Governo Federal

Ministério da Educação

Universidade Federal do Maranhão

A Universidade que Cresce com Inovação e Inclusão Social

Grafos Conceitos

Estrutura de Dados II

História

- **Problema das pontes de Konigsberg (1736)**
  - A cidade é cortada pelo rio Pregel, criando ilhas na cidade.
  - Existiam sete pontes conectando as ilhas e as margens opostas do rio.
  - O problema consiste em determinar se é possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez.

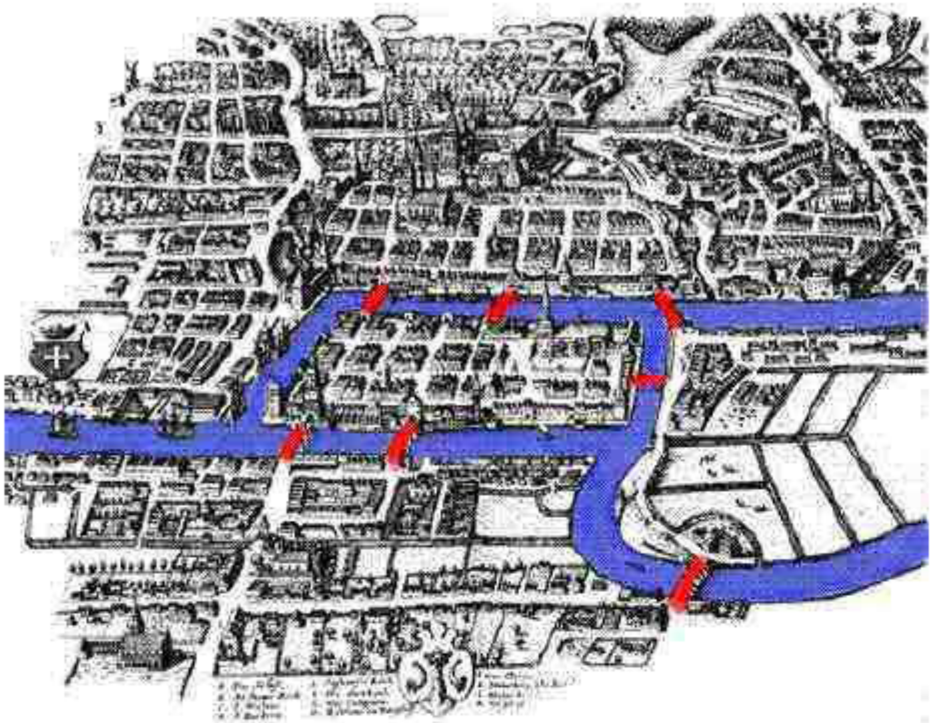
Königsberg

Prussia/Alemanha (1255-1946)

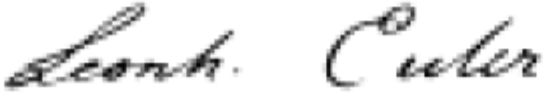
Kaliningrado

URSS/Russia (1946-)

História

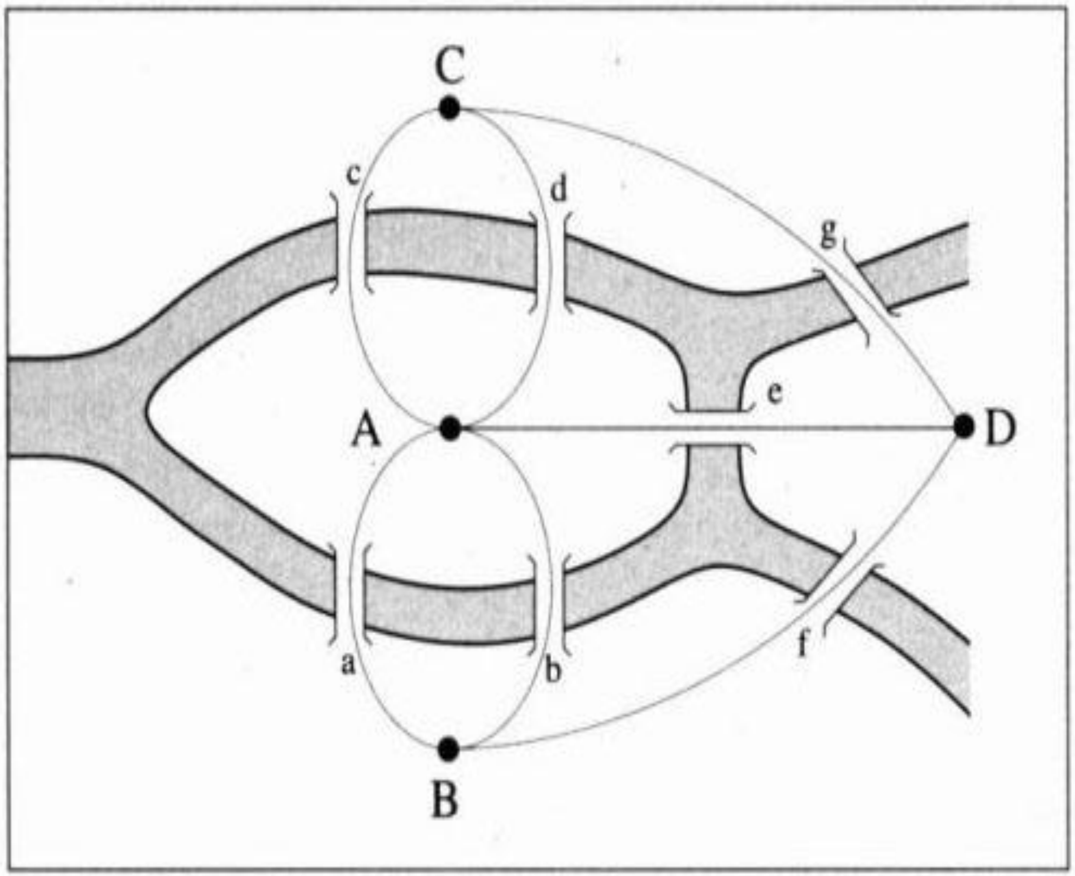


Konigsberg/Kaliningrado



1707 - 1783

História



- Euler raciocinou da seguinte maneira: ao atravessar cada ponto, são gastos exatamente duas linhas, uma para entrar no ponto e outra para sair. Para atravessar qualquer vértice, são gastas duas linhas, uma para entrar no vértice e outra para sair. Conclusão, cada vértice deve ter grau par de linhas. Acontece que o grafo das pontes de Königsberg tem pontos de grau ímpar e, portanto, o problema não pode ter solução

