粒子物理基础作业

Clark

6.3 (a) 假设你一开始有 100 万缪子（静止）；到 2.2×10^{-5}s 后还剩多少？

(b) 一个 π^- 持续 1s 的概率有多大（用 10 的幂次表达你的结果）？

解：

(a) 缪子（μ 子）的衰变遵循指数衰变规律。设初始缪子数为 $N_0 = 10^6$，缪子的平均寿命为 $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$s。在时间 $t = 2.2 \times 10^{-5}$s 后，剩余缪子数由公式给出：

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{1}$$

代入数值，注意 $\dfrac{t}{\tau} = \dfrac{2.2 \times 10^{-5}}{2.2 \times 10^{-6}} = 10$，因此：

$$N = 10^6 \times e^{-10}. \tag{2}$$

计算 e^{-10} 的近似值：$e^{-10} \approx 4.53999 \times 10^{-5}$。于是：

$$N \approx 10^6 \times 4.53999 \times 10^{-5} = 45.3999. \tag{3}$$

取整后，剩余缪子数约为 46 个。

(b) π^- 介子的平均寿命为 $\tau = 2.6 \times 10^{-8}$s。一个 π^- 介子持续时间 $t = 1$s 的概率由指数衰变公式给出：

$$P = e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{4}$$

代入数值，$\dfrac{t}{\tau} = \dfrac{1}{2.6 \times 10^{-8}} \approx 3.84615 \times 10^7$，因此：

$$P = e^{-3.84615 \times 10^7}. \tag{5}$$

为用 10 的幂次表达，利用对数换底公式：$e^x = 10^{x \log_{10} e}$，其中 $\log_{10} e \approx 0.434294$。所以：

$$P = 10^{(-3.84615 \times 10^7) \times 0.434294} \approx 10^{-1.67000 \times 10^7}. \tag{6}$$

近似计算指数：$-1.67000 \times 10^7 = -16700000$。因此，概率可写为：

$$P \approx 10^{-16700000}. \tag{7}$$

注意，通常在科学记数法中写作 $10^{-1.67 \times 10^7}$。

6.8 考虑在实验室系（b 初始静止）的弹性散射，$a + b \to a + b$，假设靶如此之重（$m_b c^2 \gg E_a$）以致其反冲可以忽略。定出微分截面。（提示：在这个极限下实验室系和质心系是一样的。）

（答案：$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)=\left(\frac{\hbar}{8\pi m_b c}\right)^2|\mathcal{M}|^2$）

解：

结合正文，我们有 (6.47)

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2\frac{S|\mathcal{M}|^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}, \tag{8}$$

其中 $|\boldsymbol{p}_f|$ 是出射动量的大小，$|\boldsymbol{p}_i|$ 是入射动量的大小。由于靶粒子 b 非常重（$m_bc^2\gg E_a$），其反冲可以忽略，因此实验室系和质心系实际上是相同的。在这种极限情况下，我们可以做出以下简化：

- 粒子 1（入射粒子 a）从粒子 2（靶粒子 b）上弹回，其能量保持不变，因此动量的绝对值也不变：

$$|\boldsymbol{p}_f|=|\boldsymbol{p}_i|. \tag{9}$$

- 总能量 (E_1+E_2) 中，E_1 是入射粒子的能量，E_2 是靶粒子的能量。由于靶粒子非常重且初始静止，$E_2\approx m_bc^2$，并且由于 $m_bc^2\gg E_a$，我们有：

$$E_1+E_2=E_1+m_bc^2\approx m_bc^2. \tag{10}$$

- 对称因子 $S=1$，因为粒子 1 和粒子 2 是不同的粒子。将上述简化代入 (6.47)，我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2\frac{|\mathcal{M}|^2}{(m_bc^2)^2}. \tag{11}$$

  注意到 $\hbar c$ 具有作用量 x 速度的量纲，而 m_bc^2 具有能量的量纲，我们可以将上述表达式重新整理为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{\hbar}{8\pi m_bc}\right)^2|\mathcal{M}|^2. \tag{12}$$

