高等量子力学作业

Clark

1. (a) 我们把从一个位置矢量 $\boldsymbol{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ 映射到另外一个位置矢量 $\boldsymbol{r}' = (r_1', r_2', r_3')^T$ 的变换记做 Q，即 $\boldsymbol{r}' = Q\boldsymbol{r}$，证明所有的 Q 变换构成一个群。

   (b) 一个波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 在一个空间操作 Q 下遵循以下规则：$\psi(\boldsymbol{r}) \to \psi'(\boldsymbol{r}) = \psi(Q^{-1}\boldsymbol{r})$。由于所有波函数构成一个完整的 Hilbert 空间（即完备性关系），因此 $\psi(Q^{-1}\boldsymbol{r})$ 总是可以由 $\psi(\boldsymbol{r})$ 线性地表示出来：

$$\psi(Q^{-1}\boldsymbol{r}) = \hat{D}(Q)\psi(\boldsymbol{r}). \tag{1}$$

   这里，$D(Q)$ 是算符 Q 在波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 下的表示算符。证明所有的表示算符 $D(Q)$ 也构成一个群。

解：

(a)
- **封闭性**：对于任意 $Q_1, Q_2 \in G$，它们的复合变换 Q_2Q_1 也是可逆线性变换。因为对于任意 $\boldsymbol{r}$，有

$$(Q_2Q_1)\boldsymbol{r} = Q_2(Q_1\boldsymbol{r}) = Q_2\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}', \tag{2}$$

  其中 $\boldsymbol{r}_1 = Q_1\boldsymbol{r}$。由于 Q_1 和 Q_2 可逆，Q_2Q_1 也可逆，且 $(Q_2Q_1)^{-1} = Q_1^{-1}Q_2^{-1}$。因此，$Q_2Q_1 \in G$，封闭性成立。

- **结合律**：对于任意 $Q_1, Q_2, Q_3 \in G$，变换的复合满足结合律：

$$(Q_1Q_2)Q_3 = Q_1(Q_2Q_3), \tag{3}$$

  因为矩阵乘法（或线性变换复合）满足结合律。因此，结合律成立。

- **单位元存在**：恒等变换 I 满足 $I\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}$ 对于所有 $\boldsymbol{r}$。显然 $I \in G$，且对于任意 $Q \in G$，有

$$QI = IQ = Q. \tag{4}$$

  因此，单位元存在。

- **逆元存在**：对于每个 $Q \in G$，由于 Q 可逆，存在逆变换 Q^{-1}，满足

$$QQ^{-1} = Q^{-1}Q = I, \tag{5}$$

  且 Q^{-1} 也是可逆线性变换，故 $Q^{-1} \in G$。因此，逆元存在。

综上，G 构成一个群。

(b) 设波函数 $\psi(\boldsymbol{r})$ 在空间操作 Q 下变换为 $\psi'(\boldsymbol{r}) = \psi(Q^{-1}\boldsymbol{r})$，并定义表示算符 $\hat{D}(Q)$ 由下式给出：

$$\hat{D}(Q)\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(Q^{-1}\boldsymbol{r}). \tag{6}$$

考虑所有这样的算符的集合 $\{\hat{D}(Q)|Q\in G\}$，其中 G 是 (a) 中的变换群。我们需要证明该集合在算符乘法下构成群。

- **封闭性**：对于任意 $\hat{D}(Q_1)$ 和 $\hat{D}(Q_2)$，它们的复合算符 $\hat{D}(Q_1)\hat{D}(Q_2)$ 满足：对任意波函数 ψ，

$$\begin{aligned}\left(\hat{D}(Q_1)\hat{D}(Q_2)\right)\psi(\boldsymbol{r}) &= \hat{D}(Q_1)\left(\hat{D}(Q_2)\psi\right)(\boldsymbol{r})\\ &= \hat{D}(Q_2)\psi(Q_1^{-1}\boldsymbol{r})\\ &= \psi\left(Q_2^{-1}(Q_1^{-1}\boldsymbol{r})\right)\\ &= \psi\left((Q_2^{-1}Q_1^{-1})\boldsymbol{r}\right)\\ &= \psi\left((Q_1Q_2)^{-1}\boldsymbol{r}\right)\\ &= \hat{D}(Q_1Q_2)\psi(\boldsymbol{r}).\end{aligned}\tag{7}$$