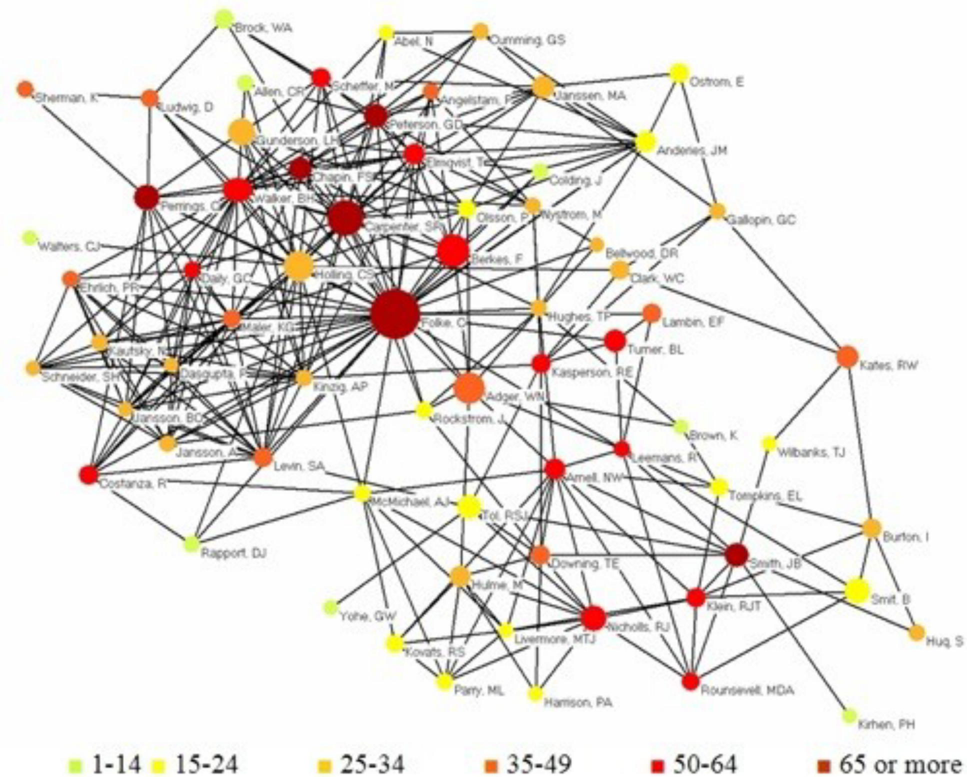
Motivação

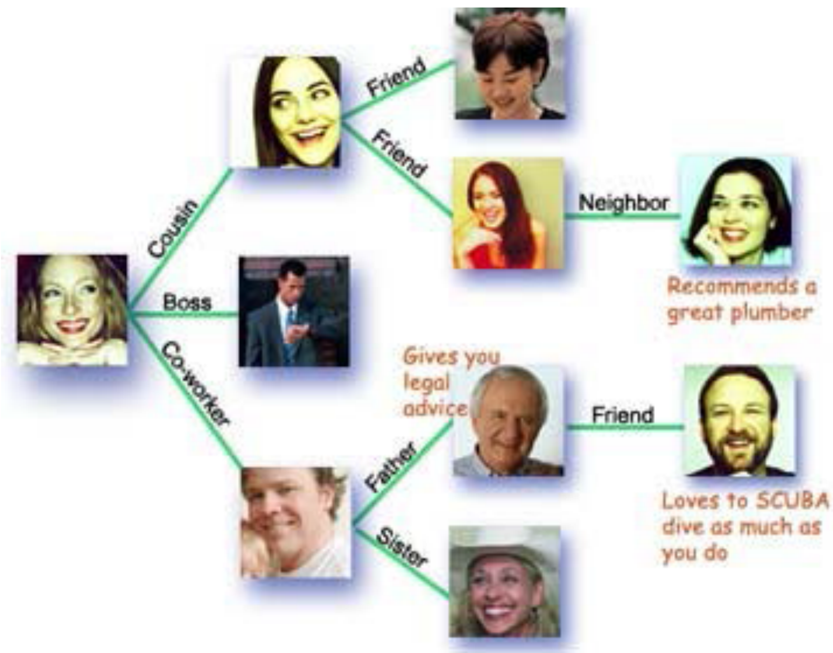
- **Muitas aplicações em computação necessitam considerar conjunto de conexões entre pares de objetos:**
  - Existe um caminho para ir de um objeto a outro seguindo as conexões?
  - Qual é a menor distância entre um objeto e outro objeto?
  - Quantos outros objetos podem ser alcançados a partir de um determinado objeto?

Aplicações

- **Alguns exemplos de problemas práticos que podem ser resolvidos através de uma modelagem em grafos:**
  - Máquinas de busca para localizar informação relevante na Web.
  - Relação entre componentes em circuitos eletrônicos
  - Descobrir qual é o roteiro mais curto para visitar as principais cidades de uma região turística.
  - Carteiro: caminho mais curto para realizar as entregas
  - Malhas: rodoviária, ferroviária e área.
  - Caminhão da coleta de lixo
  - Representação de dependências de tabelas em banco de dados