因此，在靶粒子非常重的极限下，弹性散射的微分截面为：

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)=\left(\frac{\hbar}{8\pi m_bc}\right)^2|\mathcal{M}|^2. \tag{13}$$

6.9 考虑在实验室系（2 静止）的碰撞 $1+2\to3+4$，3 和 4 是无质量的。计算微分截面公式。

$$\left[\text{答案：}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}=\left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2\frac{S|\mathcal{M}|^2|\boldsymbol{p}_3|}{m_2|\boldsymbol{p}_1|(E_1+m_2c^2-|\boldsymbol{p}_1|c\cos\theta)}\right]. \tag{14}$$

解：

结合正文，我们有 (6.38)

$$\sigma=\frac{S\hbar^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-(m_1m_2c^2)^2}}\int|\mathcal{M}|^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3\cdots-p_n)\times\prod_{j=2}^{n}\frac{1}{2\sqrt{\boldsymbol{p}_j^2+m_j^2c^2}}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3}, \tag{15}$$

其中 $p_j^0=\sqrt{\boldsymbol{p}_j^2+m_j^2c^2}$,以及在实验室系下,当 $p_1=\left(\frac{E_1}{c},\boldsymbol{p}_1\right)$ 和 $p_2=(m_2c,\mathbf{0})$,于是有 $p_1\cdot p_2=E_1m_2$,即 $\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-(m_1m_2c^2)^2}=|\boldsymbol{p}_1|m_2c$，因为 $E_1^2=m_1^2c^4+|\boldsymbol{p}_1|^2c^2$。由于粒子 3 和 4 是无质量的，我们有 $m_3=m_4=0$，所以 $p_j^0=|\boldsymbol{p}_j|$（对于 $j=3,4$）。截面公式变为：

$$\sigma=\frac{S\hbar^2}{4|\boldsymbol{p}_1|m_2c}\int|\mathcal{M}|^2(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\times\prod_{j=3}^{4}\frac{1}{2|\boldsymbol{p}_j|}\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_j}{(2\pi)^3}. \tag{16}$$

我们考虑微分截面 $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}$，即对粒子 3 的立体角积分。我们首先对粒子 4 的动量积分，利用动量守恒 δ 函数。然后，对粒子 3 的动量大小积分，但保留方向固定（即立体角元 $\mathrm{d}\Omega$）。具体步骤如下：

- 利用 δ 函数对 $\boldsymbol{p}_4$ 积分，得到 $\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3$（因为 $\boldsymbol{p}_2 = 0$）。
- 能量守恒 δ 函数变为 $\delta\left(E_1 + m_2c^2 - |\boldsymbol{p}_3|c - |\boldsymbol{p}_4|c\right)$，因为无质量粒子的能量 $E_j = |\boldsymbol{p}_j|c$。
- 截面公式现在为：

$$\sigma = \frac{S\hbar^2}{4|\boldsymbol{p}_1|m_2c}\int \frac{|\mathcal{M}|^2}{4|\boldsymbol{p}_3||\boldsymbol{p}_4|}(2\pi)\delta\left(E_1 + m_2c^2 - |\boldsymbol{p}_3|c - |\boldsymbol{p}_4|c\right)\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_3}{(2\pi)^3}, \tag{17}$$

其中 $|\boldsymbol{p}_4| = |\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3|$。

