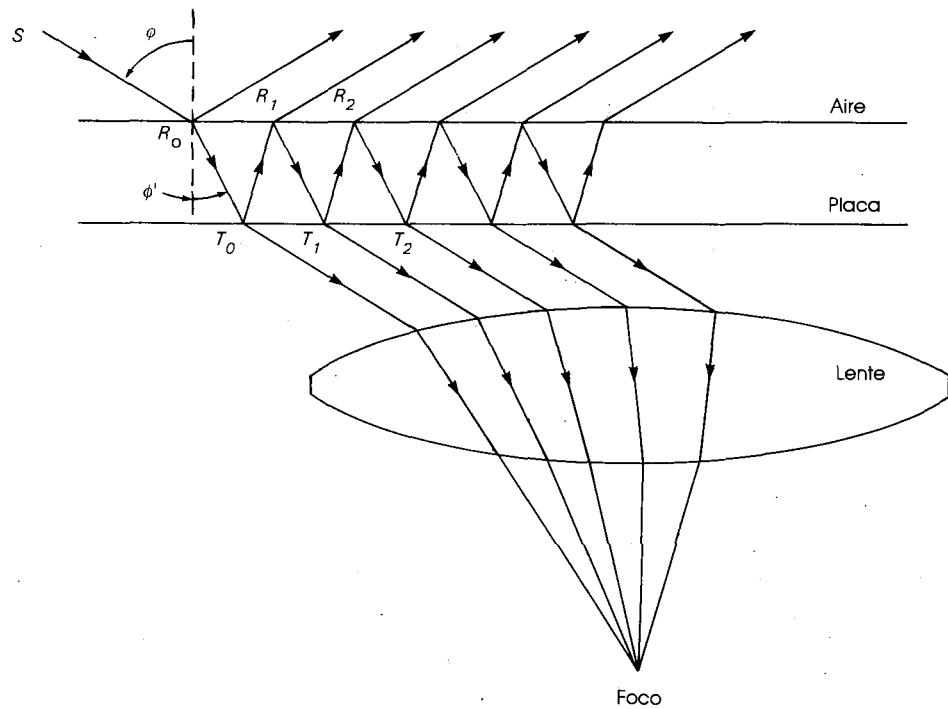
$$\begin{aligned} & A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + \dots + A_n \cos(\omega t + \alpha_n) \\ &= \operatorname{Re} [A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + \dots + A_n e^{i(\omega t + \alpha_n)}] \\ &= \operatorname{Re} A e^{i(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha), \end{aligned}$$

donde obtenemos

$$A_1 e^{i\alpha_1} + \dots + A_n e^{i\alpha_n} = A e^{i\alpha}$$



**FIGURA 1.25.** Suma vectorial



**FIGURA 1.26.** Interferencia de ondas múltiples

ja, mientras el resto se transmite a través de la placa. En  $T_0$ , parte se refleja en  $T_0$  y parte se transmite y se enfoca por la lente. Al llegar a  $R_1$  parte del rayo se refleja hacia  $T_1$  y parte se transmite. Y así sucesivamente.

Sea  $r(s)$  la razón de la amplitud reflejada (transmitida) a la incidente, y suponga que el rayo incidente inicial tiene una amplitud  $A$ . Entonces, la perturbación óptica en  $T_0$  está dada por

$$E_{T_0} = s^2 A \operatorname{Re} e^{i\omega t},$$

porque el rayo ha sido transmitido a través de dos superficies, mientras la perturbación óptica en  $T_1$  está dada por

$$E_{T_1} = s^2 r^2 A \operatorname{Re} e^{i(\omega t - \alpha)}$$

donde  $\alpha$  es el corrimiento de fase que surge de los rayos que viajan una distancia extra durante las dos reflexiones en  $T_0$  y en  $R_1$  (véase Ejercicio 2). En forma semejante

$$E_{T_2} = s^2 r^4 A \operatorname{Re} e^{i(\omega t - 2\alpha)}$$

y

$$E_{T_n} = s^2 r^{2n} A \operatorname{Re} e^{i(\omega t - n\alpha)}.$$

Para determinar la perturbación óptica resultante, sumamos todas estas perturbaciones y obtenemos

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=0}^{\infty} E_{T_n} = s^2 A \operatorname{Re} \left[ e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{-i\alpha})^n \right] \\ &= s^2 A \operatorname{Re} \left( \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{-i\alpha}} \right). \end{aligned}$$

La última ecuación se sigue de observar que la serie geométrica

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

satisface la identidad  $zG = G - 1$  o  $(1 - z)G = 1$ . Se abundará más al respecto en el Capítulo 3. Pero

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{-i\alpha}} &= \frac{e^{i\omega t}}{1 - r^2 e^{-i\alpha}} \cdot \frac{1 - r^2 e^{i\alpha}}{1 - r^2 e^{i\alpha}} \\ &= \frac{e^{i\omega t}(1 - r^2 e^{i\alpha})}{1 + r^4 - 2r^2 \cos \alpha}, \end{aligned}$$

de donde

$$\sqrt{1 + r^4 - 2r^2 \cos \alpha}$$

proporciona la perturbación óptica transmitida

$$E = \frac{s^2 A \cos(\omega t - \beta)}{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2 \cos \alpha}}.$$

La ley de conservación de la energía implica que  $s + r = 1$  y

$$E = \frac{(1-r)^2 A}{\sqrt{1 + r^4 - 2r^2 \cos \alpha}} \cdot \cos(\omega t - \beta).$$

El ángulo de fase  $\alpha$  depende de la longitud del camino que la luz viaja durante las reflexiones en  $T_0$  y  $R_1$  (véase Ejercicio 2). Como  $\omega = 2\pi c/\lambda$  donde la longitud de onda  $\lambda$  es la distancia entre máximos sucesivos de la onda, obtenemos

$$\alpha = \frac{2\pi(\ell_2 - \ell_1)}{\lambda}.$$

Si  $\alpha$  es un múltiplo entero de  $2\pi$ , la amplitud de la perturbación óptica es

$$\frac{(1-r)^2 A}{\sqrt{(1-r^2)^2}} = \frac{1-r}{1+r} A,$$

mientras que los múltiples impares de  $\pi$  producen una amplitud igual a

$$\frac{(1-r)^2 A}{\sqrt{(1+r^2)^2}} = \frac{(1-r)^2}{1+r^2} A.$$

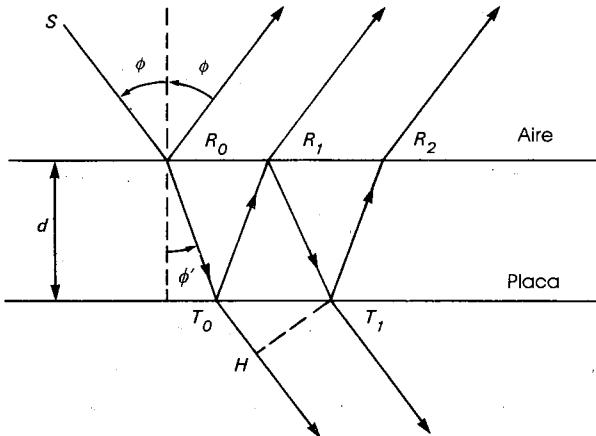
Cambios pequeños en el ángulo de incidencia  $\phi$  de la Figura 1.26 pueden producir cambios sustanciales en el ángulo de fase  $\alpha$ . Así, haces luminosos continuos, con amplitudes de incidencia idénticas, producirán imágenes con amplitudes *diferentes*. Si  $r$  es cercano a 1 (reflectancia grande), el cambio en amplitud

$$\frac{\frac{1-r}{1+r} A}{\frac{(1-r)^2}{1+r^2} A} = \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

será grande, produciendo una imagen que consiste en líneas brillantes delgadas sobre un fondo oscuro. Este efecto de halo se llama *franja de interferencia*. Si  $r$  es cercano a cero (reflectancia pequeña), el cambio de amplitud será pequeño y las franjas de interferencia serán amplias y difusas.

## EJERCICIOS

- Pruebe que la perturbación óptica reflejada en la Figura 1.26, también tiene la forma  $E = A^* \cos(\omega t - \gamma)$ . Encuentre  $A^*$  y  $\gamma$ .
- Considere la Figura 1.27.



**FIGURA 1.27.** Ley de Snell

Sea  $\ell_1$  la distancia de la fuente  $S$  a  $H$ , y  $\ell_2$  la distancia de  $S$  a  $T_1$ . La ley de Snell de la refracción establece que

$$v \operatorname{sen} \phi = v' \operatorname{sen} \phi',$$

donde  $\phi$  y  $\phi'$  son los ángulos de incidencia y refracción, respectivamente, y  $v$  y  $v'$  los índices de refracción del aire y la placa, respectivamente. Pruebe que si  $d$  es el espesor de la placa, entonces

$$\ell_2 - \ell_1 = 2d v' \cos \phi'.$$

- Muestre que  $E = f(ct + x)$  es también solución de la ecuación de onda.
- Sean  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$ , respectivamente, las intensidades eléctrica y magnética en cualquier punto de un campo electromagnético. Muestre que las ecuaciones de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

## **SECCIÓN 1.5**

Otros sinónimos de *analítica* son *holomorfa*, *monogénica* y *regular*.

## **SECCIÓN 1.6**

Se conocen condiciones suficientes para la analiticidad mucho más débiles. El mejor resultado en este sentido parece estar en [S, págs. 197-199], donde el teorema de *Looman-Menchoff* establece que si  $u$  y  $v$  son continuas en  $G$ , tienen primeras parciales en todos los puntos de  $G$ , excepto un número contable de puntos en  $G$  y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann casi en cualquier parte de  $G$ , entonces  $f = u + iv$  es analítica en  $G$ . Otros ejemplos, que muestran que las ecuaciones de Cauchy-Riemann solas son insuficientes para la analiticidad, pueden encontrarse en [T, págs 67, 70].

## **SECCIONES 1.7 y 1.9**

Para un desarrollo elemental más detallado de las superficies de Riemann, véase [Kn, Parte II, págs. 100-146]. Se pueden encontrar tablas de mapeos elementales de dominios en el Apéndice y en [Ko]. Como la derivada de una función en un punto se obtiene al considerar cocientes de diferencias de puntos cercanos, la definición de analiticidad se extiende a cualquier superficie de Riemann.



# INTEGRACIÓN COMPLEJA

---

Integración es un concepto de gran importancia y utilidad en el cálculo elemental. La naturaleza bidimensional del plano complejo sugiere considerar integrales a lo largo de curvas arbitrarias en  $\mathbb{C}$  en lugar de segmentos del eje real únicamente. Estas “integrales de línea” tienen propiedades interesantes y poco comunes cuando la función que se está integrando es analítica. La integración compleja es una de las teorías de las matemáticas en las que se trabaja con sumo entusiasmo, debido a su accesibilidad.

---

## 2.1 INTEGRALES DE LÍNEA

---

Las propiedades de las funciones analíticas estudiadas en el capítulo anterior, son resultantes de la derivabilidad de la función. En cálculo real, el teorema fundamental revela una conexión sorprendente y de gran utilidad entre las derivadas y las integrales definidas.

### TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si una función real  $f(x)$  es continua en un intervalo  $a \leq x \leq b$ , entonces  $f(x)$  posee antiderivadas en ese intervalo. Si  $F(x)$  es cualquier antiderivada de  $f(x)$  en  $a \leq x \leq b$ , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Una de las principales metas de este capítulo es probar un teorema similar para integrales de línea de una función analítica en el plano complejo. Aparentemente esta es una tarea difícil, ya que hay una infinidad de curvas que unen dos puntos dados, pero la prueba es fácil y las aplicaciones son muy útiles.

Un *arco*  $\gamma$  en el plano es cualquier conjunto de puntos que pueden describirse en forma paramétrica por

$$\gamma: x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

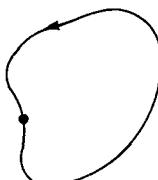
con  $x(t)$ ,  $y(t)$  funciones continuas de la variable real  $t$  en el intervalo real cerrado  $[\alpha, \beta]$ . En el plano complejo se describe al arco  $\gamma$  por medio de la función compleja continua de una variable real

$$\gamma: z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

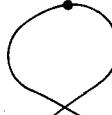
Se dice que el arco  $\gamma$  es **suave** si la función  $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$  no se anula y es continua en  $\alpha \leq t \leq \beta$ . Un arco suave por partes (spp) consiste en un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos. Si  $\gamma$  es un arco spp, entonces  $x(t)$  y  $y(t)$  son continuas, pero sus derivadas  $x'(t)$  y  $y'(t)$  son continuas por partes. Un arco es **simple**, o arco de Jordan, si  $z(t_1) = z(t_2)$  sólo si  $t_1 = t_2$ , esto es, si no se intersecta a sí mismo, o autointersecta. Un arco es una **curva cerrada** si  $z(\alpha) = z(\beta)$  y una **curva de Jordan** si es cerrada y simple excepto en los extremos  $\alpha$  y  $\beta$ . La Figura 2.1 ilustra algunos de estos conceptos.



Arco simple



Curva de Jordan



$$(b) \gamma^*: z(t) = \begin{cases} e^{it}, & -1 < t < 1, \\ 1 + t - i, & -1 \leq t \leq 0. \end{cases}$$

**SOLUCIÓN:** (a) Como  $(e^{it})' = ie^{it} \neq 0$ , el arco  $\gamma$  es suave. Note que  $|e^{it}| = 1$  y  $e^0 = e^{2\pi i} = 1$ . Por tanto,  $\gamma$  es una parametrización del círculo unitario, recorrido en dirección contraria a la de las manecillas del reloj. Claramente se observa que es una curva de Jordan (véase Figura 2.2a). (b)  $\gamma^*$  no es un arco suave porque  $z'(t)$  no está definido en  $t = 0$ . Sin embargo,  $z(t)$  es un arco suave en cada uno de los intervalos  $[-1, 0]$  y  $[0, 1]$ . Por tanto,  $\gamma^*$  es spp. Notemos en la gráfica de la Figura 2.2b que  $\gamma^*$  es un arco simple.

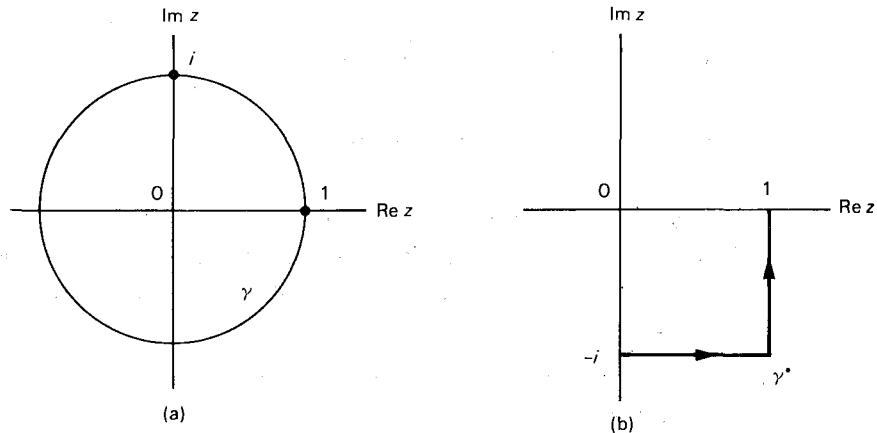


FIGURA 2.2. Círculo unitario y arco spp  $\gamma^*$

Las curvas de Jordan satisfacen la propiedad siguiente.

### TEOREMA DE LA CURVA DE JORDAN

Una curva de Jordan separa el plano extendido en dos regiones simplemente conexas, que tienen a la curva como su frontera.

La región que contiene el punto al infinito se llama **exterior** de la curva; la otra región se llama **interior**. Aunque este teorema parece obvio, su prueba es difícil, así que se aceptará su validez en base a la intuición. Una curva de Jordan está parametrizada en su sentido positivo si su interior se mantiene

siempre a la izquierda cuando se recorre la curva. Por ejemplo,  $z(t) = e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , parametriza a la curva  $|z| = 1$  en su sentido positivo, mientras que  $z(t) = e^{-it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , no lo hace.

Sea  $\gamma$  un arco suave en  $\mathbb{C}$  y sea la función compleja  $f(z)$  continua en  $\gamma$ . Se usa la parametrización de  $\gamma$  para definir la integral de línea de  $f$  sobre  $\gamma$  en términos de dos integrales reales. Si las dos integrales reales pueden evaluarse, se le podrá asignar un valor a la integral de línea.

## DEFINICIÓN

Sea  $\gamma: z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , un arco suave, y  $f(z) = u + iv$  continua en  $\gamma$ . Así, la integral de línea de  $f$  sobre  $\gamma$  estará dada por

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t)) + iv(z(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_{\alpha}^{\beta} [u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)] dt.\end{aligned}$$

La integral de línea sobre un arco  $\gamma$  spp se obtiene al aplicarse la definición anterior a un número finito de intervalos cerrados, en los cuales  $z(t)$  es suave, y sumar los resultados. Si no se está familiarizado con integrales de línea, léase el Apéndice A.3.

## EJEMPLO 2

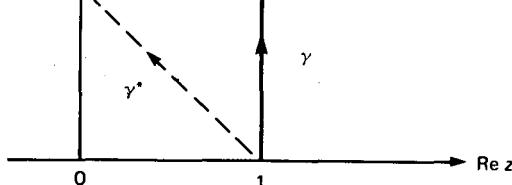
Para evaluar  $\int_{\gamma} x dz$  a lo largo del arco  $\gamma$  spp, mostrado en la Figura 2.3, parametrize  $\gamma$  por

$$\gamma: z(t) = \begin{cases} 1 + it, & 0 \leq t \leq 1, \\ (2-t) + i, & 1 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Entonces

$$z'(t) = \begin{cases} i, & 0 \leq t \leq 1, \\ -1, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

con derivadas izquierda y derecha diferentes en  $t = 1$ . Por definición, al



**FIGURA 2.3.** Arco  $\gamma$  spp

Al escoger una parametrización diferente para  $\gamma$ , por ejemplo

$$\gamma: z(t) = \begin{cases} 1 + i \log t, & 1 \leq t \leq e, \\ 2 - \frac{t}{e} + i, & e \leq t \leq 2e, \end{cases}$$

se tiene

$$z'(t) = \begin{cases} i/t, & 1 \leq t \leq e, \\ -1/e, & e \leq t \leq 2e, \end{cases}$$

y

$$\int_{\gamma} x \, dz = \int_1^e \frac{i}{t} \, dt + \int_e^{2e} \left(2 - \frac{t}{e}\right) \left(\frac{-1}{e}\right) \, dt = -\frac{1}{2} + i.$$

Por lo tanto, la integral de línea es independiente de las dos parametrizaciones de  $\gamma$ . Este caso se dará siempre y cuando el cambio de parámetros sea derivable por partes, como puede comprobarse fácilmente al utilizar la fórmula del cambio de variable del cálculo integral.

Se obtiene un valor diferente si se integra sobre el segmento de línea  $\gamma^*$  que une a 1 con  $i$ . Así,

$$\gamma^*: z(t) = (1-t) + it, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

así que

$$\int_{\gamma^*} x \, dz = \int_0^1 (1-t)(-1+i) \, dt = \frac{-1+i}{2}.$$

Este ejemplo muestra que no se puede obtener un teorema similar al teorema fundamental del cálculo para *todas* las funciones complejas continuas  $f(z)$ . Suponga, por otra parte, que se consideran únicamente aquellas fun-

ciones continuas  $f(z)$ , que son derivadas de una función analítica  $F = U + iV$  en alguna región  $G$  que contenga el arco suave  $\gamma$ . Entonces, por definición,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\gamma} F'(z) dz = \\ &\int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t)) z'(t) dt.\end{aligned}$$

Con la regla de la cadena del cálculo, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\beta} F'(z(t)) z'(t) dt &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [F(z(t))] dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [U(z(t))] dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} [V(z(t))] dt.\end{aligned}$$

Si se aplica el teorema fundamental del cálculo a cada una de estas integrales reales, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= [U(z(\beta)) - U(z(\alpha))] + i [V(z(\beta)) - V(z(\alpha))] \\ &= F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).\end{aligned}$$

Además, se puede extender fácilmente este resultado a los arcos spp con la suma de los resultados obtenidos de los subarcos suaves. Como el resultado depende únicamente de los puntos extremos de cada subarco suave, se habrá probado el siguiente teorema.

### TEOREMA FUNDAMENTAL (DEL CÁLCULO)

Si  $F(z)$  es una función analítica con derivada continua,  $f(z) = F'(z)$  en una región  $G$  que contiene al arco spp  $\gamma: z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Como la integral sólo depende de los extremos del arco  $\gamma$ , es independiente de la trayectoria. De esta forma se obtiene el mismo resultado para cualquier arco spp en  $G$  con estos extremos. Para curvas  $\gamma$  bien cerradas, el teorema

donde  $\gamma$  y  $\gamma^*$  son los arcos mostrados en la Figura 2.3.

**SOLUCIÓN:** La función continua  $f(z) = z$  es la derivada de la función entera  $F(z) = z^2/2$ . Al realizar la parametrización  $\gamma$  como en el Ejemplo 2, se tiene

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} z \, dz &= \int_0^1 (1+it)i \, dt + \int_1^2 [(2-t)+i] (-1) \, dt \\ &= i \int_0^1 dt - \int_0^1 t \, dt + \int_1^2 (t-2) \, dt - i \int_1^2 dt \\ &= -1.\end{aligned}$$

Si se utiliza la parametrización de  $\gamma^*$ , del Ejemplo 2, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_{\gamma^*} z \, dz &= \int_0^1 [(1-t)+it] (-1+i) \, dt \\ &= - \int_0^1 dt + i \int_0^1 (1-2t) \, dt = -1.\end{aligned}$$

Mediante el teorema fundamental, cualquier arco  $\gamma$  spp que empieza en 1 y termina en  $i$  satisface a

$$\int_{\gamma} z \, dz = \frac{z^2}{2} \Big|_1^i = \frac{i^2 - 1}{2} = -1.$$

#### EJEMPLO 4

Muestre que

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

**SOLUCIÓN:** Aparentemente este resultado se contrapone al teorema fundamental, ya que  $|z|=1$  es una curva de Jordan. Sin embargo, las antiderivadas de la función continua  $f(z) = 1/z$  son logaritmos y analíticas sobre la superficie de Riemann  $\mathcal{R}$ , descrita en las Secciones 1.7 y 1.9. La curva  $|z|=1$  no es una curva cerrada en  $\mathcal{R}$ . Se ilustrarán dos

métodos para obtener esta integral. Primero nótese que, a menos que se establezca lo contrario, se supone que las integraciones sobre las curvas de Jordan se llevan a cabo en sentido positivo. Así, al parametrizar  $|z| = 1$  por  $z(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , se tiene

$$z'(t) = ie^{it}$$

Por lo cual, la integral se convierte en

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{z'(t) dt}{z(t)} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Para utilizar el teorema fundamental en la evaluación de esta integral, elegimos *cualquier* rama de la superficie de Riemann  $\mathcal{R}$  de la función analítica

$$F(z) = \log z = \log |z| + i \arg z.$$

Por ejemplo, empezando en  $-i$  en la rama principal se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z} &= \log |z| + i \arg z \Big|_{e^{-\pi i/2}}^{e^{3\pi i/2}} = i(3\pi/2) - i(-\pi/2) \\ &= 2\pi i. \end{aligned}$$

### EJEMPLO 5

Sea  $P(z)$  cualquier polinomio, y  $\gamma$  un arco spp. Muestre que:

- (a)  $\int_{\gamma} P(z) dz = 0$  si  $\gamma$  es una curva cerrada,
- (b)  $\int_{\gamma} P(z) dz$  depende sólo de los extremos de  $\gamma$ .

**SOLUCIÓN:** Todo polinomio  $P(z)$  es continuo en  $\mathbb{C}$ . Además, si

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0,$$

entonces  $P(z)$  será la derivada del polinomio analítico

$$Q(z) = \frac{a_n z^{n+1}}{n+1} + \frac{a_{n-1} z^n}{n} + \dots + \frac{a_1 z^2}{2} + a_0 z.$$

De esta forma se satisface el teorema fundamental y se cumplen las partes (a) y (b).

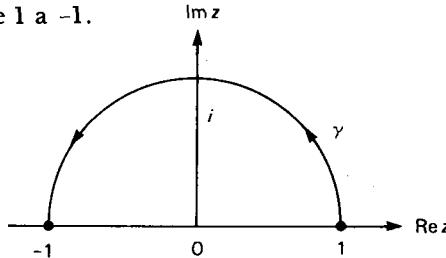
## EJERCICIOS

1. Muestre que la parametrización  $\gamma: z(t) = a \cos t + ib \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ , describe la elipse

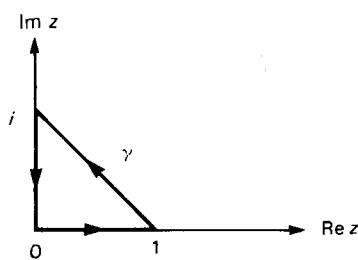
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En los Ejercicios 2-5, determine las parametrizaciones spp para los arcos o curvas indicados.

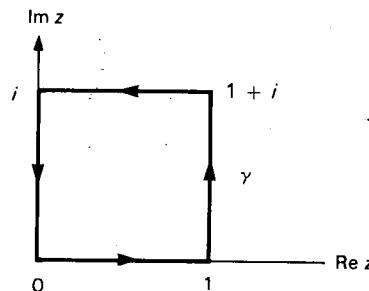
2. Semicírculo de 1 a -1.



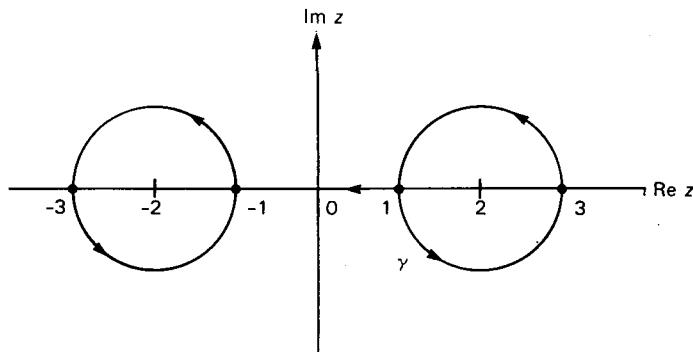
3. Triángulo



4. Cuadrado



5. Mancuerna que empieza en 1



6. Muestre que  $z'(t)$  puede interpretarse como un vector tangente al arco  $\gamma: z = z(t)$  en todos los puntos donde  $z'(t)$  no sea cero.

Evalué las integrales

$$\int x \, dz, \quad \int y \, dz, \quad \int \bar{z} \, dz$$

a lo largo de las trayectorias dadas en los Ejercicios 7-9.

7. El segmento de recta dirigido de 0 a  $1 - i$
8. Alrededor del círculo  $|z| = 1$
9. Alrededor del círculo  $|z - a| = R$
10. Evalué  $\int_{\gamma} y \, dz$ , donde  $\gamma$  es la línea recta que une 1 a  $i$ .
11. Evalué  $\int_{\gamma} y \, dz$ , donde  $\gamma$  es el arco en el primer cuadrante a lo largo de  $|z| = 1$  que une a 1 con  $i$ .
12. Evalué  $\int_{\gamma} y \, dz$ , donde  $\gamma$  es el arco a lo largo de los ejes coordenados que une 1 con  $i$ .
13. Ya que los tres valores en los Ejercicios 10-12 son diferentes, ¿por qué este resultado no viola el teorema fundamental?

Use parametrizaciones de los arcos para evaluar las integrales de los Ejercicios 14-24. Confirme su respuesta utilizando el teorema fundamental.

14. Evalué la integral  $\int (z - a)^n \, dz$ , con  $n$  como entero, alrededor del círculo  $|z - a| = R$ . (La respuesta para  $n = -1$  difiere del resto.)
15. Evalué  $\int_{\gamma} e^z \, dz$ , donde  $\gamma$  es la recta que une a 1 con  $i$ .
16. Evalué  $\int_{\gamma} e^z \, dz$ , donde  $\gamma$  es la trayectoria en el primer cuadrante sobre el círculo  $|z| = 1$  que une a 1 con  $i$ .
17. Evalué  $\int_{\gamma} e^z \, dz$ , donde  $\gamma$  es la trayectoria a lo largo de los ejes coordenados que une a 1 con  $i$ .
18. Evalué  $\int_{-i}^i e^{\pi z} \, dz$ .
19. Evalué  $\int_{-1}^i \operatorname{senh}(az) \, dz$ .
20. Evalué  $\int_{-1}^i (z - 1)^3 \, dz$ .

- \*21. Si  $\gamma$  es la elipse  $z(t) = a \cos t + ib \operatorname{sen} t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $a^2 - b^2 = 1$ , muestre que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \pm 2\pi,$$

según el valor del radical que se haya tomado.

(Sugerencia:  $1 - z^2(t) = [z'(t)]^2$ .)

22. Sean  $\gamma_1: z(t) = e^{it}$  y  $\gamma_2: z(t) = e^{-it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ . Evalué

bien que

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = 2\pi i.$$

Nótese que la función  $1/z$  no es analítica en el origen. ¿Podría ser que la integral de línea de una función a lo largo de una curva de Jordan spp se anulara cuando la función sea analítica sobre y en el *interior* de la curva? Sorprendentemente, esto es correcto.

Será fácil probar que la integral de línea a lo largo de una curva de Jordan spp es cero, siempre y cuando se suponga que la derivada de la función analítica en el integrando es continua en el interior de la curva de Jordan spp. Este es un requisito razonable, pues la derivada de toda función analítica que se ha encontrado es analítica. La prueba se basa en el resultado siguiente, y se encuentra en la mayoría de los libros de texto de cálculo elemental, así como en el Apéndice A.3.

### TEOREMA DE GREEN

Sea  $G$  la región interior de una curva de Jordan  $\gamma$  spp y suponga que las funciones reales  $p$  y  $q$  son continuas en  $G \cup \gamma$  con primeras parciales continuas en  $G$ . Entonces

$$\iint_G (p_x + q_y) dx dy = \int_\gamma p dy - q dx.$$

Ahora, si  $f = u + iv$  es analítica sobre y en el interior de una curva de Jordan  $\gamma$  spp, reescriba la integral de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  en la forma

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_\gamma (u + iv) (dx + i dy) = \int_\gamma u dx - v dy + i \int_\gamma v dx + u dy.$$

Si  $f'$  es continua en  $G$ , entonces las primeras parciales  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $v_x$ ,  $v_y$  también lo son. Al aplicarse el teorema de Green a las dos integrales de línea de la derecha, se obtiene

$$\int_\gamma f(z) dz = - \iint_G (v_x + u_y) dx dy + i \iint_G (u_x - v_y) dx dy.$$

Las primeras parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann,  $u_x = v_y$  y  $u_y = -v_x$ , porque  $f$  es analítica. Por tanto, ambos integrandos del lado de

recho son cero. Bajo el supuesto de que  $f'(z)$  es continua en  $G$  se ha probado el teorema siguiente.

### TEOREMA DE CAUCHY

Sea  $f(z)$  una función analítica sobre  $\gamma$  y en el interior de la curva de Jordan  $\gamma$  spp. Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

El inconveniente de esta prueba es la suposición de que  $f'(z)$  es continua en  $G$ . Se verificará esta condición antes de usar el teorema de Cauchy. Sin embargo, en la Sección 2.5 se probará que esta condición es innecesaria. De hecho, las funciones analíticas tienen derivadas *analíticas*, como se demostrará.

### EJEMPLO 1

Evalúe  $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz$ .

**SOLUCIÓN:** La notación empleada significa que la integración se toma sobre el círculo unitario en su sentido positivo. La función  $f(z) = e^z / (z^2 + 4)$  y su derivada

$$f'(z) = \frac{(z^2 - 2z + 4)}{(z^2 + 4)^2} e^z$$

son analíticas sobre  $\gamma$  y en el interior de  $|z| = 1$ . Como la derivada es analítica, es continua. Por ende, el teorema de Cauchy se aplica y

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2 + 4} dz = 0.$$

### EJEMPLO 2

Muestre que

$$\frac{dz}{d\theta} = rie^{i\theta} = iz$$

así que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2} d\theta = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{R+z}{R-z} \frac{dz}{z} \right).$$

Pero, por fracciones parciales,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{R+z}{z(R-z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left( \frac{1}{z} + \frac{2}{R-z} \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{2dz}{R-z}. \end{aligned}$$

Por medio de los métodos utilizados en el Ejemplo 4 de la Sección 2.1, se puede mostrar que la primera de las integrales en el lado derecho es igual a 1, con  $z = re^{it}$  y  $z' = ire^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . La última integral del lado derecho es cero, según el teorema de Cauchy, ya que  $f(z) = 2/(R-z)$  y  $f'(z) = 2/(R-z)^2$  son analíticas en  $|z| \leq r$ .

### EJEMPLO 3

Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

**SOLUCIÓN:** Si se aplica el teorema de Cauchy a la función analítica  $f(z) = e^{-z^2}$ , en una región que contenga al rectángulo  $|x| \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$  (véase Figura 2.4), se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-a}^a e^{-x^2} dx + \int_0^b e^{-(a+iy)^2} i dy + \int_a^{-a} e^{-(x+ib)^2} dx + \int_b^0 e^{-(b+iy)^2} idy \\ &= \int_{-a}^a e^{-x^2} dx - e^{-b^2} \int_{-a}^a e^{-x^2} (\cos 2bx - i \operatorname{sen} 2bx) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} (e^{2iay} - e^{-2iay}) dy \\
 &= \int_{-a}^a e^{-x^2} dx - e^{-b^2} \int_{-a}^a e^{-x^2} \cos 2bx dx + 2e^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} \sin 2ay dy, \quad (1)
 \end{aligned}$$

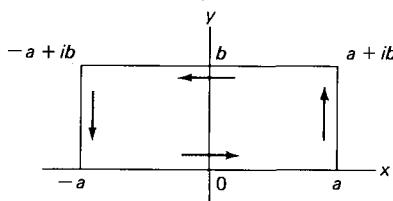


FIGURA 2.4. Rectángulo de integración

porque la parte imaginaria de la integral en medio se anula. Pero, al usar coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
 \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \pi, \quad (2)
 \end{aligned}$$

las dos primeras integrales en (1) serán convergentes cuando  $a \rightarrow \infty$ . Si  $a \rightarrow \infty$ , el último término en (1) se anula y

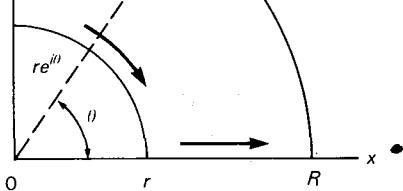
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = e^{-b^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

#### EJEMPLO 4

Pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

**SOLUCIÓN:** Al integrar  $e^{iz^2}/z$  a lo largo de la frontera de  $r \leq |z| \leq R$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi/2$  (véase Figura 2.5), el teorema de Cauchy dará



**FIGURA 2.5.** Región de integración

Si se utiliza la desigualdad  $| \int_a^b f(\theta) d\theta | \leq \int_a^b |f(\theta)| d\theta$  que se probará —para integrandos con valores complejos— en la Sección 2.3, se tiene

$$\begin{aligned} \left| i \int_0^{\pi/2} e^{i(Re^{i\theta})^2} d\theta \right| &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-R^2 \operatorname{sen} 2\theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \operatorname{sen} 2\theta} d\theta \\ &< 2 \int_0^{\pi/4} e^{-4R^2 \theta/\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2R^2} [1 - e^{-R^2}], \end{aligned}$$

ya que  $h(\theta) = \operatorname{sen} 2\theta - (4\theta/\pi)$  se anula en  $\theta = 0, \pi/4$  y satisface a  $h''(\theta) < 0$  para  $0 < \theta < \pi/4$ , lo cual implica que  $h$  es cóncava hacia abajo y  $\operatorname{sen} 2\theta \geq 4\theta/\pi$ . Por tanto, la segunda integral en (3) se anula cuando  $R \rightarrow \infty$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe una  $r > 0$  tal que  $|e^{iz^2} - 1| < \epsilon$  siempre que  $|z| < r$ . Entonces

$$\left| i \int_0^{\pi/2} e^{i(re^{i\theta})^2} d\theta - \frac{i\pi}{2} \right| = \left| i \int_0^{\pi/2} (e^{i(re^{i\theta})^2} - 1) d\theta \right| < \epsilon \frac{\pi}{2},$$

de ahí que la última integral en (3) se aproxime a  $i\pi/2$  cuando  $r \rightarrow 0$ . Al sumar la primera y la tercera integrales en (3) y hacer  $R \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow 0$ , tenemos

$$0 = \int_0^\infty \frac{e^{ix^2} - e^{-ix^2}}{x} dx - \frac{i\pi}{2} = 2i \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x} dx - \frac{i\pi}{2}.$$

## EJERCICIOS

1. Muestre que

$$\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{Log} z}{z} dz = 0,$$

aunque  $(\operatorname{Log} z)/z$  no sea analítica en  $|z| \leq 1$ . Qué resultado se obtiene si se integra

$$\int_{\gamma} \frac{\log z}{z} dz$$

sobre  $\gamma$ :  $z(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ? Explíquelo.

Utilice el teorema de Green para los Ejercicios 2-4, donde  $A$  es igual al área de  $G$  y  $\partial G$  es la frontera de  $G$ .

2. Pruebe que  $\int_{\partial G} x dz = iA$ .
3. Muestre que  $\int_{\partial G} y dz = -A$ .
4. Pruebe que  $\int_{\partial G} \bar{z} dz = 2iA$ .
5. Pruebe que

$$\int_0^{\pi/2} e^{a \cos t} \cos(t + a \operatorname{sen} t) dt = \frac{\operatorname{sen} a}{a}, \quad a > 0,$$

si integra  $e^z$  a lo largo de la curva de Jordan en el primer cuadrante, compuesta del cuarto de círculo  $|z| = a$  y de los segmentos de recta de  $ia$  a  $0$  y de  $0$  a  $a$ .

6. Muestre que

$$\int_0^T e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{aT}(a \cos bT + b \operatorname{sen} bT) - a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^T e^{at} \operatorname{sen} bt dt = \frac{e^{aT}(a \operatorname{sen} bT - b \cos bT) + b}{a^2 + b^2},$$

al integrar  $f(z) = e^z$  a lo largo del segmento de recta que une a  $0$  con  $(a + ib)T$ .

7. Muestre que

$$\int_0^T \operatorname{sen} at \cosh bt dt = \frac{b \operatorname{sen} aT \operatorname{senh} bT - a \cos aT \cosh bT + a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^T \cos at \operatorname{senh} bt dt = \frac{b \cos aT \cosh bT + a \operatorname{sen} aT \operatorname{senh} bT - b}{a^2 + b^2},$$

si integra  $f(z) = \operatorname{sen} z$  a lo largo del segmento de recta entre  $0$  y  $(a + ib)T$ .

8. Obtenga las integrales

$$\int_0^T a \operatorname{sen} aT \operatorname{cosh} bT + b \operatorname{cos} aT \operatorname{senh} bT$$

9. Suponga que  $0 < b < 1$  y aplique el teorema de Cauchy a la función  $f(z) = (1 + z^2)^{-1}$  a lo largo de la frontera del rectángulo de la Figura 2.4, para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - b^2 + x^2) dx}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4x^2 b^2} = \pi.$$

10. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} \cos ax dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-a^2/4k}, \quad k > 0, \quad a \text{ real},$$

si utiliza el mismo procedimiento que en el Ejemplo 3, con la función  $f(z) = e^{kz^2}$ . Verifique su respuesta cambiando variables.

11. Pruebe que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - b^2 + x^2) \cos kx + 2xb \sin kx}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4x^2 b^2} dx &= e^{kb} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{1 + x^2} dx, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1 - b^2 + x^2) \sin kx - 2xb \cos kx}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4x^2 b^2} dx &= 0. \end{aligned}$$

con  $0 < b < 1$  y  $k$  real.

12. Sea  $0 < b < 1/\sqrt{2}$  y muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(1 + (x - ib)^4)}{|1 + (x + ib)^4|^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4}.$$

13. Muestre que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin 2xb dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{x^2} dx, \quad b > 0,$$

integrando alrededor de un rectángulo apropiado.

14. Pruebe las igualdades

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \text{ integrales de Fresnel,}$$

al aplicar el teorema de Cauchy a la función  $f(z) = e^{-z^2}$  a lo largo de la frontera del sector  $0 \leq |z| \leq R, 0 \leq \arg z \leq \pi/4$ .

15. Muestre que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\sqrt{2} + 1},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{\sqrt{2} - 1},$$

cuando integra  $e^{-z^2}$  a lo largo de la frontera del sector  $0 \leq |z| \leq R, 0 \leq \arg z \leq \pi/8$ .

16. Pruebe la integral de Dirichlet

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

si integra  $f(z) = e^{iz}/z$  a lo largo de la frontera del conjunto  $r \leq |z| \leq R$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . Verifique su respuesta cambiando las variables en el Ejemplo 4.

## 2.3 LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Se necesitarán conocer los siguientes resultados acerca de las integrales.

### TEOREMA

- (i)  $\int_{\gamma} [\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)] dz = \alpha \int_{\gamma} f_1(z) dz + \beta \int_{\gamma} f_2(z) dz.$
- (ii)  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$ , donde  $\gamma_1 + \gamma_2$  es la trayectoria que consiste en recorrer primero  $\gamma_1$  seguido de  $\gamma_2$ .
- (iii)  $\int_{-\gamma} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz$ , donde  $-\gamma$  es la trayectoria que recorre el arco  $\gamma$  en sentido inverso.
- (iv)  $|\int_{\gamma} f(z) dz| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|$ , donde definimos  $|dz|$  como la diferencial con respecto a la *longitud de arco*, con

$$|dz| = |dx + idy| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = ds.$$

**PRUEBA:** Para probar (iv), obsérvese que para cualquier constante real  $\theta$ ,

$$\operatorname{Re} \left( e^{-i\theta} \int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\alpha}^{\beta} \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f(z(t)) z'(t)) dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| |z'(t)| dt,$$

ya que la parte real de un número complejo no puede exceder su valor absoluto. Si se escribe  $\int_{\gamma} f(z) dz$  en forma polar y  $\theta = \arg [\int_{\gamma} f(z) dz]$ , la expresión de la izquierda se reduce al valor absoluto de la integral y se cumple la desigualdad. Las pruebas restantes son consecuencias inmediatas de la definición de integral de línea de la Sección 2.1. Sus verificaciones, directas y algo tediosas, se dejarán como ejercicios. ■

Si  $|f(z)| \leq M$  en todo punto  $z$  de un arco  $\gamma$  de longitud  $L$ , la parte (iv) del teorema proporciona la desigualdad

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \int_{\gamma} |dz| = ML.$$

### EJEMPLO 1

$$\left| \int_{|z|=1} e^z dz \right| \leq 2\pi e.$$

**SOLUCIÓN:** De la parte (iv), se tiene

$$\left| \int_{|z|=1} e^z dz \right| \leq \int_{|z|=1} |e^z| |dz|.$$

Como  $|e^z| = e^x \leq e$  para todos los puntos  $z = x + iy$  sobre el círculo unitario, se observa que

$$\int_{|z|=1} |e^z| |dz| \leq e \int_{|z|=1} |dz| = 2\pi e,$$

y se verifica la desigualdad. De hecho, es claro que

$$\left| \int_{|z|=1} e^z dz \right| < 2\pi e,$$

ya que  $|e^z|$  alcanza el valor  $e$  sólo en  $z = 1$ .

En muchas aplicaciones es necesario considerar regiones que no son simplemente conexas. Se generalizará el teorema de Cauchy al caso de una región *múltiplemente conexa*.

### TEOREMA

Sea  $\gamma_0$  una curva de Jordan spp tal que su interior contiene las curvas de Jordan spp disjuntas,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ , ninguna de las cuales está contenida en el interior de la otra. Supongamos que  $f(z)$  es analítica en una región  $G$  que contiene al conjunto  $S$ , el cual consiste en todos los puntos sobre y en el interior de  $\gamma_0$  pero no en los interiores de  $\gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Entonces,

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

**PRUEBA:** Siempre se podrán encontrar arcos  $L_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , spp disjuntos, que unan a  $\gamma_k$  con  $\gamma_{k+1}$  (donde  $L_n$  une a  $\gamma_n$  con  $\gamma_0$ ) que formen dos curvas de Jordan spp, cada una contenida en alguna subregión simplemente conexa de  $G$ . (Sobre bases intuitivas omitimos la prueba. Véase Figura 2.6.) Por el teorema de Cauchy, la integral de  $f(z)$  sobre estas curvas, cada una recorrida en sen-

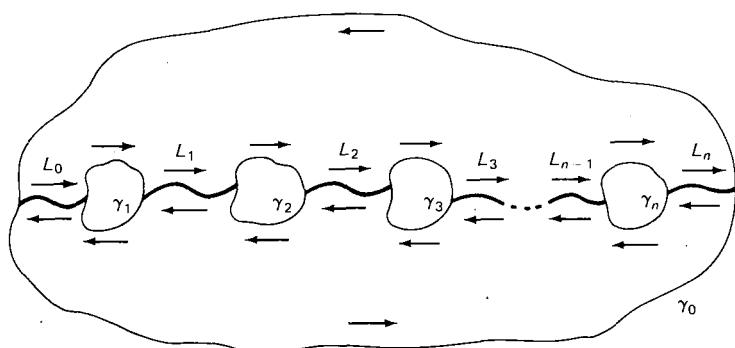


FIGURA 2.6. Un dominio múltiplemente conexo

tido positivo, se anula. Pero la contribución total de estas dos curvas es equivalente al recorrido de  $\gamma_0$  en el sentido positivo,  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  en el sentido negativo (contrario), y  $L_0, \dots, L_n$  en direcciones opuestas. Así, las integrales sobre los arcos  $L_k$  se cancelan, y

$$0 = \int_{\gamma_0 - \sum_{k=1}^n \gamma_k} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz. \blacksquare$$

En seguida se probará el sorprendente resultado de que los valores de una función analítica, en el interior de una curva de Jordan  $\gamma$  spp, están completamente determinados por sus valores sobre la curva.

### LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Sea  $f(z)$  una función analítica en una región simplemente conexa que contenga la curva de Jordan  $\gamma$  spp. Entonces

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz,$$

para todos los puntos  $\xi$  en el interior de  $\gamma$ .

**PRUEBA:** Se fija  $\xi$ . Entonces, dado  $\epsilon > 0$ , existe un disco cerrado  $|z - \xi| \leq r$  en el interior de  $\gamma$  para el cual  $|f(z) - f(\xi)| < \epsilon$ . (Véase Figura 2.7.) Como  $f(z)/(z - \xi)$  es analítica en una región que contiene aquellos puntos sobre y en el interior de  $\gamma$ , que satisfacen  $|z - \xi| \geq r$ , el teorema de Cauchy para regiones múltiplemente conexas implica

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=r} \frac{f(z)}{z - \xi} dz.$$

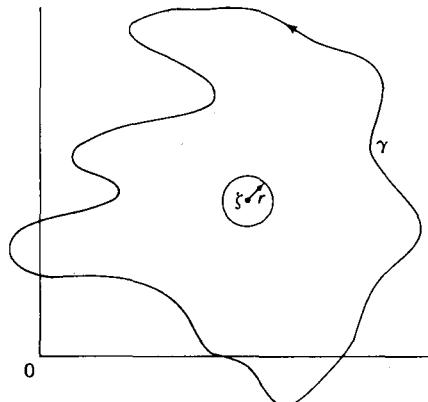


FIGURA 2.7. La fórmula integral de Cauchy

Pero

$$\int_{|z-\xi|=r} \frac{f(z)}{z-\xi} dz = f(\xi) \int_{|z-\xi|=r} \frac{dz}{z-\xi} + \int_{|z-\xi|=r} \frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi} dz.$$

Por el Ejemplo 4, o el Ejercicio 14 de la Sección 2.1, la primera integral del lado derecho es igual a  $2\pi i$ , entonces

$$\left| \int_{|z-\xi|=r} \frac{f(z)}{z-\xi} dz - 2\pi i f(\xi) \right| \leq \int_{|z-\xi|=r} \frac{|f(z)-f(\xi)|}{|z-\xi|} |dz| < 2\pi \epsilon.$$

Como  $\epsilon$  puede elegirse arbitrariamente cercano a 0 la prueba está completa. ■

## EJEMPLO 2

Integre

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz$$

sobre las curvas dadas: (a)  $\gamma$ :  $|z| = 2$ , (b)  $\gamma$ :  $|z| = \frac{1}{2}$ ; y (c)  $\gamma$ :  $|z - i/2| = 1$ .

**SOLUCIÓN:** (a)  $\gamma$ :  $|z| = 2$ . Al descomponer la integral por fracciones parciales, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz &= \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z+i} dz - \frac{1}{2} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z-i} dz \\ &= 2\pi i \left[ \cos(0) - \frac{1}{2} \cos(-i) - \frac{1}{2} \cos i \right] = 2\pi i [1 - \cosh(1)]. \end{aligned}$$

(b)  $\gamma$ :  $|z| = \frac{1}{2}$ . Como  $\cos z/(z^2 + 1)$  es analítica sobre y en el interior de  $\gamma$ , la integral es igual a  $2\pi i$  veces su valor en  $z = 0$ , esto es,

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz = 2\pi i.$$

(c)  $\gamma$ :  $|z - i/2| = 1$ . Como  $\cos z/(z+i)$  es analítica sobre y en el interior de  $\gamma$ , por fracciones parciales se tiene

$$\frac{1}{z(z-i)} = i \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z-i} \right),$$

por lo cual

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^3 + z} dz = 2\pi i \left[ i \left( \frac{\cos(0)}{i} \right) - i \left( \frac{\cos i}{2i} \right) \right] = 2\pi i \left[ 1 - \frac{1}{2} \cosh(1) \right].$$

Por supuesto, en los tres ejemplos se puede utilizar la descomposición en fracciones parciales de la parte (a), porque las integrales correspondientes se anulan cuando los puntos  $0$  o  $\pm i$  están en el exterior de  $\gamma$ .

Si la fórmula integral de Cauchy se deriva formalmente con respecto a  $\xi$  dentro del signo de integración, se obtiene una expresión para la derivada en todos los puntos del interior de  $\gamma$ :

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz.$$

Para verificar esta ecuación se usa la fórmula integral de Cauchy al reescribirse

$$\begin{aligned} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) \left[ \frac{1}{h} \left( \frac{1}{z - \xi - h} - \frac{1}{z - \xi} \right) - \frac{1}{(z - \xi)^2} \right] dz \\ &= \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - \xi)^2 (z - \xi - h)}. \end{aligned}$$

Sea  $d$  la distancia más corta entre  $\xi$  y  $\gamma$ ,  $M$  el valor máximo de  $|f(z)|$  sobre  $\gamma$ , y  $L$  la longitud de  $\gamma$ . Al suponer que  $|h| \leq d/2$ , entonces

$$|z - \xi - h| \geq |z - \xi| - |h| \geq d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

de tal forma que

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - \xi)^2 (z - \xi - h)} \right| \leq \frac{ML|h|}{\pi d^3}.$$

Haciendo  $h \rightarrow 0$ , se sigue que

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \xi)^2} dz.$$

En la Sección 2.5 se generalizará este procedimiento y se probará el **teorema de Cauchy para las derivadas**:

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \xi)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots,$$

válido para todos los puntos  $\xi$  del interior de una curva de Jordan  $\gamma$  spp contenida en una región  $G$  simplemente conexa, en la cual  $f(z)$  es analítica. Obsérvese que esta fórmula implica que  $f(z)$  tiene derivadas de todos los órdenes en  $G$ . Por ende, la derivada de una función analítica es también analítica. Con base en este hecho, se obtiene un inverso del teorema de Cauchy que frecuentemente es útil para establecer la analiticidad de una función.

## TEOREMA DE MORERA

Si  $f(z)$  es continua en una región simplemente conexa  $G$  y satisface

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

para todas las curvas  $\gamma$  spp cerradas en  $G$ , entonces  $f(z)$  es analítica en  $G$ .

**PRUEBA:** Elija un punto  $z_0$  en  $G$  y defina

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi,$$

para todo  $z$  en  $G$ . Luego entonces,  $F(z)$  está bien definida porque es independiente de la trayectoria: Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son curvas spp en  $G$  que van de  $z_0$  a  $z$ , entonces  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  es una curva cerrada spp en  $G$ , y

$$0 = \int_{\gamma} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma_1} f(\xi) d\xi - \int_{\gamma_2} f(\xi) d\xi.$$

Si  $f$  es continua, para cualquier punto  $z$  en  $G$  y  $\epsilon > 0$  existe un disco  $|\xi - z| < \delta$  en  $G$  tal que  $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$ . Si  $|h| < \delta$ , se tiene

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_{z_0}^{z+h} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right] = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\xi) d\xi,$$

donde la integración puede tomarse sobre la recta desde  $z$  hasta  $z + h$ . Como

$$f(z) = \frac{f(z)}{h} \int_z^{z+h} d\xi,$$

por sustracción se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(\xi) - f(z)| d\xi < \epsilon. \end{aligned}$$

Por tanto  $F'(z) = f(z)$ , así que  $F$  es analítica en  $G$ . Pero entonces  $F$  tiene derivada analítica, lo que implica que  $f$  también es analítica en  $G$ .

## EJEMPLO 3

Integre

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-1)} dz$$

Sobre (a)  $\gamma: |z| = \frac{1}{3}$ , (b)  $\gamma: |z-1| = \frac{1}{3}$ , y (c)  $\gamma: |z| = 2$ .

**SOLUCIÓN:** (a)  $\gamma: |z| = \frac{1}{3}$ . En este caso  $\cos z/(z - 1)$  es analítica sobre y en el interior de  $\gamma$ , así que, por el teorema de Cauchy para las derivadas, se obtiene

$$\int_{\gamma} \left( \frac{\cos z}{z-1} \right) dz = 2\pi i \left( \frac{\cos z}{z-1} \right) \Big|_{z=0} = -2\pi i.$$

(b)  $\gamma: |z - 1| = \frac{1}{3}$ . Ahora que  $z^{-2} \cos z$  es analítica sobre y en el interior de  $\gamma$ , por lo tanto, la integral es igual a  $2\pi i$  veces el valor de  $z^{-2} \cos z$  en  $z = 1$ , esto es,

$$\int_{\gamma} \frac{z^{-2} \cos z}{z-1} dz = 2\pi i \cos(1).$$

(c)  $\gamma: |z| = 2$ . Mediante el teorema de Cauchy en regiones múltiplemente conexas, se puede reemplazar a  $\gamma$  por los círculos en las partes (a) y (b). Luego la integral es igual a  $2\pi i [\cos(1) - 1]$ . Alternativamente, al descomponer el integrando en fracciones parciales, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-1)} dz &= \int_{\gamma} \cos z \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) dz \\ &= 2\pi i [\cos(1) - \cos(0) + \operatorname{sen}(0)] = 2\pi i [\cos(1) - 1], \end{aligned}$$

por el teorema de Cauchy para las derivadas.

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-3, evalúe la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$$

mediante la descomposición del integrando en fracciones parciales.

1. Si  $a$  y  $b$  están en el interior de  $\gamma$
2. Si  $a$  está en el interior de  $\gamma$  y  $b$  en el exterior
3. Si  $b$  está en el interior de  $\gamma$  y  $a$  en el exterior

Sea  $z(t) = 2e^{it} + 1, 0 \leq t \leq 2\pi$ . Evalúe las integrales de los Ejercicios 4-7.

$$4. \int_{\gamma} \frac{e^z}{z} dz$$

$$5. \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z-1} dz$$

$$6. \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2+1} dz$$

$$7. \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen} z}{z^2-z} dz$$

Sea  $z(t) = 2e^{it} + 1, 0 \leq t \leq 2\pi$ . Evalúe las integrales de los Ejercicios 8-11.

$$8. \int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2} dz$$

$$9. \int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-1)^2} dz$$

10.  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z^2 + 1)^2} dz$

11.  $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{(z - 1)^3} dz$

Pruebe las identidades integrales de los Ejercicios 12-14.

12.  $\int_{\gamma} [\alpha f_1(z) + \beta f_2(z)] dz = \alpha \int_{\gamma} f_1(z) dz + \beta \int_{\gamma} f_2(z) dz$

13.  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz$

14.  $\int_{-\gamma} f(z) dz = -\int_{\gamma} f(z) dz$

15. Sin calcular la integral, muestre que

$$\left| \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1} \right| \leq \frac{4\pi}{3}.$$

16. Si  $\gamma$  es el semicírculo  $|z| = R$ ,  $|\arg z| \leq \pi/2$ ,  $R > 1$ , muestre que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{\operatorname{Log} z}{z^2} dz \right| \leq \frac{\pi}{R} \left( \operatorname{Log} R + \frac{\pi}{2} \right)$$

y, por ende, que el valor de la integral tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ .

17. Evalúe  $\int_{|z|=1} |z + 1| |dz|$ .

18. Si  $f(z)$  es analítica y acotada por  $M$  en  $|z| \leq R$ , pruebe que

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{MRn!}{(R - |z|)^{n+1}}, \quad |z| < R.$$

19. Si  $f(z)$  es analítica en  $|z| < 1$  y  $|f(z)| \leq (1 - |z|)^{-1}$ , muestre que

$$|f^{(n)}(0)| \leq (n+1)! \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

20. Una función analítica  $f(z)$  ¿puede satisfacer  $|f^{(n)}(z)| > n! n^n$ , para todos los enteros  $n$  positivos, en algún punto  $z$ ?

21. Calcule

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{kz^n}}{z} dz,$$

con  $n$  entero positivo. Ahora, muestre que

$$\int_0^{2\pi} e^{k \cos n\theta} \cos(k \operatorname{sen} n\theta) d\theta = 2\pi.$$

22. El polinomio de Legendre  $P_n(z)$  se define como

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} [(z^2 - 1)^n].$$

Con la fórmula de Cauchy para las derivadas, muestre que

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\xi^2 - 1)^n d\xi}{2^n (\xi - z)^{n+1}},$$

donde  $z$  está en el interior de la curva de Jordan  $\gamma$  spp.

23. Pruebe la siguiente extensión del teorema de Morera: Sea  $f(z)$  continua en una región  $G$  (con la posibilidad de ser múltiplemente conexa). Suponga que, para cada  $\xi$  en  $G$ , existe un disco  $D$ , que contiene a  $\xi$ , en  $G$  tal que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

para todas las curvas  $\gamma$  spp cerradas en  $D$ . Entonces  $f(z)$  será analítica en  $G$ .

24. Sea  $P(z)$  un polinomio, ninguna de cuyas raíces se encuentra sobre la curva de Jordan  $\gamma$  spp. Muestre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

es igual al número de raíces de  $P(z)$  en el interior de  $\gamma$  incluyendo multiplicidades.

## 2.4 TEOREMA DE LIOUVILLE Y PRINCIPIO DEL MÁXIMO

En esta sección se presentan tres consecuencias útiles de la fórmula integral de Cauchy, y la extensión de ésta a derivadas de orden superior.

### TEOREMA DE GAUSS DEL VALOR MEDIO

Sea  $f(z)$  analítica en  $|z - \xi| < R$ . Entonces

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi + re^{i\theta}) d\theta, \quad 0 < r < R.$$

**PRUEBA:** La fórmula integral de Cauchy establece que

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=r} \frac{f(z)}{z-\xi} dz,$$

para toda  $0 < r < R$ . Si  $z = \xi + re^{i\theta}$ , entonces  $z'(\theta) = ire^{i\theta}$ , de donde se sigue la identidad deseada. ■

### LA ESTIMACIÓN DE CAUCHY

Sea  $f(z)$  analítica y que satisface  $|f(z)| \leq M$  en  $|z - \xi| \leq r$ . Entonces

$$|f^{(n)}(\xi)| \leq \frac{Mn!}{r^n}.$$

**PRUEBA:** Por el teorema de Cauchy para las derivadas, se tiene

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(\xi)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-\xi|=r} \frac{f(z)}{(z-\xi)^{n+1}} dz \right| \\ &\leq \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} \int_{|z-\xi|=r} |dz| = \frac{Mn!}{r^n}. \blacksquare \end{aligned}$$

### TEOREMA DE LIOUVILLE

Una función entera no puede acotarse en todo  $\mathbb{C}$ , a menos que sea una constante.

**PRUEBA:** Suponga que  $f(z)$  es entera y acotada por  $M$ . Así, en cualquier punto  $\xi$  en  $\mathbb{C}$ , la estimación de Cauchy implica que  $|f'(\xi)| \leq M/r$ . Pero  $r$  puede hacerse arbitrariamente grande, de manera que  $f'(\xi) = 0$  en todo  $\xi$  de  $\mathbb{C}$ . Por tanto,  $f(z)$  es constante en  $\mathbb{C}$ . ■

Enseguida se prueba uno de los teoremas más útiles de la teoría de las funciones analíticas.

### PRINCIPIO DEL MÁXIMO

Si  $f(z)$  es analítica y no es constante en una región  $G$ , entonces  $|f(z)|$  no tiene máximo en  $G$ .

**PRUEBA:** Suponga que hay un punto  $z_0$  en  $G$  que satisface  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$  para todo  $z$  en  $G$ . Como  $z_0$  es un punto interior, existe un número  $r > 0$  tal que  $|z - z_0| \leq r$  está contenido en  $G$ . Entonces, por el teorema de Gauss del valor medio,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt,$$

esto es, el valor en el centro del círculo es igual al promedio integral de sus valores sobre el círculo. Por suposición  $|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|$ , y, si se cumple la desigualdad estricta para algún valor de  $t$ , debe cumplirse, por la continuidad de  $|f(z)|$ , en un arco del círculo. Pero entonces

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| dt = |f(z_0)|,$$

lo cual es una contradicción. Así,  $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$  para  $0 \leq t \leq 2\pi$ , y, como el procedimiento se cumple sobre todos los círculos  $|z - z_0| = s$ ,  $0 < s \leq r$ ,  $|f(z)|$  es constante en el disco  $|z - z_0| \leq r$ . Sea  $S$  el conjunto de todos

los puntos  $z$  de  $G$  que satisfacen  $|f(z)| = |f(z_0)|$ . El argumento anterior muestra que cada uno de tales puntos es interior de  $S$ , por lo que  $S$  es abierto. Pero cualquier punto en  $T = G - S$  es también un punto interior debido a la continuidad de  $|f(z)|$ . Ni  $T$  ni  $S$  contienen puntos frontera uno del otro, ya que son abiertos. Como  $G$  es conexo,  $T$  debe ser vacío. Por tanto,  $S = G$  y —según el teorema de la derivada cero de la Sección 1.6—  $f(z)$  es constante en  $G$ , lo que contradice la hipótesis. Así,  $|f(z)|$  no tiene máximo en  $G$ , y la prueba queda completa. ■

Se denota por  $\bar{G}$  el conjunto que consiste en  $G$  unido con su frontera. Como el exterior de  $G$  es abierto,  $\bar{G}$  es cerrado. Se puede, ahora, reformular el principio del máximo de la siguiente manera.

### COROLARIO

Sea  $f(z)$  analítica en una región acotada  $G$  y continua en  $\bar{G}$ . Entonces  $|f(z)|$  alcanza su máximo sobre la frontera de  $G$ .

**PRUEBA:** Un teorema del cálculo ordinario establece que  $|f(z)|$  alcanza un máximo en alguna parte de  $\bar{G}$  si  $G$  es cerrado y acotado, y  $|f(z)|$  es continua en  $G$ . Según el principio del máximo, éste no puede estar en  $G$ , así que debe estar en la frontera de  $G$ . ■

### PRINCIPIO DEL MÍNIMO

Sea  $f(z)$  analítica en una región acotada  $G$ , y continua y no nula en  $G$ . Entonces  $|f(z)|$  alcanza su mínimo en la frontera de  $G$ .

**PRUEBA:** Sea  $g(z) = 1/f(z)$ . Entonces  $g$  es analítica en  $G$  y continua en  $\bar{G}$ . Según el corolario anterior,  $|g(z)|$  alcanza su máximo (y, por ende,  $|f(z)|$  alcanza su mínimo) en la frontera de  $G$ . ■

El teorema de Liouville proporciona una fácil verificación de un teorema muy importante del álgebra elemental, que generalmente se establece sin probar.

### TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA

Todo polinomio de grado mayor que cero tiene una raíz.

**PRUEBA:** Suponga que  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$  no es cero para cualquier valor de  $z$ . Entonces  $f(z) = 1/P(z)$  es entera. Más aún,  $|f(z)|$

tiende a cero cuando  $|z|$  tiende a infinito, porque

$$|f(z)| = \frac{1}{|z|^n \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right|}.$$

Por tanto,  $|f(z)|$  está acotada para todo  $z$ . Con base en el teorema de Liouville,  $f(z)$  y, consecuentemente,  $P(z)$ , es constante, lo cual contradice la hipótesis de que  $n > 0$ . Así que  $P(z)$  tiene cuando menos una raíz.