  所以，$\hat{D}(Q_1)\hat{D}(Q_2)=\hat{D}(Q_1Q_2)$。由于 $Q_1Q_2\in G$，有 $\hat{D}(Q_1Q_2)\in\{\hat{D}(Q)\}$，故封闭性成立。

- **结合律**：算符乘法满足结合律，因为函数复合满足结合律。对于任意 $\hat{D}(Q_1),\hat{D}(Q_2),\hat{D}(Q_3)$，有

$$\left(\hat{D}(Q_1)\hat{D}(Q_2)\right)\hat{D}(Q_3)=\hat{D}(Q_1)\left(\hat{D}(Q_2)\hat{D}(Q_3)\right),\tag{8}$$

  结合律成立。

- **单位元存在**：单位算符对应恒等变换 I，即 $\hat{D}(I)$。对任意波函数 ψ，

$$\hat{D}(I)\psi(\boldsymbol{r})=\psi(I^{-1}\boldsymbol{r})=\psi(\boldsymbol{r}),\tag{9}$$

  所以 $\hat{D}(I)$ 是单位算符。且对于任意 $\hat{D}(Q)$，有

$$\hat{D}(Q)\hat{D}(I)=\hat{D}(QI)=\hat{D}(Q),\quad \hat{D}(I)\hat{D}(Q)=\hat{D}(IQ)=\hat{D}(Q),\tag{10}$$

  故单位元存在。

- **逆元存在**：对于每个 $\hat{D}(Q)$，其逆算符为 $\hat{D}(Q^{-1})$。因为

$$\begin{aligned}\hat{D}(Q)\hat{D}(Q^{-1})&=\hat{D}(QQ^{-1})=\hat{D}(I),\\ \hat{D}(Q^{-1})\hat{D}(Q)&=\hat{D}(Q^{-1}Q)=\hat{D}(I),\end{aligned}\tag{11}$$

  所以 $\hat{D}(Q^{-1})$ 是 $\hat{D}(Q)$ 的逆元，且由于 $Q^{-1}\in G$，有 $\hat{D}(Q^{-1})\in\{\hat{D}(Q)\}$，故逆元存在。

综上，表示算符 $\hat{D}(Q)$ 的集合构成一个群。

2. (a) 对易关系（commutation Relations）

   列出位置算符 $\boldsymbol{R}=(X_1,X_2,X_3)^T$、动量算符 $\boldsymbol{P}=(P_1,P_2,P_3)^T$ 以及角动量算符 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{P}=(L_1,L_2,L_3)^T$ 之间的所有对易关系。

   (b) 空间平移（spatial Translation）操作下的变换

   证明这些算符在空间平移算符 $D(\boldsymbol{\lambda})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{P}}$ 的作用下满足以下关系：

$$D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{R}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\lambda},\quad D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{P}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{P},\quad D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{L}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{L}-\boldsymbol{\lambda}\times\boldsymbol{P}.\tag{12}$$

   (c) 空间旋转（rotation）操作下的变换

   证明这些算符在旋转算符 $D(\boldsymbol{\varphi})=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}}$ 的作用下满足以下关系：

$$D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})=Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R},\quad D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})=Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P},\quad D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})=Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L},\tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{\varphi} \equiv \varphi\hat{\boldsymbol{n}} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ 表示绕方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 旋转角度 $\varphi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$，$Q(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, T_3)^T$，

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

解：

(a) 位置算符 $\boldsymbol{R} = (X_1, X_2, X_3)^T$、动量算符 $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3)^T$ 以及角动量算符 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P} = (L_1, L_2, L_3)^T$ 之间的基本对易关系为：

$$[X_i, X_j] = 0, \quad [P_i, P_j] = 0, \quad [X_i, P_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}, \tag{15}$$

