Лабораторная работа 3, задание 1

a	Δa	σa
x		ϵ
$x^{1/p}$		$\frac{\epsilon}{p} + \epsilon$
$x_0 = x^{1/p^N}$		$\frac{p^{-N}(p^{n+1}-1)}{p-1}\epsilon$
$ln(x_0)$	$\frac{p^{-N}(p^{n+1}-1)}{p-1}\epsilon + \alpha$	$\frac{p^{-N}(p^{n+1}-1)}{p-1}\epsilon\frac{1}{ln(x_0)} + \alpha$
$lnx = p^N ln(x_0)$		$\frac{p^{-N}(p^{n+1}-1)}{p-1}\epsilon\frac{1}{ln(x_0)} + \alpha + N\epsilon$

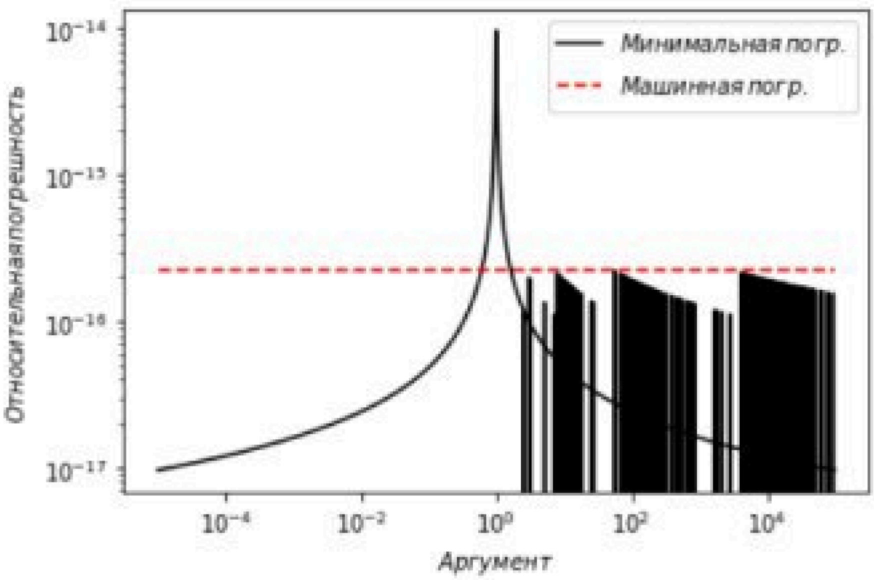
a	Δa	σa
x		ϵ
$\frac{x}{p}$		2ϵ
$x_0 = \frac{x}{p^N}$		$N\epsilon$
$ln(x_0)$	$N\epsilon + \alpha ln(x_0)$	$N\epsilon\frac{1}{ln(x_0)} + \alpha$
$lnx = ln(x_0) + N ln(p)$	$(N + N ln(p))\epsilon + \alpha ln(x_0)$	$\frac{(N+N ln(p))\epsilon+\alpha ln(x_0)}{ln(x)}$

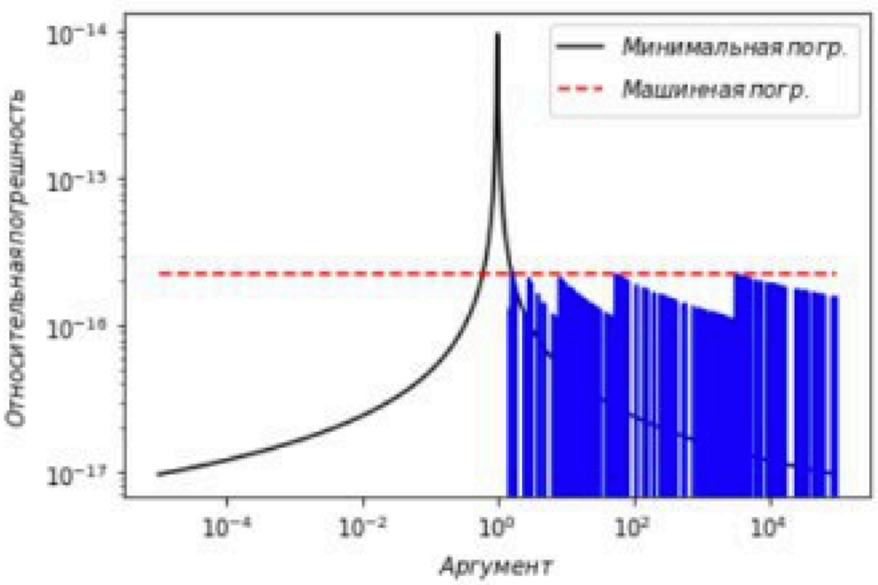
Как показано дальше, проделав экспериментальные расчеты, методы стоит сравнивать при одном числе итераций $N = log_p(x)$, в таком случае $ln(x_0) << \epsilon$, поэтому оценим погрешность первого метода (извлечение корней) $(N + 1)\epsilon + \alpha = (log_p(x) + 1)\epsilon + \alpha$. Видно что для маленьких иксов этод метод будет хорош, так для маленьких значений икс логарифм будет мал, для больших иксов метод будет работать хуже. Во втором же случае, погрешность $\frac{N(1+ln(p)\epsilon+\alpha ln(x_0)}{lnx} = \frac{log_p(x)(1+ln(p)\epsilon+\alpha ln(x_0)}{lnx} = \frac{1+ln(p)+\alpha\frac{ln(x_0)}{ln(x)}}{log(p)}$. У нас получилась оценка не зависящая практически от исходного значения аргумента, из чего мы можем сделать вывод, что для маленьких иксов метод деления аргумента менее предпочтителен, а при больших аргументах наоборот будет лучше

