Capítulo 2

Modelos lineales y Programación lineal

1. Formas de los modelos

Forma estándar:
Max o min
Igualdades : =
Variables positivas.
Lados derechos positivos

Forma canónica:
Max
Desigualdades : <=
Variables positivas.

Forma irregular.
Max o min
Presenta : =,>=, <=.
Variables positivas.

$x_1 + x_2 \geq b_1$

Convertir desigualdades en igualdades

Variables de holgura:
Convierten las desigualdades <= en igualdades.
Se debe sumar a la restricción
Se representa con $\mathbf{h_p}$

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq b_1 \qquad\qquad x_1 + 3x_2 + x_3 + h_1 = b_1$$

Variables superfluas:
Convierten las desigualdades >= en igualdades.
Se deben restar a la restricción.
Se representa con $\mathbf{s_p}$

$$x_1 + x_2 \geq b_1 \qquad\qquad x_1 + x_2 - s_1 = b_1$$

2. Reglas de equivalencia

F.O MAX ≅ F.O min

<= ≅ >=

>= ≅ <=

Multiplicar por (-1)

2. Reglas de equivalencia

La igualdad $\cong$

>=

<=

Método gráfico

Se aplica cuando se tienen dos variables en la formulación.

Resuelve problemas formulados en :

- Forma canónica
- Forma irregular
- Forma estándar

Usa el sistema de coordenadas cartesianas.

Solamente emplea el primer cuadrante.

Método gráfico

Paso 1: Transformar las desigualdades en igualdades simplemente cambiando el operador relacional, a igualdad.

Paso 2: Graficar la recta correspondiente a cada restricción.

Paso 3: Determinar el área de cada desigualdad, sombreando el espacio correspondiente en función al operador relacional, es decir si la desigualdad es mayor o igual, entonces se sombreará el área que está a su derecha, y se sombreará el lado izquierdo si la desigualdad es de menor o igual. Si es igualdad simplemente se dibuja la recta que pasa por ese punto, y no existe ningún área a sombrear, (simplemente se consideran los puntos que componen la recta).

Paso 4: Se determina la región factible en función a la intersección de todas las áreas correspondientes a las restricciones.

Paso 5: Evaluar la función objetivo con los valores de los puntos extremos de la región factible y hallar la solución en función al tipo de optimización, es decir para MAXIMIZACIÓN, se elige el mayor valor y para minimización, se elige el menor valor.

Método gráfico

EJEMPLO:

