TEMA 3 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

3.1 Sistemas de ecuaciones lineales. Expresión matricial.

Ejemplo

Expresa en forma matricial los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-9y=12 \\ 5x+14y=-23 \end{array}\right\}$, Solution is: $\left[x=-\frac{13}{29}, y=-\frac{43}{29}\right]$

Se trata de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
Vamos a calcular las matrices asociadas a este sistema:

- matriz de los coeficientes→ $A=\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$
- matriz de los términos independientes→ $B=\begin{pmatrix} 12 \\ -23 \end{pmatrix}$
- matriz ampliada→ $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 \\ 5 & 14 & -23 \end{pmatrix}$
- matriz de las incógnitas→ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Se cumple que: $A\cdot X=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -23 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x-9y \\ 5x+14y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -23 \end{pmatrix}$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y+7z=9 \\ -5x-y+11z=0 \\ x+y+z=\sqrt{3} \end{array}\right\}$, Solution is: $\left[x=\frac{5}{32}\sqrt{3}+\frac{9}{8}, y=\frac{17}{24}\sqrt{3}-\frac{3}{2}, z=\frac{13}{96}\sqrt{3}+\frac{3}{8}\right]$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
Vamos a calcular las matrices asociadas a este sistema:

- matriz de los coeficientes→ $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -5 & -1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- matriz de los términos independientes→ $B=\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$
- matriz ampliada→ $A^*=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & 9 \\ -5 & -1 & 11 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$
- matriz de las incógnitas→ $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Tareas 23-10-13: todos los ejercicios de la página 54

3.2 Soluciones. Sistema equivalentes

Ejemplo

Vamos a resolver mediante tranformaciones el siguiente sistema:

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 9y = 12 \\ 5x + 14y = -23 \end{array}\right\}$

- La segunda ecuación la multiplico por 3 y le quito la primera multiplicada por 5.

$$\left.\begin{array}{c} 3x - 9y = 12 \\ 3(5x + 14y = -23) - 5(3x - 9y = 12) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 3x - 9y = 12 \\ 87y = -129 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x - 3y = 4 \\ 29y = -43 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

- La primera ecuación la multiplico por 29 y le sumo la segunda multiplicada por 3.

$$\left.\begin{array}{c} 29(x - 3y = 4) + 3(29y = -43) \\ 29y = -43 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 29x = -13 \\ 29y = -43 \end{array}\right\}$$

- Se dividen ambas ecuaciones por 29.

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{-13}{29} \\ y = \dfrac{-43}{29} \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{c} 3x - 2y + 7z = 9 \\ -5x - y + 11z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\}$

Consideramos la matriz ampliada del sistema:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 & 9 \\ -5 & -1 & 11 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ponemos la última fila la primera.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 9 \\ -5 & -1 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

- A la tercera fila le sumamos cinco veces la primera. A la segunda fila le restamos tres veces la primera.

$$\begin{array}{rrrrr} & -5 & -1 & 11 & 0 \\ + & 5 & 5 & 5 & 10 \\ \hline & 0 & 4 & 16 & 10 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrrr} & 3 & -2 & 7 & 9 \\ - & 3 & 3 & 3 & 6 \\ \hline & 0 & -5 & 4 & 3 \end{array}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 16 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

- En la tercera fila colocamos la tercera por 5 sumado con la segunda por 2.

$$5\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 48 & 31 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 48 & 31 \end{pmatrix}$$

Nos queda el sistema $\left.\begin{aligned} x+y+z&=2\\ -5y+4z&=3\\ 48z&=31\end{aligned}\right\}$

De la última ecuación: $z=\frac{31}{48}$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación para hallar y:

$-5y+4\bullet\frac{31}{48}=3\rightarrow y=-\frac{1}{12}$

Sustituimos z e y en la primera ecuación para hallar x:

$x-\frac{1}{12}+\frac{31}{48}=2\rightarrow x=\frac{23}{16}$

Es un sistema compatible determinado

Tareas 23-10-13: todos los ejercicios de la página 55

3.3 Resolución de sistemas por el Mètodo de Gauss

Ejemplo

Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{aligned} 2x-3y+4z&=1\\ x-y+3z&=2\\ 3x-2y+z&=-3\\ -x-5y+2z&=0\end{aligned}\right\}$

Lo primero que calculamos es la matriz ampliada:

$$A^*=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 3 & 2\\ 3 & -2 & 1 & -3\\ -1 & -5 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

- Cambiamos entre si la primera y la segunda fila:

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2\\ 2 & -3 & 4 & 1\\ 3 & -2 & 1 & -3\\ -1 & -5 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

Vamos a hacer las siguiente operaciones:

- a la cuarta fila le sumo la primera:

$\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & 2\end{pmatrix}$

- a la tercera fila le resto tres veces la primera:

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & -9\end{pmatrix}$

- a la segunda fila le resto dos veces la primera:

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3\end{pmatrix}$

Ahora tenemos la siguiente matriz ampliada:

$$A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -8 & -9\\ 0 & -6 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

Vamos a hacer las siguientes operaciones:

- a la cuarta fila le restamos 6 veces la segunda:

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 17 & 20 \end{pmatrix}$$

- a la tercera fila le sumamos la segunda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 & -12 \end{pmatrix}$$

Ahora tenemos la siguiente matriz ampliada:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 17 & 20 \end{pmatrix}$$

Vamos a hacer las siguientes operaciones:

- en la cuarta fila sumamos 10 veces la cuarta con 17 veces la tercera:

$$10\begin{pmatrix} 0 & 0 & 17 & 20 \end{pmatrix} + 17\begin{pmatrix} 0 & 0 & -10 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Finalmente la matriz ampliada es:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Nuestro sistema será ahora:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 3z &= 2 \\ -y - 2z &= -3 \\ -10z &= -12 \\ 0 &= -4 \end{aligned}\right\}$$

En la última ecuación tenemos una barbaridad matemática: $0 = -4$

Entonces el sistema no tiene solución, es decir, el sistema es incompatible.

