高等量子力学作业

Clark

1. 让我们尝试以下基础计算，以便更熟悉 γ 矩阵。

   (a) 写出 Dirac 表示中 γ 矩阵的显式形式，并检验它们满足克利福德（Clifford）代数。

   (b) 写出在此表示中 $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 的显式表达式。

   (c) 旋量空间中的左右手征投影算符分别定义为 $P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ 和 $P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$。写出它们在此表示中的显式表达式。

解：

(a) 在 Dirac 表示中，γ 矩阵定义为：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3), \tag{1}$$

其中 I_2 是 2×2 单位矩阵，σ^i 是 Pauli 矩阵：

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

我们需要验证它们满足 Clifford 代数关系 $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$，其中度规 $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$。

- 验证 $\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2g^{00} = 2$：

$$(\gamma^0)^2 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} = I_4. \tag{3}$$

  故 $\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2(\gamma^0)^2 = 2I_4$，满足条件。

- 验证 $\{\gamma^i, \gamma^j\} = 2g^{ij} = -2\delta^{ij}$（对于空间分量）：

$$\begin{aligned} \gamma^i\gamma^j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i\sigma^j & 0 \\ 0 & -\sigma^i\sigma^j \end{pmatrix}, \\ \gamma^j\gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^j\sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^j\sigma^i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

  利用 Pauli 矩阵的性质 $\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta^{ij} I_2$，我们有：

$$\{\gamma^i, \gamma^j\} = \gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \begin{pmatrix} -\{\sigma^i, \sigma^j\} & 0 \\ 0 & -\{\sigma^i, \sigma^j\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\delta^{ij} I_2 & 0 \\ 0 & -2\delta^{ij} I_2 \end{pmatrix} = -2\delta^{ij} I_4. \tag{5}$$

  满足条件。

- 验证 $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$：

$$\begin{aligned}
\gamma^0\gamma^i &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma^i\gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{6}$$

  相加得：

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i - \sigma^i \\ \sigma^i - \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = 0, \tag{7}$$

  满足条件。

-

综上所述，Dirac 表示中的 γ 矩阵满足 Clifford 代数。

(b) 定义 $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$。首先计算 $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$。由前述计算可知 $\gamma^i\gamma^j = \mathrm{diag}(-\sigma^i\sigma^j, -\sigma^i\sigma^j)$。

$$\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^3 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

接着右乘 γ^3：

$$\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}(\sigma^3)^2 \\ \mathrm{i}(\sigma^3)^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I_2 \\ \mathrm{i}I_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

左乘 γ^0：

$$\gamma^0(\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I_2 \\ \mathrm{i}I_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I_2 \\ -\mathrm{i}I_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

最后乘以 i：

$$\gamma^5 = \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I_2 \\ -\mathrm{i}I_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

即：

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

(c) 左手征投影算符 P_L：

$$P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ -I_2 & I_2 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

右手征投影算符 P_R：

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

2. (a) 在 Dirac 表示中，求解固定动量 $\boldsymbol{p} = (0, 0, p)$ 的 Dirac 方程 $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$。

(b) Dirac 方程有四个线性无关的解。证明所有这些解相互正交，并指出每个解的物理意义。

(c) Dirac 方程在时空中的一般解可以通过 Fourier 变换表示为 $\Psi(\boldsymbol{x},t)\sim\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}\ldots$ 的形式。写出它的显式形式。

解：

(a) Dirac 方程为 $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi(x)=0$。对于固定动量 $\boldsymbol{p}=(0,0,p)$，我们寻找平面波解 $\Psi(x)=w\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$，其中 $k^\mu=(E,0,0,p)$。代入方程得动量空间的 Dirac 方程：

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)w = (\gamma^0 E - \gamma^3 p - m)w = 0. \tag{15}$$

在 Dirac 表示中，$\gamma^0=\begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$，$\gamma^3=\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3\\ -\sigma^3 & 0\end{pmatrix}$。方程化为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} E-m & -p\sigma^3\\ p\sigma^3 & -E-m\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_A\\ w_B\end{pmatrix}=0, \tag{16}$$