Aplicações Redes Sociais

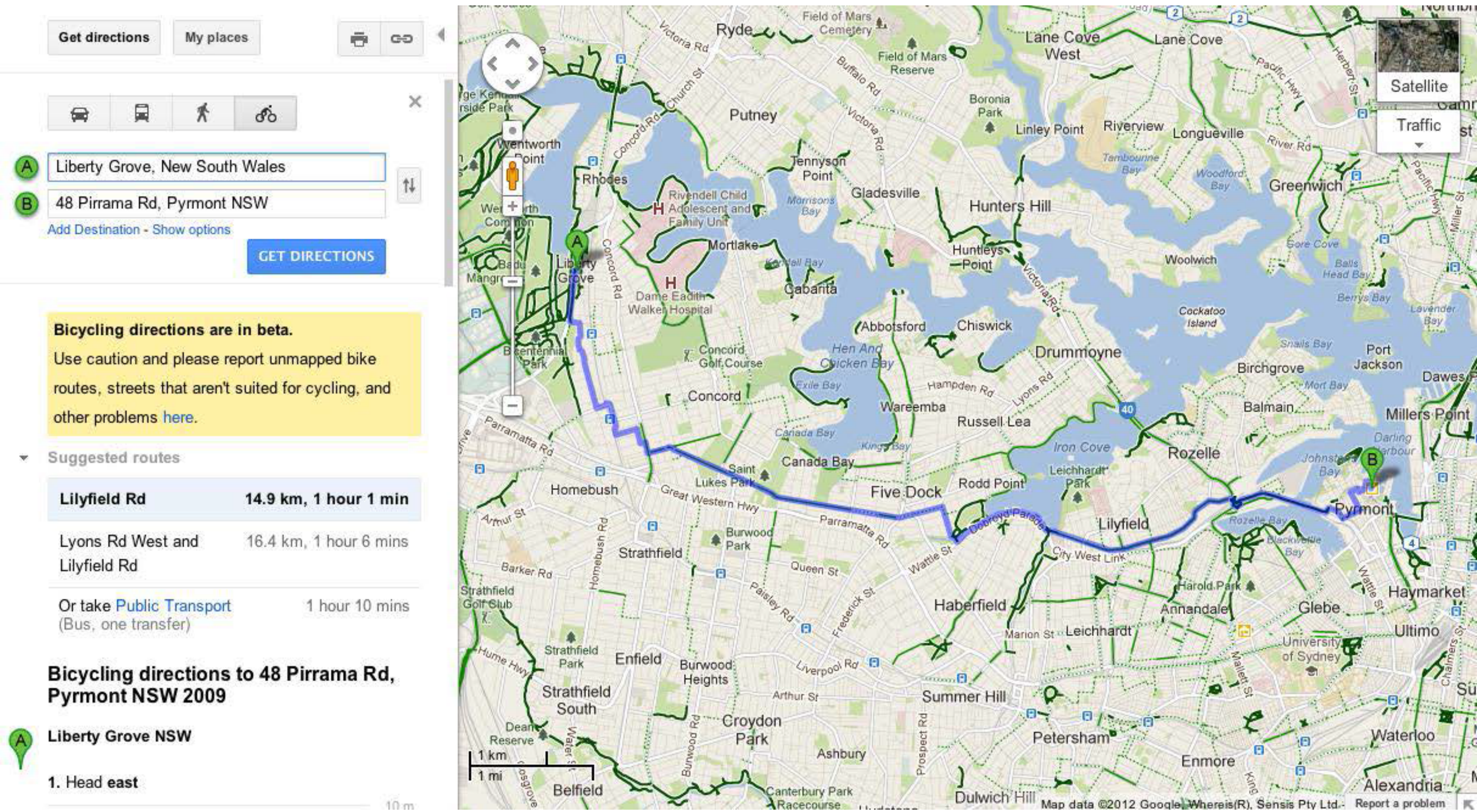




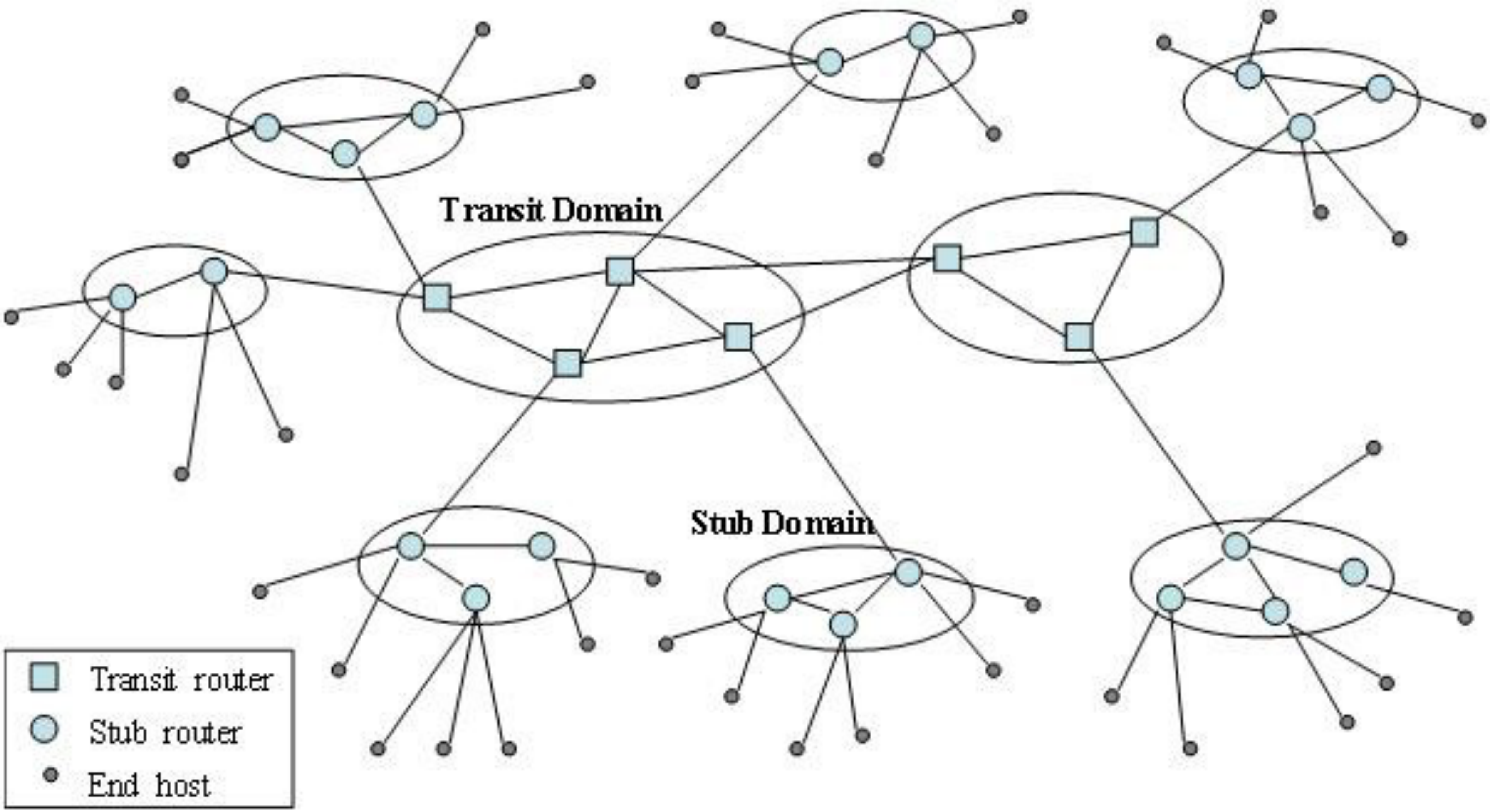
Pessoas conhecidas

Co-autores

Aplicações SIG



Aplicações – Redes de computadores



Introdução

- Um grafo *G=(V,E)* consiste em um conjunto *V* de vértices e um conjunto *E* de arestas de G;

- Uma aresta **e** ϵ E(G) é representada por e= (u,v) e sempre interliga dois vértices quaisquer u e v de V.

- Os grafos são uma forma de modelar os problemas.

- Muitos problemas algorítmicos são simplificados ao pensarmos neles em termos de grafos.

Introdução

- A teoria dos Grafos fornece uma linguagem para tratarmos com as propriedades dos grafos.

- Conhecer diferentes problemas algorítmicos em grafos é melhor do que entender os detalhes de algoritmos particulares em grafos.

Conteúdo

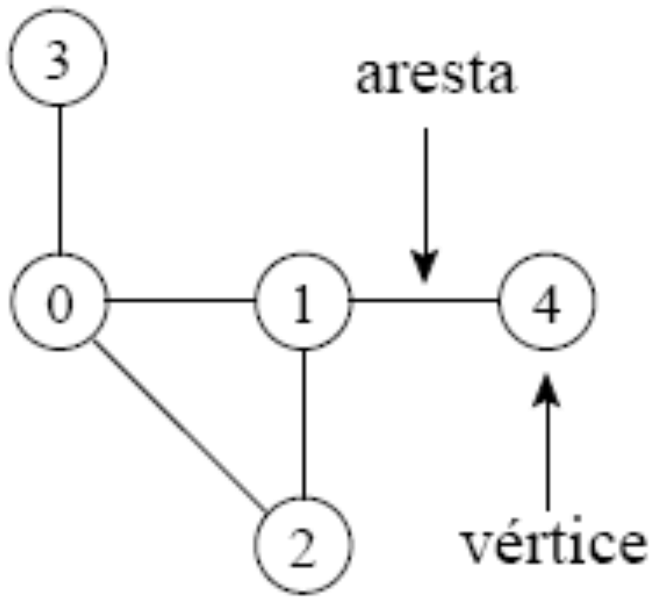
- Estruturas de dados básicas
  - Representação: Lista de Adjacências e Matriz de adjacências.
- operações para pesquisar em um grafo.
  - Pesquisa em grafo:
    - Significa acompanhar sistematicamente as arestas do grafo de modo a alcançar os vértices do grafo.
- Algoritmos mais sofisticados para: caminhos mais curtos, ordenação topológica, árvore geradora mínimo e fluxo máximo.

Observações

- Grafos podem ser utilizados para modelar uma variedade de estruturas e relações.
- Muitas aplicações de grafos podem ser reduzidas a propriedades padrão de grafos e usando algoritmos bem conhecidos.
- Busca em profundidade e busca em largura fornecem mecanismos para visitar cada aresta e cada vértice do grafo.

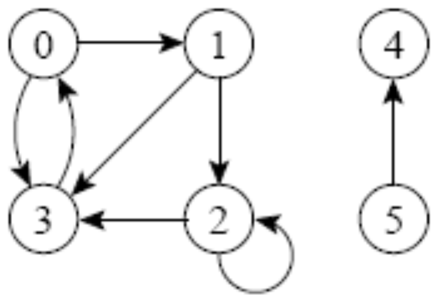
Conceitos Básicos

- **Grafo: conjunto de vértices e arestas.**
- **Vértice: objeto simples que pode ter nome e outros atributos.**
- **Aresta: conexão entre dois vértices.**



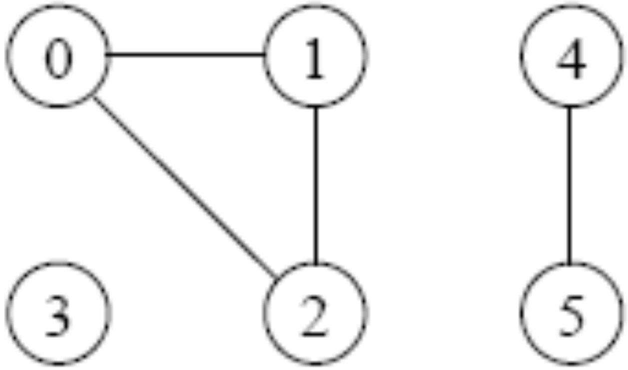
Grafos Direcionados

- **Um grafo direcionado G é um par (V,E), onde V é um conjunto finito de vértices e E é uma relação binária em V .**
  - Uma aresta (u, v) sai do vértice u e entra no vértice v. O vértice v é adjacente ao vértice u.
  - Podem existir arestas de um vértice para ele mesmo, chamadas de *self-loops.*



Grafos Não Direcionados

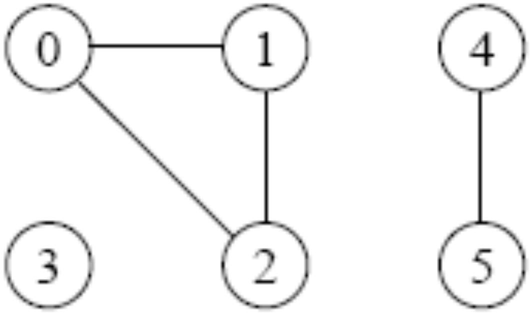
- **Um grafo não direcionado G é um par (V,E), onde o conjunto de arestas E é constituído de pares de vértices não ordenados.**
  – As arestas (u; v) e (v; u) são consideradas como uma única aresta. A relação de adjacência é simétrica.
  – *Self-loops não são permitidos.*



Grau de um Vértice

- **Em grafos não direcionados:**
  - O grau de um vértice é o número de arestas que incidem nele.
  - Um vértice de grau zero é dito isolado ou não conectado.

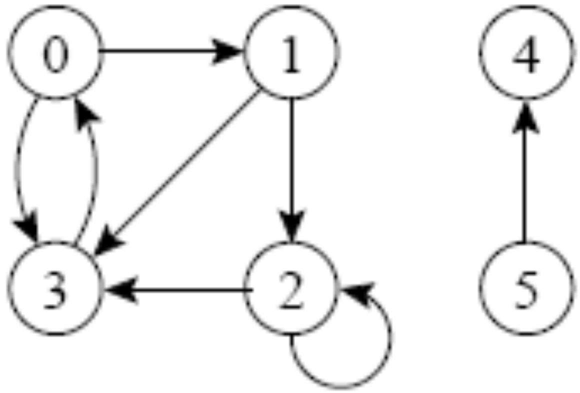
Ex.: O vértice 1 tem grau 2 e o vértice 3 é isolado.