Tareas 25-10-13: todos los ejercicios de la página 57.

3.4 Regla de Cramer

Ejemplo

Resuelve por el método de Cramer los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\left.\begin{aligned} 3x - 9y &= 12 \\ 5x + 14y &= -23 \end{aligned}\right\}$

Calculamos primero el determinante de la matriz de los coeficientes.

$\begin{vmatrix} 3 & -9 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 87 \neq 0 \Rightarrow$podemos aplicar la regla de Cramer.

Asi la solución de nuestro sistema será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -9 \\ -23 & 14 \end{vmatrix}}{87} = \frac{-39}{87} = -\frac{13}{29}$$

- $\begin{vmatrix} 12 & -9 \\ -23 & 14 \end{vmatrix} = -39$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & -23 \end{vmatrix}}{87} = \frac{-129}{87} = -\frac{43}{29}$$

- $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 5 & -23 \end{vmatrix} = -129$

b) $\left.\begin{array}{r} x-y+z=12 \\ 2x-y-2z=1 \\ -x+4y-5z=0 \end{array}\right\}$

Calculamos primero el determinante de la matriz de los coeficientes.

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow$podemos aplicar la regla de Cramer.

Asi la solución de nuestro sistema será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{155}{8}$$

- $\begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 155$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{140}{8} = \frac{35}{2}$$

- $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 140$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{8} = \frac{81}{8}$$

- $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 81$

Como $(x,y,z) = \left(\frac{155}{8}, \frac{35}{2}, \frac{81}{8}\right)$ tenemos una única solución⇒nuestro sistema es compatible determinado

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z+t=12 \\ 2x-y-2z-t=1 \\ -x+4y-5z+2t=0 \end{array}\right\}$

Ahora nuestra matriz de los coeficientes es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a aplicar la regla de Cramer; para ello hemos de encontrar un determinante de orden 3 no nulo.

Por ejemplo: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8$ usando la regla de Sarrus.

En este determinante las tres columnas se corresponden con las variables x,y,z.
Entonces consideramos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 12 - t \\ 2x - y - 2z &= 1 + t \\ -x + 4y - 5z &= -2t \end{aligned}\right\}$$

Ahora aplicamos aquí la Regla de Cramer suponiendo que "t" es conocida.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12-t & -1 & 1 \\ 1+t & -1 & -2 \\ -2t & 4 & -5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{155 - 20t}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12-t & 1 \\ 2 & 1+t & -2 \\ -1 & -2t & -5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{140 - 24t}{8} = \frac{35}{2} - 3t$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 12-t \\ 2 & -1 & 1+t \\ -1 & 4 & -2t \end{vmatrix}}{8} = \frac{81 - 12t}{8} = \frac{81}{8} - \frac{3}{2}t$$

Se trata de un sistema compatible indeterminado cuya solución es:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{155 - 20\lambda}{8} \\ y &= \frac{35}{2} - 3\lambda \qquad \lambda \in R \\ z &= \frac{81}{8} - \frac{3}{2}\lambda \\ t &= \lambda \end{aligned}\right.$$ Se trata de una recta del espacio cuatridimensional

Tareas 28-10-13: todos los ejercicios de la página 59.

3.5 Criterio de compatibilidad. Teorema de Rouché

Ejemplo:

Aplica el Teorema de Rouché a los siguientes sistemas de ecuaciones, determinando en cada caso el número de soluciones:

a) $$\left.\begin{aligned} x - y + z + t &= 12 \\ 2x - y - 2z - t &= 1 \\ -x + 4y - 5z + 2t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Nuestras matrices son:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de los coeficientes rectangular de dimensión 3x4

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ matriz ampliada rectangular de dimensión 3x5

En ambos casos, el mayor rango es 3.
Hemos de estudiar el rango de estas matrices:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow$$ al ser un menor de orden 3 $rg(A) = rg(A^*) = 3$

Entonces el sistema es compatible aplicando el Teorema de Rouché.
Como $rg(A) = rg(A^*) = 3 < 4 =$ número de incógnitas, resulta que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y + z + t = 12 \\ 2x - y - 2z - t = 1 \\ -x + 4y - 5z + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 6z = 14 \end{array}\right\}$$

Nuestras matrices son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$ matriz de los coeficientes rectangular de dimensión 4x4

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$ matriz ampliada rectangular de dimensión 4x5

El mayor rango posible de ambas matrices es 4.
Hemos de estudiar el rango de estas matrices:

Ya sabemos que $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow$$ al ser un menor de orden 3 $rg(A) \geq 3$ y $rg(A^*) \geq 3$

Calculamos $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$ =(desarrollando por la última columna)=

$$= -1\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 92 - 28 - 2 \cdot 20 = -160 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 4$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 92 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 28 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 20$$

Como la matriz ampliada contiene a la matriz de los coeficientes, resulta que también $rg(A^*) = 4$
Concluimos: $rg(A) = 4 = rg(A^*) =$ número de incógnitas. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Rouché podemos decir que el sistema es compatible determinado.

c) $\left.\begin{array}{r} x-y+z+t = 12 \\ 2x-y-2z-t = 1 \\ -x+4y-5z+2t = 0 \\ 2x+2y-6z+2t = 14 \end{array}\right\}$

Nuestras matrices son:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ matriz de los coeficientes de dimensión 4x4

$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 2 & 14 \end{pmatrix}$ matriz ampliada de dimensión 4x5

- Vamos a empezar estudiando el $rg(A)$. Es claro que la última fila es suma de las anteriores, por lo que su $rg(A) \leq 3$.