其中 w_A,w_B 为二分量旋量。展开 $\sigma^3=\mathrm{diag}(1,-1)$，设 $w=(w_1,w_2,w_3,w_4)^T$，方程组为：

$$\begin{aligned}
(E-m)w_1 - pw_3 &= 0,\\
(E-m)w_2 + pw_4 &= 0,\\
pw_1 - (E+m)w_3 &= 0,\\
-pw_2 - (E+m)w_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

由行列式为零条件 $\det(\gamma^\mu k_\mu - m) = (E^2-p^2-m^2)^2=0$，得能量本征值 $E=\pm\sqrt{p^2+m^2}\equiv\pm E_p$。

- 情形 1：正能量解 $E=+E_p$ 由方程组可得关系：

$$w_3=\frac{p}{E_p+m}w_1,\quad w_4=\frac{-p}{E_p+m}w_2, \tag{18}$$

取归一化系数 $N=\sqrt{E_p+m}$，利用关系 $\frac{p}{\sqrt{E_p+m}}=\sqrt{E_p-m}$，得到两个线性无关解：

$$u^{(1)}=\sqrt{E_p+m}\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{p}{E_p+m}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{E_p+m}\\0\\ \sqrt{E_p-m}\\0\end{pmatrix},\quad u^{(2)}=\sqrt{E_p+m}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \frac{-p}{E_p+m}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{E_p+m}\\0\\ -\sqrt{E_p-m}\end{pmatrix}. \tag{19}$$

- 情形 2：负能量解 $E=-E_p$ 由方程组可得关系：

$$w_1=\frac{-p}{E_p+m}w_3,\quad w_2=\frac{p}{E_p+m}w_4, \tag{20}$$

同样取归一化系数，得到另外两个线性无关解：

$$u^{(3)}=\sqrt{E_p+m}\begin{pmatrix}\frac{-p}{E_p+m}\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{E_p-m}\\0\\ \sqrt{E_p+m}\\0\end{pmatrix},\quad u^{(4)}=\sqrt{E_p+m}\begin{pmatrix}0\\ \frac{p}{E_p+m}\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{E_p-m}\\0\\ \sqrt{E_p+m}\end{pmatrix}. \tag{21}$$

(b) 正交性证明：我们需要验证 $u^{(r)\dagger}u^{(s)} = 2E_p\delta_{rs}$。显然，由于分量位置不同，$u^{(1)}$，$u^{(3)}$ 与 $u^{(2)}$，$u^{(4)}$ 之间相互正交。只需验证 $(1,3)$ 和 $(2,4)$ 对。

$$\begin{aligned} u^{(1)\dagger}u^{(3)} &= \sqrt{E_p+m}(-\sqrt{E_p-m}) + \sqrt{E_p-m}\sqrt{E_p+m} = 0, \\ u^{(2)\dagger}u^{(4)} &= \sqrt{E_p+m}\sqrt{E_p-m} + (-\sqrt{E_p-m})\sqrt{E_p+m} = 0. \end{aligned} \tag{22}$$

同理可证 $u^{(r)\dagger}u^{(r)} = (E_p+m)+(E_p-m) = 2E_p$。因此，这四个解是相互正交的。

物理意义：我们考察自旋算符 $\Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1,-1,1,-1)$ 的本征值。

- $u^{(1)}$：能量 $E=+E_p$，自旋 $S_z = +\dfrac{1}{2}$（自旋向上）。对应于动量为 p 的电子。
- $u^{(2)}$：能量 $E=+E_p$，自旋 $S_z = -\dfrac{1}{2}$（自旋向下）。对应于动量为 p 的电子。
- $u^{(3)}$：能量 $E=-E_p$，自旋 $S_z = +\dfrac{1}{2}$。在空穴理论中，对应于动量为 $-p$、自旋向下的正电子态（或直接视为负能量解）。
- $u^{(4)}$：能量 $E=-E_p$，自旋 $S_z = -\dfrac{1}{2}$。在空穴理论中，对应于动量为 $-p$、自旋向上的正电子态。

