粒子物理基础作业

Clark

3.4 宇宙线缪子产生于大气的高层（例如 8000m）并以接近光速（例如 $0.998c$）飞向地面。

(a) 给定缪子的寿命（2.2×10^{-6}s），按相对论之前的物理，它衰变前能走多远？缪子能达到地面吗？

(b) 现在用相对论物理来回答同样的问题。（由于时间膨胀，缪子能持续更长的时间，因此它们飞得更远。）

(c) 在大气上层同样会产生 π。事实的序列是（来自外空的）质子撞击（大气中的）质子 $\to \mathrm{p}+\mathrm{p}+$ 若干π。π 然后衰变到缪子：$\pi^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu$；$\pi^+\to\mu^++\nu_\mu$。但 π 的寿命更短（2.6×10^{-8}s）。假设 π 具有同样的速度（$0.998c$），它们能到达地面吗？

解：

(a) 缪子衰变前能走的距离为 $d=v\tau=0.998c\times2.2\times10^{-6}$m，其中光速 c 取 $c=3.0\times10^8$m/s，于是有速度 $v=2.994\times10^8$m/s，最后计算出距离为 $d=6.5868\times10^2\text{m}=658.68\text{m}\ll8000$m。因此不能。

(b) 在相对论物理中，需要考虑时间膨胀效应。先计算 Lorentz 因子，即 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-0.998^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{0.003996}}\approx\dfrac{1}{0.06324}\approx15.81$。现在计算实验室参考系中的寿命，即 $\triangle t=\gamma\tau=15.81\times2.2\times10^{-6}\text{s}=3.4782\times10^{-5}$s。衰变前能走的距离为 $d=v\triangle t=2.994\times10^8\times3.4782\times10^{-5}\text{m}=10.4137308\times10^3\text{m}=10413.7308\text{m}>8000$m。因此可以。

(c) Lorentz 因子 γ 与缪子相同，因此取为 $\gamma=15.81$。实验室参考系中的寿命为 $\triangle t_\pi=\gamma\tau_\pi=15.81\times2.6\times10^{-8}\text{s}=4.1106\times10^{-7}$s。衰变前能走的距离为 $d=v\triangle t_\pi=2.994\times10^8\times4.1106\times10^{-7}\text{m}=123.071364\text{m}\ll8000$m。因此不能。

3.6 歹徒开着 3/4 光速的车逃跑，警察从 1/2 光速的警车上开枪。子弹的枪口速度（相对论的速度）是 1/3 光速。子弹能打到它的目标吗？

(a) 按照相对论之前的物理？

(b) 按照相对论？

解：

(a) 在相对论之前的物理中，速度叠加遵循 Galileo 变换。子弹相对于地面的速度 u 是警车速度 $v_p=\dfrac{1}{2}c$ 与子弹相对于警车的速度 $u'=\dfrac{1}{3}c$ 之和，即 $u=\dfrac{5}{6}c$。歹徒行驶的车速为 $v_r=\dfrac{3}{4}c$。显然 $v_r<u$，即子弹速度大于歹徒行驶的速度，因此子弹能打到目标。

(b) 在相对论中，速度叠加遵循 Lorentz 变换。子弹相对于地面的速度 u 满足 Lorentz 公式，即 $u=\dfrac{v_p+u'}{1+\frac{v_p u'}{c^2}}=\dfrac{\frac{1}{2}c+\frac{1}{3}c}{1+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}c^2}{c^2}}=\dfrac{5}{7}c$。显然 $v_r>u$，即子弹速度小于歹徒行驶的速度，因此子弹不能打到目标。

3.15 一个以速度 v 飞行的 π 衰变成一个缪子和一个中微子，$\pi^-\to\mu^-+\bar{\nu}_\mu$。如果中微子以 90° 角相对原来的 π 方向出现，缪子将以什么角度飞出？（答案：$\tan\theta=(1-m_\mu^2/m_\pi^2)/(2\beta\gamma^2)$）