- 将 $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_3$ 写成 $|\boldsymbol{p}_3|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_3|\mathrm{d}\Omega$，并注意到 $|\boldsymbol{p}_4|$ 是 $|\boldsymbol{p}_3|$ 和角度的函数。
- 对 $|\boldsymbol{p}_3|$ 积分，利用 δ 函数。δ 函数的自变量为 $f(|\boldsymbol{p}_3|) = E_1 + m_2c^2 - |\boldsymbol{p}_3|c - |\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3|c$。我们需要找到 $f(|\boldsymbol{p}_3|) = 0$ 的根，并计算导数。
- 设 $z = |\boldsymbol{p}_3| + |\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3|$，则 δ 函数变为 $\delta\left(\frac{E_1}{c} + m_2c - z\right)$。然后，我们需要计算 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_3|}$。
- 计算 z 对 $|\boldsymbol{p}_3|$ 的导数，得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_3|} &= 1 + \frac{1}{2}\frac{2|\boldsymbol{p}_3| - 2|\boldsymbol{p}_1|\cos\theta}{\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2 + |\boldsymbol{p}_3|^2 - 2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_3|\cos\theta}} \\ &= \frac{\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2 + |\boldsymbol{p}_3|^2 - 2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_3|\cos\theta} + |\boldsymbol{p}_3| - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta}{\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2 + |\boldsymbol{p}_3|^2 - 2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_3|\cos\theta}} \\ &= \frac{z - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta}{\sqrt{|\boldsymbol{p}_1|^2 + |\boldsymbol{p}_3|^2 - 2|\boldsymbol{p}_1||\boldsymbol{p}_3|\cos\theta}} \\ &= \frac{z - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta}{|\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3|},\end{aligned} \tag{18}$$

其中 θ 是 $\boldsymbol{p}_3$ 与 $\boldsymbol{p}_1$ 的夹角。

- 因此，对 $|\boldsymbol{p}_3|$ 的积分变为：

$$I = \int \frac{|\boldsymbol{p}_3|^2\mathrm{d}|\boldsymbol{p}_3|}{|\boldsymbol{p}_3||\boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_3|}\delta\left(\frac{E_1}{c} + m_2c - z\right) = \int \frac{|\boldsymbol{p}_3|\mathrm{d}z}{z - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta}\delta\left(\frac{E_1}{c} + m_2c - z\right), \tag{19}$$

这里 $|\boldsymbol{p}_3|$ 是 z 的一个函数。

- 积分后，得到 $z = \frac{E_1}{c} + m_2c$，且 $|\boldsymbol{p}_3|$ 由该方程确定。同时，分母中的 $z - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta = \frac{E_1}{c} + m_2c - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta$，即

$$I = \frac{|\boldsymbol{p}_3|}{\frac{E_1}{c} + m_2c - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta}. \tag{20}$$

- 最终，微分截面为：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{S\hbar^2}{64\pi^2|\boldsymbol{p}_1|m_2c}|\mathcal{M}|^2\cdot I = \frac{S\hbar^2}{64\pi^2|\boldsymbol{p}_1|m_2c}\frac{|\mathcal{M}|^2|\boldsymbol{p}_3|}{\frac{E_1}{c} + m_2c - |\boldsymbol{p}_1|\cos\theta}. \tag{21}$$

- 整理常数因子：$\frac{\hbar^2}{64\pi^2} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2$，所以我们得到：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\hbar}{8\pi}\right)^2\frac{S|\mathcal{M}|^2|\boldsymbol{p}_3|}{m_2|\boldsymbol{p}_1|(E_1 + m_2c^2 - |\boldsymbol{p}_1|c\cos\theta)}. \tag{22}$$

这就是最终的微分截面公式。

6.11 (a) $A \to B + B$ 在 ABC 理论中是否是一个可能的过程？

(b) 考虑一个图有 n_A 个 A 外线，n_B 个 B 外线，n_C 个 C 外线。找出一个简单的判据来决定它是否是一个允许的反应。

(c) 假设 A 足够重，在 $A \to B + C$ 之后，下一个最可能的衰变模式是什么？对每个衰变画出 Feynman 图。

解：

(a) 不能。原因如下：在 ABC 理论中，反应必须满足一定的守恒律或对称性。根据部分 (b) 的判据，一个反应允许的充要条件是外线数目 n_A，n_B，n_C 要么全为偶数，要么全为奇数。对于过程 $A \to B + B$，外线数目为 $n_A = 1$（一个 A 外线），$n_B = 2$（两个 B 外线），$n_C = 0$（零个 C 外线）。这些数中，$n_A = 1$ 为奇数，$n_B = 2$ 为偶数，$n_C = 0$ 为偶数，并非全奇或全偶，因此该过程不允许。

(b) 判据：一个反应是允许的，当且仅当外线数目 n_A，n_B，n_C 要么全为偶数，要么全为奇数。

证明.