其中 $i, j = 1, 2, 3$，δ_{ij} 是 Kronecker-delta 符号。角动量算符的分量定义为：

$$L_i = \epsilon_{ijk} X_j P_k, \tag{16}$$

其中 ϵ_{ijk} 是 Levi-Civita 符号，采用 Einstein 求和约定。角动量算符之间的对易关系为：

$$[L_i, L_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} L_k. \tag{17}$$

位置算符与角动量算符的对易关系为：

$$[L_i, X_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} X_k. \tag{18}$$

动量算符与角动量算符的对易关系为：

$$[L_i, P_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} P_k. \tag{19}$$

位置算符与角动量平方算符的对易关系为：

$$[L^2, X_i] = 2\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} L_j X_k + \hbar^2 X_i. \tag{20}$$

动量算符与角动量平方算符的对易关系为：

$$[L^2, P_i] = 2\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk} L_j P_k + \hbar^2 P_i. \tag{21}$$

(b) 空间平移算符定义为 $D(\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{P}}$，其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 是平移矢量。我们需要证明以下关系：

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{R}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{R} - \boldsymbol{\lambda}, \\ D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{P}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{P}, \\ D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{L}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{L} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{P}. \end{aligned} \tag{22}$$

证明使用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式：对于算符 A 和 B，有

$$\mathrm{e}^{A} B \mathrm{e}^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots \tag{23}$$

令 $A = -\mathrm{i}\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{P}$，则：

i. 对于位置算符 $\boldsymbol{R}$：

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\lambda})X_iD^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) &= X_i + [-\mathrm{i}\lambda_jP_j, X_i] + \frac{1}{2!}[-\mathrm{i}\lambda_jP_j, [-\mathrm{i}\lambda_kP_k, X_i]] + \cdots \\ &= X_i - \mathrm{i}\lambda_j[P_j, X_i] - \frac{1}{2!}\mathrm{i}^2\lambda_j\lambda_k[P_j, [P_k, X_i]] + \cdots \end{aligned} \tag{24}$$

由于 $[P_j, X_i] = -\mathrm{i}\hbar\delta_{ji}$，且高阶对易子为零（因为 $[P_k, X_i]$ 是常数），所以

$$D(\boldsymbol{\lambda})X_iD^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = X_i - \mathrm{i}\lambda_j(-\mathrm{i}\hbar\delta_{ji}) = X_i - \lambda_i. \tag{25}$$

因此，$D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{R}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{R} - \boldsymbol{\lambda}$。

ii. 对于动量算符 $\boldsymbol{P}$：由于 $[P_j, P_i] = 0$，所以

$$D(\boldsymbol{\lambda})P_iD^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = P_i. \tag{26}$$

因此，$D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{P}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{P}$。

iii. 对于角动量算符 $\boldsymbol{L}$：角动量算符 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{P}$，所以

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\lambda})L_iD^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) &= \epsilon_{ijk}D(\boldsymbol{\lambda})X_jD^{-1}(\boldsymbol{\lambda})D(\boldsymbol{\lambda})P_kD^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) \\ &= \epsilon_{ijk}(X_j - \lambda_j)P_k. \end{aligned} \tag{27}$$

而 $\boldsymbol{L} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{P} = \epsilon_{ijk}X_jP_k - \epsilon_{ijk}\lambda_jP_k = \epsilon_{ijk}(X_j - \lambda_j)P_k$。因此，$D(\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{L}D^{-1}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{L} - \boldsymbol{\lambda} \times \boldsymbol{P}$。

(c) 旋转算符定义为 $D(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}}$，其中 $\boldsymbol{\varphi} = \varphi\hat{\boldsymbol{n}} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^T$ 表示绕方向 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 旋转角度 $\varphi = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$。我们需要证明以下关系：