Para demostrar que  $P(z)$  tiene realmente  $n$  raíces (incluyendo raíces múltiples), observamos que, por el teorema fundamental del álgebra, tiene por lo menos una raíz, por ejemplo,  $\xi_0$ . Así,

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z) - P(\xi_0) \\ &= a_n(z^n - \xi_0^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - \xi_0^{n-1}) + \dots + a_1(z - \xi_0) \\ &= (z - \xi_0) Q(z), \end{aligned}$$

donde  $Q(z)$  es un polinomio en  $z$  de grado  $n - 1$ . Si  $n - 1 > 0$ , entonces  $Q(z)$  tiene una raíz. Si se continúa de esta manera, se pueden extraer  $n$  factores de  $P(z)$ ; luego entonces,  $P(z)$  tiene exactamente  $n$  raíces. ■

## EJERCICIOS

- Pruebe que una función entera, que satisface  $|f(z)| < |z|^n$  para algún  $n$  y todos los  $|z|$  suficientemente grandes, debe ser un polinomio. [Sugerencia: Aplique las desigualdades del Ejercicio 18, Sección 2.3, ya sea a  $f^{(n+1)}(z)$  o a  $f^{(n)}(z)$ .]
- Sea  $f(z)$  analítica en  $|z| < 1$  y que satisface a  $f(0) = 0$ . Defina  $F(z) = f(z)/z$  para todo  $z$  en  $0 < |z| < 1$ . ¿Qué valor puede dársele a  $F(0)$  para que  $F(z)$  sea analítica en  $|z| < 1$ ? (Sugerencia: Aplique a  $F(z)$  en  $|z| = r < 1$  el teorema de Cauchy para las derivadas. Entonces muestre que la función resultante, analítica en  $|z| < r$ , coincide con  $F$  en  $0 < |z| < r$ . Use fracciones parciales.)
- Con base en los resultados del ejercicio anterior y en el principio del máximo, pruebe el lema de Schwarz: Sea  $f(z)$  analítica para  $|z| < 1$  y que satisface las condiciones  $f(0) = 0$  y  $|f(z)| \leq 1$ . Entonces  $|f(z)| \leq |z|$  y  $|f'(0)| \leq 1$ , con la igualdad que se cumple sólo si  $f(z) = e^{i\theta} z$  para algún  $\theta$  real fijo.
- Muestre que, en el lema de Schwarz,  $|f(z)| \leq 1$  para  $|z| < 1$  implica que  $|f'(0)| \leq 1$  independientemente del valor de  $f(0)$ .
- Dé un ejemplo para probar por qué la condición de función no nula es necesaria para la validez del principio del mínimo.
- Sea  $f(z)$  analítica y no constante en  $|z| < R$ . Denote por  $M(r)$  el máximo de  $|f(z)|$  en  $|z| = r$  y pruebe que  $M(r)$  es estrictamente creciente para  $0 \leq r < R$ .
- Pruebe que si  $f(z)$  es analítica y no constante en la región acotada  $G$ , es continua en  $\overline{G}$ , y tiene valor absoluto constante en la frontera de  $G$ , entonces debe tener al menos un cero en  $G$ .
- \*8. Pruebe el teorema de los tres círculos: Si  $f(z)$  es analítica en una región que contiene el anillo  $0 < r_1 \leq |z| \leq r_2$  y satisface las desigualdades  $|f(z)| \leq M_1$  en

$|z| = r_1$  y  $|f(z)| \leq M_2$  en  $|z| = r_2$ , entonces el máximo de  $|f(z)|$  en  $|z| = r$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$ , es menor o igual a

$$M_1^{(\log r_2/r)/(log r_2/r_1)} \cdot M_2^{(\log r/r_1)/(log r_2/r_1)}.$$

9. *Teorema fundamental del álgebra* (prueba alternativa): Muestre que cualquier polinomio no constante

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

tiene al menos una raíz, suponiendo que  $P(z)$  no se anula e integrando  $a_0/zP(z)$  sobre  $|z| = R$  con  $R \rightarrow \infty$ .

## 2.5 EL TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT (opcional)

El teorema fundamental y el teorema de Cauchy, probados en las Secciones 2.1 y 2.2, proporcionan condiciones para garantizar que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

donde  $\gamma$  es una curva spp cerrada. El teorema fundamental requiere que  $f(z)$  sea la derivada continua de una función analítica  $F(z)$  en una región  $G$  que contenga  $\gamma$ , mientras que el teorema de Cauchy requiere que  $f(z)$  sea analítica y tenga derivada continua sobre  $\gamma$  en el interior de la curva de Jordan  $\gamma$  spp. En esta sección se probará que ambas hipótesis se satisfacen cuando  $f(z)$  es analítica. Más aún, seremos capaces de extender el teorema de Cauchy a cualquier curva  $\gamma$  spp cerrada.

El siguiente teorema proporciona el primer paso para probar que las funciones analíticas tienen antiderivadas analíticas. Nótese que este resultado es muy similar al teorema de Cauchy de la Sección 2.2, excepto que *no* se supone que  $f'(z)$  es continua dentro del rectángulo  $R$ , mostrado en la Figura 2.8.

### TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

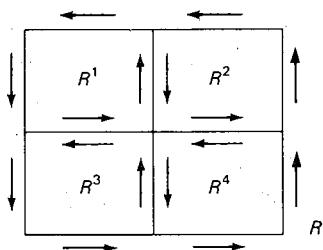
Sea  $f(z)$  una función analítica en una región que contenga al rectángulo  $R$ , dado por las desigualdades  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$ . Entonces

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0,$$

donde  $\partial R$  es la frontera de  $R$ .

**PRUEBA:** Para simplificar la notación, hagamos

$$I(R) = \int_{\partial R} f(z) dz$$



**FIGURA 2.8.** Bisecando el rectángulo

para cualquier rectángulo  $R$ . Ahora, si se divide  $R$  en cuatro rectángulos congruentes,  $R^1, R^2, R^3, R^4$ , se observa que

$$I(R) = I(R^1) + I(R^2) + I(R^3) + I(R^4),$$

porque las integrales sobre los lados comunes se cancelan entre sí —de acuerdo a la parte (iii) del primer teorema de la Sección 2.3—, ya que tienen orientaciones opuestas (véase Figura 2.8). Por la desigualdad del triángulo, se obtiene

$$|I(R)| \leq |I(R^1)| + |I(R^2)| + |I(R^3)| + |I(R^4)|,$$

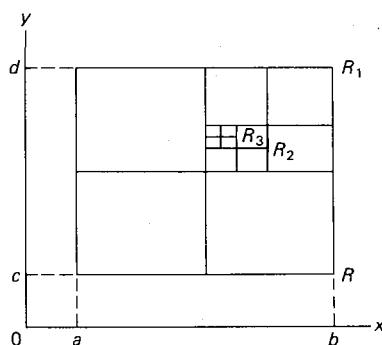
de ahí que al menos un  $R^j$  satisfaga a  $|I(R^j)| \geq |I(R)|/4$ . Más de un  $R^j$  pueden tener esta propiedad; elíjase el que tenga menor supraíndice y llámese  $R_1$ . Si se repite el proceso anterior indefinidamente, se obtiene una sucesión anidada de rectángulos  $R \supset R_1 \supset \dots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \dots$  que satisfarán a

$$|I(R_n)| \geq \frac{|I(R_{n-1})|}{4},$$

lo cual implica que

$$|I(R_n)| \geq \frac{|I(R)|}{4^n}$$

(véase Figura 2.9). Denótese por  $z_n^* = x_n^* + iy_n^*$  el vértice inferior izquierdo del rectángulo  $R_n$ . Por la construcción de los rectángulos  $R_n$ , es claro que las sucesiones  $\{x_n^*\}$  y  $\{y_n^*\}$  de números reales son no decrecientes y están acotadas por arriba por  $b$  y  $d$ , respectivamente. Así, sus límites  $x^*$  y  $y^*$  existen. Mostra-



**FIGURA 2.9.**  $R \supset R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \dots$

remos que el punto  $z^* = x^* + iy^*$  pertenece a todos los rectángulos  $R_n$ . Si  $z_n = x_n + iy_n$  es el vértice superior derecho de  $R_n$ , entonces  $x_n$  y  $y_n$  son cotas superiores de las sucesiones,  $\{x_n^*\}$  y  $\{y_n^*\}$ , esto implica que  $x_n^* \leq x^* \leq x_n$ ,  $y_n^* \leq y^* \leq y_n$ . Así que  $z^*$  pertenece a  $R_n$ , para todo  $n$ . Además, ningún otro punto pertenece a todos los rectángulos  $R_n$ , pues  $|z_n - z^*| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Dado  $\epsilon > 0$ , se puede encontrar un  $\delta > 0$  tal que  $f(z)$  sea analítica y

$$\left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \epsilon,$$

siempre y cuando  $|z - z^*| < \delta$ . Para  $n$  suficientemente grande, se tiene a  $R_n$  contenido en  $|z - z^*| < \delta$ . Como  $z^*, f(z^*)$  y  $f'(z^*)$  son constantes, el Ejemplo 5 de la Sección 2.1 implica que

$$\int_{\partial R_n} f(z^*) dz = 0 = \int_{\partial R_n} f'(z^*)(z - z^*) dz.$$

De tal modo que, al agregar cero a la integral  $I(R_n)$ , se tiene

$$|I(R_n)| = \left| \int_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)] dz \right|.$$

En base a la parte (iv) del primer teorema de la Sección 2.3, y a las condiciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} |I(R_n)| &\leq \int_{\partial R_n} |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| |dz| \\ &< \epsilon \int_{\partial R_n} |z - z^*| |dz| \leq \epsilon D_n L_n, \end{aligned}$$

donde

$$D_n = |z_n - z_n^*| \quad \text{y} \quad L_n = \int_{\partial R_n} |dz|$$

son, respectivamente, la diagonal y la longitud del perímetro de  $R_n$ . Pero

$$D_n = \frac{1}{2} D_{n-1} = \dots = 2^{-n} D, \quad L_n = \frac{1}{2} L_{n-1} = \dots = 2^{-n} L,$$

donde  $D$  y  $L$  son la diagonal y la longitud del perímetro de  $R$ , así que

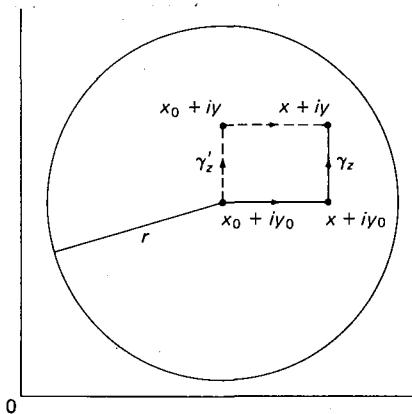
$$4^{-n} |I(R)| \leq |I(R_n)| \leq \epsilon D_n L_n = 4^{-n} \epsilon D L.$$

Por lo cual  $|I(R)| \leq \epsilon D L$ , y, como  $\epsilon$  es arbitrario, se podrá tener únicamente  $I(R) = 0$ , y la prueba queda completa. ■

El siguiente paso es mostrar que cualquier función analítica en un disco tiene una antiderivada en ese disco.

### TEOREMA

Si  $f(z)$  es analítica en el disco  $|z - z_0| < r$ , entonces hay una función analítica  $F(z)$  en  $|z - z_0| < r$  que satisface  $F'(z) = f(z)$ .



**FIGURA 2.10.** Los arcos  $\gamma_z$  y  $\gamma'_z$

**PRUEBA:** Para cualquier  $z$  en el disco  $|z - z_0| < r$ , sea  $\gamma_z$  el arco que consiste en los segmentos de recta que une a  $z_0$  con  $x + iy_0$  y a  $x + iy_0$  con  $z$ , donde  $z = x + iy$  y  $z_0 = x_0 + iy_0$  (véase Figura 2.10). Defina

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(z) dz = \int_{x_0}^x f(t + iy_0) dt + i \int_{y_0}^y f(x + it) dt. \quad (1)$$

Si  $\gamma'_z$  es el arco que consiste en los segmentos de recta que unen a  $z_0$  con  $x_0 + iy$  y a  $x_0 + iy$  con  $z$ , entonces  $\gamma_z - \gamma'_z$  es la frontera de un rectángulo y, según el teorema de Cauchy-Goursat,

$$0 = \int_{\gamma_z - \gamma'_z} f(z) dz = \int_{\gamma_z} f(z) dz - \int_{\gamma'_z} f(z) dz.$$

También se puede calcular  $F(z)$  a lo largo de la trayectoria  $\gamma'_z$ ,

$$F(z) = \int_{\gamma'_z} f(z) dz = i \int_{y_0}^y f(x_0 + it) dt + \int_{x_0}^x f(t + iy) dt. \quad (2)$$

La derivada parcial de (1) con respecto a  $y$  está dada por

$$F_y(z) = i \frac{\partial}{\partial y} \int_{y_0}^y f(x + it) dt = if(x + iy) = if(z),$$

debido a que la primera integral en (1) es independiente de  $y$ . En forma semejante, al tomar la derivada parcial de (2), con respecto a  $x$ , se llega a  $F_x(z) = f(z)$ . Así,  $F(z)$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$F_x(z) = f(z) = -iF_y(z),$$

y como  $f(z)$  es continua, se tienen condiciones suficientes para la analiticidad de  $F(z)$  en  $|z - z_0| < r$ . Finalmente,  $F'(z) = F_x(z) = f(z)$ . ■

Como en cálculo real, *dos antiderivadas de la misma función difieren a lo más por una constante*: Si  $F(z)$  y  $H(z)$  son antiderivadas de la función  $f(z)$ , entonces

$$[F(z) - H(z)]' = f(z) - f(z) = 0,$$

lo cual implica que  $F(z) - H(z)$  es una constante, según el teorema de la derivada cero de la Sección 1.6.

La prueba del teorema anterior puede extenderse a cualquier región simplemente conexa.

### TEOREMA DE LA ANTIDERIVADA

Sea  $f(z)$  analítica en una región  $G$  simplemente conexa. Entonces hay una función analítica  $F(z)$  en  $G$  tal que  $F'(z) = f(z)$ .

**PRUEBA:** Fije un punto  $z_0$  en  $G$ . Luego, por el teorema sobre trayectorias poligonales de la Sección 1.3, se puede encontrar un polígono, con lados paralelos a los ejes, que une a  $z_0$  con cualquier punto  $z$  en  $G$ . Suponga después que  $\gamma$  y  $\gamma'$  son dos de tales polígonos; así,  $\gamma - \gamma'$  consistirá en un número finito de fronteras de rectángulos en  $G$  (posiblemente algunos de ellos degenerados), recorridos en sentidos positivo y negativo en forma alternada (véase Figura 2.11). Este hecho requiere una prueba delicada, para la cual se utiliza la conexidad simple de la región  $G$ , y se omite por ser intuitivamente clara (véase las Notas al final del capítulo). Por el teorema de Cauchy-Goursat,

$$0 = \int_{\gamma - \gamma'} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma'} f(z) dz.$$

Así,

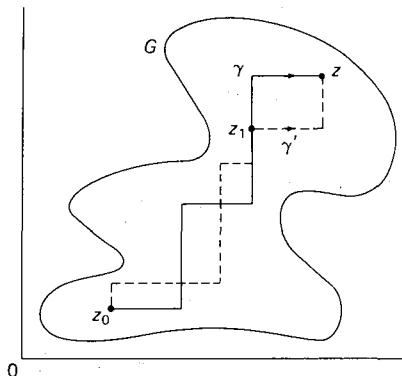
$$F(z) = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma'} f(z) dz$$

es independiente de la elección de la trayectoria. Si una línea horizontal (vertical) es el último segmento de recta de  $\gamma(\gamma')$  y  $z_1 = x_1 + iy_1$  el último punto de intersección, entonces

$$\begin{aligned} F(z) &= i \int_{y_1}^y f(x_1 + it) dt + \int_{x_1}^x f(t + iy) dt + C \\ &= \int_{x_1}^x f(t + iy_1) dt + i \int_{y_1}^y f(x + it) dt + C, \end{aligned}$$

donde  $z = x + iy$  y la constante  $C = F(z_1)$ . Al tomar las derivadas parciales, la primera ecuación da  $F_x(z) = f(z)$ , y la segunda,  $F_y(z) = if(z)$ . Como  $f(z)$  es continua y  $F_x = -iF_y$ ,  $F(z)$  es analítica en  $G$  y  $F'(z) = f(z)$ .

Es esencial que  $G$  sea simplemente conexo, porque, de otra manera, los polígonos  $\gamma$  y  $\gamma'$  podrían formar un rectángulo con un "hoyo" en su interior. La función  $f(z)$  no sería analítica en una región que contuviese el rectángulo; por lo tanto, el teorema de Cauchy-Goursat no se aplicaría. ■



**FIGURA 2.11.** La curva  $\gamma - \gamma'$  que consiste en las fronteras de los rectángulos en  $G$

### EJEMPLO

La función  $f(z) = 1/z$ , analítica en  $\mathbb{C} - \{0\}$ , tiene a  $F(z) = \log z$  como antiderivada. Si se recorre la mitad superior del círculo unitario, con 1 al principio sobre la rama principal, se obtiene

$$F(e^{i\pi/2}) = \frac{i\pi}{2},$$

mientras que, si se recorre la mitad inferior del círculo unitario, se tiene

$$F(e^{-i\pi/2}) = \frac{-i\pi}{2}.$$

De ahí que, en este caso, el valor de la antiderivada en  $z = -1$  dependa de la trayectoria elegida.

El teorema de la antiderivada proporciona una simplificación inmediata de las hipótesis de los siguientes teoremas.

### TEOREMA FUNDAMENTAL

Sea  $f(z)$  analítica en una región  $G$  simplemente conexa. Entonces, para cualquier arco  $\gamma$  spp:  $z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)),$$

en donde  $F(z)$  es cualquier antiderivada de  $f(z)$  en  $G$ .

### TEOREMA DE CAUCHY

Si  $f(z)$  es analítica y  $\gamma$  es una curva spp cerrada, en la región  $G$  simplemente conexa, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

**PRUEBA:** Si  $f(z)$  es analítica en la región  $G$  simplemente conexa, existirá una función analítica  $F(z)$  en  $G$  tal que  $F' = f$ . Así, el teorema fundamental de la Sección 2.1 se cumple, lo cual implica que, para cualquier arco  $\gamma$  spp:  $z = z(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Si  $z(\beta) = z(\alpha)$ , se obtiene el teorema de Cauchy. ■

Ahora consideremos las propiedades de las integrales del tipo encontrado en la fórmula integral de Cauchy.

### TEOREMA DE RIEMANN

Sea  $g(\xi)$  continua en el arco  $\gamma$ , spp. Entonces la función

$$F_n(z) = \int_{\gamma} \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi - z)^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

será analítica en todo  $z$  en el complemento de  $\gamma$  y su derivada satisfará a  $F'_n(z) = nF_{n+1}(z)$ .

**PRUEBA:** Elija un punto  $z_0$  que no pertenezca a  $\gamma$  y un disco  $|z - z_0| < \delta$  ajeno a  $\gamma$ . Para  $z$  en el disco  $|z - z_0| < \delta/2$ , se tiene

$$\begin{aligned} |F_1(z) - F_1(z_0)| &= \left| \int_{\gamma} g(\xi) \left( \frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - z_0} \right) d\xi \right| \\ &\leq |z - z_0| \int_{\gamma} \frac{|g(\xi)| |\,d\xi\,|}{|\xi - z| |\xi - z_0|}. \end{aligned}$$

El arco  $\gamma$  tiene longitud  $L$  finita, de ahí que sea un conjunto de puntos cerrado y acotado. Un teorema de cálculo ordinario establece que las funciones reales continuas alcanzan un máximo en cualquier conjunto cerrado y acotado. Así que  $|g(\xi)|$  está acotada por  $M$  en  $\gamma$ . Como  $|\xi - z| > \delta/2$  para todo  $\xi$  de  $\gamma$ ,

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leq \frac{2ML}{\delta^2} \cdot |z - z_0|,$$

lo que prueba la continuidad de  $F_1(z)$  en  $z_0$ . Al aplicar este hecho a las funciones

$$G_n(z) = \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^n} d\xi,$$

se encuentra que  $G_1(z)$  es continua en  $z_0$ , ya que  $g(\xi)/(\xi - z_0)$  es continua en  $\gamma$ . Entonces, como el cociente de las diferencias de  $F_1(z)$  es igual a  $G_1(z)$ ,

$$F_2(z_0) = G_1(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} G_1(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = F'_1(z_0).$$

Supóngase que  $F'_{n-1}(z) = (n-1)F_n(z)$  es verdadero (y, como  $g(\xi)$  es arbitraria, también que  $G'_{n-1}(z) = (n-1)G_n(z)$ ). Entonces

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0} + \frac{z - z_0}{(\xi - z)(\xi - z_0)}$$

implica que

$$F_n(z) - F_n(z_0) = [G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)] + (z - z_0)G_n(z).$$

Ya que  $G_{n-1}(z)$  es derivable, será continua, y

$$|G_n(z)| = \left| \int_{\gamma} \frac{g(\xi) d\xi}{(\xi - z)^n (\xi - z_0)} \right| \leq \frac{2^n M L}{\delta^{n+1}},$$

para  $|z - z_0| < \delta/2$ . Por la desigualdad del triángulo,

$$0 \leq \lim_{z \rightarrow z_0} |F_n(z) - F_n(z_0)| \leq \frac{2^n M L}{\delta^{n+1}} \lim_{z \rightarrow z_0} |z - z_0| = 0,$$

lo cual significa que  $F_n(z)$  (y, por ende,  $G_n(z)$ ) es continua en  $z_0$ . Así,

$$\begin{aligned} F'_n(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{G_{n-1}(z) - G_{n-1}(z_0)}{z - z_0} \right] + G_n(z) \\ &= G'_{n-1}(z_0) + G_n(z_0) \\ &= nG_n(z_0) = nF_{n+1}(z_0). \end{aligned}$$

La prueba se sigue ahora por inducción. ■

El teorema de Riemann proporciona una prueba del teorema de Cauchy para las derivadas, además del notable hecho de que las funciones analíticas tienen derivadas analíticas.

### TEOREMA DE CAUCHY PARA DERIVADAS

Sea  $f(z)$  analítica en una región simplemente conexa que contiene la curva de Jordan  $\gamma$  spp. Entonces, para todos los puntos  $\xi$  en el interior de  $\gamma$ ,

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \xi)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

**PRUEBA:** Escriba  $g(z) = f(z)$  en el teorema de Riemann. Así,

$$F_1(\xi) = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \xi} dz = 2\pi i f(\xi).$$

por la fórmula integral de Cauchy para todos los puntos  $\xi$  en el interior de  $\gamma$ . Si aplicamos repetidamente, el teorema de Riemann, se tiene

$$F_{n+1}(\xi) = \frac{F'_n(\xi)}{n} = \frac{F''_{n-1}(\xi)}{n(n-1)} = \dots = \frac{F^{(n)}_1(\xi)}{n!} = \frac{2\pi i f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

lo que nos da

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} F_{n+1}(\xi) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \xi)^{n+1}} dz,$$

y se sigue el resultado. Si se acuerda que  $f^{(0)} = f$  y  $0! = 1$ , la ecuación anterior se reduce a la fórmula integral de Cauchy cuando  $n = 0$ . ■

### COROLARIO

Si  $f(z)$  es analítica en una región  $G$ , entonces también lo será su derivada  $f'(z)$ . Más aún,  $f(z)$  tiene derivadas de todos los órdenes en  $G$ .

**PRUEBA:** Como la analiticidad necesita probarse sólo en una vecindad de un punto, para cada  $\xi$  podemos encontrar un disco  $|z - \xi| \leq r$  contenido en  $G$ . Sea  $\gamma$  el círculo  $|z - \xi| = r$ . Entonces  $f^{(n)}(\xi)$  existirá para todo  $n$  entero positivo, así que  $f'(z)$  tendrá una derivada en  $\xi$  y será por tanto, analítica. ■

Este corolario completa la tarea de mostrar que las funciones analíticas tienen derivadas analíticas, y permite eliminar todas las hipótesis innecesarias en las versiones del teorema fundamental, del teorema de Cauchy y el teorema de Morera, que fueron probados en las Secciones 2.1-2.3.

### EJERCICIOS

1. Los polinomios de Laguerre  $L_n(z)$  están dados por

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}).$$

Muestre que, para todo  $z$  en el interior de la curva de Jordan  $\gamma$  spp,

$$L_n(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\xi^n e^{-(\xi-z)}}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

2. Obtenga la fórmula de Wallis

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} \theta d\theta = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

al integrar  $f(z) = (z + 1/z)^{2n}/z$  sobre  $|z| = 1$ .

3. Sea  $f(z)$  continua en la región  $\operatorname{Re} z \geq \sigma$  y suponga que  $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . Entonces, para todo número negativo  $t$ , pruebe que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} e^{zt} f(z) dz = 0,$$

donde  $\Gamma_R = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z \geq \sigma\}$ .

- \*4. Sea  $f(z)$  analítica en el conjunto  $R^*$ , obtenido al omitir un número finito de puntos interiores  $z_1, z_2, \dots, z_n$  del rectángulo  $R$ . Pruebe que

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0,$$

dado que

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = 0,$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .

- \*5. Sea  $f(z)$  analítica en el conjunto  $D$ , obtenido al omitir los puntos  $z_1, z_2, \dots, z_n$  en  $|z - z_0| < r$ . Pruebe que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

para cualquier curva  $\gamma$  cerrada en  $|z - z_0| < r$ , dado que

$$\lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- \*6. Muestre que la aseveración del Ejercicio 5 permanece cierta cuando  $D$  se obtiene al omitir un número infinito de puntos  $z_1, z_2, \dots$ , que no tienen puntos de acumulación en  $|z - z_0| < r$ .

## NOTAS

### SECCIÓN 2.1

Una prueba del teorema de la curva de Jordan se encuentra en [W, pág. 30].

### SECCIÓN 2.4

Las generalizaciones del lema de Schwarz se pueden encontrar en [A, pág. 136].

### SECCIÓN 2.5

Se puede mostrar que el teorema de Cauchy-Goursat se cumple en  $R$  con hipótesis más débiles. [V, pág. 76] prueba que es válido para  $f(z)$  analítica en el interior de  $\partial R$  y continua en  $R$ . La verificación, en el teorema de la antiderivada, de que  $\gamma - \gamma'$  consiste en las fronteras de un número finito de rectángulos puede encontrarse en [A, págs. 141-143] o [L, págs. 128-131]. Una

prueba del teorema de Cauchy, que evita la topología, ha sido dada recientemente por J. D. Dixon. Puede encontrarse en [L, págs. 148-150] o en el artículo original en *Proc. Amer. Math. Soc.* 29 (1971): 625-626. Más generalizaciones del teorema de Cauchy pueden encontrarse en [A, pág. 144] y [Ho, págs. 3, 26]. El teorema de Riemann se cumple siempre y cuando  $\int_{\gamma} |g(\xi)| \cdot |d\xi| < \infty$ . La prueba, al utilizar esta hipótesis más débil, es esencialmente la misma. Una prueba de la analiticidad de la derivada, independiente de la integración, se da en [W, pág. 77].

# 3 SERIES INFINITAS

## 1 SERIE DE TAYLOR

### DEFINICIÓN

Una serie infinita de números complejos

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

converge a la suma  $A$ , si las sumas parciales

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

satisfacen  $S_n \rightarrow A$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , y, en este caso, se escribe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ . De otra manera, se dice que la serie **diverge**. A una serie con la propiedad de que los valores absolutos de sus términos formen una serie convergente se le dice **absolutamente convergente**.

Como  $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ , si la serie es convergente, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{n+1} - S_n) = A - A = 0.$$

Así, el término general de una serie convergente tiende a cero. Esta condición es necesaria, pero no suficiente, como se muestra en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 1

La serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots$$

diverge porque, si se suman los términos similares,

$$1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots,$$

las sumas parciales crecen indefinidamente.

Una serie absolutamente convergente debe converger. La prueba se deja como ejercicio, ya que es idéntica a la que se da en cualquier texto de cálculo.

Frecuentemente, es de gran interés una serie infinita de funciones definidas en una región  $G$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

Se dice que la serie converge en  $G$  si converge para cada  $z_0$  en  $G$ . se escribe

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

y a  $f(z)$  se le llama suma de la serie.

## EJEMPLO 2

Muestre que la serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge a

$$\frac{1}{1-z}$$

para  $|z| < 1$ .

**SOLUCIÓN:** La división larga de polinomios da

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} + \frac{z^n}{1-z} = S_{n-1} + \frac{z^n}{1-z}.$$

Como  $|z| < 1$ , se sigue que  $z^n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Así,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1.$$

Se mostrará ahora que toda función analítica puede expresarse como una serie de Taylor convergente.

## TEOREMA DE TAYLOR

Sea  $f(z)$  analítica en la región  $G$ , que contiene al punto  $z_0$ . Entonces, la representación

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots$$

es válida en todos los discos  $|z - z_0| < r$  contenidos en  $G$ .

**PRUEBA:** Sea  $z$  cualquier punto interior del disco cerrado  $|\xi - z_0| \leq r$  contenido en  $G$ . Úsese la fórmula integral de Cauchy para expresar  $f(z)$  como una integral.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

Ahora,

$$\xi - z = (\xi - z_0) \left[ 1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right] \quad \text{y} \quad \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1,$$

al usar las sumas parciales de la serie geométrica para reescribir la integral en la forma

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left[ \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \left[ 1 + \frac{z - z_0}{\xi - z_0} + \dots + \left( \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^{n-1} + Q_n \right] d\xi, \end{aligned}$$

donde

$$Q_n = \frac{(z - z_0)^n / (\xi - z_0)^n}{1 - (z - z_0) / (\xi - z_0)} = \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z)(\xi - z_0)^{n-1}}.$$

Si se utiliza el teorema de Cauchy para las derivadas se obtiene

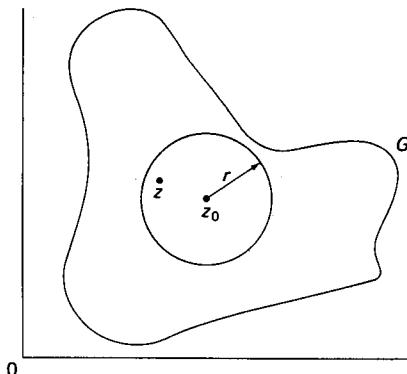
$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) \frac{f'(z_0)}{1!} + \dots + (z - z_0)^{n-1} \frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} + R_n,$$

donde

$$R_n = \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n} d\xi.$$

Se elige a  $z$  dentro de  $|\xi - z_0| = r$ , sea  $|z - z_0| = \rho$ , y si se observa que  $|\xi - z| \geq r - \rho$  para todo  $\xi$  en  $|\xi - z_0| = r$ , se tiene

$$|R_n| \leq \frac{\rho^n}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r M}{(r - \rho)r^n} = \frac{rM}{r - \rho} \left( \frac{\rho}{r} \right)^n,$$



**FIGURA 3.1.** El disco  $|\zeta - z_0| < r$  contenido en  $G$

siendo  $M$  como el máximo de  $|f(\zeta)|$  en  $|\zeta - z_0| = r$  (véase Figura 3.1). Pero  $\rho/r < 1$ , por lo que  $R_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto,  $f(z)$  está representada por la serie de Taylor para todos esos  $z$ . ■

Este teorema permite obtener series de Taylor para funciones analíticas de la misma manera en que se hace en el cálculo ordinario. Por ejemplo, si  $f(z) = e^z$ , entonces  $f^{(n)}(z) = e^z$  y  $f^{(n)}(0) = 1$ , y se obtiene la serie de Maclaurin

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad |z| < \infty,$$

válida para todo  $z$  en  $\mathbb{C}$ , ya que  $f(z)$  es entera.

Los dos teoremas siguientes son consecuencias útiles del teorema de Taylor.

### TEOREMA

Si  $f(z)$  es analítica en una región  $G$  que contiene al punto  $z_0$ , y  $f^{(n)}(z_0) = 0$  para  $n = 1, 2, \dots$ , entonces  $f(z)$  será constante en  $G$ .

**PRUEBA:** Por el teorema de Taylor,  $f(z) = f(z_0)$  para todo  $z$  en cualquier disco  $|\zeta - z_0| < r$  contenido en  $G$ . Sea  $g(z) = f(z) - f(z_0)$ . Entonces  $g$  es analítica en  $G$  y  $g^{(n)}(z) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , para todo  $z$  en este disco. Sea  $S$  el conjunto de todos los puntos  $z$  de  $G$ , en los cuales  $g^{(n)}(z) = 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , y sea  $T = G - S$ . Si  $z_1$  está en  $S$ , entonces, por el teorema de Taylor,  $g$  tendrá la representación en serie  $g(z) = 0$  en todos los discos  $|z - z_1| < r$  contenidos en  $G$ . Por ende, con base en el argumento anterior,  $S$  es abierto, ya que todos sus puntos son interiores. Si  $z_1$  está en  $T$ , existe un entero  $n \geq 0$ , para el cual  $g^{(n)}(z_1) \neq 0$ . Por tanto, en un disco centrado en  $z_1$  y contenido en  $G$ , la serie de Taylor de  $g(z)$  no se anula; lo que implica que  $z_1$  es un punto interior de  $T$ .

Así,  $T$  es abierto. Ni  $T$  ni  $S$  contienen puntos frontera del otro porque ambos son abiertos. Como  $G$  es conexo,  $T$  debe ser vacío; por ende,  $g(z) = f(z) - f(z_0) = 0$  para todo  $z$  de  $G$ . ■

Este teorema implica que si una función  $f(z)$  analítica y no constante en una región  $G$  se anula en un punto  $z_0$  de  $G$ , existirá un entero positivo  $n$ , para el cual  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . El mfnimo entero que satisfaga esto determinará el *orden del cero de  $f$  en  $z_0$*  y permitirá escribir

$$f(z) = (z - z_0)^n f_n(z), \quad f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z_0)^n} d\xi,$$

con  $f_n(z)$  analítica en el interior del disco  $|\xi - z_0| \leq r$  contenido en  $G$  —por el teorema de Cauchy—, para las derivadas (o por el teorema de Riemann de la Sección 2.5). Aún más,

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \neq 0.$$

Así que existe una  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$  totalmente contenida en  $G$ , en la cual  $f_n(z)$  no se anula, ya que  $f_n$  es continua. Esto muestra que  $z_0$  es el único cero de  $f$  en  $|z - z_0| < \epsilon$ . Así, se ha probado el teorema siguiente.

### TEOREMA

**Los ceros de una función analítica no constante son aislados.**

### EJEMPLO 3

Obtenga la serie de Maclaurin de  $f(z) = (1 - z)^{-2}$ .

**SOLUCIÓN:** Como  $f^{(n)}(z) = (n + 1)!(1 - z)^{-(n+2)}$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , se tiene  $f^{(n)}(0) = (n + 1)!$  y

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)z^n, \quad |z| < 1,$$

puesto que  $f(z)$  no es analítica en  $z = 1$ . La serie de Taylor de  $f(z)$ , centrada en el punto  $z_0 = -1$  es

$$\frac{1}{(1 - z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n + 1)}{2^{n+2}} (z + 1)^n, \quad |z| < 2,$$

ya que  $f^{(n)}(-1) = (n + 1)!/2^{n+2}$ .

**EJEMPLO 4**

Encuentre el orden del cero de  $f(z) = 2z(e^z - 1)$  en  $z = 0$ .

**SOLUCIÓN:** Primero calcule  $f^{(n)}(0)$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Como

$$f'(z) = 2ze^z + 2(e^z - 1), \quad f''(z) = 2ze^z + 4e^z,$$

se encuentra que  $f''(0) = 4$ , así que el orden es 2. También resulta claro, a partir de la serie de Maclaurin de  $f(z)$

$$2z(e^z - 1) = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 2z^2 \left( 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right).$$

Se debe tener especial cuidado al buscar la serie de Taylor de funciones analíticas definidas en una superficie de Riemann. Véase el siguiente ejemplo.

**EJEMPLO 5**

Es importante recordar que la función  $\log z$  se define en la superficie de Riemann  $\mathcal{R}$ , descrita en la Sección 1.9. Al construir la serie de Taylor de  $f(z) = \log z$  es esencial especificar la rama de que se trata. Si se busca la serie de Taylor alrededor de  $z = 1$ , que es un punto en la rama principal, se tiene  $f^{(n)}(z) = (-1)^{n-1}(n-1)!z^{-n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , y  $\log 1 = \text{Log } 1 = 0$ , así que

$$\text{Log } z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (z-1)^n = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}.$$

Por otra parte, la serie de Taylor alrededor de  $z = e^{2\pi i}$  en la siguiente rama de  $\mathcal{R}$  es

$$\log z = 2\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n},$$

ya que las funciones  $f^{(n)}(z)$  son analíticas en  $\mathbb{C} - \{0\}$  y

$$f(e^{2\pi i}) = \log e^{2\pi i} = 2\pi i,$$

$$f^{(n)}(e^{2\pi i}) = (-1)^{n-1}(n-1)!, \quad n = 1, 2, \dots$$

Se pueden aplicar observaciones similares a cualquier otra rama de  $\mathcal{R}$ . Las fórmulas son válidas en  $|z-1| < 1$ , ya que  $f^{(n)}(z)$  no es analítica en  $z = 0$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$

**EJEMPLO 6**

Muestre que no existe una función analítica en  $|z| < 2$  que satisfaga la condición

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

**SOLUCIÓN:** Si existiera,  $F(z) = z - f(z)$  sería una función analítica no constante, que satisfaría  $F(1/2m) = 0$ , para  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Por tanto,  $z = 0$  es un cero de  $f(z)$  que no es aislado, lo cual contradice el teorema anterior.

## EJERCICIOS

1. Muestre que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  diverge.
2. Pruebe que una serie absolutamente convergente debe converger.

Obtenga las series de Maclaurin dadas en los Ejercicios 3-7.

$$3. \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |z| < \infty$$

$$4. \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$$

$$5. \operatorname{senh} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad |z| < \infty$$

$$6. \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad |z| < \infty$$

$$7. \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}, \quad |z| < 1$$

En los Ejercicios 8-15, desarrolle las funciones dadas en una serie de Taylor alrededor de  $z_0$ . Indique el máximo disco donde sea válida esta representación.

$$8. f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = -1 \quad 9. f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = i$$

$$10. f(z) = \cos z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2} \quad 11. f(z) = \operatorname{sen} z, \quad z_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$12. f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 = 1 \quad 13. f(z) = \operatorname{Log} z, \quad z_0 = i$$

$$14. f(z) = \log z, \quad z_0 = -1 \quad 15. f(z) = \log z, \quad z_0 = 2e^{3\pi i}$$

Encuentre el orden del cero en  $z = 0$  de las funciones dadas en los Ejercicios 16-19.

$$16. z^2(\cos z - 1) \quad 17. 6 \operatorname{sen} z^2 + z^2(z^4 - 6)$$

$$18. z - \tan z \quad 19. z^2 - \operatorname{senh} z^2$$

20. Pruebe que si dos funciones analíticas en una región  $G$  coinciden en un subconjunto de  $G$ , que tiene un punto de acumulación de  $G$ , entonces coinciden en todos los puntos de  $G$ .

$$21. 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots$$

$$22. 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{7}, 0, \frac{1}{9}, 0, \dots$$

$$23. 1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \frac{7}{13}, \frac{8}{15}, \dots$$

Determine si existe una función analítica en  $|z| < 2$  que tome, en los puntos  $z = 1/n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , los valores dados en los Ejercicios 21-24.

24.  $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \dots$

25. Dé un ejemplo de dos funciones que coincidan en un número infinito de puntos de una región  $G$  y, no obstante, sean diferentes.

26. Muestre que si  $f$  es una función analítica no constante en  $G$ , el conjunto de puntos que satisfacen  $f(z) = \alpha$ ,  $\alpha$  en  $\mathbb{C}$ , no tiene un punto de acumulación en  $G$ .

27. Pruebe el **teorema del binomio** para  $\alpha$  complejo:

$$(1+z)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \dots, |z| < 1.$$

## 3.2 CONVERGENCIA UNIFORME DE SERIES

En esta sección se probará el inverso del teorema de Taylor, a saber que las series de potencias convergentes son de hecho funciones analíticas en sus regiones de convergencia.

### DEFINICIÓN

La serie  $f(z) = \sum_1^\infty f_n(z)$  es **uniformemente convergente** en  $G$ , si para todo  $\epsilon > 0$  existe un *número* positivo  $K$  tal que

$$\left| f(z) - \sum_{n=1}^k f_n(z) \right| < \epsilon,$$

para cualquier  $k > K$  y  $z$  en  $G$ .

La convergencia uniforme difiere de la convergencia en que, para esta última sólo se necesita mostrar la existencia de una *función* positiva  $K(z)$ , tal que para cada  $z_0$  en  $G$ ,

$$\left| f(z_0) - \sum_{n=1}^k f_n(z_0) \right| < \epsilon,$$

siempre y cuando  $k > K(z_0)$ . La importancia del concepto de convergencia uniforme se ve en el siguiente resultado.

### TEOREMA DE WEIERSTRASS

La suma de una serie uniformemente convergente de funciones *analíticas* es analítica y puede derivarse o integrarse término por término.

**PRUEBA:** Sea  $f(z) = \sum_1^\infty f_n(z)$  con cada  $f_n(z)$  analítica en la región  $G$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existirá un número positivo  $K$  tal que

$$\left| f(z) - \sum_{n=1}^k f_n(z) \right| < \frac{\epsilon}{3},$$

para  $k > K$  y todo  $z$  en  $G$ . En cualquier  $z_0$  de  $G$  y  $k (> K)$ , fija, existe una  $\delta$  tal que

$$\left| \sum_{n=1}^k f_n(z) - \sum_{n=1}^k f_n(z_0) \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

siempre que  $z$  esté en  $G$  y  $|z - z_0| < \delta$ , ya que la suma parcial es continua. Así, por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq \left| f(z) - \sum_{n=1}^k f_n(z) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{n=1}^k f_n(z) - \sum_{n=1}^k f_n(z_0) \right| + \left| \sum_{n=1}^k f_n(z_0) - f(z_0) \right| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

siempre y cuando  $z$  pertenezca a  $G$  y  $|z - z_0| < \delta$ . Luego,  $f$  es continua en  $G$ . Por el teorema de Cauchy, para cualquier curva  $\gamma$  spp cerrada en un disco contenido en  $G$ ,

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz = 0, \quad n = 1, 2, \dots, k,$$

por ende,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{n=1}^k \int_{\gamma} f_n(z) dz \right| \\ &\leq \int_{\gamma} \left| f(z) - \sum_{n=1}^k f_n(z) \right| |dz| < \frac{\epsilon L}{3}, \end{aligned}$$

donde  $L$  es la longitud de  $\gamma$ . Como  $\epsilon$  puede estar arbitrariamente cercano a cero, la extensión del teorema de Morera (Ejercicio 23, Sección 2.3) es válida y  $f(z)$  es analítica en  $G$ . (Si  $G$  es simplemente conexa, se sigue directamente del teorema de Morera.) En particular, lo anterior muestra que en cualquier arco  $\gamma$  spp en  $G$ ,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Además, por la fórmula de Cauchy para las derivadas,

$$\left| f'(z) - \sum_{n=1}^k f'_n(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi) - \sum_{n=1}^k f_n(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| < \frac{4\epsilon}{3r},$$

para todo  $z$  que satisface  $|z - z_0| < r/2$ ,  $k > K$ , y  $|\xi - z_0| \leq r$  contenido en  $G$  (véase Figura 3.2). Así, la serie  $\sum f'_n(z)$  converge uniformemente a  $f'(z)$  en  $|z - z_0| < r/2$ . Ahora la prueba está completa.

El teorema de Weierstrass puede aplicarse a la serie de potencias  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ , ya que cada término de la serie es una función entera. Antes de proceder en esta dirección, es conveniente mencionar algunos comentarios acerca de las

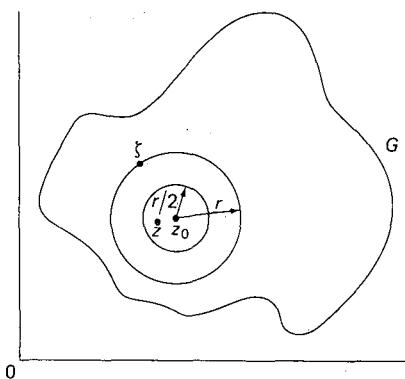


FIGURA 3.2.  $|z - z_0| > r/2$

series de potencias. Nótese que la sustitución  $\xi = z - z_0$  transforma la serie anterior en la serie  $\sum_1^\infty a_n \xi^n$ , así que solamente consideraremos series de potencias de esta última forma.

Del cálculo elemental, se debe recordar el concepto de **radio de convergencia**  $R$  de una serie de potencias  $\sum_1^\infty r_n x^n$ , donde los coeficientes  $r_n$  son reales. El número  $0 \leq R \leq \infty$  tiene la propiedad de que la serie converge absolutamente para  $|x| < R$  y diverge para  $|x| > R$ , y que  $R$  puede calcularse por medio de la fórmula

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{r_n}{r_{n+1}} \right|,$$

dado que el límite existe. Desafortunadamente, para series como

$$2 + x + 2x^2 + x^3 + \dots + 2x^{2k} + x^{2k+1} + \dots,$$

la razón de los coeficientes  $|r_n/r_{n+1}|$  es, alternada,  $\frac{1}{2}$  y 2, así que no existe el límite. Ahora se dará una fórmula que pueda usarse siempre para calcular el radio de convergencia  $R$  de una serie de potencias  $\sum_1^\infty a_n z^n$ , y se probará que  $R$  se comporta de la misma manera que en el caso de series de potencias reales.

## FÓRMULA DE HADAMARD

El radio de convergencia  $R$  de una serie de potencias  $\sum_1^\infty a_n z^n$  está dado por

$$R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} [\inf(|a_n|^{1/n}, |a_{n+1}|^{1/(n+1)}, \dots)].$$

La mínima cota superior ( $\inf$ ) decrece o permanece constante cuando  $n$  aumenta, así que el límite existe siempre (con el infinito como un valor permitido). Si  $2^{1/(2n)} \rightarrow 1$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , la serie

$$2 + x + 2x^2 + x^3 + \dots$$

tiene como radio de convergencia  $R = 1$ .

## TEOREMA DE ABEL

Sea  $R$  el radio de convergencia de la serie de potencias  $\sum_1^\infty a_n z^n$ . Entonces:

- (i) La serie converge absolutamente en  $|z| < R$ , y es uniformemente en  $|z| \leq \rho, \rho < R$ .
- (ii) La serie diverge en  $|z| > R$ .
- (iii) La suma de la serie es analítica en  $|z| < R$ , y su derivada, obtenida al derivar término por término, tiene el mismo radio de convergencia.

**PRUEBA:** (i) Sea  $|z| < r < R$ . Entonces,  $r^{-1} > R^{-1}$ , así que la definición de  $\limsup$  implica la existencia de un entero  $N$  tal que  $|a_n| < r^{-n}$  para todo  $n \geq N$ . Entonces

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |z|^n < \sum_{n=N}^{\infty} \left| \frac{z}{r} \right|^n = \frac{\left| \frac{z}{r} \right|^N}{1 - \left| \frac{z}{r} \right|},$$

por la serie geométrica (Ejemplo 2, Sección 3.1), ya que  $|z/r| < 1$ . Así, la serie converge absolutamente en  $|z| < r$  para cualquier  $r < R$ , y, por ende, en  $|z| < R$ . Para mostrar la convergencia uniforme, se elige  $|z| \leq \rho < r < R$ , entonces, por lo que se hizo anteriormente y por la desigualdad del triángulo,

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n \right| \leq \sum_{n=N}^{\infty} |a_n| |z|^n < \frac{\left( \frac{\rho}{r} \right)^N}{1 - \left( \frac{\rho}{r} \right)},$$

para todo  $k \geq N$  y  $|z| \leq \rho$ .

(ii) Si  $|z| > r > R$ , entonces  $r^{-1} < R^{-1}$  y la definición de  $\limsup$  establece la existencia de un número infinito de enteros  $n$ , para los cuales  $r^{-n} < |a_n|$ . Por tanto, un número infinito de términos de la sucesión satisfacen  $|a_n z^n| > |z/r|^n$  y son, por ello, no acotados.

(iii) Se sigue del teorema de Weierstrass que la suma es analítica en  $|z| < R$  y que su derivada puede obtenerse por derivación término por término. Finalmente, si se hace  $\sqrt[n]{n} = 1 + c_n$ ; entonces, por el teorema del binomio,

$$n = (1 + c_n)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} c_n^2,$$

lo cual implica que  $c_n^2 < 2/n$ . Así,  $c_n \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se calcula el radio de convergencia de la derivada  $\sum_1^\infty n a_n z^{n-1}$  observando que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

**EJEMPLO 1**

Considere la serie

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots$$

En tal caso  $|a_n|$  se anula para  $n$  impar y es igual a 1 para  $n$  par. Entonces,  $R = 1$ ; así, la serie converge absolutamente en  $|z| < 1$ , uniformemente en  $|z| \leq r < 1$ , y diverge en  $|z| > 1$ . Aún más, representa alguna función analítica en  $|z| < 1$ . Nada se ha dicho de  $|z| = 1$ ; sin embargo, obsérvese que la serie diverge en todos los puntos de  $|z| = 1$ , ya que su término general no tiende a cero. Con el Ejemplo 2, de la Sección 3.1, se encuentra que

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots, \quad |z| < 1.$$

Nótese que la serie es analítica sólo en  $|z| < 1$ , mientras que la función  $(1+z^2)^{-1}$  es analítica en todo  $\mathbb{C}$  excepto en  $z = \pm i$ . Se puede integrar la serie término por término en cualquier trayectoria dentro del círculo unitario para obtener

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots, \quad |z| < 1.$$

En particular, la función

$$f(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = 1 - \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} - \dots, \quad 0 < |z| < 1,$$

$$f(0) = 1$$

es analítica en  $|z| < 1$ , lo que ilustra una manera útil de mostrar la analiticidad.

**EJEMPLO 2**

Encuentre el radio de convergencia de las variables de potencias

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}.$$

**SOLUCIÓN:** (a) Por la prueba del teorema de Abel,  $(1/n)^{1/n} = 1/\sqrt[n]{n}$  tiende a 1 cuando  $n \rightarrow \infty$ , así,  $R = 1$  para la serie (a). Obsérvese que este resultado también se puede obtener con la fórmula de la razón.

Para (b) es más fácil usar la fórmula de la razón

$$\left| \frac{r_n}{r_{n+1}} \right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

y  $R = \infty$ .

En la serie (c) la fórmula de la razón no puede usarse, ya que contiene un número infinito de coeficientes igual a cero. Aquí  $R = 1$ , debido a que se tiene

$$(2^n)^{1/n!} = e^{\ln 2/(n-1)!} \rightarrow e^0 = 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

y todos los otros términos se anulan.

### EJEMPLO 3

Encuentre solución analítica de la ecuación diferencial

$$f''(z) - 2zf'(z) - 2f(z) = 0$$

con condiciones iniciales  $f(0) = 1, f'(0) = 0$ .

**SOLUCIÓN:** Derive la serie

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad a_0 = 1,$$

dos veces, para obtener

$$f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + na_n z^{n-1} + \dots, \quad a_1 = 0,$$

$$f''(z) = 2a_2 + 6a_3 z + \dots + (n+2)(n+1)a_{n+2} z^n + \dots$$

Entonces, al agrupar términos de potencias iguales,

$$f''(z) - 2zf'(z) - 2f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_n] z^n = 0,$$

así que  $(n+1)[(n+2)a_{n+2} - 2a_n] = 0$ , para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . La ecuación de recurrencia  $a_{n+2} = 2a_n/(n+2)$  implica que la solución analítica general de la ecuación diferencial es

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 (1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots) \\ &\quad + a_1 z \left( 1 + \frac{1}{3!} (2z)^2 + \frac{2}{5!} (2z)^4 + \frac{3}{7!} (2z)^6 + \dots \right). \end{aligned}$$

Como  $a_0 = 1$  y  $a_1 = 0$ , se obtiene la función entera

$$f(z) = 1 + z^2 + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots = e^{z^2}$$

como la solución analítica al problema de valor inicial.

### EJERCICIOS

Encuentre la radio de convergencia de las series dadas en los Ejercicios 1-6.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (nz)^n$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}$$

3.  $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}$

4.  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$

5.  $\sum_{n=0}^{\infty} [2 + (-1)^n]^n z^n$

6.  $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos in) z^n$

Si el radio de convergencia de la serie  $\sum_0^{\infty} a_n z^n$  es  $R$  ( $0 < R < \infty$ ), encuentre el radio de convergencia de las series dadas en los Ejercicios 7-12.

7.  $\sum_{n=0}^{\infty} n^k a_n z^n$

8.  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-n} a_n z^n$

9.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k z^n$

10.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n+k}$

11.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^n z^{n^2}$

12.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$

En los Ejercicios 13-16, desarrolle las funciones en series de potencias centradas en 0, y encuentre sus radios de convergencia, sin usar el teorema de Taylor.

13.  $\frac{2}{(1-z)^3}$

14.  $\log(1+z)$

15.  $\int_0^z \frac{\sin z}{z} dz$

16.  $f(z) = \begin{cases} \frac{e^{az} - 1}{z}, & z \neq 0 \\ a, & z = 0 \end{cases}$

17. Encuentre la serie de potencias más general (con dos constantes arbitrarias) que satisfaga la ecuación diferencial  $f''(z) + f(z) = 0$ . Exprese la suma en términos de funciones elementales.

18. Encuentre una serie de Maclaurin que resuelva la ecuación diferencial  $f'(z) = 1 + zf(z)$  con la condición inicial  $f(0) = 0$ . ¿Cuál es su radio de convergencia?

19. Determine la serie de Maclaurin general que solucione la ecuación diferencial  $zf''(z) + f'(z) + zf(z) = 0$  y muestre que es entera. (Sugerencia: Pruebe que  $\sqrt[n]{n!} \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , ya que  $e^z$  es entera).

20. Encuentre la solución general, en serie de Maclaurin de la ecuación diferencial

$$(1 - z^2) f''(z) - 2zf'(z) + n(n+1)f(z) = 0.$$

21. Suponga que  $f(z)$  y  $g(z)$  son analíticas en una vecindad de  $z_0$  y que  $f(z_0) = g(z_0) = 0$  mientras que  $g'(z_0) \neq 0$ . Pruebe el **teorema de L'Hospital**

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

22. Resuelva el Ejercicio 2, Sección 2.4, con el método de esta sección.

23. Encuentre la suma en  $|z| < 1$  de la serie

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} + \operatorname{sen} \left(\frac{4\pi}{3}\right) z + \operatorname{sen} \left(\frac{6\pi}{3}\right) z^2 + \dots$$

**24.** Demuestre la prueba de la razón: Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R,$$

entonces  $R$  será el radio de convergencia de la serie  $\sum a_n z^n$ .

Ahora, para los Ejercicios 25-27, permita que sea  $g(t)$  una función compleja continua en  $0 \leq t \leq 1$  y defina

$$f(z) = \int_0^1 g(t) e^{zt} dt.$$

**25.** Muestre que, para  $z$  fija, la serie

$$g(t) e^{zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n t^n g(t)}{n!}$$

converge uniformemente en  $0 \leq t \leq 1$ .

**26.** Pruebe que  $f(z)$  es entera. (Sugerencia: Utilice el Ejercicio 25 para intercambiar la sumatoria y la integral.)

**27.** Pruebe que  $f'(z) = \int_0^1 t g(t) e^{zt} dt$ .

**28.** Sea  $g(t)$  continua en  $0 \leq t \leq 1$ . Ahora defina

$$f(z) = \int_0^1 g(t) \sin(zt) dt.$$

Pruebe que  $f(z)$  es entera y encuentre su derivada.

**29.** Sea  $g(t)$  continua en  $0 \leq t \leq 1$ . Defina

$$f(z) = \int_0^1 \frac{g(t)}{1 - zt} dt, \quad |z| < 1.$$

Pruebe que  $f(z)$  es analítica en  $|z| < 1$  y encuentre su derivada.

**30.** Utilice una serie de Maclaurin para resolver la ecuación funcional

$$f(z^2) = z + f(z).$$

¿Dónde converge la serie?

### 3 SERIES DE LAURENT

La serie

$$a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} + \dots$$

puede considerarse una serie de potencias en la variable  $1/z$ . Si  $R$  es su radio de convergencia, la serie convergerá absolutamente siempre que  $|1/z| < R$  o  $|z| > 1/R$ . La convergencia es uniforme en toda región  $|z| \geq \rho$ ,  $\rho > 1/R$ , y la serie diverge para  $|z| < 1/R$ . Así que la serie representa una función

analítica en  $|z| > 1/R$ . Al combinarse una serie de este tipo con una serie de potencias ordinaria se obtiene una de la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Supóngase que la parte ordinaria converge en un disco  $|z| < R$  y que la otra parte converge en una región  $|z| > r$ . Si  $r < R$ , entonces existe un anillo abierto donde ambas series convergen:  $r < |z| < R$  (véase Figura 3.3). La serie representa una función analítica en este anillo. En forma semejante,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

representa una función analítica en el anillo  $r < |z - z_0| < R$ . A un desarrollo de este tipo se le llamará serie de Laurent. Recíprocamente, se probará ahora que una función analítica en el anillo  $r < |z - z_0| < R$  puede desarrollarse en una serie de Laurent.

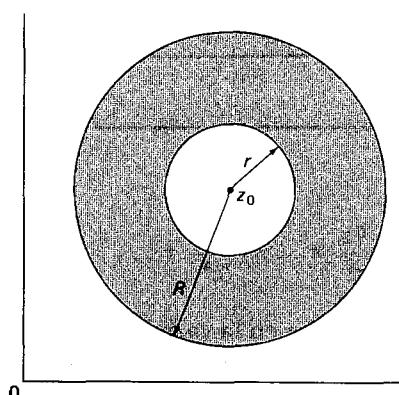
### TEOREMA DE LAURENT

Si  $f(z)$  es analítica en el anillo  $r < |z - z_0| < R$ , entonces puede desarrollarse de manera única en una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=r} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad r < \rho < R.$$



**FIGURA 3.3.** Región de convergencia de una serie de Laurent alrededor de  $z_0$

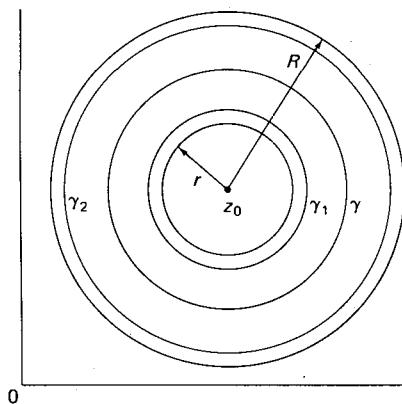


FIGURA 3.4.

**PRUEBA:** Denótense por  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  los círculos  $|z - z_0| = r + \epsilon$  y  $|z - z_0| = R - \epsilon$ , respectivamente, con  $0 < \epsilon < (R - r)/2$  (véase Figura 3.4). Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

para todo  $z$  que satisfaga  $r + \epsilon < |z - z_0| < R - \epsilon$ . El teorema de Riemann (o el de Cauchy y el de Cauchy para las derivadas) proporciona la analiticidad de cada integral en los complementos de las curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Si se procede exactamente igual que cuando se probó el teorema de Taylor, la primera integral se transforma en

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Para la segunda integral obsérvese que, por la serie geométrica (Ejemplo 2, Sección 3.1),

$$\frac{-1}{\xi - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n,$$

ya que  $|\xi - z_0| < |z - z_0|$  sobre  $\gamma_1$ . Aún más, la serie converge uniformemente en  $\xi$  para  $\xi$  en el interior de  $\gamma_1$ . Con el teorema de Weierstrass, se puede integrar término por término para obtener

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (z - z_0)^{-(n+1)} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\xi) (\xi - z_0)^n d\xi \right\}.$$

Luego

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n-1} (z - z_0)^{-n-1},$$

con

$$a_{-n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{-n}}.$$

Finalmente, como  $f(\xi)/(\xi - z_0)^{n+1}$  es analítica sobre y en el interior de  $\gamma_2 - \gamma$ , o  $\gamma - \gamma_1$ , donde  $\gamma$  es el círculo  $|\xi - z_0| = \rho$ ,  $r < \rho < R$ , el teorema de Cauchy implica que se puede reemplazar  $\gamma_1$  o  $\gamma_2$  por  $\gamma$  en el cálculo de los coeficientes  $a_n$ . Nótese que si  $\epsilon$  puede elegirse arbitrariamente cercano a cero se llega a la representación deseada en el anillo  $r < |z - z_0| < R$ . ■

La representación en serie de Laurent de una función dada es única, ya que si  $f(z)$  tuviera representaciones

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

entonces, al multiplicar por  $(z - z_0)^k$ , para cualquier entero  $k$ , y al integrar a lo largo de  $|z - z_0| = \rho$  se tendría, por convergencia uniforme,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^{n+k} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \cdot \int_{\gamma} (z - z_0)^{n+k} dz.$$

Como todas las potencias de  $z - z_0$  excepto  $(z - z_0)^{-1}$ , tienen antiderivadas analíticas en  $r < |z - z_0| < R$ , sus integrales se anulan por el teorema fundamental. Así  $2\pi i a_{-k-1} = 2\pi i b_{-k-1}$ , lo cual implica que  $a_k = b_k$  para todo entero  $k$ .

Frecuentemente los coeficientes  $a_n$  no se obtienen por medio de sus fórmulas integrales. Se darán ejemplos de las técnicas que se emplean para evitar este cálculo.

### EJEMPLO 1

Al utilizar la serie de Maclaurin de  $\cos z$  y  $e^z$ , se tiene

$$\frac{\cos z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-2}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{(2n+2)!}, \quad 0 < |z| < \infty,$$

$$e^{1/z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-2n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^0 \frac{z^{2n}}{(-n)!}, \quad 0 < |z|.$$

**EJEMPLO 2**

Considere la función  $(z^2 - 3z + 2)^{-1}$ . Es analítica en todas partes, excepto en  $z = 1, 2$ . Encuentre su serie de Laurent en las regiones (a)  $1 < |z| < 2$ , (b)  $|z| < 1$ , (c)  $|z| > 2$  y (d)  $0 < |z - 1| < 1$ .

**SOLUCIÓN:** (a) En el anillo  $1 < |z| < 2$ , al escribir

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

se pueden desarrollar las fracciones en la forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \end{aligned}$$

ya que  $|1/z| < 1$  y  $|z/2| < 1$ . Así,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n.$$

(b) Para  $|z| < 1$ , se desarrolla la expresión como

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Por tanto,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

(c) Aquí

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} &= \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} - \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} \\ &= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - 1\right) z^n, \quad 2 < |z|. \end{aligned}$$

(d) En  $0 < |z - 1| < 1$ , se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} \\ &= -\frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n.\end{aligned}$$

Por tanto, en  $0 < |z - 1| < 1$ ,

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=-1}^{\infty} (z-1)^n.$$

## EJERCICIOS

Encuentre la serie de Laurent de la función  $(z^2 + z)^{-1}$  en las regiones de los Ejercicios 1-3.

1.  $0 < |z| < 1$       2.  $0 < |z - 1| < 1$       3.  $1 < |z - 1| < 2$

Represente la función  $(z^3 - z)^{-1}$  como una serie de Laurent en las regiones de los Ejercicios 4-7.

4.  $0 < |z| < 1$       5.  $1 < |z|$   
6.  $0 < |z - 1| < 1$       7.  $1 < |z - 1| < 2$

Encuentre la serie de Laurent de la función  $z/(z^2 + z - 2)$  en las regiones dadas en los Ejercicios 8-13.

8.  $|z| < 1$       9.  $0 < |z - 1| < 3$   
10.  $0 < |z + 2| < 3$       11.  $1 < |z| < 2$   
12.  $|z| > 2$       13.  $|z + 2| > 3$

Represente las funciones dadas en los Ejercicios 14-17 como series de Laurent en la región  $0 < |z| < \infty$ .

14.  $ze^{1/z}$       15.  $e^{z+1/z}$

16.  $\sin z \sin \frac{1}{z}$       17.  $\sin \left(z + \frac{1}{z}\right)$

Encuentre las series de Laurent de las funciones de los Ejercicios 18-21 en la región  $0 < |z - 1| < 1$ .

18.  $\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$       19.  $\frac{1}{z} \sin \frac{1}{z-1}$

20.  $\sin \frac{1}{z(z-1)}$       21.  $z \sin \frac{1}{z-1}$

22. Suponga que  $f(z)$  es analítica y acotada por  $M$  en  $r < |z - z_0| < R$ . Muestre que los coeficientes de su serie de Laurent satisfacen

$$|a_n| \leq MR^{-n}, \quad |a_{-n}| \leq Mr^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Suponga que  $r = 0$ . ¿Se puede definir  $f(z_0)$  de tal forma que  $f(z)$  sea analítica en  $|z - z_0| < R$ ?