Por otro lado sabemos que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$, dado que tenemos un menor no nulo de orden 3.

- Vamos a estudiar el $rg(A^*)$.

Hemos de calcular menores de orden 4.

Tomamos el siguiente: $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 14 \end{vmatrix} =$

Vamos a desarrollarlo por lo elementos de la tercera fila.

$= (-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 12 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 14 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 14 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 14 \end{vmatrix} =$

$= -158 + 4 \cdot 144 - 5 \cdot 82 = 8 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 4$

Aplicando la Regla de Sarrus nos quedan:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 12 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 14 \end{vmatrix} = 158 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 14 \end{vmatrix} = -144 \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 14 \end{vmatrix} = 82$

Recapitulamos: $rg(A) = 3 \neq rg(A^*) = 4$

Entonces aplicando el Teorema de Rouché el sistema es incompatible.

Tareas 29-10-13: todos los ejercicios de la página 61.

3.6 Discusión y resolución de sistemas

Ejemplo:

Vamos a discutir y resolver los sistemas planteados en el apartado anterior.

a) $$\left.\begin{aligned} x - y + z + t &= 12 \\ 2x - y - 2z - t &= 1 \\ -x + 4y - 5z + 2t &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

Como $rg(A) = rg(A^*) = 3 < 4 =$ número de incógnitas, resulta que el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Hemos terminado la discusión, nos falta la resolución.

Como en el menor no nulo, tenemos las incógnitas x, y, z la que falta (t) pasa al lado de los términos independientes.

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 12 - t \\ 2x - y - 2z &= 1 + t \\ -x + 4y - 5z &= -2t \end{aligned}\right\}$$

Así las soluciones serán, aplicando la Regla de Cramer;

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 - t & -1 & 1 \\ 1 + t & -1 & -2 \\ -2t & 4 & -5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{155 - 20t}{8}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 - t & 1 \\ 2 & 1 + t & -2 \\ -1 & -2t & -5 \end{vmatrix}}{8} = \frac{140 - 24t}{8}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 - t \\ 2 & -1 & 1 + t \\ -1 & 4 & -2t \end{vmatrix}}{8} = \frac{81 - 12t}{8}$$

Es decir, las soluciones son:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{155 - 20\lambda}{8} \\ y &= \frac{140 - 24\lambda}{8} \quad \lambda \in R \\ z &= \frac{81 - 12\lambda}{8} \\ t &= \lambda \end{aligned}\right.$$

Como λ recorre todos los números reales así tenemos las infinitas soluciones del sistema. La representación gráfica es una recta en el espacio cuatridimensional.

b) $$\left.\begin{aligned} x - y + z + t &= 12 \\ 2x - y - 2z - t &= 1 \\ -x + 4y - 5z + 2t &= 0 \\ 2x + 2y + 6z &= 14 \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -160 \neq 0$$

Concluimos: $rg(A) = 4 = rg(A^*)$ =número de incógnitas. Por lo tanto, aplicando el Teorema de Rouché podemos decir que el sistema es compatible determinado.
Estamos en condiciones de aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -5 & 2 \\ 14 & 2 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{-160} = \frac{-690}{-160} = \frac{69}{16}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 14 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{-160} = -\frac{23}{40}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 12 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 14 & 0 \end{vmatrix}}{-160} = \frac{87}{80}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 12 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & 6 & 14 \end{vmatrix}}{-160} = \frac{241}{40}$$

La solución es $(x,y,z,t) = \left(\frac{69}{16}, -\frac{23}{40}, \frac{87}{80}, \frac{241}{40}\right)$

Tareas 29-10-13: todas los ejercicios de la página 63

3.7 Discusión de sistemas con parámetros

Ejemplo

Discute y resuelve en función de los valores de a el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - 3y + az = 1 \\ -x - y - z = a \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

Vamos a calcular dos matrices:

- matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
- matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & a & 1 \\ -1 & -1 & -1 & a \\ 3 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Como hemos de discutir el sistema, hemos de calcular el rango de estas dos matrices.

A Tenemos que $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$

Como A es una matriz cuadrada de orden 3 podemos calcular su determinante.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & a \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4a + 17$$ aplicando la Regla de Sarrus

Este determinante depende del valor de a, por lo que distinguimos:

A1 $4a + 17 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{17}{4}$

En este caso, $rg(A) = 2$, pues su determinante de orden 3 es cero y tenemos un menor de orden 2 no nulo.

La situación del sistema es: $\begin{cases} 2x - 3y - \frac{17}{4}z = 1 \\ -x - y - z = -\frac{17}{4} \\ 3x - y - 2z = -1 \end{cases}$

Tenemos que hacer el estudio del $rg(A^*)$ donde $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -\frac{17}{4} & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -\frac{17}{4} \\ 3 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Como tenemos ya un menor de orden 2 no nulo, añadimos a sus columnas la cuarta, pues ya sabemos que el determinante de las tres primeras es cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & -\frac{17}{4} \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{155}{4} \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 3$$

aplicando la Regla de Sarrus

Recapitulamos; $rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3.$ Por el teorema de Rouche, el sistema es incompatible.

A2 $4a + 17 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 3$

Como A está contenida en A^*, $rg(A^*) = 3$

Recapitulamos: $rg(A) = 3 = rg(A^*) =$ número de incógnitas. Por el teorema de Rouche, el sistema es compatible determinado. Es decir, tiene una única solución.

Estamos en condiciones de resolverlo, aplicando la Regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & a \\ a & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{4a + 17} = -\frac{1}{4a + 17}(a^2 + 7a + 2)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{4a + 17} = -\frac{1}{4a + 17}(3a^2 + 3a + 7)$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & a \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{4a + 17} = -\frac{7a - 9}{4a + 17}$$

Hemos resuelto los determinantes aplicando la Regla de Sarrus.