(c) Dirac 方程的一般解可以写成平面波解的线性叠加。对于任意动量 $\boldsymbol{p}$，我们引入正能量旋量 $u^{(s)}(\boldsymbol{p})$ 和负能量旋量 $v^{(s)}(\boldsymbol{p})$（对应于 $u^{(3)}$，$u^{(4)}$ 的电荷共轭形式）。一般解的显式形式为：

$$\Psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}}{(2\pi)^3\sqrt{2E_p}} \sum_{s=1,2} \left[a_s(\boldsymbol{p})u^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x} + b_s^\dagger(\boldsymbol{p})v^{(s)}(\boldsymbol{p})\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x} \right], \tag{23}$$

其中 $p\cdot x = E_pt - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$。对于任意动量 $\boldsymbol{p}$，旋量 $u^{(s)}(\boldsymbol{p})$ 和 $v^{(s)}(\boldsymbol{p})$ 的显式形式为：

$$u^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E_p+m}\begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p+m}\chi_s \end{pmatrix}, \quad v^{(s)}(\boldsymbol{p}) = \sqrt{E_p+m}\begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E_p+m}\eta_s \\ \eta_s \end{pmatrix}, \tag{24}$$

其中 χ_s 和 η_s 是二分量 Pauli 旋量，例如 $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

3. γ 矩阵可以用另一种流行的表示进行表达，称为 Weyl 表示或手征表示。在此表示中，Dirac 矩阵的形式为

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{25}$$

其中 $\sigma^\mu = (1,\boldsymbol{\sigma})$，$\bar\sigma^\mu = (1,-\boldsymbol{\sigma})$。

(a) 在 Weyl 表示中，Dirac 场的前两个分量和后两个分量分别被称为 Weyl 旋量。证明 $P_L\Psi$ 和 $P_R\Psi$ 给出了这些 Weyl 旋量。

(b) 求解 Weyl 表示中的 Dirac 方程。

解：

(a) 首先，我们需要在 Weyl 表示中计算 γ^5。已知 $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$，$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$。计算 $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$。先计算 $\gamma^0\gamma^i$：

$$\gamma^0\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}, \tag{26}$$

然后计算 $\gamma^1\gamma^2\gamma^3$：

$$\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^1\sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^1\sigma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^3 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

接着右乘 γ^3：

$$\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\sigma^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}(\sigma^3)^2 \\ \mathrm{i}(\sigma^3)^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I \\ \mathrm{i}I & 0 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

最后计算 γ^5：

$$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0(\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i}I \\ \mathrm{i}I & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{i}I & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{29}$$

即 $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-1,-1,1,1)$。现在计算投影算符 P_L 和 P_R：

$$P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

和

$$P_R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{31}$$

设 Dirac 场 Ψ 为四分量旋量，记为 $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$，其中 ψ_L, ψ_R 为二分量旋量。则：

$$P_L\Psi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

和

$$P_R\Psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix}, \tag{33}$$

可见，$P_L\Psi$ 确实给出了 Ψ 的前两个分量（左手征分量），$P_R\Psi$ 给出了后两个分量（右手征分量）。

(b) Dirac 方程为 $(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0$。在 Weyl 表示中，$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}$。将 $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ 代入方程：

$$\left[\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}\partial_\mu - m\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = 0. \tag{34}$$

展开矩阵乘法，得到耦合方程组：

$$\begin{aligned} \mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\psi_L &= 0, \\ \mathrm{i}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L - m\psi_R &= 0. \end{aligned} \tag{35}$$

或者写成：

$$\begin{aligned} \mathrm{i}(\partial_t + \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_R &= m\psi_L, \\ \mathrm{i}(\partial_t - \boldsymbol{\sigma}\cdot\nabla)\psi_L &= m\psi_R. \end{aligned} \tag{36}$$

为了求解该方程，我们寻找平面波解 $\Psi(x) = u(p)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\cdot x}$，其中 $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$。代入方程，导数 $\partial_\mu \to -\mathrm{i}p_\mu$，得到动量空间的方程：

$$\begin{pmatrix} -m & p\cdot\sigma \\ p\cdot\bar{\sigma} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} = 0, \tag{37}$$