23. La función de Bessel  $J_n(z)$  se define como el  $n$ -ésimo coeficiente ( $n \geq 0$ ) de la serie de Laurent de la función

$$e^{(z/2)(\xi - 1/\xi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) \xi^n.$$

Muestre que

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - z \sin \theta) d\theta.$$

24. Use los coeficientes de la serie de Laurent de  $e^{1/z}$  en  $|z| > 0$ , para mostrar que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos \theta} \cos(\sin \theta - n\theta) d\theta = \frac{1}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(Sugerencia: Integre sobre  $|z| = 1$ .)

25. Evalúe la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos \theta)^m \cos n\theta d\theta, \quad m, n \text{ enteros,}$$

comparando los coeficientes de la serie de Laurent de  $(z + 1/z)^m$  con su desarrollo binomial.

26. Encuentre la serie de Laurent de  $\csc z$  en  $\pi < |z| < 2\pi$ .

## 4 SINGULARIDADES AISLADAS

Se dice que una función  $f(z)$ , analítica en una región  $0 < |z - z_0| < R$ , pero no analítica o no necesariamente definida en  $z_0$ , tiene una **singularidad aislada** en  $z_0$ . Estas singularidades se clasifican en tres categorías.

(i) **Singularidades removibles** son aquellas donde es posible asignar a  $f(z_0)$  un número complejo, de tal forma que  $f(z)$  se vuelve analítica en  $|z - z_0| < R$ . En este caso, es necesario que  $f(z) \rightarrow A$  ( $\neq \infty$ ) cuando  $z \rightarrow z_0$ . Pero, en tales circunstancias,  $f(z)$  es analítica en  $0 < |z - z_0| < R/2$  y continua en  $|z - z_0| \leq R/2$ ; por ende, el principio del máximo implica que  $f(z)$  es acotada en  $|z - z_0| \leq R/2$ . Por la estimación de Cauchy, o con el Ejercicio 22, Sección 3.3, la serie de Laurent de  $f(z)$  es una serie de Taylor convergente, o sea, una función analítica en  $|z - z_0| < R$ . Por tanto, la existencia del límite es necesaria y suficiente para garantizar que la singularidad es removable.

(ii) Los **polos** aparecen siempre que  $f(z) \rightarrow \infty$  cuando  $z \rightarrow z_0$ . Observe que aquí la función  $g(z) = 1/f(z)$  tiene una singularidad removable en  $z_0$  con  $g(z_0) = 0$ , y  $z_0$  es un cero aislado de  $g(z)$ , puesto que  $f(z)$  no es cero y es finita en un conjunto  $0 < |z - z_0| < r \leq R$ . Si el orden del cero de  $g(z)$  en  $z_0$  es  $n$ ,  $g(z) = (z - z_0)^n g_n(z)$ , entonces  $f(z) = (z - z_0)^{-n} f_n(z)$ , donde  $f_n(z) = 1/g_n(z)$  es analítica en  $|z - z_0| < r$ . A  $n$  se le llama **orden del polo de  $f$  en  $z_0$** .

Además, la serie de Laurent de  $f(z)$ , centrada en  $z_0$ , es el producto de  $(z - z_0)^{-n}$  y la serie de Taylor de  $f_n(z)$  en  $z_0$ , así que se escribe

$$\sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_{-n} \neq 0.$$

Como  $g(z)$  es una función analítica no constante en  $|z - z_0| < r$ , el orden del cero de  $g$  en  $z_0$  debe ser finito. Entonces, el orden del polo de  $f(z)$  en  $z_0$  debe ser también finito.

(iii) **Singularidades esenciales** son todas las aisladas que no son removibles ni polos. En este caso,  $f(z)$  no tiene límite cuando  $z \rightarrow z_0$ , y un número infinito de coeficientes  $a_{-n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , de su serie de Laurent alrededor de  $z_0$  no se anulan; puesto que, de otra manera,  $z_0$  sería un polo o una singularidad removible.

Se dan algunos ejemplos para ampliar las definiciones. Obsérvese que

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

tiene una singularidad removible en  $z = 0$ . De tal forma que

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0, \end{cases}$$

es entera. Por otra parte,

$$\frac{\cos z}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \dots$$

tiene un polo de orden 2 en  $z = 0$ . Finalmente,

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$$

tiene una singularidad esencial en  $z = 0$ .

El concepto de singularidades aisladas también se aplica a las funciones (univaluadas)  $f(z)$ , analíticas en una vecindad  $R < |z| < \infty$  de  $\infty$ . Por conveniencia, se clasifica una singularidad aislada en  $\infty$  si  $g(z) = f(1/z)$  tiene una singularidad removible, un polo, o una singularidad esencial en  $z = 0$ .

Las singularidades no son necesariamente aisladas. Por ejemplo, la función

$$f(z) = \left( \operatorname{sen} \frac{1}{z} \right)^{-1}$$

tiene singularidades en  $z = (\pi n)^{-1}$  para todos los enteros positivos  $n$ . Así,  $z = 0$  no es una singularidad aislada.

## DEFINICIÓN

Una función analítica en una región  $G$ , excepto por sus polos, se llama meromorfa en  $G$ .

Si  $f(z)$  y  $g(z)$  son analíticas en  $G$ , y  $g(z)$  no es idénticamente cero, entonces las singularidades del cociente  $f(z)/g(z)$  coincidirán con los ceros de  $g(z)$ . Estos serán polos siempre y cuando  $f(z)$  no sea cero, o tenga un cero de orden menor que el de  $g(z)$ ; de otra manera, serán singularidades removibles. Al extender  $f(z)/g(z)$  por continuidad, sobre las singularidades removibles, se obtiene una función meromorfa en  $G$ . Por ejemplo,  $f(z) = \tan z = \sin z / \cos z$  es meromorfa en  $\mathbb{C}$  con polos en  $z = (k + \frac{1}{2})\pi$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y  $z = \infty$  es un punto de acumulación de polos.

El comportamiento de determinada función en una  $\epsilon$ -vecindad de una singularidad esencial es muy complicado, como lo demuestra el siguiente resultado.

### TEOREMA DE WEIERSTRASS-CASORATI

Una función analítica se aproxima arbitrariamente a un valor dado en cualquier  $\epsilon$ -vecindad de una singularidad esencial.

**PRUEBA:** Si el teorema es falso, se puede encontrar un número complejo  $A$  y un  $\delta > 0$  tales que  $|f(z) - A| > \delta$  en toda vecindad  $0 < |z - z_0| < \epsilon$  de la singularidad esencial  $z_0$ . Entonces

$$\left| \frac{f(z) - A}{z - z_0} \right| > \frac{\delta}{|z - z_0|} \rightarrow \infty \quad \text{cuando } z \rightarrow z_0,$$

lo cual implica que  $g(z) = [f(z) - A]/(z - z_0)$  tiene un polo en  $z_0$ . Así,  $g(z)$  es meromorfa en  $|z - z_0| < \epsilon$ . Pero, entonces, también  $f(z) = A + (z - z_0)g(z)$ , lo es. De ahí que contradiga la hipótesis de que  $z_0$  es una singularidad esencial. ■

De hecho se puede demostrar más, aunque la prueba es difícil, y no se dará aquí:

### TEOREMA DE PICARD

Una función analítica toma infinitas veces todos los valores complejos, excepto posiblemente uno, en cada una de las  $\epsilon$ -vecindades de una singularidad esencial.

### EJEMPLO 1

Encuentre y clasifique las singularidades de las funciones

$$(a) \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + z}, \quad (b) \quad g(z) = e^{-1/z^2}, \quad (c) \quad h(z) = \csc z.$$

**SOLUCIÓN:** (a) Las singularidades ocurren en los ceros del denominador:  $z = 0, -1$ . Como éstos son ceros simples y el numerador tiene un cero simple en  $z = 0$ ,  $f(z)$  tiene una singularidad removable en  $z = 0$  y un polo simple en  $z = -1$ .

(b) Nótese que  $g(z) \rightarrow 1$ , puesto que  $1/z^2 \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ , así que  $g(z)$  tiene una singularidad removable en  $z = \infty$ . Pero

$$g(z) = 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!} \frac{1}{z^4} - \dots$$

es la serie de Laurent de  $g(z)$ , centrada en  $z = 0$ ; por lo que  $g(z)$  tiene una singularidad esencial en  $z = 0$ .

(c) Como

$$\sin z = (-1)^k \sin(z - \pi k) = (-1)^k \left[ (z - \pi k) - \frac{(z - \pi k)^3}{3!} + \dots \right],$$

$h(z)$  tiene un polo simple en  $z = \pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , y un punto de acumulación de polos en  $z = \infty$ .

## EJEMPLO 2

Pruebe que  $\sin z$  toma todos los valores de  $\mathbb{C}$  en cualquier vecindad de  $\infty$ .

**SOLUCIÓN:** Toda franja  $(2n - 1)\pi/2 \leq x \leq (2n + 1)\pi/2$  de  $\mathbb{C}$  se mapea en  $\mathbb{C}$  por  $w = \sin z$ . Como se puede encontrar un número infinito de franjas en  $|z| > R$  para todo  $R$  real,  $\sin z$  toma a todos los valores de  $\mathbb{C}$  en toda vecindad de  $\infty$ .

## EJERCICIOS

Para cada una de las funciones de los Ejercicios 1-6, encuentre y clasifique las singularidades.

1.  $\frac{z}{z^3 + z}$

2.  $\frac{e^z}{1 + z^2}$

3.  $ze^{1/z}$

4.  $e^{z-1/z}$

5.  $\sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}$

6.  $e^{\tan 1/z}$

7. Construya una función que tenga una singularidad removable en  $z = -1$ , un polo de orden 3 en  $z = 0$ , y una singularidad esencial en  $z = 1$ . Entonces encuentre su serie de Laurent en  $0 < |z| < 1$ .

Muestre que cada uno de los integrandos de los Ejercicios 8-11 tiene una singularidad removable en  $z = 0$ . Quite la singularidad y obtenga la serie de Maclaurin de cada integral.

$$8. \text{ Si } (z) = \int_0^z \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi$$

$$9. C(z) = \int_0^z \frac{\cos \xi - 1}{\xi} d\xi$$

$$10. E(z) = \int_0^z \frac{e^\xi - 1}{\xi} d\xi$$

$$11. L(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{Log}(1 + \xi)}{\xi} \cdot d\xi$$

12. Muestre que la función  $f(z) = e^{1/z}$  toma todos los valores, excepto 0, un número infinito de veces en cualquier  $\epsilon$ -vecindad de  $z = 0$ .
13. Pruebe que una función entera, con una singularidad no esencial en  $e^z$ , debe ser un polinomio. ¿Qué clase de singularidad tienen  $\infty \operatorname{sen} z$  y  $\cos z$  en  $\infty$ ?
14. Muestre que una función meromorfa en  $\mathfrak{M}$  debe ser el cociente de dos polinomios.
15. Pruebe que una función entera es constante si no toma los valores 0 y 1. (*Sugerencia:* Use el teorema de Picard).

## 3.5 CONTINUACIÓN ANALÍTICA (opcional)

Sucede a menudo que la expresión  $f_0(z)$ , como una serie infinita o una integral —que define una función analítica—, sólo tiene significado en alguna región limitada  $G_0$  del plano. Surge entonces la pregunta de si existe o no alguna forma de extender la definición de la función y volverla analítica en una región mayor. En particular, ¿es posible encontrar una expresión  $f_1(z)$  analítica en una región  $G_0$  que intersecte a  $G_1$  tal que  $f_0(z) = f_1(z)$ , para todo  $z$  en  $G_0 \cap G_1$ ? Si es así, se puede extender esta función a la región  $G_0 \cup G_1$ , y se dice que los elementos  $(f_0, G_0)$  y  $(f_1, G_1)$  forman una **continuación analítica directa** donde se sigue el uno del otro. Cualquier continuación analítica directa de  $(f_0, G_0)$  a  $G_1$  es necesariamente única, porque dos funciones analíticas en  $G_1$  concordantes en  $G_0 \cap G_1$  deben coincidir en  $G_1$  (véase Ejercicio 20, Sección 3.1).

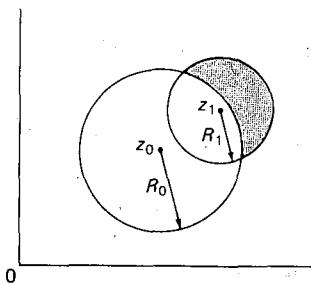
Un procedimiento para obtener continuaciones analíticas empieza por desarrollar la expresión dada en una serie de Taylor

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

que converja en el disco  $|z - z_0| < R_0$  centrado en el punto  $z_0$  de  $G_0$ . Si  $z_1$  satisface a  $|z_1 - z_0| < R_0$ , se puede desarrollar  $f_0$  en la serie de potencias

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_1)^n, \quad b_n = \frac{f_0^{(n)}(z_1)}{n!},$$

que converja en el disco  $|z - z_1| < R_1$ . Ciertamente,  $R_1 \geq R_0 - |z_1 - z_0|$ . Si se cumple la igualdad, el punto de contacto de los círculos  $|z - z_0| = R_0$  y  $|z - z_1| = R_1$  debe ser una singularidad de la función, puesto que el teorema de Taylor implica la existencia de una singularidad en cada círculo de convergencia. De otra manera, una parte de  $|z - z_1| < R_1$  se localizaría en el exterior de  $|z - z_0| < R_0$  y  $(f_1, \{|z - z_1| < R_1\})$  sería una continuación



**FIGURA 3.5.** Continuación analítica directa

analítica de  $(f_0, \{ |z - z_0| < R_0 \})$ , ya que ambas series coinciden en el traslape (véase Figura 3.5).

### EJEMPLO 1

La serie de potencias

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - \frac{1}{2})^n$$

tiene radio de convergencia  $R = 1$ , así que la región de convergencia  $G_0$  es el disco  $|z - \frac{1}{2}| < 1$ . Se puede continuar  $(f_0, G_0)$  a un disco centrado en 0 calculando

$$f_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n, \quad f'_0(0) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-\frac{1}{2})^{n-1}, \dots,$$

pero es más fácil observar que  $f_0(z) = (3/2 - z)^{-1}$  en  $G_0$ . Entonces, con el Ejemplo 2, Sección 3.1, se tiene

$$f_1(z) = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \left(\frac{2z}{3}\right)} = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2z}{3}\right)^n, \quad |z| < \frac{3}{2},$$

lo cual implica que  $G_1$  es el disco  $|z| < 3/2$ , y  $z = 3/2$  es una singularidad de la función.

Este procedimiento puede continuarse, pero se debe tener cuidado, porque una sucesión de discos podría volver a traslaparse con el primero, y es posible que no coincida en el traslape. Esto ocurre cuando la función es multivaluada y los discos llevan alrededor de un punto rama de la función, y sobre una rama diferente de su superficie de Riemann (véase Figura 3.6). Así, aun si  $(f_2, G_2)$  es una continuación analítica directa de  $(f_1, G_1)$ , no necesariamente lo es de  $(f_0, G_0)$ , y sólo una función multivaluada servirá para definir la extensión.

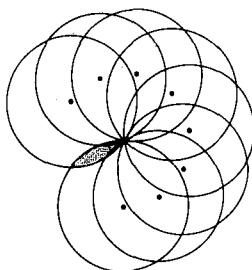


FIGURA 3.6. Una continuación analítico

**EJEMPLO 2**

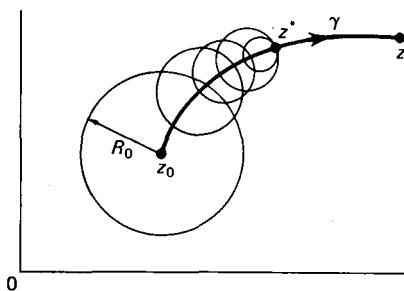
Considere la función  $f(z) = 1/\sqrt{z}$  en los puntos  $z = e^{\pi i/4}, e^{7\pi i/4}$ . Si se utiliza el teorema binomial, se puede obtener el desarrollo en serie de Taylor alrededor de cada uno de esos dos puntos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z}} &= e^{-\pi i/8} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - ze^{-\pi i/4})}} \\ &= e^{-\pi i/8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (1 - ze^{-\pi i/4})^n, |z - e^{\pi i/4}| < 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{z}} &= e^{-7\pi i/8} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - ze^{-7\pi i/4})}} \\ &= e^{-7\pi i/8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} (1 - ze^{-7\pi i/4})^n, |z - e^{7\pi i/4}| < 1. \end{aligned}$$

Al evaluar la primera expresión en  $e^0$  y la segunda en  $e^{2\pi i}$ , se obtiene  $e^0 = 1$  y  $e^{-\pi i} = -1$ , respectivamente. Nótese que en la superficie de Riemann  $[C - \{0\}]^2$ , para  $f(z) = 1/\sqrt{z}$ , el punto  $e^0$  no pertenece al disco  $|z - e^{7\pi i/4}| < 1$ .

Cada elemento de una cadena  $(f_0, G_0), (f_1, G_1), \dots, (f_n, G_n)$ , donde  $(f_j, G_j)$  es una continuación analítica directa de  $(f_{j-1}, G_{j-1})$ , se llama **continuación analítica** de los otros. Así, el procedimiento anterior puede utilizarse para construir continuaciones analíticas, donde la elección de los centros  $z_1, z_2, \dots, z_n$  determine los valores de la función. En particular, si  $\gamma$  es una curva que une a  $z_0$  con un punto  $z'$  que no está en el disco  $|z - z_0| < R_0$ , se puede construir una continuación analítica, que consista de discos  $|z - z_j| < R_j$  de convergencia de representaciones por series de la función, de tal forma que  $z_j$  siga a  $z_{j-1}$  en la parametrización de  $\gamma$ . Al llegar a  $z'$  por una cadena finita de



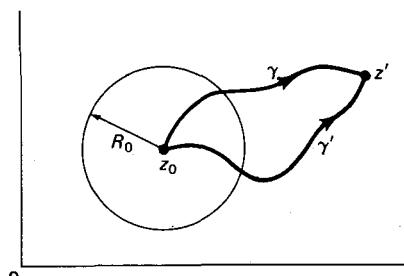
**FIGURA 3.7.** Continuación analítica a lo largo de  $\gamma$

tales discos, se dice que ésta es una **continuación analítica de la función a lo largo de la curva  $\gamma$**  (véase Figura 3.7). Por otra parte se tiene un número infinito de discos, cuyos centros  $z_j$  convergen a un punto  $z^*$  de  $\gamma$ , y, por tanto, sus radios tienden a cero. Además, debe haber una singularidad de la función en la frontera de cada uno de estos discos, y estas singularidades también tienden a  $z^*$ . Puesto que toda  $\epsilon$ -vecindad de  $z^*$  contiene una singularidad, la función no puede ser analítica en  $z^*$ . Así, se ha probado el teorema siguiente.

### TEOREMA

La serie de potencias  $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$  puede continuarse analíticamente a lo largo de cualquier curva  $\gamma$  que empiece en su disco de convergencia  $|z - z_0| < R_0$  hasta que se encuentre una de sus singularidades.

Intuitivamente, si  $\gamma$  y  $\gamma'$  son arcos disjuntos, excepto en sus dos extremos  $z_0$  y  $z'$  tales que no existen singularidades sobre o en el interior de la curva cerrada  $\gamma - \gamma'$ , entonces *el resultado de la continuación analítica por cada trayectoria es el mismo*, ya que el interior podría cubrirse con discos que traslapasen a los de la continuación analítica a lo largo de los dos arcos (véase Figura 3.8). Este resultado se llama **teorema de la monodromía**; como su prueba es complicada, no se dará.



**FIGURA 3.8.**

## DEFINICIÓN

Una función analítica global es una colección  $\mathcal{F}$  de elementos  $(f, G)$ , tales que dos cualesquiera de ellos son una continuación analítica del otro, a través de una cadena de elementos de  $\mathcal{F}$ .

### EJEMPLO 3

Sea  $G_k$  la región que consiste en todos los puntos  $z$  que satisfacen  $|\arg z - (k\pi/2)| < \pi/2$ , para todos los enteros  $k$ , y sea  $f_k(z) = \log z$ , para todo  $z$  en  $G_k$ . Entonces la colección  $(f_0, G_0), (f_1, G_1), \dots, (f_n, G_n), \dots$  es una función analítica global, ya que es la colección de elementos  $(f_j, G_j)$  para todo entero  $j$ .

Se dice que dos elementos  $(f_0, G_0), (f_1, G_1)$  determinan la misma rama de una función analítica global en un punto  $z_0$  de  $G_0 \cap G_1$  si  $f_0(z) = f_1(z)$  en una  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$ . Nótese, sin embargo, que no es necesario que los elementos de la función sean continuaciones analíticas directas uno del otro.

### EJEMPLO 4

Si  $G_k$  consiste en todos los puntos  $z$  que satisfacen  $|\arg z - (k\pi/2)| < 3\pi/4$ , y  $f_k(z) = \log z$ , para todo  $z$  en  $G_k$  y todo entero  $k$ , entonces  $e^{i\pi/2}$  pertenece a  $G_0 \cap G_2$  y  $f_0(z) = f_2(z)$ , para todo  $z$  con  $|\arg z - (\pi/2)| < \pi/4$ , aunque  $(f_0, G_0)$  y  $(f_2, G_2)$  no sean continuaciones analíticas directas uno del otro (véase Figura 3.9).

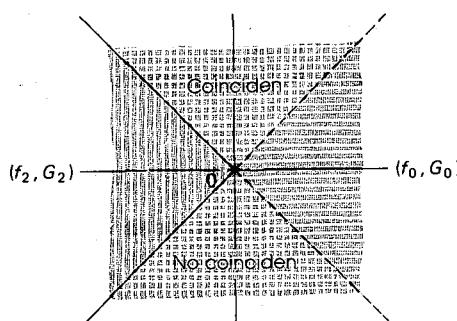


FIGURA 3.9.

Los puntos de la frontera del dominio de definición de una función analítica global caen en dos clases: (i) puntos sobre los cuales la función puede continuarse analíticamente (**puntos regulares**) y (ii) singularidades.

Las singularidades pueden ser aisladas o no. Si es aislada se llama **punto de ramificación de orden  $n - 1$** , siempre que todos los puntos en una  $\epsilon$ -vecindad de la singularidad tengan  $n$  ramas distintas. Si  $n = \infty$ , se le llama **punto de ramificación logarítmico**.

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-3, encuentre primero una función que coincida con la serie dada en su disco de convergencia.

1. Desarrolle  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$  en una vecindad de  $z = \frac{1}{2}$ , y determine su radio de convergencia.
2. Desarrolle  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$  en una serie de Taylor, en una vecindad de  $z = a$ ,  $|a| < 1$ . ¿Cuál es el nuevo radio de convergencia de la serie?
3. Muestre que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad \text{y} \quad i\pi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-2)^n}{n}$$

no tienen región de convergencia común, no obstante que son continuaciones analíticas una de la otra.

Para los Ejercicios 4-7, encuentre la serie de Taylor de cada función en el disco  $|z - 1| < 1$  de su rama principal. Entonces, continúe analíticamente cada función a lo largo de  $\gamma$ :  $z(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . ¿Los valores en  $z(2\pi)$  coinciden con los de  $z(0)$ ?

4.  $\log z$
5.  $z^{1/2}$
6.  $\operatorname{sen}(z^{1/2})\pi/2$
7.  $(\operatorname{sen} z\pi/2)^{1/2}$
8. Muestre que la función

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{2^n}$$

es analítica en  $|z| < 1$ , a pesar de que no puede continuarse fuera de este conjunto. A  $|z| = 1$  se le llama **su frontera natural**. (Sugerencia: Como  $f(z) = z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + f(z^{2^n})$ , muestre que los puntos  $\zeta = e^{\pi i/2^k}$  satisfacen  $f(t\zeta) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow 1^-$ .)

9. Muestre que  $|z| = 1$  es la frontera natural de

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

10. Muestre que el eje imaginario es una frontera natural de la función

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n!z}.$$

¿Dónde es analítica la función?

11. Encuentre una representación en serie, centrada en  $z = 1$ , de la función

$$f(z) = \int_0^{\infty} t^2 e^{-zt} dt, \quad 0 < t < \infty,$$

analítica en  $\operatorname{Re} z > 0$ . ¿Cuál es su continuación analítica al plano completo?

**12.** La función gamma está definida en el semiplano derecho mediante la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad 0 < t < \infty.$$

Pruebe que ésta satisface la ecuación funcional  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$  y es analítica en  $\operatorname{Re} z > 0$ . Muestre que tiene una continuación analítica al plano completo como una función meromorfa con polos simples en  $0, -1, -2, \dots$

**13.** **Principio de reflexión de Schwarz.** Sea  $f = u + iv$  analítica en una región  $G+$  situada en el semiplano superior, y que tiene un segmento  $\gamma$  del eje real como parte de su frontera. Si  $f$  es continua y toma valores reales en  $\gamma$ , entonces  $f$  tiene una continuación analítica única a través de  $\gamma$  hacia la región  $G-$ , que es la reflexión de  $G+$  a través del eje real. (*Sugerencia:* Muestre que  $\bar{f}(\bar{z})$  es analítica en  $G-$  y aplique el teorema de Morera o las ecuaciones de Cauchy-Riemann a  $G+ \cup \gamma \cup G-$ .)

**14.** Pruebe el teorema de Pringsheim: Una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con radio de convergencia 1 y coeficientes reales no negativos  $a_n$  tiene una singularidad en  $z = 1$ .

**15.** Muestre que aunque  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^2$  converge en todo punto de  $|z| = 1$ , no es analítica en  $z = 1$ .

## NOTAS

Se han omitido importantes teoremas de Mittag-Leffler y Weierstrass, concernientes a las representaciones de funciones meromorfas por medio de series infinitas y productos. Se exhorta al lector al estudio de estos tópicos, de los cuales puede encontrar un desarrollo en [A, págs. 185-196].

## SECCIÓN 3.4

Se pueden encontrar dos pruebas diferentes del teorema de Picard en [A, pág. 297] y [V, pág. 144].

## SECCIÓN 3.5

Aunque en teoría está bien el método indicado para construir continuaciones analíticas directas, en la práctica rara vez es útil. El problema radica en calcular los coeficientes  $b_n$ , los cuales, a menos que se tenga información adicional, son sumas de series infinitas.

Una prueba del teorema de la monodromía puede encontrarse en [A, pág. 285].



# 4 INTEGRACIÓN EN CONTORNOS

## 1 TEOREMA DEL RESIDUO

Se ha demostrado en la Sección 3.3 que una función  $f(z)$ , analítica en una región  $0 < |z - z_0| < R$ , puede desarrollarse en una serie de Laurent alrededor de  $z_0$ . Al coeficiente

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi-z_0|=\rho} f(\xi) d\xi, \quad 0 < \rho < R,$$

de esta serie de Laurent, se le llama **residuo** de la función  $f(z)$  en  $z_0$  y se denota como  $\text{Res}_{z_0} f(z)$ . Obsérvese que al conocer el residuo de  $f$  en  $z_0$  se tiene un método alternativo para evaluar la integral

$$\int_{\gamma} f(\xi) d\xi = 2\pi i \text{Res}_{z_0} f(z),$$

donde  $\gamma$  es cualquier curva de Jordan spp, con  $z_0$  en el interior de  $\gamma$ .

El siguiente teorema es de fundamental importancia en el análisis complejo, y es el concepto central en el desarrollo de las técnicas de este capítulo.

### TEOREMA DEL RESIDUO

Sea  $f(z)$  analítica en una región  $G$ , que contiene al conjunto de todos los

puntos dentro y sobre una curva de Jordan  $\gamma$  spp excepto por un número finito de singularidades  $z_1, \dots, z_k$  en el interior de  $\gamma$ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^k \text{Res}_{z_n} f(z).$$

**PRUEBA:** Se pueden dibujar círculos  $|z - z_n| = r_n (> 0)$ ,  $n = 1, \dots, k$ , en el interior de  $\gamma$  de tal forma que los discos  $|z - z_n| \leq r_n$  sean disjuntos uno del otro. Por la generalización del teorema de Cauchy a regiones múltiplemente conexas (véase Sección 2.3),

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{n=1}^k \int_{|z-z_n|=r_n/2} f(z) dz,$$

y en cada región  $0 < |z - z_n| < r_n$ , el desarrollo de  $f(z)$  en serie de Laurent alrededor de  $z_n$  establece que

$$\text{Res}_{z_n} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_n|=r_n/2} f(z) dz, \quad n = 1, \dots, k.$$

El resultado deseado se obtiene al combinar estas dos identidades. ■

Para que este teorema sea útil es necesario obtener métodos simples de evaluación de residuos. En particular, se desea evitar el proceso de integración siempre que sea posible. Si se conoce explícitamente la serie de Laurent, entonces el residuo es igual a  $a_{-1}$ . Para singularidades no esenciales, nótese que  $a_{-1}$  se anula en las singularidades removibles, y que si  $z_0$  es un polo de orden  $k$ , entonces

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k},$$

Así que, para  $k = 1$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1},$$

mientras que, para  $k > 1$ ,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] = (k-1)! a_{-1}.$$

### EJEMPLO 1

Encuentre el residuo en todas las singularidades en  $\mathbb{C}$  de las funciones

$$(a) f(z) = z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}, \quad (b) g(z) = \frac{e^z}{z^3 - z^2}, \quad (c) h(z) = \frac{z}{\operatorname{sen} z}.$$

**SOLUCIÓN:** (a) Se sabe que la serie de Laurent de  $f(z)$  centrada en  $z = 0$ ,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) \\ &= z - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!z^3} - \dots, \quad 0 < |z| < \infty, \end{aligned}$$

lo cual implica que  $\text{Res}_0 f(z) = -\frac{1}{6}$ .

(b) Obsérvese que  $g(z)$  tiene un polo simple en  $z = 1$  y uno de orden 2 en  $z = 0$ . Así que se tiene

$$\text{Res}_1 g(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)g(z) = e$$

y

$$\text{Res}_0 g(z) = \lim_{z \rightarrow 0} [z^2 g(z)]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z-2)}{(z-1)^2} = -2.$$

(c) Nótese que  $h(z)$  tiene una singularidad removible en  $z = 0$  y polos simples en  $z = \pi k$ ,  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$  (véase Ejemplo 1c, Sección 3.4). Como  $\sin(z - \pi k) = (-1)^k \sin z$ , la solución completa está dada por

$$\text{Res}_{\pi k} h(z) = \lim_{z \rightarrow \pi k} \frac{(z - \pi k)z}{\sin z} = (-1)^k \pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

## EJEMPLO 2

Evalúe la integral

$$\int_{|z - \frac{1}{2}|=1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz.$$

**SOLUCIÓN:** Las singularidades del integrando se presentan en  $z = 0$ ,  $\pm 1$ . Por tanto, sólo es necesario calcular los residuos 0 y 1 en los polos simples

$$\text{Res}_0 \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{z^2 - 1} = -1$$

y

$$\text{Res}_1 \frac{e^z}{z(z^2 - 1)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{e^z}{z(z+1)} = \frac{e}{2}.$$

Así,

$$\int_{|z - \frac{1}{2}|=1} \frac{e^z}{z^3 - z} dz = \pi i (e - 2).$$

Aunque el teorema del residuo se establece en términos de los residuos en el conjunto  $S$ , de singularidades del integrando que están en el interior de la curva de Jordan  $\gamma$ , spp, los residuos en el conjunto  $S^*$ , de singularidades del integrando que están en el *exterior* de  $\gamma$ , pueden utilizarse algunas veces en la evaluación de integrales.

### TEOREMA DEL INTERIOR Y DEL EXTERIOR

Sea

$$F(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0},$$

donde  $m \geq n + 2$ . Entonces

$$\int_{\gamma} F(z) dz = \begin{cases} 2\pi i \sum_{S} \operatorname{Res} F(z), \\ -2\pi i \sum_{S^*} \operatorname{Res} F(z). \end{cases}$$

**PRUEBA:** La igualdad de arriba es sólo un reenunciado del teorema del residuo. Para obtener la igualdad de abajo, se escoge  $R$  suficientemente grande para que  $\gamma$  y todos los polos de  $F(z)$  estén situados en el interior del círculo  $C : |z| = R$ . Sea  $\gamma'$  un arco spp de  $\gamma$  para el círculo  $C$  que no pasa a través de los polos de  $F(z)$  (véase Figura 4.1). Entonces, por el teorema del residuo,

$$2\pi i \sum_{S^*} \operatorname{Res} F(z) = \int_{-\gamma + \gamma' + C - \gamma'} F(z) dz,$$

donde  $\gamma$  se recorre en el sentido de las manecillas del reloj. La integral sobre  $\gamma'$  cancela la de  $-\gamma'$  (véase parte (iii) del primer teorema de la Sección 2.3), así que

$$\int_{\gamma} F(z) dz = -2\pi i \sum_{S^*} \operatorname{Res} F(z) + \int_{|z|=R} F(z) dz.$$

Como  $R$  es arbitrario, la prueba estará completa si se muestra que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} F(z) dz = 0.$$

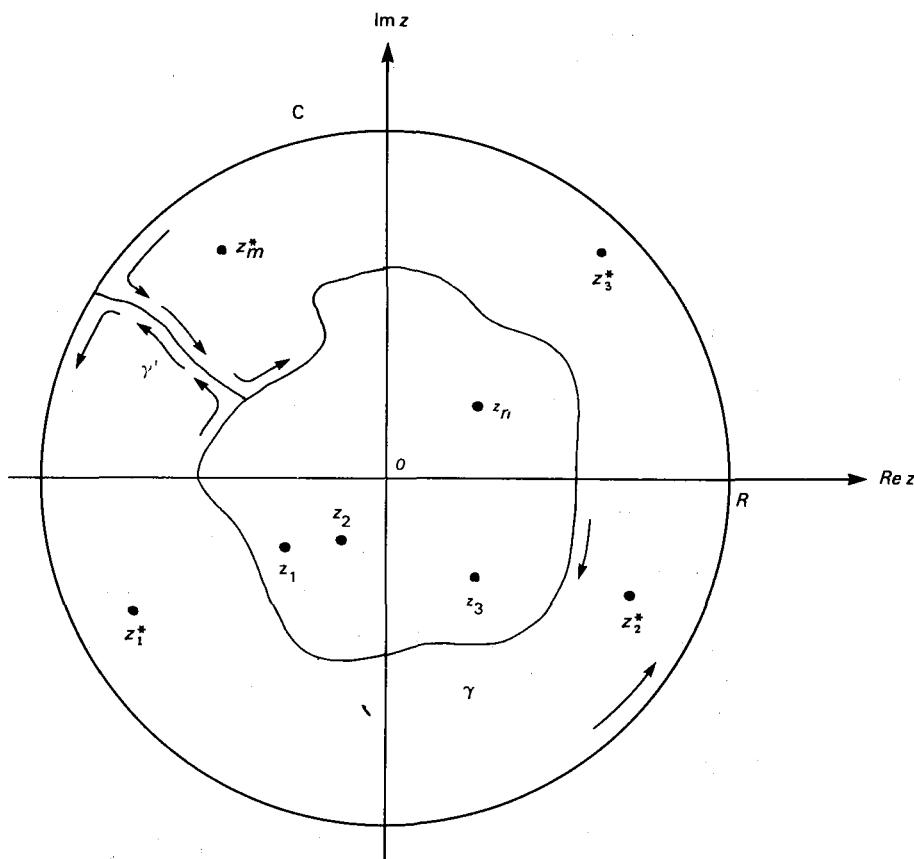
Por hipótesis,  $|z^2 F(z)|$  está limitada por una constante  $0 \leq M < \infty$  cuando  $z$  tiende a  $\infty$ , porque

$$z^2 F(z) = \frac{a_n z^{n+2-m} + \dots + a_0 z^{2-m}}{b_m + b_{m-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-m}}, \quad m \geq n + 2.$$

Por tanto,

$$\left| \int_{|z|=R} F(z) dz \right| \leq \int_{|z|=R} \frac{|z^2 F(z)|}{|z|^2} |dz| \leq \frac{2\pi R M}{R^2},$$

que tiende a 0 cuando  $R \rightarrow \infty$ .



**FIGURA 4.1.**  $S = \bigcup_{k=1}^n z_k$ : polos en el interior  $\gamma$ ;  $S^* = \bigcup_{k=1}^m z_k^*$ : polos en el exterior de  $\gamma$

### EJEMPLO 3

Evalúe la integral

$$\int_{|z|=1} \frac{z+a}{z^n(z+b)} dz, \quad |b| > 1.$$

**SOLUCIÓN:** El integrando tiene un polo de orden  $n$  en 0 y un polo simple en  $-b$ . Incluso si se diera  $n$ , el cálculo del residuo en 0 sería complicado para  $n > 1$ , ya que se requerirían  $n-1$  derivaciones de  $(z+a)/(z+b)$ . Esta dificultad puede evitarse con el uso del teorema del interior y del exterior en la forma

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{z+a}{z^n(z+b)} dz &= -2\pi i \operatorname{Res}_{-b} \frac{z+a}{z^n(z+b)} \\ &= -2\pi i \lim_{z \rightarrow -b} \frac{z+a}{z^n} = \frac{2\pi i(a-b)}{(-1)^{n+1} b^n}. \end{aligned}$$

Obsérvese que la integral sería cero si  $|b| < 1$ .

## EJERCICIOS

Encuentre el residuo en todas las singularidades en  $\mathbb{C}$  para las funciones dadas en los Ejercicios 1-12.

1.  $f(z) = \frac{z^3}{z^2 + 1}$

2.  $f(z) = \frac{e^z}{z^3 - z}$

3.  $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^3}$

4.  $f(z) = \frac{z}{(z^2 + 1)^2}$

5.  $f(z) = ze^{1/z}$

6.  $f(z) = z \cos \frac{1}{z}$

7.  $f(z) = (z - 1)e^{1/z}$

8.  $f(z) = (z - 1)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}$

9.  $f(z) = \frac{z}{\operatorname{senh} z}$

10.  $f(z) = \tan z$

11.  $f(z) = \cot z$

12.  $f(z) = \left(z + \frac{\pi}{2}\right) \sec z$

Evalúe las integrales en los Ejercicios 13-24. En los Ejercicios 15-18,  $n$  es un entero no negativo.

13.  $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2 + 1} dz$

14.  $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3 + z} dz$

15.  $\int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^n(z^2 + 1)}$

16.  $\int_{|z-1|=\sqrt{5}/2} \frac{dz}{z^n(z^2 + 1)}$

17.  $\int_{|z-i|=3/2} \frac{dz}{z^n(z^2 + 1)}$

18.  $\int_{|z-i|=1/2} \frac{dz}{z^n(z^2 + 1)}$

19.  $\int_{|z-1/2|=1} \frac{\operatorname{sen} z}{z^3 + z} dz$

20.  $\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^3 + z)^2} dz$

21.  $\int_{|z|=1} ze^{1/z} dz$

22.  $\int_{|z|=1} \tan z dz$

23.  $\int_{|z|=2} \tan z dz$

24.  $\int_{|z|=5} \tan z dz$

25. Suponga que  $P(z)$ ,  $Q(z)$  son polinomios. Muestre que todos los residuos de la función  $[P(z)/Q(z)]'$  son cero.

## 4.2 EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES DEFINIDAS

En esta y las siguientes tres secciones, se presentan algunas técnicas útiles para aplicar el teorema del residuo a la evaluación de integrales definidas.

### Integrales como

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta,$$

donde  $F(s, t)$  es el cociente de dos funciones polinomiales en  $s$  y  $t$ , pueden transformarse en integrales de línea mediante la sustitución  $z = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , puesto que

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right),$$

y

$$\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta} = iz.$$

Así, se ha probado el siguiente teorema.

### TEOREMA

$$\int_0^{2\pi} F(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_{|z|=1} F \left[ \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{iz}.$$

### EJEMPLO 1

Muestre que

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0.$$

**SOLUCIÓN:** Como  $\cos \theta$  toma los mismos valores en  $[\pi, 2\pi]$  que en  $[0, \pi]$ , la integral anterior es igual a

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \cos \theta} = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{bz^2 + 2az + b}.$$

Cuando se factoriza el denominador en  $b(z - p)(z - q)$ , donde

$$p = \frac{-a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad q = \frac{-a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b},$$

y se observa que  $pq = 1$  y  $|q| > a/b > 1$ , entonces la única singularidad

del integrando, en el disco unitario, está en  $p$ . Además es un polo de orden 1, así que el residuo del integrando en  $p$  es igual a

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{b(z - q)} = \frac{1}{b(p - q)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

La respuesta se sigue ahora por el teorema del residuo.

## EJEMPLO 2

Pruebe que

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + b \cos \theta)^2} = \frac{\pi a}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}}, \quad a > b > 0.$$

**SOLUCIÓN:** Otra vez, la integral es igual a

$$\frac{2}{i} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} = \frac{2}{ib^2} \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(z - p)^2(z - q)^2},$$

con un polo de orden 2 en  $p$ , como única singularidad. El residuo en  $p$  es igual a

$$\lim_{z \rightarrow p} \left[ \frac{z}{(z - q)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow p} \frac{-(z + q)}{(z - q)^3} = \frac{-(p + q)}{(p - q)^3} = \frac{ab^2}{4\sqrt{(a^2 - b^2)^3}},$$

y ahora el resultado es inmediato.

## EJERCICIOS

Evalúe las integrales en los Ejercicios 1-9 por el método mostrado en esta sección. En los Ejercicios 6-8,  $n$  es un entero no negativo.

$$1. \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a + \sin^2 \theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 + a}}, \quad a > 0$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(a + \sin^2 \theta)^2} = \frac{\pi(2a + 1)}{4\sqrt{(a^2 + a)^3}}, \quad a > 0$$

$$3. \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab}, \quad a, b > 0$$

$$4. \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^2} = \frac{\pi(a^2 + b^2)}{a^3 b^3}, \quad a, b > 0$$

$$5. \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1 - a^2}, & \text{si } |a| < 1 \\ \frac{2\pi}{a^2 - 1}, & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

$$6. \int_0^{2\pi} \cos^n \theta \, d\theta = \begin{cases} \frac{n! \pi}{2^{n-1} \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ 0, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

$$7. \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b \sin \theta)^n \, d\theta = \begin{cases} \frac{n! \pi}{2^{n-1} \left[ \left( \frac{n}{2} \right)! \right]^2} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2)^n}, & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ impar} \end{cases}$$

$a, b$  reales

$$8. \int_0^{2\pi} e^{\cos \theta} \cos(n\theta - \sin \theta) \, d\theta = \frac{2\pi}{n!}$$

$$9. \int_0^{2\pi} \cot(\theta + ib) \, d\theta = -2\pi i \text{ signo } b, \quad b \text{ real y diferente de cero}$$

## 4.3 EVALUACIÓN DE INTEGRALES REALES IMPROPIAS

En el teorema de la Sección 4.2, el intervalo de integración se transformó automáticamente en una curva cerrada, lo cual permitió aplicar el teorema del residuo. En la siguiente aplicación esto no es posible. En este caso se reemplaza la curva dada por una curva cerrada tal que en el límite los valores de las integrales coincidan.

### TEOREMA

Suponga que  $F(z)$  es el cociente de dos polinomios en  $z$  tales que

- (i)  $F(z)$  no tiene polos sobre el eje real, y
- (ii)  $F(1/z)$  tiene un cero al menos de orden 2, en  $z = 0$ , esto es, el grado del denominador excede, al menos por 2, al grado del numerador.

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \begin{Bmatrix} \cos ax \\ \sin ax \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \text{Re} \\ \text{Im} \end{Bmatrix} 2\pi i \sum_{\gamma>0} \text{Res } F(z) e^{iaz}, \quad a \geq 0,$$

donde la suma solo incluye los polos de  $F(z)$  en el semiplano superior.

**PRUEBA:** Sea  $\gamma$  la curva cerrada que se obtiene al tomar el segmento de recta  $(-R, R)$  sobre el eje real seguido del semicírculo  $z = Re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi$ . Puesto que  $F(z)$  es el cociente de polinomios, sus polos, y por ende los de  $F(z)e^{iaz}$ ,

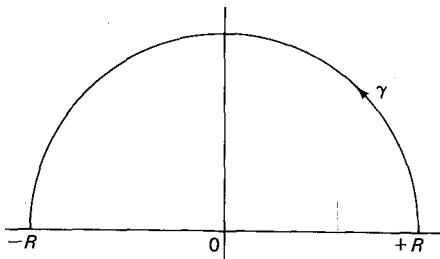


FIGURA 4.2.

ocurren sólo en los ceros del denominador y así son finitos en número. Si  $R$  se escoge suficientemente grande, todos los polos de  $F(z)$  que estén en el semiplano superior se localizarán en el interior de  $\gamma$  (véase Figura 4.2). Entonces, el teorema del residuo implica que

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} F(z) e^{iaz} &= \int_{\gamma} F(z) e^{iaz} dz \\ &= \int_{-R}^R F(x) e^{iax} dx + \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Por (ii)  $|z^2 F(z)|$  está acotada por una constante  $M$  en todos los puntos del semiplano superior que no estén en el interior de  $\gamma$ . Así,

$$\left| \int_0^{\pi} F(Re^{i\theta}) e^{iaRe^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{M}{R} \int_0^{\pi} e^{-aR \sin \theta} d\theta \leq \frac{M\pi}{R},$$

ya que  $e^{-aR \sin \theta} \leq 1$ . Por (ii) y por el teorema de comparación de integrales impropias del cálculo se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos ax dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin ax dx, \quad a \geq 0,$$

ambas convergen. Cuando  $R \rightarrow \infty$ , se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{iax} dx = 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} F(z) e^{iaz}, \quad a \geq 0,$$

de donde se sigue el resultado al tomar las partes real e imaginaria de ambos lados. ■

**OBSERVACIÓN:** Si  $a > 0$ , la condición (ii) puede reemplazarse por

(ii)'  $F(1/z)$  tiene un cero de orden 1 en  $z = 0$ .

En este caso no se puede utilizar el teorema de comparación para obtener la convergencia de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{iax} dx, \quad a > 0.$$

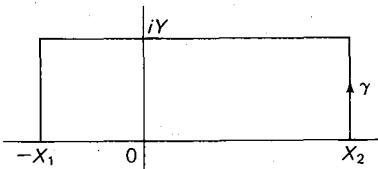


FIGURA 4.3

De hecho, debe probarse que

$$\int_{-X_1}^{X_2} F(x) e^{iax} dx, \quad a > 0,$$

tiene un límite cuando  $X_1$  y  $X_2$  tienden independientemente hacia  $\infty$ . Sea  $\gamma$  la frontera del rectángulo con vértices en los puntos  $-X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_2 + iY$ ,  $-X_1 + iY$ , donde las constantes  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y$  se eligen suficientemente grandes como para que los polos, que tienen  $F(z)$  en el semiplano superior, queden situados en el interior de  $\gamma$  (véase Figura 4.3). De esta forma, la condición (ii)' muestra que  $|zF(z)|$  está acotada por  $M$  en todos los puntos en  $y > 0$  que no estén en el interior de  $\gamma$ . La integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{X_2}^{X_2+iY} F(z) e^{iaz} dz \right| &\leq M \int_0^Y \frac{e^{-ay}}{|X_2 + iy|} dy \\ &\leq \frac{M}{X_2} \int_0^Y e^{-ay} dy < \frac{M}{aX_2}. \end{aligned}$$

De manera semejante, la integral sobre el segmento de recta que une  $-X_1 + iY$  con  $-X_1$  está acotada por  $M/aX_1$  y

$$\left| \int_{X_2+iY}^{-X_1+iY} F(z) e^{iaz} dz \right| \leq \frac{Me^{-aY}}{Y} \int_{-X_1}^{X_2} dx = \frac{Me^{-aY}}{Y} (X_1 + X_2).$$

Si se utiliza el teorema del residuo y la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-X_1}^{X_2} F(x) e^{iax} dx - 2\pi i \sum_{y>0} \operatorname{Res} F(z) e^{iaz} \right| \\ &< M \left[ \frac{1}{aX_1} + \frac{1}{aX_2} + \frac{e^{-aY}}{Y} (X_1 + X_2) \right] \end{aligned}$$

Al hacer primero que  $Y \rightarrow \infty$  y luego que  $X_1$  y  $X_2$  tiendan independientemente a  $\infty$  se obtiene el resultado.

### EJEMPLO 1

Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi e^{-ab}}{2b}, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

**SOLUCIÓN:** Aquí,  $F(z)$  es igual a  $(z^2 + b^2)^{-1}$  con polos en  $\pm ib$ , y  $F(1/z) = z^2/(1 + b^2 z^2)$  tiene un cero de orden 2 en 0. Como se satisfacen las hipótesis del teorema, se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \operatorname{Res}_{ib} \frac{e^{iaz}}{z^2 + b^2} \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\pi}{b} e^{-ab} \right],$$

de donde se sigue el resultado, puesto que el integrando es una función par. Nótese que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x^2 + b^2} dx = 0, \quad a \geq 0, \quad b > 0.$$

## EJEMPLO 2

Muestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

**SOLUCIÓN:** Las condiciones (i) y (ii)' se aplican a  $F(z) = z/(z^2 + b^2)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \operatorname{Res}_{ib} \frac{ze^{iaz}}{z^2 + b^2} \right] = \pi e^{-ab},$$

nuevamente con el integrando como una función par.

## EJERCICIOS

Evalúe las integrales siguientes por el método dado en esta sección.

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \pi$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a}, \quad a > 0$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{ab(a+b)}, \quad a, b > 0$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n+1}} = \frac{(2n)! \pi}{2^{2n} (n!)^2}, \quad n \text{ un entero no negativo}$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(1+ab)e^{-ab}}{2b^3}, \quad a \geq 0, \quad b > 0$$

$$7. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin ax dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi}{2} (2-ab)e^{-ab}, \quad a, b > 0$$

$$8. \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^4 + b^4} dx = \frac{\pi}{2b^3} e^{-(ab)/\sqrt{2}} \operatorname{sen} \left( \frac{ab}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} \right), \quad a \geq 0, \quad b > 0$$

$$9. \int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^4 + b^4} dx = \frac{\pi}{2b^2} e^{-(ab)/\sqrt{2}} \operatorname{sen} \frac{ab}{\sqrt{2}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0$$

$$10. \int_0^\infty \frac{x^3 \operatorname{sen} ax}{x^4 + b^4} dx = \frac{\pi}{2} e^{-(ab)/\sqrt{2}} \cos \frac{ab}{\sqrt{2}}, \quad a, b > 0$$

## 4 INTEGRALES CON POLOS SOBRE EL EJE REAL

En el estudio de la Sección 4.3, se supuso que  $F(z)$  no tenía polos sobre el eje real, ya que, de otra manera, la integral

$$\int_{-\infty}^\infty F(x) e^{ixa} dx, \quad a > 0,$$

sería divergente. Sin embargo, la parte real o imaginaria de la integral anterior puede converger si  $F(z)$  tiene polos de orden 1 que coincidan con los ceros de  $\cos ax$  o  $\operatorname{sen} ax$ .

Supóngase que  $F(z)$  tiene un polo de orden 1 en  $z = 0$ , y no tiene otros polos sobre el eje real. Entonces

$$\int_{-\infty}^\infty F(x) \operatorname{sen} ax dx, \quad a > 0,$$

es convergente. La técnica para esta integración consiste en utilizar la frontera  $\gamma$  del rectángulo con vértices en  $-X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_2 + iY$ ,  $-X_1 + iY$ , excepto que se evita el origen al seguir un pequeño semicírculo  $E$  de radio  $r$  en el semiplano inferior (véase Figura 4.4). Suponga que  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y$ ,  $1/r$  se escogen suficientemente grandes como para que todos los polos de  $F(z)$ , que no estén en el semiplano inferior, se localicen en el interior de  $\gamma$ . Entonces  $F(z)e^{iaz} = (a_{-1}/z) + f(z)$  con  $a_{-1} = \operatorname{Res}_0 F(z)e^{iaz}$  y  $f(z)$  analítica en una  $\epsilon$ -vecindad cerrada de  $z = 0$ . Ahora, sobre el semicírculo  $E$  con  $r < \epsilon$ ,

$$\begin{aligned} \int_E F(z) e^{iaz} dz &= i \int_{-\pi}^0 [a_{-1} + f(re^{i\theta})re^{i\theta}] d\theta \\ &= \pi i a_{-1} + ir \int_{-\pi}^0 f(re^{i\theta})e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

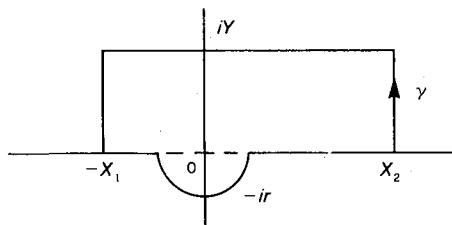


FIGURA 4.4.

Como  $f(z)$  está acotada en  $|z| \leq \epsilon$  por una constante  $N$ ,

$$\left| ir \int_{-\pi}^0 f(re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq rN\pi,$$

y el segundo término se anula cuando  $r$  tiende a 0. Por el teorema del residuo, y las desigualdades desarrolladas en la Sección 4.3, se obtiene

$$\int_{-X_1}^{-r} + \int_E + \int_r^{X_2} F(x) e^{iax} dx - 2\pi i \sum_{y \geq 0} \operatorname{Res} F(z) e^{iaz} \rightarrow 0$$

cuando  $Y \rightarrow \infty$ , y después  $X_1$  y  $X_2$  tienden independientemente a  $\infty$ . Ahora, cuando  $r \rightarrow 0$ , se encuentra que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-r} + \int_r^{\infty} F(x) e^{iax} dx = 2\pi i \left[ \sum_{y > 0} \operatorname{Res} F(z) e^{iaz} + \frac{a-1}{2} \right].$$

Al límite en el lado izquierdo de la expresión se le conoce como **valor principal de Cauchy** de la integral, y se escribe

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{iax} dx = 2\pi i \left[ \sum_{y > 0} \operatorname{Res} F(z) e^{iaz} + \frac{a-1}{2} \right].$$

Obsérvese que sólo la mitad del residuo en 0 se ha incluido en la derecha.

Permitanse breves comentarios acerca de los valores principales de Cauchy. Sea  $f(x)$  definida en la recta real, y considérense los límites

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx, \quad (1)$$

$$\lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx. \quad (2)$$

Si el límite en (1) existe, se dice que la integral impropia de  $f$  converge en el sentido de Cauchy, y por tanto se escribe

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx.$$

Si el límite en (2) existe, se dice que la integral impropia converge y se hace

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R_1 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^0 f(x) dx + \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \int_0^{R_2} f(x) dx.$$

Nótese que la convergencia de la integral implica la convergencia (hacia el mismo valor) en el sentido de Cauchy, pero que una integral puede tener un valor principal sin ser convergente. Por ejemplo,

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} x dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{-R}^R \right) = 0,$$

aunque ninguno de los límites en (2) existe. En algunas situaciones, tales como una carga neta en una placa infinita, se utiliza el límite en (1); en otras si-

tuaciones, tales como la carga total en la placa, se emplea el límite en (2). Se elige la herramienta que se ajuste al problema.

Un desarrollo similar surge cuando  $f(x)$  se define en un intervalo  $a \leq x \leq b$  pero es no acotada en toda vecindad de un punto  $c$ ,  $a < c < b$ . La integral impropia converge siempre que el lado derecho de la ecuación

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{c+\eta}^b f(x) dx, \quad \epsilon > 0, \quad \eta > 0, \quad (3)$$

exista. Incluso, si estos límites no existen, el valor principal de Cauchy de la integral

$$\text{PV} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right), \quad \epsilon > 0, \quad (4)$$

puede existir. Por ejemplo,

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \log \epsilon + \log \frac{1}{\epsilon} \right) = 0, \quad \epsilon > 0,$$

pero ninguno de los límites en (3) existe.

Como antes, convergencia implica convergencia en el sentido de Cauchy. Aún más, una integral impropia de tipo mixto puede tener un valor principal de Cauchy aunque la integral sea divergente:

$$\begin{aligned} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x} &= \text{PV} \left( \int_{-\infty}^{-1} + \int_1^{\infty} \right) \frac{dx}{x} + \text{PV} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{-R}^{-1} + \int_1^R \right) \frac{dx}{x} = 0. \end{aligned}$$

Si  $F(z)$  tiene varios polos de orden 1 sobre el eje real, que coinciden con los ceros de  $\cos ax$  o  $\operatorname{sen} ax$ , entonces, al incluir en  $\gamma$  tantos semicírculos como polos haya y al tratarlos como al anterior semicírculo  $E$ , se obtiene el resultado general siguiente.

### TEOREMA

Supóngase que  $F(z)$  es el cociente de dos polinomios en  $z$  tales que

- (i)' todos los polos de  $F(z)$  localizados sobre el eje real son de orden 1 y coinciden con los ceros de  $\cos ax$  o de  $\operatorname{sen} ax$ ,  $a > 0$ , y
- (ii)'  $F(1/z)$  tiene un cero al menos de orden 1, en  $z = 0$ .

Entonces

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{ixz} dx = 2\pi i \left[ \sum_{y>0} \operatorname{Res} F(z) e^{izy} + \frac{1}{2} \sum_{y=0} \operatorname{Res} F(z) e^{izy} \right]$$

**EJEMPLO 1**

Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**SOLUCIÓN:** Puesto que  $F(z) = 1/z$ , es claro que (i)' y (ii)' se cumplan, por lo que tenemos

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx = \pi i \operatorname{Res}_0 \frac{e^{iz}}{z} = \pi i.$$

Al igualar las partes imaginarias se obtiene el resultado deseado, ya que el integrando es una función par y  $x = 0$  es una singularidad removible de  $(\sin x)/x$ .

Las integrales que contienen potencias de  $\cos ax$  o de  $\sin ax$  pueden evaluarse con la misma técnica.

**EJEMPLO 2**

Muestre que

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

**SOLUCIÓN:** Con el uso de la fórmula del ángulo doble  $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ , se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{4x^2} dx,$$

que converge por el teorema de la comparación del cálculo. Si se integra  $(1 - e^{2iz})/4z^2$  a lo largo de la curva  $\gamma$  mostrada en la Figura 4.5, se tiene

$$\int_{\gamma} \frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 \frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} = \pi.$$

El valor absoluto de la integral a lo largo del arco  $|z| = R$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ , está acotado por

$$\frac{1}{4R} \int_0^\pi |1 - e^{2iR e^{i\theta}}| d\theta \leq \frac{\pi}{2R},$$

el cual se anula cuando  $R \rightarrow \infty$ . Como

$$\frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} = \frac{-i}{2z} + f(z)$$

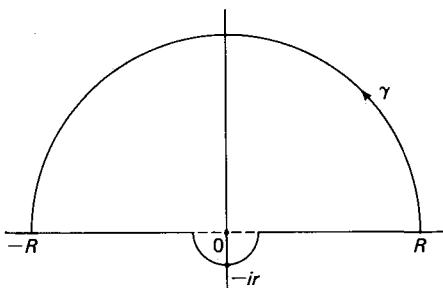


FIGURA 4.5

con  $f(z)$  analítica en un disco cerrado centrado en 0 y que contiene al semicírculo  $E$ , se tiene

$$\left| \int_E \frac{1 - e^{2iz}}{4z^2} dz - \frac{\pi}{2} \right| = \left| ir \int_{-\pi}^0 f(re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta \right| \leq rN\pi,$$

y esta cota se anula cuando  $r \rightarrow 0$ . Así que,

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{2ix}}{4x^2} dx = \frac{\pi}{2},$$

y la solución queda completa.

## EJERCICIOS

Evalúe las integrales en los Ejercicios 1-9 por el método mostrado en esta sección.

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^2 - 1} dx = \frac{-\pi}{2}$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^5 - x} dx = \frac{\pi}{2} (e^{-\pi} - 3)$$

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x \cos \pi x}{2x^2 - x} dx = -\pi$$

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} \frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{b^2} [a^2 + e^{-b}(b^2 - a^2)], \quad a, b > 0$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{2b^2} (1 - e^{-b}), \quad b > 0$$

$$6. \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{2b^4} \left[ 1 - \frac{e^{-ab}}{2} (ab + 2) \right], \quad a, b > 0$$

$$7. \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{b - a}{2} \pi, \quad a, b \geq 0$$

$$8. \int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$$

9.  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} m(x-a)}{x-a} \frac{\operatorname{sen} n(x-b)}{x-b} dx = \pi \frac{\operatorname{sen} n(a-b)}{a-b},$   
 $m \geq n \geq 0, \quad a, b \text{ reales, } a \neq b$

10. Pruebe la identidad

$$\operatorname{PV} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{x} dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -\frac{1}{2}, & t < 0, \end{cases}$$

con el método que se mostró en esta sección. Si se añade  $\frac{1}{2}$  a esta función, se obtiene la “función impulso”, encontrada frecuentemente en los libros de ingeniería, y que representa la conexión súbita de una corriente en un circuito eléctrico abierto.

## 4.5 INTEGRACIÓN DE FUNCIONES MULTIVALUADAS (opcional)

Cuando se trabaja con integrales que contienen funciones multivaluadas, se deben tomar en cuenta los puntos y cortes de ramificación del integrando, además de sus singularidades aisladas. Esto se debe a que, para usar el teorema del residuo, es necesario seleccionar una región donde el integrando sea univalorado.

### TEOREMA

Sea  $F(z)$  el cociente de dos polímonios en  $z$  que satisface a

- (i)  $F(z)$  no tiene polos en el eje real positivo, y
- (ii)  $z^{a+1}F(z)$  se anula cuando  $z$  tiende a 0 o  $\infty$ , donde  $a$  es real pero no entero.

Entonces

$$\int_0^{\infty} x^a F(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \sum_{z \neq 0} \operatorname{Res}(z^a F(z)),$$

la suma se toma de todos los polos de  $F(z)$  diferentes de cero.

**PRUEBA:** Como  $F(z)$  sólo tiene un número finito de polos en  $\mathbb{C}$ , existen números  $0 < r < R$  tales que todos los polos diferentes de cero están en el interior del anillo  $r < |z| < R$ . Para la función  $z^a$ , se selecciona la rama de  $\mathbb{R}$  cuyo argumento se localice entre 0 y  $2\pi$ , con puntos de ramificación 0 y  $\infty$ . Sea  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$  la frontera de la región que se obtiene al cortar  $r < |z| < R$  a lo largo del segmento de recta  $r < x < R$ , como se muestra en la Figura 4.6.

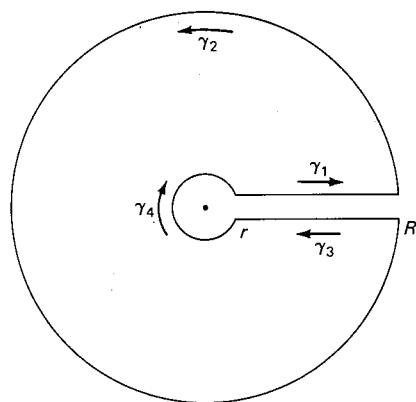


FIGURA 4.6.

Estrictamente hablando, no es posible aplicar el teorema del residuo directamente a  $\gamma$ , puesto que  $z^a F(z)$  es multivaluada en el corte de ramificación. Sin embargo, sí se puede aplicar el teorema del residuo a las fronteras de las regiones  $D_1$ ,  $D_2$  indicadas en la Figura 4.7, donde se cancelan las integrales a lo largo de los arcos  $\gamma_5$  y  $\gamma_6$  de tal forma que se extienda a  $\gamma$  el teorema del residuo.

Nótese que el integrando tiene diferentes valores en  $\gamma_1$  y  $\gamma_3$ . Por el teorema del residuo,

$$\int_{\gamma} z^a F(z) dz = 2\pi i \sum_{z \neq 0} \text{Res}(z^a F(z)),$$

pero

$$\left| \int_{\gamma_j} z^a F(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} |z^{a+1} F(z)| d\theta, \quad j = 2, 4,$$

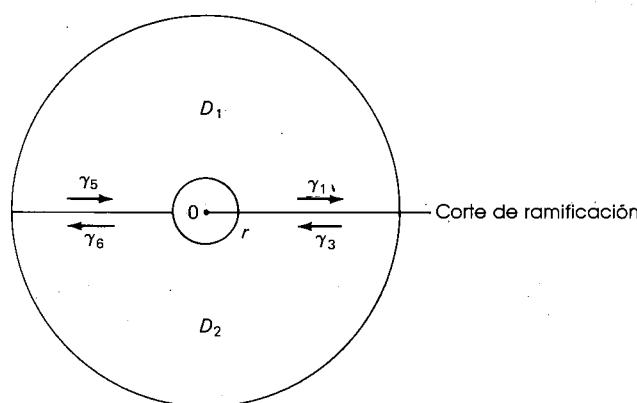


FIGURA 4.7.

que se anula, por (ii), cuando  $R \rightarrow \infty$  o  $r \rightarrow 0$ . Ahora

$$z^a F(z) = \begin{cases} x^a F(x) & \text{sobre } \gamma_1, \\ x^a e^{2\pi i a} F(x) & \text{sobre } \gamma_3, \end{cases}$$

sobre

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_3} z^a F(z) dz = (1 - e^{2\pi i a}) \int_r^R x^a F(x) dx$$

proporciona la fórmula requerida si  $R \rightarrow \infty$  y  $r \rightarrow 0$ . ■

### EJEMPLO 1

Muestre que

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{x+b} = \frac{-\pi b^a}{\sin \pi a}, \quad 0 > a > -1, \quad b > 0.$$

**SOLUCIÓN:** Aquí,  $0 < a + 1 < 1$ , por tanto es claro que (i) y (ii) se cumplen. Al elegir la rama de  $\Re$  cuyo argumento se localiza entre 0 y  $2\pi$ , se tiene

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} \operatorname{Res}_{-b} \frac{z^a}{(z+b)} = \frac{2\pi i b^a}{e^{-\pi i a} - e^{\pi i a}},$$

ya que en esta rama

$$(-b)^a = b^a e^{\pi i a}.$$

Se puede aplicar el mismo tipo de procedimiento a otras funciones multi-valuadas. Se ilustra esto con los dos ejemplos siguientes.

