粒子物理基础作业

Clark

1.1 如果一个带电粒子无偏转地通过一个均匀的交叉电磁场 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$（相互垂直且都垂直于运动方向），它的速度是多少？如果我们现在关闭电场，粒子以半径为 R 的圆弧运动，他的荷质比是多少？

解：

设粒子质量为 m，电荷为 q，速度为 $\boldsymbol{v} = v\hat{i}$，电场 $\boldsymbol{E} = E\hat{j}$，磁场 $\boldsymbol{B} = B\hat{k}$。粒子受到的电场力为 $\boldsymbol{F}_E = q\boldsymbol{E} = qE\hat{j}$，粒子受到的磁场力为 $\boldsymbol{F}_B = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = qvB(\hat{i}\times\hat{k}) = -qvB\hat{j}$。由于粒子无偏转地通过电磁场，说明合力为零，即 $\boldsymbol{F}_E + \boldsymbol{F}_B = 0$，从而 $qE + qvB = 0$，解得 $v = -\dfrac{E}{B}$。当关闭电场仅保留磁场时，粒子在均匀磁场中做半径为 R 的圆弧运动。磁场力提供向心力 $|\boldsymbol{F}_B| = qvB = \dfrac{mv^2}{R}$，解得 $\dfrac{q}{m} = \dfrac{v}{BR} = \dfrac{E}{B^2R}$，其中用到了第一小问的结果 $v = -\dfrac{E}{B}$，且假设 $v \neq 0$。

1.3 在中子发现之前的有段时间，很多人认为原子核由质子和原子数等于或多于质子数的电子组成。Beta 衰变看起来支持这个想法——最后电子被打出来了；这不意味着有电子在里面吗？利用位置-动量测不准关系，$\triangle x \triangle p \geq \dfrac{\hbar}{2}$，来估计囚禁在原子核（半径 10^{-13}cm）中的一个电子的最小动量。从相对论能量-动量关系 $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$，确定相应的能量并与一个电子的辐射能进行比较，例如氚的 Beta 衰变（见图 1.5）。（这个结果是一些人相信 Beta 衰变电子不会在原子核中游荡，而必须是通过衰变本身产生的。）

解：

根据位置-动量测不准关系 $\triangle x\triangle p \geq \dfrac{\hbar}{2}$，设电子囚禁在原子核中，其位置不确定度 $\triangle x$ 约为原子核半径 $r = 10^{-13}\text{cm} = 10^{-15}\text{m}$，故电子的最小动量不确定度 $\triangle p = \dfrac{\hbar}{2\triangle x} \approx \dfrac{\hbar}{2r} = \dfrac{1.054\times10^{-34}\text{Js}}{2\times10^{-15}\text{m}} = 5.27\times10^{-20}\text{kg}\cdot\text{m/s}$。根据相对论能量-动量关系 $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4$，其中电子静止质量 $m_e = 9.11\times10^{-31}$kg，光速直接取 $c = 3\times10^8$m/s，代入动量 $p = \triangle p$，计算电子的总能量 $E = \sqrt{(5.27\times10^{-20}\cdot c)^2 + (9.11\times10^{-31}\cdot c^2)^2} \approx 1.5808\times10^{-11}\text{J}$。将其转换为电子伏特单位，即 $1\text{eV} = 1.602\times10^{-19}\text{J}$，因此 $E \approx 9.87\times10^7\text{eV} = 98.7\text{MeV}$。相比之下，氚的 Beta 衰变中电子的最大能量约为 $18.6\text{keV} \ll 98.8\text{MeV}$。因此，这个结果表明电子不可能被囚禁在原子核中，而必须是在 Beta 衰变过程中产生的。

1.4 Gell-Mann-Okubo 质量公式将重子八重态成员的质量相互联系起来（忽略 p 和 n；Σ^+、Σ^0 和 Σ^-；Ξ^0 和 Ξ^- 的小质量差）：

$$2(m_N + m_\Xi) = 3m_\Lambda + m_\Sigma. \tag{1}$$

利用这个公式，结合一个核子 N 的质量（利用 p 和 n 的平均），Σ（同样，用平均），还有 Ξ（同前），这个“预言”Λ 的质量。你得到的距离观测值有多近？

解：

由 Gell-Mann-Okubo 质量公式有 $m_\Lambda = \dfrac{2(m_N + m_\Xi) - m_\Sigma}{3}$。查阅粒子数据手册，核子 N 的平均质量为 $m_\text{N} = \dfrac{m_\text{p} + m_\text{n}}{2} = \dfrac{938.272 + 939.565}{2}\text{MeV}/c^2 = 938.9185\text{MeV}/c^2$，$\Sigma$ 的平均质量为 $m_\Sigma =$

$\dfrac{m_{\Sigma^+}+m_{\Sigma^0}+m_{\Sigma^-}}{3} = \dfrac{1189.37+1192.64+1197.45}{3}\mathrm{MeV}/c^2 \approx 1193.153\mathrm{MeV}/c^2$，$\Xi$ 的平均质量为 $m_\Xi = \dfrac{m_{\Xi^0}+m_{\Xi^-}}{2} = \dfrac{1314.86+1321.71}{2}\mathrm{MeV}/c^2 = 1318.285\mathrm{MeV}/c^2$。代入公式计算得 $m_\Lambda = \dfrac{2(938.9185+1318.285)-1193.153}{3}\mathrm{MeV}/c^2 \approx 1107.0847\mathrm{MeV}/c^2$。查阅粒子数据手册,$\Lambda$ 的观测质量为 $m_\Lambda^{\mathrm{obs}} = 1115.68\mathrm{MeV}/c^2$。因此，预言值与观测值非常接近，误差仅为 $\dfrac{|\triangle m|}{m_\Lambda^{\mathrm{obs}}}\times 100\% = \dfrac{|m_\Lambda - m_\Lambda^{\mathrm{obs}}|}{m_\Lambda^{\mathrm{obs}}}\times 100\% \approx 0.77\%$。