La solución es $(x, y, z) = \left(-\frac{a^2 + 7a + 2}{4a + 17}, -\frac{3a^2 + 3a + 7}{4a + 17}, -\frac{7a - 9}{4a + 17}\right)$ siempre que $4a + 17 \neq 0$

Tareas 30-10-13: todos los ejercicios de la página 65

Tareas 30-10-13: todos los ejercicios de la página 66.

3.9 Interpretación geométrica de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

16 Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por los puntos:

a) $A(3,-2)$ y $B(2,4)$

Una recta tiene por ecuación implícita: $ax + by = c$ donde a,b,c son tres números reales.

Como son puntos de la recta, se cumplirá que:

$$\left.\begin{array}{r} a \cdot 3 + b \cdot (-2) = c \\ a \cdot 2 + b \cdot 4 = c \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3a - 2b = c \\ 2a + 4b = c \end{array}\right\}$$

Se tendrá que : $3a - 2b = 2a + 4b \Leftrightarrow 3a - 2a = 4b + 2b \Leftrightarrow a = 6b$

Sustituimos este valor de a en una de las dos ecuaciones:

$3 \cdot 6b - 2b = c \Leftrightarrow 18b - 2b = c \Leftrightarrow 16b = c$

Llegamos a que: $\left\{\begin{array}{l} a = 6b \quad b \in R - \{0\} \\ c = 16b \end{array}\right.$ pues recordamos que necesitamos la ecuación de una recta.

La ecuación queda: $6bx + by = 16b$ $\Leftrightarrow$como podemos dividir entre $b \neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x + y = 16$

Tareas 10-11-12: **todos los ejercicios que faltan de la página 67**

Tareas 30-10-13: todos los ejercicios de la página 69

Ejercicios finales del tema

21 Escribe en forma matricial los siguientes sistemas:

a) $$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - z = 4 \\ 5x - y + z = 7 \\ 2x + 2y - 3z = 9 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Tareas 12-11-12: todos los ejercicios que faltan del 21

22 Para cada uno de los siguientes sistemas, escribe la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 4 \\ x - y = 2 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tareas 12-11-12: todos los ejercicios que faltan del 22

23 Escribe de forma desarrollada los siguientes sistemas:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x - 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = 2 \\ 2x + 2y - z = -3 \end{array}\right\}$$

Tareas 12-11-12: todos los ejercicios que faltan del 23

Tareas 12-11-12: 24

25 Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y - 4z = a \\ 2x + 2y - z = b \\ 3x + y - z = c \end{array}\right\}$$

calcula el valor de a, b y c para que la terna $(2,-1,4)$ sea solución del mismo.

Lo único que hay que hacer es sustituir las incógnitas por estos valores:

$$\left.\begin{matrix} 3\cdot 2+2\cdot(-1)-4\cdot 4 \\ 2\cdot 2+2\cdot(-1)-4 \\ 3\cdot 2+(-1)-4 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} -12 \\ -2 \\ 1 \end{matrix}\right\}$$

Conclusión: $(a,b,c) = (-12,-2,1)$

26 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss

a) $\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} 2x+2y=2 \\ 3x-5y=-21 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (2x+2y=2)\div 2 \\ 3x-5y=-21 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 3x-5y=-21 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ (3x-5y=-21)-3(x+y=1) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ -8y=-24 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ (-8y=-24)\div(-8) \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1 \\ y=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} (x+y=1)-(y=3) \\ y=3 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=-2 \\ y=3 \end{matrix}\right\}$

Tareas 12-11-12: todos los ejercicios que faltan del 26

27 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss

a) $\left.\begin{matrix} x+2y-z=2 \\ 2x-2y+z=1 \\ 2x+2y-3z=1 \end{matrix}\right\}$

Trabajamos sobre la matriz ampliada del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

A la última fila le resto la segunda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} =$$

A la segunda fila le quita el doble de la primera:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{pmatrix} =$$

Dividimos la tercera fila entre 4 y la segunda entre 3

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} =$$

Al doble de la tercera le sumo la segunda:

$$2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El sistema ahora es:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=2 \\ -2y+z=-1 \\ -z=-1 \end{array}\right\}$$

Inmediatamente: $z=1$

Sustituimos este valor en la segunda ecuación:

$-2y+1=-1 \Leftrightarrow -2y=-2 \Leftrightarrow y=1$

Sustituimos los valores de y, z en la primera ecuación:

$x+2\cdot 1-1=2 \Leftrightarrow x=1$

Se trata de un sistema compatible determinado: tiene una única solución.

Tareas 12-11-12: todos los ejercicios que faltan del 27 menos g y h.

26 Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas:

a) $\left.\begin{array}{r} x+2y+9z=5 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right\}$

La matriz ampliada del sistema es: $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}=$

- A la segunda fila le quitamos el doble de la primera:

$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -6 & -18 & -12 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & -6 & -18 & -12 \end{pmatrix}=$

- La segunda fila la dividimos por -6 :

$=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Claramente las dos filas son linelamente independientes por lo que $rg(A)=r(A^*)=2$ <número de incógnitas.

Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible indeterminado.

Las soluciones vienen dadas por:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+9z=5 \\ y+3z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+9z=5 \\ y=-3z+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Sustituimos el valor de y de la segunda ecuación en la primera:

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+2(-3z+2)+9z=5 \\ y=-3z+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x-6z-4+9z=5 \\ y=-3z+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=+6z+4-9z+5 \\ y=-3z+2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x=-3z+9 \\ y=-3z+2 \end{array}\right\}$$

La solución será: $\left\{\begin{array}{l} x=-3\lambda+9 \\ y=-\lambda+2 \quad \lambda\in R \\ z=\lambda \end{array}\right.$

Se trataría de una recta del espacio(como λ varía nos otorga un grado de libertad).