### EJEMPLO 2

Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2b} \log b, \quad b > 0.$$

**SOLUCIÓN:** Aquí se usa la curva  $\gamma$  que se muestra en la Figura 4.8. Entonces

$$\int_\gamma \frac{\log z}{z^2 + b^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{bi} \frac{\log z}{z^2 + b^2} = \frac{\pi}{b} \left[ \log b + \frac{i\pi}{2} \right].$$

Pero

$$\left| iR \int_0^\pi \frac{\log R + i\theta}{(Re^{i\theta})^2 + b^2} e^{i\theta} d\theta \right| \leq \frac{R(\log R + \pi)}{|R^2 - b^2|} \pi,$$

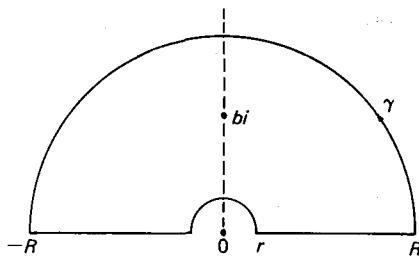


FIGURA 4.8.

que se anula cuando  $R \rightarrow \infty$  o 0 por el teorema de L'Hospital. Como la integral es convergente,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{b} \left[ \log b + \frac{i\pi}{2} \right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log x \, dx}{x^2 + b^2} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |x|}{x^2 + b^2} \, dx + i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + b^2}, \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado ya que el primer integrando es par.

### EJEMPLO 3 †

Pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{senh} ax}{\operatorname{senh} \pi x} \, dx = \frac{1}{2} \tan \frac{a}{2}, \quad -\pi < a < \pi.$$

**SOLUCIÓN:** La integral de la función  $e^{az}/\operatorname{senh} \pi z$  se anula sobre la curva  $\gamma$  mostrada en la Figura 4.9, porque no tiene singularidades en el interior de  $\gamma$ . Pero

$$|\operatorname{senh} \pi(R+iy)| \geq |\operatorname{senh} \pi R|$$

(véase Ejercicio 27, Sección 1.8), lo cual implica que

$$\left| \int_R^{R+i} \frac{e^{az}}{\operatorname{senh} \pi z} \, dz \right| \leq \frac{e^{aR}}{|\operatorname{senh} \pi R|} \rightarrow 0$$

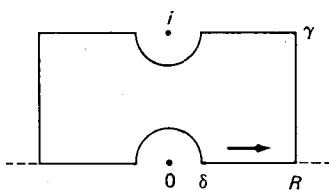


FIGURA 4.9.

cuando  $R \rightarrow \pm \infty$ . Como  $i \operatorname{senh} z = \operatorname{sen} iz$ ,  $1/\operatorname{senh} \pi z$  tiene polos de orden 1 en todos los múltiplos enteros de  $i$ ; por tanto,

$$\operatorname{Res}_0 \frac{e^{az}}{\operatorname{senh} \pi z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{ze^{az}}{\operatorname{senh} \pi z} = \frac{1}{\pi}$$

y

$$\operatorname{Res}_i \frac{e^{az}}{\operatorname{senh} \pi z} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i)e^{az}}{\operatorname{senh} \pi z} = \frac{-e^{ai}}{\pi}$$

por el teorema de L'Hospital. Si se integra sobre los dos semicírculos se obtiene

$$-\pi i \left( \frac{1}{\pi} - \frac{e^{ai}}{\pi} \right)$$

más una integral que se anula cuando  $\delta \rightarrow 0$ . Pero

$$\operatorname{senh} \pi(x+i) = -\operatorname{senh} \pi x,$$

por lo cual se obtiene

$$\operatorname{PV}(1 + e^{ai}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{senh} \pi x} dx = i(1 - e^{ai}),$$

o

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\operatorname{senh} \pi x} dx = \tan \frac{a}{2},$$

de donde se sigue el resultado, pues el integrando de la ecuación original es par.

## EJERCICIOS

Evalúe las integrales en los Ejercicios 1-16, por el método de esta sección.

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x^a}{(x+b)^2} dx = \frac{\pi ab^{a-1}}{\operatorname{sen} \pi a}, \quad 1 > a > -1, \quad b > 0$$

$$2. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ay} dy}{1+be^{-y}} = \frac{-\pi b^a}{\operatorname{sen} \pi a}, \quad 0 > a > -1, \quad b > 0$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{x^2 + b^2} = \frac{\pi b^{a-1}}{2 \cos \frac{\pi a}{2}}, \quad 1 > a > -1, \quad b > 0$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{x^2 + 2x \cos \theta + 1} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} \pi a} \frac{\operatorname{sen} \theta a}{\operatorname{sen} \theta},$$

$$1 > a > -1, \quad \pi > \theta > -\pi$$

$$5. \int_0^{\infty} \frac{x^a dx}{(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi b^{a-3}(1-a)}{4 \cos \frac{\pi a}{2}}, \quad 3 > a > -1, \quad b > 0$$

$$6. \int_0^\infty \frac{x^a dx}{x^3 + b^3} = \frac{2\pi b^{a-2}}{3 \operatorname{sen} \pi a} \left[ \cos \frac{\pi}{3} (1 - 2a) - \frac{1}{2} \right], \\ 2 > a > -1, \quad b > 0$$

$$7. \int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi}{4b^3} (\log b - 1), \quad b > 0$$

$$8. \int_0^\infty \frac{x^a \log x}{x + b} dx = \frac{\pi b^a}{\operatorname{sen}^2 \pi a} (\pi \cos \pi a - \operatorname{sen} \pi a \cdot \log b), \\ 0 > a > -1, \quad b > 0$$

$$9. \int_0^\infty \frac{x^a \log x}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi b^{a-1}}{2 \cos^2 \frac{\pi a}{2}} \left[ \frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi a}{2} + \log b \cdot \cos \frac{\pi a}{2} \right], \\ 1 > a > -1, \quad b > 0$$

$$10. \int_0^\infty \frac{x}{\operatorname{senh} x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

$$11. \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{senh} x} dx = \frac{\pi}{2} \tanh \frac{a\pi}{2}, \quad a \text{ real}$$

$$12. \int_0^\infty \frac{x \cos ax}{\operatorname{senh} x} dx = \frac{\pi^2}{4} \operatorname{sech}^2 \frac{a\pi}{2}, \quad a \text{ real}$$

$$13. \int_0^\infty \frac{\cosh ax}{\cosh \pi x} dx = \frac{1}{2} \sec \frac{a}{2}, \quad -\pi < a < \pi$$

$$14. \int_0^\infty x^{a-1} \begin{Bmatrix} \cos bx \\ \operatorname{sen} bx \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} \cos \frac{\pi a}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{\pi a}{2} \end{Bmatrix} \cdot \frac{\Gamma(a)}{b^a}, \quad 1 > a > 0, \quad b > 0,$$

donde  $\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1} dx$  es la función gamma. (Sugerencia: Integre  $z^{a-1} e^{-bz}$  alrededor de un contorno apropiado y utilice la desigualdad  $\theta \geqslant 1 - (2/\pi)\theta$ ,  $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ .)

$$15. \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x^a}{x^a} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \cos \frac{\pi}{2a}}{a-1}, \quad 1 > a > \frac{1}{2}$$

(Sugerencia: Mediante la derivación por partes, muestre que  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ )

$$16. \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}} dx.$$

17. Pruebe que

$$\int_0^{\pi/2} (\tan \theta)^a d\theta = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi a}{2}}, \quad 1 > a > -1,$$

y

$$\int_0^{\pi/2} \log \tan \theta d\theta = 0.$$

(Sugerencia: Use el Ejercicio 3.)

## 4.6 EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

Otra aplicación del teorema del residuo, útil para determinar el número de ceros y polos de una función meromorfa, es el siguiente resultado.

### EL PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

Sea  $w = f(z)$  meromorfa en la región  $G$  simplemente conexa, y sea  $\gamma$  una curva de Jordan simple en  $G$  que rodea los ceros y los polos de  $f(z)$ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f(\gamma)} \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z) dz}{f(z)} = Z - P,$$

donde  $Z$  y  $P$  son, respectivamente, el número de ceros y polos, incluyendo multiplicidades, de  $f(z)$  situados en el interior de  $\gamma$ .

**PRUEBA:** Nótese que la primera integral es igual al número de veces que la curva cerrada  $f(\gamma)$  da vueltas alrededor de 0; en otras palabras, mide la **variación del argumento** de  $f(z)$  cuando  $z$  recorre la curva  $\gamma$ , lo que conduce al nombre del teorema. (Véase el Ejemplo 4 de la Sección 2.1.)

Si  $a$  es un cero de orden  $k$  de  $f(z)$ , entonces se escribe  $f(z) = (z - a)^k f_0(z)$ , con  $f_0(z)$  analítica y diferente de cero en una  $\epsilon$ -vecindad de  $a$ . Así,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - a} + \frac{f'_0(z)}{f_0(z)},$$

y, puesto que  $f'_0/f_0$  es analítica en una  $\epsilon$ -vecindad de  $a$ , se observa que  $f'/f$  tiene un polo de orden 1 con residuo  $k$  en  $z = a$ .

Por otra parte, si  $a$  es un polo de orden  $h$  de  $f(z)$ , entonces  $f(z) = f_0(z)/(z - a)^h$  con  $f_0(z)$  nuevamente analítica y diferente de cero en una  $\epsilon$ -vecindad de  $a$ . Así que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-h}{z - a} + \frac{f'_0(z)}{f_0(z)}$$

tiene un polo de orden 1 con residuo  $(-h)$  en  $z = a$ . Por el teorema del residuo, se sigue que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z - P,$$

donde  $Z$  es la suma de todos los órdenes  $k$  de los ceros de  $f(z)$ , y  $P$  es la suma de todos los órdenes  $h$  de los polos de  $f(z)$ , situados en el interior de  $\gamma$ . ■

Una aplicación sumamente útil del principio del argumento es el siguiente resultado.

### TEOREMA DE ROUCHÉ

Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  analíticas en una región  $G$  simplemente conexa. Si  $|f(z)| > |g(z) - f(z)|$  en todos los puntos de la curva de Jordan spp  $\gamma$  contenida en  $G$ , entonces  $f(z)$  y  $g(z)$  tienen el mismo número de ceros en el interior de  $\gamma$ .

**PRUEBA:** La hipótesis  $|f(z)| > |g(z) - f(z)|$  obliga a ambas funciones a ser diferentes de cero sobre  $\gamma$  así que  $\gamma$  rodea los polos y los ceros de  $F(z) = g(z)/f(z)$ . Sin embargo, para todo  $z$  de  $\gamma$ ,

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1.$$

Luego entonces  $F(\gamma)$  no da vueltas alrededor de 0, por lo cual el principio del argumento implica que  $F(z)$  tiene el mismo número de ceros que de polos en el interior de  $\gamma$ . Pero éstos corresponden a los ceros de  $g(z)$  y  $f(z)$ , respectivamente. De esta forma, la prueba queda completa. ■

### EJEMPLO 1

Encuentre el número de raíces de la ecuación

$$z^4 + 5z + 1 = 0$$

situadas en el interior del círculo  $|z| = 1$ .

**SOLUCIÓN:** Sea  $f(z) = 5z$  y  $g(z) = z^4 + 5z + 1$ . Entonces, por la desigualdad del triángulo,

$$|g(z) - f(z)| \leq |z|^4 + 1 < |5z| = |f(z)|$$

sobre  $|z| = 1$ . Como  $f(z)$  tiene un cero en el interior de  $|z| = 1$ , también  $g(z)$  lo tendrá. Por otra parte, si  $f(z) = z^4$ , se tiene

$$|5z + 1| \leq 11 < 16 = |z|^4$$

sobre  $|z| = 2$ . Así que  $g(z)$  tiene cuatro ceros en el interior de  $|z| = 2$ , tres de los cuales se encuentran en el anillo  $1 < |z| < 2$ , ya que no hay ceros sobre  $|z| = 1$ .

**EJEMPLO 2**

Muestre que  $z - e^z + a = 0$ ,  $a > 1$ , tiene una raíz en el semiplano izquierdo.

**SOLUCIÓN:** Sea  $f(z) = z + a$  y  $g(z) = z - e^z + a$ . Para  $z = iy$  o  $|z| = R > 2a$ ,  $x < 0$ , se obtiene

$$|g(z) - f(z)| = |e^{-x} - 1| \leqslant e^{Re z} \leqslant 1 < a < |f(z)|,$$

y  $f(z)$  sólo tiene una raíz (en  $z = -a$ ). Ahora la prueba está completa.

**EJEMPLO 3**

Encuentre el número de raíces de la ecuación

$$z^4 + iz^3 + 3z^2 + 2iz + 2 = 0$$

que se localizan en el semiplano superior.

**SOLUCIÓN:** Sea  $f(z) = z^4 + 3z^2 + 2 = (z^2 + 2)(z^2 + 1)$  y  $g(z) = z^4 + iz^3 + 3z^2 + 2iz + 2$ . Para  $z = x$  o  $|z| = R \geqslant 2$ , se tiene

$$|g(z) - f(z)| = |z^3||z^2 + 2| < |z^2 + 1||z^2 + 2| = |f(z)|,$$

por lo tanto,  $g(z)$  tiene dos raíces en el semiplano superior.

**EJEMPLO 4**

Encuentre el número de raíces de la ecuación

$$7z^3 - 5z^2 + 4z - 2 = 0$$

en el disco  $|z| \leqslant 1$ .

**SOLUCIÓN:** Si se multiplica la ecuación por  $z + 1$ , se obtiene

$$7z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2 = 0.$$

Si se hace  $f(z) = 7z^4$  y  $g(z) = 7z^4 + 2z^3 - z^2 + 2z - 2$ , se encuentra, por la desigualdad del triángulo, que

$$|g(z) - f(z)| \leqslant 2|z|^3 + |z|^2 + 2|z| + 2 < 7|z|^4 = |f(z)|,$$

siempre y cuando  $|z| = 1 + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Por ende,  $g(z)$  tiene cuatro raíces en  $|z| \leqslant 1$ , lo cual implica que la ecuación original tiene tres raíces en el disco unitario cerrado.

**EJERCICIOS**

Para los Ejercicios 1-4, encuentre el número de raíces de las ecuaciones dadas en el interior del círculo  $|z| = 1$ .

6. ¿Cuántas de las raíces de la ecuación

$$3z^4 - 6iz^3 + 7z^2 - 2iz + 2 = 0$$

están en el semiplano superior?

7. ¿Cuántas raíces de la ecuación

$$z^6 + z^5 - 6z^4 - 5z^3 + 10z^2 + 5z - 5 = 0$$

están en el semiplano derecho?

8. Encuentre el número de raíces de la ecuación

$$9z^4 + 7z^3 + 5z^2 + z + 1 = 0$$

que se encuentran en el disco  $|z| \leq 1$ .

9. ¿Cuántas raíces de la ecuación

$$z^4 + 2z^3 - 3z^2 - 3z + 6 = 0$$

se encuentran en el disco  $|z| \leq 1$ ?

10. Muestre que la función

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad |a| < 1,$$

toma en  $|z| < 1$  todo valor  $c$  que satisface  $a|c| < 1$  exactamente una vez, y ningún valor  $c$  tal que  $|c| > 1$ . Así,  $f(z)$  mapea  $|z| < 1$  en sí misma en forma sobre y uno a uno. (Sugerencia: Muestre que  $|f(z)| = 1$  en  $|z| = 1$  y aplique el teorema de Rouché a  $f(z) - c$ .)

11. Suponga la hipótesis del principio del argumento, y muestre que el número de veces que  $f(\gamma)$  da vueltas alrededor del punto  $a$  es igual a  $Z_a - P$ , donde  $Z_a$  es el número de valores  $a$  de  $f(z)$  incluyendo multiplicidades.
12. Sean  $f(z)$  analítica en una región  $G$ ,  $a$  en  $G$ , y suponga que  $f(z) - f(a)$  tiene un cero de orden  $n$  en  $z = a$ . Pruebe que, para  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeño, existe un  $\delta > 0$  tal que, para todo  $\xi$  en  $|\xi - f(a)| < \delta$  la ecuación  $f(z) - \xi = 0$  tiene exactamente  $n$  raíces en  $|z - a| < \epsilon$ .
13. Use el resultado del Ejercicio 12 para probar que las funciones analíticas no constantes mapean conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, y utilice este hecho para obtener una prueba inmediata del principio del máximo. (Sugerencia: Muestre que los puntos interiores se mapean en puntos interiores.)
14. Use el teorema de Rouché para probar el teorema fundamental del álgebra.

## NOTAS

### SECCIÓN 4.1

Los resultados de esta sección se extienden fácilmente a curvas  $\gamma$  spp cerradas arbitrarias de  $\mathbb{C}$ . Sin embargo, en la mayoría de las aplicaciones,  $\gamma$  es una curva de Jordan. En consecuencia, se incorporó esta hipótesis adicional para sim-

plificar los enunciados de los teoremas. Para los enunciados más generales, véase [A, págs. 147-151].

### SECCIONES 4.2-4.5

El lector puede haber notado que algunas integrales, que dependen de uno o más parámetros arbitrarios, podrían haberse obtenido por derivación o integración de otras integrales con respecto a estos parámetros. Por ejemplo: Ejercicios 1 y 2 de la Sección 4.2; Ejemplos 1 y 2 de la Sección 4.3; Ejercicios 8 y 9 de la Sección 4.3; Ejercicios 5 y 6 de la Sección 4.4; Ejercicios 3 y 5 de la Sección 4.5. Una condición suficiente para la validez de estos procedimientos es la convergencia uniforme de las integrales en el intervalo de definición de los parámetros. Los teoremas y pruebas importantes pueden encontrarse en la mayoría de los libros de cálculo avanzado. Por ejemplo, véase [B, págs. 204-212]. Usualmente, esta técnica es más sencilla que evaluar las integrales por el método del residuo.

### SECCIÓN 4.6

Estos resultados también pueden extenderse a curvas  $\gamma$  spp cerradas arbitrarias (véase [A, págs. 151-153]).

## 5.1 CONSIDERACIONES GEOMÉTRICAS

Obsérvese el cambio de la pendiente de un arco suave que pasa por el punto  $z_0$  bajo el mapeo  $w = f(z)$ , cuando  $f$  es analítica en  $z_0$  y  $f'(z_0) \neq 0$ .

Si  $\gamma: z = z(t), z(0) = z_0$ , es tal arco, su tangente en  $z_0$  tiene pendiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(0)}{x'(0)} = \tan \arg z'(0),$$

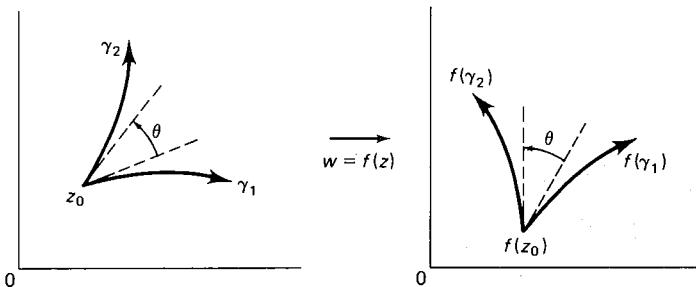
y su imagen  $f(\gamma): w = f(z(t))$  tiene una tangente en  $f(z_0)$  con pendiente  $\tan \arg w'(0)$ . Pero, por la regla de la cadena,

$$\arg w'(0) = \arg[f'(z_0)z'(0)] = \arg f'(z_0) + \arg z'(0).$$

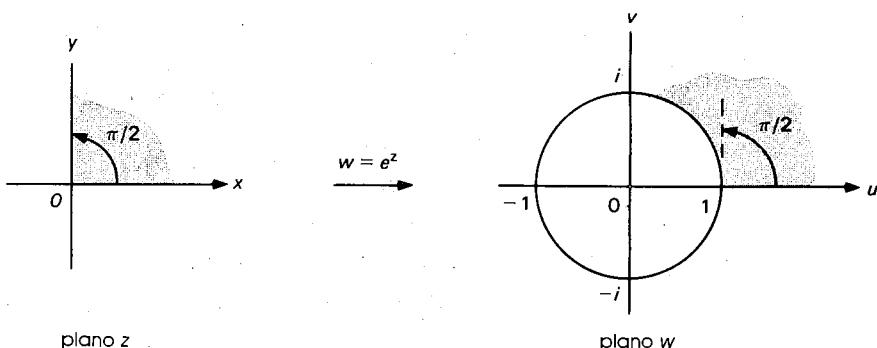
Por tanto, el cambio de dirección es igual a la constante  $\arg f'(z_0)$  *independiente del arco elegido*. Así, el ángulo formado por las tangentes de dos arcos suaves que se intersectan en  $z_0$  se conserva bajo el mapeo  $w = f(z)$ , ya que ambas direcciones cambian por la misma cantidad (véase Figura 5.1). Los mapeos que conservan el tamaño y la orientación de los ángulos se llaman **conformes**. De esta forma se ha probado el siguiente teorema.

### TEOREMA

Si  $f(z)$  es analítica en una región  $G$ , entonces  $w = f(z)$  es conforme en todos los puntos  $z_0$  de  $G$  para los cuales  $f'(z_0) \neq 0$ .

FIGURA 5.1. Mapeo conforme en  $z_0$ .**EJEMPLO 1**

El mapeo  $w = e^z$  es conforme en todos los puntos de  $\mathbb{C}$ , ya que su derivada no se anula. Esta función mapea el eje real del plano  $z$  en los reales positivos del plano  $w$ . El eje imaginario del plano  $z$  se mapea repetidamente en el círculo unitario del plano  $w$  porque  $|e^{iy}| = 1$ . Así, el ángulo recto entre los ejes coordenados en el primer cuadrante del plano  $z$  se transforma en el ángulo recto entre el eje real positivo y el círculo unitario en el primer cuadrante del plano  $w$  (véase Figura 5.2).

FIGURA 5.2. El mapeo conforme  $w = e^z$ .

Sea  $w = f(z)$  conforme en una región  $G$  que contiene al punto  $z_0$ . Considérese el efecto de este mapeo sobre un disco centrado en  $z_0$  y contenido en  $G$  (véase Figura 5.3). Los ángulos entre líneas radiales se conservan, aunque no

**FIGURA 5.3.** Mapeando un disco centrado en  $z_0$ .

dor de  $f(z_0)$  con cambio de escala  $|f'(z_0)|$ . Esto indica que el mapeo es *localmente* uno a uno, aunque es claro que nada puede decirse acerca de su comportamiento *global*. Por ejemplo,  $f(z) = e^z$  es localmente uno a uno, ya que  $f'(z) = e^z \neq 0$ , pero  $f(0) = f(2\pi i)$ , por lo cual no es uno a uno en  $\mathbb{C}$ .

Los ángulos se amplifican en todos los puntos donde la derivada es cero. Por ejemplo,  $f(z) = z^2$  tiene una derivada que se anula en el origen. Como  $f(1) = f(-1) = 1$  y  $f(i) = f(-i) = -1$ , los ángulos rectos entre los ejes se mapean en ángulos de  $180^\circ$ . Esta duplicidad de ángulos provoca que los círculos alrededor del origen se mapeen en curvas circulares que dan dos vueltas alrededor del origen. Esto motiva el teorema siguiente.

### TEOREMA

Sea  $f(z)$  analítica en una región  $G$  que contiene al punto  $z_0$  en el cual  $f'(z)$  tiene un cero de orden  $k$ . Entonces todos los ángulos en  $z_0$  se amplifican por un factor  $k + 1$ .

**PRUEBA:** Se puede escribir  $f'(z) = (z - z_0)^k g(z)$ , con  $g$  analítica y diferente de cero en una  $\epsilon$ -vecindad de  $z_0$ . Así, los términos  $f'(z_0), f''(z_0), \dots, f^{(k)}(z_0)$  se anulan todos en la serie de Taylor de  $f'(z)$ . Por tanto, la serie de  $f(z)$  es

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} (z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

lo cual implica que

$$\arg[f(z) - f(z_0)] = (k+1) \arg(z - z_0) + \arg \left[ \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} + \dots \right].$$

Los primeros dos argumentos comparan los ángulos entre la dirección horizontal y los vectores que van de  $f(z_0)$  a  $f(z)$  y de  $z_0$  a  $z$ . Si  $z$  tiende a  $z_0$  a lo largo de un vector fijo que forma un ángulo  $\theta$  con la dirección horizontal, el ángulo del vector de  $f(z)$  a  $f(z)$  con la horizontal tiende a

$$(k+1)\theta + \arg \left[ \frac{f^{(k+1)}(z_0)}{(k+1)!} \right],$$

donde el último argumento es independiente de  $\theta$ . Así, el ángulo entre las tangentes de dos arcos suaves que se intersectan en  $z_0$  se amplifica por el factor  $k + 1$ . ■

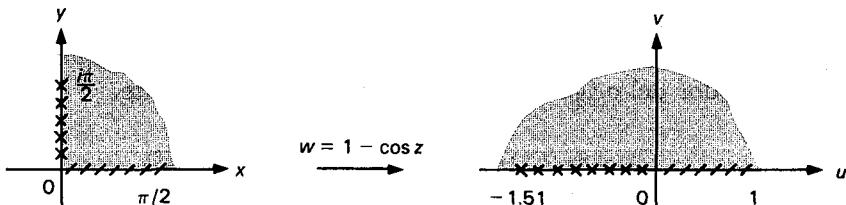
### EJEMPLO 2

El mapeo  $w = 1 - \cos z$  es entero y conforme excepto en los ceros  $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$  de la derivada  $(1 - \cos z)' = \sin z$ . Para analizar el comportamiento de este mapeo en  $z = 0$ , nótese que  $\sin z$  tiene un cero de orden 1 en  $z = 0$  y

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = z \left( 1 - \frac{z^2}{3!} + \dots \right).$$

El teorema anterior implica que  $w = 1 - \cos z$  amplificará al doble todos los ángulos en  $z = 0$ . Obsérvese en la Figura 5.4 que el ángulo recto entre los ejes coordenados en el primer cuadrante se transforma en un ángulo de  $180^\circ$ , ya que  $1 - \cos x > 0$  para  $0 < x < \pi/2$  y

$$1 - \cos iy = 1 - \cosh y < 0 \text{ para } 0 < y < \pi/2.$$



**FIGURA 5.4.** Comportamiento local de  $w = 1 - \cos z$  en  $z = 0$

Con respecto a las propiedades globales, es razonable preguntar cuándo se puede mapear de manera conforme una región  $G$  en una región  $H$  dadas. El siguiente teorema, cuya prueba va más allá de los objetivos de este libro, es el resultado fundamental en este sentido.

### TEOREMA DE RIEMANN DEL MAPEO

Sea  $z_0$  un punto de una región  $G$  ( $\neq \mathbb{C}$ ) simplemente conexa. Entonces existe una única función analítica  $w = f(z)$  que mapea a  $G$  de manera uno a uno en el disco  $|w| \leq 1$ , tal que  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$ .

ciales continuas, y estas satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, ya que

$$x_u = \frac{1}{u_x} = \frac{1}{v_y} = y_v \quad y_u = \frac{1}{u_y} = \frac{-1}{v_x} = -x_v.$$

Por tanto,  $g^{-1}$  es analítica.

Las condiciones  $f(z_0) = 0$  y  $f'(z_0) > 0$  implican que la imagen de cualquier arco  $\gamma$  suave que pasa por  $z_0$  tendrá la misma pendiente en 0 que tiene el arco  $\gamma$  en  $z_0$ , ya que  $\arg f'(z_0) = 0$ . Esto no es una limitación sino una normalización que indica la existencia de tres "grados de libertad" al elegir el mapeo: las coordenadas  $x$  y  $y$  del punto  $z_0$  y el cambio de dirección de los ángulos. Si se desea cambiar la dirección por un ángulo  $\theta$ , sólo se necesita multiplicar el mapeo por la constante de longitud unitaria  $e^{i\theta}$ .

Aunque el teorema de Riemann del mapeo asegura que una función mapea de manera conforme una región dada en un disco, no muestra cómo encontrarla. La construcción de la función puede ser un problema de gran dificultad. El resto de este capítulo se dedica a la elaboración de mapeos conformes *específicos* y su aplicación al flujo de fluidos, flujo de calor y electrostática.

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-4 indique dónde son conformes los mapeos.

1.  $w = e^z$

2.  $w = \sin z$

3.  $w = \frac{1}{z}$

4.  $w = z^2 - z$

Describa cómo afecta cada uno de los mapeos, en los Ejercicios 5-8, al ángulo recto entre los ejes coordinados en el primer cuadrante

5.  $w = z^3 \operatorname{sen} z$

6.  $w = z - \operatorname{sen} z$

7.  $w = e^z - z$

8.  $w = e^{z^2} - \cos z$

9. Pruebe que la imagen del círculo  $w = z^2$  bajo el mapeo  $|z - r| = r$ ,  $r > 0$ , es la cardioide con ecuación polar

$$\rho = 2r^2(1 + \cos \theta).$$

10. Muestre que el mapeo  $w = z + 1/z$  forma los círculos  $|z| = r$  en las elipses

$$\frac{x^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1.$$

11. Si  $w = f(z)$  es una función analítica, muestre que su jacobiano satisface

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2.$$

12. Sea  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  conforme y con primeras derivadas parciales  $u_x, u_y, v_x, v_y$  continuas en una región  $G$ . Pruebe que  $f(z)$  es analítica en  $G$ . (*Sugerencia:* Muestre que se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.)
13. ¿Por qué el teorema de Riemann del mapeo establece que no es posible mapear el plano complejo  $\mathbb{C}$  simplemente conexo de manera conforme en el disco unitario?
14. Una región  $G$  es *convexa* si el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de  $G$  está contenido en  $G$ . Pruebe el teorema de *Noshiro-Warschawski*: Suponga que  $w = f(z)$  es analítica en una región convexa  $G$ . Si  $\operatorname{Re} f'(z) > 0$  para toda  $z$  en  $G$ , entonces  $f$  es uno a uno en  $G$ . (*Sugerencia:* Exprese a  $f(z_1) - f(z_2)$  como una integral.)
15. Use el Ejercicio 14 para probar que si  $f$  es analítica en  $z_0$  y  $f'(z_0) \neq 0$ , entonces existe una vecindad de  $z_0$  en la cual  $f$  es uno a uno.

## 5.2 TRANSFORMACIONES FRACCIONALES LINEALES

Un simple pero importante tipo de mapeos conformes está dado por la expresión

$$w = w(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

donde  $a, b, c, d$  son constantes complejas. Tal mapeo se llama *transformación fraccional lineal*. La condición  $ad - bc \neq 0$  impide que su derivada

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

se anule, ya que de otra manera la función es constante. Se puede despejar a  $z$ , para obtener

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

y como  $w(-d/c) = \infty$  y  $w(\infty) = a/c$ , se sigue que  $w$  mapea  $\mathfrak{M}$  (la esfera de Riemann) de manera uno a uno en sí misma. Además el mapeo es conforme, excepto en  $z = \infty, -d/c$ , porque en estos puntos  $w' = 0$  o  $\infty$ .

### EJEMPLO 1

Considérese la transformación fraccional lineal

$$w = \frac{1 - (1/z)}{1 + (1/z)},$$

nótese que  $\infty$  se mapea en 1. Para encontrar el punto que se mapea en 0, obsérvese que  $z = 1$  provoca que se anule el numerador del lado derecho de la transformación fraccional lineal. Por ende, 1 se mapea en 0. Similamente,  $-1$  provoca que el denominador se anule, así que  $-1$  se mapea en  $\infty$ .

Una composición de dos transformaciones fraccionales lineales es la integración de ambas en una sola, ya que

$$\frac{a \left( \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + b}{c \left( \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right) + d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$$

con

$$(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0.$$

Cualquier transformación fraccional lineal es una composición de cuatro tipos especiales de transformaciones:

- (i) *Traslación*:  $w = z + \alpha$ ,  $\alpha$  complejo,
- (ii) *Rotación*:  $w = e^{i\theta} z$ ,  $\theta$  real,
- (iii) *Amplificación*:  $w = kz$ ,  $k > 0$ ,
- (iv) *Inversión*:  $w = 1/z$ .

Si  $c \neq 0$ , puede escribirse

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2} \left( z + \frac{d}{c} \right) + \frac{a}{c},$$

lo cual muestra que la transformación puede descomponerse en traslación por  $d/c$ , seguida de rotación por  $e^{2i\arg c}$ , amplificación  $|c|^2$ , inversión, rotación, amplificación y traslación.

Si  $c = 0$ ,

$$\frac{az + b}{d} = \frac{a}{d} \left( z + \frac{b}{a} \right),$$

esto prueba que la descomposición consiste en una traslación, una rotación y una amplificación.

**EJEMPLO 2**

Encuéntrese una transformación fraccional lineal que mapee el círculo  $|z - i| = 1$  en el círculo  $|w - 1| = 2$ .

**SOLUCIÓN:** Considérese la sucesión de transformaciones fraccionales lineales mostrada en la Figura 5.5: plano traslación  $\xi = z - i$ , seguida de amplificación  $\omega = 2\xi$ , y seguida por otra traslación  $w = \omega + 1$ . La composición de estos tres mapeos es

$$w = \omega + 1 = 2\xi + 1 = 2(z - i) + 1$$

o sea

$$w = 2z + (1 - 2i),$$

y esta transformación mapea  $|z - i| = 1$  en  $|w - 1| = 2$ .

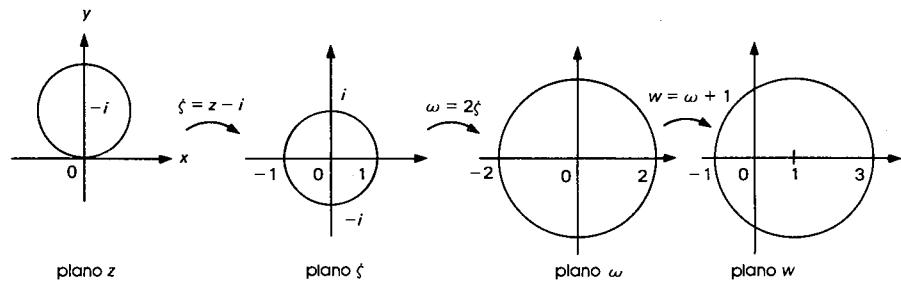


FIGURA 5.5.

La propiedad fundamental de las transformaciones fraccionales lineales es que *mapean círculos en círculos en  $\mathbb{M}$* . Un círculo en  $\mathbb{M}$  corresponde a una línea recta en  $\mathbb{C}$ , ya que las rectas en el plano corresponden a círculos a través de  $\infty$  en la esfera de Riemann (véase Sección 1.3). Geométricamente, es claro que traslaciones y rotaciones llevan círculos a círculos. Antes de considerar las otras dos transformaciones, obsérvese que la línea  $y = \tan \theta \cdot x + b$  puede escribirse en la forma

$$\operatorname{Re}(-ie^{-i\theta} z) = y \cos \theta - x \sin \theta = b \cos \theta, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

no pertenece al círculo, así que al multiplicar la ecuación (1) por la cantidad  $|w|^2/(|z_0|^2 - r^2)$ , diferente de cero, se tiene

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} + |w|^2 - \frac{2}{|z_0|^2 - r^2} \operatorname{Re} z_0 w \\&= \left| w - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2} \right|^2 - \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2},\end{aligned}$$

un círculo. Al invertir los pasos que condujeron a la ecuación (2), se sigue que las rectas se mapean en círculos que pasan por el origen.

Puesto que cualquier transformación fraccional lineal es una composición de estas transformaciones especiales, se ha probado el siguiente teorema.

### TEOREMA

Las transformaciones fraccionales lineales mapean círculos en círculos en  $\mathcal{M}$ .

### EJEMPLO 3

Mapéese de manera conforme la intersección de los discos  $|z - 1| < 1$  y  $|z - i| < 1$  al primer cuadrante.

**SOLUCIÓN:** Como los círculos  $|z - 1| = 1$ ,  $|z - i| = 1$  se intersectan en los puntos  $0$  y  $1 + i$ , se utiliza el mapeo

$$\xi = \frac{z}{z - (1 + i)}$$

que manda  $0$  a  $0$  y  $1 + i$  a  $\infty$ . Los círculos se mapean en rectas perpendiculares entre sí en el origen, ya que el mapeo es conforme y las rectas tangentes a los círculos son perpendiculares en  $z = 0$ . Como  $\xi(2) = 1 + i$  y  $\xi((1+i)/2) = -1$ , las líneas tienen pendientes  $\pm 1$  en el plano  $\xi$  y el traslape corresponde al conjunto  $|\arg \xi - \pi| < \pi/4$  (véase Figura 5.6). La rotación

$$w = e^{-3\pi i/4} \xi = \frac{e^{-3\pi i/4} z}{z - (1 + i)}$$

produce el mapeo deseado.

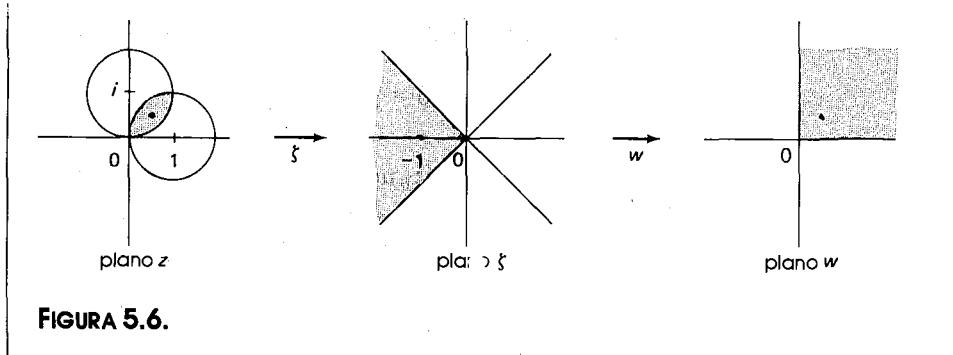


FIGURA 5.6.

**EJEMPLO 4**

Mapéese el semiplano derecho en el círculo unitario  $|z| < 1$  de tal forma que el punto 1 se mapee en el origen.

**SOLUCIÓN:** Nótese que el mapeo del Ejemplo 1

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (3)$$

manda 1 a 0, 0 a  $-1$  y el  $\infty$  en 1. Además,  $\pm i$  se mapean en ellos mismos [tales puntos se llaman **puntos fijos** del mapeo (3)]. Puesto que tres puntos determinan un círculo, se sigue que el eje imaginario se mapea en el círculo unitario (véase Figura 5.7).

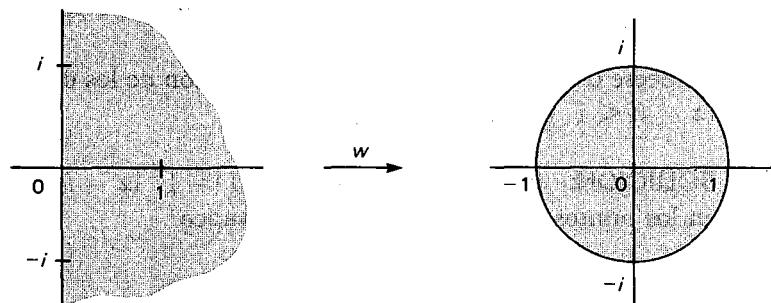


FIGURA 5.7.

la ecuación

$$g(w) = w^4 + 3w^3 + 8w^2 - 2w + 1 = 0$$

que se sitúan en  $|w| < 1$ . Si se escribe  $f(w) = 8w^2$ , se encuentra que

$$|g(w) - f(w)| \leq 7 < 8 |w|^2 = |f(w)|$$

en  $|w| = 1$ , lo cual implica, por el teorema de Rouché, que  $p(z)$  tiene dos raíces en el semiplano derecho.

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-4, describa la imagen de la región indicada bajo el mapeo dado.

1. El disco  $|z| < 1$ ;  $w = i \frac{z-1}{z+1}$

2. El cuadrante  $x > 0$ ,  $y > 0$ ;  $w = \frac{z-i}{z+i}$

3. El sector angular  $|\arg z| < \frac{\pi}{4}$ ;  $w = \frac{z}{z-1}$

4. La franja  $0 < x < 1$ ;  $w = \frac{z}{z-1}$

5. Encuentre el número de raíces de la ecuación

$$11z^4 - 20z^3 + 6z^2 + 20z - 1 = 0$$

que están en el semiplano derecho.

6. ¿Cuántas raíces de la ecuación

$$17z^4 + 26z^3 + 56z^2 + 38z + 7 = 0$$

se encuentran en el primer cuadrante?

7. Utilice la función exponencial para mapear la región interior a  $|z| = 2$  y exterior a  $|z-1| = 1$  en el semiplano superior.  
8. Mapee la región  $|z-1| < 1$ ,  $\operatorname{Im} z < 0$ , en el semiplano superior.  
9. Mapee el sector  $|\arg z| < \pi/4$  en el conjunto  $|\operatorname{Re} w| < 1$ ,  $\operatorname{Im} w > 0$ . (Sugerencia: Utilice la función seno.)

## 5.3 EL PRINCIPIO DE SIMETRÍA

Dados tres puntos distintos  $z_1, z_2, z_3$  en  $\mathbb{N}$ , existe una transformación fraccional lineal que los lleva a  $0, 1, \infty$ , respectivamente. Si ninguno de los puntos

es  $\infty$ , ésta está dada por la *razón cruzada*

$$w = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)},$$

y se convierte en

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \quad \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

si  $z_1, z_2$  o  $z_3 = \infty$ . Si  $w^*$  es otra transformación fraccional lineal con la misma propiedad, entonces la composición  $w^*w^{-1}$  mantiene fijos los puntos  $0, 1, \infty$ . Así, se tiene la transformación

$$\cdot \xi = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0,$$

que satisface las ecuaciones

$$0 = \frac{b}{d}, \quad 1 = \frac{a+b}{c+d}, \quad \infty = \frac{a}{c},$$

Pero entonces  $b = c = 0$  y  $a = d$ , lo que implica que  $w^*w^{-1} = I$ , el mapeo identidad y, por ende,  $w^* = w$ . Por tanto,  $w$  es la única transformación fraccional lineal que mapea los puntos  $z_1, z_2, z_3$  en  $0, 1, \infty$ , respectivamente.

Puesto que un círculo está determinado por tres de sus puntos, ahora se puede definir fácilmente una transformación fraccional lineal que lleve un círculo dado en el plano  $z$  a un círculo dado en el plano  $w$ . Elijanse puntos distintos  $z_1, z_2, z_3$  del primer círculo y  $w_1, w_2, w_3$  del segundo. Entonces

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

mapea  $z_1, z_2, z_3$  en  $w_1, w_2, w_3$ , ya que el lado derecho de la ecuación mapea  $z_1, z_2, z_3$  en  $0, 1, \infty$ , y la inversa del lado izquierdo  $0, 1, \infty$  en  $w_1, w_2, w_3$ .

### EJEMPLO 1

Encuéntrese la transformación fraccional lineal que mapea los puntos  $1, i, -1$  en  $2, 3, 4$ , respectivamente.

**SOLUCIÓN:** Al resolver la ecuación

$$\frac{(w - 2)(3 - 4)}{(w - 4)(3 - 2)} = \frac{(z - 1)(i + 1)}{(z - i)(-1 + 1)}$$

do, si existe una transformación fraccional lineal  $w$  que mapee  $C$  en el eje real y que satisfaga  $w(z) = w(z^*)$ .

A primera vista podría parecer que la simetría con respecto a  $C$  depende de la transformación  $w$ , pero si  $w^*$  es una transformación fraccional lineal que también mapea  $C$  en el eje real, entonces  $\xi = w^*w^{-1}$  mapea al eje real en sí mismo. Por tanto, es de la forma

$$\frac{(\xi - b_1)(b_2 - b_3)}{(\xi - b_3)(b_2 - b_1)} = \frac{(w - a_1)(a_2 - a_3)}{(w - a_3)(a_2 - a_1)},$$

con  $a_j, b_j, j = 1, 2, 3$  reales. Despejando  $\xi$ , se obtiene

$$\xi = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta},$$

con  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  reales; entonces,

$$\overline{w^*(z)} = \overline{\xi(w(z))} = \overline{\xi(w(z))} = \overline{\xi(w(z^*))} = w^*(z^*),$$

y la simetría es independiente de la transformación utilizada. Aún más, *la simetría se conserva bajo transformaciones fraccionales lineales*, porque si  $z$  y  $z^*$  son simétricos con respecto al círculo  $C$  y  $w^*$  es cualquiera de tales transformaciones, entonces  $w^*(z)$  y  $w^*(z^*)$  son simétricos con respecto a  $w^*(C)$  bajo el mapeo  $ww^{*-1}$ . Este hecho se llama **principio de simetría**.

## EJEMPLO 2

Encuéntrese el punto simétrico a  $i$  con respecto al círculo  $|z + 1| = 1$ .

**SOLUCIÓN:** Primero, se necesita encontrar la transformación fraccional lineal del círculo  $|z + 1| = 1$  en el eje real. Al elegirse  $0, -1 + i, -2$  para mapearse en  $0, 1, \infty$  se obtiene

$$w = \frac{-iz}{z + 2},$$

que transforma a  $i$  en  $w = (2 - i)/5$ . Así,  $\bar{w} = (2 + i)/5$  y el mapeo inverso

$$z = \frac{-2w}{w + i}$$

manda a  $w$  en  $\frac{1}{2}(-1 + i)$ . Consecuentemente  $z^* = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ .

### EJEMPLO 3

Encuéntrese el número  $a (< 1)$  para el cual existe una transformación fraccional lineal que mapea al semiplano derecho, omitiendo el disco  $|z - 1| \leq a$  en el anillo  $1 < |w| < 2$ .

**SOLUCIÓN:** Primero se buscan los puntos  $z_0, z_0^*$  simétricos con respecto tanto al eje imaginario como al círculo  $|z - 1| = a$ . Si se rota el eje imaginario  $90^\circ$  se obtiene que

$$iz_0^* = \overline{iz_0} = -\overline{iz_0},$$

así que  $z_0^* = -\overline{z_0}$ . La transformación fraccional lineal que mapea  $1 + a, 1 + ia, 1 - a$  en  $0, 1, \infty$  está dada por

$$w = -i \left[ \frac{z - (1 + a)}{z - (1 - a)} \right].$$

Entonces

$$-i \left[ \frac{z_0 - (1 + a)}{z_0 - (1 - a)} \right] = -i \left[ \frac{z_0^* - (1 + a)}{z_0^* - (1 - a)} \right] = -i \left[ \frac{-\overline{z_0} - (1 + a)}{-\overline{z_0} - (1 - a)} \right]$$

así que

$$i \left[ \frac{\overline{z_0} - (1 + a)}{\overline{z_0} - (1 - a)} \right] = -i \left[ \frac{\overline{z_0} + (1 + a)}{\overline{z_0} + (1 - a)} \right],$$

de donde se obtiene  $\overline{z_0}^2 = 1 - a^2 > 0$ . Por tanto  $z_0$  es real y puede suponerse  $z_0 > 0$ , ya que  $z_0^* = -z_0$ , lo cual implica que  $z_0 = \sqrt{1 - a^2}$ . Por el principio de simetría, el mapeo

$$\xi = \frac{z - z_0}{z + z_0}$$

manda  $z_0$  a  $0$  y  $-z_0$  a  $\infty$  y mapea el eje imaginario y el círculo  $|z - 1| = a$  en círculos concéntricos en el origen. Puesto que  $\xi(\infty) = 1$ , y

$$\xi(1 + a) = \frac{(1 + a) - z_0}{(1 + a) + z_0} \cdot \frac{(1 + a) - z_0}{(1 + a) + z_0} = \frac{1 - z_0}{a} < 1,$$

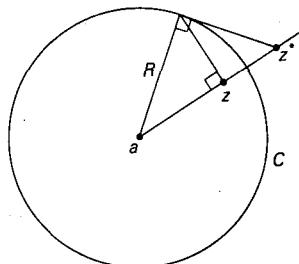
se amplifica por  $a/(1 - z_0) = 2$ , de donde  $a = \frac{4}{5}$  y

$$w = 2\xi = 2 \left( \frac{z - \frac{3}{5}}{z + \frac{3}{5}} \right).$$

7.  $|z| = 1$     8.  $|z - 1| = 1$     9.  $|z - i| = 2$
10. Mapee el círculo unitario en sí mismo de tal forma que el punto  $\alpha$  vaya a  $0$  y  $\alpha/|\alpha| \neq 1$ ,  $|\alpha| < 1$ . (Sugerencia: Mapee  $\alpha^*$  a  $\infty$ .)
11. Encuentre la transformación fraccional lineal que lleva a  $|z| = 1$  en  $|z - 1| = 1$ , el punto  $-1$  en  $0$ , y  $0$  en  $2i$ .
12. Encuentre una transformación fraccional lineal que lleve  $|z| = 1$  y  $|z - 1| = 3$  a círculos concéntricos. ¿Cuál es la razón de los radios?
13. Haga el Ejercicio 12 para  $|z| = 1$  e  $\operatorname{Im} z = 2$ .
14. Pruebe que todo mapeo conforme de un disco en otro está dado por una transformación fraccional lineal. ¿Por qué esto implica la unicidad de la función en el teorema de Riemann del mapeo? (Sugerencia: Utilice el lema de Schwarz, Ejercicio 3, Sección 2.4.)
15. Suponga que  $z^*$  es simétrico al punto  $z$  con respecto al círculo  $|z - a| = R$ . Pruebe que  $(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = R^2$ .
16. Utilice el resultado del Ejercicio 15 para comprobar que se puede usar la construcción mostrada en la Figura 5.8 para localizar los puntos simétricos con respecto a un círculo.

## 5.4 COMPOSICIONES DE MAPEOS CONFORMES ELEMENTALES

En la Sección 5.1 se probó que las funciones elementales  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\operatorname{sen} z$ ,  $\log z$  y  $z^\alpha$  son conformes en aquellas regiones de sus dominios de definición donde su derivada es diferente de cero. En esta sección se mostrará cómo pueden usarse las composiciones de dichas funciones, con transformaciones fraccionales lineales, para mapear de manera conforme ciertas regiones en otras. El procedimiento que se utilizará para analizar el mapeo es similar al que se usó en los Ejemplos 2 y 3 de la Sección 5.2.



**FIGURA 5.8.** Construcción geométrica de puntos simétricos con respecto al círculo  $|z - a| = R$

**EJEMPLO 1**

Encuéntrese un mapeo conforme de la franja infinita  $|\operatorname{Im} z| < \pi/2$  en el disco unitario.

**SOLUCIÓN:** Si se aplica el mapeo conforme  $\zeta = e^z$  a la franja infinita  $|\operatorname{Im} z| < \pi/2$ , se obtiene el semiplano derecho  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ , porque

$$e^{x \pm i\pi/2} = \pm e^x i \quad \text{y} \quad e^0 = 1.$$

El principio de simetría implica que el mapeo

$$w = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta},$$

que manda  $1, 0, -1$  en  $0, 1, \infty$  debe mapear al eje imaginario en el círculo unitario. Por tanto, la composición  $w = w(\zeta(z))$ ,

$$w = \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} = \frac{1 - e^z}{1 + e^z} = -\tanh\left(\frac{z}{2}\right),$$

mapea la franja  $|\operatorname{Im} z| < \pi/2$  en el círculo unitario (véase Figura 5.9).

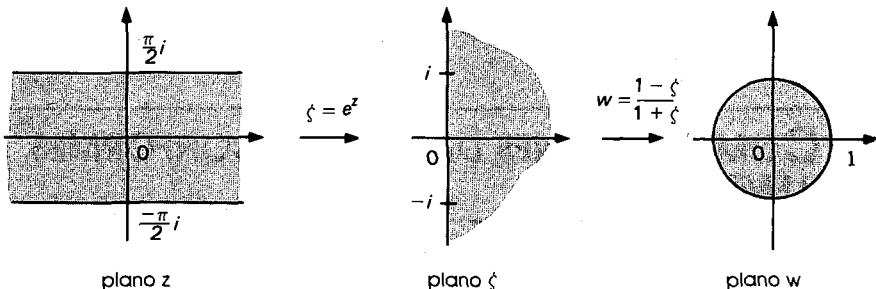


FIGURA 5.9.

**EJEMPLO 2**

Mapéese de manera conforme la franja semi-infinita  $J = \{z: |\operatorname{Re} z| < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0\}$  en el primer cuadrante.

**SOLUCIÓN:** La función  $\zeta = \operatorname{sen} z$  mapea a  $J$  en el semiplano superior,

### EJEMPLO 3

Mapéese el semiplano derecho, cuando le falta la recta  $\{z: x \geq 1, y = 0\}$  en el semiplano superior.

**SOLUCIÓN:** Primero aplíquese la función  $\xi = z^2$  para obtener el plano, menos las dos ranuras que se muestran en el plano  $\xi$  de la Figura 5.10. Entonces, utilice la transformación fraccional lineal que lleva 1,  $\infty$ , 0 en 0, 1,  $\infty$ ,

$$Z = \frac{\xi - 1}{\xi},$$

para mapear el plano con sus dos ranuras en un plano con una sola ranura. Finalmente,  $w = \sqrt{Z}$  genera el semiplano superior, así que el mapeo deseado es

$$w = \sqrt{\frac{\xi - 1}{\xi}} = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2}}.$$

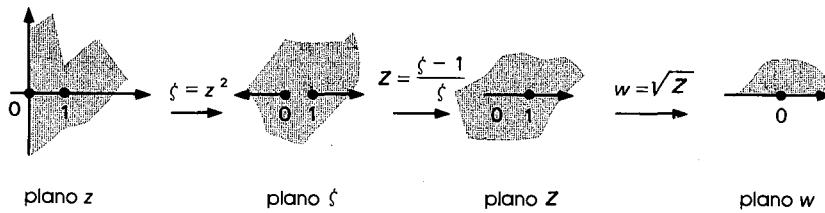


FIGURA 5.10. El mapeo  $w = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2}}$

### EJERCICIOS

1. Encuentre un mapeo conforme del disco unitario en la franja infinita  $|\operatorname{Re} z| < 1$ .  
*(Sugerencia: Considere el inverso del mapeo del Ejemplo 1.)*
2. Muestre que

$$w = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}$$

mapea, de manera conforme, el semiplano superior al que se ha quitado la línea  $\{z: x = 0, y \geq 1\}$

3. Encuentre un mapeo que lleve al semiplano superior en el complemento del segmento de recta de  $-1$  a  $1$ .
4. Encuentre un mapeo conforme del cuadrado  $\{z: |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  en el anillo  $1 < |w| < e^{2\pi}$  con el eje real negativo suprimido.
5. ¿Cuál es la imagen del disco  $|z - a| < a$  bajo el mapeo  $w = z^2$ ?
6. Muestre que la transformación

$$\left(\frac{w-1}{w+1}\right)^2 = i \left(\frac{z-1}{z+1}\right)$$

mapea de manera conforme la mitad superior del disco unitario en él mismo.

7. Describa la imagen de la hipérbola  $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}$  bajo el mapeo  $w = \sqrt{1 - z^2}$ .
8. Mapee el complemento del segmento de recta  $\{z: y = 0, |x| \leq 1\}$  en el disco unitario.
- \*9. Mapee el exterior de la parábola  $y^2 = 4x$  en el disco unitario de tal forma que  $0, -1$  sean enviados en  $1, 0$ .
- \*10. Mapee la región a la izquierda de la rama derecha de la hipérbola  $\operatorname{Re}(z^2) = 1$  en el disco unitario. (Sugerencia: Considere el mapeo  $w = z + 1/z$ .)
- \*11. Pruebe que el mapeo

$$w = \frac{Az^2 + Bz + C}{az^2 + bz + c}$$

puede descomponerse en tres transformaciones sucesivas,

$$\xi = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad Z = \frac{1}{2} \left( \xi + \frac{1}{\xi} \right), \quad w = \mu Z + \nu,$$

o en dos,

$$\xi = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{y} \quad w = \xi^2 + \nu.$$

## 5.5 FLUJO DE FLUIDOS

En esta sección se analizará un problema físico que puede resolverse con la ayuda de funciones analíticas.

Como una función compleja puede descomponerse en dos funciones reales la teoría de funciones analíticas es muy útil al resolver problemas que tienen dos variables en un espacio bidimensional. Sin embargo, como este libro no es un tratado de física matemática, mucho de lo que sigue es un bosquejo heurístico de la teoría física.

La inferencia de que el fluido es incompresible y que no hay fuentes o sumideros en  $G$  implica que una región simplemente conexa de  $G$  siempre contiene la misma cantidad de fluido. Así, la cantidad de fluido por unidad de tiempo que atraviesa por un elemento de longitud  $ds$  de una curva de Jordan  $\gamma$ , spp, contenida junto con su interior en  $G$ , es  $V_n ds$ , donde  $V_n$  es la componente (un número real) de  $V$  en la dirección de la normal que apunta hacia el exterior de la curva (véase Figura 5.11). Por tanto, el flujo total hacia afuera

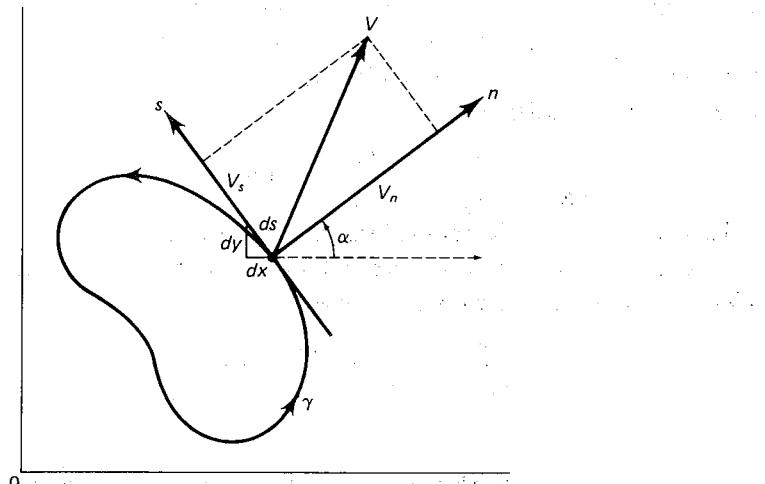
$$Q = \int_{\gamma} V_n ds = 0. \quad (1)$$

La integral de línea de la componente tangencial  $V_s$  de la velocidad  $V$  a lo largo de la curva  $\gamma$ ,

$$\Gamma = \int_{\gamma} V_s ds, \quad (2)$$

se llama **circulación** de  $V$  a lo largo de  $\gamma$ . Si la circulación no es cero en alguna curva  $\gamma$ , entonces las componentes tangenciales que tienen un signo dominan a las que tienen el otro signo en la integral (2). En términos generales, esto significa que el fluido rota alrededor de  $\gamma$ . Se dice que el flujo es **irrotacional** si la circulación es cero a lo largo de todas las curvas cerradas en  $G$ . Al suponer que el flujo es irrotacional,  $\Gamma = 0$ .

Considérese la Figura 5.11, donde las direcciones normal y tangencial, que van afuera de la curva  $\gamma$  se indican en un punto  $z$ . Sea  $\alpha = \alpha(z)$  el ángulo



**FIGURA 5.11.** Componentes del vector velocidad

entre la dirección horizontal (positiva) y la normal hacia afuera de  $\gamma$  en  $z$ , y supóngase que el vector velocidad  $V$  en  $z$  es como se indica.

Rotando el sistema de coordenadas ns alrededor del punto  $z$  por un ángulo  $-\alpha$  se obtienen los componentes normal y tangencial del vector velocidad  $V$

$$V_n = \operatorname{Re}(e^{-i\alpha} V), \quad V_s = \operatorname{Im}(e^{-i\alpha} V).$$

En particular, se tiene que

$$e^{-i\alpha} V = V_n + iV_s. \quad (3)$$

El elemento de longitud  $ds$  está relacionado (véase Figura 5.11) con los elementos  $dx$  y  $dy$  por las identidades

$$dx = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) ds, \quad dy = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) ds,$$

lo cual implica que

$$dz = dx + i dy = e^{i(\pi/2+\alpha)} ds = ie^{i\alpha} ds. \quad (4)$$

Ahora, si  $\gamma$  es cualquier curva de Jordan spp contenida junto con su interior en  $G$ , tenemos por las ecuaciones (1)–(4),

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \overline{V(z)} dz &= i \int_{\gamma} (\overline{e^{-i\alpha} V}) ds \\ &= i \int_{\gamma} (\overline{V_n + iV_s}) ds \\ &= \int_{\gamma} (V_s + iV_n) ds = 0, \end{aligned}$$

donde se denota que  $\overline{V(z)}$  es analítica por el teorema de Morera. Si  $G$  es simplemente conexa, la antiderivada de  $\overline{V(z)}$  es una función analítica  $w(z) = u(z) + iv(z)$ , llamada **potencial complejo** del flujo;  $u$  se conoce como **función potencial** y  $v$  como **función corriente**.\* Las partículas individuales del fluido se mueven a lo largo de curvas cuyas direcciones, en cada punto, coinciden con la del vector velocidad. Tales curvas se llaman **líneas de corriente** y están caracterizadas por la ecuación  $v(z) = \text{constante}$ , ya que la tangente de tal curva tiene pendiente

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v_x}{v_y} = -\frac{v_x}{u_x} = -\tan \arg w' = \tan \arg V$$

por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, puesto que  $V = \overline{w'}$ .

Las curvas  $u(z) = \text{constante}$  se llaman **líneas equipotenciales** y son nor-

Supóngase que el semiplano superior tiene un flujo uniforme de velocidad  $A (> 0)$  en la dirección positiva de las  $x$ . Aquél se aproxima al flujo de fluidos en canales extremadamente anchos (véase Figura 5.12).

Como  $V(z) = A$ , se sigue que  $w'(z) = A$ , así que el potencial complejo es  $w(z) = Az + c$ , donde  $c = c_1 + ic_2$  es una constante compleja. Entonces  $u(z) = Ax + c_1$  y  $v(z) = Ay + c_2$ , así que las líneas equipotenciales son verticales y las de corriente horizontales (despreciando el efecto de la viscosidad sobre el eje real). Si  $c = 0$ , la línea de corriente  $v = 0$  coincide con el eje real.

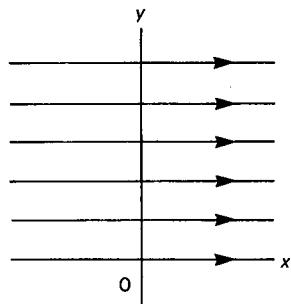


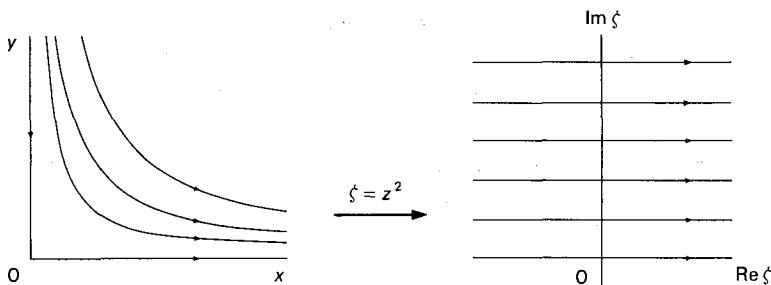
FIGURA 5.12.

Supóngase que la función  $\xi = f(z)$  mapea de manera conforme la región  $G$  en el semiplano superior  $f(G)$ . Si el potencial complejo  $w(\xi)$  del flujo del fluido en  $f(G)$  es conocido, entonces el potencial complejo del flujo en  $G$  está dado por la función analítica  $w(f(z))$ . Por ejemplo, si el potencial complejo en  $f(G)$  es el dado en el Ejemplo 1, entonces las líneas de corriente en  $G$  son aquellas curvas que, mediante la función compuesta  $w \circ f$ , se mapean en las rectas  $v = \text{constante}$  en el semiplano superior. La determinación de tales funciones compuestas es el procedimiento fundamental en la solución de problemas en la dinámica de fluidos.