Grau de um Vértice

- **Em grafos direcionados**
  - O grau de um vértice é o número de arestas que saem dele (*out-degree) mais* o número de arestas que chegam nele (*in-degree).*
    - *Arestas (in) + Arestas (out)*

Ex.: O vértice 2 tem *in-degree* 2, *out-degree* 2 e grau 4.

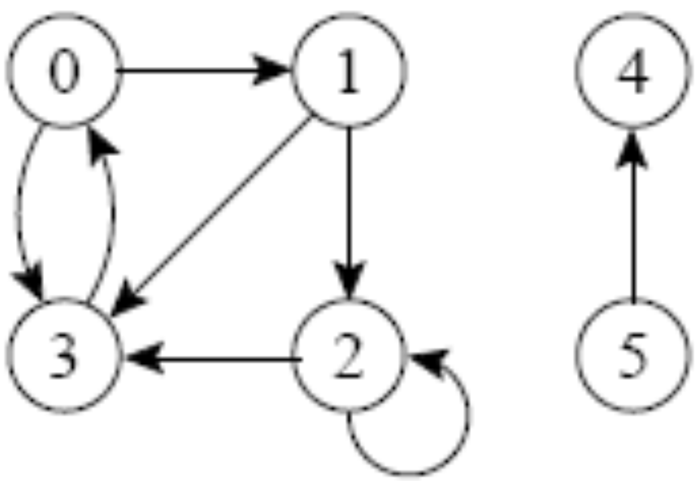


Caminho entre Vértices

- Um caminho de comprimento k de um vértice x a um vértice y em um grafo G = (V,E) é uma seqüência de vértices (v0, v1, v2,..., vk) tal que x = v0 e y = vk, e (v(i-1), vi) Є E para i = 1, 2, ... , k.
- O comprimento de um caminho é o número de arestas nele, isto é, o caminho contém os vértices v0, v1, v2,..., vk e as arestas (v0, v1); (v1, v2),....,(vk-1; vk).
- Se existir um caminho c de x a y então y é alcançável a partir de x via c.

Caminho entre Vértices

- **Um caminho é simples se todos os vértices do caminho são distintos.**
- **Ex.: O caminho (0, 1, 2, 3) é simples e tem comprimento 3. O caminho (1, 3, 0, 3) não é simples.**

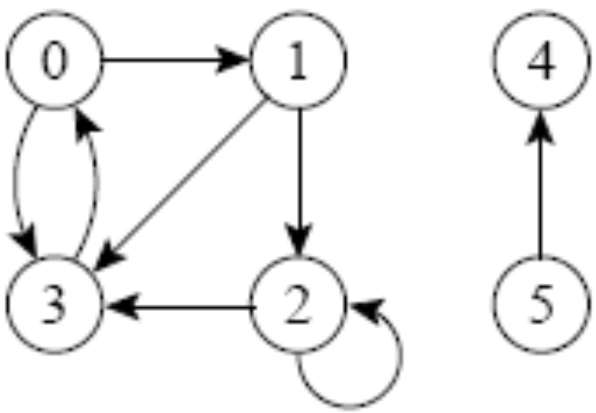


Ciclos

- **Em um grafo direcionado:**
  - Um caminho (v0, v1, ... , vk) forma um ciclo se v0 = vk e o caminho contém pelo menos uma aresta.
  - O ciclo é simples se os vértices v1, v2, ... ,vk são distintos.
  - O *self-loop é um ciclo de tamanho 1.*
  - Dois caminhos (v0, v1, ... ,vk) e (v’0, v’1 ,...,v’k) formam o mesmo ciclo se existir um inteiro j tal que v’i = v(i+j) mod k para i = 0, 1, ..., k -1.

Ciclos

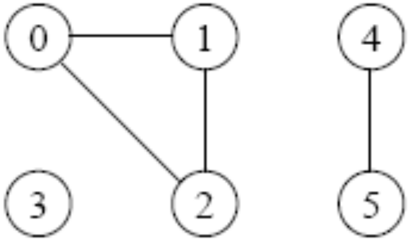
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 3, 0)$ forma um ciclo. O caminho$(0, 1, 3, 0)$ forma o mesmo ciclo que os caminhos $(1, 3, 0, 1)$ e $(3, 0, 1, 3)$.



Ciclos

- **Em um grafo não direcionado:**
  - Um caminho (v0, v1,..., vk) forma um ciclo se v0 = vk e o caminho contém pelo menos três arestas.
  - O ciclo é simples se os vértices v1, v2,..., vk são distintos.

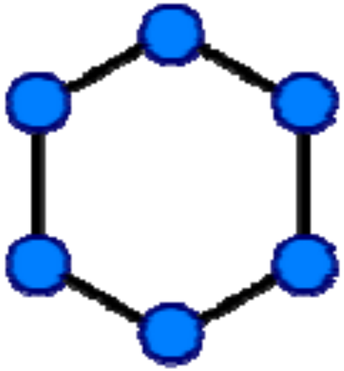
Ex.: O caminho $(0, 1, 2, 0)$ é um ciclo.



Caminho Hamiltoniano

Grafo Hamiltoniano:

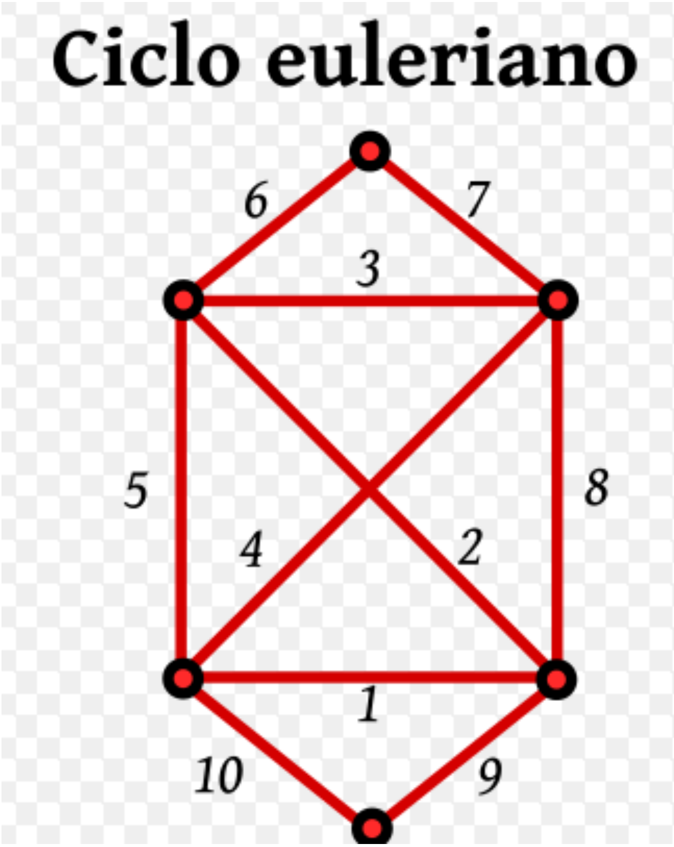
- **Possui ciclo Hamiltoniano:**
  - É um ciclo em um grafo não-dirigido onde **cada vértice** é **visitado uma única vez** retornando ao ponto de partida.
  - Todo grafo ciclico formado por um único ciclo é Hamiltoniano

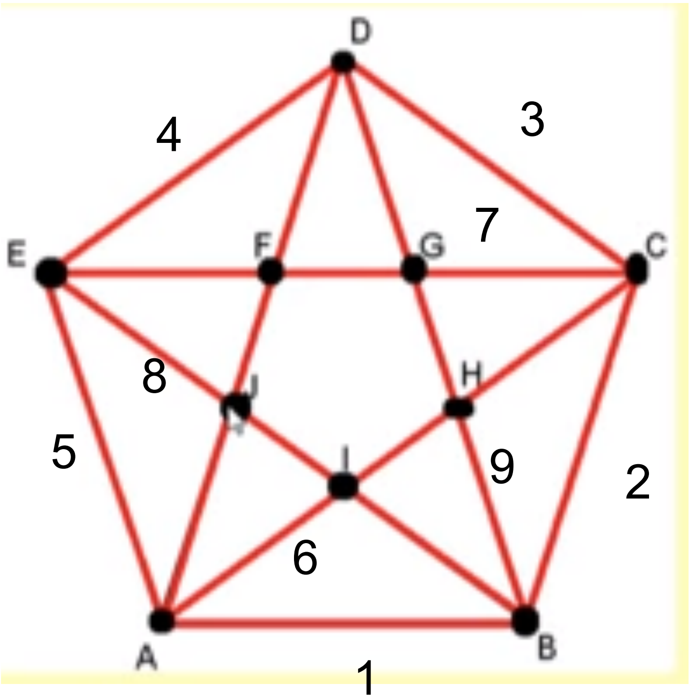


Caminho Euleriano - propriedades

- Caminho no grafo que **visita cada aresta** uma única vez iniciando e terminando no mesmo vértice.
  - Criado por Euler para resolver o problema das pontes de Konigsberg.
- Um grafo não-dirigido é Euleriano se não tiver nenhum vértice de grau ímpar.
- Um grafo dirigido é Euleriano se todos os vértices tiverem grau de entrada igual ao seu grau de saída.
- Um grafo semi-Euleriano (que permite um caminho Euleriano) possui exatamente dois vértices de grau ímpar, um é o ponto de partida e outro é o ponto de chegada.