Otra forma de hacerlo

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+9z=5 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 9z+x+2y=5 \\ 2x-2y=-2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

- Dividimos por dos la segunda ecuación:

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 9z+x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada queda ahora: $A^* = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Como las filas son claramente linealmente independientes tenemos que $rg(A) = r(A^*) = 2$ <número de incógnitas.

Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible indeterminado.

Las soluciones vienen dadas por:

$$\left.\begin{array}{c} 9z + x + 2y = 5 \\ x - y = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 9z + x + 2y = 5 \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Sustituimos el valor de x de la segunda ecuación en la primera ecuación:

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 9z + y - 1 + 2y = 5 \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 9z + 3y = 5 + 1 \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 9z + 3y = 6 \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Dividimos la segunda ecuación entre 3:

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 3z + y = 2 \\ x = y - 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} z = \dfrac{2 - y}{3} \\ x = y - 1 \end{array}\right\}$$

La solución será: $\left\{\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in R \\ z = \dfrac{2 - \lambda}{3} \end{array}\right.$

Se trataría de una recta del espacio R^3(como λ varía nos otorga un grado de libertad).

Tareas 14-11-12: el apartado b del ejercicio 26.

27 Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de cuatro ecuaciones lineales con dos incógnitas:

a) $\left.\begin{array}{c} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \\ x - 12y = -11 \\ x + 9y = 10 \end{array}\right\}$

La matriz ampliada del sistema es: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -12 & -11 \\ 1 & 9 & 10 \end{pmatrix} =$

- A la cuarta fila le quitamos la primera:

$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

- A la tercera fila le quitamos la primera:

$\begin{pmatrix} 1 & -12 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -14 & -14 \end{pmatrix}$

- A la segunda fila le quitamos el doble de la primera:

$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -7 \\ 0 & -14 & -14 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} =$$

Por dependencia lineal de las filas segunda, tercera y cuarta, y dividiendo la segunda por -7 nos podemos quedar con:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz está asociada al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Como las filas son claramente linealmente independientes tenemos que $rg(A) = r(A^*) = 2$ =número de incógnitas.

Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado.

Las soluciones vienen dadas por:

$$\left.\begin{aligned} x + 2 \cdot 1 &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

La solución será: $(1, 1)$

Se trataría de un punto del plano.

Tareas 14-11-12: el apartado b del ejercicio 27.

28 Aplicando el método de Gauss, estudia y resuelve los siguientes sistemas de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas:

a) $$\left.\begin{aligned} x + y - 2z + 2w &= -8 \\ x - y - z + w &= -2 \\ 2x + 3y - z - w &= -1 \\ 3x + y + z - 3w &= 10 \end{aligned}\right\}$$

La matriz ampliada del sistema es: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} =$

- A la cuarta fila le quitamos el triple de la primera:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -3 & 10 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 & -9 & 34 \end{pmatrix}$$

- A la tercera fila le quitamos el doble de la primera:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

- A la segunda fila le quitamos la primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \\ 0 & -2 & 7 & -9 & 34 \end{pmatrix} =$$

- Cambiamos la segunda y la tercera filas.
- A la tercera fila le sumamos el doble de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \end{pmatrix}$$

- A la cuarta fila le sumamos el doble de la segunda.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 & -9 & 34 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & -19 & 64 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 13 & -19 & 64 \end{pmatrix} =$$

- Multiplicamos la cuarta por 7 y la tercera por por 13, y las restamos en la cuarta.

$$7\begin{pmatrix} 0 & 0 & 13 & -19 & 64 \end{pmatrix} - 13\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & 15 \\ 0 & 0 & 7 & -11 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 \end{pmatrix}$$

Como las filas son claramente linealmente independientes tenemos que $rg(A) = r(A^*) = 4 =$número de incógnitas.

Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado.

Las soluciones vienen dadas por:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-2z+2w = -8 \\ y+3z-5w = 15 \\ 7z-11w = 36 \\ 10w = -20 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-2z-4 = -8 \\ y+3z+10 = 15 \\ 7z+22 = 36 \\ w = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-4 = -4 \\ y+6 = 5 \\ z = 2 \\ w = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x-1 = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ w = -2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ w = -2 \end{array}\right\}$$

La solución es un punto $(1,-1,2,-2) \in R^4$

Tareas 14-11-12: el ejercicio b del 30.

31 Resuelve los siguientes sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando la regla de Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x-3y = 7 \\ 5x-4y = 14 \end{array}\right\}$, Solution is: $[x = 2, y = -1]$

Primero hemos de calcular el siguiente determinante:

$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \Rightarrow$ se puede aplicar la regla de Cramer.

Por otro lado observamos que $rg(A) = rg(A^*) = 2 =$número de incógnitas. Entonces por el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado.

La solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 14 & -4 \end{vmatrix}}{7} = \frac{14}{7} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 14 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-7}{7} = -1$$

La solución es un punto $(2,-1)$ del plano real R^2; es decir, las rectas se cortan en un punto.

Tareas 15-11-12: todos los ejercicios que faltan del 31.

Tareas 15-11-12: 32

33 Dado el sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 4 \\ x+y+w &= 4 \\ y+z+w &= 5 \\ 2x+y+w &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Primero hemos de calcular el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

- A la segunda fila le quito la primera:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A la cuarta fila le quito el doble de la primera:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

- Vamos a desarrollar este determinante por los elementos de la primera columna:

$= +1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ =aplicando la regla de Sarrus$= 1 \neq 0 \Rightarrow$ se puede aplicar la regla de Cramer.