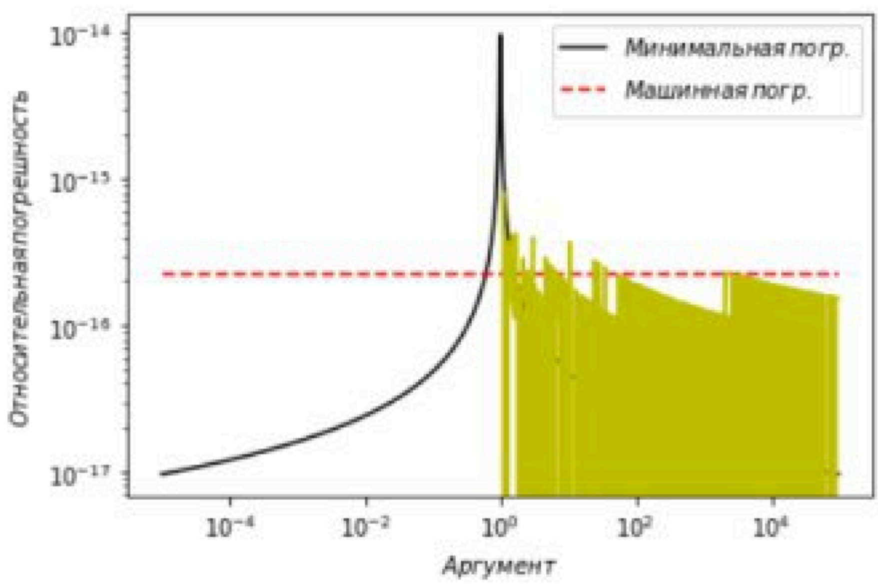
Посчитаем экспериментально, какие получатся погрешности при двух методах 1)При делении аргумента на число p не получается попасть в интервал $[1, 1 + \epsilon)$, где ϵ - по смыслу маленькое число, однако погрешность получается маленькая С точки зрения попаданию в нужый интервал - данный метод српавляется плохо С точки зрения, какая получается погрешность, деление на число p работает достаточно хорошо, причем наилучшая погрешность получается при p=2, так как в данном случае при делении погрешность не накапливается 2)Так как $lim_{n\to\infty}x^{1/p^n} = 1$, то используя метод извелечения корня из аргумента, мы можем подобраться к единицу так близко как хотим, однако при очень большом n мы будем совершать намнго больше итераций, чем при делении на число p, при этом при каждой итерации будет накапливаться погрешность. Поэтому с точки зрения попадания в интервал $[1, 1 + \epsilon)$, где ϵ очень мало, этот метод хорош, с точки зрения погрешности - нет. Также можно посмотреть, какя погрешность будет при извдечении корней, сделав столько же итераций, как и при делении на число p ($log_p(x)$-последняя картинка, однако, видно что это хорошо работает только для маленьких иксов, при больших иксах погрешность растет пропорциаонально $(log_p(x))$ Картинка №1 - редукция делением на 2, №2- редукция делением 1.5, №3 - редукция делением на 1.1 №4 - редукция извлечением корня второй степени, пока не попадем в интервал $[1, 1.1)$ №5 - редукция извлечением корня второй степени, при числе итераций равном числу итераций при делении на 2 №6 - редукция извлечением корня второй степени, при числе итераций равном числу итераций при делении на 3