Caminho Euleriano



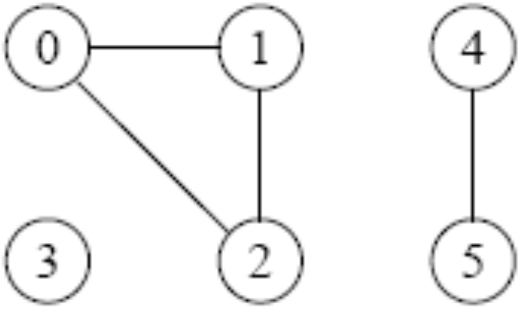


É Euleriano mas não é Hamiltoniano

Componentes Conectados

- **Um grafo não direcionado é conectado se cada par de vértices está conectado por um caminho.**
- **Os componentes conectados são as porções conectadas de um grafo.**
- **Um grafo não direcionado é conectado se ele tem exatamente um componente conectado.**

Ex.: Os componentes são: $\{0, 1, 2\}$, $\{4, 5\}$ e $\{3\}$.

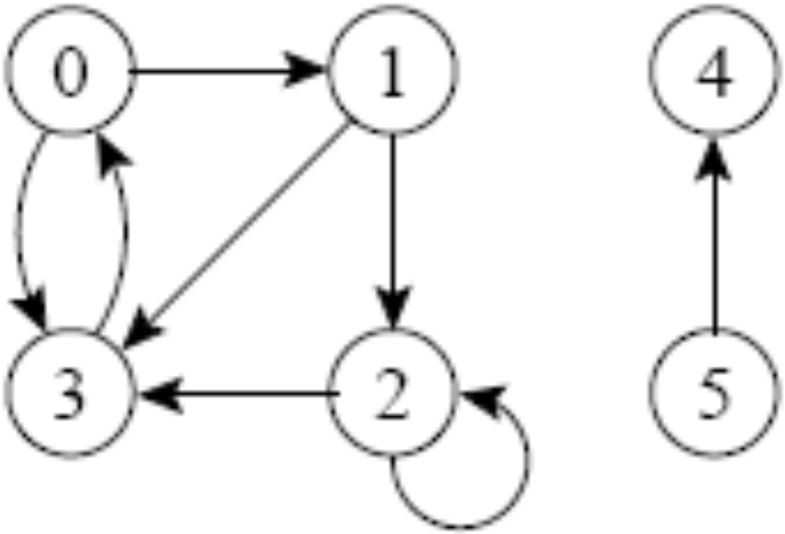


Componentes Fortemente Conectados

- Um grafo direcionado G = (V,E) é fortemente conectado se cada dois vértices quaisquer são alcançáveis a partir um do outro.
- Os componentes fortemente conectados de um grafo direcionado são conjuntos de vértices sob a relação "são mutuamente alcançáveis".
- **se existe um caminho de a para b e de b para a, para cada par a,b de vértices do grafo**
- um grafo que tem mais de um **componente** não é fortemente conexo.

Componentes Fortemente Conectados

- Ex: {0,1,2,3} são componentes fortemente conectados. {4,5} não o é pois o vértice 5 não é alcançável a partir do vértice 4.

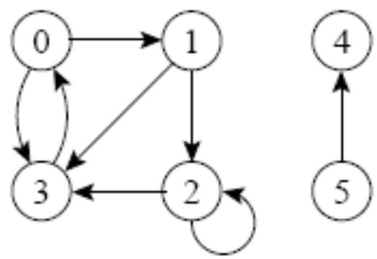


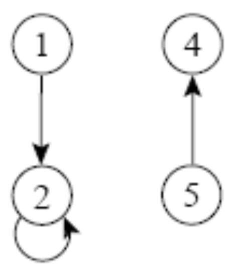
- É possível encontrar os componentes conectados utilizando a Busca em profundidade.

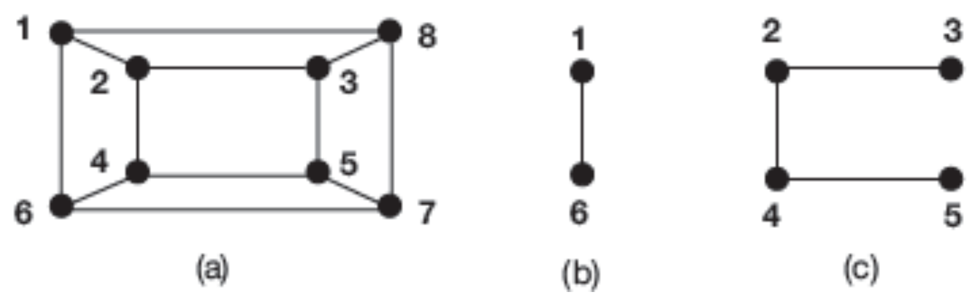
Subgrafos

Um grafo *G*(*V*, *E*), *H*(*V’*,*E’*) é um *subgrafo* de G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$.

Ex.: Subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{1, 2, 4, 5\}$.

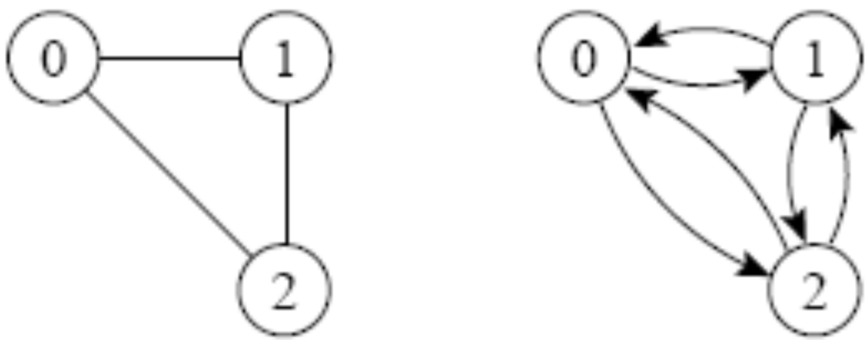






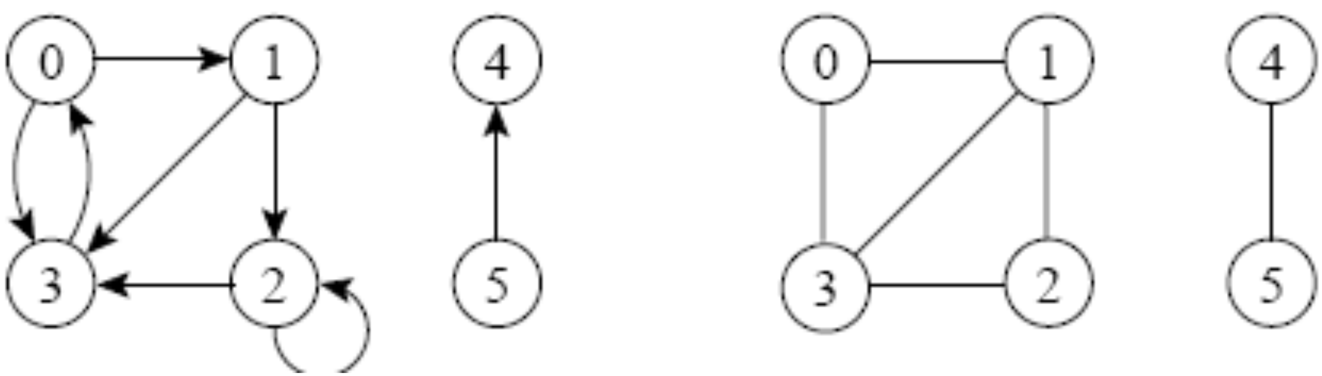
Versão Direcionada de um Grafo Não Direcionado

- A versão direcionada de um grafo não direcionado G = (V,E) é um grafo direcionado G’ = (V’,E’) onde (u, v) Є E’ se e somente se (u, v) Є E.
- Cada aresta não direcionada (u, v) em G é substituída por duas arestas direcionadas (u, v) e (v, u)
- Em um grafo direcionado, um vizinho de um vértice u é qualquer vértice adjacente a u na versão não direcionada de G.