## EJEMPLO 2

Para encontrar las líneas de corriente a lo largo de un ángulo recto de un canal ancho, inicialmente puede estudiarse el flujo en el primer cuadrante. El mapeo  $\xi = z^2$  forma el cuadrante en el semiplano superior. Así que, si conocemos el potencial complejo  $w = w(\xi)$  del flujo en el semiplano superior, entonces  $w = w(z^2)$  es el potencial complejo del flujo en el

primer cuadrante. Por ejemplo, si suponemos que el flujo es uniforme y de velocidad  $A (> 0)$  en la mitad superior del plano  $\zeta$  ( $y < 0$ ), entonces el potencial complejo en el plano  $\zeta$  es  $w = A\zeta$ . Así, el potencial complejo en el primer cuadrante satisface  $w = Az^2$ ; las líneas de corriente están dadas por las hipérbolas  $2Axy = \text{constante}$ , y el vector velocidad es  $V(z) = 2A\bar{z}$ . El origen es un punto de estancamiento. (Véase Figura 5.13.)



**FIGURA 5.13.** Líneas de corriente en una esquina

### EJEMPLO 3

El mapeo  $\zeta = z + a^2/z$  tiene importantes aplicaciones en el flujo bidimensional de fluidos. Reescribiendo la transformación en la forma

$$\frac{(z \pm a)^2}{z} = \zeta \pm 2a,$$

Se ve que la imagen  $\zeta$  de cada punto del círculo  $|z| = b$ ,  $b > a$ , satisface

$$|\zeta - 2a| + |\zeta + 2a| = \frac{|z - a|^2 + |z + a|^2}{b}.$$

Por la ley de los cosenos (véase Figura 5.14), se sigue que

$$|z - a|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta,$$

$$|z + a|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\pi - \theta),$$

donde  $\theta = \arg z$ . Por tanto,

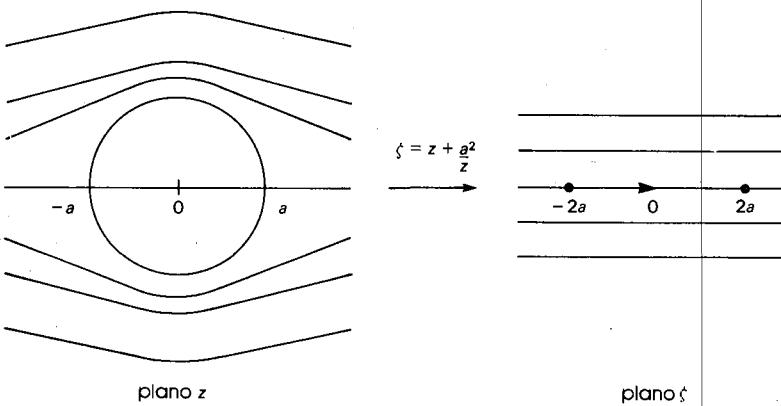
plano  $z$

plano  $\xi$

**FIGURA 5.14.** El mapeo  $\xi = z + \frac{a^2}{z}$

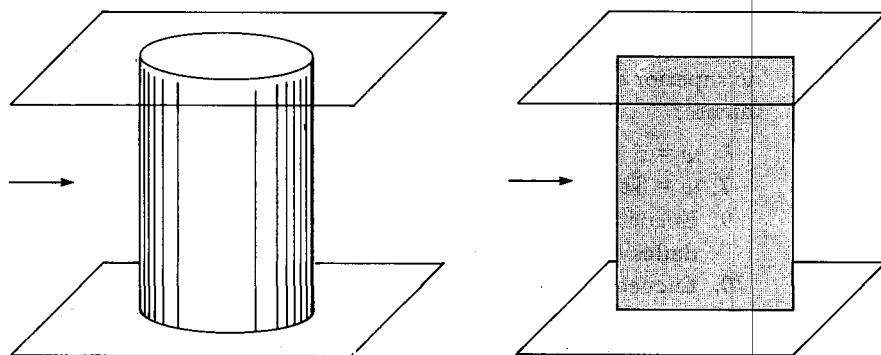
se mapea en el segmento de recta que une  $-2a$  y  $2a$  en el plano  $\xi$ , puesto que  $z = ae^{i\theta}$  implica que

$$\xi = z + \frac{a^2}{z} = ae^{i\theta} + ae^{-i\theta} = 2a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$



plano  $z$

plano  $\xi$



**FIGURA 5.15.** Flujo alrededor de un cilindro

Si se observa que  $(z + a^2/z)' = 1 - (a/z)^2$ , entonces  $\xi = z + a^2/z$  mapea de manera conforme el exterior del círculo  $|z| = a$  en el exterior del segmento de recta que va de  $-2a$  a  $2a$ . Por tanto, suponiendo que el movimiento del flujo del fluido en el plano  $\xi$  es uniforme y de velocidad  $A (> 0)$  paralela al eje real, se obtiene el potencial complejo

$$w = A \left( z + \frac{a^2}{z} \right)$$

para el flujo alrededor de un cilindro circular de radio  $a$  (véase Figura 5.15). La función corriente se obtiene cuando  $z = re^{i\theta}$ , así

$$v = A \left( r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta;$$

la línea de corriente  $v = 0$  consta del círculo  $|z| = a$  y del eje real con  $|x| \geq a$ . La velocidad del flujo de fluido es

$$V = \overline{w'} = A \left[ 1 - \left( \frac{a}{\bar{z}} \right)^2 \right],$$

con puntos de estancamiento en  $z = \pm a$ . Nótese que  $V \rightarrow A$  cuando  $|z| \rightarrow \infty$ , por lo cual, aunque la corriente se perturba por la presencia del cilindro, la perturbación es despreciable a grandes distancias del cilindro, y el flujo para grandes  $|z|$  es esencialmente uniforme y de velocidad  $A$  paralela al eje  $x$ .

## EJERCICIOS

Encuentre las líneas de corriente para el flujo de un fluido incompresible, sin fuente ni sumideros, en cada una de las regiones de los Ejercicios 1-4. Suponga que el flujo tiene velocidad  $A > 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . ¿Hay puntos de estancamiento?

$$1. 0 < \arg z < \frac{3\pi}{4}$$

$$2. 0 < \arg z < \frac{5\pi}{4}$$

$$3. 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}$$

$$4. \frac{-\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4}$$

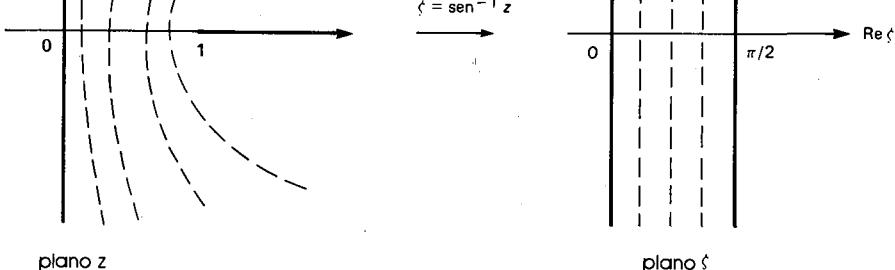
En los Ejercicios 5-8, calcule la rapidez  $|V|$  en  $z = 0, 1$ , e  $i$  para el flujo en el semiplano superior dado por cada uno de los potenciales complejos. ¿Hay puntos de estancamiento?

$$5. w = z + z^3$$

$$6. w = z + 2iz^2$$

$$7. w = 3z - iz^2$$

$$8. w = \sin z$$



**FIGURA 5.16.** Flujo vertical uniforme en el plano  $\xi$

12. Use el Ejercicio 11 para describir un flujo a través de una abertura acotada por la hipérbola  $x^2 - y^2 = 1$ .
13. Use el Ejercicio 11 para describir el flujo a través de una abertura de ancho  $2a$  en una placa plana. ¿Es este flujo realizable físicamente? (Sugerencia: Encuentre la rapidez en los bordes.)
14. Use el mapeo  $\xi = \operatorname{sen}^{-1} z$  para determinar las líneas de corriente del flujo de un fluido incompresible en la región mostrada en la Figura 5.16. Suponga que el flujo en el plano  $\xi$  es uniforme y paralelo al eje imaginario. ¿Es este flujo realizable *físicamente*?
15. El teorema de Bernoulli establece que en el movimiento estacionario de un fluido incompresible, la cantidad

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |V|^2$$

tiene un valor constante en todos los puntos de una línea de corriente del flujo, donde  $p$ ,  $\rho$  y  $|V|$  son la presión, la densidad y la rapidez, respectivamente. Muestre, para el Ejemplo 3, que si  $A^2 > \frac{2}{3}p(\infty)/\rho$ , entonces habrá puntos en los que la presión es negativa. En éstos se formará vacío, lo que provoca el fenómeno de cavitación. Ocurre cavitación, por ejemplo, cerca de las puntas de una hélice que se mueve rápidamente.

## 5.6 LA FÓRMULA DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

En el segundo teorema de la Sección 5.1 (página 163), se probó que si  $f(z)$  es analítica en una región que contiene al punto  $z_0$  en el cual  $f'(z)$  tiene un cero de orden  $k$ , entonces todos los ángulos en  $z_0$  se amplifican por el factor  $k + 1$ . Considérese, en cambio, una función  $f(z)$  analítica con derivada

$$f'(z) = A(z - z_0)^\alpha,$$

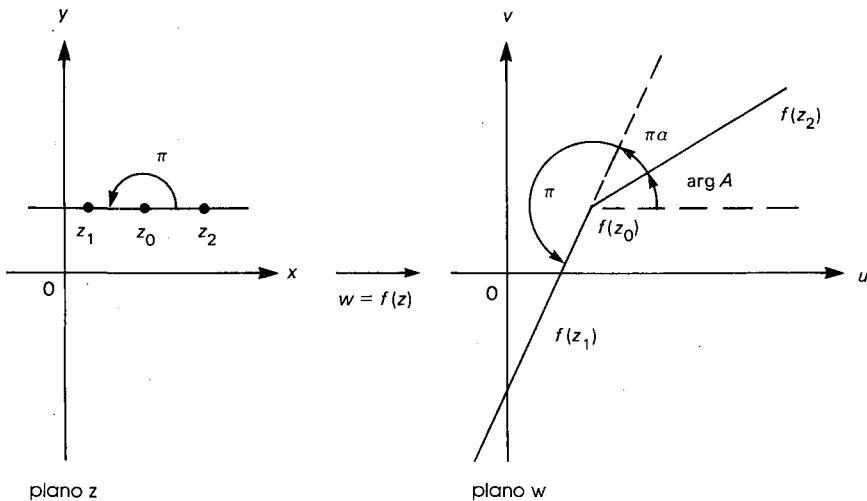


FIGURA 5.17. Efecto de  $f'(z) = A(z - z_0)^\alpha$

donde  $-1 < \alpha < 1$ ,  $\alpha \neq 0$ . El punto  $z_0$  es un punto de ramificación para  $f'$ ; sin pérdida de generalidad, supóngase que el corte de ramificación es vertical y hacia abajo de  $z_0$ . Sea  $z$  un punto de la recta, paralela al eje real, que pasa por  $z_0$ . Puesto que

$$\arg f'(z) = \arg A + \alpha \arg(z - z_0),$$

el cambio en dirección será  $\arg A$  si  $z$  está a la derecha de  $z_0$ , y  $\arg A + \pi\alpha$  si  $z$  está a la izquierda de  $z_0$  (véase Figura 5.17). Entonces, el ángulo  $\pi$  en  $z_0$  se amplifica por el factor  $\alpha + 1$  en  $f(z_0)$ .

Puede utilizarse esta observación para construir una función  $f(z)$  que mapee al eje real en una trayectoria poligonal. Sean  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  números reales, y supóngase que la función  $f(z)$  tiene derivada

$$f'(z) = A(z - x_1)^{\alpha_1}(z - x_2)^{\alpha_2} \dots (z - x_n)^{\alpha_n},$$

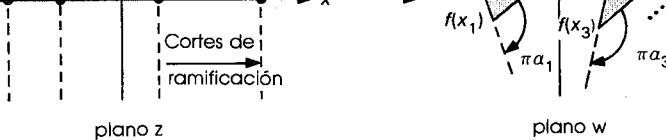
donde  $A \neq 0$  es una constante compleja y  $-1 < \alpha_k < 1$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Puesto que

$$\arg f'(z) = \arg A + \alpha_1 \arg(z - x_1) + \alpha_2 \arg(z - x_2) + \dots + \alpha_n \arg(z - x_n),$$

las imágenes de los intervalos  $(-\infty, x_1)$ ,  $(x_1, x_2)$ ,  $\dots$ ,  $(x_n, \infty)$  son segmentos de rectas cuyos ángulos, medidos a partir de la horizontal, están dados como sigue.

Intervalo

Ángulo



**FIGURA 5.18.**

Así, la función  $w = f(z)$  mapea al eje real en una trayectoria poligonal, como se muestra en la Figura 5.18.

Por construcción,  $f(z)$  es analítica en el plano complejo, excepto en los cortes de ramificación hacia abajo de cada uno de los puntos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Así que, si  $z$  es un punto cualquiera en el semiplano superior, podemos definir el mapeo conforme  $f(z)$  por

$$f(z) = \int_{\gamma} f'(\xi) d\xi$$

donde  $\gamma$  es el segmento de recta que va de  $x_0 (\neq x_k, k = 1, 2, \dots, n)$  a  $z$ . Cualquier función  $f(z)$  de esta forma se conoce como una transformación de Schwarz-Christoffel. Esta argumentación proporciona el recíproco del siguiente teorema, cuya prueba está más allá del objetivo de este libro.

### TEOREMA DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

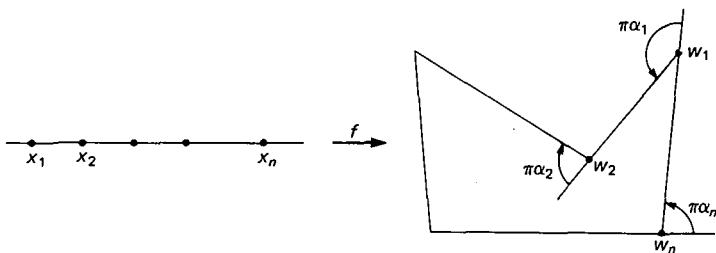
Todas las funciones que mapean de manera conforme el semiplano superior en un polígono en  $\mathbb{M}$  con ángulos exteriores  $\alpha_k, k = 1, \dots, n$ , son de la forma

$$f(z) = A + B \int_0^z (z - x_1)^{\alpha_1} (z - x_2)^{\alpha_2} \cdots (z - x_n)^{\alpha_n} dz,$$

donde los puntos  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  son reales, y  $A, B$  constantes complejas.

La función dada por la ecuación integral de este teorema se llama **fórmula de Schwarz-Christoffel** para el polígono dado.

El **ángulo exterior** en el vértice  $w_k = f(z_k)$  del polígono es  $\pi\alpha_k$  requerido para hacer que la dirección del vector que va de  $w_k$  a  $w_{k+1}$  coincida con la del vector que va de  $w_{k-1}$  a  $w_k$ . En la Figura 5.19, se observa que el ángulo exterior se mide al rotar desde el siguiente lado del polígono hasta la línea que es continuación del lado anterior del polígono. Nótese que  $-1 < \alpha_k < 1$ , con



**FIGURA 5.19.** Ángulo exterior de un polígono

$\alpha_k > 0$  cuando la rotación es en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, y  $\alpha_k < 0$  cuando es en el sentido de las manecillas del reloj. Además, si se efectúa un circuito completo en el sentido de las manecillas del reloj a lo largo del perímetro del polígono, se recorre una revolución completa, lo cual implica que

$$\pi \sum_{k=1}^n \alpha_k = -2\pi \quad \text{o} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = -2.$$

Las constantes  $A$  y  $B$  controlan —por medio de traslaciones, amplificaciones y rotaciones— la localización, escala y orientación del polígono en el plano  $w$ , y los puntos  $x_k$  se mapean en los vértices  $w_k$  del polígono.

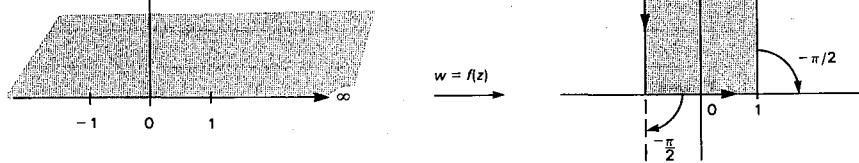
Una transformación fraccional lineal del semiplano superior en sí mismo permite mapear tres de los puntos  $x_k$  en tres posiciones prescritas sobre el eje real. Así, se tiene la libertad de elegir la localización de tres de los puntos  $x_k$ . Dependiendo del polígono, una elección apropiada de las localizaciones de estos puntos puede ser extremadamente útil para obtener una solución en forma cerrada de la integral. La localización de los puntos  $x_k$  restantes depende de la forma del polígono y puede ser muy difícil de establecer, excepto en los casos en que el polígono sea altamente simétrico.

Generalmente conviene elegir  $x_n = \infty$ ; aquí se omite el término que contiene a  $x_n$  en la fórmula de Schwarz-Christoffel.

Los ejemplos siguientes muestran el uso de la fórmula de Schwarz-Christoffel.

### EJEMPLO 1

Mapéese, de manera conforme, el semiplano superior en la franja  $|x| < 1$ ,  $y > 0$ .



**FIGURA 5.20.**

Puesto que  $w(\pm 1) = \pm 1$ , se tiene

$$A - \frac{iB\pi}{2} = 1,$$

$$A + \frac{iB\pi}{2} = -1.$$

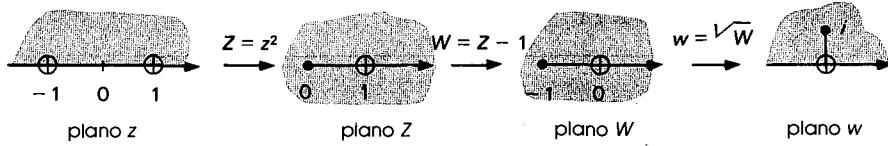
De  $A = 0$  y  $B = 2i/\pi$ , se infiere que  $w = (2/\pi) \operatorname{sen}^{-1} z$ .

## EJEMPLO 2

Mapéese el semiplano superior en la región sombreada del plano  $w$ , mostrada en la Figura 5.21.

**SOLUCIÓN:** Es fácil obtener esta transformación sin utilizar la fórmula de Schwarz-Christoffel. De la composición de los mapeos indicados en la Figura 5.21 se sigue que

$$w = \sqrt{W} = \sqrt{Z - 1} = \sqrt{z^2 - 1}.$$



**FIGURA 5.21.**  $w = \sqrt{z^2 - 1}$

Para comprobar que se obtiene la misma transformación con la fórmula de Schwarz-Christoffel, nótese que se tienen ángulos exteriores  $-\pi/2, \pi, -\pi/2$  en  $-1, 0, 1$ . Por ende,

$$\begin{aligned} w &= A + B \int_0^z \frac{z \, dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \\ &= A + B \sqrt{z^2 - 1} \Big|_0^z = (A - Bi) + B\sqrt{z^2 - 1}. \end{aligned}$$

Ahora  $0 = w(1) = A - Bi = w(0) = A$ , así que  $B = 1$  y  $w = \sqrt{z^2 - 1}$ .

### EJEMPLO 3

Mapéese el semiplano superior en la franja infinita  $0 < v < \pi$ .

**SOLUCIÓN:** Considerando el triángulo sombreado de la Figura 5.22, supóngase que los puntos  $\infty, -1, 0$  del plano  $z$  se mapean en los puntos  $w_\infty, \pi i, w_0$  del plano  $w$ . Si hacemos que  $w_0$  tienda a  $\infty$  a través de los reales negativos, mientras que  $w_\infty$  tiende a  $\infty$  por los reales positivos, se obtiene la franja infinita  $0 < v < \pi$  en el límite. Los ángulos exteriores en  $w_\infty, \pi i, w_0$  tienden a  $-\pi, 0, -\pi$ , entonces una fórmula de Schwarz-Christoffel para el caso límite es

$$w = A + B \int_1^z \frac{dz}{z} = A + B \log z.$$

Se escoge  $z = 1$  como el límite inferior de la integración, puesto que  $\log 0 = \infty$ . Ahora

$$\pi i = w(-1) = A + B \log(-1) = A + B\pi i,$$

así que si  $A = 0$  y  $B = 1$  se llega a la transformación deseada  $w = \text{Log } z$ .

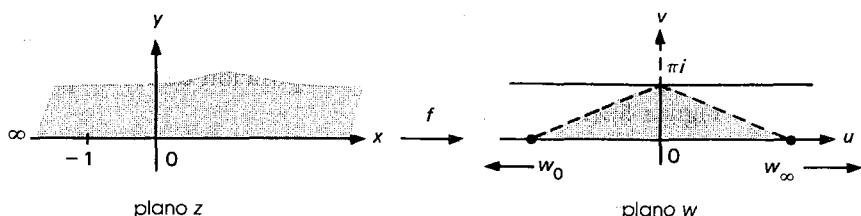


FIGURA 5.22.

### EJEMPLO 4

vertices, se tiene  $A = 0$ ,  $B = e^{-\alpha}$ , y

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz}{z^\alpha (1-z)^\beta}.$$

Entonces  $f(0) = 0$  y

$$f(1) = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha (1-x)^\beta} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma)}.$$

La función gamma satisface la identidad  $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi(\operatorname{sen}\pi x)^{-1}$ , por lo cual la longitud de este lado es

$$c = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\pi\gamma \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma).$$

Si se utiliza la ley de los senos, las longitudes de los otros dos lados son

$$a = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\pi\alpha \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma),$$

$$b = \frac{1}{\pi} \operatorname{sen}\pi\beta \Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\gamma)$$

(véase Figura 5.23).

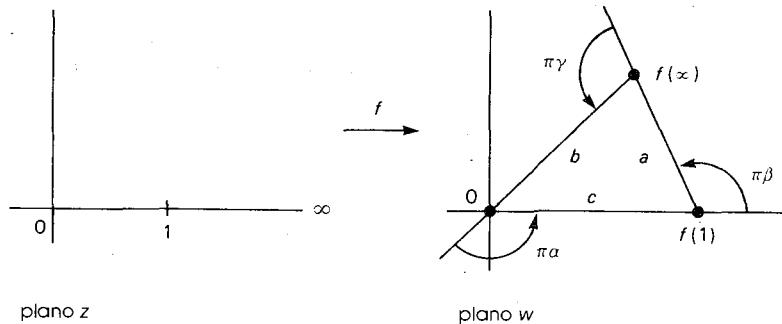


FIGURA 5.23.

### EJEMPLO 5

Mapéese el semiplano superior en el interior de un rectángulo.

**SOLUCIÓN:** Por el Ejercicio 6 de la Sección 5.3, cualesquiera cuatro puntos sobre el eje real pueden mapearse, por una transformación fracc-

cional lineal, en los puntos  $\pm 1, \pm k$ ,  $k > 1$  (inviértase si es necesario). En consecuencia, el mapeo está dado por

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}}$$

(véase Figura 5.24). A partir de la fórmula se nota de manera clara que los vértices del rectángulo son simétricos respecto al eje imaginario, con

$$b = \frac{1}{k} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^{-2}x^2)}} = \frac{1}{k} F \left( \frac{\pi}{2}, \frac{1}{k} \right)$$

(una integral elíptica de primera clase) y

$$ic = \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}} = \frac{i}{k} \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^{-2}x^2)}}.$$

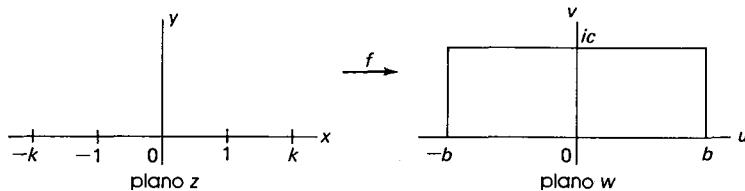


FIGURA 5.24.

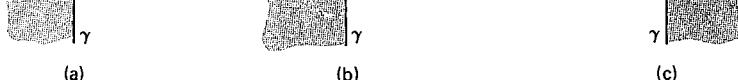
## EJERCICIOS

- Encuentre las líneas de corriente de un flujo de fluido incompresible de velocidad  $A (> 0)$  en  $\infty$  para la región sombreada del plano  $w$  de la Figura 5.21.
- Obtenga un mapeo del semiplano superior en la región sombreada del plano  $w$  en la Figura 5.21, que mande a los puntos  $0, 1, \infty$  en  $0, i, 0$ .
- Muestre que la función

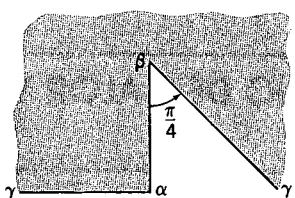
$$f(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z(z^2-1)}}$$

mapea el semiplano superior en un cuadrado con lados de longitud

$$a = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^{3/4} \sqrt{1-t}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{3}{4})} = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{2\sqrt{2\pi}}.$$

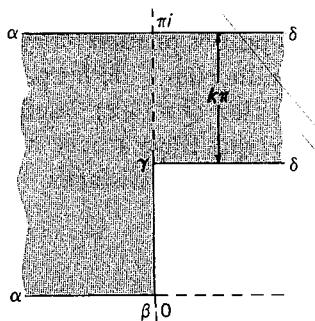


**FIGURA 5.25.**



**FIGURA 5.26.**

- \*8. Mapee de manera conforme el semiplano superior en la región de la Figura 5.27, con  $0, x, 1, \infty \rightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta$ , respectivamente, y muestre que  $x = k^2$ ,  $0 < k < 1$ . (Sugerencia: Haga  $s^2 = (z - 1)/(z - x)$ .)



**FIGURA 5.27.**

- \*9. Muestre que

$$f(z) = A \left[ \operatorname{Log} \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-a}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-a}} - i\sqrt{a-1} \operatorname{Log} \frac{i\sqrt{z(a-1)} + \sqrt{z-a}}{i\sqrt{z(a-1)} - \sqrt{z-a}} \right] + B$$

mapea de manera conforme el semiplano superior en la región de la Figura 5.28 con  $0, 1, a, \infty \rightarrow \alpha, \beta, \gamma, \delta$  y  $a = 1 + (h^2/H^2)$ .

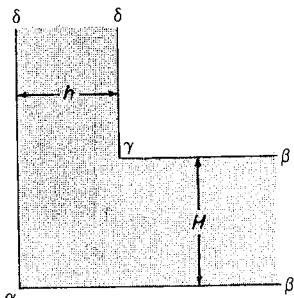


FIGURA 5.28.

## 5.7 APLICACIONES FÍSICAS EN FLUJO DE CALOR Y ELECTROSTÁTICA (opcional)

En esta sección se desarrollará la teoría básica de los flujos de calor y de campos electrostáticos bidimensionales en estado estacionario. Es importante notar las similitudes entre estos flujos y el de fluidos. En la siguiente sección se presentará un breve desarrollo de la teoría de estelas en un fluido.

### FLUJO DE CALOR

Puede enfocarse el estudio de la conducción de calor en un cuerpo sólido homogéneo de manera muy parecida a como se trató el flujo de fluidos, si el sólido es tal que el flujo es bidimensional, y el flujo de calor se encuentra en estado estacionario. Supóngase que no hay fuentes o sumideros de calor en la región  $G$ , simplemente conexa. Puesto que dos puntos pueden tener temperaturas diferentes, hay un flujo de calor —por conducción— de las partes más calientes hacia las más frías. El vector **flujo de calor**  $Q = Q(z)$  puede escribirse como una función compleja continua. El calor que fluye afuera desde el interior de una curva  $\gamma$  cerrada spp contenida en  $G$  debe satisfacer

$$\int_{\gamma} Q_n \, ds = 0,$$

porque, de otra forma, la temperatura en el interior cambiaría. Como el calor fluye de las partes más calientes hacia las más frías, es irrotacional, así que se tiene

ortogonales a las isotermas.

Un problema frecuente en el flujo de calor en estado estacionario es construir las isotermas en una región  $G$  especificando las temperaturas de la frontera.

### EJEMPLO 1

Encuentre las isotermas de la placa  $G$ , indicada en la Figura 5.29, aislada a lo largo del segmento  $0 < x < 1, y = 0$ , con temperatura  $0^\circ$  a lo largo de  $z = y \geq 0$ , y  $1^\circ$  a lo largo de  $z = x \geq 1$ .

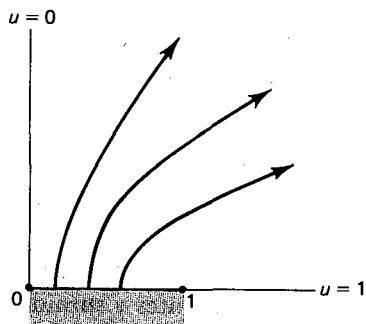


FIGURA 5.29.

**SOLUCIÓN:** La función  $w = (2/\pi) \operatorname{sen}^{-1} z$  mapea a  $G$  en la franja  $0 < u < 1, v > 0$ , y es el potencial complejo. Entonces

$$z = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} w = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} u \cosh \frac{\pi}{2} v + i \cos \frac{\pi}{2} u \operatorname{senh} \frac{\pi}{2} v.$$

Por tanto, encontramos que

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{2} u} - \frac{y^2}{\cos^2 \frac{\pi}{2} u} = 1,$$

esto indica que las isotermas son hipérbolas.

### EJEMPLO 2

Encuentre las isotermas de una placa  $G$ , que tiene la forma de la Figura 5.25a, aislada a lo largo del segmento que une a  $\alpha = 0$  con  $\beta = 1$ , con temperatura  $-1^\circ$  en el rayo que va de  $\alpha$  a  $\gamma$  y  $1^\circ$  en el que va de  $\beta$  a  $\gamma$ .

**SOLUCIÓN:** Como los ángulos exteriores en 0 y 1 son  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ , respectivamente, la transformación de Schwarz-Christoffel

$$z = 1 + \frac{i}{\pi} \int_1^{\xi} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} d\xi = 1 + \frac{i}{\pi} [\sqrt{\xi^2 - 1} + \cosh^{-1} \xi]$$

mapea el semiplano superior en  $G$  con  $-1, 1, \infty \rightarrow \alpha, \beta, \gamma$ . Pero  $\xi = \operatorname{sen}(\pi w/2)$  mapea la franja  $|u| < 1, v > 0$ , en el semiplano superior, así que

$$z = 1 + \pi^{-1} \left[ i \cosh^{-1} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi w}{2} \right) - \cos \frac{\pi w}{2} \right]$$

mapea la franja mencionada en  $G$ . Por tanto, su inversa  $w = w(z)$  es el potencial complejo. Como en el Ejemplo 1, las isotermas serán las imágenes, bajo  $z = z(w)$ , de las rectas verticales  $u = \text{constante}$ . Simplificando el primer término entre paréntesis, se encuentra

$$z = \frac{w+1}{2} - \frac{1}{\pi} \cos \frac{\pi w}{2},$$

de donde las isotermas pueden graficarse fácilmente.

## ELECTROSTÁTICA

Considérese un campo electrostático *plano*  $E(z)$  que surge de la atracción o repulsión de un sistema arbitrario de cargas (fuentes y sumideros) dispuestas en el plano. En una región simplemente conexa  $G$ , complementaria a estas cargas, el interior de una curva cerrada  $\gamma$  spp contenida en  $G$  no tiene carga, así que

$$\int_{\gamma} E_n ds = 0,$$

por la ley de Gauss. La circulación del campo es el trabajo realizado por el campo cuando una carga positiva unitaria recorre la curva  $\gamma$  completa. Como no se requiere gasto de energía para mantener un campo electrostático, se tiene que

$$\int_{\gamma} E_s ds = 0.$$

Entonces se dice que  $E$  es un campo potencial,  $E/i$  es analítica, y su antideri-

$u$	$= \text{grad } u$	$= -k \text{ grad } u$	$= -\text{grad } u$
$u(z) = \text{constante}$	Función potencial	Temperatura	Función potencial
$v$	Líneas equipotenciales	Isotermas	Líneas equipotenciales
$v(z) = \text{constante}$	Función corriente	Función corriente	$-v$ es la función fuerza
	Líneas de corriente	Líneas de corriente	Líneas de fuerza

Pueden resumirse todas las analogías entre el flujo de fluidos, flujo de calor y electrostática, y presentarlas en forma tabular, como se hace en la Tabla 5.1. Pueden hacerse analogías similares con el flujo de fluidos y difusión estacionaria, magnetostática y campos gravitacionales, e hidromecánica.

Frecuentemente se desean encontrar las líneas equipotenciales de un campo electrostático plano, acotado por contornos sobre los cuales el potencial es una constante dada (cada contorno es un conductor).

### EJEMPLO 3

Un condensador consta de dos placas en forma de semiplanos coplanares con bordes paralelos, separados una distancia  $2a$  y con una diferencia de potencial  $2u_0$ . Cualquier sección normal a los planos genera un campo plano con dos cortes (véase Figura 5.30). Encuéntrense las líneas equipotenciales para este campo.

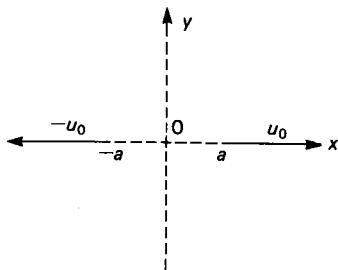


FIGURA 5.30.

**SOLUCIÓN:** La función

$$w = \frac{2u_0}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \left( \frac{z}{a} \right)$$

mapea el dominio en la franja  $|u| < u_0$ . Así que las líneas equipotenciales son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi u}{2u_0}} - \frac{y^2}{a^2 \cos^2 \frac{\pi u}{2u_0}} = 1.$$

#### EJEMPLO 4

Un condensador de placas paralelas consiste en dos semiplanos paralelos, cuyos bordes están separados una distancia  $2\pi$  y que mantienen una diferencia de potencial  $2u_0$ . Cualquier sección normal a los planos produce un campo bidimensional con dos cortes, como se muestra en la Figura 5.31. Encuéntrense las líneas equipotenciales para este campo.

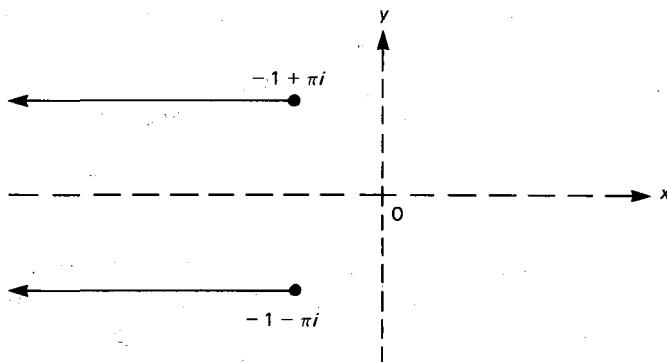
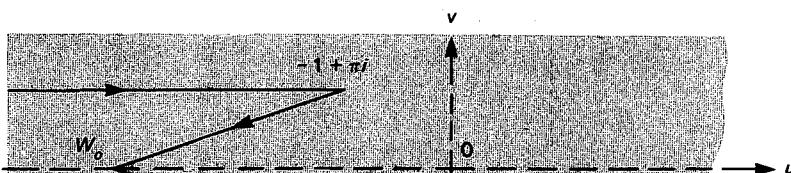


FIGURA 5.31.

**SOLUCIÓN:** Nótese la región sombreada en la Figura 5.32. Haciendo que  $w_0$  tienda a  $-\infty$  se obtiene la región de la Figura 5.31 como caso



$$w = A + B \int^z \frac{(z+1)(z-1)}{z} dz = A + B \left( \frac{1}{2}z^2 - \log z \right)$$

donde los valores del límite inferior de la integración (evaluado en algún punto diferente de cero) se absorben en las constantes  $A$  y  $B$ . Al evaluar esta expresión en  $z = \pm 1$  se llega al sistema

$$A + B/2 = -1 - \pi i$$

$$A + B(\frac{1}{2} - \pi i) = -1 + \pi i,$$

con solución  $A = -\pi i$ ,  $B = -2$ , y  $w = 2 \operatorname{Log} z - z^2 - \pi i$ . Ahora, obsérvese que el semiplano superior puede mapearse en la franja  $|\operatorname{Im} \xi| < \pi i$  por medio del mapeo  $\xi = 2 \operatorname{Log} z - \pi i$ . En los mapeos de la Figura 5.33, es evidente que la función

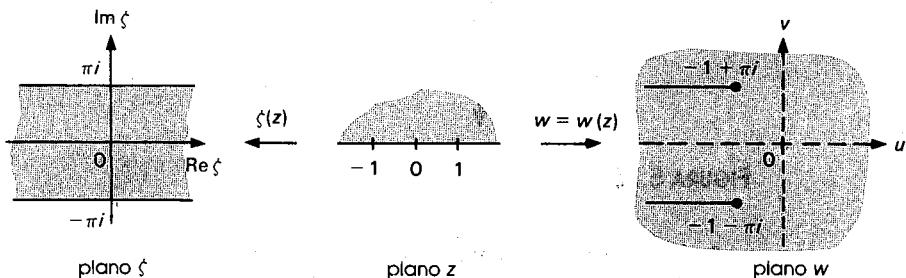
$$w = 2 \operatorname{Log} z - \pi i - z^2 = \xi + e^\xi$$

mapea, de manera conforme, la franja  $|\operatorname{Im} \xi| < \pi i$  en la región sombreada del plano  $w$ . Como las líneas equipotenciales son paralelas al eje real del plano  $\xi$ , pueden obtenerse en el plano  $w$ . En forma paramétrica están dadas por

$$u = \xi + e^\xi \cos \eta$$

$$v = \eta + e^\xi \operatorname{sen} \eta, \quad \eta \text{ constante},$$

donde  $\xi = \xi + i\eta$ .



**FIGURA 5.33.**

## EJERCICIOS

1. Encuentre el potencial electrostático en una región situada entre un cilindro sólido y una placa plana paralela, donde el potencial en el cilindro es 1 y en la placa es 0. Suponga una sección que coloca la placa en el eje imaginario, tal que el cilindro esté dado por  $|z - 2| \leq 1$ .

2. Encuentre las líneas de corriente para una pared de altura  $a$  si el flujo es infinitamente profundo y tiene velocidad  $A > 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . ¿Cuál es la velocidad en 0 y en  $ia$  (véase Figura 5.34)?

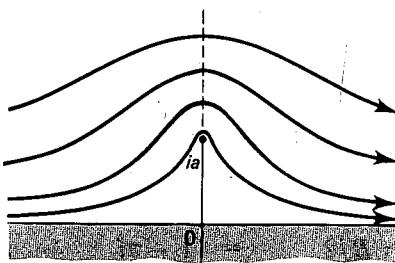


FIGURA 5.34.

3. Encuentre las isotermas en la franja infinita  $0 < y < \pi$  si los bordes están aislados en  $x < 0$  y la temperatura satisface  $u(x) = 0^\circ$  y  $u(x + i\pi) = 1^\circ$  para  $x \geq 0$ .
4. Encuentre el potencial complejo y los puntos de estancamiento para el flujo de un fluido incompresible a través de la región de la Figura 5.35, si se supone que la velocidad original del flujo es  $A$ .

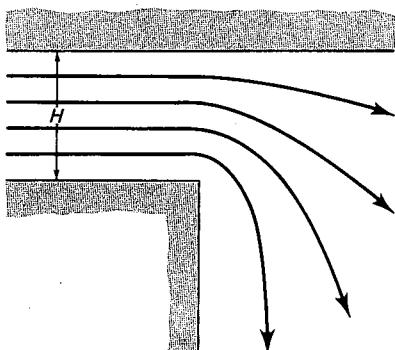
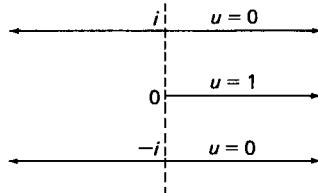


FIGURA 5.35.

5. Encuentre las isotermas de la placa indicada en la Figura 5.36, con temperatura  $0^\circ$  en el lado horizontal y  $1^\circ$  en los lados verticales.



**FIGURA 5.37.**

7. Muestre que la función

$$v = \operatorname{Im} [e^{-i\alpha} z (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \sqrt{1 - (e^{i\alpha}/z)^2})]$$

es la función corriente para un flujo alrededor de una placa de longitud 2, inclinada un ángulo  $\alpha$  con respecto a la horizontal, cuando  $V(\infty) = A (> 0)$ .

## 5.8 ESTELAS EN UN FLUJO DE FLUIDO (opcional)

Considérese el impacto directo de una corriente de anchura infinita y velocidad  $A (> 0)$  sobre una placa fija de anchura  $4a$  colocada perpendicularmente al flujo (véase Figura 5.38c). La función

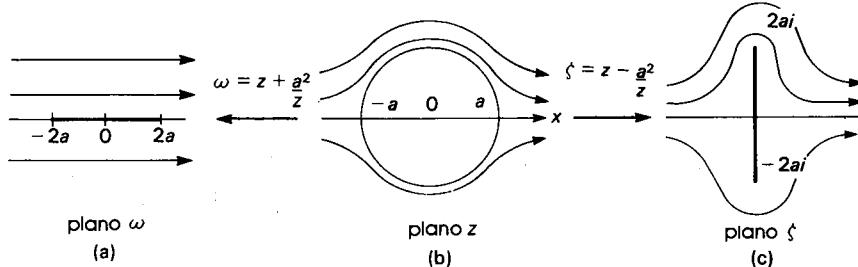
$$\xi = z - a^2/z$$

mapea, de manera conforme, el exterior del círculo  $|z| = a$  en esta región. Utilizando los tres mapeos mostrados en la Figura 5.38 se obtiene el potencial complejo del flujo alrededor de la placa fija:

$$w(\xi) = A\omega = A(z + a^2/z) = A(2z - \xi) = \pm A\sqrt{\xi^2 + 4a^2},$$

puesto que

$$0 = 4(z^2 - \xi z - a^2) = (2z - \xi)^2 - (\xi^2 + 4a^2).$$



**FIGURA 5.38.**

El potencial complejo puede usarse para determinar las líneas de corriente y la velocidad del flujo en cualquier punto  $\xi$ :

$$V = \overline{w'} = \pm \frac{A\xi}{\sqrt{\xi^2 + 4a^2}}.$$

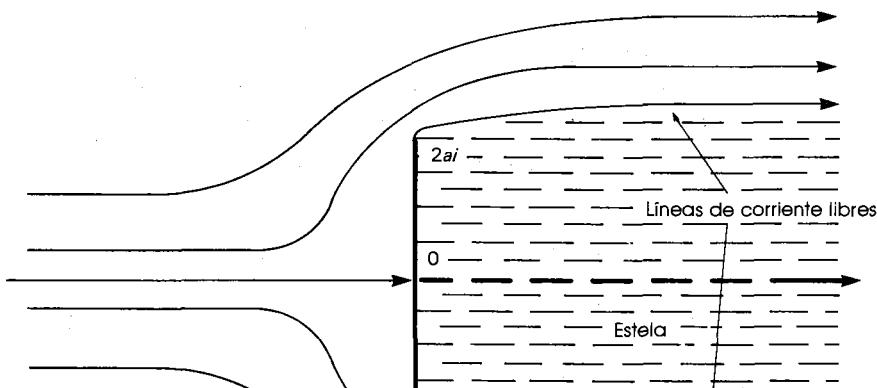
En este punto surge un problema desconcertante: la velocidad en  $\xi = \pm 2ai$  es infinita. Como las velocidades infinitas no son físicamente posibles, se busca una solución realista. Una hipótesis es la existencia de una región infinita de agua *en reposo*, llamada *estela*, detrás de la placa. La estela estará acotada por *líneas de corriente libres* a lo largo de las cuales la rapidez es constante finita (véase Figura 5.39).

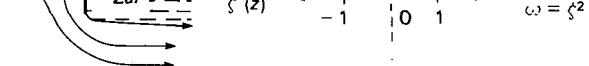
La existencia de una estela requiere un cambio en el análisis del problema, ya que el flujo tiene lugar en un polígono acotado por la placa y las líneas de corriente libres. El teorema de Riemann del mapeo establece que el polígono puede mapearse, de manera conforme, en el semiplano superior con los puntos  $\pm 2ai$  yendo a  $\pm 1$ . Las líneas de corriente en el semiplano superior pueden determinarse al considerar las líneas de corriente en el plano  $W$  de la Figura 5.40c.

Para determinar el potencial complejo  $w(z)$ , recuérdese que  $\overline{V(z)} = dw/dz$ , y considérese el mapeo

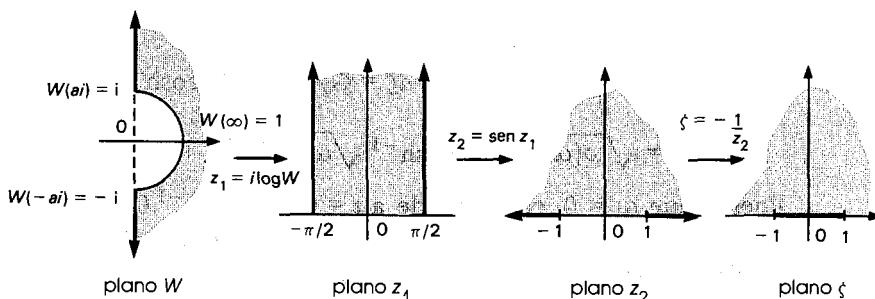
$$W(z) = \frac{A}{\overline{V(z)}} = \frac{A}{w'(z)}.$$

A lo largo de la placa, la velocidad es paralela al eje  $y$ ; por ende,  $V$  es imaginario puro. Por simetría, la rapidez será la misma en  $\pm 2ai$ , aunque la dirección será la opuesta. Finalmente, la rapidez será constante en cada línea de corrien-



(a) plano  $z$ (b) plano  $\xi$ (c) plano  $\omega$ 

$$V(\infty) = A > 0$$

**FIGURA 5.40.****FIGURA 5.41.** La hodógrafa

te libre. Así como  $V(+\infty) = A$  y las líneas de corriente libres tienden a  $\infty$ , todo punto sobre las dos líneas de corriente libres se mapeará en un punto de la mitad derecha del círculo unitario. Como  $V(0) = 0$ , el origen se mapea en  $\infty$ . Además,  $V(-1)$  es positivo y menor que  $A$ , ya que el flujo se detiene al acercarse a la placa. Así, el flujo se mapea en la región sombreada en el plano  $W$  de la Figura 5.41.

Esta región se llama **hodógrafa**. Nótese que se mapea en la mitad superior del plano  $\xi$  por medio de la transformación

$$\xi = -[\operatorname{sen}(i \log W)]^{-1} = i [\operatorname{senh}(\log W)]^{-1},$$

y los puntos  $i, -i, \infty, 1$  se mandan a  $1, -1, 0, \infty$ . Así,

$$\operatorname{senh}(\log W) = \frac{i}{\xi},$$

o, por el Ejercicio 24 de la Sección 1.9,

$$\log W = \operatorname{senh}^{-1} \left( \frac{i}{\xi} \right) = \log \left[ \frac{i}{\xi} + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}} \right].$$

Como  $W = A/w'(z)$ , la ecuación anterior implica que

$$\frac{1}{A} \cdot \frac{dw}{dz} = \frac{\xi}{i + \sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} - i}{\xi}.$$

Sin embargo,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dz} \quad \text{y} \quad \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\xi} = 2A\xi,$$

así que

$$2\xi \frac{d\xi}{dz} = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1} - i}{\xi}.$$

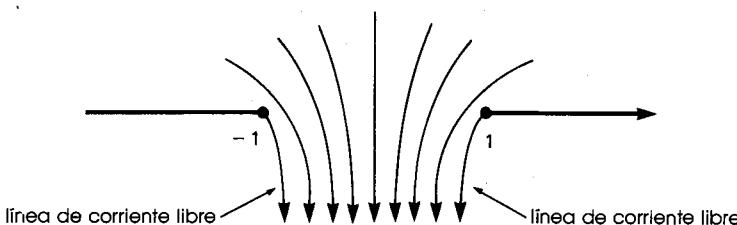
Entonces,

$$\begin{aligned} z &= 2 \int [\sqrt{\xi^2 - 1} + i] d\xi = \xi\sqrt{\xi^2 - 1} - \cosh^{-1}\xi + 2i\xi + c \\ &= \sqrt{\omega(\omega - 1)} - \cosh^{-1}\sqrt{\omega} + 2i\sqrt{\omega} + c. \end{aligned}$$

Puesto que  $\omega = 0$  corresponde a  $z = 0$ ,  $c = \cosh^{-1}0 = -i\cos^{-1}0 = -i\pi/2$ . El problema está resuelto ahora, al menos en forma implícita, ya que las líneas de corriente están dadas por las curvas  $\operatorname{Im}w = \text{constante}$ .

## EJERCICIOS

1. Considere un fluido que sale por una rendija en el fondo de un recipiente grande (véase Figura 5.42). Suponga que el fluido sale como un *chorro* acotado por líneas de corriente libres, a lo largo de las cuales la rapidez es constante, y que el flujo en el chorro es uniforme y paralelo al eje imaginario en  $\infty$ . Encuentre las líneas de corriente libres. (*Sugerencia:* Use una hodógrafa.)



encontrar mapes adicionales en [KO]. Se pueden encontrar dos pruebas diferentes del teorema de Riemann del mapeo en [V].

## **SECCIÓN 5.2**

Las transformaciones fraccionales lineales se conocen también como transformaciones lineales, transformaciones bilineales, sustituciones lineales y transformaciones de Möbius.

## **SECCIÓN 5.5**

En el Capítulo 6 se analizarán problemas que incluyen fuentes. Pueden encontrarse algunas aplicaciones detalladas en [R]. Para un texto excelente, en que se detalla el uso del análisis complejo en la hidrodinámica, véase [MT].

## **SECCIÓN 5.6**

Véase [A, págs. 227-232] para una prueba de la fórmula de Schwarz-Christoffel. Una fórmula para mapear el disco unitario en el *exterior* de un polígono se obtiene fácilmente.

## **SECCIÓN 5.8**

Se puede encontrar una argumentación cuidadosa de estelas y chorros en [MT].



# VALORES EN LA FRONTERA Y VALORES INICIALES

## 6.1 FUNCIONES ARMÓNICAS

La ecuación de Laplace  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  es de fundamental importancia en Física y surge en conexión con el flujo de calor y de fluidos, así como con los campos gravitacionales y electrostáticos. Por ejemplo, la temperatura  $u$  en un flujo de calor es la parte real de una función analítica  $w = u + iv$ . Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene formalmente que

$$u_{xx} = (u_x)_x = (v_y)_x = (v_x)_y = (-u_y)_y = -u_{yy}$$

donde la ecuación de Laplace se cumple para  $u$ . De la misma forma, se cumple para  $v$ .

Cualquier función real  $u(x, y)$  con segundas derivadas parciales continuas, que satisface la ecuación de Laplace en una región  $G$ , se denomina armónica en  $G$ .

### EJEMPLO 1

Muéstrese que la función  $u(x, y) = x^2 - y^2$  es armónica en  $\mathbb{C}$ .

**SOLUCIÓN:** La función  $u$  tiene primera y segunda parciales continuas:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x, & u_y &= -2y \\ u_{xx} &= 2, & u_{xy} &= u_{yx} = 0, & u_{yy} &= -2. \end{aligned}$$

Además,  $u$  satisface la ecuación de Laplace, puesto que

$$u_{xx} + u_{yy} = 2 - 2 = 0.$$

Así que  $u$  es armónica en  $\mathbb{C}$ . Obsérvese que  $u = \operatorname{Re}(z^2)$ .

Las funciones armónicas están íntimamente ligadas a las funciones analíticas.

### TEOREMA

(i) Sea  $f(z) = u(z) + iv(z)$  analítica en la región  $G$ . Entonces las dos funciones reales  $u(z)$  y  $v(z)$  son armónicas en  $G$ .

(ii) Sea  $u(z)$  una función real armónica en una región  $G$  simplemente conexa. Entonces la integral de línea

$$v(z) = \int_{\gamma} u_x \, dy - u_y \, dx,$$

es armónica en  $G$ , y la función  $f(z) = u(z) + iv(z)$  es analítica en  $G$ ;  $\gamma$  representa cualquier arco spp en  $G$  que une  $z_0$  a  $z$ . A  $v(z)$  se le llama armónica conjugada de  $u(z)$ .

**PRUEBA:** (i) Si  $f = u + iv$  es analítica en  $G$ , también lo es

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y.$$

Así, las segundas parciales de  $u$  y  $v$  son continuas y, del cálculo,  $u_{xy} = u_{yx}$  y  $v_{xy} = v_{yx}$ . Si se aplican las ecuaciones de Cauchy-Riemann, se tiene

$$u_{xx} = (v_y)_x = (v_x)_y = -u_{yy} \quad \text{y} \quad v_{xx} = (-u_y)_x = -(u_x)_y = -v_{yy},$$

lo cual implica que  $u$  y  $v$  satisfacen, ambas, las ecuación de Laplace.

(ii) La función  $F(z) = u_x - iv_y$  tiene primeras parciales continuas que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en  $G$ ,

$$(u_x)_x = (-u_y)_y \quad \text{y} \quad (u_x)_y = -(-u_y)_x,$$

ya que  $u$  es armónica. Estas son condiciones suficientes para la analiticidad de  $F(z)$  en  $G$ . Como  $G$  es simplemente conexa, se puede utilizar el teorema fundamental para definir una antiderivada analítica de  $F(z)$ :

$$f(z) = \int F(z) \, dz = \int (u_x - iv_y) \, (dx + idy)$$

$$v(z) = \int u_x \, dy - u_y \, dx,$$

definida hasta una constante arbitraria, es armónica en  $G$ . ■

En los ejemplos siguientes se mostrará el uso de la integral anterior para determinar armónicas conjugadas.

### EJEMPLO 2

Encuéntrese la armónica conjugada en  $\mathbb{C}$  de la función

$$u = x^2 - y^2.$$

**SOLUCIÓN:** En el Ejemplo 1 se probó que la función  $u$  es armónica en  $\mathbb{C}$ . Como  $u_x = 2x$  y  $u_y = -2y$ , se tiene

$$\begin{aligned} v(z) &= \int u_x \, dy - u_y \, dx = \int 2x \, dy + 2y \, dx \\ &= 2 \int d(xy) = 2xy + c. \end{aligned}$$

Nótese que  $v$  es armónica en  $\mathbb{C}$ , puesto que  $v_{xx} = v_{yy} = 0$ , y que

$$f(z) = u + iv = (x^2 - y^2) + 2ixy + c = z^2 + c$$

es entera.

### EJEMPLO 3

¿Hay alguna función analítica  $f = u + iv$  para la cual

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2} ?$$

**SOLUCIÓN:**  $u$  no está definida en el origen; así que se buscará una armónica conjugada de  $u$  en algún subconjunto simplemente conexo de  $\mathbb{C} - \{0\}$ . Primero se prueba que  $u$  es armónica:

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

y

$$u_{xx} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3}, \quad u_{yy} = -u_{xx}.$$

De ahí que una armónica conjugada esté dada por

$$\begin{aligned} v(z) &= \int u_x \, dy - u_y \, dx = \int \frac{(y^2 - x^2) \, dy + 2xy \, dx}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \int d \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Nótese que la función

$$f(z) = u + iv = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}$$

es analítica para  $z \neq 0$ .

La correspondencia entre funciones analíticas y armónicas proporciona muchas propiedades importantes de estas últimas.

### PRINCIPIO DEL MÁXIMO

Si  $u(z)$  es armónica y no es constante en una región  $G$  simplemente conexa, entonces  $u(z)$  no tiene máximo o mínimo en  $G$ .

**PRUEBA:** Al construir una función armónica conjugada  $v(z)$ , se tiene que  $f = u + iv$  es analítica en  $G$ . En forma semejante,

$$F(z) = e^{f(z)} = e^{u+iv}$$

es analítica en  $G$ , y  $|F(z)| = e^{u(z)}$ . Como  $F(z)$  no se anula en  $G$ , al aplicar los principios del máximo y del mínimo para funciones analíticas a  $F$ , se sigue que  $e^u$  no tiene máximo o mínimo en  $G$ . Como la función real  $e^u$  es una función creciente de  $u$ , la prueba es completa. ■

### TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si  $u(z)$  es armónica en  $|z - \xi| < R$ , entonces

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi + re^{i\theta}) \, d\theta, \quad 0 < r < R.$$

$$4. \varphi(x, y) = e^{-x} \operatorname{sen}(2xy)$$

Determine si existen funciones analíticas  $f(z) = u + iv$  que satisfagan las condiciones dadas en los Ejercicios 5-7. En caso afirmativo, indique el dominio de definición.

$$5. u = \operatorname{sen} x \cosh y$$

$$6. u = \log(x^2 + y^2)$$

$$7. u = e^{y/x}$$

Encuentre las conjugadas de las funciones armónicas dadas en los Ejercicios 8-11.

$$8. u = x^2 - (y - 1)^2$$

$$9. u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$$

$$10. u = \tan^{-1} \frac{2xy}{x^2 - y^2}$$

$$11. u = \frac{x(x - 1) + y^2}{(x - 1)^2 + y^2}$$

12. Si  $u$  y  $v$  son funciones armónicas, muestre que  $au + bv$  es también armónica, donde  $a$  y  $b$  son constantes reales. Muestre que  $uv$  es armónica si  $u$  y  $v$  son funciones armónicas conjugadas.
13. Pruebe que  $\log |f(z)|$  es armónica siempre y cuando  $f(z)$  sea analítica y diferente de cero.
14. Muestre que el principio del máximo se cumple para regiones múltiplemente conexas.
15. Pruebe que  $\int_0^\pi \log \operatorname{sen} \theta \, d\theta = -\pi \log 2$ . (*Sugerencia:* Aplique el teorema del valor medio a  $\log |1 + z|$  en  $|z| \leq r < 1$ , y haga  $r \rightarrow 1^-$ .)

## 6.2 EL PROBLEMA DE DIRICHLET

Las aplicaciones al flujo de fluidos, flujo de calor y electrostática que se analizaron en el Capítulo 5, muestran que la solución en cada una está dada por la función analítica llamada potencial complejo. Las partes real e imaginaria del potencial complejo tienen significado físico como líneas de corriente, líneas de fuerza, temperaturas iguales, etcétera. De acuerdo con la Sección 6.1, las partes real e imaginaria de una función analítica son funciones armónicas que satisfacen la ecuación de Laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Por ende, estas aplicaciones se reducen a encontrar una función armónica en una región  $G$  dada y que tome ciertos *valores* predeterminados en la *frontera* de la región  $G$ . A una situación tal se le llama problema con valores en la frontera. Más específicamente, tenemos lo siguiente.

### EL PROBLEMA DE DIRICHLET

Dada una región  $G$  arbitraria, ¿hay una función armónica en  $G$  que tenga valores predeterminados en la frontera de  $G$ ?

### EJEMPLO 1

Encuéntrese una función que sea armónica en el primer cuadrante y que tenga valores frontera 0 en el eje real y 100 en el eje imaginario.

**SOLUCIÓN:** La función

$$w = \frac{200}{\pi} \operatorname{Log} z$$

mapea, de manera conforme, el primer cuadrante en la franja  $0 \leq v \leq 100$ , donde  $w = u + iv$  (véase Figura 6.1). El eje  $x$  positivo se transforma en la recta  $v = 0$ , mientras que el eje  $y$  positivo se convierte en la recta  $v = 100$ . Puesto que

$$u + iv = \frac{200}{\pi} (\log |z| + i \operatorname{Arg} z),$$

la función

$$v = \frac{200}{\pi} \operatorname{Arg} z$$

es armónica en el primer cuadrante y satisface las condiciones de frontera requeridas.

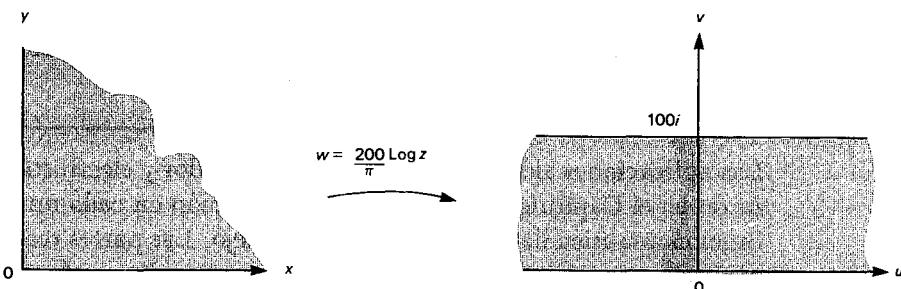


FIGURA 6.1. Solución gráfica de un problema de Dirichlet

**FIGURA 6.2.**

El problema de Dirichlet siempre tiene solución para una región  $G$  ( $\neq \mathbb{C}$ ) simplemente conexa. Para obtener una expresión explícita de la solución  $u$  en cualquier punto  $z_0$  de  $G$ , sea  $g$  la función que mapea, de manera conforme, a  $G$  en el disco unitario  $|\xi| < 1$  con  $g(z_0) = 0$ . (La existencia de tal función está asegurada por el teorema de Riemann del mapeo.) Por simplicidad, supóngase que  $g$  es analítica en un conjunto abierto que contiene a  $G$  y su frontera. La función compuesta  $u \circ g^{-1}$  (véase Figura 6.2) es armónica en  $|\xi| \leq 1$ , así que —por el teorema del valor medio para funciones armónicas (véase Sección 6.1)— se puede representar a  $u \circ g^{-1}(0)$  como el promedio integral de los valores de  $u \circ g^{-1}$  en  $|\xi| = 1$  si se escribe

$$u \circ g^{-1}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \circ g^{-1}(e^{i\theta}) d\theta.$$

Con  $\xi = e^{i\theta}$  se obtiene

$$u \circ g^{-1}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} u \circ g^{-1}(\xi) \frac{d\xi}{\xi},$$

y como  $\xi = g(z)$ , la integral se convierte en

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} u(z) \frac{g'(z)}{g(z)} dz. \quad (1)$$

Esta ecuación indica que el valor de una función armónica  $u$ , en puntos interiores de la región  $G$ , puede determinarse como una integral de los valores frontera de  $u$ . Nótese la similitud de esta situación con la fórmula integral de Cauchy.

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de esta integral.

## EJEMPLO 2

Para resolver el problema de Dirichlet en  $G = \{z: |z| < R\}$ , adviértase que

$$g(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$

mapea, de manera conforme, a  $G$  en el disco unitario abierto con  $g(z_0) = 0$ . Para  $|z| = R$ ,

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{R^2 - |z_0|^2}{(z - z_0)(R^2 - \bar{z}_0 z)} = \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z|z - z_0|^2},$$

así que la ecuación (1) se convierte en

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} u(z) \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{|z - z_0|^2} \frac{dz}{z}.$$

Si se hace  $z = Re^{i\phi}$  y  $z_0 = re^{i\theta}$  se obtiene la **fórmula integral de Poisson** para el disco  $|z| < R$ :

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\phi}) \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta)} d\phi, \quad (2)$$

porque

$$\begin{aligned} |z - z_0|^2 &= |z|^2 + |z_0|^2 - (\bar{z}_0 z + z_0 \bar{z}) \\ &= R^2 + r^2 - Rr (e^{i(\phi-\theta)} + e^{-i(\phi-\theta)}). \end{aligned}$$

Como  $z_0 = re^{i\theta}$  es arbitrario, la ecuación (2) es válida en todos los puntos  $|z_0| < R$ .

### EJEMPLO 3

Sea  $G$  el semiplano derecho, y sea  $z_0$  cualquier punto interior de  $G$ . Entonces, la función

$$g(z) = (z - z_0)/(z + \bar{z}_0)$$

mapea, de manera conforme, a  $G$  en el círculo unitario con  $g(z_0) = 0$ .

Como

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{2x_0}{z^2 - 2iy_0 z - |z_0|^2},$$

la fórmula integral de Poisson para el semiplano derecho es

$$u(z_0) = \frac{x_0}{\pi i} \int_{\partial G} \frac{u(z) dz}{z^2 - 2iy_0 z - |z_0|^2},$$

y con  $z = it$ , se tiene

$$u(z_0) = \frac{-x_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(it) dt}{(t - y_0) + x_0}.$$

es armónica en  $|z| < R$  y

$$\lim_{z \rightarrow Re^{i\phi}} u(z) = U(\phi),$$

en todos los puntos de continuidad de  $U(\phi)$ .

**PRUEBA:** Obsérvese que

$$\operatorname{Re} \left( \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} \right) = \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2}. \quad (3)$$

Si se sustituye el lado izquierdo de la ecuación (3) en la integral, podemos efectuar derivaciones parciales repetidamente con respecto a  $x$  y  $y$  bajo el signo de la integral, ya que el integrando resultante es continuo en  $|z| \leq r < R$ . Entonces

$$\Delta u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) \Delta \operatorname{Re} \left( \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} \right) d\phi = 0, \quad |z| < R,$$

puesto que la parte real de la función analítica  $(Re^{i\phi} + z)/(Re^{i\phi} - z)$  es armónica. De ahí que  $u(z)$  es armónica en  $|z| < R$ .