1.6 对十重态质量公式相当简单——列间隔相隔：

$$m_\Delta - m_{\Sigma^*} = m_{\Sigma^*} - m_{\Xi^*} = m_{\Xi^*} - m_\Omega. \tag{2}$$

利用这个式子（就像盖尔曼做的那样）预言 Ω^- 的质量。（利用头两个间隔的平均估计第三个。）你的预言与观测值有多靠近？

解：

查阅粒子数据手册，Δ 的质量为 $m_\Delta = 1232\mathrm{MeV}/c^2$，$\Sigma^*$ 的质量为 $m_{\Sigma^*} = 1385\mathrm{MeV}/c^2$，$\Xi^*$ 的质量为 $m_{\Xi^*} = 1533\mathrm{MeV}/c^2$。根据十重态质量公式，有质量差 $\triangle m_{\Delta,\Sigma^*} = m_\Delta - m_{\Sigma^*} = -153\mathrm{MeV}/c^2$ 和 $\triangle m_{\Sigma^*,\Xi^*} = m_{\Sigma^*} - m_{\Xi^*} = -148\mathrm{MeV}/c^2$，于是间隔差的平均值为 $\langle\triangle m\rangle = \dfrac{\triangle m_{\Delta,\Sigma^*}+\triangle m_{\Sigma^*,\Xi^*}}{2} = -150.5\mathrm{MeV}/c^2$，最终有 $m_\Omega = m_{\Xi^*} - \langle\triangle m\rangle = 1683.5\mathrm{MeV}/c^2$。查阅粒子数据手册，$\Omega^-$ 的观测质量为 $m_{\Omega^-}^{\mathrm{obs}} = 1672\mathrm{MeV}/c^2$。因此，预言值与观测值的误差为 $\dfrac{|\triangle m'|}{m_{\Omega^-}^{\mathrm{obs}}}\times 100\% = \dfrac{|m_\Omega - m_{\Omega^-}^{\mathrm{obs}}|}{m_{\Omega^-}^{\mathrm{obs}}}\times 100\% \approx 0.688\%$。

1.9 验证 Coleman-Glashow 关系 [Phys. Rev. B134, 671 (1964)]:

$$\Sigma^+ - \Sigma^- = \mathrm{p} - \mathrm{n} + \Xi^0 - \Xi^-. \tag{3}$$

（粒子的名字代表它的质量。）

解：

- 重子数守恒：Σ^+、Σ^-、p、n、Ξ^0 和 Ξ^- 的重子数均为 1，故重子数守恒。
- 电荷守恒：Σ^+ 的电荷为 $+1$，Σ^- 的电荷为 -1，p 的电荷为 $+1$，n 的电荷为 0，Ξ^0 的电荷为 0，Ξ^- 的电荷为 -1。左边 $\Sigma^+ - \Sigma^-$ 的总电荷为 $+1-(-1)=+2$，右边 $\mathrm{p}-\mathrm{n}+\Xi^0-\Xi^-$ 的总电荷为 $+1-0+0-(-1)=+2$，故电荷守恒。
- 奇异数守恒：Σ^+ 和 Σ^- 的奇异数均为 -1，p 和 n 的奇异数均为 0，Ξ^0 和 Ξ^- 的奇异数均为 -2。左边 $\Sigma^+ - \Sigma^-$ 的总奇异数为 $-1-(-1)=0$，右边 $\mathrm{p}-\mathrm{n}+\Xi^0-\Xi^-$ 的总奇异数为 $0-0+(-2)-(-2)=0$，故奇异数守恒。
- 质量关系验证：查阅粒子数据手册，Σ^+ 的质量为 $m_{\Sigma^+} = 1189.37\mathrm{MeV}/c^2$，$\Sigma^-$ 的质量为 $m_{\Sigma^-} = 1197.45\mathrm{MeV}/c^2$，p 的质量为 $m_{\mathrm{p}} = 938.272\mathrm{MeV}/c^2$，n 的质量为 $m_{\mathrm{n}} = 939.565\mathrm{MeV}/c^2$，$\Xi^0$ 的质量为 $m_{\Xi^0} = 1314.86\mathrm{MeV}/c^2$，$\Xi^-$ 的质量为 $m_{\Xi^-} = 1321.71\mathrm{MeV}/c^2$。计算左边 $\Sigma^+ - \Sigma^-$ 的质量差为 $\triangle m_{\Sigma^+,\Sigma^-} = m_{\Sigma^+} - m_{\Sigma^-} = -8.08\mathrm{MeV}/c^2$，计算右边 $\mathrm{p}-\mathrm{n}+\Xi^0-\Xi^-$ 的质量差为 $\triangle m_{\mathrm{p,n},\Xi^0,\Xi^-} = m_{\mathrm{p}} - m_{\mathrm{n}} + m_{\Xi^0} - m_{\Xi^-} = -8.143\mathrm{MeV}/c^2$。两边的质量差非常接近，误差为 $\dfrac{|\triangle m|}{|\triangle m_{\Sigma^+,\Sigma^-}|}\times 100\% = \dfrac{|\triangle m_{\Sigma^+,\Sigma^-} - \triangle m_{\mathrm{p,n},\Xi^0,\Xi^-}|}{|\triangle m_{\Sigma^+,\Sigma^-}|}\times 100\% \approx 0.77\%$。