解：

由题目有 $\beta=\dfrac{v}{c}$ 和 Lorentz 因子 $\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$。考虑四维时空，我们有 π 的四动量：p_π，缪子的四动量：p_μ，中微子的四动量（无质量）：p_ν。该过程满足动量守恒定律，即 $p_\pi=p_\mu+p_\nu$。于是有 $p_\mu^2=(p_\pi-p_\nu)^2=p_\pi^2+p_\nu^2-2p_\pi\cdot p_\nu$。可以分别计算出：$p_\mu^2=\left(\dfrac{E_\mu}{c}\right)^2-\boldsymbol{p}_\mu^2=m_\mu^2c^2$，其中 $E_\mu=\sqrt{(p_\mu c)^2+(m_\mu c^2)^2}$ 和 $|\boldsymbol{p}_\mu|=p_\mu$；$p_\pi^2=\left(\dfrac{E_\pi}{c}\right)^2-\boldsymbol{p}_\pi^2=(\gamma m_\pi c)^2-(\gamma m_\pi\boldsymbol{v})^2=\gamma^2m_\pi^2(c^2-v^2)=\gamma^2m_\pi^2c^2(1-\beta^2)=m_\pi^2c^2$，其中 $E_\pi=\gamma m_\pi c^2$ 和 $\boldsymbol{p}_\pi=\gamma m_\pi\boldsymbol{v}$；$p_\nu^2=\left(\dfrac{E_\nu}{c}\right)^2-\boldsymbol{p}_\nu^2=0$，其中中微子没有质量，于是动量-能量关系为 $E_\nu=p_\nu c$，以及 $|\boldsymbol{p}_\nu|=p_\nu$；由于 π 与中微子夹角 90°，有 $\boldsymbol{p}_\pi\cdot\boldsymbol{p}_\nu=0$，因此对于 $p_\pi\cdot p_\nu=\dfrac{E_\pi}{c}\dfrac{E_\nu}{c}-\boldsymbol{p}_\pi\cdot\boldsymbol{p}_\nu=\dfrac{E_\pi E_\nu}{c^2}$。将上述一系列结果带入其中，我们得到 $p_\mu^2=m_\mu^2c^2=m_\pi^2c^2-2\dfrac{E_\pi E_\nu}{c^2}=m_\pi^2c^2-2\dfrac{\gamma m_\pi c^2 p_\nu c}{c^2}$，即有 $p_\nu=\dfrac{(m_\mu^2-m_\pi^2)c}{2\gamma m_\pi}=|\boldsymbol{p}_\nu|$。最后我们得到 $\tan\theta=\dfrac{|\boldsymbol{p}_\nu|}{|\boldsymbol{p}_\pi|}=\dfrac{\frac{(m_\mu^2-m_\pi^2)c}{2\gamma m_\pi}}{\gamma m_\pi v}=\dfrac{(m_\mu^2-m_\pi^2)c}{2\gamma^2m_\pi^2v}=\dfrac{1-\frac{m_\mu^2}{m_\pi^2}}{2\gamma^2\beta}$。

3.16 粒子 A（能量为 E）撞击粒子 B（静止），产生粒子 C_1，C_2，$\cdots$，：$A+B\to C_1+C_2+\cdots+C_n$。计算这个反应的阈值（即最小的 E），用各种粒子的质量表达结果。（答案：$\dfrac{M^2-m_A^2-m_B^2}{2m_B}c^2$，其中 $M=m_1+m_2+\cdots+m_n$）