Si  $\xi = Re^{i\phi}$ , nótese que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} \right) d\phi &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\xi + z}{\xi - z} \frac{d\xi}{\xi} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \left( \frac{2}{\xi - z} - \frac{1}{\xi} \right) d\xi \right] = 1. \end{aligned}$$

Cuando  $U(\phi)$  es continua en  $\phi = \alpha$  dado  $\epsilon > 0$ , hay un  $\delta > 0$  tal que  $|U(\phi) - U(\alpha)| < \epsilon$  siempre que  $|\phi - \alpha| < \delta$  (en el supuesto de que  $U$  tiene periodo  $2\pi$ ). Así,

$$\begin{aligned} |u(z) - U(\alpha)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (U(\phi) - U(\alpha)) \operatorname{Re} \left( \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} \right) d\phi \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |U(\phi) - U(\alpha)| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} d\phi \\ &\leq \epsilon + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |\phi - \alpha| \leq \pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\phi} - z|^2} |U(\phi) - U(\alpha)| d\phi. \end{aligned}$$

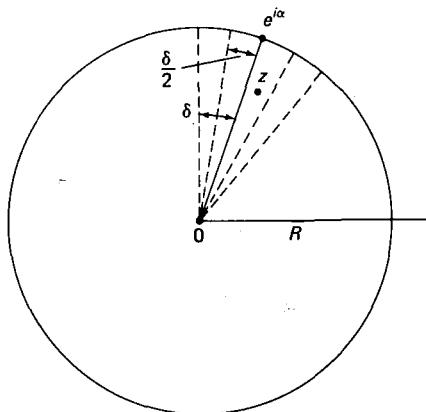


FIGURA 6.3

Ahora, si  $|\arg z - \alpha| < \delta/2$  y  $|\phi - \alpha| \geq \delta$ , entonces (véase Figura 6.3)

$$|Re^{i\phi} - z| \geq R \sin \frac{\delta}{2},$$

por lo tanto

$$|u(z) - U(\alpha)| \leq \epsilon + \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi R^2 \sin^2 \frac{\delta}{2}} \int_0^{2\pi} |U(\phi) - U(\alpha)| d\phi \rightarrow \epsilon,$$

cuando  $z \rightarrow Re^{i\alpha}$ . Como  $\epsilon$  es arbitrario, la prueba está completa. ■

El ejemplo siguiente contrasta el uso de mapeos conformes con la fórmula integral de Poisson para encontrar soluciones al problema de Dirichlet.

#### EJEMPLO 4

Encuéntrese una función  $u$ , armónica en el disco unitario, que tenga el valor en la frontera 1 en el semiplano derecho y 0 en el semiplano izquierdo.

**SOLUCIÓN:** La transformación fraccional lineal

$$\xi = i \left( \frac{i-z}{i+z} \right)$$

transforma los puntos 0,  $i$ ,  $-i$ , 1 en  $i$ , 0,  $\infty$ , -1, así que mapea de manera

plano z

plano  $\zeta$ 

plano w

**FIGURA 6.4**

Para resolver el problema de Dirichlet, por la fórmula integral de Poisson, nótese que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\phi} - z|^2} d\phi,$$

ya que  $U(\phi) = 0$  en el semiplano izquierdo. Si  $z = re^{i\theta}$ ,

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1 - r^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d(\phi - \theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\phi - \theta)} \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{1+r}{1-r} \tan \frac{\phi - \theta}{2} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \tan \pi u(z) &= \frac{\frac{1+r}{1-r} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) + \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right]}{1 - \left( \frac{1+r}{1-r} \right)^2 \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \\ &= \frac{1 - r^2}{2r} \left[ \frac{\tan^2 \frac{\theta}{2} + 1}{\tan^2 \frac{\theta}{2} - 1} \right] = \frac{1 - r^2}{-2r \cos \theta}. \end{aligned}$$

Para comprobar que estas respuestas son equivalentes, adviértase que

$$\operatorname{Arg} \left[ i \left( \frac{i-z}{i+z} \right) \right] = \operatorname{Arg} \left[ \frac{-(z+\bar{z}) + i(1-|z|^2)}{|i+z|^2} \right]$$

y, con la identidad  $\operatorname{Arg}(x+iy) = \tan^{-1}(y/x)$ , en el semiplano de recho,

$$\operatorname{Arg} \left[ i \left( \frac{i-z}{i+z} \right) \right] = \tan^{-1} \left[ \frac{1-|z|^2}{-(z+\bar{z})} \right] = \tan^{-1} \left( \frac{1-r^2}{-2r \cos \theta} \right).$$

## EJERCICIOS

1. Sea  $u(z)$  armónica en  $|z - \xi| < R$ . Pruebe el teorema del valor medio del área

$$u(\xi) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{|z-\xi| < R} u(z) r dr d\theta.$$

(*Sugerencia:* Use el teorema del valor medio para funciones armónicas.)

2. Use el teorema del valor medio del área para probar el principio del máximo para funciones armónicas.  
 3. Si  $u$  es armónica en una región  $G$  simplemente conexa, muestre que  $\text{grad } u$  es analítica. Entonces, utilizando el desarrollo de la Sección 5.5, pruebe que

$$\int_{\gamma} u_n ds = 0,$$

donde  $\gamma$  es cualquier curva cerrada simple en  $G$ , y  $u_n$  es la derivada direccional de  $u$  en la dirección de la normal exterior.

4. Muestre que la fórmula integral de Poisson para el semiplano superior  $y > 0$  es

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t) dt}{(t - x)^2 + y^2}, \quad z = x + iy.$$

5. Pruebe que la fórmula integral de Poisson para el primer cuadrante es

$$u(z) = \frac{4xy}{\pi} \left[ \int_0^{\infty} \frac{tu(t) dt}{t^4 - 2t^2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2} \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{tu(it) dt}{t^4 + 2t^2(x^2 - y^2) + (x^2 + y^2)^2} \right].$$

6. Encuentre la temperatura en cualquier punto  $z$  del semiplano superior, si la temperatura (en grados) en el eje real está dada por

$$u(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| \geq 1. \end{cases}$$

7. Pruebe que cualquier solución del problema de Dirichlet, continua en la cerradura de una región  $G$  simplemente conexa, debe ser única. (*Sugerencia:* Use el principio del máximo.)  
 8. Suponga que  $u(z)$  y  $v(z)$  son armónicas en una región  $G$ , continuas en su cerradura, y que satisfacen  $u(z) \leq v(z)$  en la frontera de  $G$ . Muestre que  $u(z) \leq v(z)$  para todo  $z$  en  $G$ .  
 9. Sea  $G$  la región  $0 < |z| < 1$ . Muestre que no hay una función  $u(z)$ , armónica en  $G$ , con valores en la frontera  $u(e^{i\theta}) = 0$ ,  $u(0) = a > 0$ . (*Sugerencia:* Aplique el Ejercicio 8 a las funciones

12. Muestre que la fórmula de Schwarz puede reescribirse en la forma

$$f(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \overline{f(0)}.$$

(Sugerencia: Aplique el teorema del valor medio a  $u(0) = iv(0) + \overline{f(0)}$ .)

13. Sea  $U(\phi)$  continua para  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  excepto por un número finito de saltos. Pruebe que

$$g(z) = \frac{z}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{U(\phi)}{Re^{i\phi} - z} d\phi$$

es analítica en  $|z| < R$ . (Sugerencia: Reescriba la fórmula de Schwarz.)

14. Muestre, por el método del teorema de Poisson, que

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt, \quad z = x + iy,$$

es una función armónica en el semiplano superior, aun si  $u(t)$  es discontinua en un número finito de valores de  $t$ .

15. Use el Ejercicio 14 para encontrar una función  $u(z)$  que sea armónica en el semiplano superior y que satisfaga los valores en la frontera

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1, \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1. \end{cases}$$

16. Repita el Ejercicio 15 para los valores en la frontera

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \\ 1-t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{en los otros puntos.} \end{cases}$$

---

## 6.3 APLICACIONES

---

En las Secciones 5.5 y 5.7 se analizaron tres ejemplos análogos de campos vectoriales en estado estacionario que se presentan en la naturaleza: flujo de fluidos, flujo de calor y campo electrostático. Los campos vectoriales, que se supusieron bidimensionales e irrotacionales, se examinaron dentro de una región  $G$  que no contiene fuentes ni sumideros. En esta sección, se ampliarán esos problemas para incluir fuentes y vórtices en la región  $G$ . La teoría se desarrollará para el flujo de fluidos, y las analogías con los otros dos campos se presentarán en la Tabla 6.1 al final de la sección.

Recuérdese que el vector velocidad  $V(z)$  del campo es igual a  $\overline{w'(z)}$ , donde la función analítica  $w(z)$  es el potencial complejo del flujo. Así, la función

potencial  $u$  y la función corriente  $v$  son armónicas conjugadas, y el problema de encontrar la línea de corriente se reduce al problema de Dirichlet. Obsérvese, por el principio del máximo, que si una línea equipotencial forma una curva cerrada  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  encierra una singularidad de  $u(z)$ , o bien  $u(z)$  es constante en  $G$ . Por supuesto, no hay líneas de corriente cerradas, ya que el flujo es irrotacional. Además, ni las líneas de corriente ni las equipotenciales empiezan o terminan en un punto interior  $z_0$  de  $G$ , porque de otra manera un disco suficientemente pequeño, centrado en  $z_0$  estará contenido en  $G$  y su frontera corta la línea de corriente  $v(z) = k$  en un solo punto. Por continuidad, los puntos restantes de la frontera satisfarían que  $v(z) > k$  o  $v(z) < k$ , lo que violaría el teorema del valor medio. Líneas de corrientes diferentes pueden cortarse sólo en los puntos de la frontera de  $G$  (por ejemplo, en las fuentes) o en el infinito. Esto se muestra con un problema de flujo de calor.

### EJEMPLO 1

Sea la placa  $G$  un disco de radio  $R$  con temperatura  $1^\circ$  en la frontera que se encuentra en el semiplano superior y  $0^\circ$  en la del semiplano inferior. Encuéntrese la temperatura en todos los puntos de  $G$  y describanse las isotermas.

**SOLUCIÓN:** Con la fórmula integral de Poisson, se tiene para  $z = re^{i\theta}$ ,  $r < R$ ,

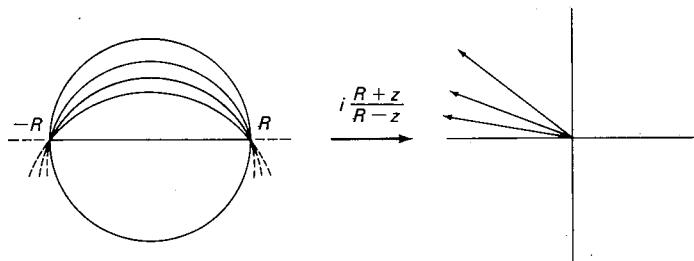
$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \operatorname{Re} \left( \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} \right) d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta)} d(\phi - \theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left( \frac{R+r}{R-r} \tan \frac{\phi-\theta}{2} \right) \Big|_0^\pi. \end{aligned}$$

Así,

$$\tan \pi u(z) = \frac{\frac{R+r}{R-r} \left( \tan \frac{\pi-\theta}{2} + \tan \frac{\theta}{2} \right)}{1 - \left( \frac{R+r}{R-r} \right)^2 \tan \frac{\pi-\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2}$$

$$\operatorname{Arg} i \frac{R+z}{R-z} = \text{constante},$$

e  $i(R+z)/(R-z)$  mapea a  $|z| < R$  en el semiplano superior, así que las isotermas corresponden a los arcos de la familia de círculos que pasan a través de los puntos  $\pm R$  que pertenecen a  $|z| < R$  (véase Figura 6.5).



**FIGURA 6.5.** Familia de círculos a través de  $\pm R$

Supóngase que una fuente (o sumidero) puntual se localiza en el origen. Entonces, el flujo  $Q$  a través de cualquier curva de Jordan alrededor del origen es una constante diferente de cero, y si  $\gamma$  es el círculo  $|z| = r$ , la componente normal  $V_n$  de la velocidad es constante en cada dirección, ya que las líneas de corriente son radiales en el origen. Así,

$$Q = \int V_n \, ds = V_n \int_0^{2\pi} r \, d\theta = 2\pi r V_n$$

y

$$V(z) = V_n \cdot \frac{z}{|z|} = \frac{Q}{2\pi} \frac{z}{|z|^2},$$

ya que  $z/|z|$  es el vector unitario normal. Como  $V(z) = \overline{w'(z)}$ ,

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z) + c, \quad c \text{ complejo},$$

por tanto, la función potencial y la función corriente están dadas por

$$u(z) = \frac{Q}{2\pi} \log |z|, \quad v(z) = \frac{Q}{2\pi} \arg z,$$

respectivamente, hasta una constante real arbitraria. Nótese que  $v(z)$  es multivaluada, y que ambas funciones son armónicas en cualquier región simplemente conexa que no contenga al origen. Si  $Q > 0$ , se tiene una fuente de potencia  $Q$  en  $z = 0$ , y si  $Q < 0$ , se tendrá un sumidero.

Cuando la fuente no está en el origen, sino en el punto  $z_0$ , el potencial complejo es

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log(z - z_0) + c. \quad (1)$$

Por otra parte, el campo vectorial puede no ser irrotacional. Esto puede ocurrir, por ejemplo, debido a la acción de un rotor cilíndrico, de tal forma que en cualquier plano perpendicular a su eje, las líneas de corriente sean círculos concéntricos centrados en el rotor. Tal campo se denomina **campo plano de vórtices**.

Si un **vórtice puntual** se localiza en el origen, la circulación  $\Gamma$  a lo largo de cualquier curva  $\gamma$  de Jordan es una constante no nula ( $\Gamma > 0$  cuando el flujo está en contra de las manecillas del reloj). A lo largo de un círculo  $|z| = r$ , la componente tangencial de la velocidad  $V_s$  es constante, así que

$$\Gamma = \int_{\gamma} V_s \, ds = 2\pi r V_s$$

y

$$V(z) = V_s \cdot \frac{iz}{|z|} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{z}{|z|^2},$$

ya que  $iz/|z|$  es el vector tangencial unitario. Entonces, excepto por una constante arbitraria,

$$w(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \log z = \frac{\Gamma}{2\pi} \arg z + i \frac{\Gamma}{2\pi} \log \frac{1}{|z|} \quad (2)$$

es el potencial complejo de este campo. Como también una fuente puntual puede ser vórtice, se combinan las ecuaciones (1) y (2) (en  $z_0$ ), para obtener

$$w(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z - z_0) + c \quad (3)$$

como el potencial complejo de una **fuente vórtice** localizada en  $z_0$  con *intensidad*  $\Gamma$  y *potencia*  $Q$ . Para obtener el potencial complejo de un sistema de fuentes vórtice  $\Gamma_1 + iQ_1, \dots, \Gamma_k + iQ_k$  localizadas en  $z_1, \dots, z_k$  se suman los potenciales complejos individuales

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^k (\Gamma_j + iQ_j) \log(z - z_j), \quad (4)$$

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \log(z - z_1)(z - z_2).$$

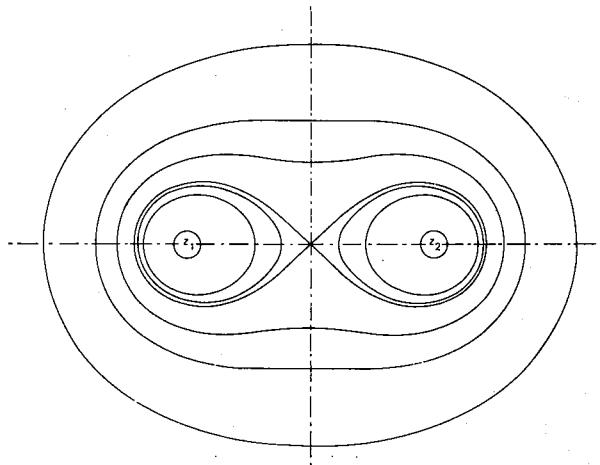
Las líneas equipotenciales, que satisfacen

$$|z - z_1| |z - z_2| = \text{constante},$$

se conocen como **lemniscatas**, y se muestran en la Figura 6.6. La lemniscata, con la forma de un  $\infty$ , está dada por la ecuación

$$|z - z_1| |z - z_2| = \frac{|z_1 - z_2|^2}{4}.$$

Nótese que  $(z_1 + z_2)/2$  es un punto de estancamiento.



**FIGURA 6.6.** Lemniscatas

### EJEMPLO 3

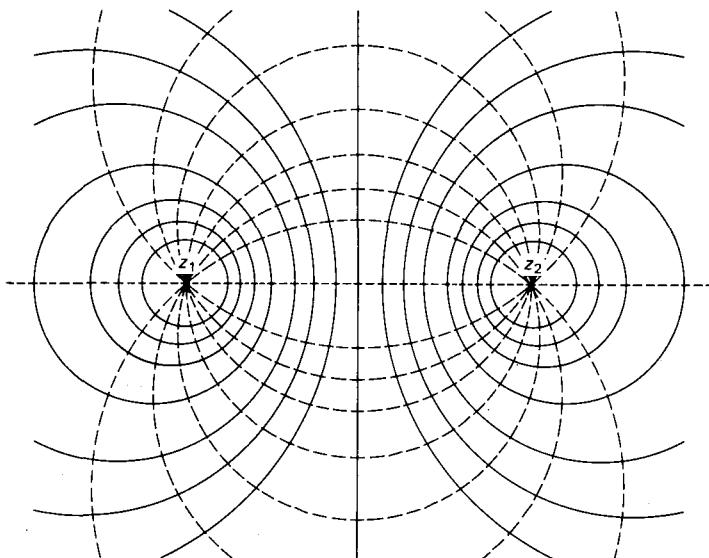
El sistema que consiste en una fuente y un sumidero de potencias  $Q$  y  $-Q$  situados en  $z_1$  y  $z_2$ , respectivamente, tiene un potencial complejo dado por la ecuación

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Las líneas equipotenciales satisfacen

$$\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = \text{constante}$$

y forman los círculos de Apolonio que se indican como líneas continuas en la Figura 6.7. Las líneas de corriente son la familia de círculos que pasan por  $z_1$  y  $z_2$ .



**FIGURA 6.7.** Círculos de Apolonio

Sea  $z_1 = -h$ ,  $z_2 = 0$ . Entonces

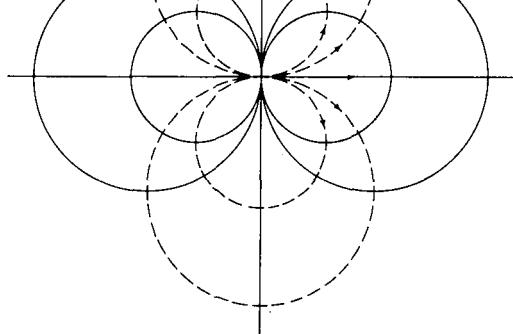
$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{z+h}{z} = \frac{p}{2\pi} \log \left(1 + \frac{h}{z}\right)^{1/h}, \quad p = Qh.$$

Si ahora se permite que la fuente se acerque al sumidero, aumentando  $Q$  simultáneamente de tal forma que  $p$  permanezca constante, se obtiene en el límite un doblete puntual de momento  $p$  localizado en 0, cuyas líneas de corriente están dirigidas a lo largo del eje real positivo. Su potencial complejo está dado por

$$w(z) = \frac{p}{2\pi} \lim_{h \rightarrow 0} \log \left(1 + \frac{h}{z}\right)^{1/h} = \frac{p}{2\pi} \log e^{1/z} = \frac{p}{2\pi z}, \quad (6)$$

por lo que

$$u = \frac{p}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-p}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}.$$



**FIGURA 6.8.** Doblete puntual (dipolo) en el origen

El procedimiento anterior también se cumple para  $z_1$  complejo, pero entonces el momento del doblete es complejo con argumento  $\pi + \arg z_1$  y coincide con la dirección de las líneas de corriente en el origen.

#### EJEMPLO 4

Considérese el problema de conocer todas las líneas de corriente en el exterior del disco unitario de tal forma que el vector velocidad tienda a 1 en  $\infty$ .

Como se mostró en el Ejemplo 3, Sección 5.5, si el flujo es simétrico con respecto al eje  $x$ , el potencial complejo estará dado por

$$w_1(z) = z + \frac{1}{z},$$

ya que  $V_1(z) = 1 - (1/\bar{z}^2)$ . Pero al quitar la suposición de simetría, el flujo podría también estar sujeto a un flujo de vórtice, centrado en el origen, de intensidad  $\Gamma$ , con potencial complejo

$$w_2(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z,$$

pues su vector velocidad correspondiente

$$V_2(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi\bar{z}}$$

se anula en  $\infty$ . Por superposición, la ecuación del potencial complejo está dada por

$$w(z) = z + \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z.$$

La magnitud de la velocidad satisface

$$|\bar{V(z)}| = |w'(z)| = \left| 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i z} \right|,$$

que se anula en los ceros  $z_s$  (puntos de estancamiento) de la ecuación

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i} z - 1 = 0.$$

Esto es,

$$z_s = \frac{\Gamma i \pm \sqrt{16\pi^2 - \Gamma^2}}{4\pi}. \quad (7)$$

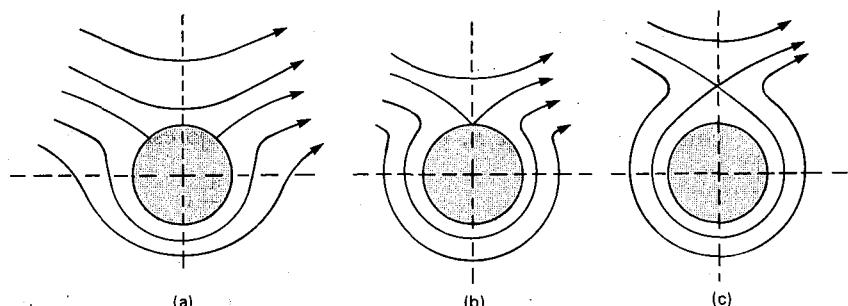
Si  $|\Gamma| < 4\pi$ , entonces  $|z_s| = \sqrt{\Gamma^2 + 16\pi^2 - \Gamma^2}/4\pi = 1$  y

$$\tan \operatorname{Arg} z_s = \frac{\pm \Gamma}{\sqrt{16\pi^2 - \Gamma^2}},$$

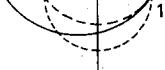
y si  $|\Gamma| > 4\pi$ , los puntos de estancamiento están sobre el eje imaginario y satisfacen

$$|z_s| = \frac{\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - 16\pi^2}}{4\pi}.$$

Así que solamente uno de los puntos de estancamiento está fuera del círculo unitario. Se muestra un bosquejo de las líneas de corriente en la Figura 6.9.



**FIGURA 6.9.** Líneas de corriente del exterior de un disco con un vórtice puntual en su centro (a)  $0 < \Gamma < 4\pi$ ; (b)  $\Gamma = 4\pi$ ; (c)  $\Gamma > 4\pi$



(a)



(b)

**FIGURA 6.10.** Perfil de Joukowsky: (a) plano  $\zeta$ ; (b) plano  $z$

perfíles se aproximen a las secciones de las alas de un avión, y evaluar la elevación del ala.

Se puede incorporar la información de esta sección en la analogía entre flujo de fluidos, flujo de calor y electrostática (véase Tabla 6.1).

**TABLA 6.1** Campos vectoriales en estado estacionario

Flujo de fluidos	Flujo de calor	Campo electrostático
$w(z) = \frac{\Gamma + iQ}{2\pi i} \log(z - z_0)$ <i>Fuente vórtice de potencia <math>Q</math> e intensidad <math>\Gamma</math> en <math>z_0</math></i>	$w(z) = \frac{Q}{2\pi k} \log \frac{1}{z - z_0}$ <i>Fuente de potencia <math>Q</math> en <math>z_0</math></i>	$iw(z) = \frac{Q}{2\pi} i \log \frac{1}{z - z_0}$ <i>Carga de magnitud <math>Q/2\pi</math> en <math>z_0</math></i>
$w(z) = \frac{p}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$ <i>Doblete de momento <math>p</math> en <math>z_0</math></i>	$w(z) = \frac{-p}{2\pi k} \frac{1}{z - z_0}$ <i>Doblete de momento <math>p</math> en <math>z_0</math></i>	$iw(z) = \frac{-ip}{2\pi} \frac{1}{z - z_0}$ <i>Dipolo de momento <math>p/2\pi</math> en <math>z_0</math></i>

## EJERCICIOS

- Encuentre la función potencial para el campo electrostático plano en  $|z| < 1$  cuyos bordes son electrodos representados por los semicírculos  $e^{i\theta}$ ,  $|\theta| < \pi/2$ ,  $e^{i\theta}$ ,  $|\theta - \pi| < \pi/2$ , con potenciales  $u_0$  y  $u_1$ , respectivamente.
- Encuentre la temperatura de una placa  $Q$  con la forma del semiplano superior, dadas las temperaturas en la frontera de  $100^\circ$  en  $|x| > 1$  y  $0^\circ$  en  $|x| < 1$ .
- Encuentre el potencial complejo y las líneas de corriente, para el flujo plano de un fluido en el semiplano superior, cuando hay una fuente de potencia  $Q$  en  $i$  y un sumidero de igual potencia en  $0$ .
- ¿Cuál es el potencial complejo para el flujo plano de un fluido con un sumidero de potencia  $Q$  en  $-1$  y una fuente vórtice de potencia  $Q$  e intensidad  $\Gamma$  en  $0$ ?

En los Ejercicios 5-8, a partir del potencial complejo dado para el flujo de un fluido, construya las líneas equipotenciales y las líneas de corriente, y encuentre el vector velo-

ciudad  $V$ , los puntos de estancamiento, la potencia y la intensidad de las fuentes vorticosas, los momentos de los dobletes y el comportamiento del flujo en  $\infty$ .

$$5. w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

$$6. w(z) = \log \left( 1 + \frac{4}{z^2} \right)$$

$$7. w(z) = \log \left( z^2 - \frac{1}{z^2} \right)$$

$$8. w(z) = az + \frac{Q}{2\pi} \log \frac{1}{z}, \quad a, Q > 0$$

9. Un *multiplete* puntual (o multipolo) es una generalización de un doblete (dipolo), que se obtiene al tomar un sumidero de potencia  $Q$  en el origen junto con  $n$  fuentes de potencia  $Q/n$  distribuidas simétricamente en un círculo de radio  $r$ , y que mantiene  $Qr$  fijo cuando  $r$  tiende a 0. Muestre que su potencial complejo está dado por

$$w(z) = \frac{-p}{2\pi n} \frac{1}{z^n}, \quad |p| = Qr,$$

y que las líneas de corriente están dirigidas a lo largo de los argumentos de las raíces  $n$ -ésimas de  $p$ . Se dice que tal multiplete tiene *orden*  $2n$ .

Dibuje la imagen de los círculos descritos en los Ejercicios 10 y 11, bajo el mapeo  $z = \xi + (1/\xi)$ . (Sugerencia: Muestre que

$$\frac{z-2}{z+2} = \left( \frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^2.$$

$$10. |\xi - i| = \sqrt{2}$$

$$11. |\xi + 1 - i| = \sqrt{5}$$

## 6.4 SERIES DE FOURIER

La fórmula integral de Poisson está íntimamente relacionada con la noción de una serie de Fourier. Se ha visto que si  $U(\phi)$  es continua por partes para  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , entonces la función

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) \operatorname{Re} \left( \frac{Re^{i\phi} + z}{Re^{i\phi} - z} \right) d\phi$$

$$= c_0 + 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} r^n c_n e^{in\theta} \right], \quad z = re^{i\theta}, \quad (1)$$

donde

$$R^n c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\phi) e^{-in\phi} d\phi \quad (2)$$

es el  $n$ -ésimo coeficiente de Fourier de  $U(\phi)$ .

### EJEMPLO 1

Encuéntrese una función armónica en  $z < R$  que tenga los valores en la frontera  $U(\phi) = \cos \phi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

**SOLUCIÓN:** Primero se deben calcular los coeficientes de Fourier de  $U(\phi)$ :

$$\begin{aligned} 2\pi R^n c_n &= \int_0^{2\pi} \cos \phi e^{-in\phi} d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{e^{-i(n-1)\phi} + e^{-i(n+1)\phi}}{2} d\phi \\ &= \begin{cases} -1 \left[ \frac{e^{-i(n-1)\phi}}{n-1} + \frac{e^{-i(n+1)\phi}}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0, & n \neq 1, \\ \frac{1}{2} \left[ \phi \frac{e^{-2i\phi}}{2i} \right]_0^{2\pi} = \pi, & n = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Así,  $u(z) = 2 \operatorname{Re} (rc_1 e^{i\theta}) = \operatorname{Re} (z/R)$ .

### EJEMPLO 2

Una placa con la forma de un disco de radio  $R$  se mantiene a una temperatura constante de  $100^\circ$  en la mitad superior de su frontera, y de  $0^\circ$  en la mitad inferior. Búsquese la temperatura en cualquier punto  $z$  de la placa.

**SOLUCIÓN:** Aquí  $U(\phi) = 100$  para  $0 \leq \phi < \pi$  y  $U(\phi) = 0$  para  $\pi \leq \phi < 2\pi$ , por lo tanto los coeficientes de Fourier satisfacen  $c_0 = 50$  y

$$2\pi R^n c_n = 100 \int_0^{\pi} e^{-in\phi} d\phi = \frac{100}{in} [1 - e^{-in\pi}], \quad n > 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} u(z) &= 50 + 2 \operatorname{Re} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^{2n+1} c_{2n+1} \right] \\ &= 50 + \frac{200}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/R)^{2n+1}}{2n+1} \right]. \end{aligned}$$

Con el método del Ejemplo 1 en la Sección 3.2, la suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^z \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left( \frac{1+z}{1-z} \right).$$

Por ende,

$$\begin{aligned} u(z) &= 50 + \frac{200}{\pi} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left( \frac{R+z}{R-z} \right) \right] \\ &= 50 + \frac{100}{\pi} \operatorname{Arg} \left( \frac{R+z}{R-z} \right) \\ &= \frac{100}{\pi} \operatorname{Arg} \left[ i \left( \frac{R+z}{R-z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Existe una conexión similar entre las series de Fourier y de Laurent de una función  $f(z)$  analítica en un anillo  $r_1 < |z| < r_2$ . Aquí,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} R^n c_n &= \frac{R^n}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\phi}) e^{-in\phi} d\phi, \quad r_1 < R < r_2. \end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-k}^k r^n c_n e^{in\phi} \right|^2 d\phi = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-k}^k \sum_{m=-k}^k r^{n+m} c_n \bar{c}_m e^{i(n-m)\phi} d\phi$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{2n} |c_n|^2.$$

Si  $z = e^{i\phi}$ , las series de las ecuaciones (1) y (3) pueden escribirse ambas en la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi} \quad (4)$$

con  $c_{-n} = \bar{c}_n$ , puesto que  $2 \operatorname{Re}(c_n e^{in\phi}) = c_n e^{in\phi} + \bar{c}_n e^{-in\phi}$ .

### EJEMPLO 3

Sea  $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$  analítica y uno a uno en una región que contiene al anillo  $r \leq |z| \leq R$ . Muéstrese que el área de la imagen del anillo es

$$\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}).$$

**SOLUCIÓN:** En el Ejercicio 11 de la Sección 5.1, se vio que el cambio local en la escala de las áreas, producido por el mapeo  $f(z)$ , es  $|f'(z)|^2$ . Por tanto, el área de la imagen del anillo es

$$\iint_{r \leq |z| \leq R} |f'(z)|^2 dx dy = \int_r^R \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\phi})|^2 r d\phi dr.$$

Por el método utilizado al probar la identidad de Parseval, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |f'(re^{i\phi})|^2 d\phi &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-k}^k n c_n z^{n-1} \right|^2 d\phi \\ &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 r^{2(n-1)}. \end{aligned}$$

De ahí que, como la convergencia es uniforme,

$$\begin{aligned} \iint_{r \leq |z| \leq R} |f'(z)|^2 dx dy &= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \int_r^R r^{2(n-1)} dr \\ &= \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|^2 (R^{2n} - r^{2n}). \end{aligned}$$

La serie de Fourier de la ecuación (1) no necesita converger a  $U(\phi)$ . Considerérese, por ejemplo, una función  $U_1(\phi)$  que difiere de  $U(\phi)$  en sólo un punto. Ambas funciones tienen la misma serie de Fourier, pero ésta no puede

representarlas en cada punto. De hecho, existen funciones continuas cuyas series de Fourier divergen en todos los números racionales  $\phi$  en el intervalo  $[0, 2\pi]$ . El problema de la convergencia es de fundamental importancia en este estudio.

Antes de estudiar el tema de la convergencia, es útil definir límites y derivadas por un lado. Para  $\epsilon > 0$ ,

$$U(\phi + 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(\phi + \epsilon), \quad U(\phi - 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} U(\phi - \epsilon)$$

son los límites de los lados derecho e izquierdo, y

$$U'(\phi + 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(\phi + \epsilon) - U(\phi + 0)}{\epsilon},$$

$$U'(\phi - 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U(\phi - \epsilon) - U(\phi - 0)}{-\epsilon}$$

serán las derivadas por la derecha y por la izquierda, respectivamente, de la función  $U$  en  $\phi$ . Nótese que si  $U$  es continua en  $\phi$ , ambos límites por un lado coinciden con  $U(\phi)$ , y si  $U$  es derivable en  $\phi$ , ambas derivadas por un lado concuerdan con  $U'(\phi)$ .

Una función real  $U(\phi)$  se llama *suave por partes* (spp) en  $[a, b]$  si tiene derivada continua en todos los puntos en los que existen los límites y las derivadas de  $U$  por un lado, excepto en un número finito de puntos.

El teorema siguiente establece el problema de la convergencia para una clase útil de funciones.

### TEOREMA

Sea  $U(\phi)$  una función spp en  $[0, 2\pi]$  con periodo  $2\pi$ , y

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

Entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k c_n e^{in\phi} = \frac{1}{2} [U(\phi + 0) + U(\phi - 0)].$$

(Adviértase que si la serie de Fourier (4) converge, concuerda con el límite anterior, pero que éste existe aunque (4) diverja.)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(\theta) \left[ \frac{e^{-i(k+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(k-\frac{1}{2})\theta}}{1 - e^{i(\phi-\theta)}} \right] d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(k + \frac{1}{2})(\phi - \theta)}{\sin \frac{1}{2}(\phi - \theta)} U(\theta) d\theta,
 \end{aligned}$$

al establecer  $t = \theta - \phi$ , integrar sobre el intervalo  $[-\pi, \pi]$  y dividir el intervalo de integración en mitades, se tiene

$$s_k(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} [U(\phi + t) + U(\phi - t)] dt$$

(véase Figura 6.11).

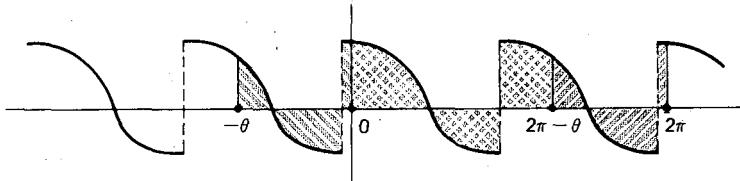


FIGURA 6.11.

En particular, si  $U(\phi) = 1$  para todo  $\phi$ , entonces  $c_0 = 1$  y  $c_n = 0$  para  $n \neq 0$ . En consecuencia,

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} \cdot 2 dt.$$

Al multiplicar esta identidad por  $[U(\phi + 0) + U(\phi - 0)]/2$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 s_k(\phi) &= \frac{U(\phi + 0) + U(\phi - 0)}{2} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} [U(\phi + t) - U(\phi + 0) + U(\phi - t) - U(\phi - 0)] dt.
 \end{aligned}$$

Ya que las derivadas por un lado de  $U$  existen, la función

$$\frac{t}{\sin \frac{1}{2}t} \left[ \frac{U(\phi + t) - U(\phi + 0)}{t} + \frac{U(\phi - t) - U(\phi - 0)}{t} \right]$$

es suave por partes en  $0 \leq t \leq \pi$  por lo que se aplica la primera observación de esta prueba, y la integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{1}{2}t} [U(\phi + t) - U(\phi + 0) + U(\phi - t) - U(\phi - 0)] dt$$

se anula cuando  $k \rightarrow \infty$ . Así,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(\phi) = \frac{1}{2} [U(\phi + 0) + U(\phi - 0)]. \blacksquare$$

### EJEMPLO 4

Muéstrese que

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

por medio de la serie de Fourier de la función

$$U(\phi) = \begin{cases} \sin \phi, & 0 \leq \phi \leq \pi, \\ 0, & \pi \leq \phi \leq 2\pi. \end{cases}$$

**SOLUCIÓN:**  $U(\phi)$  es suave por partes y

$$2\pi c_n = \int_0^\pi \sin \phi e^{-in\phi} d\phi = \frac{1}{2i} \int_0^\pi e^{i(1-n)\phi} - e^{-i(1+n)\phi} d\phi,$$

lo cual implica que  $c_{2k} = [\pi(1 - 4k^2)]^{-1}$ ,  $c_{\pm 1} = \pm[4i]^{-1}$ , donde se anulan los coeficientes restantes. Como  $c_{2k} = c_{-2k}$ ,  $c_{-1} = -c_1$ , se tiene

$$\begin{aligned} c_{2k} e^{2k\phi i} + c_{-2k} e^{-2k\phi i} &= 2c_{2k} \cos 2k\phi, \\ c_1 e^{i\phi} + c_{-1} e^{-i\phi} &= 2ic_1 \sin \phi, \end{aligned}$$

y

$$U(\phi) = \frac{\sin \phi}{2} + \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\phi}{(1 - 2k)(1 + 2k)}.$$

Específicamente, para  $\phi = \pi/2$ ,  $U(\pi/2) = 1$ , así que

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k - 1)(2k + 1)}.$$

Por tanto

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

### EJERCICIOS

1. Si la placa  $G$  tiene forma del disco unitario con temperatura  $u(e^{i\phi}) = \phi$  grados

7. Pruebe que

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

8. Aplique la identidad de Parseval a la función  $f(z) = (1 - z)^{-1}$  y pruebe que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{1 - 2r \cos \phi + r^2} = \frac{1}{1 - r^2}, \quad 0 \leq r < 1.$$

9. Emplee la identidad de Parseval en la función

$$f(z) = 1 + z + \dots + z^{n-1},$$

confirme que

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin \frac{n\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \right)^2 d\phi = 2\pi n.$$

(Sugerencia:  $f(z) = (z^n - 1)/(z - 1)$  para  $z \neq 1$ .)

10. Para propósitos de cálculo, los coeficientes de la serie de Fourier en la ecuación (4) se aproximan con sumas de la forma

$$Nc_n = \sum_{k=0}^{N-1} U\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{-2\pi i kn/N}.$$

Si  $N = N_1 \cdot N_2$ ,  $k = k_1 N_2 + k_2$ , y  $n = n_2 N_1 + n_1$ ,  $0 \leq k_j, n_j < N_j$ , muestre que

$$Nc_n = \sum_{k_2=0}^{N_2-1} W_{N_2}^{n_2, k_2} \left\{ \sum_{k_1=0}^{N_1-1} U\left(\frac{2\pi k}{N}\right) W_{N_1}^{n_1, k_1} \right\},$$

donde  $W_N = e^{-2\pi i/N}$ . Así,  $c_n = c_{n_1, n_2}$  se obtiene como una transformada de los coeficientes  $N_2$

$$c_{n_1, k_2} = W_{N_2}^{n_2, k_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} U\left(\frac{2\pi k}{N}\right) W_{N_1}^{n_1, k_1}, \quad 0 \leq k_2 < N_2.$$

11. Use el Ejercicio 10 para la situación donde  $N = N_1 \cdot N_2 \cdots N_m$ . Este es el procedimiento que se utiliza en la transformada rápida de Fourier.

## 5 TRANSFORMADAS DE FOURIER

La serie de Fourier de una función  $U(\phi)$  de periodo  $2\pi$  puede escribirse en la forma siguiente:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\phi) e^{-in\phi} d\phi.$$

De modo semejante, si  $U(\phi)$  tiene periodo  $2\pi\lambda$ , con  $\psi = \phi/\lambda$  se obtiene una función de periodo  $2\pi$ ; por ende,  $U(\phi)$  tiene la serie de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\psi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\phi/\lambda},$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\lambda\psi) e^{-in\psi} d\psi = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} U(\phi) e^{-in\phi/\lambda} d\phi.$$

Sin embargo, muchas funciones interesantes no son periódicas; por ejemplo, un solo pulso que no se repite. Se podría aproximar esta situación por medio de una función de pulsos idénticos, separados entre sí por una distancia  $2\pi\lambda$  al investigar el efecto en su serie de Fourier cuando  $\lambda \rightarrow \infty$  (véase Figura 6.12). Como  $t_n = n/\lambda$ , al definir

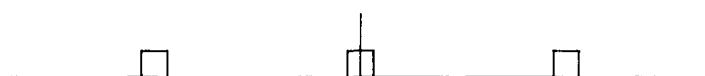
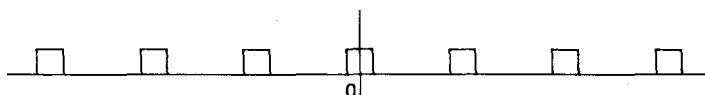
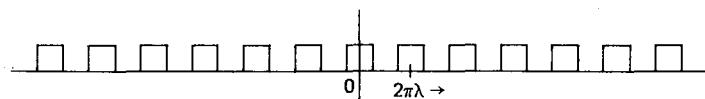
$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} U(\phi) e^{-it\phi} d\phi,$$

y ya que  $t_{n+1} - t_n = 1/\lambda$ , se puede escribir la serie de Fourier en la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u(t_n)}{\lambda\sqrt{2\pi}} e^{it_n\phi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(t_n) e^{it_n\phi} (t_{n+1} - t_n),$$

muy similar en apariencia a las sumas con las que se definen las integrales de Riemann. Si  $\lambda \rightarrow \infty$  e ignora todas las dificultades técnicas, se obtienen formalmente las expresiones

$$\hat{U}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{it\phi} dt, \quad u(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) e^{-it\phi} d\phi.$$



Esto tiene el efecto de duplicar el tamaño de una tabla de integrales dada, porque si se conoce una solución en forma cerrada para la transformada de Fourier  $U(\phi)$ , se conoce también una para su inversa. El teorema siguiente proporciona condiciones útiles bajo las cuales  $\hat{U}(\phi)$  y  $U(\phi)$  concuerdan, pero de ninguna manera es el mejor de su clase.

### TEOREMA INTEGRAL DE FOURIER

Si  $U(\phi)$  es suave por partes y  $|U(\phi)|$  se puede integrar en  $-\infty < \phi < \infty$ , entonces

$$\text{PV } \hat{U}(\phi) = \text{PV } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{it\phi} dt = \frac{1}{2} [U(\phi + 0) + U(\phi - 0)].$$

**PRUEBA:** Como  $|U(\phi)|$  es integrable, la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) e^{it(\theta-\phi)} d\phi$$

converge uniformemente con respecto a  $t$  sobre cualquier intervalo finito. Es posible, por tanto, integrar con respecto a  $t$  sobre el intervalo  $(-T, T)$ , e invertir el orden de integración. Entonces,

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) e^{it(\theta-\phi)} d\phi dt &= \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) \int_{-T}^T e^{it(\theta-\phi)} dt d\phi \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) \frac{\sin T(\theta - \phi)}{\theta - \phi} d\phi, \end{aligned}$$

y  $\Phi > |\theta| + 1$  ( $\theta$  fijo) puede escogerse de tal forma que

$$\int_{|\phi| > \Phi} |U(\phi)| d\phi < \frac{\epsilon}{4}.$$

Así que  $\Phi - |\theta| > 1$ , lo cual denota que

$$\left| \int_{|\phi| > \Phi} U(\phi) \frac{\sin T(\theta - \phi)}{\theta - \phi} d\phi \right| \leq \int_{|\phi| > \Phi} |U(\phi)| d\phi < \frac{\epsilon}{4}.$$

Al igual que en la primera parte de la prueba del teorema de la convergencia de las series de Fourier en la Sección 6.4,

$$\int_{\theta+\delta}^{\Phi} \frac{U(\phi)}{\theta - \phi} \sin T(\theta - \phi) d\phi \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad T \rightarrow \infty, \quad (1)$$

y en forma semejante para la integral en  $[-\Phi, \theta - \delta]$ , lo cual indica que para  $T$  grande

$$\left| \int_{-T}^T \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) e^{it(\theta-\phi)} d\phi dt - 2 \int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} U(\phi) \frac{\sin T(\theta-\phi)}{\theta-\phi} d\phi \right| < \epsilon.$$

Pero al cambiar variables, se encuentra

$$\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta} U(\phi) \frac{\sin T(\theta-\phi)}{\theta-\phi} d\phi = \int_0^\delta \frac{\sin T\phi}{\phi} [U(\theta+\phi) + U(\theta-\phi)] d\phi,$$

y se sigue que

$$\text{PV } \hat{U}(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin T\phi}{\phi} [U(\theta+\phi) + U(\theta-\phi)] d\phi. \quad (2)$$

Como las derivadas por un lado de  $U$  existen, la función

$$\frac{U(\theta+\phi) - U(\theta+0) + U(\theta-\phi) - U(\theta-0)}{\phi}$$

es suave por partes. Por (1) la integral

$$\int_0^\delta \sin T\phi \left[ \frac{U(\theta+\phi) + U(\theta-\phi) - U(\theta+0) - U(\theta-0)}{\phi} \right] d\phi \rightarrow 0$$

cuando  $T \rightarrow \infty$ , lo cual implica que

$$\begin{aligned} \text{PV } \hat{U}(\theta) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U(\theta+0) + U(\theta-0)}{\pi} \int_0^\delta \frac{\sin T\phi}{\phi} d\phi \\ &= \frac{U(\theta+0) + U(\theta-0)}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T\delta} \frac{\sin \psi}{\psi} d\psi \\ &= \frac{1}{2} [U(\theta+0) + U(\theta-0)] \end{aligned}$$

por la integral de Dirichlet (Ejercicio 16, Sección 2.2 o Ejemplo 1, Sección 4.4). ■

### EJEMPLO 1

Supóngase que  $U(\phi) = e^{-|\phi|}$ ; entonces  $|U(\phi)|$  es integrable y  $U(\phi)$  es suave por partes. Su transformada de Fourier

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{(-it+1)\phi} d\phi + \int_0^{\infty} e^{(-it-1)\phi} d\phi \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+t^2}} \end{aligned}$$

$\int_{-\infty}^{\phi-x} + y$

lo que transforma la fórmula integral de Poisson para el semiplano superior (Ejercicio 4, Sección 6.2) en

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\phi)}{(\phi - x)^2 + y^2} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) e^{-y|t| - i(\phi-x)t} dt d\phi. \end{aligned}$$

Si se invierte el orden de integración y denota por  $u(t)$  a la transformada de Fourier de  $U(\phi)$  se tiene

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-y|t| + ixt} dt \\ &= \left\{ \operatorname{Re} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} u(t) e^{izt} dt \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

ya que  $\overline{u(-t)} = u(t)$  para funciones reales  $U(\phi)$  y

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} u(t) e^{izt} &= u(t) e^{izt} + \overline{u(t) e^{-izt}} \\ &= u(t) e^{(-y+ix)t} + u(-t) e^{(y+ix)(-t)}. \end{aligned}$$

La fórmula (3) es el análogo, para el semiplano, del desarrollo en serie de Fourier de la fórmula integral de Poisson en el disco.

## EJERCICIOS

Encuentre las transformadas de Fourier de las funciones de los Ejercicios 1-4. (*Sugerencia:* Utilice las integrales de contorno de la Sección 4.3.)

1.  $\frac{b}{x^2 + b^2}$

2.  $\frac{x}{x^2 + b^2}$

3.  $\frac{x^2}{(x^2 + b^2)^2}$

4.  $\frac{1}{x^4 + b^4}$

Encuentre las transformadas de Fourier de las funciones de los Ejercicios 5-8. (*Sugerencia:* Use las integrales de las Secciones 2.2 y 4.5.)

5.  $e^{-kx^2}$

6.  $x e^{-kx^2}$

7.  $\frac{1}{\operatorname{senh} x}$

8.  $\frac{x}{\operatorname{senh} x}$

9. Suponga que  $U(\phi) = 1/\sqrt{\phi}$  en  $0 < \phi < \infty$  y se anula en  $-\infty < \phi \leq 0$ . Encuentre una función armónica en el semiplano superior que tenga a  $U(\phi)$  como sus valores en la frontera.
10. Considere la placa  $G$  con la forma del semiplano superior y con temperaturas de  $1^\circ$  en el intervalo  $[-1, 1]$  y  $0^\circ$  en el resto del eje real. Encuentre la temperatura en todo punto de  $G$ .
11. Suponga que  $U = \hat{U}$  en casi todos los puntos de  $(-\infty, \infty)$ . Sin considerar la convergencia, muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\phi) V(\phi) d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) dt,$$

donde  $u, v$  son las transformadas de Fourier de  $U, V$ , respectivamente. Entonces obtenga la *identidad de Parseval* para las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(\phi)|^2 d\phi = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt.$$

12. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\phi|} d\phi = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}.$$

(*Sugerencia:* Use el Ejercicio 11.)

## 6.6 TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Los métodos de la transformada de Fourier a menudo son inútiles para analizar funciones que no son absolutamente integrables en  $(-\infty, \infty)$ . Por ejemplo, la función de Heaviside

$$H(\phi - a) = \begin{cases} 1, & \phi > a, \\ 0, & \phi \leq a, \end{cases}$$

no tiene transformada de Fourier, ya que la integral

$$\int_a^{\infty} e^{-it\phi} d\phi$$

diverge. Esto se debe a que el factor  $e^{-it\phi}$  no tiende a cero cuando  $\phi \rightarrow \infty$ , lo que conduce a factores de la forma  $e^{-s\phi} = e^{-(q+it)\phi}$ , que se anulan cuando  $q > 0$  y  $\phi \rightarrow \infty$ . La función

$$\mathcal{L}_2 \{U(\phi)\}(s) = \int_s^{\infty} U(\phi) e^{-s\phi} d\phi \quad (1)$$

$$= \int_0^{\infty} U(-\phi) e^{s\phi} d\phi + \int_0^{\infty} U(\phi) e^{-s\phi} d\phi.$$

Entonces, un estudio de las propiedades de la integral

$$\mathcal{L}\{U(\phi)\}(s) = \int_0^{\infty} U(\phi) e^{-s\phi} d\phi, \quad (2)$$

llamada **transformada de Laplace** (por un lado) de  $U(\phi)$ , permite investigar el comportamiento de la transformada de Laplace por dos lados, ya que

$$\mathcal{L}_2\{U(\phi)\}(s) = \mathcal{L}\{U(-\phi)\}(-s) + \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s).$$

La transformada de Laplace por un lado, definida en la ecuación (2), tiene muchas propiedades similares a las de las series de potencias. Se probará la existencia de un semiplano de convergencia análogo a la noción del radio de convergencia en el teorema de Abel. La transformada de Laplace por dos lados convergerá en la franja  $a < \operatorname{Re} s < b$  ( $a \leq b$ ) en analogía con el desarrollo de la serie de Laurent.

### TEOREMA

Supóngase que  $U(\phi)$  es suave por partes y de orden exponencial (esto es, existen constantes  $a$  y  $\Phi$  tales que  $e^{-a\phi} |U(\phi)|$  está acotada para toda  $\phi > \Phi$ ). Entonces la transformada de Laplace  $\mathcal{L}\{U\}(s)$  es analítica en  $\operatorname{Re} s > a$  (un *semiplano de convergencia*).

**PRUEBA:** Al denotar por  $M$  una cota finita de  $e^{-a\phi} |U(\phi)|$  en  $\phi > \Phi$ , se tiene

$$\int_0^{\infty} |U(\phi) e^{-s\phi}| d\phi \leq \int_0^{\Phi} |U(\phi) e^{-s\phi}| d\phi + M \int_{\Phi}^{\infty} |e^{-(s-a)\phi}| d\phi.$$

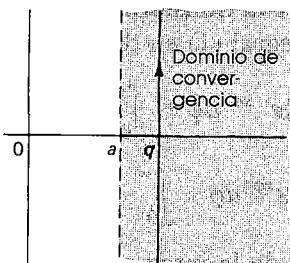
Pero  $U(\phi)$  está acotada en  $[0, \Phi]$ , ya que es continua por partes, lo cual implica que la primera integral es finita, y

$$\int_{\Phi}^{\infty} |e^{-(s-a)\phi}| d\phi = \int_{\Phi}^{\infty} e^{-(\operatorname{Re} s - a)\phi} d\phi = \frac{e^{-(\operatorname{Re} s - a)\Phi}}{\operatorname{Re} s - a} < \infty,$$

así que la transformada de Laplace de  $U(\phi)$  converge absolutamente en  $\operatorname{Re} s > a$  (véase Figura 6.13).

Esta última ecuación indica que la transformada de Laplace converge uniformemente en cualquier conjunto cerrado  $D$ , completamente contenido en el semiplano de convergencia, porque





**FIGURA 6.13.** Semiplano de convergencia

$$\left| \int_{\phi}^{\infty} U(\phi) e^{-s\phi} d\phi \right| \leq M \frac{e^{-(\operatorname{Re} s - a)\phi}}{\operatorname{Re} s - a}$$

cuando  $\phi > \Phi$ , y  $\phi$  puede elegirse de tal forma que el lado derecho de la ecuación anterior quede más pequeño que un  $\epsilon > 0$  preestablecido, para todo  $s$  en  $D$ .

Para los enteros  $n \geq 0$ , las funciones

$$u_n(s) = \int_0^n U(\phi) e^{-s\phi} d\phi$$

son analíticas en la región  $\operatorname{Re} s > a$  porque

$$u'_n(s) = - \int_0^n \phi U(\phi) e^{-s\phi} d\phi.$$

Por tanto, según el teorema de Weierstrass, la serie de funciones analíticas

$$\sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1}(s) - u_n(s)] = \int_0^{\infty} U(\phi) e^{-s\phi} d\phi = \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s)$$

es analítica en  $\operatorname{Re} s > a$ . En particular,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{U(\phi)\} = - \int_0^{\infty} \phi U(\phi) e^{-s\phi} d\phi = -\mathcal{L}\{\phi U(\phi)\}. \blacksquare \quad (3)$$

### EJEMPLO 1

Muéstrese que

$$\mathcal{L}\{e^{-z\phi}\} = \frac{1}{s-z}$$

para  $\operatorname{Re} s > 0, n = 0, 1, 2, \dots$

**SOLUCIÓN:** Al integrar por partes repetidamente, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\phi^n\} &= \int_0^\infty \phi^n e^{-s\phi} d\phi \\&= \frac{\phi^n e^{-s\phi}}{-s} \Big|_0^\infty + \frac{n}{s} \int_0^\infty \phi^{n-1} e^{-s\phi} d\phi \\&= \frac{n}{s} \left[ \frac{\phi^{n-1} e^{-s\phi}}{-s} \Big|_0^\infty + \frac{n-1}{s} \int_0^\infty \phi^{n-2} e^{-s\phi} d\phi \right] \\&\vdots \\&= \frac{n!}{s^n} \left[ \int_0^\infty e^{-s\phi} d\phi \right] = \frac{n!}{s^{n+1}}.\end{aligned}$$

También se pudo haber hecho  $z = 0$  en el Ejemplo 1 y utilizado la ecuación (3) repetidamente para obtener el resultado.

Otros dos resultados útiles al calcular transformadas de Laplace son los teoremas de desplazamiento. Nótese que

$$\int_0^\infty (U(\phi)e^{-z\phi})e^{-s\phi} d\phi = \int_0^\infty U(\phi)e^{-(s+z)\phi} d\phi,$$

lo cual proporciona el **primer teorema de desplazamiento**

$$\mathcal{L}\{U(\phi)e^{-z\phi}\}(s) = \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s+z),$$

donde la última expresión significa que cada  $s$  en  $\mathcal{L}\{U\}$  se reemplaza por  $s + z$ . Si  $a \geq 0$ , se tiene

$$\int_0^\infty U(\phi)H(\phi - a)e^{-s\phi} d\phi = \int_a^\infty U(\phi)e^{-s\phi} d\phi.$$

Cuando se sustituye  $\phi = \theta + a$  en el lado derecho de esta ecuación, se obtiene

$$\int_0^\infty U(\phi)H(\phi - a)e^{-s\phi} d\phi = e^{-as} \int_0^\infty U(\theta + a)e^{-s\theta} d\theta.$$

Además, puede reescribirse como el **segundo teorema de desplazamiento**,

$$\mathcal{L}\{U(\phi)H(\phi - a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{U(\phi + a)\}.$$

Los siguientes dos ejemplos muestran el uso de los teoremas de desplazamiento.

### EJEMPLO 3

Para cualquier entero  $n \geq 0$ , pruébese que

$$\mathcal{L}\{\phi^n e^{-z\phi}\} = \frac{n!}{(s+z)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} z.$$

**SOLUCIÓN:** Podría usarse la ecuación (3) repetidamente para obtener este resultado, pero es mucho más fácil el primer teorema de desplazamiento, si ya se tiene el resultado del Ejemplo 2. Así,

$$\mathcal{L}\{\phi^n e^{-z\phi}\} = \mathcal{L}\{\phi^n\}(s+z) = \frac{n!}{(s+z)^{n+1}}.$$

### EJEMPLO 4

Muéstrese que si  $a > 0$ , entonces

$$\mathcal{L}\{e^{-z\phi} H(\phi - a)\} = \frac{e^{-a(s+z)}}{s+z}, \quad \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} z.$$

**SOLUCIÓN:** Por el segundo teorema de desplazamiento y el Ejemplo 1,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{-z\phi} H(\phi - a)\} &= e^{-as} \mathcal{L}\{e^{-z(\phi+a)}\} \\ &= e^{-a(s+z)} \mathcal{L}\{e^{-z\phi}\}. \end{aligned}$$

En particular, obsérvese que

$$\mathcal{L}\{H(\phi - a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

cuando  $z = 0$ .

Nótese que la transformada de Laplace es lineal:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{aU(\phi) + bV(\phi)\} &= \int_0^\infty [aU(\phi) + bV(\phi)] e^{-s\phi} d\phi \\ &= a \int_0^\infty U(\phi)e^{-s\phi} d\phi + b \int_0^\infty V(\phi)e^{-s\phi} d\phi \\ &= a\mathcal{L}\{U(\phi)\} + b\mathcal{L}\{V(\phi)\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(s - iz)} \frac{1}{(s + iz)} = \frac{s^2 + z^2}{s^2 + z^2} \\ \mathcal{L}\{\sin z\phi\} &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2i} (e^{iz\phi} - e^{-iz\phi})\right\} \\ &= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{s - iz} - \frac{1}{s + iz} \right) = \frac{z}{s^2 + z^2}. \end{aligned}$$

## PROPIEDAD DE LA DERIVACIÓN

Si  $U(\phi)$  y  $U'(\phi)$  son funciones spp de orden exponencial, entonces

$$\mathcal{L}\{U'(\phi)\} = s \mathcal{L}\{U(\phi)\} - U(0^+), \quad (4)$$

donde  $U(0^+)$  es el límite por la derecha de  $U$ .

**PRUEBA:** Como  $U$  y  $U'$  son de orden exponencial, todos los términos en la ecuación (4) existen en  $\operatorname{Re} s > a$ . Para probar (4), integre por partes

$$\int_0^\infty U'(\phi)e^{-s\phi} d\phi = U(\phi)e^{-s\phi} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty U(\phi)e^{-s\phi} d\phi. \blacksquare$$

## EJEMPLO 6

Compruébese que

$$\mathcal{L}\{\sin^2 z\phi\} = \frac{2z^2}{s(s^2 + 4z^2)}, \quad \operatorname{Re} s > 2|\operatorname{Im} z|.$$

**SOLUCIÓN:** Como

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2z\phi}{4z} \right) = \frac{1}{2} (1 - \cos 2z\phi) = \sin^2 z\phi,$$

por la propiedad de derivación y linealidad,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin^2 z\phi\} &= s \mathcal{L}\left\{\frac{\phi}{2} - \frac{\sin 2z\phi}{4z}\right\} \\ &= s \left( \frac{1}{2s} - \frac{1}{2(s^2 + 4z^2)} \right) = \frac{2z^2}{s(s^2 + 4z^2)} \end{aligned}$$

cuando  $\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} 2z|$ .

**La convolución** de las funciones  $U(\phi)$  y  $V(\phi)$  es la función

$$U * V(\phi) = \int_0^\phi U(t)V(\phi - t) dt.$$

Adviértase que los papeles de  $U$  y  $V$  pueden intercambiarse sin que varíe el valor de la convolución. Si las funciones  $U$ ,  $V$  son absolutamente integrables en  $(0, \infty)$ , la convolución satisface la identidad

$$\mathcal{L}\{U * V\} = \mathcal{L}\{U\}\mathcal{L}\{V\}, \quad (5)$$

esto es, la transformada de Laplace de la convolución es el producto de las transformadas de las funciones. Las hipótesis anteriores son suficientes para invertir el orden de integración

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{U * V\} &= \int_0^\infty \left[ \int_0^\phi U(t)V(\phi - t) dt \right] e^{-s\phi} d\phi \\ &= \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty U(t)V(\phi - t)H(\phi - t) dt \right] e^{-s\phi} d\phi \\ &= \int_0^\infty U(t) \left[ \int_0^\infty V(\phi - t)H(\phi - t)e^{-s\phi} d\phi \right] dt \\ &= \int_0^\infty U(t)\mathcal{L}\{V(\phi - t)H(\phi - t)\} dt, \end{aligned}$$

que, por el segundo teorema de desplazamiento, conduce a

$$\mathcal{L}\{U * V\} = \mathcal{L}\{V\} \int_0^\infty U(t)e^{-ts} dt = \mathcal{L}\{U\}\mathcal{L}\{V\}.$$

El ejemplo siguiente da una indicación de la importancia de la noción de convolución.

### EJEMPLO 7

Obtégase una solución particular de la ecuación diferencial

$$U''(\phi) + 2wU'(\phi) + (w^2 + z^2)U(\phi) = V(\phi)$$

con  $U(\phi) = U'(\phi) = 0$ .

**SOLUCIÓN:** Por medio de la propiedad de la derivación, se obtiene

$$[s^2 + 2ws + (w^2 + z^2)] \mathcal{L}\{U(\phi)\} = \mathcal{L}\{V(\phi)\}.$$

Este último ejemplo crea el importante concepto de función de transferencia. Muchos sistemas físicos pueden tomarse como aparatos que transforman una función de entrada  $V$  en una función de salida  $U$ . Si todas las condiciones iniciales son cero cuando  $\phi = 0$  y toman la transformada de Laplace de las ecuaciones que describen el sistema, se obtiene la expresión

$$\mathcal{L}\{U(\phi)\} = \frac{\mathcal{L}\{V(\phi)\}}{Z(s)},$$

donde  $Z(s)^{-1}$ , la función de transferencia, es independiente de  $V$ . Sea  $U_H$  la función de salida cuando  $V(\phi) = H(\phi)$ . Entonces, con el Ejemplo 4, se encuentra

$$Z(s) \mathcal{L}\{U_H\} = \mathcal{L}\{H(\phi)\} = \frac{1}{s}$$

o bien

$$\mathcal{L}\{U\} = \frac{s\mathcal{L}\{V\}}{sZ(s)} = s\mathcal{L}\{U_H\}\mathcal{L}\{V\} = s\mathcal{L}\{U_H * V\}.$$

En consecuencia, por la propiedad de la derivación,

$$U(\phi) = (U_H * V)'(\phi) = \int_0^\phi U_H(t)V'(\phi - t) dt + U_H(\phi)V(0). \quad (6)$$

Al comutar  $\mathcal{L}\{U_H\}$  y  $\mathcal{L}\{V\}$  dadas anteriormente, también se sigue que

$$U(\phi) = (V * U_H)'(\phi) = \int_0^\phi V(t)U'_H(\phi - t) dt, \quad (7)$$

ya que las condiciones iniciales implican que  $U_H(0) = 0$ . Las ecuaciones (6) y (7), fórmulas de Duhamel, expresan la respuesta de un sistema a la función de entrada  $V(\phi)$  en términos de la respuesta, experimentalmente accesible, a la función de Heaviside.