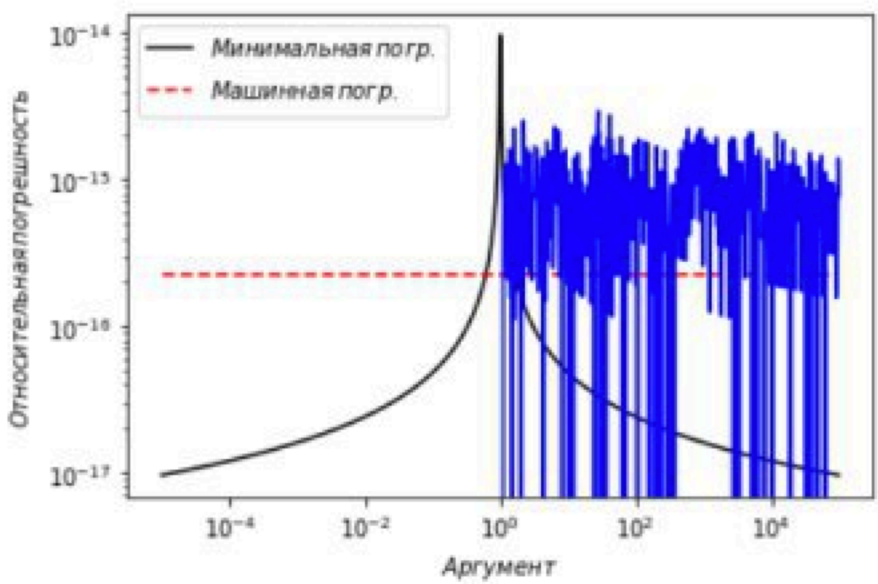
```
def relative_error(x0,x):
    return np.abs(x0-x)/np.abs(x0)
def div_method(x,p):
       for i in x:
        n=0
        while np.abs(i)>p:
           n+=1
           i/=p
        res.append(np.log(i)+n*np.log(p))
    return res
x=np.logspace(-5,5,1000,dtype=np.double)
epsilon=np.finfo(np.double).eps
best_precision=(epsilon/2)*np.abs(1./np.log(x0))
plt.loglog(x0,best_precision, '-k')
plt.loglog(x0,np.full(x0.shape, epsilon), '--r')
plt.xlabel("$Аргумент$")
plt.ylabel("$Относительная\,погрешность$")
plt.legend(["$Минимальная\,погр.$","$Машинная\,погр.$"])
y0=np.log(x)
y=div_method(x,2)
y1=div_method(x,1.5)
y2=div_method(x,1.1)
plt.loglog(x,relative_error(y0,y),'-k')
plt.show()
best_precision=(epsilon/2)*np.abs(1./np.log(x0))
```