Por otro lado observamos que $rg(A) = rg(A^*) = 4$ =número de incógnitas. Entonces por el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado.

La solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

La solución es un punto $(1,1,2,2)$ del R^4

34 Discute con la ayuda del Teorema de Rouche y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas.

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - 5y = -24 \\ -4x + 3y = 20 \end{array}\right\}$, Solution is: $[x = -2, y = 4]$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -24 \\ -4 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

Tenemos que: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2 =$número de incógnitas. Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado. Y estamos en condiciones de aplicar la regla de Cramer para resolverlo.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -24 & -5 \\ 20 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -24 \\ -4 & 20 \end{vmatrix}}{-14} = 4$$

La solución es un punto $(-2,4)$ del plano real R^2; es decir, las rectas se cortan en un punto.

Tareas 15-11-12: todos los ejercicios que faltan del 34

35 Discute con la ayuda del Teorema de Rouche y resuelve mediante la regla de Cramer los sistemas.

f) $\left.\begin{array}{r} 2x + 2y + 6z = 0 \\ 3x + 5y + 4z = 2 \\ x + y + 3z = 0 \end{array}\right\}$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ =aplicando la regla de Sarrùs$= 0$

Observa que la última fila es la mitad de la primera.

Pero $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3 =$número de incógnitas. Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible indeterminado. Y estamos en condiciones de aplicar la regla de Cramer para resolverlo en el siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 2x+2y+6z=0 \\ 3x+5y+4z=2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+2y=-6z \\ 3x+5y=2-4z \end{array}\right\}$$

La soluciòn será:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -6z & 2 \\ 2-4z & 5 \end{vmatrix}}{4}=\frac{-22z-4}{4}=-\frac{11}{2}z-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -6z \\ 3 & 2-4z \end{vmatrix}}{4}=\frac{10z+4}{4}=\frac{5}{2}z+1$$

La solución queda finalmente como: $\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{11\lambda}{2}-1 \\ y=\frac{5}{2}\lambda+1 \qquad \lambda\in R \\ z=\lambda \end{array}\right.$

Se trataría de una recta del espacio R^3(como λ varía nos otorga un grado de libertad).

Tareas 15-11-12: todos los ejercicios que faltan del 35

37 Estudia y resulve, en su caso, el sistema:

d) $\left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{array}\right\}$

Consideramos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Vamos estudiar sus rangos:

Tomamos el siguiente menor de orden 3:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=$ aplicando la regla de Sarrus$=-1\neq 0$

Tenemos que $rg(A)=rg(A^*)=3<4=$ número de incógnitas. Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius me sale que el sistema es compatible indeterminado. Por otro lado estamos en condiciones de aplicar la regla de Cramer en el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} y=4-x \\ z+w=3 \\ 2z+w=5 \end{array}\right\}$$

Así las soluciones serán:

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 4-x & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{x-4}{-1}=4-x$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-x & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{-2}{-1}=2$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4-x \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

La solución es $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 4-\lambda \quad \lambda \in R \\ z = 2 \\ w = 1 \end{cases}$

Se trata de una recta de R^4, pues λ variable me da un grado de libertad.

38 Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible:

f) $\begin{cases} ax - y = 1 \\ x - ay = 2a - 1 \end{cases}$

Consideramos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada:

$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$

Vamos estudiar sus rangos:

Calculamos $\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = 1 - a^2$

Hacemos que $1 - a^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = a^2 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

Hemos de distinguir los siguientes casos:

f.1) $1 - a^2 \neq 0$

Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius se tiene que $rg(A) = rg(A^*) = 2 =$número de incógnitas entonces el sistema es compatible determinado. Y por otro, lado aplicamos la regla de Cramer para resolverlo.

La solución será:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2a-1 & -a \end{vmatrix}}{1-a^2} = -\frac{1}{a^2-1}(a-1)$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 2a-1 \end{vmatrix}}{1-a^2} = \frac{1}{a^2-1}(-2a^2+a+1)$$

f.2) $a = 1$

El sistema es $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow x = 1 + y$

Es decir, la solución es $\begin{cases} x = 1+\lambda \quad \lambda \in R \\ y = \lambda \end{cases}$

Se trata de una recta lo que nos dice que el sistema es compatible indeterminado.

f.3) $a = -1$

El sistema es $\begin{cases} -x - y = 1 \\ x + y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = -1 \\ x + y = -3 \end{cases}$

Teniendo en cuenta que los coeficientes de x,y son iguales en las dos ecuaciones pero que cambia el término independiente, sabemos que tenemos dos rectas paralelas. Por lo tanto no tienen ningún punto en común, entonces el sistema es incompatible

Otra forma de hacerlo:

Las matrices son: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Ya sabemos que $rg(A) = 1$

Hemos de estudiar el $rg(A^*)$:

Calculamos un menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow rg(A^*) = 2$

La situación ahora es $rg(A) = 1 \neq rg(A^*) = 2.$ Entonces por el Teorema de Rouche-Frobenius será un sistema incompatible.