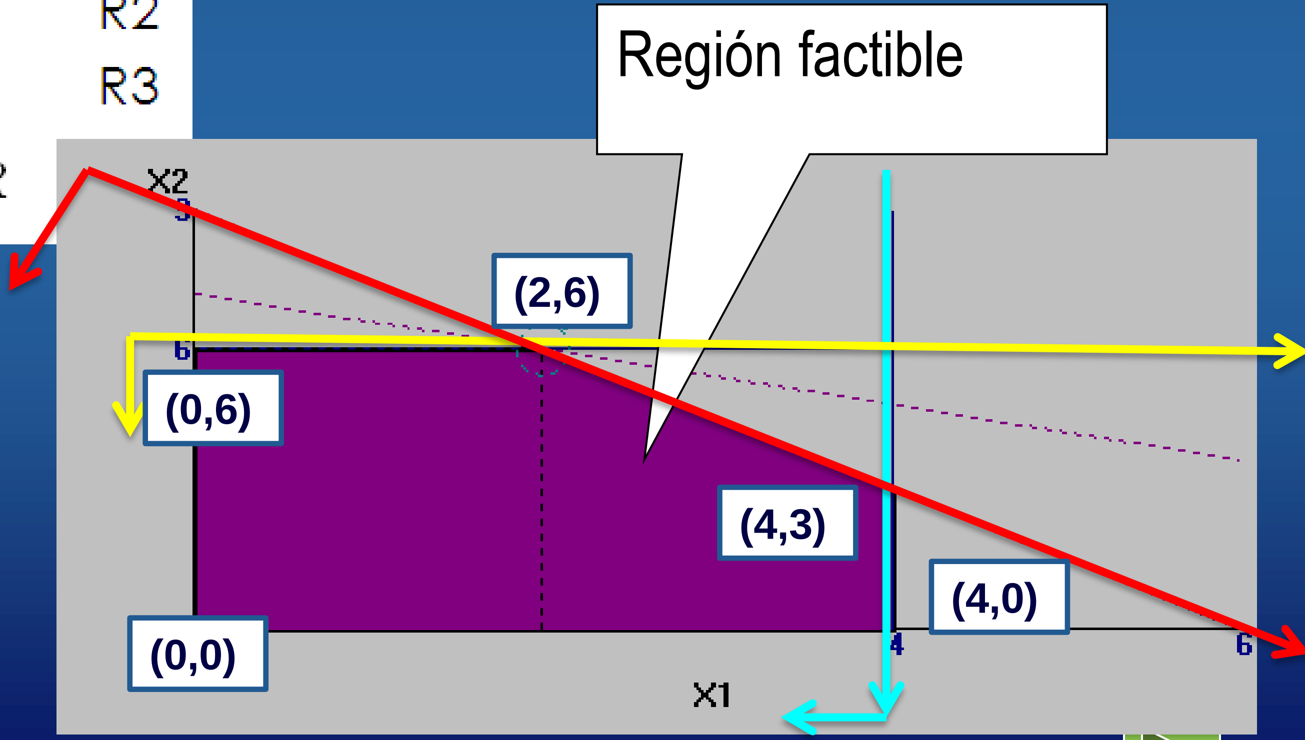
$$MAX \quad z = 3x_1 + 5x_2$$

$$x_1 \leq 4 \qquad R1$$

$$2x_2 \leq 12 \qquad R2$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18 \qquad R3$$

$$\forall x_i \geq 0 \wedge x_i \in R$$



Método gráfico

X1	X2	Z
0	0	0
4	0	12
0	6	30
4	3	27
2	6	36

Solución única y óptima factible.

$$z^* = 36$$

$$x_1{}^* = 2$$

$$x_2{}^* = 6$$

Método gráfico

Tipos de soluciones:

Solución única: Cuando solamente uno de los puntos de la región factible cumple con la optimización del problema.

Solución múltiple: Cuando varios de los puntos de la región factible cumplen con el objetivo de optimización.

No solución: Cuando no existe región factible (es decir no se logra obtener áreas comunes entre todas las rectas)

Método gráfico

Adicionalmente las soluciones son:

Optimas: Porque cumplen con el objetivo de obtener el valor mas alto o el mas bajo dependiendo del tipo de optimización

Factibles: Los valores de las variables satisfacen todas las restricciones establecidas.

Por eso se denomina:

Solución óptima factible.

Método gráfico

$x_1 =$ libras de carne de res

$x_2 =$ libras de carne de cerdo

$$\begin{array}{lll} \text{F.O} & \min & z = 0{,}80x_1 + 0{,}60x_2 \\ \text{S.a} & & 0{,}20x_1 + 0{,}32x_2 \leq 0{,}25 \\ & & x_1 + x_2 = 1 \\ & & \forall x_i \geq 0 \wedge x_i \in \mathbb{R} \end{array}$$

Método gráfico

Se deben combinar 0,6 libras de carne de res y 0,4 libras de carne de cerdo para formar cada libra de albóndiga que no contenga mas del 25% de grasa.