（必要性） 假设存在一个允许的 Feynman 图。我们考虑将该图中的所有内线"剪断"(snip every internal line)。剪断后，每个顶点将产生三个"外线"（称为"外部"线），分别对应 A，B，C。设顶点数为 N，则剪断后我们有 $n'_A = n'_B = n'_C = N$ 条"外部"线（即每个顶点贡献一条 A、一条 B 和一条 C 线）。现在，我们重新连接内线：每次连接两条同种粒子的"外部"线，将它们变为一条内线。连接过程会减少该种粒子的"外部"线数目。设 I_A，I_B，I_C 分别表示 A，B，C 的内线数目。则最终的外线数目为：

$$n_A = N - 2I_A, \quad n_B = N - 2I_B, \quad n_C = N - 2I_C. \tag{23}$$

由于 N，I_A，I_B，I_C 均为整数，n_A，n_B，n_C 的奇偶性相同（它们都等于 N 减去一个偶数，因此奇偶性由 N 决定）。具体地，如果 N 为偶数，则 n_A，n_B，n_C 全为偶数；如果 N 为奇数，则全为奇数。故必要性得证。

（充分性） 给定 n_A，n_B，n_C 全为偶数或全为奇数，我们构造一个允许的 Feynman 图。不失一般性，假设 n_A 是最大的（即 $n_A \geq n_B$ 且 $n_A \geq n_C$）。我们首先绘制 n_A 个顶点，每个顶点有三条"外部"线，分别标记为 A，B，C。此时，我们有 $n'_A = n_A$ 条 A 外线，$n'_B = n_A$ 条 B 外线，$n'_C = n_A$ 条 C 外线。由于 n_A 和 n_B 同奇偶，我们可以将 B 线成对连接：每次连接两条 B 的"外部"线，将它们变为一条 B 内线，这样 B 外线数目减少 2。重复此过程，直到 B 外线数目从 n_A 减少到 n_B。类似地，对 C 线进行相同操作，将 C 外线数目从 n_A 减少到 n_C。最终，我们得到一个具有 n_A 条 A 外线、n_B 条 B 外线和 n_C 条 C 外线的图。因此，充分性得证。 □

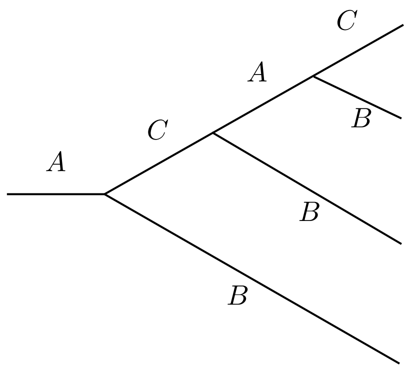
(c) 在 $A \to B + C$ 之后，下一个最可能的衰变模式应满足能量守恒且反应允许。根据部分 (b) 的判据，外线数目必须全为偶数或全为奇数。对于衰变过程，初始粒子为 A，故 $n_A = 1$（奇数）。因此，最终态粒子的外线数目 n_B 和 n_C 必须与 n_A 同奇偶，即全为奇数。$A \to B + C$ 对应 $n_B = 1, n_C = 1$，全为奇数，允许。下一个衰变模式应涉及更多粒子，且满足全奇条件。最简单的可能是：

- 模式一：$A \to 3B + C$，此时 $n_A = 1$（奇数），$n_B = 3$（奇数），$n_C = 1$（奇数），全为奇数，允许。

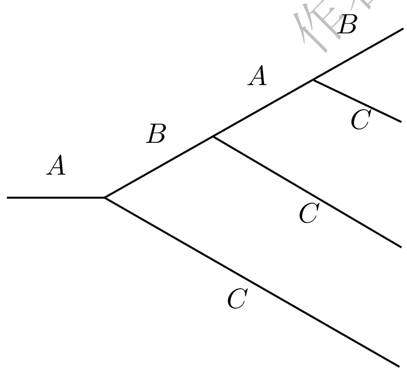
- 模式二：$A \to B + 3C$，此时 $n_A = 1$（奇数），$n_B = 1$（奇数），$n_C = 3$（奇数），全为奇数，允许。