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) &= Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R}, \\ D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) &= Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P}, \\ D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) &= Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L}, \end{aligned} \tag{28}$$

其中 $Q(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{T}}$，$\boldsymbol{T} = (T_1, T_2, T_3)^T$，

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

证明思路与平移变换类似，使用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式。

$$\mathrm{e}^ABe^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \cdots \tag{30}$$

令 $A = -\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{L}$，然后分别计算 $B = X_i$，P_i，L_i 的情况。

i. 位置算符 $\boldsymbol{R}$ 的变换：首先计算 $[L_j, X_i]$：

$$[L_j, X_i] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{jik}X_k = -\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}X_k. \tag{31}$$

因此，

$$[-\mathrm{i}\varphi_jL_j, X_i] = -\mathrm{i}\varphi_j(-\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}X_k) = -\hbar\varphi_j\epsilon_{ijk}X_k. \tag{32}$$

二阶对易子：

$$\begin{aligned}[-\mathrm{i}\varphi_k L_k,[-\mathrm{i}\varphi_j L_j,X_i]] &= [-\mathrm{i}\varphi_k L_k,-\hbar\varphi_j\epsilon_{ijl}X_l] \\ &= -\hbar\varphi_j\epsilon_{ijl}[-\mathrm{i}\varphi_k L_k,X_l] \\ &= -\hbar\varphi_j\epsilon_{ijl}(-\mathrm{i}\varphi_k)(-\mathrm{i}\hbar\epsilon_{klm}X_m) \\ &= -\hbar^2\varphi_j\varphi_k\epsilon_{ijl}\epsilon_{klm}X_m.\end{aligned} \tag{33}$$

利用恒等式 $\epsilon_{ijl}\epsilon_{kml}=\delta_{ik}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jk}$，可得：

$$[-\mathrm{i}\varphi_k L_k,[-\mathrm{i}\varphi_j L_j,X_i]] = -\hbar^2(\varphi_j\varphi_j X_i-\varphi_j\varphi_i X_j) = -\hbar^2(\varphi^2 X_i-(\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{X})\varphi_i). \tag{34}$$

类似地，可以计算更高阶对易子。整个级数可以识别为旋转矩阵的指数展开：

$$D(\boldsymbol{\varphi})X_iD^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{T}}\right)_{ij}X_j = Q(\boldsymbol{\varphi})_{ij}X_j. \tag{35}$$

因此，$D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})=Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R}$。

ii. 动量算符 $\boldsymbol{P}$ 的变换：动量算符与角动量算符的对易关系为：

$$[L_j,P_i]=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{jik}P_k=-\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}P_k. \tag{36}$$

这与位置算符的对易关系形式完全相同。因此，完全类似的推导可得：

$$D(\boldsymbol{\varphi})P_iD^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{T}})_{ij}P_j = Q(\boldsymbol{\varphi})_{ij}P_j. \tag{37}$$

因此，$D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi})=Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P}$。

iii. 角动量算符 $\boldsymbol{L}$ 的变换：角动量算符之间的对易关系为：

$$[L_j,L_i]=\mathrm{i}\hbar\epsilon_{jik}L_k=-\mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}L_k. \tag{38}$$

这与位置和动量算符的对易关系形式相同。因此，类似的推导可得：

$$D(\boldsymbol{\varphi})L_iD^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{T}})_{ij}L_j = Q(\boldsymbol{\varphi})_{ij}L_j. \tag{39}$$

因此，$\hat{D}(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L}\hat{D}^{-1}(\boldsymbol{\varphi})=Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L}$。

- 矩阵 T_i 的性质验证：矩阵 T_i 满足角动量代数：

$$[T_i,T_j]=\mathrm{i}\epsilon_{ijk}T_k. \tag{40}$$

例如，验证 $[T_1,T_2]$：

$$\begin{aligned}T_1T_2 &= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\\mathrm{i}^2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \\ T_2T_1 &= \begin{pmatrix}0&0&\mathrm{i}\\0&0&0\\-\mathrm{i}&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\mathrm{i}\\0&\mathrm{i}&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&\mathrm{i}^2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{41}$$