39 Estudia los siguientes sistemas según los valores del parámetro a y resuélvelos en los casos en que sea posible:

h) $\left.\begin{array}{r} 3x + ay = 1 \\ 2x - y + az = 1 \\ ax - 3y + 2z = 1 \end{array}\right\}$

Consideramos las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ 2 & -1 & a \\ a & -3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^* = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 & 1 \\ 2 & -1 & a & 1 \\ a & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Hemos de estudiar sus rangos:

Como no tenemos ningún menor de orden 2 que no contenga a "a", calculamos directamente:

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & a & 0 \\ 2 & -1 & a \\ a & -3 & 2 \end{vmatrix} =$ aplicando la regla de Sarrus$=$ $a^3 + 5a - 6$

Como el término independiente es -6, consideramos sus divisores$(\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6)$ para hacer la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 5 & -6 \\ 1 & & 1 & 1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & 6 & 0 \end{array}$$

De esta tabla tenemos que: cociente $a^2 + a + 6$

resto 0

y también que: $a^3 + 5a - 6 = (a-1)(a^2 + a + 6)$

Para hallar otros valores de a resolvemos:

$a^2 + a + 6 = 0$, Solution is: $\frac{1}{2} i\sqrt{23} - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} i\sqrt{23} - \frac{1}{2}$

Aplicando la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado, nos queda una raiz negativa, por lo que no tiene solución en los reales.

Hemos de distinguir dos casos:

h.1) $a \neq 1$

Tenemos que $rg(A) = 3 = rg(A^*) =$números de incógnitas. Entonces aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius el sistema es compatible determinado. Y estamos en condiciones de resolverlo por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{a^3 + 5a - 6} = \frac{a^2 + a - 2}{a^3 + 5a - 6}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix}}{a^3 + 5a - 6} = \frac{a^2 - 3a + 2}{a^3 + 5a - 6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & -3 & 1 \end{vmatrix}}{a^3 + 5a - 6} = -\frac{a - a^2}{a^3 + 5a - 6}$$

h.2) $a = 1$

$$\left. \begin{array}{r} 3x + y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 3y + 2z = 1 \end{array} \right\}$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En esta circunstancias $|A| = 0$

Pero $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2$

Hemos de estudiar el $rg(A^*)$

Calculamos menores de orden tres, pues ya sabemos que al menos este rango vale 2 (hemos de asegurarnos que vale o no 3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se cumple que la última fila es el doble de la segunda menos la primera:

$$2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $rg(A^*) = 2,$ pues no hay menores de orden 3 no nulos.

Recapitulamos $rg(A) = 2 = rg(A^*) < 3 =$ número de incógnitas. Entonces por el Teorema de Roche-Frobenius el sistema es compatible indeterminado.

Vamos a aplicar la regla de Cramer partiendo de:

$$\left. \begin{array}{r} 3x + y = 1 \\ 2x - y + z = 1 \end{array} \right\} \text{pues} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$$

Trabajamos con $\left. \begin{array}{r} 3x + y = 1 \\ 2x - y = 1 - z \end{array} \right\}$ y aplicando la regla de Cramer la solución viene dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 - z & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 - z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{3}{5}z - \frac{1}{5}$$

Finalmente la solución viene dada por: $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{3}{5}\lambda - \frac{1}{5} \quad \lambda \in R \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Se trata de una recta del espacio R^3

Tareas 20-11-12: todos los ejercicios que faltan del 39

Tareas 21-11-12: el ejercicio 40

41 Calcula el valor de m para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible indeterminado y escribe las infinitas para este valor hallado. (Aplica el método de Gauss)

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - z = 4 \\ 4x - y - 2z = 1 \\ 2x - 4y - z = -3 \\ 2x - my - z = 4 \end{array}\right\}$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & -1 \\ 2 & -m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \\ 2 & -m & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se ve que en A^* la tercera fila es combinación lineal de la primera y la segunda:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto nos podemos quedar nada mas con:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -m & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & -m & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Claramente $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \Rightarrow rg(A) \geq 2$

Ahora hay que calcular $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -m & -1 \end{vmatrix} = 2 + 4m - 12 - 2 - 4m + 12 = 0$

Esto nos dice que el valor de $|A|$ es cero independientemente del valor que le demos a m. Por otro lado, tenemos que $rg(A) = 2$ para cualquier valor de m.

Ahora hemos de calcular el $rg(A^*)$, que por ahora es mayor o igual que dos.

$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ hay que darse cuenta que tienes dos filas iguales.

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -m & 4 \end{vmatrix}$ =aplicando la regla de Sarrus= $-14m - 42$

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 \\ -m & -1 & 4 \end{vmatrix}$ =aplicando la regla de Sarrus= $-7m - 21$

Igualamos a cero estas dos expresiones en m.

- $-14m - 42 = 0$, Solution is: -3
- $-7m - 21 = 0$, Solution is: -3

Recapitulamos:

Si $m = -3 \Rightarrow rg(A^*) = 2$ pues todos los menores de orden 3 son nulos. De ahí que $rg(A) = rg(A^*) = 2 < 3 =$ número de incógnitas. Entonces por el Teorema de Rouche-Frobenius el sistemas compatible indeterminado.

Si $m \neq -3 \Rightarrow rg(A^*) = 3$ pues tenemos dos menores de orden 3 no nulos. De ahí que $rg(A) = 2 \neq rg(A^*) = 3$. Entonces por el Teorema de Rouche-Frobenius el sistemas incompatible.

Ahora hemos de trabajar con $m = -3$:

Las matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

Como la primera y tercera fila son iguales me quedo nada mas con:

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

- A la última fila le quito el doble de la primera:

$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 0 & -7 \end{pmatrix}$

$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

que está asociada al sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 2x + 3y - z = 4 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + 3 - z = 4 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2x = 1 + z \\ y = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} x = \frac{1+z}{2} \\ y = 1 \end{array}\right\}$$

Finalmente la solución es $\left\{\begin{array}{l} x = \frac{1+\lambda}{2} \\ y = 1 \qquad \lambda \in R \\ z = \lambda \end{array}\right.$

Se trata de una recta del espacio R^3

Tareas 21-11-12: ejercicio 46

48 En una clase de segundo de Bachillerato, por cada tres alumnos que estudian Tecnologías de la Información, diez estudian Comunicación Audiovisual, y por cada dos alumnos que estudian TI, tres estudian Frances. Calcula el número de alumnos que cursan cada una de las materias mencionadas sabiendo que en la clase hay 35 alumnos y que cada uno de ellos sólo está matriculado en una de las asignaturas.