这两个模式是下一个最可能的，因为它们涉及最少的额外粒子（仅增加两个粒子），且满足判据。下面分别画出它们的 Feynman 图。

模式一：$A \to 3B + C$ 的 Feynman 图



模式二：$A \to B + 3C$ 的 Feynman 图

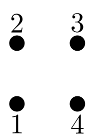


6.12 (a) 对 $A + A \to A + A$，画出所有最低阶的图。（共有六个。）

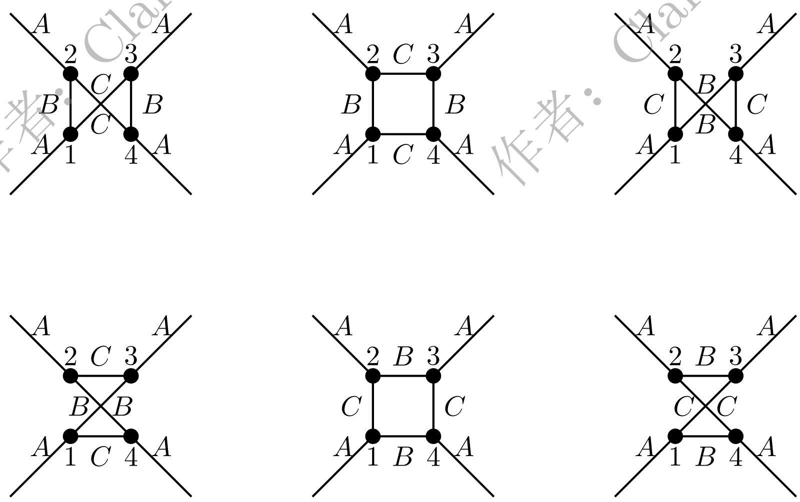
(b) 假设 $m_B = m_C = 0$，计算这个过程的最低阶振幅。以对一个剩余动量 q 的积分的形式给出你的答案。

解：

(a) 在 ABC 理论中，$A + A \to A + A$ 过程的最低阶费曼图涉及四个顶点，每个顶点连接一个外部的 A 粒子。内部传播子为 B 和 C 粒子。从顶点 1 出发的 B 粒子可以连接到顶点 2、3 或 4，而 C 粒子则连接到剩余的两个顶点之一，因此共有六种不同的连接方式，对应六个最低阶费曼图。现在，我们从

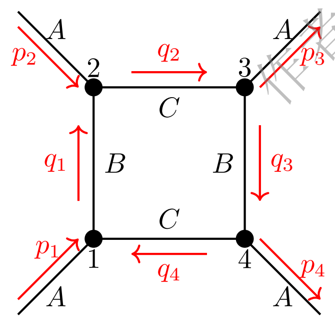


开始，逐个画出 6 种 Feynman 图。



至此我们画出了 6 种 Feynman 图。

(b) 假设 $m_B = m_C = 0$，我们计算 $A + A \to A + A$ 过程的最低阶振幅。以第一行中间的 Feynman 图为例进行详细计算。



该 Feynman 图由下面公式表述

$$
\begin{aligned}
&\iiiint (-\mathrm{i}g)^4 \frac{\mathrm{i}}{q_1^2 - m_B^2 c^2} \frac{\mathrm{i}}{q_2^2 - m_C^2 c^2} \frac{\mathrm{i}}{q_3^2 - m_B^2 c^2} \frac{\mathrm{i}}{q_4^2 - m_C^2 c^2} (2\pi)^4 \\
&\times \delta^4(p_1 + q_4 - q_1)(2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_1 - q_2)(2\pi)^4 \delta^4(q_2 - q_3 - p_3) \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(q_3 - p_4 - q_4) \frac{\mathrm{d}^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 q_3}{(2\pi)^4} \frac{\mathrm{d}^4 q_4}{(2\pi)^4} \\
= {}& g^4 \iiiint \frac{\delta^4(p_1 + q_4 - q_1)\delta^4(p_2 + q_1 - q_2)\delta^4(q_2 - q_3 - p_3)}{q_1^2 q_2^2 q_3^2} \\
&\times \frac{\delta^4(q_3 - p_4 - q_4)}{q_4^2} \mathrm{d}^4 q_1 \mathrm{d}^4 q_2 \mathrm{d}^4 q_3 \mathrm{d}^4 q_4 .
\end{aligned} \tag{24}
$$