Versão Não Direcionada de um Grafo Direcionado

- A versão não direcionada de um grafo direcionado G = (V,E) é um grafo não direcionado G’ = (V’,E’) onde (u, v) Є A’ se e somente se u <> v e (u, v) Є A.
- A versão não direcionada contém as arestas de G sem a direção e sem os *self-loops.* Em um grafo não direcionado, u e v são vizinhos se eles são adjacentes.



Outras Classificações de Grafos

- Grafo ponderado: possui pesos associados às arestas.
- Grafo bipartido: grafo não direcionado $G = (V,E)$ no qual V pode ser particionado em dois conjuntos $V1$ e $V2$ tal que $(u, v) \in A$ implica que $u \in V1$ e $v \in V2$ ou $u \in V2$ e $v \in V1$ (todas as arestas ligam os dois conjuntos $V1$ e $V2$).
- Hipergrafo: grafo não direcionado em que cada aresta conecta um número arbitrário de vértices.

Outras Classificações de Grafos

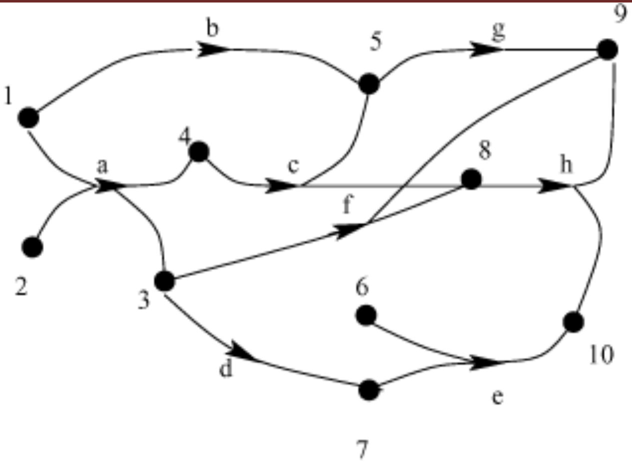
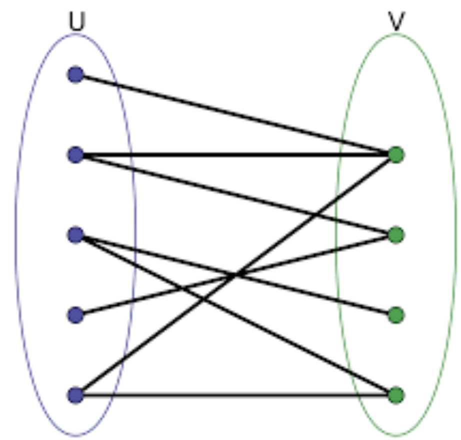
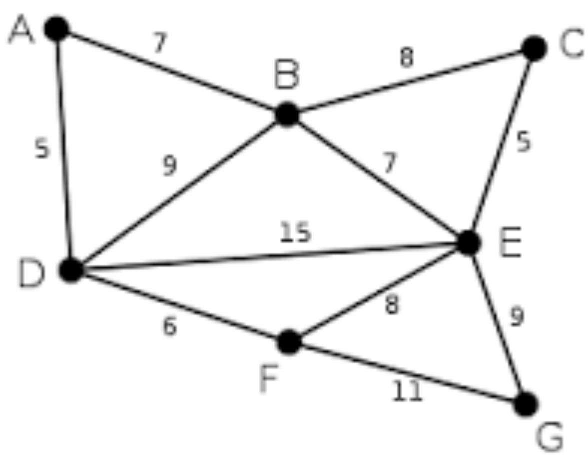


Figure 1 – Directed hypergraph $H = (V, A)$.

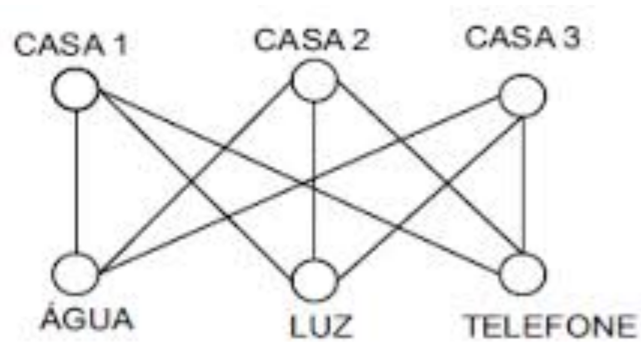
Grafo Bipartido



Grafo Ponderado



Grafo Bipartido Completo



Grafos Completos

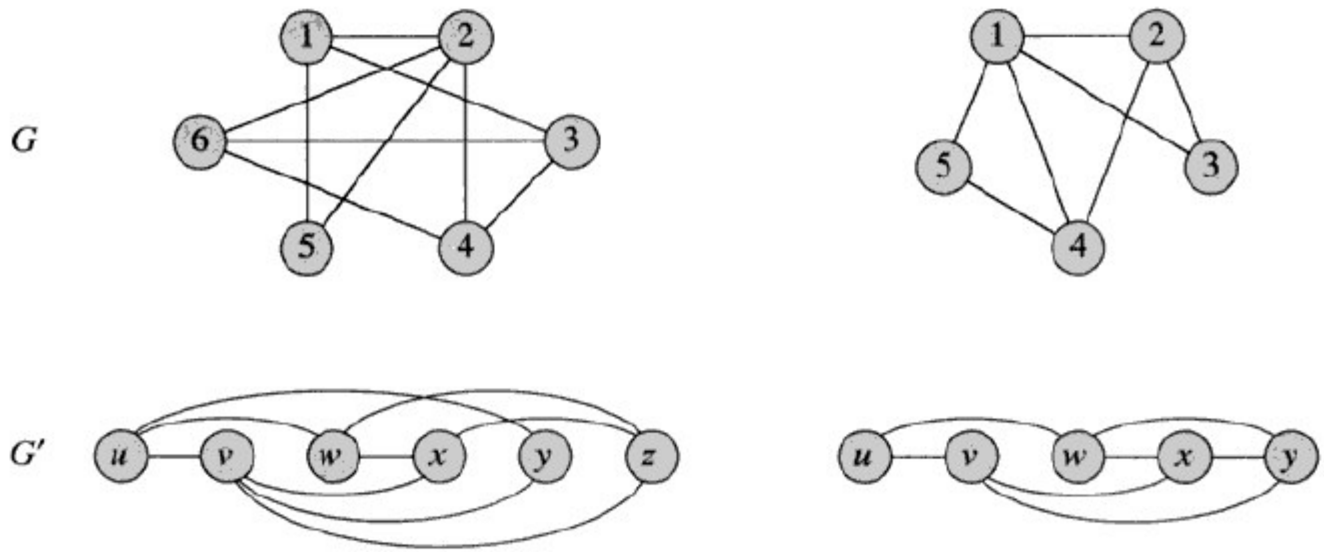
- Um grafo completo é um grafo não direcionado no qual todos os pares de vértices são adjacentes.

- Possui $(|V|^2 - |V|)/2 = |V|(|V|-1)/2$ arestas, pois do total de $|V|^2$ pares possíveis de vértices devemos subtrair $|V|$ *self-loops e* dividir por 2 (cada aresta ligando dois vértices é contada duas vezes).

- O número total de grafos diferentes com $|V|$ vértices é $2^{|V|(|V|-1)/2}$ (número de maneiras diferentes de escolher um subconjunto a partir de $|V|(|V|-1)/2$ possíveis arestas).