Primero vamos a asignar las incógnitas:

$x =$ número de alumnos de TI
$y =$ número de alumnos de CA
$z =$ número de alumnos de FR

El problema queda planteado como:

$$\left\{\begin{array}{c} 3x = 10y \\ 2x = 3z \\ x + y + z = 35 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x - 10y = 0 \\ 2x - 3z = 0 \\ x + y + z = 35 \end{array}\right.$$

Se trata de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

Vamos a ver si funciona la regla de Cramer:

Calculamos $\begin{vmatrix} 3 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 59 \neq 0$

Estamos en condiciones de aplicar la regla de Cramer. La solución vendrá dada por:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 35 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{59} = \frac{1050}{59} = 17.797 \approx 18$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 35 & 1 \end{vmatrix}}{59} = \frac{315}{59} = 5.3390 \approx 5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 35 \end{vmatrix}}{59} = \frac{700}{59} = 11.864 \approx 12$$

Se ve que $18 + 5 + 12 = 35$

La solución es

$18 =$ número de alumnos de TI
$5 =$ número de alumnos de CA
$12 =$ número de alumnos de FR

Tareas 21-11-12: 49

Tareas 22-11-12: 50,51,53,54,56,57.

52 Una fábrica de perfumes dispone de 600*l* de un producto A y 400*l* de un producto B. Mezclando los productos A y B se obtienen diferentes perfumes. Este año quieren preparar dos clases de perfume: el de la primera clase llevará tres partes de A y una de B, y será vendido a 50 euros/*l*. Y el de la segunda clase llevará los productos A y B al 50% y será vendido a 60 euros/*l*.

a) ¿Cuántos litros de cada clase de perfume se podrán preparar?

b) ¿Qué ingresos totales se obtendrán por la venta de la totalidad de los productos fabricados?

Primero definimos las incógnitas:

$x =$ litros del perfume clase 1ª
$y =$ litros del perfume clase 2ª

Tenemos la tabla siguiente:

	perfume 1ª	perfume 2ª	
producto A	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	600*l*
producto B	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	400*l*

En estas condiciones los enunciados del problema se traducen matemáticamente en:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 600 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 400 \end{array}\right\}, \text{Solution is: } [x = 400, y = 600]$$

Vamos a resolverla empleando el método de Gauss:

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 600 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 400 \end{pmatrix}$$

- A la segunda fila le quitamos la primera dividida por 3:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 400 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 200 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 600 \\ 0 & \frac{1}{3} & 200 \end{pmatrix}$$

De la última fila es $\frac{1}{3}y = 200 \Leftrightarrow y = 3 \cdot 200 = 600$

De la primera fila $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = 600$

Sustituimos el valor de y en esta última ecuación: $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \cdot 600 = 600 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x + 300 = 600 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}x = 600 - 300 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3} \cdot 300 = 400$

a) Se preparan 400l del perfume clase 1ª y 600l del perfume clase 2ª.

b) Se recaudará $400 \cdot 50 + 600 \cdot 60 = 56\,000$ euros

55 Determina la medida de cuatro pesas de una balanza si se sabe que pesadas en grupos de tres dan como resultados respectivos 9, 10, 11 y 12 g.

Llamamos x, y, z, w a los pesos de las pesas desconocidas.

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y + z + w = 11 \\ x + y + w = 10 \\ x + z + w = 12 \end{cases}$$

Consideramos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

Vamos a ver si podemos aplicar la regla de Cramer:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ desarrollando por una fila o columna y luego aplicando la regla de Sarrrus$= -3 \neq 0$

Entonces podemos aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 11 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 1 \\ 1 & 12 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 10 & 1 \\ 1 & 0 & 12 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$w = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 0 & 1 & 12 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-15}{-3} = 5$$

Las pesas son de 5, 4, 3, 2 g.

Sería más ràpido resolverlo por el método de Gauss.

60 La suma de las edades actuales de tres hermanos es 63 años. Hace dos años, la edad del mediano era 5 años más que un tercio de la suma de las edades de los otros dos, y dentro de cuatro años, el menor tendrá 9 años más que la quinta parte de la suma de los otros dos. Halla las edades actuales de cada uno de los tres hermanos.

Llamamos $x =$edad actual del hermano pequeño
$y =$edad actual del hermano mediano
$z =$edad actual del hermano mayor

Tenemos la siguiente tabla de edades:

	edad actual	hace dos años	dentro de cuatro años
pequeño	x	$x-2$	$x+4$
mediano	y	$y-2$	$y+4$
mayor	z	$z-2$	$z+4$

$$\begin{cases} x+y+z = 63 \\ y-2 = 5+\dfrac{x-2+z-2}{3} \\ x+4 = 9+\dfrac{y+4+z+4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 63 \\ 3y-6 = 15+x+z-4 \\ 5x+20 = 45+y+z+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z = 63 \\ -x+3y-z = 17 \\ 5x-y-z = 33 \end{cases}$$

Vamos a aplicar la regla de Cramer: para ello calculamos

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ $=$aplicando la regla de Sarrus$=$ $-24 \neq 0$ $\Rightarrow$se puede aplicar la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 63 & 1 & 1 \\ 17 & 3 & -1 \\ 33 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-24} = 16$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 63 & 1 \\ -1 & 17 & -1 \\ 5 & 33 & -1 \end{vmatrix}}{-24} = 20$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 63 \\ -1 & 3 & 17 \\ 5 & -1 & 33 \end{vmatrix}}{-24} = 27$$

Las edades de los hermanos son 16, 20 y 27 años.