即：

$$\begin{aligned} (p\cdot\sigma)u_R &= mu_L, \\ (p\cdot\bar{\sigma})u_L &= mu_R, \end{aligned} \tag{38}$$

其中 $p\cdot\sigma = E - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$，$p\cdot\bar{\sigma} = E + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}$。利用恒等式 $(p\cdot\sigma)(p\cdot\bar{\sigma}) = (E-\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})(E+\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}) = E^2 - |\boldsymbol{p}|^2 = m^2$，我们可以构造解。取 $u_L = \sqrt{p\cdot\sigma}\xi$，其中 ξ 是任意二分量旋量。则由第二式 $u_R = \dfrac{1}{m}(p\cdot\bar{\sigma})\sqrt{p\cdot\sigma}\xi = \dfrac{1}{m}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi$。注意到 $\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\sqrt{p\cdot\sigma} = \sqrt{m^2} = m$，故 $u_R = \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi$。因此，正能量解的一般形式为：

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\xi \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi \end{pmatrix}. \tag{39}$$

对于静止粒子 $\boldsymbol{p} = 0$，有 $p\cdot\sigma = p\cdot\bar{\sigma} = m$，此时 $u(p) = \sqrt{m}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$，左右手分量相等。同理，对于负能量解 $v(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\cdot x}$，动量空间方程变为 $(\gamma^\mu p_\mu + m)v(p) = 0$。解的形式为：

$$v(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\eta \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta \end{pmatrix}, \tag{40}$$

其中 η 为任意二分量旋量。

4. 在相对论极限 ($|\boldsymbol{p}| \gg m$) 下，从 Dirac 方程中找出所有正能量态的运动方程。（附注：这被称为类 Schrodinger 方程，广泛用于中微子振荡的唯象学研究中。）

解：

Dirac 方程的 Hamilton 形式为：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m)\Psi, \tag{41}$$

其中 $\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\nabla$ 是动量算符。对于动量为 $\boldsymbol{p}$ 的平面波解 $\Psi(t,\boldsymbol{x}) = \Psi(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}}$，波函数 $\Psi(t)$ 满足：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = H(\boldsymbol{p})\Psi(t) = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta m)\Psi(t). \tag{42}$$

Hamilton 量 $H(\boldsymbol{p})$ 的本征值为 $E = \pm\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}$。题目要求找出“所有正能量态”的运动方程。设 $\Psi_+(t)$ 为正能量本征态（即 $H(\boldsymbol{p})\Psi_+ = E\Psi_+$，其中 $E > 0$）。则 $\Psi_+(t)$ 的时间演化方程严格地为：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi_+(t)}{\partial t} = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}\,\Psi_+(t). \tag{43}$$

在相对论极限 $|\boldsymbol{p}| \gg m$ 下，我们可以对能量 E 进行 Taylor 展开：

$$E = \sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2} = |\boldsymbol{p}|\left(1 + \frac{m^2}{|\boldsymbol{p}|^2}\right)^{1/2} \approx |\boldsymbol{p}|\left(1 + \frac{m^2}{2|\boldsymbol{p}|^2}\right) = |\boldsymbol{p}| + \frac{m^2}{2|\boldsymbol{p}|}, \tag{44}$$

忽略 $O\left(\frac{m^4}{|\boldsymbol{p}|^3}\right)$ 及更高阶项。将此近似代入演化方程，得到正能量态的近似运动方程：

$$\mathrm{i}\frac{\partial\Psi_+(t)}{\partial t} \approx \left(|\boldsymbol{p}| + \frac{m^2}{2|\boldsymbol{p}|}\right)\Psi_+(t). \tag{45}$$

这就是所谓的“类薛定谔方程”（Schrödinger-like equation）。

附注：在中微子振荡中的应用 在中微子物理中，中微子通常被视为极度相对论性的粒子（$m_\nu \ll E_\nu \approx |\boldsymbol{p}|$）。如果我们考虑一个包含多种质量本征态（质量为 m_k）的混合态 $\nu(t)$，每个质量本征态 $\nu_k(t)$ 都遵循上述方程：

$$\mathrm{i}\frac{\partial \nu_k}{\partial t} = \left(E + \frac{m_k^2}{2E}\right)\nu_k, \tag{46}$$