Grafos isomórficos

- **Dois grafos G e G’ são isomórficos se e somente se seus vértices podem ser rotulados de tal forma que as suas correspondentes adjacências sejam iguais**

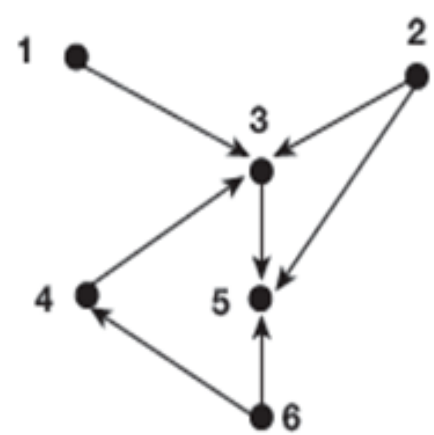


(a) Isomórficos

(b) Não isomórficos

Dígrafo

- **Um grafo direcionado *D*(*V*,*E*), ou *dígrafo*, possui um conjunto não vazio de vértices *V* e um conjunto de arestas *E*, tal que para toda aresta (*u*,*v*) $\in$ *E* existe uma única direção de *u* para *v*.**



(a)

Representação de Grafos

- **Técnicas básicas para representação de grafos:**
  - Matriz de adjacências
    - Adequada para grafos densos (i.e., |E| é próximo de |V|)
  - Lista de adjacências
    - Adequada para grafos esparsos (i.e., |E| é muito menor que |V|)

Representação – Matriz de Adjacências

- Matriz $|V| x |V|$ com $E = (e_{ij})$, dado que:

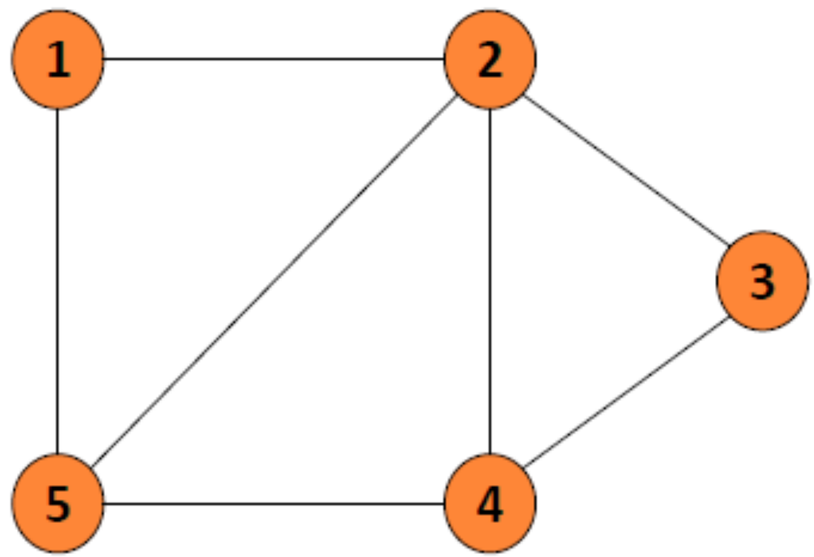
$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } (i,j) \in E, \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

- A matriz de adjacências de um grafo requer memória $\Theta(|V|^2)$, independente do número de arestas

- Dado que um em um grafo não-direcionado (u,v) e (v,u) representam a mesma aresta, a matriz de adjacências de um grafo não direcionado é igual à sua transposta: $A = A^T$

Representação – Matriz de Adjacências

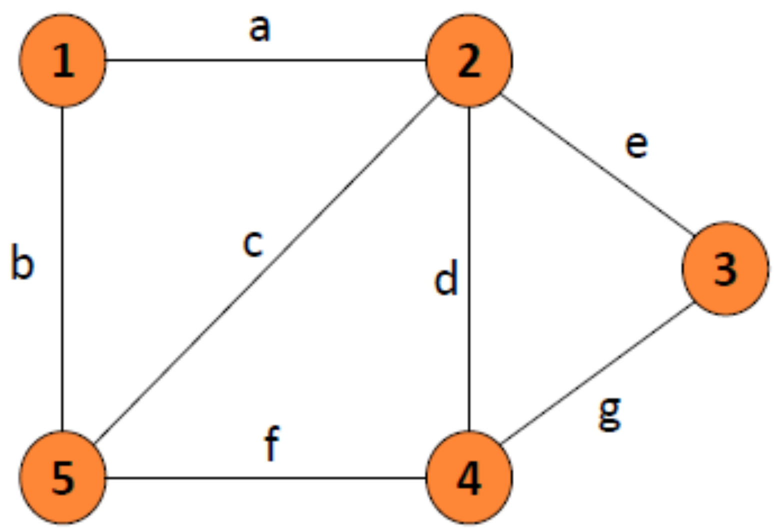
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0



Representação – Matriz de Adjacências

- **Matriz de adjacências com Peso**

	1	2	3	4	5
1	0	a	0	0	b
2	a	0	e	d	c
3	0	e	0	g	0
4	0	d	g	0	f
5	b	c	0	f	0



Arestas que não existem podem ser representadas com o valor 0 ou □

Representação – Matriz de Adjacências

- **Considerações:**
  - Exige bastante memória $O(|V|^2)$, pois geralmente os grafos são esparsos Grafos esparsos levam a matrizes esparsas
  - O espaço pode ser reduzido armazenando-se apenas a matriz triangular

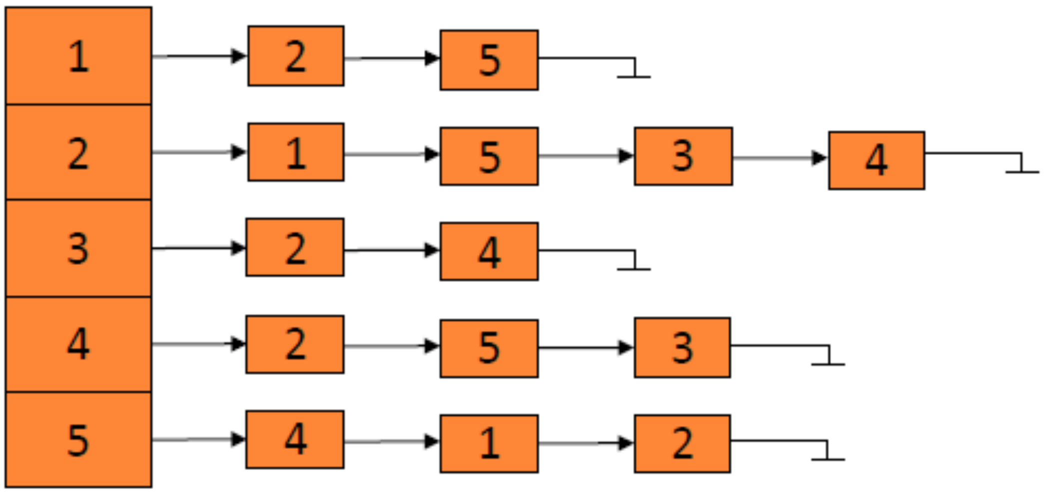
Representação – Lista de Adjacências

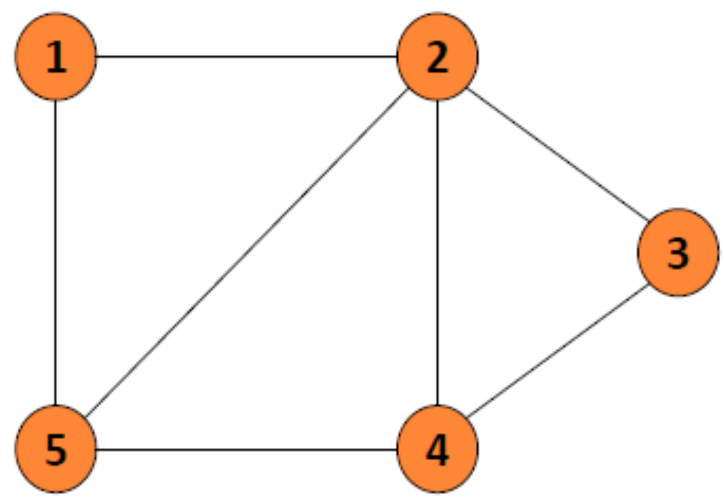
- Representação da lista de adjacências de um grafo $G = (V, E)$ consiste de um vetor de $|V|$ listas, uma para cada vértice em V

- Para cada $u \in V$, a lista de adjacências *Adj[u]* contém ponteiros para todos os vértices v em que exista uma aresta $(u, v) \in E$
  - Se G é um grafo direcionado, a soma dos tamanhos de todas as listas de adjacências é $|E|$
  - Se G for um grafo não-direcionado, a soma dos tamanhos de todas as listas de adjacências é $2|E|$