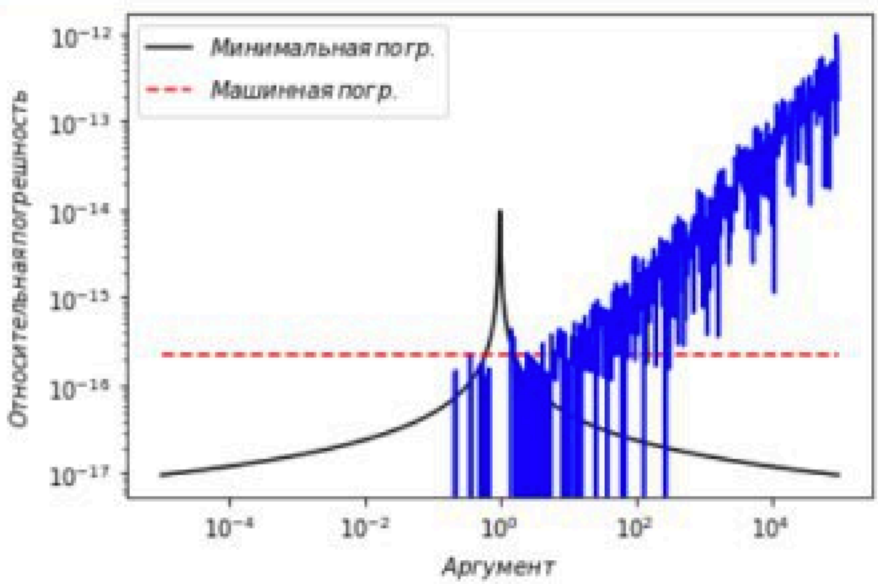
```
plt.loglog(x0,best_precision, '-k')
plt.loglog(x0,np.full(x0.shape, epsilon), '--r')
plt.xlabel("$Аргумент$")
plt.ylabel("$Относительная\,погрешность$")
plt.legend(["$Минимальная\,погр.$","$Машинная\,погр.$"])
plt.loglog(x,relative_error(y0,y1),'-b')
plt.show()
plt.loglog(x0,best_precision, '-k')
plt.loglog(x0,np.full(x0.shape, epsilon), '--r')
plt.xlabel("$Аргумент$")
plt.ylabel("$Относительная\,погрешность$")
plt.legend(["$Минимальная\,погр.$","$Машинная\,погр.$"])
plt.loglog(x,relative_error(y0,y2),'-y')
plt.show()
def root_method(x,p):
    res=[]
    for i in x:
        n=0
        while i>1.1:
            n+=1
            i=i**(1/p)
        res.append(p**n*np.log(i))
    return res
z=root_method(x,2)
plt.loglog(x0,best_precision, '-k')
plt.loglog(x0,np.full(x0.shape, epsilon), '--r')
plt.xlabel("$Аргумент$")
plt.ylabel("$Относительная\,погрешность$")
plt.legend(["$Минимальная\,погр.$","$Машинная\,погр.$"])
plt.loglog(x,relative_error(y0,z),'-b')
plt.show()
def root_method1(x,p):
    res=[]
    for i in x:
        N1=math.log(i,p)
        N=round(N1)
        i=i**(1/p**N)
        res.append(p**N*np.log(i))
    return res
w=root_method1(x,2)
w1=root_method1(x,3)
plt.loglog(x0,best_precision, '-k')
plt.loglog(x0,np.full(x0.shape, epsilon), '--r')
plt.xlabel("$Аргумент$")
plt.ylabel("$Относительная\,погрешность$")
plt.legend(["$Минимальная\,погр.$","$Машинная\,погр.$"])
plt.loglog(x,relative_error(y0,w),'-b')
plt.show()
plt.loglog(x0,best_precision, '-k')
plt.loglog(x0,np.full(x0.shape, epsilon), '--r')
plt.xlabel("$Аргумент$")
plt.ylabel("$Относительная\,погрешность$")
plt.legend(["$Минимальная\,погр.$","$Машинная\,погр.$"])
plt.loglog(x,relative_error(y0,w1),'-b')
plt.show()
```



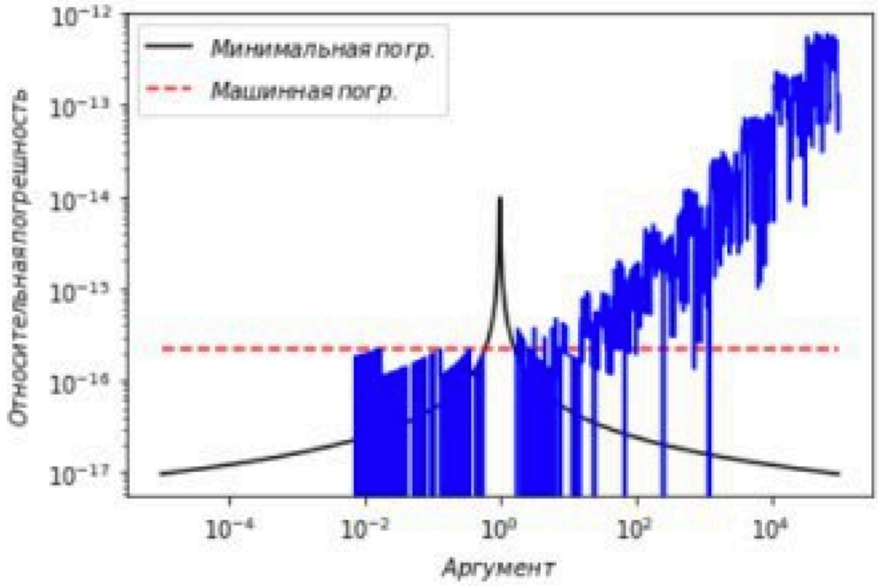

Минимальная погр.
Машинная погр.
Относительная погрешность
10^{-14}
10^{-15}
10^{-16}
10^{-17}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
10^{4}
Аргумент


Минимальная погр.
Машинная погр.
Относительная погрешность
10^{-14}
10^{-15}
10^{-16}
10^{-17}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
10^{4}
Аргумент


Минимальная погр.
Машинная погр.
Относительная погрешность
10^{-14}
10^{-15}
10^{-16}
10^{-17}
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
10^{4}
Аргумент



Минимальная погр.
Машинная погр.
Относительнаяпогрешность
Аргумент



Минимальная погр.
Машинная погр.
Относительнаяпогрешность
Аргумент