（此处取近似 $|\boldsymbol{p}| \approx E$）。如果我们忽略对所有态都相同的总体相位因子 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}$，并关注不同质量态之间的相对相位差，方程可以写为：

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \vdots\end{pmatrix} = \left[\frac{1}{2E}\begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & \dots \\ 0 & m_2^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}\nu_1\\ \nu_2\\ \vdots\end{pmatrix}. \tag{47}$$

这正是描述中微子在真空中传播和振荡的标准方程。在空间传播形式中，通常利用 $t \approx z$（光速 $c = 1$），将 ∂_t 替换为 ∂_z 或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$。

5. (a) 阅读西德尼 · 科尔曼（Sidney Coleman）的《量子场论讲义》第 18 章。弄清楚如何将三维空间中角旋转的描述推广到四维时空中的 Lorentz 变换。

   (b) 参照方程 (18.52)，证明局部同构关系 $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$ 以及 $SO(3,1) \simeq SU(2) \times SU(2)$。

   (c) Dirac 在上世纪 20 年代推导出了 Dirac 方程并找到了 γ 矩阵的解。如今，在群及其表示理论发展之后，可以显式地推导出这些 γ 矩阵。阅读第 19 章，列出在 Weyl 基下推导 Dirac 矩阵的主要步骤。

解：

(a) 在三维 Euclidean 空间中，旋转群 $SO(3)$ 的生成元是角动量算符 $\boldsymbol{J} = (J_1, J_2, J_3)$。它们满足 Lie 代数对易关系：

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k. \tag{48}$$

任意有限旋转可以表示为 $R(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{J}}$。推广到四维 Minkowski 时空，Lorentz 群 $SO(3,1)$ 包含六个生成元：三个空间旋转生成元 J_i 和三个 Lorentz Boost 生成元 K_i。

在四维张量语言中，生成元记为 $J^{\mu\nu}$（反对称），其中 $J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{jk}$ 对应空间旋转，$K_i = J^{0i}$ 对应时空提升。Lorentz 群的 Lie 代数对易关系为：

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k,\\
[J_i, K_j] &= \mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k,\\
[K_i, K_j] &= -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k,
\end{aligned} \tag{49}$$

其中第二个关系表明 $\boldsymbol{K}$ 在旋转下像矢量一样变换，第三个关系反映了两个不同方向的提升的对易子等效于一个旋转（Wigner 旋转）。注意 $SO(3,1)$ 中 $[K, K]$ 的符号为负，这是由于闵氏度规的时间分量符号不同所致。

(b) i. 为了解耦上述耦合的代数关系，我们引入两个新的非厄米矢量算符 $\boldsymbol{J}_+$ 和 $\boldsymbol{J}_-$（在 Coleman 讲义中通常记为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 或类似形式）：

$$\boldsymbol{J}_+ = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + \mathrm{i}\boldsymbol{K}), \quad \boldsymbol{J}_- = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - \mathrm{i}\boldsymbol{K}). \tag{50}$$

计算它们的对易关系：

$$\begin{aligned}[J_{+i}, J_{+j}] &= \frac{1}{4}[J_i + \mathrm{i}K_i, J_j + \mathrm{i}K_j] \\ &= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] + \mathrm{i}[J_i, K_j] + \mathrm{i}[K_i, J_j] - [K_i, K_j]\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k + \mathrm{i}(\mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k) + \mathrm{i}(-\mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k) - (-\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k - 2\epsilon_{ijk}K_k\right) \\ &= \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k + \mathrm{i}K_k) \\ &= \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_{+k}.\end{aligned} \tag{51}$$