## EJERCICIOS

Verifique las transformadas de Laplace y las regiones de convergencia en los Ejercicios 1-13.

$$1. \mathcal{L}\{\cosh z\phi\} = \frac{s}{s^2 - z^2}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} z|$$

$$2. \mathcal{L}\{\operatorname{senh} z\phi\} = \frac{z}{s^2 - z^2}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} z|$$

$$3. \mathcal{L}\{\phi \operatorname{sen} z\phi\} = \frac{2sz}{(s^2 + z^2)^2}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$$

$$4. \mathcal{L}\{\phi \cos z\phi\} = \frac{s^2 - z^2}{(s^2 + z^2)^2}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$$

$$5. \mathcal{L}\{\phi \operatorname{senh} z\phi\} = \frac{2sz}{(s^2 - z^2)^2}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} z|$$

$$6. \mathcal{L}\{\phi \cosh z\phi\} = \frac{s^2 + z^2}{(s^2 - z^2)^2}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Re} z|$$

$$7. \mathcal{L}\{e^{-w\phi} \operatorname{sen} z\phi\} = \frac{z}{(s+w)^2 + z^2}, \quad \operatorname{Re}(s+w) > |\operatorname{Im} z|$$

$$8. \mathcal{L}\{e^{-w\phi} \cos z\phi\} = \frac{s+w}{(s+w)^2 + z^2}, \quad \operatorname{Re}(s+w) > |\operatorname{Im} z|$$

$$9. \mathcal{L}\{\phi^2 \operatorname{sen} z\phi\} = \frac{2z(3s^2 - z^2)}{(s^2 + z^2)^3}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$$

$$10. \mathcal{L}\{\phi^2 \cos z\phi\} = \frac{2s(s^2 - 3z^2)}{(s^2 + z^2)^3}, \quad \operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$$

$$11. \mathcal{L}\{\cos^2 z\phi\} = \frac{2z^2 + s^2}{s(s^2 + 4z^2)}, \quad \operatorname{Re} s > 2|\operatorname{Im} z|$$

$$12. \mathcal{L}\{H(\phi - a) \operatorname{sen} z\phi\} = \frac{e^{-as}}{s^2 + z^2} (z \cos za + s \operatorname{sen} za),$$

$$\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$$

$$13. \mathcal{L}\{H(\phi - a) \cos z\phi\} = \frac{e^{-as}}{s^2 + z^2} (s \cos za - z \operatorname{sen} za),$$

$$\operatorname{Re} s > |\operatorname{Im} z|$$

14. Resuelva la ecuación diferencial

$$U''(\phi) + 3U'(\phi) + 2U(\phi) = \operatorname{sen} \phi, \quad U(0) = U'(0) = 0,$$

use transformadas de Laplace.

15. Resuelva la ecuación diferencial

$$U''(\phi) + U(\phi) = \phi \operatorname{sen} \phi, \quad U(0) = 0, \quad U'(0) = 1.$$

Utilice transformadas de Laplace.

16. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$U'(\phi) = U(\phi) - V(\phi) + \operatorname{sen} \phi, \quad U(0) = 0,$$

y use ésta para encontrar la transformada de Laplace de la integral seno

$$\text{Si } U(\phi) = \int_0^\phi \frac{\sin \phi}{\phi} d\phi.$$

Si  $U(\phi)$  y  $U'(\phi)$  son suaves por partes y de orden exponencial, pruebe las condiciones dadas en los Ejercicios 21-23, ya que el dominio de convergencia de  $U'(\phi)$  incluye el semiplano derecho cerrado.

21.  $\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}\{U(\phi)\} = 0$

22.  $\lim_{s \rightarrow \infty} s\mathcal{L}\{U(\phi)\} = U(0^+)$

23.  $\lim_{s \rightarrow 0^+} s\mathcal{L}\{U(\phi)\} = \lim_{\phi \rightarrow \infty} U(\phi)$

24. ¿Pueden las funciones

$$\frac{s}{s-1}, \quad \frac{1}{\sqrt{s}}, \quad e^{s^{1/2}}$$

ser transformadas de Laplace de funciones  $U(\phi)$  que, junto con  $U'(\phi)$  son suaves por partes y de orden exponencial?

En los Ejercicios 25-27, pruebe que la convolución es distributiva, commutativa y asociativa.

25.  $U * (V_1 + V_2) = U * V_1 + U * V_2$

26.  $U * V = V * U$

27.  $(U * V) * W = U * (V * W)$

---

## LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

---

En esta sección se estudiará una técnica muy poderosa para determinar la función  $U(\phi)$  cuando sólo se conoce la transformada de Laplace

$$u(s) = \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s) = \int_0^\infty U(\phi)e^{-s\phi} d\phi \quad (1)$$

de esa función. Supóngase que  $U(\phi)$  es de orden exponencial, con  $e^{-a\phi} |U(\phi)|$  acotada para  $\phi > \Phi$ .

Si  $s = q + it$ , la transformada de Laplace se transforma en

$$u(s) = \int_0^\infty (U(\phi)e^{-q\phi})e^{-it\phi} d\phi, \quad q > a,$$

que es la transformada de Fourier de la función

$$P(\phi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}U(\phi)e^{-q\phi}, & \phi \geq 0, \\ 0, & \phi < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Como  $q > a$ ,  $|P(\phi)|$  es integrable, se aplica el teorema integral de Fourier. Así que, en todos los puntos  $\phi > 0$  de continuidad de  $P$ , se tiene

$$P(\phi) = \text{PV } \hat{P}(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ PV } \int_{-\infty}^{\infty} u(q+it)e^{it\phi} dt$$

o sea:

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \text{ PV } \int_{-\infty}^{\infty} u(q+it)e^{(q+it)\phi} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{ PV } \int_{q-i\infty}^{q+i\infty} u(s)e^{s\phi} ds, \quad s = q+it, \quad \phi > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Esta última ecuación es la **fórmula de inversión para transformadas de Laplace**. Se escribe  $\mathcal{L}^{-1}\{u(s)\} = U(\phi)$  en todos los puntos  $\phi > 0$  de continuidad de  $U$ , y a  $U$  se le llama la transformada inversa de  $u$ . En particular, nótese que diferentes funciones continuas spp de orden exponencial tienen diferentes transformadas de Laplace.

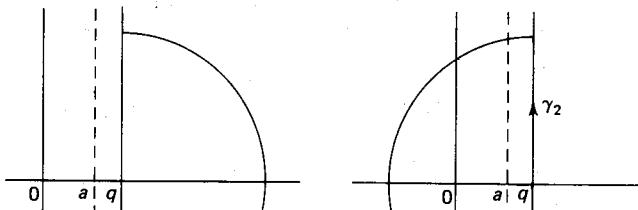
Supóngase que se desea encontrar la transformada inversa de Laplace de una función univaluada  $u(s)$ ,  $\operatorname{Re} s > a$  y además que  $u(s)$  se anula cuando  $s \rightarrow \infty$  en  $\mathfrak{M}$ , para  $s = q + Re^{i\theta}$ ,  $q > a$ ,

$$|e^{s\phi}| = e^{q\phi + R\phi \cos \theta} \rightarrow 0$$

si  $R \rightarrow \infty$ , dado que  $\phi \cos \theta < 0$ . Entonces, las integrales de contorno sobre las curvas indicadas en la Figura 6.14,

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} u(s)e^{s\phi} ds, \quad \phi < 0, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} u(s)e^{s\phi} ds, \quad \phi > 0, \quad (5)$$



Como la función exponencial  $e^{s\phi}$  es entera, sólo se usan las singularidades de la transformada de Laplace  $u(s) = \mathcal{L}\{U(\phi)\}$  en el semiplano  $\operatorname{Re} s \leq a$ . La ecuación (6) proporciona una evaluación útil de la fórmula de inversión (3) para funciones univaluadas  $u(s)$  que se anulan cuando  $s \rightarrow \infty$ .

### EJEMPLO 1

Encuéntrese la inversa de la transformada de Laplace

$$u(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

**SOLUCIÓN:** La transformada  $u(s)$  tiene polos en  $s = -1$  y  $s = -2$ . Con la fórmula del residuo en la ecuación (6), se obtiene

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \operatorname{Res}_{-1} \frac{e^{s\phi}}{(s+1)(s+2)} + \operatorname{Res}_{-2} \frac{e^{s\phi}}{(s+1)(s+2)} \\ &= e^{-\phi} - e^{-2\phi}. \end{aligned}$$

### EJEMPLO 2

Obtégase la transformada inversa de Laplace de la función

$$u(s) = \frac{2s+3}{s^2+4}, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

**SOLUCIÓN:** Aquí los polos están en  $\pm 2i$ , así que

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \operatorname{Res}_{2i} \frac{(2s+3)e^{s\phi}}{s^2+4} + \operatorname{Res}_{-2i} \frac{(2s+3)e^{s\phi}}{s^2+4} \\ &= \left( \frac{4i+3}{4i} \right) e^{2i\phi} + \left( \frac{-4i+3}{-4i} \right) e^{-2i\phi} \\ &= 2 \cos 2\phi + \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2\phi. \end{aligned}$$

### EJEMPLO 3

Inviértase la transformada de Laplace

$$u(s) = \frac{e^{-2s}}{(s+3)^2}, \quad \operatorname{Re} s > 0.$$

**SOLUCIÓN:** La ecuación (6) no puede usarse porque  $u(s)$  no se anula cuando  $s \rightarrow \infty$  sobre el eje real negativo. Sin embargo, el método utilizado para obtener la ecuación (6) puede emplearse todavía. Al integrar

$$u(s)e^{s\phi} = \frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2}$$

sobre los dos contornos mostrados en la Figura 6.15, adviértase que para  $s = Re^{i\theta}$ ,

$$|e^{(\phi-2)s}| = e^{R(\phi-2)\cos\theta} \rightarrow 0$$

cuando  $R \rightarrow \infty$  si  $(\phi - 2)\cos\theta < 0$ . Por el teorema de Cauchy,

$$U(\phi) = \frac{-1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_1} \frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2} ds = 0 \quad \text{si } \phi < 2.$$

Para  $\phi > 2$ , el teorema del residuo proporciona el resultado

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_2} \frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2} ds \\ &= \text{Res}_{-3} \frac{e^{(\phi-2)s}}{(s+3)^2} = (\phi-2)e^{-3(\phi-2)}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $u(\phi) = (\phi-2)e^{-3(\phi-2)} H(\phi-2)$ .

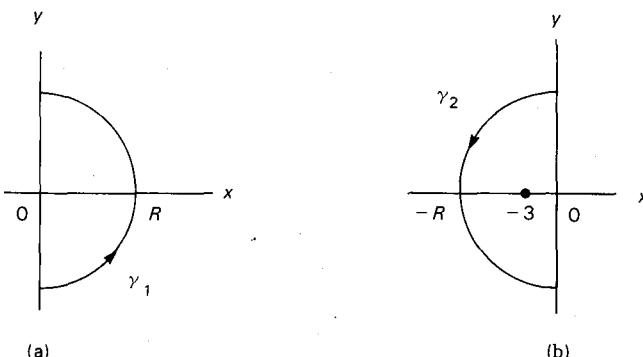
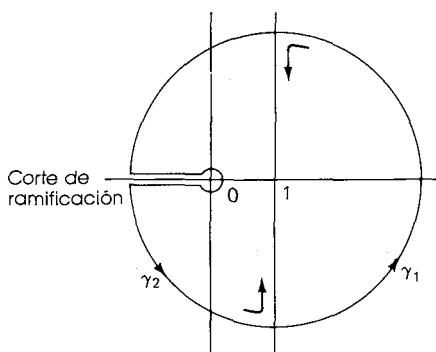


FIGURA 6.15. (a)  $\phi < 2$ ; (b)  $\phi > 2$

Cuando se invierte una transformada de Laplace  $u(s)$  que sea multivaluada, se debe tener especial cuidado para evitar cruzar cortes de ramificación.

$$|e^{(s-1)\phi}| = e^{R\phi \cos \theta} \rightarrow 0,$$

cuando  $R \rightarrow \infty$  si  $\phi \cos \theta < 0$ , la función  $U(\phi) = 0$  para  $\phi < 0$ .



**FIGURA 6.16.**

Para  $\phi > 0$ , nótese que la integral se anula cuando  $R \rightarrow \infty$  en el semicírculo grande de  $\gamma_2$  mientras que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=r} \frac{e^{s\phi}}{\sqrt{s}} ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{r} e^{r\phi \cos \theta} d\theta \rightarrow 0,$$

cuando  $r \rightarrow 0$  en el círculo pequeño de  $\gamma_2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} U(\phi) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iR}^{1+iR} \frac{e^{s\phi}}{\sqrt{s}} ds \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{t\phi} dt}{\sqrt{|t|} e^{-i\pi}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-R}^{-r} \frac{e^{t\phi} dt}{\sqrt{|t|} e^{i\pi}} \right\} \end{aligned}$$

Si  $x = -t$  se tiene

$$U(\phi) = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \rightarrow 0}} \frac{1}{\pi} \int_r^R \frac{e^{-x\phi} dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-x\phi} dx}{\sqrt{x}},$$

y con la definición de la función gamma del Ejercicio 14 de la Sección 4.5, se tiene

$$U(\phi) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\pi\sqrt{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\phi}}.$$

### EJEMPLO 5

Resuélvase el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} U''(\phi) + 2wU'(\phi) + w^2 U(\phi) &= -\sin w\phi, \\ U(0) = 0, \quad U'(0) &= \frac{1}{2w}. \end{aligned}$$

**SOLUCIÓN:** Con la propiedad de la derivación de la Sección 6.6,

$$\mathcal{L}\{U''(\phi)\} = s\mathcal{L}\{U'(\phi)\} - \frac{1}{2w} = s^2 \mathcal{L}\{U(\phi)\} - \frac{1}{2w},$$

$$\mathcal{L}\{U'(\phi)\} = s\mathcal{L}\{U(\phi)\},$$

de ahí que la transformada de Laplace de la ecuación diferencial se transforma en

$$(s^2 + 2ws + w^2)\mathcal{L}\{U(\phi)\} - \frac{1}{2w} = \frac{-w}{s^2 + w^2}$$

o sea,

$$\mathcal{L}\{U(\phi)\} = \frac{s-w}{2w(s+w)(s^2+w^2)}.$$

Por el teorema de inversión para transformadas de Laplace,

$$U(\phi) = \sum_{s \leq 0} \text{Res } \mathcal{L}\{U(\phi)\}(s) e^{s\phi}$$

así que

$$U(\phi) = \frac{-e^{-w\phi}}{2w^2} + \frac{e^{iw\phi}}{4w^2} + \frac{e^{-iw\phi}}{4w^2} = \frac{\cos w\phi - e^{-w\phi}}{2w^2}.$$

### EJEMPLO 6

La ecuación de difusión térmica en una varilla semi-infinita es

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \delta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (7)$$

donde  $\delta$  es el coeficiente de difusividad de calor en la varilla,  $x$  es la porción sobre la varilla,  $t$  es el tiempo y  $U$  es la temperatura. Supóngase que se dan las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$s\mathcal{L}\{U\} - U(x, 0) = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathcal{L}\{U\},$$

Cuando se intercambian las operaciones de tomar la transformada de Laplace y la de derivar con respecto a  $x$ . Como este intercambio puede no ser válido, se debe comprobar la respuesta y verificar que solucione el problema. Si  $u = \mathcal{L}\{U\}$ , la ecuación diferencial es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{s}{\delta} u, \quad (9)$$

donde se considera a  $x$  como la variable independiente y  $s$  como un parámetro. Las condiciones de frontera en (8) pueden reescribirse en la forma

$$u(0, s) = \mathcal{L}\{U(0, t)\} = \int_0^\infty ce^{-st} dt = \frac{c}{s} \quad (10)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, s) = \int_0^\infty \lim_{x \rightarrow \infty} U(x, t) e^{-st} dt = 0, \quad (11)$$

siempre que el intercambio de la integral y el límite sea válido. La solución general de la ecuación (9) tiene la forma

$$u = c_1 e^{\sqrt{s/\delta}x} + c_2 e^{-\sqrt{s/\delta}x},$$

así que  $c_1 = 0$  por la ecuación (11) y  $c_2 = c/s$  por la (10). Por tanto,  $\mathcal{L}\{U\} = ce^{-\sqrt{s/\delta}x}/s$ , y puede utilizarse el teorema de inversión para las transformadas de Laplace, o el Apéndice 2, para obtener

$$U(x, t) = c \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\delta t}} e^{-v^2} dv \right). \quad (12)$$

Al comprobar que la ecuación (12) es efectivamente la solución, nótese que

$$\int_0^\infty e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

por medio del Ejemplo 3 de la Sección 2.2. De esta forma se satisfacen las condiciones inicial y de frontera (8). Además,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-c}{\sqrt{\pi \delta t}} e^{-x^2/4\delta t}$$

y

$$\delta \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{cx}{2\sqrt{\pi \delta}} \frac{e^{-x^2/4\delta t}}{t^{3/2}} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

## EJERCICIOS

Encuentre las inversas de las transformadas de Laplace dadas en los Ejercicios 1-10. Suponga que cada transformada se define en el semiplano  $\operatorname{Re} s > a$  y  $b$  es real.

1.  $\frac{1}{(s+a)^3}$

2.  $\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$

3.  $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$

4.  $\frac{1}{(s+a)^4}$

5.  $\frac{1}{s(s^2+a^2)}$

6.  $\frac{s}{s^3+a^3}$

7.  $\frac{1}{(s^3+a^3)}$

8.  $\frac{e^{-bs}}{(s+a)^3}$

9.  $\frac{e^{-bs}}{s^2+a^2}$

10.  $\frac{e^{-bs}}{s(s^2+a^2)}$

Use los métodos de los Ejemplos 3 y 4 para invertir las transformadas de Laplace de los Ejercicios 11-18. Suponga  $a, b > 0$ .

11.  $\frac{1}{\sqrt[3]{s}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

12.  $\frac{1}{\sqrt[4]{s}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

13.  $\operatorname{Log} \left( \frac{s-a}{s-b} \right), \quad \operatorname{Re} s > \max(a, b)$

14.  $\tan^{-1} \frac{a}{s}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

15.  $\frac{1}{4} \operatorname{Log} \left( 1 + \frac{4a^2}{s^2} \right), \quad \operatorname{Re} s > 0$

16.  $e^{-a\sqrt{s}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

17.  $\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}, \quad \operatorname{Re} s > 0$

18.  $\frac{1}{2s} \operatorname{Log}(1+s^2), \quad \operatorname{Re} s > 0$

19. Resuelva la ecuación

$$U(\phi) = \phi^2 + \int_0^\phi \sin(\phi - t) U(t) dt.$$

20. Resuelva la ecuación

$$U(\phi) = 1 + \int_0^\phi (\phi - t) U(t) dt.$$

24. Encuentre una solución de la ecuación de onda

$$U_{tt} = a^2 U_{xx},$$

con condiciones iniciales y de frontera

$$U(x, 0) = 0, \quad U_t(x, 0) = 0, \quad U(0, t) = \frac{a\pi t}{b}, \quad U(b, t) = 0,$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes fijas

25. Busque una expresión para la solución de la ecuación de onda

$$U_{tt} = a^2 U_{xx}, \quad x, t > 0,$$

en una cuerda semi-infinita, dadas las condiciones iniciales y de frontera

$$U(x, 0) = f(x), \quad x \geq 0,$$

$$U_t(x, 0) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U(0, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

26. Una cuerda finita, sujeta a una función de forzamiento  $f(x, t)$ , satisface la ecuación de movimiento

$$U_{xx} - \frac{1}{a^2} U_{tt} = f(x, t).$$

Las condiciones iniciales

$$U(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

$$U_t(x, 0) = h(x), \quad 0 \leq x \leq L,$$

son funciones dadas, y la cuerda tiene sus extremos fijos:

$$U(0, t) = U(L, t) = 0.$$

Use transformadas de Laplace para obtener una expresión para la solución de este problema.

27. Resuelva la ecuación diferencial parcial

$$U_t = \delta U_{xx} + \mu U_x, \quad t > 0, \quad x > 0,$$

dadas las condiciones inicial y de frontera

$$U(x, 0) = 0, \quad x \geq 0,$$

$$U(0, t) = c (\neq 0), \quad t > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U(x, t) = \lim_{x \rightarrow \infty} U_x(x, t) = 0, \quad t > 0.$$

## NOTAS

### SECCIÓN 6.2

Puede encontrarse un análisis más completo del problema de Dirichlet en el plano complejo en [A. págs. 237-253]. El problema de Dirichlet en el espacio tridimensional se estudia en la teoría del potencial; un clásico en esta área es [Ke]. La hipótesis sobre  $U(\phi)$  en el teorema de Poisson puede desarrollarse substancialmente [Hf, Capítulo 3, y H, Capítulo 19].

### SECCIÓN 6.3

Un tratamiento del perfil de Joukowski se encuentra en [R, págs. 115-121].

### SECCIÓN 6.4

Un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier diverge en los números racionales de  $[0, 2\pi]$  se encuentra en [J, pág. 546]. Un teorema de Y. Katznelson [Studia Math., 26 (1966), 301-304] muestra que para cualquier conjunto  $S$  de medida cero, existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en ese conjunto. Recíprocamente, por un resultado de L. Carleson [Acta Math., 116 (1966), 135-157], la serie de Fourier de una función continua converge excepto en un conjunto de medida cero. Se puede encontrar un análisis comprensible del problema de la convergencia en [Hf]. La integración y la derivación término a término de una serie de Fourier se pueden realizar, para obtener una serie de Fourier de la integral indefinida o de la derivada, si las funciones involucradas son suaves por partes.

### SECCIÓN 6.5

Frecuentemente se encuentran definiciones alternativas de las transformadas de Fourier. Todas las definiciones son equivalentes hasta una rotación y la amplificación por  $\sqrt{2\pi}$ .

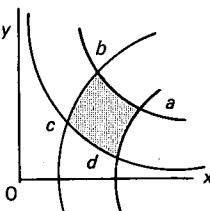
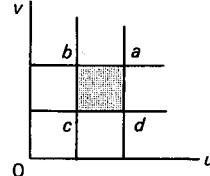
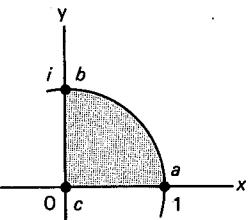
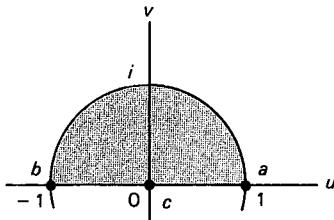
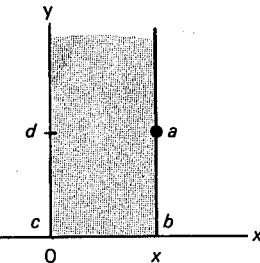
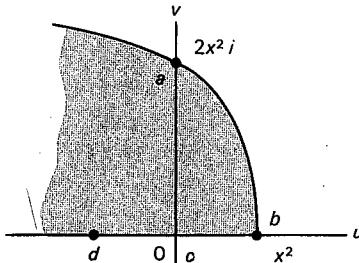
### SECCIÓN 6.6

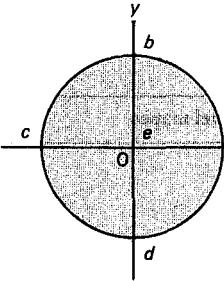
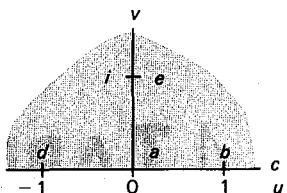
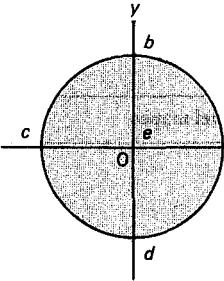
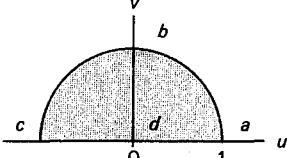
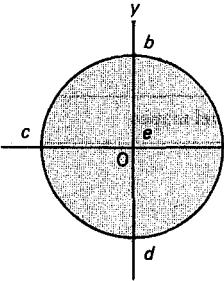
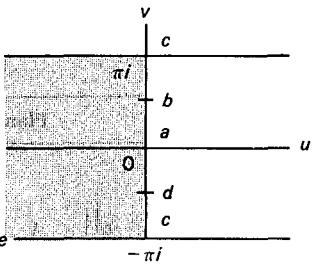
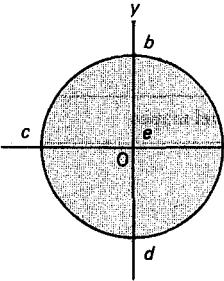
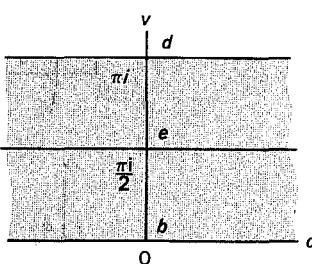
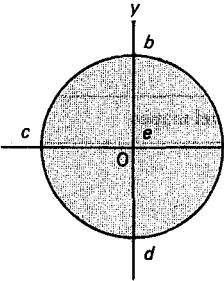
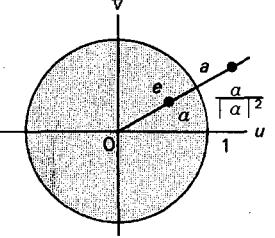
En muchos manuales matemáticos pueden encontrarse tablas de transformadas de Laplace, una de las cuales está en el Apéndice.

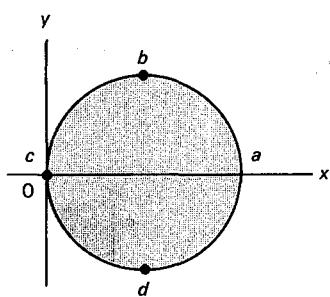
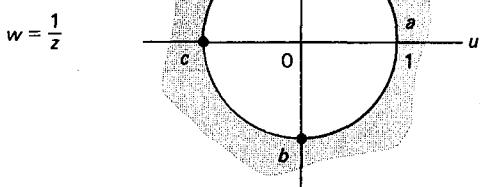
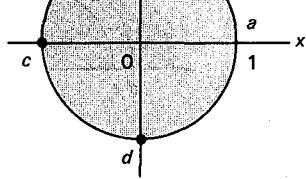
### SECCIÓN 6.7

Una prueba de unicidad de la transformada de Laplace para funciones continuas puede encontrarse en [M, pág. 412].

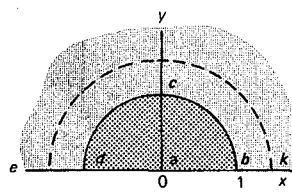
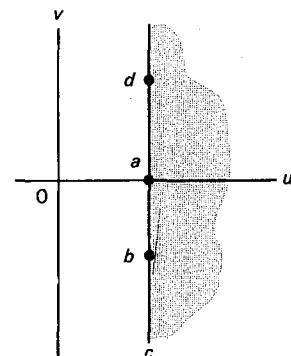
# A.1 TABLA DE MAPEOS CONFORMES

Plano $z$	Función del mapeo	Plano $w$
	$w = z^2$ $\{xy = c\} \rightarrow \{v = 2c\}$ $\{x^2 - y^2 = c\} \rightarrow \{u = c\}$	
	$w = z^2$	
	$w = z^2$	

Plano $z$	Función del mapeo	Plano $w$
	$w = i \frac{1-z}{1+z}$	
	$\left( \frac{w-1}{w+1} \right)^2 = i \frac{z-1}{z+1}$	
	$w = \text{Log } z$	
	$w = \text{Log } i \left( \frac{1-z}{1+z} \right)$	
	$z = \frac{ a }{a} \left( \frac{w-a}{1-\bar{a}w} \right)$	



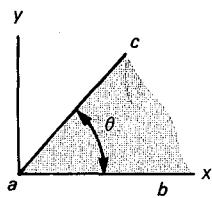
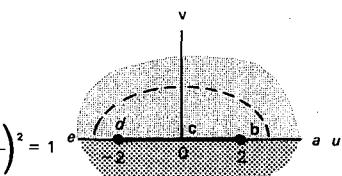
$$w = \frac{1}{z}$$



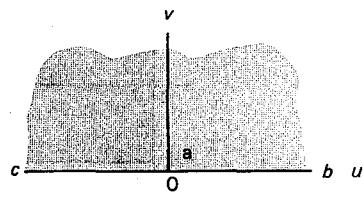
$$w = z + \frac{1}{z}$$

Línea discontinua

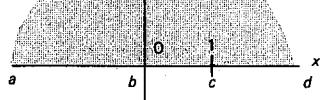
$$\left( \frac{ku}{k^2 + 1} \right)^2 + \left( \frac{kv}{k^2 - 1} \right)^2 = 1$$



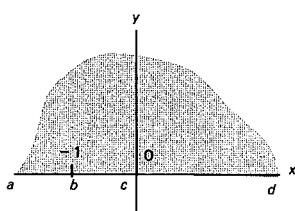
$$w = z^{\pi/\theta}$$



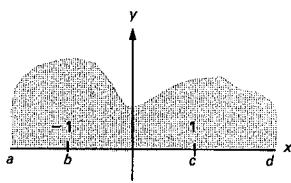
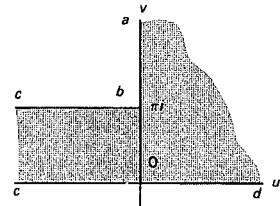
Plano $z$	Función del mapeo	Plano $w$
	$w = e^z$	
	$w = \operatorname{sen} z$ Línea continua $\left(\frac{u}{\cosh k}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{senh} k}\right)^2 = 1$ Línea discontinua $\left(\frac{u}{\operatorname{sen} j}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos j}\right)^2 = 1$	
	$w = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$	
	$w = \operatorname{Log} \left( \frac{e^z + 1}{e^z - 1} \right)$	



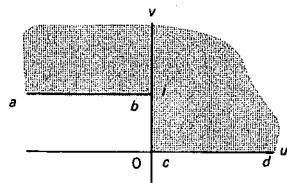
$$w = \pi i + z - \text{Log } z^{-1}$$



$$w = 2 \sqrt{1+z} + \text{Log} \left( \frac{\sqrt{1+z}-1}{\sqrt{1+z}+1} \right)$$



$$w = \frac{1}{\pi} [\sqrt{2^z - 1} + \cosh^{-1} z]$$





# TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$u(\phi)$	$\mathcal{L}\{u(\phi)\}(s)$	Dominio de convergencia
$\phi^z \ (\text{Re } z > -1)$	$\Gamma(z+1)/s^{z+1}$	$\text{Re } s > 0$
$e^{z\phi}$	$1/(s-z)$	$\text{Re } s > \text{Re } z$
$\text{sen } z\phi$	$z/(s^2 + z^2)$	$\text{Re } s >  \text{Im } z $
$\cos z\phi$	$s/(s^2 + z^2)$	$\text{Re } s >  \text{Im } z $
$e^{w\phi} \text{ sen } z\phi$	$z/[(s-w)^2 + z^2]$	$\text{Re } s > \text{Re } w +  \text{Im } z $
$e^{w\phi} \cos z\phi$	$(s-w)/[(s-w)^2 + z^2]$	$\text{Re } s > \text{Re } w +  \text{Im } z $
$\phi \text{ sen } z\phi$	$2sz/(s^2 + z^2)^2$	$\text{Re } s >  \text{Im } z $
$\phi \cos z\phi$	$(s^2 - z^2)/(s^2 + z^2)^2$	$\text{Re } s >  \text{Im } z $
$\text{sen}^2 z\phi$	$2z^2/s(s^2 + 4z^2)$	$\text{Re } s > 2 \text{Im } z $
$\cos^2 z\phi$	$(s^2 + 2z^2)/s(s^2 + 4z^2)$	$\text{Re } s > 2 \text{Im } z $
$(e^{z\phi} - e^{w\phi})/\phi$	$\log[(s-w)/(s-z)]$	$\text{Re } s > \max\{ \text{Re } z ,  \text{Re } w \}$
$\text{sen } z\phi/\phi$	$\tan^{-1} z/s$	$\text{Re } s >  \text{Im } z $
$\text{sen}^2 z\phi/\phi$	$\frac{1}{4} \log(1 + 4z^2/s^2)$	$\text{Re } s > 2 \text{Im } z $
$e^{-z\phi^2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi/z} e^{s^2/4z} [1 - \text{erf}(s/2\sqrt{z})]$	$\mathbb{C}$
$\log \phi$	$(\log s - \gamma)/s, \gamma = 0.5772\dots$	$\text{Re } s > 0$
$H(\phi - a)$	$e^{-as}/s$	$\text{Re } s > 0$
$e^{a\phi}(1 - 2a\phi)$	$\frac{s}{(s-a)^{3/2}}$	$\text{Re } s > 0$
$\sqrt{\pi\phi}$	$e^{-a/s}$	$\text{Re } s > 0$
$\frac{1}{\sqrt{\pi\phi}} \cos(2\sqrt{a\phi})$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$	

## 266

## APÉNDICE 2 • TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

$u(\phi)$	$\mathcal{L}\{u(\phi)\}(s)$	Dominio de convergencia
$\frac{1}{\sqrt{\pi\phi}} \cosh(2\sqrt{a\phi})$	$\frac{e^{as}}{\sqrt{s}}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$\frac{a}{2\sqrt{\pi\phi^3}} e^{-a^2/4\phi}$	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\operatorname{Re} s > 0$
$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/2\sqrt{\phi}} e^{-v^2} dv$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{Re} s > 0$

Para una lista más extensa de transformadas de Laplace, ver [M, págs. 428-434].

# INTEGRALES DE LÍNEA Y TEOREMA DE GREEN

Las *integrales de línea* son una generalización natural del concepto de integral definida

$$\int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

En este apéndice se dará un breve desarrollo de las integrales de línea de funciones reales  $f(x, y)$  a lo largo de curvas spp en el plano Euclídeo.

El término integral de línea\* es una designación desafortunada, ya que usualmente se evalúan las integrales a lo largo de curvas. Para entender lo que se mide con una integral de línea, recuérdese que la integral definida (1) se obtiene al dividir el intervalo  $a \leq x \leq b$  en  $n$  subintervalos de longitudes  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ , luego se elige un punto  $x_k$  en cada subintervalo, y se evalúa el límite de la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$$

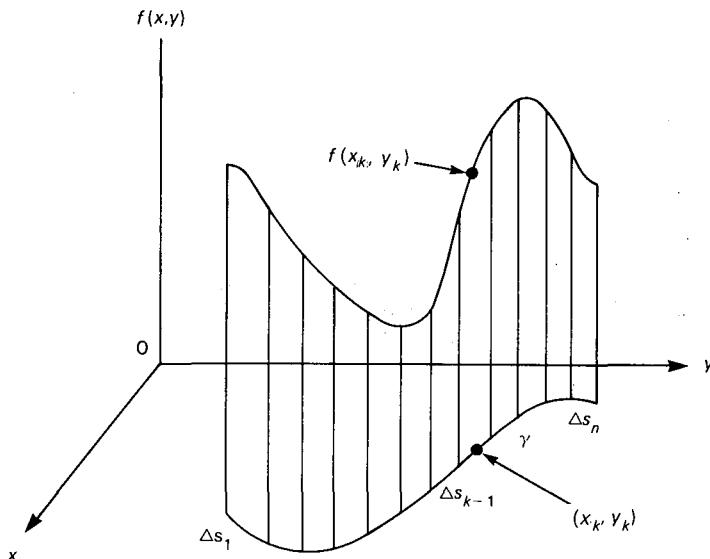
cuando todas las longitudes  $\Delta x_k$  tienden a 0.

Se puede llevar a cabo un proceso similar para una función real  $f(x, y)$  definida en una curva  $\gamma$  suave del plano Euclídeo: se divide  $\gamma$  en  $n$  subarcos de longitudes de arco  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ , se elige un punto  $(x_k, y_k)$  en cada subarco, y se evalúa el límite de la suma

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta s_k \quad (2)$$

cuando todas las longitudes de arco  $\Delta s_k$  tienden a 0 (véase Figura A.1).

\* En inglés line integral, donde line sugiere siempre una línea recta. (N. de. T.)



**FIGURA A.1.** Suma de Riemann para una integral de línea

De la misma manera en que la integral definida (1) puede interpretarse como el área bajo la gráfica de  $f$  entre  $a$  y  $b$ , la integral de línea

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta s_k, \quad (3)$$

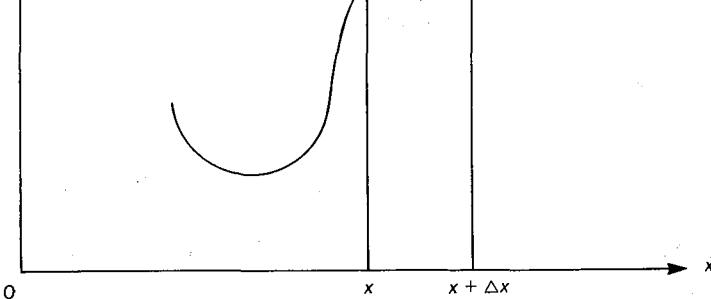
puede interpretarse como el área bajo la gráfica de  $f$  a lo largo de  $\gamma$ .

Puede mostrarse que si  $f$  es continua en la curva suave  $\gamma$ , entonces el límite en (3) existe [B, pág. 301]. De hecho, el límite (3) existe bajo hipótesis mucho más débiles (véase [S]).

Las integrales de línea casi nunca se evalúan mediante la suma de Riemann de la ecuación (3). Los dos ejemplos siguientes muestran el procedimiento usual para determinar el valor de una integral de línea.

### EJEMPLO 1

Evalúe



**FIGURA A.2** Longitud de arco

la longitud de arco  $\Delta s$  que corresponde a un cambio en la variable independiente de  $x$  a  $x + \Delta x$  es, aproximadamente,

$$(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Si se dividen ambos lados por  $(\Delta x)^2$  y se toma el límite cuando  $\Delta x$  tiende a 0, se tiene

$$\left( \frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2, \quad (4)$$

donde  $s(x)$  es la función longitud de arco que mide la longitud del arco a lo largo de la gráfica de  $\gamma$  que va de  $(0, 0)$  a  $(x, x^2)$ . Cambiando variables, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} xy ds &= \int_0^1 xy \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \\ &= \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx. \end{aligned}$$

Al sustituir  $u = 1 + 4x^2$  y cambiar variables, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^3 \sqrt{1 + 4x^2} dx &= \frac{1}{32} \int_1^5 (u - 1)\sqrt{u} du \\ &= \frac{1}{16} \left[ \frac{u^{5/2}}{5} - \frac{u^{3/2}}{3} \right] \Big|_1^5 \\ &= \frac{5^{5/2} + 1}{120}. \end{aligned}$$

Si la curva  $\gamma$  se describe en forma paramétrica se puede proceder como en el siguiente ejemplo.

### EJEMPLO 2

Calcular el valor de la integral de línea

$$\int_{\gamma} \sqrt{y} ds$$

donde  $\gamma$  es la curva paramétrica

$$x = t - \operatorname{sen} t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

**SOLUCIÓN:** Se reescribe la ecuación (4) en la forma

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2$$

y se cambian todas las variables en la integral de línea a funciones de  $t$  para obtener

$$\int_{\gamma} \sqrt{y} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} dt.$$

Al simplificar el segundo radical, se tiene

$$\sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}.$$

Por tanto, al multiplicar los dos radicales, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sqrt{y} ds &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt \\ &= \sqrt{2} (t - \operatorname{sen} t) \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

El valor de la integral de línea  $\int_{\gamma} f(x, y) ds$  para una curva  $\gamma$  spp es *independiente* de la parametrización de la curva  $\gamma$ . Cualquier cambio de parámetros en una curva suave está determinado por una función creciente  $t = t(T)$  con derivada continua que mapea al intervalo  $A \leq T \leq B$  en  $a \leq t \leq b$ . Si se cambian variables y se utiliza la regla de la cadena, se tiene

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) |x'(t)| dt$$

donde  $\gamma$  es la mitad derecha del círculo unitario.

**SOLUCIÓN:** Para demostrar el hecho de que las integrales de línea son independientes de la parametrización, se usarán dos parametrizaciones diferentes de la mitad derecha del círculo unitario. Es importante que ambas parametrizaciones tengan la misma orientación a lo largo de  $\gamma$ .

(i) Sea  $y = t$  y  $x = \sqrt{1 - t^2}$  con  $-1 \leq t \leq 1$ . Entonces

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-t}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \text{y} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} x^3 \, ds &= \int_{-1}^1 (1 - t^2) \, dt \\ &= t - \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(ii) Sean  $x = \cos t$ ,  $y = \operatorname{sen} t$  con  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ . Entonces

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} = 1,$$

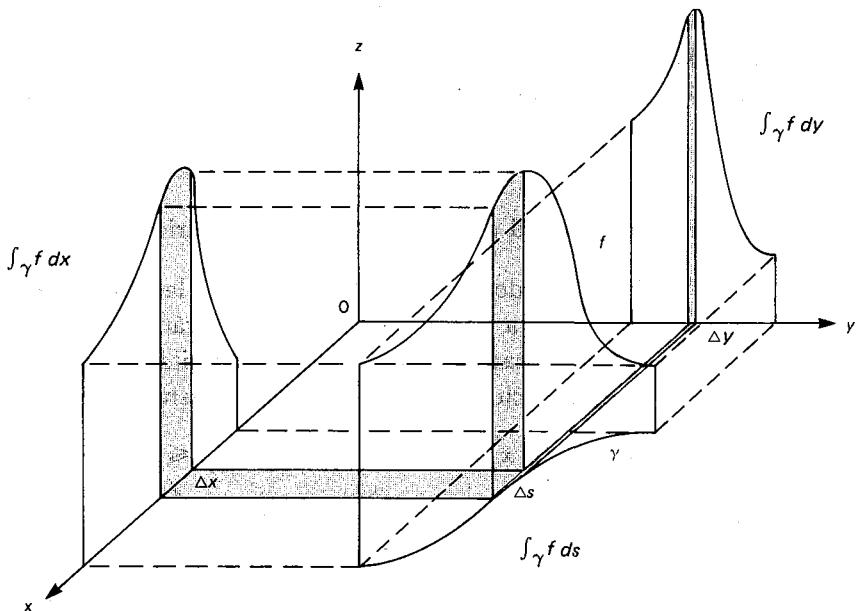
así que

$$\int_{\gamma} x^3 \, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t \, dt = \left( \operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen}^3 t}{3} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$

Hay otros dos tipos de integrales de línea de la función  $f(x, y)$  a lo largo de  $\gamma$  que pueden definirse. Si se reemplaza  $\Delta s_k$  por  $\Delta x_k$  o  $\Delta y_k$  en la ecuación (3), se obtienen las **integrales de línea de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  con respecto a  $x$  o  $y$** :

$$\int_{\gamma} f(x, y) \, dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta x_k,$$

$$\int_{\gamma} f(x, y) \, dy = \lim_{\max \Delta y_k \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta y_k.$$



**FIGURA A.3.** Proyecciones

Estas integrales de línea pueden verse como proyecciones de la integral de línea (3) sobre el plano \$xz\$ o el plano \$yz\$, respectivamente (véase Figura A.3).

La evaluación de estas integrales es similar a lo que se hizo anteriormente.

#### EJEMPLO 4

Evalúe  $\int_{\gamma} y(1 - x) \, dy$  a lo largo de la porción \$\gamma\$ del círculo unitario en el primer cuadrante.

**SOLUCIÓN:** Al parametrizar a \$\gamma\$ como \$x = \cos t\$, \$y = \sin t\$, \$0 \leq t \leq \pi/2\$, se tiene

$$\int_{\gamma} y(1 - x) \, dy = \int_0^{\pi/2} \sin t (1 - \cos t) \cos t \, dt$$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{1}{2} \cos^2 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}.$$

## TEOREMA DE GREEN

Sea  $G$  la región interior de una curva  $\gamma$  spp cerrada simple. Si  $p(x, y)$ ,  $q(x, y)$ ,  $\partial p/\partial x$ , y  $\partial q/\partial y$  son continuas en todos los puntos de  $G \cup \gamma$ , entonces

$$\int_{\gamma} p \, dy + q \, dx = \iint_G \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) \, dxdy,$$

dado que la integral de línea se toma en sentido positivo (contrario al de las manecillas del reloj) alrededor de  $\gamma$ .

**PRUEBA:** Supóngase inicialmente que  $\gamma$  tiene la propiedad de que cualquier recta paralela a algún eje coordenado intersecta a  $\gamma$  en, a lo más, dos puntos. Se dibujan las rectas horizontales y verticales que circunscriben a  $\gamma$  (véase Figura A.4). Entonces los arcos  $ABC$  y  $CDA$  a lo largo de  $\gamma$  pueden definirse por medio de funciones de  $x$ , univalueadas, en el intervalo  $a \leq x \leq b$ .

Se denotan estas funciones por  $y = f_1(x)$  y  $y = f_2(x)$ , respectivamente. Obsérvese que la integral de línea

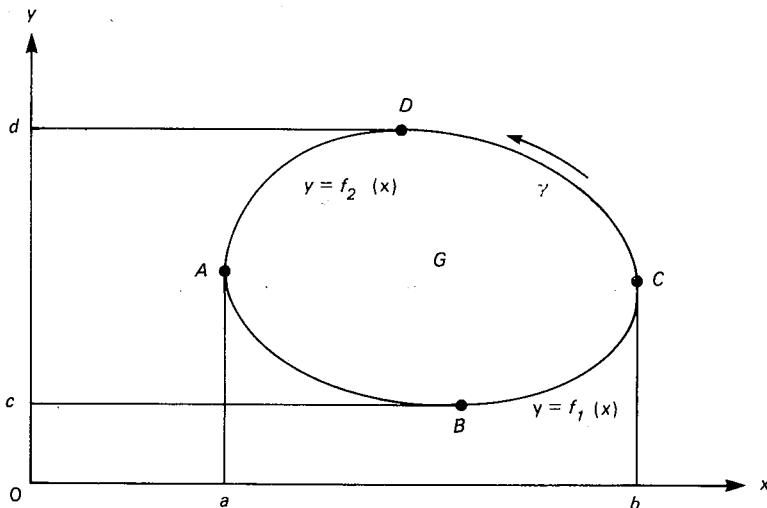


FIGURA A.4.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} q \, dx &= \int_{ABC} q \, dx + \int_{CDA} q \, dx \\ &= \int_a^b q(x, f_1(x)) \, dx - \int_a^b q(x, f_2(x)) \, dx,\end{aligned}$$

ya que  $CDA$  se recorre de derecha a izquierda.

Como la región  $G$  está delimitada por las curvas  $ABC$  y  $CDA$ , se tiene

$$\begin{aligned}\iint_G -\frac{\partial q}{\partial y} \, dxdy &= -\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} -\frac{\partial q}{\partial y} \, dy \, dx \\ &= -\int_a^b \left[ q(x, y) \Big|_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} \right] \, dx \\ &= \int_a^b [q(x, f_1(x)) - q(x, f_2(x))] \, dx.\end{aligned}$$

Por tanto,

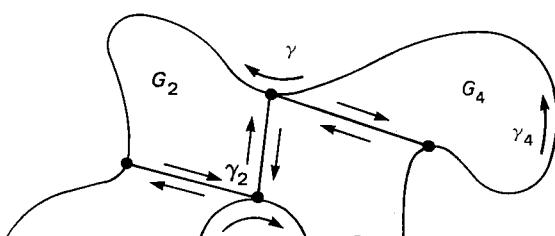
$$\int_{\gamma} q \, dx = \iint_G -\frac{\partial q}{\partial y} \, dxdy.$$

Similarmente, los arcos  $DAB$  y  $BCD$  pueden definirse por medio de funciones univalueadas  $x = g_1(y)$  y  $x = g_2(y)$  en  $c \leq y \leq d$ , con

$$\int_{\gamma} p \, dy = \int_c^d p(g_2(y), y) \, dy - \int_c^d p(g_1(y), y) \, dy$$

y

$$\begin{aligned}\iint_G \frac{\partial p}{\partial x} \, dxdy &= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial p}{\partial x} \, dxdy \\ &= \int_c^d \left[ p(x, y) \Big|_{x=g_1(y)}^{x=g_2(y)} \right] \, dy = \int_{\gamma} p \, dy.\end{aligned}$$



Green a cada una de las subregiones  $G_i$ , y se suman, se nota que la integral de línea a lo largo de los subarcos de  $\gamma_i$  no son subarcos de  $\gamma$  se cancelan por pares, ya que cada subarco se recorre dos veces en sentidos opuestos. Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \iint_G \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy &= \sum_i \iint_{G_i} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_i \int_{\gamma_i} pdy + qdx \\ &= \int_{\gamma} pdy + qdx. \blacksquare \end{aligned}$$

## EJEMPLO 5

Evalúese la integral de línea

$$\int_{\gamma} (x - 2y) dx + x dy,$$

donde  $\gamma$  es el círculo unitario. Utilice el teorema de Green.

**SOLUCIÓN:** Aquí  $p(x, y) = x$  y  $q(x, y) = x - 2y$ , así que  $\partial p / \partial x = 1$ ,  $\partial q / \partial y = -2$  y el teorema de Green conduce a

$$\int_{\gamma} (x - 2y) dx + x dy = \iint_{x^2+y^2<1} [1 - (-2)] dx dy = 3\pi,$$

porque el círculo unitario tiene área igual a  $\pi$ .

## EJERCICIOS

En los Ejercicios 1-8, evalúe la integral de línea dada a lo largo de la curva que se indica.

1.  $\int_{\gamma} x ds$ , donde  $\gamma$  es la recta  $y = x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .
2.  $\int_{\gamma} x ds$ , donde  $\gamma$  es la curva  $y = x^2$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .
3.  $\int_{\gamma} y ds$ , donde  $\gamma$  es la curva  $x^2 = y^3$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .
4.  $\int_{\gamma} x^2 y^2 ds$ , donde  $\gamma$  es el círculo unitario.
5.  $\int_{\gamma} (x^2 - y^2) dx - 2xy dy$ , donde  $\gamma$  es la curva  $y = x^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

6. La integral de línea de  $\int_{\gamma} xy \, dx + x^2 \, dy$ , donde  $\gamma$  es el círculo unitario.
7.  $\int_{\gamma} xy \, dx + x^2 \, dy$ , para  $\gamma$  definida por  $x = 3t - 1$ ,  $y = 3t^2 - 2t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ .
8.  $\int_{\gamma} \frac{y^2}{1+x^2} \, dx + 2y \tan^{-1} x \, dy$ , donde  $\gamma$  es la curva cerrada  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ .
9. Use el teorema de Green para evaluar el Ejercicio 6.
10. Use el teorema de Green para evaluar el Ejercicio 8.
11. Muestre que el área delimitada por la curva  $\gamma$  spp cerrada simple está dada por

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} x \, dy - y \, dx.$$

12. Use el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_{\gamma} 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy$$

donde  $\gamma$  es cualquier curva spp cerrada simple.

13. Muestre que

$$\int_{\gamma} p \, dy + q \, dx = 0$$

para cualquier curva  $\gamma$  spp cerrada simple si  $p$ ,  $q$ ,  $\partial p / \partial x = \partial q / \partial y$  son continuas sobre  $\gamma$  y en su interior.

14. Sean  $(\bar{x}, \bar{y})$  las coordenadas del centroide de una región  $G$  delimitada por una curva  $\gamma$  spp cerrada simple. Pruebe que

$$\bar{x} = \frac{1}{2A} \int_{\gamma} x^2 \, dy, \quad \bar{y} = \frac{-1}{2A} \int_{\gamma} y^2 \, dx$$

donde  $A$  es el área de  $G$ .

15. Muestre, utilizando la notación del Ejercicio 14, que  $A\bar{y} = \int_{\gamma} xy \, dy$ . ¿Puede expresarse  $\int_{\gamma} xy \, dx$  en términos de  $\bar{x}$ ?

16. Con la notación del Ejercicio 14, pruebe que

$$\iint_G \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \, dx \, dy = \int_{\gamma} \frac{dF}{dn} \, ds$$

donde  $dF/dn$  es la derivada direccional de  $F$  en la dirección de la normal exterior a  $\gamma$ .

17. Pruebe que

# BIBLIOGRAFIA

- [A] Ahlfors, L. V. *Complex Analysis*, 2a. ed. McGraw-Hill, Nueva York, 1966.
- [B] Buck, R.C. *Advanced Calculus*. McGraw-Hill, Nueva York, 1965.
- [CKP] Carrier, G. F., Krook, M. y Pearson, C. E. *Functions of a Complex Variable*. McGraw-Hill, Nueva York, 1966.
- [H] Hille, E. *Analytic Function Theory*, Vols. I y II. Ginn (Blaisdell), Boston, Mass., 1959.
- [Hf] Hoffman, K. *Banach Spaces of Analytic Functions*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
- [Ho] Hormander, L. *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*. Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N.J., 1966.
- [J] James, R. C. *Advanced Calculus*, Wadsworth, Belmont, Calif., 1966.
- [Ke] Kellogg, O. D. *Foundations of Potential Theory*, Dover, Nueva York, 1954.
- [Kn] Knopp, K. *Theory of Functions*, Partes I y II. Dover, Nueva York, 1947.
- [Ko] Kober, H. *Dictionary of Conformal Representations*, 2a. ed. Dover, Nueva York, 1957.
- [L] Lang, S. *Complex Analysis*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1977.
- [M] Moretti, G. *Functions of a Complex Variable*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.; 1964.
- [MT] Milne-Thomson. L. M. *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan, Londres, 1938.

- [R] Rothe, R., Ollendorff, F. y Pohlhausen, K. *Theory of Functions*. Dover, Nueva York, 1961.
- [S] Saks, S. *Theory of the Integral*, 2a. ed. Rev. Dover, Nueva York, 1964.
- [Sp] Springer, G. *Introduction to Riemann Surfaces*. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.
- [T] Titchmarsh, E. C. *The Theory of Functions*, 2a. ed. Oxford Univ. Press, Londres y Nueva York, 1939.
- [V] Veech, W. A. *A. Second Course in Complex Analysis*. Benjamin, Nueva York, 1967.
- [W] Whyburn, G. T. *Topological Analysis*. ed. Rev. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; 1964.

# RESPUESTAS A PROBLEMAS IMPARES

## CAPÍTULO 1

### SECCIÓN 1.1

1.  $2+i; -2+i; 2i; \frac{1}{2}i$
3.  $1+2i; 1; -1+i; 1-i$
5.  $2; 2i; 2; i$
7.  $7+i; 3-i; 10+5i; 2-i$
9.  $7-i; -1-3i; 14-5i; \frac{10}{17}-\frac{11}{17}i$
11.  $5+4i; 3+6i; 9+i; -\frac{1}{2}+\frac{9}{2}i$
13.  $-2i$
15.  $-3-4i$
17.  $-\frac{7}{10}+\frac{19}{10}i$
19.  $-10$
21.  $iz = ix - y$
23. Si  $z_2 \neq 0$ , entonces  $z_2\bar{z}_2 = (\text{longitud de } z_2)^2 \neq 0$ , pero  $z_1z_2\bar{z}_2 = 0$ , así que dividiendo ambos lados por  $(\text{longitud de } z_2)^2$  se obtiene  $z_1 = 0$ .
25.  $\text{Im } z_1 = -\text{Im } z_2$  así que  $\text{Im } z_1z_2 = \text{Im } z_2 \cdot (\text{Re } z_1 - \text{Re } z_2) = 0$ . Si  $\text{Re } z_1 = \text{Re } z_2$ , entonces  $\text{Re } z_1z_2 > 0$ . Por tanto  $\text{Im } z_2 = 0$ .
27.  $(x_1 - x_2) - i(y_1 - y_2) = (x_1 - iy_1) - (x_2 - iy_2)$

29.  $\frac{x_1 \pm iy_1}{x_2 \pm iy_2} \cdot \frac{x_2 \mp iy_2}{x_2 \mp iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \pm i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$
31.  $(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A+B) = -b + 3ABw$   
 $AB = \sqrt[3]{\frac{b^2}{4} - D^2} = \frac{-a}{3}$ , así que  
 $w^3 + aw + b = (w - A - B)$ .  
 $(w^2 + (A+B)w + a + (A+B)^2) = 0$  con  $(A+B)^2 - 4 [a + (A+B)^2] = -3(A-B)^2$
33. Use las leyes de comutatividad, asocia-  
tividad y distributividad de los nú-  
meros reales para verificar que la  
suma y la multiplicación complejas  
también satisfacen estas propieda-  
des. Las leyes de la identidad y del  
inverso se mostraron en el texto.
35. Suponga que  $z_1$  y  $z_2$  son, ambos,  
inversos multiplicativos de  $z$ . Enton-  
ces  $z_1z = 1 = zz_2$  y  $z_1 = z_1(zz_2) =$   
 $(z_1z)z_2 = z_2$ .

## SECCIÓN 1.2

1. 1;  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ;

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

3.  $\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} + 2\pi k; \sqrt{2} \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k\right) \right]$

5. 5,  $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k \approx 0.6435 + 2\pi k$ ; 5  $[\cos(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k) + i \sin(\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) + 2\pi k)]$

7.  $\sqrt{53}; \tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) + 2\pi k \approx 1.2925 + 2\pi k; \sqrt{53} [\cos(\tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) + 2\pi k) + i \sin(\tan^{-1}\left(\frac{7}{2}\right) + 2\pi k)]$

9.  $\sqrt{29}; \tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi k \approx 0.3805 + 2\pi k; \sqrt{29} [\cos(\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi k) + i \sin(\tan^{-1}\left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi k)]$

11.  $256(-1+i)$

13.  $-2^{18}$

15.  $2^{12}(-\sqrt{3}+i)$

17.  $\sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right);$

$$\sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

19.  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right);$

$$\sqrt{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

21.  $\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right);$

$$\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right);$$

$$\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right)$$

23.  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}; \frac{-1+i}{\sqrt{2}}; \frac{-1-i}{\sqrt{2}}; \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$(z_1 + z_3)(z_1 - z_3) + (z_1 + z_3)$$

$$(z_1 - z_3) = |z_1|^2 - |z_3|^2 - \bar{z}_1 z_3 + \bar{z}_3 z_1 + |z_1|^2 - |z_3|^2 + z_3 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_3 = 0$$

31.  $|z_1| - |z_2| = |(z_1 - z_2) + z_2| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| - |z_2| = |z_1 - z_2|. \text{ Similarmente } |z_2| - |z_1| \leq |z_1 - z_2|$

33.  $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2 \operatorname{Re} z_1 \bar{z}_2$

35.  $|z - a|^2 = |z|^2 + |a|^2 - 2 \operatorname{Re} z \bar{a}; |1 - az|^2 = 1 + |a|^2 |z|^2 - 2 \operatorname{Re} z \bar{a}, y 0 < (1 - |z|^2)(1 - |a|^2) = 1 - |z|^2 - |a|^2 + |a|^2 |z|^2$

37.  $P(\bar{z}_0) = \overline{P(z_0)} = \bar{0} = 0$

39.  $|z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = z^n = 1 = \cos 2\pi k + i \sin 2\pi k \text{ así que } |z| = 1 \text{ y } \theta = 2\pi k/n. \text{ Pero}$

$$\frac{2\pi(k+n)}{n} = \frac{2\pi k}{n} + 2\pi \text{ así que } z_{k+n} = z_k.$$

41.  $1 + z + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0$

para cualquier raíz  $n$ -ésima de la unidad  $z_k$  ya que  $z_k^n = 1$ . Como las  $n$  primeras raíces  $n$ -ésimas de la unidad son todas diferentes (ver Ejercicio 39) y el polinomio  $1 - z^n$  tiene exactamente  $n$  raíces, una de las cuales es 1,  $1 + z + \dots + z^{n-1}$  debe tener a cada una de las otras raíces  $n$ -ésimas de la unidad como raíz.

43.  $0 \leq \sum_k (|a_k|^2 - 2|a_k z_k| \lambda + |z_k|^2 \lambda^2) = \sum_k |a_k|^2 - \frac{\sum_k |a_k z_k|}{\sum_k |z_k|^2}$

$$+ (\sum_k |z_k|^2) \left( \lambda - \frac{\sum_k |a_k z_k|}{\sum_k |z_k|^2} \right)^2$$

y haga  $\lambda = \sum_k |a_k z_k| / \sum_k |z_k|^2$

- conexo
7. cerrado; no acotado; conexo, pero no simplemente conexo
  9. abierto; acotado; conexo, pero no simplemente conexo
  11. círculo  $|z + 3| = 2$ ; rectas  $\operatorname{Im} z = \pm 1$ ; parábola  $|z| = \operatorname{Re} z + 2$ ; ellipse  $|z + 1| + |z + i| = 2$ ; elipses  $|z - 1| + |z + 1| = 3$  y  $|z - 1| + |z + 1| = 2\sqrt{2}$
  13. Sean  $S_1, \dots, S_n$  conjuntos cerrados, entonces  $\mathbb{C} - S_k$  es abierto. Pero  $\cap_k (\mathbb{C} - S_k) = \mathbb{C} - \cup_k S_k$  es abierto.
  15. Si  $z \in \cup_\alpha S_\alpha$  con cada  $S_\alpha$  abierto, entonces  $z$  es un punto interior de algún  $S_\alpha$ . Por ende, una  $\epsilon$ -vecindad de  $z$  está contenida en  $S_\alpha$  y, por tanto, en  $\cup_\alpha S_\alpha$ .
  17. Suponga que la cerradura  $\bar{S}$  es no conexa. Entonces, existen conjuntos abiertos  $G$  y  $H$  tales que  $\bar{S} \subset G \cup H$ ,  $G \cap H$  es vacía, y  $G \cap \bar{S}$  y  $H \cap \bar{S}$  son no vacías. Como  $S$  es conexo, está contenido en alguno de los conjuntos, digamos  $G$ . Entonces  $S$  está contenido en el conjunto cerrado  $\mathbb{C} - H$ , así que  $\bar{S} \cap H$  es vacía, una contradicción. una contradicción:
  19.  $z = 0$
  21.  $z = \infty$ . No.

#### SECCIÓN 1.4

1.  $|2z - 2| = 2|z - 1| < 2\delta$  así que haga  $\epsilon = 2\delta$
3.  $|z + i| < \delta$  así que haga  $\epsilon = \delta$
5.  $|(2z - 3) - (-1 + 2i)| = |2z - 2 - 2i| = 2|z - (1 + i)| < 2\delta = \epsilon$
7.  $\left| \frac{z^2 - 4}{z - 2} - 4 \right| = \frac{|z^2 - 4z + 4|}{|z - 2|} = |z - 2| < \delta = \epsilon$
9.  $\left| \frac{z^3 - 1}{z - 1} - 3 \right| = \frac{|z^3 - 3z + 2|}{|z - 1|} =$

13.  $|\bar{z} - \bar{a}| = |z - a| < \delta = \epsilon$  así que  $\lim_{z \rightarrow a} \bar{z} = \bar{a}$ .
15.  $\lim_{z \rightarrow a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re}(\lim_{z \rightarrow a} f(z)) = \operatorname{Re} f(a)$
17.  $||f(z)| - |f(a)|| < |f(z) - f(a)| < \epsilon$
19.  $\lim_{z \rightarrow \pm 1} \frac{z^3 - 1}{z^2 - 1} = \lim_{z \rightarrow \pm 1} \frac{z^2 + z + 1}{z + 1} = \frac{3}{2}$ , si  $z = 1$ ; indefinido, si  $z = -1$
21.  $f(z) = \bar{z}$  para  $z \neq 0$  así que es continua en  $\mathbb{C} - \{0\}$  por el ejercicio 13. Como  $\lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$  defina  $f(0) = 0$  para hacerla continua en  $\mathbb{C}$ .
23.  $f(z) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  es continua en  $\mathbb{C} - \{0\}$  por ser el cociente de funciones continuas con denominador no nulo.  $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$  no existe porque obtenemos 1 si nos acercamos sobre el eje real y -1 sobre el eje imaginario. Por tanto la función puede hacerse continua en  $z = 0$ .

25.  $czw + dw = az + b$  así que

$$z = \frac{b - dw}{cw - a} \quad \text{para } z \neq -d/c \text{ y}$$

$$w \neq a/c.$$

El punto  $-d/c$  se mapea en  $\infty$  y  $\infty$  se mapea en  $a/c$ .

27.  $|P(z)| > |a_0| - [|a_1| + \dots + |a_n|] \geq 0$  en  $|z| < 1$

#### SECCIÓN 1.5

1.  $-if_y = e^x (\cos y + i \sin y) = f_x$
3.  $-if_y = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = f_x$
5.  $54z^2 - \frac{z}{2} + 4$
7.  $\frac{-2}{(z - 1)^2}$

9.  $\frac{[f(z+h) \pm g(z+h)] - [f(z) \pm g(z)]}{h} =$   

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \pm \frac{g(z+h) - g(z)}{h}$$

11.  $(P/Q)' = (QP' - PQ') / Q^2$

13.  $f_x = 1$  pero  $-if_y = 0$

15.  $f_x = \frac{x}{|z|}$  y  $-if_y = \frac{-iy}{|z|}$ , para  
 $z \neq 0$ , y  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|}{z}$  no existe, ya  
que tiende a 1 cuando  $z \rightarrow 0$  sobre el  
eje real positivo y a -1 sobre el eje  
real negativo.

17.  $f_x = 2x$  pero  $-if_y = 0$ , así que  
tiene derivadas solamente sobre el eje  
imaginario porque

$$f'(iy) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z+iy) - f(iy)}{z} =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{Re} z)^2}{z} = 0, \text{ ya que } \frac{|\operatorname{Re} z|^2}{|z|}$$

$$|z| < \delta = \epsilon.$$

19.  $f_x = y$  pero  $-if_y = 2y - ix$ , así  
que sólo puede tener derivada en  $z = 0$ , en donde

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \operatorname{Im} z}{z} = 0.$$

21. Use la regla de la cadena del ejercicio  
20

23.  $rv_r = r(v_x x_r + v_y y_r) = xv_x + vy_y =$   
 $-xu_y + yu_x = -u_\theta$ , ya que  $x_\theta =$   
 $-y$  y  $y_\theta = x$ . Similarmente para la  
otra identidad.