解：

假设粒子 A 的质量为 m_A，粒子 B 的质量为 m_B，撞击后的产生 n 个粒子，其质量分别为 m_1，m_2，$\cdots$，m_n。粒子 B 的四动量为 $p_B=\left(\dfrac{m_Bc^2}{c},\boldsymbol{0}\right)=(m_Bc,\boldsymbol{0})$，粒子 A 的四动量为 $p_A=\left(\dfrac{E_A}{c},\boldsymbol{p}_A\right)$，其中 $E_A=\sqrt{(p_Ac)^2+(m_Ac^2)^2}$。定义 s 为两个粒子的总四动量的平方，即 $s=(p_A+p_B)^2c^2=p_A^2c^2+p_B^2c^2+2p_A\cdot p_Bc^2=m_A^2c^4+m_B^2c^4+2E_Am_Bc^2$。在阈值的情况下，产生的粒子在质心系中静止，总四动量 $P=\sum_{i=1}^n p_i$ 在质心系中为 $P_{\mathrm{CM}}=(Mc^2,\boldsymbol{0})$，其中 $M=\sum_{i=1}^n m_i$。于是有 $P_{\mathrm{CM}}^2c^2=M^2c^4$。注意到动量守恒定律，$p_A+p_B=P_{\mathrm{CM}}$，于是可得 $s=(p_A+p_B)^2c^2=P_{\mathrm{CM}}^2c^2=M^2c^4=m_A^2c^4+m_B^2c^4+2E_Am_Bc^2$。解得 $E_A=\dfrac{M^2-m_A^2-m_B^2}{2m_B}c^2$。

3.22 一个静止的粒子衰变成三个或更多的粒子：$A\to B+C+D+\cdots$。

(a) 计算此衰变中 B 可以有的最大和最小能量，用各种质量表达结果。

(b) 计算缪子衰变 $\mu^-\to \mathrm{e}^-+\bar{\nu}_\mathrm{e}+\nu_\mu$ 中最大和最小的电子能量。

解：

(a) 考虑粒子 A 在静止参考系中衰变为三个或更多粒子，包括 B。设 A 的质量为 m_A，B 的质量为 m_B，其他粒子的静止质量之和为 $M_X=\sum_i m_i$。根据能量和动量守恒，B 的能量 E_B 可以表示为其他粒子不变质量 m_X 的函数。已知动量守恒定律，即 $p_A=p_B+P_X$，其中 P_X

是其他粒子的总四动量。在 A 的静止参考系中，$p_A=(m_Ac,\mathbf{0})$，$p_B=\left(\frac{E_B}{c},\boldsymbol{p}_B\right)$。于是可以计算出，$P_X^2=m_X^2c^2=(p_A-p_B)^2=p_A^2+p_B^2-2p_A\cdot p_B=m_A^2c^2+m_B^2c^2-2m_AE_B$。解得 $E_B=\frac{m_A^2+m_B^2-m_X^2}{2m_A}c^2$。当其他粒子在它们的质心系中相对静止时，$m_X$ 取最小值 M_X。由于能量守恒，有 $E_B=\frac{m_A^2+m_B^2-m_X^2}{2m_A}c^2\geq m_Bc^2$，解得 $m_X^2\leq(m_A^2+m_B^2-2m_A^2m_B^2)=(m_A-m_B)^2$，即 $m_X\leq m_A-m_B$。由于衰变的发生，必须有 $m_A\geq m_B+M_X$，因此 $m_A-m_B\geq M_X$，故 m_X 的取值范围为：$M_X\leq m_X\leq(m_A-m_B)$。最后我们得到 E_B 的范围，即 $m_Bc^2\leq\frac{m_A^2+m_B^2-m_X^2}{2m_A}c^2\leq\frac{m_A^2+m_B^2-M_X^2}{2m_A}c^2$。于是结果为，$(E_B)_{\min}=m_Bc^2$ 和 $(E_B)_{\max}=\frac{m_A^2+m_B^2-\left(\sum_i m_i\right)^2}{2m_A}c^2$。

(b) 在缪子衰变中，$A=\mu^-$，$B=\mathrm{e}^-$，其他粒子为 $\bar{\nu}_\mathrm{e}$ 和 ν_μ。中微子质量极小，可忽略不计，故设 $m_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}=0$，$m_{\nu_\mu}=0$。此时有，$m_A=m_{\mu^-}$，$m_B=m_{\mathrm{e}^-}$ 和 $M_X=m_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}+m_{\nu_\mu}=0$。利用 (a) 的结论，可直接计算出 $(E_{\mathrm{e}^-})_{\min}=m_{\mathrm{e}^-}c^2$ 和 $(E_{\mathrm{e}^-})_{\max}=\frac{m_{\mu^-}^2+m_{\mathrm{e}^-}^2}{2m_{\mu^-}}c^2$。