$x_1 = 0,6$ y $x_2 = 0,4$

$z = 0,72$

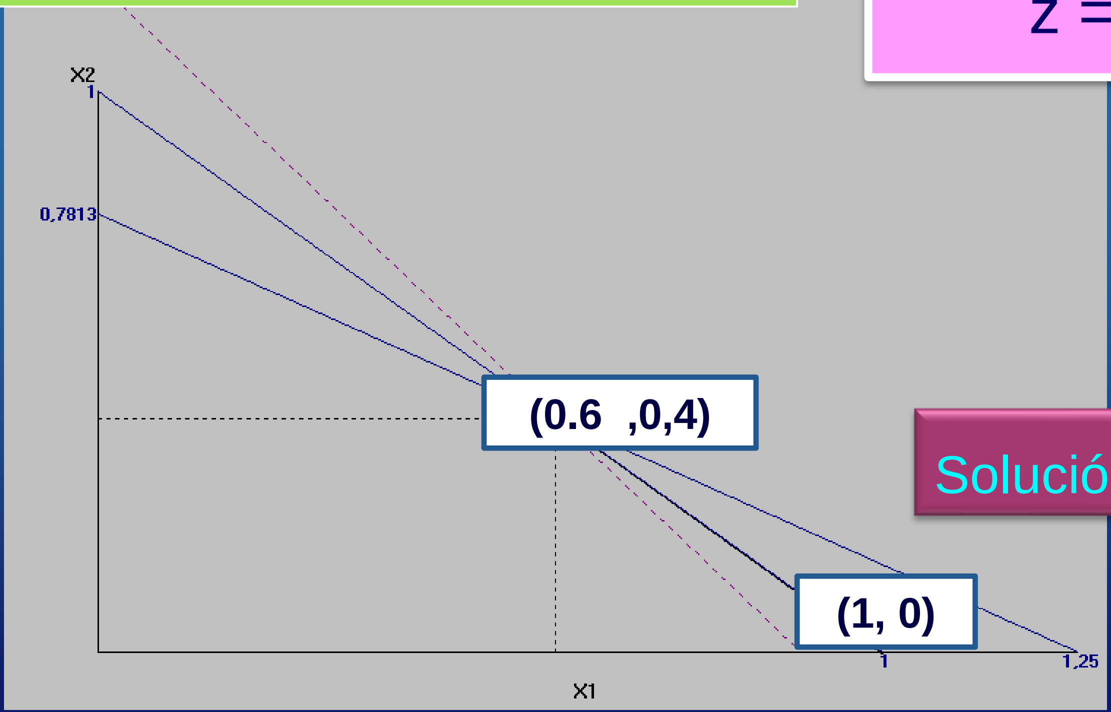
$x_1 = 1$ y $x_2 = 0$

$z = 0,8$

$$z^* = 0,72$$

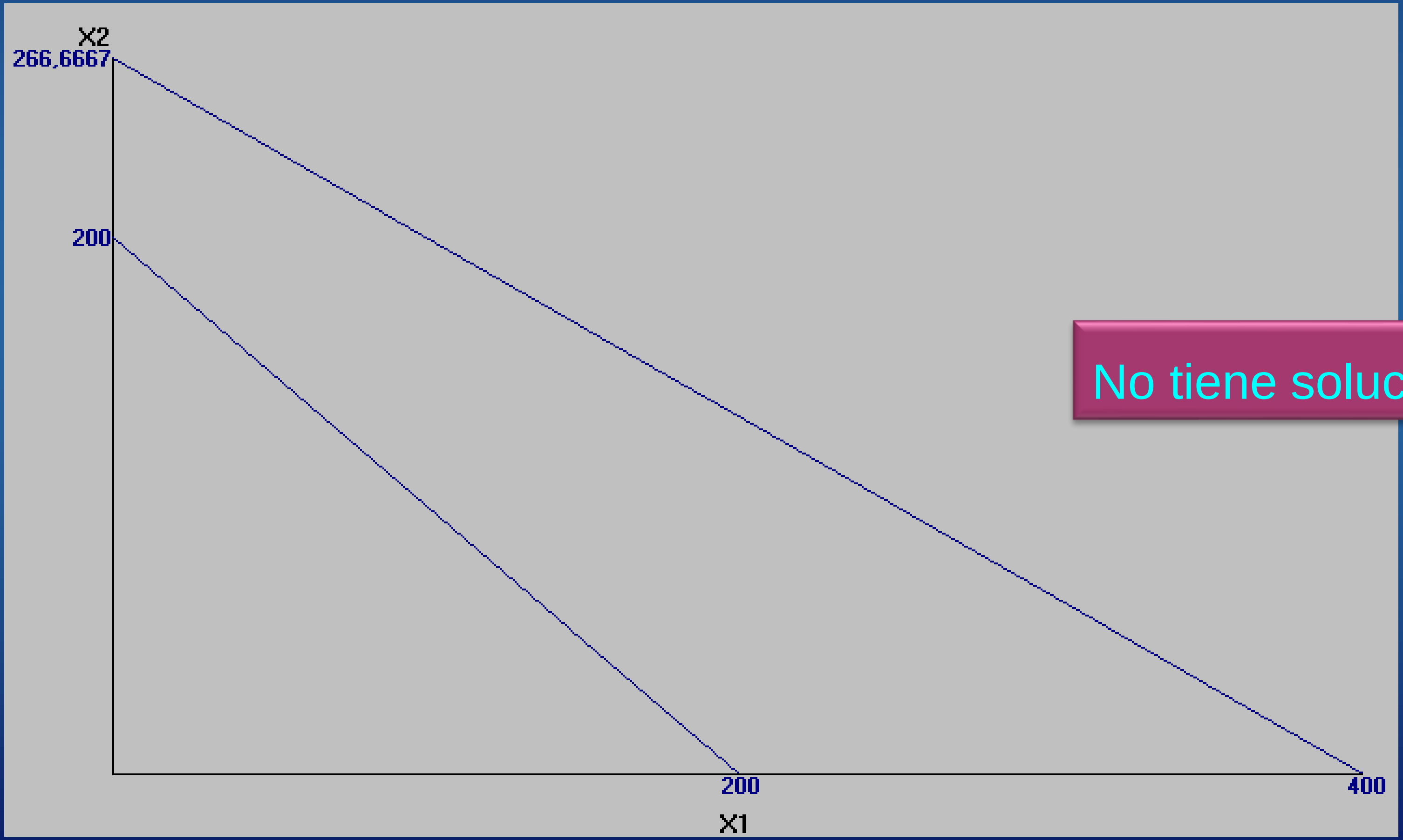
$$x_1^* = 0,6$$

$$x_2^* = 0,4$$



Solución única y óptima factible

Método gráfico



No tiene solución

Método gráfico

$x_1 =$ cantidad de lotes de la oferta A

$x_2 =$ cantidad de lotes de la oferta B

$$
\begin{array}{lll}
\text{F.O} & \text{MAX} & z = 30x_1 + 50x_2 \\
\text{S.a} & & x_1 + 3x_2 \leq 200 \\
 & & x_1 + x_2 \leq 100 \\
 & & x_1 \geq 20 \\
 & & x_2 \geq 10 \\
 & & \forall x_i \geq 0 \wedge x_i \in \mathbb{Z}
\end{array}
$$

Método gráfico

$x_1 =$ unidades de vasos del primer tipo

$x_2 =$ unidades de vasos del segundo tipo

F.O MAX $z = x_1 + x_2$

S.a

$$x_1 \geq 300$$

$$x_2 \geq 400$$

$$x_1 + x_2 \leq 1200$$

$$\forall x_i \geq 0 \wedge x_i \in \mathbb{Z}$$

Método gráfico

x_1 = unidades de escritorios del Modelo 1

x_2 = unidades de escritorios del Modelo 2

F.O MAX $z = 120x_1 + 80x_2$

S.a

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$

$$7x_1 + 8x_2 \leq 28$$

$$\forall x_i \geq 0 \wedge x_i \in \mathbb{Z}$$

Método gráfico

$x_1 =$ hectáreas cultivadas del producto 1

$x_2 =$ hectáreas cultivadas del producto 2

F.O MAX $z = 6x_1 + x_2$

S.a $x_1 + x_2 = 200$

$2x_1 + 3x_2 = 800$

$\forall x_i \geq 0 \wedge x_i \in \mathbb{Z}$