7.  $-if_y = \frac{(y^2 - x^2) + 2ixy}{(x^2 + y^2)^2}.$   
 $\cos \frac{x}{x^2 + y^2} \cosh \frac{y}{x^2 + y^2} -$   
 $\frac{2xy + i(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \operatorname{sen} \frac{x}{x^2 + y^2}.$   
 $\operatorname{senh} \frac{y}{x^2 + y^2} = f_x$  se cumple

para  $z \neq 0$ , lo cual implica condiciones suficientes para analiticidad en  $z \neq 0$ .

9.  $\frac{f(z)}{z} = \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^2$  tiene valor 1 sobre  
el eje real y -1 sobre el eje imaginario, entonces no tiene derivada en

$$z = 0. \text{ Pero } u = \frac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2},$$

$$v = \frac{y^3 - 3x^2y}{x^2 + y^2} \text{ satisfacen } u_x = 1$$

$$= v_y, u_y = 0 = -v_x \text{ en } z = 0.$$

11.  $\operatorname{Im}(f + \bar{f}) = 0$  y  $f + \bar{f}$  es analítica, así que el teorema de la derivada nula implica que  $f + \bar{f} = 2 \operatorname{Re} f$  es constante y, por tanto,  $f$  es constante.

13. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann conducen al sistema

$$2uu_x + u_y = 0$$

$$u_x - 2uuy_y = 0$$

$$\text{Si } 1 + 4u^2 \neq 0, \text{ entonces } u_x = u_y = 0.$$

15.  $\operatorname{Im} f = 0$ , así que aplique el teorema de la derivada nula.

17. Si  $f' = f_x = x$ , entonces  $f = \frac{x^2}{2} + g(y)$ , pero  $f' = -if_y = -ig'$  no es una función de  $x$ .

## SECCIÓN 1.6

- Ver la solución del ejercicio 1 de la Sección 1.4, y aplique el teorema sobre condiciones suficientes para analiticidad.

- Ver la solución del ejercicio 3 de la Sección 1.4, y aplique el teorema sobre condiciones suficientes para

ejercicio 41 de la sección 1.2 para obtener

$$\operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2} / \operatorname{sen} \frac{x}{2}.$$

$$23. \operatorname{sen} \frac{(n+1)x}{2} \operatorname{sen} \frac{nx}{2} / \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

25. Use el ejercicio 21 de la sección 1.5.

$$27. \left\{ e^{-\pi} < |w| < e^{\pi} \right\} - \\ \left\{ \operatorname{Re} w < 0 \right\} \cap \left\{ mw = 0 \right\}$$

$$29. f(z) = e^{2\pi z}$$

## SECCIÓN 1.8

$$1. i(e - e^{-1})/2$$

$$3. \frac{(e + e^{-1})}{2} \cos 1 + i \frac{(e - e^{-1})}{2} \operatorname{sen} 1$$

$$5. \frac{(e + e^{-1})}{2} \cos 1 - i \frac{(e - e^{-1})}{2} \operatorname{sen} 1$$

$$7. (e^{-1} - e)/2$$

$$9. e^{2iz} = i, \text{ así que } z = \frac{\pi}{4} + \pi k, k = 0,$$

$$\pm 1, \pm 2, \dots$$

$$11. e^z = 2 \pm \sqrt{3}, \text{ así que } z = \log |2 \pm \sqrt{3}| + 2\pi k i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

13. No, porque  $e^z \neq 0$ .

$$15. e^{iz} + e^{-iz} = e^{-iz} + e^{iz}$$

$$17. \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \quad \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} +$$

$$\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \quad \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} =$$

$$\frac{e^{iz_1} e^{-iz_2} + e^{-iz_1} e^{iz_2}}{2}$$

$$19. \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 2 \frac{(e^{iz} - e^{-iz})}{2i}$$

$$\frac{(e^{iz} + e^{-iz})}{2} \quad y \quad \frac{e^{2iz} + e^{-2iz}}{2} =$$

$$\left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2$$

las dos últimas se siguen de la definición.

$$25. (e^{z_1} + e^{-z_1})(e^{z_2} + e^{-z_2}) + \\ (e^{z_1} - e^{-z_1})(e^{z_2} - e^{-z_2}) = \\ 2(e^{z_1} e^{z_2} + e^{-z_1} e^{-z_2})$$

27. Use los ejercicios 20, 21 y 26.

29. Use la fórmula del cociente para derivadas y el ejercicio 28.

31. Use el ejercicio 26 y la localización de los ceros de  $\operatorname{sen} z$  y  $\cos z$ .

33. Sume las definiciones de  $\cos z$  y de  $i \operatorname{sen} z$ .

35. El segmento de recta  $t + iy$ ,  $|t| < \pi/2$  se mapea en la mitad superior de la elipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 y} = 1, \text{ for } y > 0.$$

El segmento de recta  $x + it$ ,  $t > 0$  se mapea en la mitad superior de la hipérbola

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1$$

que esté en el mismo cuadrante que el segmento de recta.

37. Use el mismo procedimiento que en los ejercicios 34-36 para mostrar que la franja  $0 < x < \pi$ ,  $y > 0$  se mapea en el semiplano inferior. Entonces considere la acción sobre la otra mitad de esta franja.

## SECCIÓN 1.9

$$1. i \arg i = i \left( \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$3. i \arg(-1) = i(\pi + 2\pi k), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$5. e^{-\arg i} = e^{-\pi/2 + 2\pi k}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$7. \frac{i\pi}{2}$$

9.  $e^{-\pi/2}$

11. Para  $a$  real, no negativo, con  $f(0) = 1$  si  $a = 0$ , y  $f(0) = 0$  en otro caso.

Entera para  $a = 0, a \geq 1$ .

13.  $\log |z_1| + i \arg z_1 + \log |z_2| + i \arg z_2 = \log |z_1 z_2| + i \arg(z_1 z_2)$

15.  $a \log z + b \log z = (a+b) \log z$

17.  $\text{Log}(-1 - i) = \log \sqrt{2} - \frac{3\pi i}{4}$ ,

$$\text{Log } i = \frac{\pi i}{2} \text{ pero } \text{Log } \frac{-1 - i}{i} =$$

$$\text{Log}(-1 + i) = \log \sqrt{2} + \frac{3\pi i}{4}$$

19.  $\log z^a = \log(e^{a \log z}) = a \log z$  ya que la exponencial y el logaritmo son funciones inversas.

21. Sea  $z = \cos w = (e^{iw} + e^{-iw})/2$ , entonces  $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$  tiene raíces  $e^{iw} = z + (z^2 - 1)^{1/2}$  donde la raíz cuadrada mapea  $\mathbb{C} - \{0\}^2$  en  $\mathbb{C} - \{0\}$ .

23. Sea  $z = \cot w = i(e^{iw} + e^{-iw})/(e^{iw} - e^{-iw})$ , entonces

$$e^{2iw} = \frac{z+i}{z-i}.$$

25. Si  $z = \cosh w = \frac{1}{2}(e^w + e^{-w})$ , entonces  $e^w = z + (z^2 - 1)^{1/2}$  donde la raíz cuadrada es bivaluada.

27. Si  $z = \sin w$ , entonces  $1 = \cos w \frac{dw}{dz} = (1 - \sin^2 w)^{1/2} \frac{dw}{dz}$ .

29. Si  $z = \tan w$ , entonces  $1 = \sec^2 w \frac{dw}{dz} = (1 + \tan^2 w) \frac{dw}{dz}$ .

31. Sea  $z = \cosh w$ , entonces  $1 =$

$$\operatorname{senh} w \frac{dw}{dz} = (\cosh^2 w - 1)^{1/2} \frac{dw}{dz}$$

33.  $z^{k/2}$  mapea a  $\mathbb{C} - \{0\}^2$  en

## SECCIÓN 1.10

1.  $E_{R_0} = r A \operatorname{Re} e^{iwt}$

$$E_{R_1} = r s^2 A \operatorname{Re} e^{i(wt-\alpha)}$$

$$E_{R_2} = r^3 s^2 A \operatorname{Re} e^{i(wt-2\alpha)}$$

$$E_{R_n} = r^{2n-1} s^2 A \operatorname{Re} e^{i(wt-n\alpha)}$$

... así que  $E_{\text{reflejada}} = \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) E_{R_0} +$

$$\frac{s^2 A}{r} \operatorname{Re} \left\{ e^{iwt} \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{-i\alpha})^n \right\} =$$

$$\left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) E_{R_0} + \frac{1}{r} E_{\text{transmitida}} =$$

$$\left(2 - \frac{1}{r}\right) A \cos wt +$$

$$\frac{(1 - r^2) A \cos (wt - \beta)}{r \sqrt{1 + r^4 - 2r^2 \cos \alpha}}$$

Entonces escriba  $\cos(wt - \beta) = \cos wt \cos \beta + \operatorname{sen} wt \operatorname{sen} \beta$  y póngalo en la forma  $A^* \cos(wt - \gamma)$  eligiendo  $\cot \gamma =$

$$\frac{[(2r-1)\sqrt{1+r^4-2r^2 \cos \alpha} + (1-r^2) \cos \beta]}{(1-r^2) \operatorname{sen} \beta}$$

$$(1-r^2) \operatorname{sen} \beta$$

3.  $\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = f''(ct+x) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$

## CAPÍTULO 2

### SECCIÓN 2.1

1.  $x = a \cos t, y = b \operatorname{sen} t$

3. Por ejemplo,

$$z(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t + i(t-1), & 1 \leq t \leq 2 \\ i(3-t), & 2 \leq t \leq 3 \\ 2 + e^{i\pi(t+2)}, & -3 \leq t \leq -1 \end{cases}$$

13.  $f(z) = y$  no es la derivada de una función analítica.

15.  $e^i - e$

17.  $e^i - e$

19.  $(\cos a - \cosh a)/a$

$$21. \int_0^{2\pi} \frac{z'(t) dt}{\sqrt{(z'(t))^2}} = \pm \int_0^{2\pi} dt$$

23.  $2 - \pi i; 2 + \pi i$

## SECCIÓN 2.2

1. Haga  $z = e^{it}$  para obtener  $\int_{-\pi}^{\pi} t dt = 0$ .

Para  $0 \leq \arg z \leq 2\pi$  obtenemos  $-2\pi^2$

$$3. \int_{\partial G} y dx + iy dy = \iint_G - dx dy \\ = -A$$

$$5. 0 = \int_{\gamma} e^z dz = \int_0^a e^x dx + \\ ai \int_0^{\pi/2} e^{ae^{it}} e^{it} dt - i \int_0^a e^{iy} dy, \\ \text{donde } e^{it} = \cos t + i \sin t, \text{ y considere la parte imaginaria de las dos últimas integrales.}$$

$$7. \operatorname{Sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y, \\ \text{donde } x = at, y = bt, 0 \leq t \leq T$$

$$9. 0 = \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-a}^a \frac{dx}{1+x^2} + \\ i \int_0^b \frac{dy}{(1+a^2-y^2)+2iay} - \\ i \int_0^b \frac{dy}{(1+a^2-y^2)-2iay} - \\ \int_{-a}^a \frac{dx}{(1+x^2-b^2)+2ibx}$$

Multiplique numerador y denominador de la última integral por el complejo conjugado y tome el límite cuando  $a \rightarrow \infty$ .

$$|\operatorname{Ri} \int_0^{\pi/8} e^{-R^2 e^{2it}} e^{it} dt| \leq \\ R \int_0^{\pi/8} e^{-R^2 \cos 2t} dt \rightarrow 0, \\ \text{cuando } R \rightarrow \infty.$$

## SECCIÓN 2.3

1. 0

3.  $2\pi i/(b-a)$

5.  $2\pi i \cos 1$

7.  $2\pi i \operatorname{sen} 1$

9.  $-2\pi i \operatorname{sen} 1$

11.  $-\pi i \operatorname{sen} 1$

13. Rompa la parametrización de  $\gamma_1 + \gamma_2$  en dos partes.

15. Use la desigualdad del triángulo y la propiedad (iv).

17. Use  $|1 + e^{it}| = \sqrt{2(1 + \cos t)}$

19. Aplique la estimación de Cauchy a  $f$  con  $M = (1-r)^{-1}$  y minimice el resultado para todo  $0 \leq r \leq 1$ .

21. Sea  $z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$  e iguale los términos imaginarios.

23. La función es analítica en cada disco  $D$ , y la analiticidad es una propiedad local.

## SECCIÓN 2.4

1. Muestre que  $f^{(n)}$  es constante.

3. Aplique el principio del máximo a la  $F(z)$  definida en el ejercicio 2. Entonces  $|F| \leq 1$  en  $|z| = 1$ . La igualdad hace que  $F$  sea constante.

5. Sea  $f(z) = z$  y sea  $G$  el disco unitario abierto.

7.  $|f| \neq 0$  en la frontera de  $G$ , y si  $f$  no tiene ceros en  $G$ , los principios del máximo y el mínimo implican que  $f$  es constante en  $G$ .

## 9. Por el teorema de Cauchy

$$\int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)} dz = 2\pi i.$$

Cuando  $R \rightarrow \infty$  tenemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{a_n z^n} = 1 \text{ así que para } R \text{ grande,}$$

$$|P(z)| \geq |a_n z^n|/2. \text{ Entonces } 2\pi =$$

$$\left| \int_{|z|=R} \frac{a_0}{zP(z)} dz \right| \leq \frac{4\pi |a_0|}{|a_n| R^n} \text{ que con-}$$

duce a una contradicción cuando  $R \rightarrow \infty$

## SECCIÓN 2.5

1. Use el teorema de Cauchy para derivadas.

3.  $\left| \int_{\Gamma_R} e^{zt} f(z) dz \right| \leq$   
 $2 \sup_{\Gamma_R} |f(z)|$   
 $\int_0^{\pi/2} e^{tR \cos \theta} R d\theta \text{ si } \sigma > 0. \text{ Sea}$   
 $g(\theta) = \cos \theta - (1 - 2\theta/\pi). \text{ Entonces } g(0) = g(\pi/2) = 0 \text{ y } g'' < 0.$   
 $\text{Use } \cos \theta > 1 - 2\theta/\pi \text{ para acotar la integral y muestre que la cota tiende a cero cuando } R \rightarrow \infty.$

5. Suponga que la trayectoria poligonal  $\gamma - \gamma'$  en la prueba del teorema de la antiderivada evita los puntos  $z_1, \dots, z_n$ . Si un número finito de los puntos excepcionales están dentro de cualquier subrectángulo formado por las curvas  $\gamma - \gamma'$ , aplique el ejercicio 4. Entonces aplique el teorema Fundamental.

3. Sea  $f(z) = \operatorname{sen} z$ . Entonces  $f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$ .

5. Si  $f(z) = \operatorname{senh} z$ , entonces  $f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = 1$ .

7. Use la serie geométrica del Ejemplo 2.

9.  $\frac{1}{1 - i - (z - i)} = \frac{1}{1 - i} \left[ \frac{z - i}{1 - i} + \left( \frac{z - i}{1 - i} \right)^2 + \dots \right], |z - i| < \sqrt{2}$

11.  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - \pi/2)^{2n}}{(2n)!}, |z| < \infty$

13.  $\frac{i\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{n} (z - i)^n, |z - i| < 1$

15.  $\log |z| + 3\pi i - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - 2e^{3\pi i})^n}{2^n n}, |z - 2e^{3\pi i}| < 2$

17. 10

19. 6

21. No

23.  $f(z) = (2 - z)^{-1}$

25.  $f(z) = 0$  y  $g(z) = \operatorname{sen} z$  son ambas enteras.

27. Desarrolle  $e^{\alpha \operatorname{Log}(1+z)}$  en una serie de Maclaurin.

## SECCIÓN 3.2

1. 0

3. 1

5.  $1/3$

7.  $R$

9.  $R^k$

21. Use las series de Taylor de  $f(z)$  y  $g(z)$  centradas en  $z_0$  para obtener  $f(z)/g(z)$

$$\frac{f'(z_0)(z - z_0) + f''(z_0)(z - z_0)^2/2 + \dots}{g'(z_0)(z - z_0) + g''(z_0)(z - z_0)^2/2 + \dots},$$

Entonces divida numerador y denominador por  $z - z_0$  y tome el límite cuando  $z \rightarrow z_0$ .

$$23. \sqrt{3} (1 - z)/2 (1 - z^3)$$

25. La serie de potencias para  $e^{zt}$  es entera, así que aplique el teorema de Weierstrass.

27. Derive dentro del signo de integración ya que la serie converge uniformemente.

$$29. \frac{g(t)}{1 - zt} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n t^n g(t) \text{ converge}$$

uniformemente en  $0 \leq t \leq 1$  para  $|z| < 1$ . Aplique el teorema de Weierstrass y derive término a término para obtener

$$f'(z) = \int_0^1 \frac{t g(t)}{(1 - zt)^2} dt.$$

### SECCIÓN 3.3

$$1. \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \dots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-1}$$

$$3. - \sum_{n=0}^{\infty} (1 - z)^{-(n+1)} -$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} z^{-2n-1}$$

$$7. \frac{1}{4} \sum_{n=-1}^{\infty} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n + \sum_{n=-\infty}^{-2} (1-z)^n$$

$$11. \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{-z}{2}\right)^n + z^{-n} \right] + \frac{1}{3}$$

$$13. \frac{1}{z+2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(z+2)^{n+1}}$$

$$15. \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \text{ donde } c_n = c_{-n} \text{ y}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} [k! (n+k)!]^{-1}$$

$$17. \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} (z^{2n+1} + z^{-2n-1}), \text{ donde}$$

$$c_{2n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{k! (2n+1+k)!}$$

$$19. \left( \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n \right) \cdot$$

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^{-(2n+1)}}{(2n+1)!} \right) =$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n (z-1)^n \text{ donde}$$

$$c_n = \sum_{k=q}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}, \text{ con}$$

$q = 0$ , para  $n \geq -1$ ,  $q = [\lfloor n/2 \rfloor]$ , para  $n \leq -2$ , en donde  $[m]$  es el entero más grande  $\leq m$ .

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-1)^{-n}, \text{ donde}$$

$$c_n = \frac{(-1)^{[\lfloor n/2 \rfloor]}}{(2[\lfloor n/2 \rfloor] + 1)!}$$

$$23. a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{e^{z/2(\xi-1/\xi)}}{\xi^{n+1}} d\xi =$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z \operatorname{sen} \theta - n\theta)} d\theta$$

y la parte imaginaria de esta integral es cero.

25.  $\left(z + \frac{1}{z}\right)^m = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^{m-2n}$  y  
 $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{(z+z^{-1})^m dz}{z^{n+1}} =$   
 $\frac{2^{m-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \cos^m(\theta) d\theta.$  Por tanto  
 $\frac{2^{m-1}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((m-2n)\theta) \cos^m \theta d\theta =$   
 $\binom{m}{n}.$

## SECCIÓN 3.4

1.  $z = 0, \infty$  son removibles,  $z = \pm i$  son polos simples.
3.  $z = 0$  es una singularidad esencial,  $z = \infty$  es un polo simple.
5.  $z = 0$  es una singularidad esencial,  $z = \infty$  es removable.
7.  $(z+1)e^{1/(z-1)}/(z^4 + z^3)$  es un ejemplo.

9.  $C(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{2n (2n)!}$

11.  $L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n^2}$

13. Sea  $k$  el orden del polo en  $\infty$  ( $k = 0$  si  $\infty$  es una singularidad removable), y aplique el teorema de Liouville a  $z^{-k} f(z).$  Singularidades esenciales.

15.  $z = \infty$  no es una singularidad esencial, ni puede ser polo de orden  $k \geq 1,$  ya que entonces  $f(z) = z^k f_k(z),$  con  $f_k$  analítica en  $\mathbb{M},$  y no se omite el cero.

## SECCIÓN 3.5

7.  $\left(\operatorname{sen} \frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} = 1$   
 $\frac{\pi^2}{8} \frac{(z-1)^2}{2!} - \frac{\pi^4}{8^2} \frac{(z-1)^4}{4!} + \dots$

No.

9. Sea  $\zeta = e^{2\pi ip/q}$  para cualesquiera enteros positivos  $p$  y  $q,$  y observe que  $f(t\zeta) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow 1.$

11.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)! (z-1)^n}{n!},$

$$f(z) = \frac{2}{z^3}$$

13. Defina  $F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{en } G + \cup \gamma, \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{en } G-. \end{cases}$

Entonces  $F(z)$  es continua en  $G = G + \cup \gamma \cup G-.$  En  $G-$  tenemos  $F(z) = u(\bar{z}) - iv(\bar{z})$  en donde  $f = u + iv.$  Entonces  $-iF_y = v_y(\bar{z}) + iu_y(\bar{z}) = u_x(\bar{z}) - iv_x(\bar{z}) = F_x$  así que  $F$  es analítica en  $G-.$  Para cualquier  $z_0$  dentro de  $\gamma$  considere  $|z - z_0| < \rho$  interior a  $G.$  Divida los círculos en dos semicírculos y muestre por continuidad que

$$\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{F(z)}{z - z_0} dz = 0.$$

15. Si  $|z| = 1$  entonces  $\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \right| \leq$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots = 2$$

así que siempre converge. Sin embargo, derivando término a término se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \frac{-1}{z} \operatorname{Log}(1-z)$$

que diverge en  $z = 1.$

9.  $\operatorname{Res}_{k\pi i} f(z) = (-1)^n k\pi i$

11.  $\operatorname{Res}_{k\pi} f(z) = 1$

13.  $-2\pi i$

15. 0. (Use el teorema del interior y el exterior.)

17.  $-2\pi i [\operatorname{Res}_{-i} f(z)] = \pi i^n$

19. 0, ya que  $\operatorname{Res}_0 f(z) = 0$ .

21.  $\pi i$

23.  $2\pi i [\operatorname{Res}_{\pi/2} \tan z + \operatorname{Res}_{-\pi/2} \tan z] = -4\pi i$

25. Quite todos los factores comunes de  $P$  y  $Q$ . Entonces

$$\left( \frac{P}{(z-r)^a Q_1} \right)' =$$

$$\frac{1}{(z-r)^a} \left( \frac{P}{Q_1} \right)' - \frac{1}{(z-r)^{a+1}}.$$

$$\left( \frac{aP}{Q_1} \right) \text{ así que } \operatorname{Res}_r \left( \frac{P}{Q} \right)' =$$

$$\lim_{z \rightarrow r} \frac{d^a}{dz^a} \left\{ (z-r) \left( \frac{P}{Q_1} \right)' - \frac{aP}{Q_1} \right\}$$

y, por inducción

$$= \lim_{z \rightarrow r} \frac{d^{a-k}}{dz^{a-k}} \left\{ (z-r) \left( \frac{P}{Q_1} \right)^{(k+1)} + (k-a) \left( \frac{P}{Q_1} \right)^{(k)} \right\} = 0.$$

## SECCIÓN 4.2

1.  $\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \sin^2 \theta} =$

$$i \int_{|z|=1} \frac{z dz}{(z^2 - 1)^2 - 4az^2}$$

y  $| \sqrt{a} - \sqrt{a+1} | < 1$

3.  $-4i \int_{|z|=1}$

$$\left( z^2 + \frac{a+b}{a-b} \right) \left( z^2 + \frac{a-b}{a+b} \right)$$

y  $|a-b| < a+b$

5.  $i \int_{|z|=1} \frac{dz}{(az-1)(z-a)}$

7.  $\frac{-i}{2^n} \cdot$

$$\int_{|z|=1} \frac{[(a-ib)z^2 + (a+ib)]^n dz}{z^{n+1}}$$

y calcule el residuo en  $z = 0$ .

9. Use  $\cos ib = \cosh b$  y  $\sin ib = i \operatorname{sen} b$ .

## SECCIÓN 4.3

1. Haga  $a = 0$  en el teorema de esta sección y evalúe el residuo de  $z/(z^2 + 2z + 2)^2$  en  $-1+i$ .

3.  $\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2} =$

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{ai} \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^2} \right\}$$

5.  $\operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_i (z^2 + 1)^{-n-1} \right\}$

7.  $\operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{ib} \frac{z^3 e^{iaz}}{(z^2 + b^2)^2} \right\}$

9.  $\frac{1}{2} \operatorname{Im} \left\{ 2\pi i \left[ \operatorname{Res}_{(1+i)b/\sqrt{2}} \frac{z e^{iaz}}{z^4 + b^4} + \operatorname{Res}_{(-1+i)b/\sqrt{2}} \frac{z e^{iaz}}{z^4 + b^4} \right] \right\}$

## SECCIÓN 4.4

1. Use los residuos en  $x = \pm 1/2$

3. Residuos en  $x = 0, 1/2$ , y escriba el numerador como  $\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\pi x$

## RESPUESTAS A PROBLEMAS IMPARES

5. Residuos en  $x = 0$  y  $x = bi$  de  $f(z) = e^{iz}/z(z^2 + b^2)$
7. Use  $f(z) = (e^{iaz} - e^{ibz})/z^2$  sobre el contorno de la Figura 4.5.
9. Use la identidad
- $$\cos(A - B) - \cos(A + B) = 2 \sin A \sin B$$
- e integre la función
- $$f(z) = \frac{(e^{i(A-B)} - e^{i(A+B)})}{2(z-a)(z-b)}$$
- en donde  $A = m(z-a)$ ,  $B = n(z-b)$  alrededor de un semicírculo de radio  $R$  al que se le añaden semicírculos de radio  $r$  en  $a$  y  $b$ .
11. Use  $f(z) = e^{iaz}/\operatorname{senh} z$  sobre un contorno rectangular  $\{z : |x| \leq R, 0 \leq y \leq 2\pi i\}$  al que se le quitan semicírculos en  $0$  y  $2\pi i$ . Polo en  $\pi i$  con residuo  $-i \operatorname{senh} \pi i$ .
13. Use  $f(z) = e^{az}/\cosh \pi z$  sobre el contorno rectangular  $\{z : |x| \leq a, 0 \leq y \leq 1\}$ . Polo en  $i/2$  con residuo  $\cos(a/2)/\pi i$ .
15. Sustituya  $a = x^a$  y aplique el ejercicio 14.
- 1). Sustituya  $x = b \tan \theta$  y haga  $b = 1$ . Esta sustitución cambia la segunda integral en la del ejemplo 2.

7. 3. Sea  $f(z) = (z^2 - 1) \cdot (z^4 - 5z^2 + 5)$  y note que  $|z^2 - 1| > |z|$  sobre el semicírculo  $|z| = R > 2$ ,  $x > 0$ , y sobre el segmento de recta  $z = iy$ ,  $|y| \leq R$ .
9. 0. Multiplique la ecuación por  $z^2 + 2$ .
11. Aplique el principio del argumento a  $g(z) = f(z) - a$ .
13. Elija cualquier punto  $z_0$  interior a  $G$ . Por el ejercicio 12,  $f(z_0)$  es interior a  $f(G)$  ya que todo punto en un disco suficientemente pequeño, centrado en  $f(z_0)$  tiene su preimagen en  $G$ . Ningún punto interior de  $G$  puede tener valor absoluto máximo ya que todos son interiores a  $f(G)$ .

## SECCIÓN 4.5

1. Use el método del ejemplo 1. Para  $a = 0$  resuelve directamente e interprete la respuesta como un límite cuando  $a \rightarrow 0$ .
3. Vea la respuesta del ejercicio 1.
5. Resuelva directamente para  $a = 0$ , 1, 2. Interprete la respuesta para  $a = 1$  como un límite.
7. Use el método del ejemplo 2.
9. Use  $f(z) = z^a \log z/(z^2 + b^2)$  en la Figura 4.6.
11. Use  $f(z) = e^{iaz}/\operatorname{senh} z$  sobre un contorno rectangular  $\{z : |x| \leq R, 0 \leq y \leq 2\pi i\}$  al que se le quitan semicírculos en  $0$  y  $2\pi i$ . Polo en  $\pi i$  con residuo  $-i \operatorname{senh} \pi i$ .
13. Use  $f(z) = e^{az}/\cosh \pi z$  sobre el contorno rectangular  $\{z : |x| \leq a, 0 \leq y \leq 1\}$ . Polo en  $i/2$  con residuo  $\cos(a/2)/\pi i$ .
15. Sustituya  $a = x^a$  y aplique el ejercicio 14.
- 1). Sustituya  $x = b \tan \theta$  y haga  $b = 1$ . Esta sustitución cambia la segunda integral en la del ejemplo 2.

## CAPÍTULO 5

## SECCIÓN 5.1

1.  $\mathbb{C}$   
3.  $z \neq 0$   
5. Cuadruplica el ángulo a  $2\pi$  radianes.  
7. Duplica el ángulo.  
9. Haga  $z = r(1 + e^{i\theta})$  y eleve al cuadrado
11.  $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$  y aplique las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
13. Mire el teorema de Liouville.
15. Existe un valor  $\theta$  y un  $\epsilon > 0$  tales que  $\operatorname{Re}(e^{i\theta} f'(z)) > 0$  para todo  $z$  en  $|z - z_0| < \epsilon$ .

1.  $w = \frac{i-1}{2} \frac{z+1}{z-1-i}$
3.  $\frac{2-w}{w-4} = \frac{1+i}{2} \frac{1+z}{1+i-z}$
5. No. No es analítica
7.  $(3+4i)/25$
9.  $(2+5i)/3$
11.  $w = (-2+4i)(z+1)/(5iz+2+i)$
13.  $2-\sqrt{3}$
15. El mapeo  $w = i \frac{z-(a-R)}{z-(a+R)}$

mapea al círculo en el eje real. Así,

$$\left[ i \frac{z-(a-R)}{z-(a+R)} \right] = \\ i \frac{\left[ \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a \right] - (a-R)}{\left[ \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a \right] - (a+R)}$$

lo cual implica que

$$z^* = (R^2/(\bar{z}-\bar{a})) + a.$$

## SECCIÓN 5.4

1.  $w = \frac{2i}{\pi} \log \frac{1+w}{1-w}$
3.  $w = \frac{1-z^2}{1+z^2}$
5. Vea el Ejercicio 9 de la Sección 5.1. Dentro de la cardioide.
7. La mapea en si misma invirtiendo la orientación
9. Primero recórrala hacia la izquierda 1 unidad y considere la raíz cuadrada con corte rama sobre el eje real positivo. Finalmente

entonces  $\xi(z) = (2f(z) - \mu - \nu)/(\mu - \nu)$  mapea al plano  $z$  en una superficie de Riemann con dos hojas, y puntos de ramificación en  $\pm 1$ . Escribiendo  $\xi(z)$  como una serie de Laurent, vemos que  $Z(z) = \xi(z) + \sqrt{\xi^2(z) - 1}$  es analítica en  $\pm 1$  y es analítica o tiene polos simples en los polos de  $\xi(z)$ . Además,  $Z(z)$  debe tener al menos un polo simple ya que de otra forma sería constante, así que  $Z(z)$  es una función racional. Finalmente, muestre que  $Z(z)$  es de primer grado, de lo cual se sigue la respuesta. La segunda alternativa surge cuando  $\nu = \infty$ .

## SECCIÓN 5.5

1.  $\operatorname{Im}(Az^{4/3}) = A \operatorname{Im}(z^{4/3}) =$  constante. El origen es un punto de estancamiento.
3.  $\operatorname{Im}(Az^4) = \text{constante o } x^3y - xy^3 =$  constante. El origen es un punto de estancamiento.
5.  $V = \bar{w}' = 1 - 3\bar{z}^2$ , así que  $|V| = 1$ , 2, 4 en 0, 1,  $i$ , respectivamente.  $w' = 0$  cuando  $z = \pm(3)^{-1/2}$ .
7.  $V = 3 + 2i\bar{z}$ , así que  $|V| = 3, \sqrt{13}$ , 1 en 0, 1,  $i$ , respectivamente.  $w' = 0$  cuando  $z = -3i/2$ .
9.  $y + 3x^2y - y^3 = \text{constante};$   
 $y + 2(x^2 - y^2) = \text{constante};$   
 $3y - (x^2 - y^2) = \text{constante};$   
 $\cos x \operatorname{senh} y = \text{constante}.$
11.  $e^w = (z \pm \sqrt{z^2 - a^2})/a$  así que  $\arg[(z \pm \sqrt{z^2 - a^2})/a] =$  constante
13. Las líneas de corriente son hipérbolas confocales

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 v} = 1,$$

$v = \text{constante}$ . Para  $v = 0, \pi$  obtenga el flujo en los bordes de la abertura, pero este flujo no es realizable físicamente porque  $\frac{1}{V} = \frac{dz}{dw} =$

$\frac{a \operatorname{senh} w}{V} = a \sqrt{\cosh^2 w - 1} = \sqrt{z^2 - a^2}$ , así que  $|V|$  es infinito en  $z = \pm a$ .

15.  $\bar{V} = w' = A(1 - a^2/z^2)$  así que, para  $z = ae^{i\theta}$  obtenemos  $|\bar{V}(ae^{i\theta})| = |A(1 - e^{-2i\theta})| = 2A|\sin \theta|$ . Pero  $\frac{p(\infty)}{\rho} + \frac{1}{2}A^2 = \frac{p(z)}{\rho} + 2A^2 \sin^2 \theta$  lo cual implica que  $\frac{p(z)}{\rho} = \frac{p(\infty)}{\rho} + \frac{1}{2}A^2[1 - 4\sin^2 \theta]$ . Si  $A^2 > \frac{2p(\infty)}{3\rho}$  y  $\theta = \pm\pi/2$ , hay cavitación.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^{3/4} \sqrt{1-t}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(3/4)}$$

5.  $w = (1-2z)\sqrt{z-z^2} - (\operatorname{sen}^{-1}(2z-1))/2 - \pi/4$

7. Use las identidades  $\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(3/4) = \pi\sqrt{2}$  y  $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \pi$ . Entonces  $w =$

$$\int_0^z \frac{(z-1)^{3/4} dz}{\sqrt{z}} \quad y$$

$$\left| \int_0^1 \frac{(x-1)^{3/4} dx}{\sqrt{x}} \right| =$$

$$\left| (-1)^{-3/4} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(7/4)}{\Gamma(9/4)} \right| =$$

$$\frac{12\pi\sqrt{2\pi}}{5\Gamma(\frac{1}{4})^2}$$

9. Haga  $s^2 = (z-a)/z$  y considere el mapeo

$$w = \int_0^z \frac{\sqrt{z-a}}{\sqrt{z(z-1)}} dz.$$

### SECCIÓN 5.6

1.  $\operatorname{Im} \sqrt{w^2 + 1} = \text{constante}$ , son las líneas de corriente en el plano  $w$ .
3. Claramente mapea al semiplano superior en un cuadrado, ya que

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-1)}} =$$

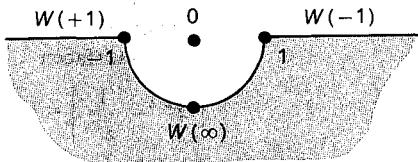
$$i \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} =$$

$$- \int_{-1}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)}} =$$

### SECCIÓN 5.7

1.  $\xi = (z - \sqrt{3})/(z + \sqrt{3})$  mapea la región en el anillo  $(\sqrt{3}-1) < |\xi| < 1$ . Las líneas equipotenciales en el plano  $\xi$  son círculos  $|\xi| = \text{constante}$ , así que las líneas equipotenciales en el plano  $z$  satisfacen  $|z - \sqrt{3}| / |z + \sqrt{3}| = \text{constante}$ .
3.  $u = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{Re}(\operatorname{sen}^{-1} e^z)$

Cuando  $\nu(O)$  es puramente imaginario obtenemos la hodógrafa



con  $W = A/\bar{V} = A/w'(z)$ . Entonces, considere la sucesión de mapeos

$$\begin{aligned} z_1 &= 2 \operatorname{Log} W + i\pi \\ z_2 &= \operatorname{sen}(iz_1/2) \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} z_2 - i.$$

## CAPÍTULO 6

### SECCIÓN 6.1

1.  $\phi = \operatorname{Re}(e^z)$ . Verifique que se satisface la ecuación de Laplace
3.  $\phi = \operatorname{Re}(z^3)$ . Verifique que se satisface la ecuación de Laplace
5.  $f(z) = \operatorname{sen} z$ ; entera
7. No.
9.  $v = \tan^{-1}(y/x) + \text{constante}$ .
11.  $v = -y/[(x-1)^2 + y^2] + \text{constante}$
13. Considera la parte real de  $\log f(z)$ .

$$\begin{aligned} 15. \quad & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 + re^{i\theta}| d\theta = \\ & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log |1 + r^2 + 2r \cos \theta| d\theta \\ & \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta \quad y \\ & \int_0^{2\pi} \log \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \\ & \int_0^{2\pi} \log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta = 2 \int_0^\pi \log \operatorname{sen} \phi d\phi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} u(\xi + re^{i\theta}) r dr d\theta$$

3.  $\operatorname{grad} u = f'$ , en donde  $f = u + iv$  con  $v$  cualquier armónica conjugada de  $u$ .
5. Use  $g(z) = (z^2 - z_0^2)/(z^2 - \bar{z}_0^2)$ .

$$\text{Entonces } u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} u(\xi) \cdot$$

$$\frac{2\xi(z^2 - \bar{z}^2)}{(\xi^2 - \bar{z}^2)(\xi^2 - z^2)} d\xi = \frac{4xy}{\pi}.$$

$$\left[ \int_0^\infty t \left( \frac{u(it)}{|t^2 + z^2|^2} + \frac{u(t)}{|t^2 - z^2|^2} \right) dt \right]$$

7. Si  $u(z)$ ,  $U(z)$  son dos soluciones del problema de Dirichlet, que son continuas en  $\bar{G}$ , entonces  $U(z) - u(z)$  es armónica en la región  $G$  simplemente conexa y continua en  $\bar{G}$ . El principio del máximo implica que  $U - u$  alcanza su máximo y su mínimo en  $\partial G$ . Pero  $U - u = 0$  en  $\partial G$ , así que  $u$  es única.

9.  $u_r(e^{i\theta}) = 0 = u(e^{i\theta})$  y  $u_r(re^{i\theta}) = a \geq u(re^{i\theta})$  por el principio del máximo. Por tanto, por el ejercicio 8, para  $r < k < 1$

$$u(ke^{i\theta}) \leq u_r(ke^{i\theta}) = a \frac{\log k}{\log r} \rightarrow 0$$

cuando  $r \rightarrow 0+$ . Puesto que  $k$  puede hacerse arbitrariamente pequeña,  $u$  no es continua en 0.

11. Use la fórmula integral de Cauchy para  $f(z)$  y la identidad

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi) \bar{z}}{\bar{z} - \bar{\xi}} d\phi = 0.$$

13. Sume y reste

$$u(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} u(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$$

y aplique las técnicas del teorema de Poisson.

$$15. u(z) = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d(t-x)}{(t-x)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \arg \left( \frac{\overline{z-1}}{z+1} \right) = \frac{1}{\pi} \arg \left( \frac{z-1}{z+1} \right),$$

para  $0 \leq \arg z \leq \pi$ .

### SECCIÓN 6.3

$$1. u(z) = \frac{1}{2} \left[ (u_0 + u_1) + (u_0 - u_1) \cdot \frac{2}{\pi} \operatorname{Arg} \left( \frac{i-z}{i+z} \right) \right]$$

$$3. w(z) = \frac{Q}{2\pi} \log \frac{z-i}{z}. \text{ Familia de círculos que pasan por } i \text{ y } 0.$$

5. Fuentes en  $\pm i$ , sumideros en  $0, \infty$ , todos de intensidad  $Q$ , y puntos de estancamiento en  $\pm 1$  y  $\infty$ . Las líneas equipotenciales están dadas por  $|z+1/z| = \text{constante}$ , las líneas de corriente por  $\arg(z+1/z) = \text{constante}$ .

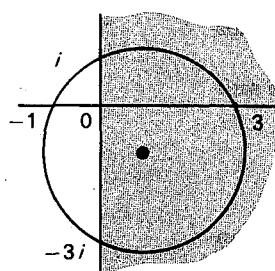
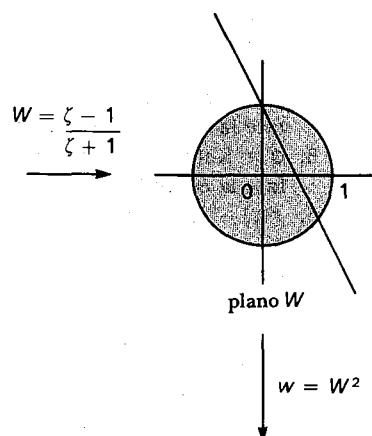
7. Sumideros de intensidad  $2\pi$  en  $\pm 1$ ,  $\pm i$ , y fuentes de intensidad  $4\pi$  en  $0$  y  $\infty$ .  $\pm(1 \pm i)$  y  $\infty$  son puntos de estancamiento. Las líneas equipotenciales satisfacen

$$\left| z^2 - \frac{1}{z^2} \right| = \text{constante}, \text{ mientras}$$

que las líneas de corriente están dadas por  $\arg(z^2 - 1/z^2) = \text{constante}$ .

$$9. \text{ Sea } w = \frac{-Q}{2\pi n} \log \frac{z^n + r}{z^n} = \frac{-P}{2\pi n} \log \left( 1 + \frac{r}{z^n} \right)^{1/n} \rightarrow \frac{-p}{2\pi n} \frac{1}{z^n}.$$

11.

plano  $\zeta$ plano  $W$ 

$$w = W^2$$



$$\pi + 2 \operatorname{Re} [-i \operatorname{Log}(1-z)] =$$

$$\pi + 2 \operatorname{Arg}(1-z).$$

$$3. u(re^{i\theta}) = \frac{\pi}{2} +$$

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^{2n+1} \sin(2n+1)\theta}{2n+1}$$

5. Sea  $f(z)$  entera y acotada por  $M$ . Por la identidad de Parseval

$$2\pi \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} |c_n|^2 =$$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\phi})|^2 d\phi \leq 2\pi M^2,$$

por tanto,  $|c_n| \leq M/r^n \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Entonces  $c_n = 0$  para  $n > 0$  y  $f(z) = \sum_n c_n z^n = c_0$ , una constante.

7. Sea  $f(re^{i\phi}) = \phi^2 - 2\pi\phi$  en la identidad de Parseval, obteniendo  $c_0 = -2\pi^2/3$ ,  $c_n = 2/n^2$  para  $n > 0$

9.  $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 1$ , las otras  $c_n = 0$  así que de la identidad de Parseval se tiene

$$2\pi \sum_0^{n-1} r^{2k} = \int_0^{2\pi} \left| \frac{re^{ni\phi} - 1}{re^{i\phi} - 1} \right|^2 d\phi.$$

Haga  $r = 1$  para obtener

$$2\pi n = \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{ni\phi}/2 - e^{-ni\phi}/2}{e^{i\phi}/2 - e^{-i\phi}/2} \right|^2 d\phi.$$

$$\frac{e^{ni\phi}/2}{e^{i\phi}/2} \left| \frac{2}{d\phi} \right| = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\sin(n\phi)/2}{\sin(\phi)/2} \right)^2 d\phi.$$

11. Sea  $N = N_1 \cdot N_2 \cdot \dots \cdot N_j$ ,  $k = k_1 N_2 \cdot \dots \cdot N_j + k_2 N_3 \cdot \dots \cdot N_j + \dots + k_j$ , y  $n = n_j N_{j-1} \cdot \dots \cdot N_1 + \dots + n_1$ , entonces defina en forma recurrente

$$c^{(l)}(n_1, n_2, \dots, n_l, k_{l+1}, \dots, k_j) =$$

$$\prod_{m=1}^l e^{k_{l+1} N_{l+1} \dots N_j n_m N_{m-1} \dots N_1}.$$

$$1. (\pi/2)^{1/2} e^{-b|t|}$$

$$3. (\pi/2)^{1/2} (1 - b|t|) e^{-b|t|}/2b$$

$$5. e^{-t^2/4k}/\sqrt{2k}$$

$$7. -i(\pi/2)^{1/2} \tanh(\pi t/2)$$

9.  $u(t) = (1 - i \operatorname{sign} t)/2|t|^{1/2}$ . Haga  $t = s^2$  y compare con el ejercicio 15 de la sección 2.2.

$$11. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\phi} U(\phi) \overline{V(\phi)} d\phi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\phi} \overline{V(\phi)} \cdot$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{it\phi} dt \right\} d\phi =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{V(\phi)} e^{i(t-x)\phi} d\phi \right\} dt \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \overline{v(t-x)} dt.$$

Entonces haga  $x = 0$ . Para la segunda parte sea  $V = U$ .

## SECCIÓN 6.6

$$1. \int_0^{\infty} \cosh z\phi e^{-s\phi} d\phi =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} [e^{-(s-z)\phi} + e^{-(s+z)\phi}] d\phi =$$

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s-z} + \frac{1}{s+z} \right] \text{ con } \operatorname{Re} s >$$

$\operatorname{Re} z, -\operatorname{Re} z$

$$3. \frac{-d}{ds} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} z\phi\} = \frac{-d}{ds} (z(s^2 + z^2)^{-1})$$

por la ecuación (3).

$$5. \frac{-d}{ds} \mathcal{L}\{\operatorname{senh} z\phi\} =$$

$$\frac{-d}{ds} (z(s^2 - z^2)^{-1})$$

7. Por el primer teorema del corrimiento  $\mathcal{L}\{e^{-w\phi} \operatorname{sen} z\phi\}(s) = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} z\phi\}(s+w)$  y aplique el ejemplo 5.

9.  $\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}\{\operatorname{sen} z\phi\} = \mathcal{L}\{\phi^2 \operatorname{sen} z\phi\}$

por la ecuación (3).

11.  $\cos 2z\phi = 2\cos^2 z\phi - 1$  así que encuentre  $\mathcal{L}\{(1 + \cos 2z\phi)/2\}$ .

13. Por el segundo teorema del corrimiento

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H(\phi - a) \cos z\phi\} &= \\ e^{-as} \mathcal{L}\{\cos z(\phi + a)\} &\text{ y } \cos z(\phi + a) \\ &= \cos z\phi \cos za - \operatorname{sen} z\phi \operatorname{sen} za. \end{aligned}$$

15.  $U(\phi) = \operatorname{sen} \phi + (\phi \operatorname{sen} \phi - \phi^2 \cos \phi)/4$

17.  $\mathcal{L}\{U\} = U(0+) (s^2 + 1)^{-1/2}$ , que es la transformada de  $U = U(0+) J_0(\phi)$ , con  $J_0$  la función de Bessel de orden cero.

19.  $U(\phi) = |\operatorname{sen} \phi|$

21. Suponga que  $|U|$  está acotada por  $M$  en  $(0, \Phi)$  y por  $N e^{a\phi}$  para  $\phi > \Phi$ . Entonces

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}\{U\}| &\leq \int_0^\Phi M |e^{-s\phi}| d\phi + \\ &\quad \int_\Phi^\infty N |e^{-(s-a)\phi}| d\phi = \\ M \left[ \frac{1 - e^{-(\operatorname{Re}s)\Phi}}{\operatorname{Re}s} \right] &+ N \frac{e^{-(\operatorname{Re}s-a)\Phi}}{\operatorname{Re}s - a} \\ &\rightarrow 0, \text{ cuando } s \rightarrow \infty \end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0+} s\mathcal{L}\{U\} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \left\{ -U(\phi)e^{-s\phi} \right\} \Big|_0^\infty + \\ \int_0^\infty U'(\phi)e^{-s\phi} d\phi &= U(\phi) + \\ \int_0^\infty U'(\phi) \left\{ \lim_{s \rightarrow 0+} e^{-s\phi} \right\} d\phi &= \lim_{\phi \rightarrow \infty} U(\phi) \end{aligned}$$

25. Como las integrales son operadores

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty U(t) \left( \int_0^{x-t} V(s) W(x-t-s) ds \right) dt \\ &= U * (V * W) \text{ haciendo } s = \phi - t. \end{aligned}$$

## SECCIÓN 6.7

1.  $\phi^2 e^{-a\phi}/2$

3.  $\phi \operatorname{sen} a\phi/(2a)$

5.  $(1 - \cos a\phi)/a^2$

7.  $\left[ e^{-a\phi} - e^{a\phi}/2 \left( \cos \frac{\sqrt{3}a\phi}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}a\phi}{2} \right) \right] / 3a^2$

9.  $\operatorname{sen} a(\phi - b) H(\phi - b)/a$

11.  $\phi^{-2/3}/\Gamma(1/3)$

13.  $(e^{b\phi} - e^{a\phi})/\phi$

15.  $(1 - \cos 2a\phi)/2\phi$

17.  $e^{-a^2/4\phi}/\sqrt{\pi\phi}$

19.  $U(\phi) = \phi^2 + \phi^4/12$

21.  $\left\{ [a + c(a^2 + 1)] \cos \phi + \operatorname{sen} \phi - ae^{-a\phi} \right\} / (a^2 + 1)$

23.  $\frac{1}{2}(e^\phi + e^{-\phi}) = \cosh \phi$

25. Tratando a  $x$  como parámetro se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} - \frac{s^2}{a^2} u = -\frac{s}{a^2} f(x)$$

Usando el método de variación de parámetros de las ecuaciones diferenciales obtenemos

$$u(x, s) = c_1 e^{sx/a} + c_2 e^{-sx/a}$$

$$\frac{1}{a} \int_0^x f(y) \operatorname{senh} \frac{s(x-y)}{a} dy$$

con condiciones en la frontera

$$u(0, s) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, s) = 0.$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u(x, s) = 0.$$

Por tanto,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = -c/s$  y

$$u = \frac{ce^{-\mu x/2\delta}}{s} e^{(-x/\sqrt{\delta})\sqrt{s+\mu^2/4\delta}}$$

así que por el teorema de convolución y el primer teorema del corrimiento

$u =$

$$ce^{-\mu x/2\delta} \mathcal{L}\{1\} \mathcal{L}\left\{ \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3 \delta}} e^{-(\mu^2 t + x^2/t)/4\delta} \right\}$$

Entonces,

$$u(x, t) = \frac{cx e^{-\mu x/2\delta}}{2\sqrt{\pi \delta}}$$

$$\int_0^t t^{-3/2} e^{-(\mu^2 t + x^2/t)/4\delta} dt$$

### APÉNDICE A.3

$$1. 2\sqrt{2}$$

$$7. 148.75$$

$$9. 0$$

11. Por el teorema de Green

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\gamma} x dy - y dx &= \\ \frac{1}{2} \iint_G (1 - (-1)) dx dy &= A \end{aligned}$$

13. Por el teorema de Green

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} p dy + q dx &= \\ \iint_G (p_x - q_y) dx dy &= 0. \end{aligned}$$

$$15. \int_{\gamma} xy dy = \iint_G y dx dy =$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\gamma} y^2 dx = A \bar{y}$$

$$\int_{\gamma} xy dx = -\iint_G x dx dy =$$

$$-\frac{1}{2} \int_{\gamma} x^2 dy = -A \bar{x}$$



# ÍNDICE

Con el número que se anota en cada término se indica la página en que éste se define.

- Abel, teorema de, 111
- Abierto, conjunto, 21
- Absoluto, valor, 9
- Acotado, conjunto, 21
- Acumulación, punto de, 20
- Aditiva(o)
  - identidad, 2
  - inverso, 2
- Aislada(os), 105
  - singularidad, 121
- Amplificación, transformación de, 167
- Amplitud, 54
- Analítica
  - continuación, 125, 127
  - función, 32
  - global, función, 129
- Antiderivada
  - de una función analítica en un disco, 92
  - teorema de la, 94
- Apolonio, círculos de, 224
- Arco
  - de Jordan, 62
  - longitud de, 78
  - simple, 62
  - suave por partes (spp), 62
  - suave, 62
- Argumento, 10
  - principio del, 156
- Armónica, funciones, 207
- Asociativas, leyes, 2
- Bernoulli, teorema de, 185
- Bessel, función de, 121
- Bidimensional, 178
- Bilineales, transformaciones, 205
- Binomial, teorema, 8, 108
- Biyección, 25
- Cadena, regla de la, 38
- Calor, flujo de, 194
- Campo, axiomas de, 2
- Cardano, 1
- Cargas, sistema de, 196
- Carleson, L., 258
- Cauchy
  - convergencia de, 146
  - estimación de, 86
  - fórmula integral de, 80
  - teorema de, 72, 96
  - teorema de, para derivadas, 82, 97
  - valor principal de, 146
- Cauchy-Goursat, teorema de, 90

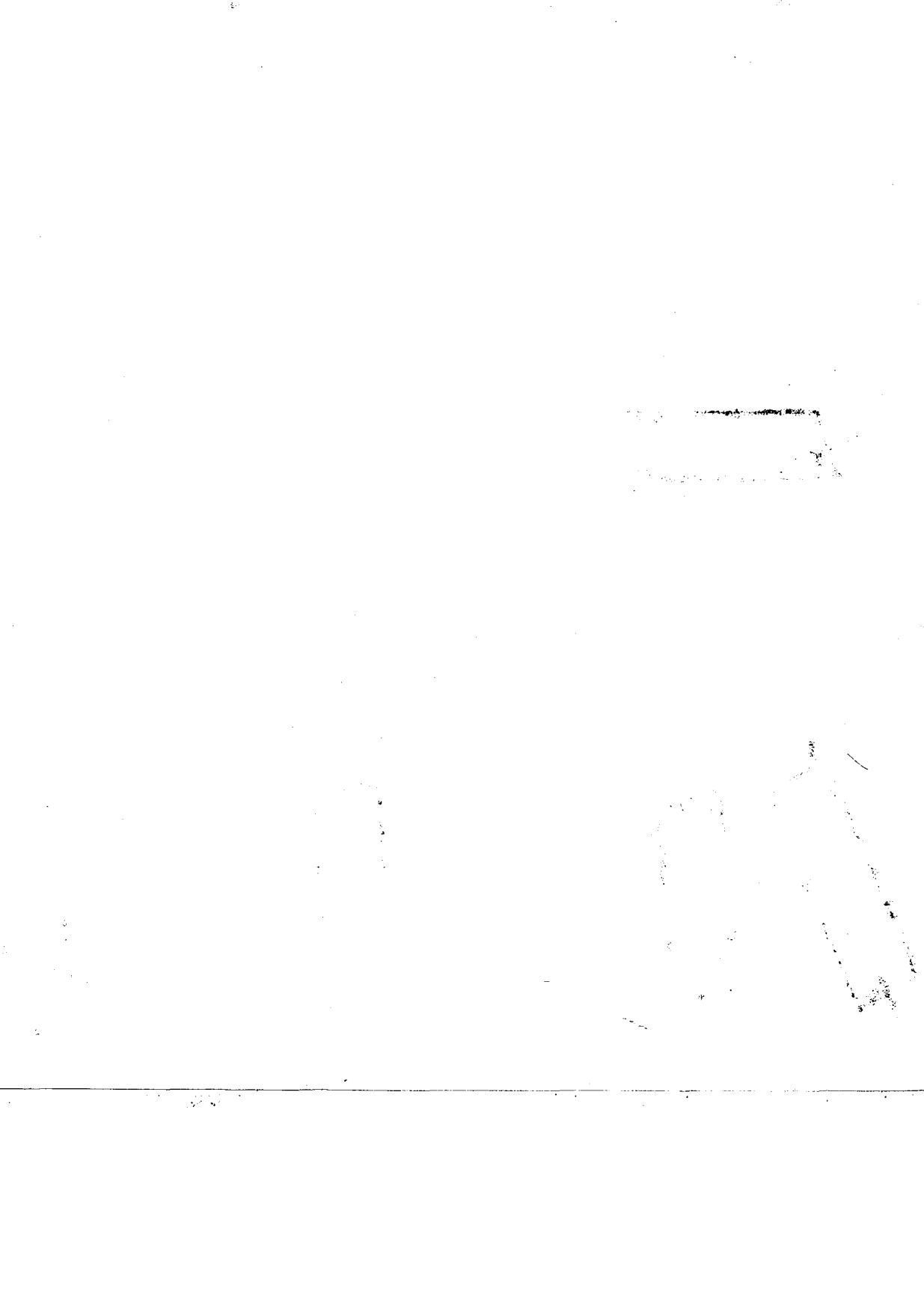
- Cauchy-Riemann**, ecuaciones diferenciales de, 34  
**Cavitación**, 185  
**Cerrado(a)**  
 conjunto, 21  
 curva, 62  
**Cerradura** (de un conjunto), 24  
**Circulación** (del campo), 179, 196  
**Compleja**, exponencial, 4  
**Complejo(s)**  
 conjugado (*véase* Conjugado, complejo)  
 números, 2  
 plano, 5  
 potencial (del flujo), 180, 194, 196  
**Complemento**, de un conjunto, 20  
**Condensador**, 201  
**Conductividad térmica**, coeficiente de, 194  
**Conductor** (contornos), 197  
**Conexo(a)**  
 conjunto, 21  
 múltiplemente (región), 79  
 simplemente, 23  
**Conforme**, mapeos, 161  
**Conjugada(o)**  
 armónica, 208  
 complejo, 6  
**Comutativas**, leyes, 2  
**Continua**, función, 27  
**Converge** (una serie), 101  
**Convergencia**  
 radio de, 110  
 semiplano de, 241  
 uniforme (de series), 108  
**Convergente**, absolutamente, 101  
**Convexa**, región, 166  
**Convolución** (de funciones), 246  
**Corriente**  
 función, 180  
 líneas de, 180, 195  
**Corrientes libres**, líneas de, 202  
**Corrimiento**  
 primer teorema de, 243  
 segundo teorema de, 243  
**Coseno**, función, 44  
**Cruzada**, razón, 172  
**Derivada** (*Continuación*)  
 nula, teorema de la, 38  
**Dipolo**, 225  
 momento del, 225  
**Directriz**, 16  
**Dirichlet**  
 el problema de, 212  
 integral de, 77  
**Distributivas**, leyes, 2  
**Diverge** (una serie), 101  
**Doblete** (puntual), 224  
**Dominio**, 21  
**Duhamel**, fórmulas de, 247  
**Electrostático**, campo, 196  
**Elementos**, 125  
**Elipse**, 15  
**Enestrom-Kakeya**, teorema de, 19  
**Entera**, función, 32  
 $\epsilon$ -vecindad, 19  
**Equipotenciales**, líneas, 180, 196  
**Esenciales**, singularidades, 122  
**Estacionario**, 178  
**Estancamiento**, puntos de, 181  
**Estela** (en un flujo de fluidos), 202  
**Estereográfica**, proyección, 23  
**Exponencial**  
 compleja (*véase* Compleja, exponencial)  
 orden, 241  
**Exterior**  
 ángulo, 187  
 conjunto, 20  
 de la curva (región), 63  
**Extremos** (de una curva), 62  
**Fase**, corrimiento de, 54  
**Fijos**, puntos, 170  
**Fluidos**, flujo de, 178  
 incompresible, 178  
**Flujo**  
 como chorro, 204  
 de calor, 194  
 estacionario, 178  
 irrotacional, 179  
**Foco**, 16

- de una región, 179, 221  
Fuerza, función (*véase* Función fuerza)  
líneas de, 190  
Función  
analítica, 32  
analítica global, 128  
armónica, 207  
compleja, 24  
continua, 27  
corriente, 180  
de Bessel, 121  
de Heaviside, 240  
de transferencia, 247  
entera, 32  
fuerza, 196  
gamma, 131  
hiperbólica, 46  
holomorfa, 32, 59  
impulso, 150  
meromorfa, 122  
multivaluada, 48  
potencia, 50  
potencial, 180  
regular, 59  
Funciones trigonométricas complejas, 44  
Fundamental, teorema, 95  
  
Gamma, función, 131, 155  
Gauss, 1  
ley de, 196  
teorema de, del valor medio, 86  
Geométrica, serie, 102  
Gradiente, 195  
Green, teorema de, 71, 273  
  
Hadamard, fórmula de, 110  
Harnack, desigualdad de, 218  
Heaviside, función de (*véase* Función de Heaviside)  
Hipérbola, 17  
Hiperbólicas complejas, funciones, 46  
Hodógrafo, región, 203  
Holomorfa, función (*véase* Función holomorfa)  
  
Imagen, conjunto, 25  
Imaginaria, 5  
  
punto al, 23  
Intensidad (de una fuente vórtice), 222  
Interferencia  
efectos de, 54  
franjas de, 54  
Interior, 20  
de la curva (región), 63  
y del exterior, teorema del, 136  
Inversión  
fórmula de (para transformada de Laplace), 250  
transformación de, 167, 237  
Inyecciones, 25  
Irrotacional, flujo (*véase* Flujo irrotacional)  
Isotermas, 195  
  
Jacobiano, 165  
Jordan  
arco de, 62  
curva de, 62  
teorema de la, 63  
Joukowski, perfil de, 22  
  
Katznelson Y., teorema de, 258  
  
Lagrange, identidad de, 19  
Laguerre, polinomios de, 98  
Laplace  
ecuación de, 207  
transformada de, 241  
de dos lados, 240  
Laurent  
serie de, 116  
teorema de, 116  
Legendre, polinomio de, 85  
Lemniscatas, líneas, 223  
L'Hospital, teorema de, 114  
Límites, 27  
por un lado, 232  
reglas de, 28  
Línea, integral de, 64, 267  
Liouville, teorema de, 87  
Logaritmo, 47  
Looman-Menchoff, teorema de, 59  
  
Maclaurin, serie de, 104  
Magnitud (*véase* Módulo)

- Mapeo(s), 25  
 conformes, 161
- Máximo, principio del, 87, 210
- Maxwell, ecuaciones de, 58
- Menchoff, 35
- Meromórfica, función, 122
- Mínimo, principio del, 88
- Mittag-Leffler, teorema de, 131
- Möbius, transformaciones de, 205
- Módulo (o magnitud), 9
- Monodromía, teorema de la, 128, 131
- Monogénica, función, 59
- Morera, teorema de, 83
- Múltiplemente, conexa (*véase* Conexa, múltiplemente)
- Multiplete (puntual, o multipolo), 228  
 orden de un (*véase* Orden de un multiplete)
- Multiplicativa(o)  
 identidad, 2  
 inverso, 2
- Multivaluadas, funciones, 150
- Multivaluado, argumento, 48
- Natural, frontera, 130
- No acotado, conjunto, 21
- Noshiro-Warshawski, teorema de, 166
- Números  
 complejos, 2  
 reales, 2
- Onda  
 ecuación de, 54  
 longitud de, 56
- Orden  
 de un multiplete, 228  
 de un polo, 121  
 del cero, 105  
 exponencial, 241  
 punto de ramificación de, 130
- Origen (del sistema coordenado), 5
- Parábola, 16
- Paralelogramo, ley del (para la suma vectorial), 3
- Paralelismo (de líneas), 221, 242
- Polos, 121
- Por un lado, límites (*véase* Límites por un lado)
- Positivo, sentido, 63
- Potencia, función, 50
- Potencial, función, 180, 196  
 campo de, 196
- Principal,  
 rama, 49  
 valor, 10, 49, 146
- Pringsheim, teorema de, 131
- Punto, 20
- Puntual  
 fuente (o sumidero), 221  
 vórtice, 222
- Ramificación, 43  
 cortes de, 43  
 logaritmo, 47  
 principal (rama o ramificación), 49  
 puntos de, 43, 130
- Rápida de Fourier, transformada, 235
- Rapidez, 184
- Razón, prueba de la, 115
- Real, parte, 5
- Reales, números, 1
- Reglas de límites (*véase* Límites, reglas de)
- Regulares, puntos, 129
- Removibles, singularidades, 121
- Residuo, teorema del, 133
- Riemann  
 del mapeo, teorema de, 164  
 esfera de, 23  
 superficie de, 43  
 teorema de, 96
- Rotación, transformación de, 167
- Rouche, teorema de, 157
- Schwarz  
 fórmula de, 219  
 principio de reflexión de, 131  
 tema de, 89
- Schwarz-Cristoffel  
 fórmula de, 187  
 transformación de, 187

- spp (suave por partes) (*véase* Arco, suave por partes)
- Suave
- arco, 62
  - por partes, arco (o función), 62, 232
- Suma (de la serie), 102
- Sumideros (*véase* Fuentes)
- Suryecciones, 25
- Tartaglia, método de, 8
- Taylor
- serie de, 102
  - teorema de, 103
- Temperatura, 195
- Teorema fundamental
- del álgebra, 1, 88, 90
  - del cálculo, 61, 66, 95
- Transferencia, función de, 247
- Traslación, transformación de, 167
- Tres círculos, teorema de los, 89
- Valor, 10, 49, 146
- Valor medio
- del área, teorema del, 218
  - teorema del, 210
- Valores en la frontera, problema con, 211
- Variable compleja, 24
- Variación (del argumento), 156
- Vector, 3
- Velocidad, vector, 179
- Vórtice(s),
- campo plano de, 222
  - fuente, 222
- Wallis, fórmula de, 98
- Weierstrass, teorema de, 108, 131
- Weierstrass-Casorati, teorema de, 123
- Zhukovski, (*véase* Joukowski)





La impresión de esta obra se realizó  
en los talleres de:

**IMPRESORA MMC**  
Quinta cerrada de Barranca s/n MZ. 4 LT. 5  
Col. El Manto Iztapalapa. Tel. 56 86 56 89

Marzo 2002

500 ejemplares más sobrantes