首先，对 q_4 积分，利用 $\delta^4(p_1 + q_4 - q_1)$，得到 $q_4 = q_1 - p_1$：

$$
\mathcal{M} = g^4 \iiint \frac{\delta^4(p_2 + q_1 - q_2)\delta^4(q_2 - q_3 - p_3)\delta^4(q_3 - p_4 - q_1 + p_1)}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 (q_1 - p_1)^2} \mathrm{d}^4 q_1 \mathrm{d}^4 q_2 \mathrm{d}^4 q_3 . \tag{25}
$$

接着，对 q_3 积分，利用 $\delta^4(q_2 - q_3 - p_3)$，得到 $q_3 = q_2 - p_3$：

$$
\mathcal{M} = g^4 \iint \frac{\delta^4(p_2 + q_1 - q_2)\delta^4(q_2 - p_3 - p_4 - q_1 + p_1)}{q_1^2 q_2^2 (q_2 - p_3)^2 (q_1 - p_1)^2} \mathrm{d}^4 q_1 \mathrm{d}^4 q_2 . \tag{26}
$$

然后，对 q_2 积分，利用 $\delta^4(p_2 + q_1 - q_2)$，得到 $q_2 = p_2 + q_1$。去掉 q_1 的下标，记为 q：

$$
\mathcal{M} = g^4 \int \frac{\delta^4(p_2 + q - p_3 - p_4 - q + p_1)}{q^2 (p_2 + q)^2 (p_2 + q - p_3)^2 (q - p_1)^2} \mathrm{d}^4 q . \tag{27}
$$

δ 函数中的参数简化为 $\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$，这是总动量守恒。提取这个 δ 函数，并乘以 i（来自 LSZ 约化公式）：

$$\mathcal{M}=\mathrm{i}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^4\int\frac{1}{q^2(q+p_2)^2(q+p_2-p_3)^2(q-p_1)^2}\mathrm{d}^4q. \tag{28}$$

这是该图的振幅。类似地，可以计算其他图的振幅。该列第二行的图与该图相同（因为 $m_B=m_C=0$）。第一行的左、右两个 Feynman 图可以通过两个交换 $p_3\leftrightarrow p_4$ 得到：

$$\mathcal{M}=\mathrm{i}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^4\int\frac{1}{q^2(q+p_2)^2(q+p_2-p_4)^2(q-p_1)^2}\mathrm{d}^4q. \tag{29}$$

第二行的左、右两个 Feynman 图可以通过两个交换 $p_2\leftrightarrow p_3$ 得到：

$$\mathcal{M}=\mathrm{i}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^4\int\frac{1}{q^2(q+p_3)^2(q+p_3-p_2)^2(q-p_1)^2}\mathrm{d}^4q. \tag{30}$$

总振幅是六个图的和。由于对称性，可以写成：

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{M}=2\mathrm{i}\left(\frac{g}{2\pi}\right)^4\int\frac{1}{q^2(q-p_1)^2}\Bigg\{&\frac{1}{(q+p_2)^2(q+p_2-p_3)^2}\\&+\frac{1}{(q+p_2)^2(q+p_2-p_4)^2}+\frac{1}{(q+p_3)^2(q+p_3-p_2)^2}\Bigg\}\mathrm{d}^4q.\end{aligned}} \tag{31}$$

这就是 $A+A\to A+A$ 过程的最低阶振幅，以对剩余动量 q 的积分形式表示。