同理可证 $[J_{-i}, J_{-j}] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_{-k}$。此外，计算互对易关系：

$$\begin{aligned}[J_{+i}, J_{-j}] &= \frac{1}{4}[J_i + \mathrm{i}K_i, J_j - \mathrm{i}K_j] \\ &= \frac{1}{4}\left([J_i, J_j] - \mathrm{i}[J_i, K_j] + \mathrm{i}[K_i, J_j] + [K_i, K_j]\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k - \mathrm{i}(\mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k) + \mathrm{i}(-\mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k) + (-\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k + \epsilon_{ijk}K_k + \epsilon_{ijk}K_k - \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k\right) \\ &= 0.\end{aligned} \tag{52}$$

这表明 Lorentz 群的代数 $\mathfrak{so}(3,1)$ 可以分解为两个相互对易的 $\mathfrak{su}(2)$ 代数的直和。因此，在 Lie 代数层面（即局部同构），我们有 $SO(3,1) \simeq SU(2) \times SU(2)$。

ii. $SO(4)$ 是四维 Euclidean 空间的旋转群。其生成元 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 的对易关系前两个与 $SO(3,1)$ 相同，但第三个不同（因为度规为 $(+,+,+,+)$）：

$$[K_i, K_j] = +\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k. \tag{53}$$

此时我们定义实线性组合：

$$\boldsymbol{J}_+ = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} + \boldsymbol{K}), \quad \boldsymbol{J}_- = \frac{1}{2}(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{K}). \tag{54}$$

计算对易子：

$$\begin{aligned}[J_{+i}, J_{+j}] &= \frac{1}{4}([J_i, J_j] + [J_i, K_j] + [K_i, J_j] + [K_i, K_j]) \\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k + \mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k + \mathrm{i}\epsilon_{ijk}K_k + \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_k) \\ &= \mathrm{i}\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}(J_k + K_k) \\ &= \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_{+k}.\end{aligned} \tag{55}$$

同理 $[J_{-i}, J_{-j}] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J_{-k}$ 且 $[J_{+i}, J_{-j}] = 0$。因此，$SO(4)$ 的代数也分解为两个独立的 $\mathfrak{su}(2)$ 代数。于是有 $SO(4) \simeq SU(2) \times SU(2)$。

(c) 根据 Coleman 讲义第 19 章，推导 Dirac 矩阵的主要步骤如下：

i. **确定 Lorentz 群的表示**：根据上述分解，Lorentz 群的不可约表示可以用 (j_+, j_-) 标记。最简单的非平凡表示是 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$（左手征旋量 ψ_L）和 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$（右手征旋量 ψ_R）。

ii. **引入宇称与四分量旋量**：空间反演（宇称 P）操作将 $\boldsymbol{K} \to -\boldsymbol{K}$ 而保持 $\boldsymbol{J}$ 不变，因此互换 $\boldsymbol{J}_+ \leftrightarrow \boldsymbol{J}_-$。这意味着宇称将 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 表示映射到 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 表示。为了描述守恒宇称的粒子（如电子），必须将两者组合成一个四分量对象——Dirac 旋量：

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \tag{56}$$

iii. **构造 Lorentz 生成元**：在 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 表示中，$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$，$\boldsymbol{K} = -\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$；在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 表示中，$\boldsymbol{J} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$，$\boldsymbol{K} = +\mathrm{i}\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$。因此，作用在 Ψ 上的生成元矩阵形式为：

$$S^{ij} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}, \quad S^{0i} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sigma^i/2 & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\sigma^i/2 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

iv. **寻找 γ 矩阵**：Dirac 代数要求 $S^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$。特别地，$\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ 在手征基下应是对角阵。由于 ψ_L 和 ψ_R 具有相反的手征，我们取 $\gamma^5 = \mathrm{diag}(-1,1)$。这意味着 γ^μ 必须将 ψ_L 耦合到 ψ_R（因为质量项 $m\bar{\Psi}\Psi$ 混合了左右手分量，且 γ^0 必须实现宇称操作 $\psi_L \leftrightarrow \psi_R$）。因此 γ^0 必须是反对角的：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{58}$$

再结合 $\{\gamma^0, \gamma^i\} = 0$ 和生成元的形式，可以推导出 γ^i 也必须是反对角的：

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{59}$$

这正是 Weyl 表示（手征表示）中的 Dirac 矩阵。