- Quantidade de memória consumida: $O(\max(V,E)) = O(|V|+|E|)$

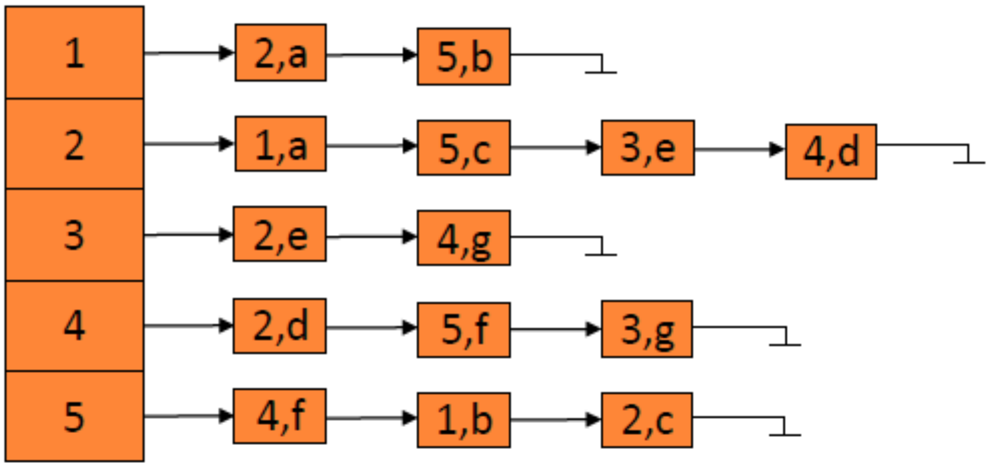
Representação – Lista de Adjacências

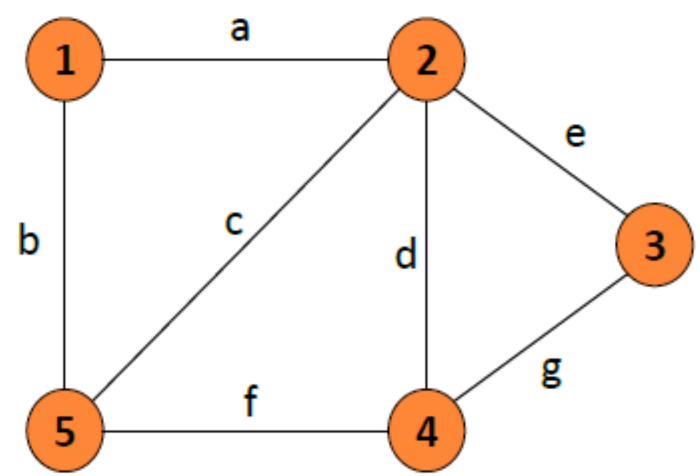




Representação – Lista de Adjacências

- **Lista de Adjacências com Pesos**

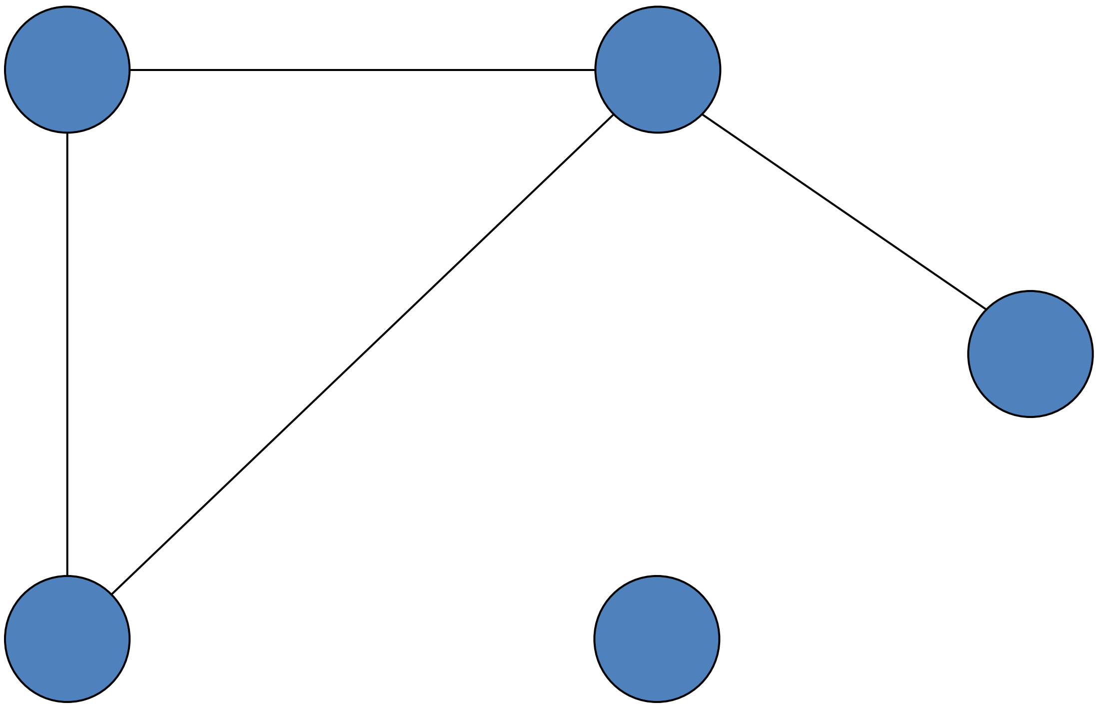




Representação – Lista de Adjacências

- **Considerações:**
  - Consome menos memória
  - É a forma mais simples
  - Se o grafo for orientado a lista de adjacências é menor ainda
  - No pior caso a busca por uma adjacência é $\Theta(n)$

Ex: O grafo de relacionamento



O grafo de relacionamento

- **Se sou seu amigo, você é meu amigo?**
- **Sou amigo de mim mesmo?**
- **Quão íntimo é um amigo?**
- **Estou ... em famo...**
- **Quão ...**

Grafos orientados e não-orientados

Grafos com pesos

Caminho em um grafo

Caminho mínimo

O grafo de relacionamento

- Existe um caminho de relacionamento entre quaisquer duas pessoas no mundo?
- Quem tem mais amigos? E menos?
-
- ara

Componentes conexas

Clique

Circuitos

[poscomp 2015] Exercicio

Seja G = (V, E) um grafo em que V é o conjunto de vértices e E é o conjunto de arestas. Considere a representação de G como uma matriz de adjacências.

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

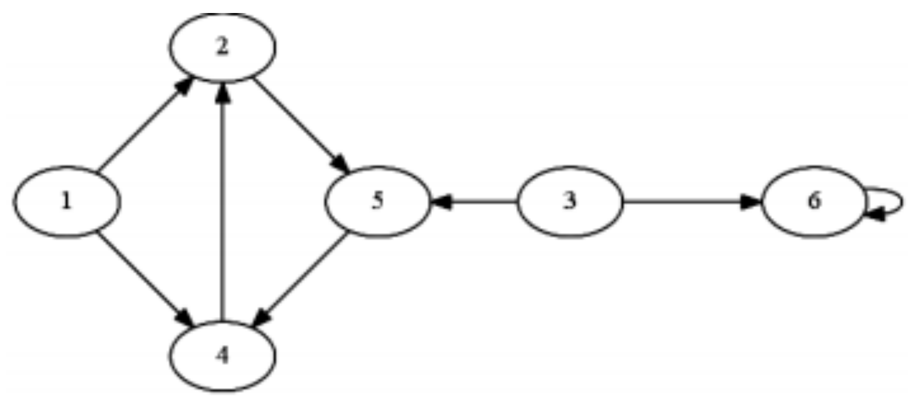
O correspondente grafo orientado G é:

[poscomp 2015] Exercício

Resposta: O correspondente grafo orientado G é:

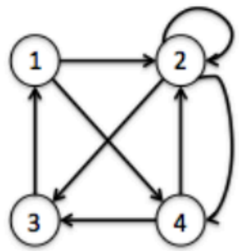
	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1

(E)



[Poscomp2017] Exercício

QUESTÃO 36 – Em relação ao grafo da Figura (a), as Figuras (b) e (c) representam, respectivamente,



(a)

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	0	1	1	1
3	1	0	0	0
4	0	1	1	0

(b)

Vértices

origem	destino
1	2 4
2	2 3 4
3	1
4	2 3

(c)

A) matriz de arestas e lista de incidências.
B) matriz de adjacências e lista de adjacências.
C) matriz de conexões e lista de arestas.
D) matriz de incidências e lista de vértices.
E) matriz de vértices e lista de conexões.