所以，

$$[T_1, T_2] = T_1T_2 - T_2T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}T_3. \tag{42}$$

类似可验证其他对易关系。因此，T_i 确实是角动量算符在向量空间中的表示。

综上所述，我们严格证明了在旋转操作下，位置算符、动量算符和角动量算符的变换规律：

$$D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{R}, \quad D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{P}, \quad D(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L}D^{-1}(\boldsymbol{\varphi}) = Q(\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{L}, \tag{43}$$

其中 $Q(\boldsymbol{\varphi}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{\varphi}\cdot\boldsymbol{T}}$ 是三维旋转矩阵的指数表示。

3. 关于离散群的基本问题。二面体群 D_N 是正 n 边形的对称群，包括旋转和反射。以 D_4 为例：

   (a) 列出所有元素和元素之间满足的乘法表（multiplication table）；

   (b) 找到 D_4 的所有不可约表示，并写出特征标表（character table）；

   (c) 列出生成元在每个不可约表示下的表示矩阵。

解：

(a) 二面体群 D_4 是正四边形的对称群，阶为 8。其元素包括恒等变换、旋转和反射。令 r 表示绕中心逆时针旋转 90°，即 r 满足 $r^4 = e$，其中 e 是单位元。令 s 表示关于一条主轴的反射（例如关于 x 轴的反射），满足 $s^2 = e$。群 D_4 的所有元素为：

$$D_4 = \{e, r, r^2, r^3, s, sr, sr^2, sr^3\}. \tag{44}$$

这些元素满足以下关系：

$$r^4 = e, \quad s^2 = e, \quad sr = r^3 s. \tag{45}$$

从 $sr = r^3 s$ 可推导出一般关系：对任意整数 k，有 $sr^k = r^{-k}s$。D_4 的完整乘法表如下：

表 1: D_4 群的乘法表

$\cdot$	e	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
e	e	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3
r	r	r^2	r^3	e	sr^3	s	sr	sr^2
r^2	r^2	r^3	e	r	sr^2	sr^3	s	sr
r^3	r^3	e	r	r^2	sr	sr^2	sr^3	s
s	s	sr	sr^2	sr^3	e	r	r^2	r^3
sr	sr	sr^2	sr^3	s	r^3	e	r	r^2
sr^2	sr^2	sr^3	s	sr	r^2	r^3	e	r
sr^3	sr^3	s	sr	sr^2	r	r^2	r^3	e

乘法表的计算基于群关系：

- 旋转之间：$r^i \cdot r^j = r^{i+j \mod 4}$
- 反射与旋转：$s \cdot r^i = r^{-i}s = r^{4-i}s$（因为 $r^4 = e$）
- 反射之间：$s \cdot s = e$，$(sr^i) \cdot (sr^j) = r^{j-i}$

(b) 群 D_4 的阶为 8，其共轭类有 5 个：

$$\{e\}, \quad \{r, r^3\}, \quad \{r^2\}, \quad \{s, sr^2\}, \quad \{sr, sr^3\}. \tag{46}$$

不可约表示的维数满足 $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 8$，解为 4 个一维表示和 1 个二维表示。$D_4$ 的特征标表如下：

表 2: D_4 群的特征标表

$\cdot$	$\{e\}$	$\{r, r^3\}$	$\{r^2\}$	$\{s, sr^2\}$	$\{sr, sr^3\}$
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	1	-1	1
χ_5	2	0	-2	0	0

表中：

- χ_1 是平凡表示（所有元素映射到 1）；
- χ_2 是符号表示，其中反射元素特征标为 -1；
- χ_3 是另一符号表示，其中 r 和 r^3 特征标为 -1；
- χ_4 是混合符号表示；
- χ_5 是二维不可约表示（几何表示）。

(c) 取生成元为 r 和 s。它们在每个不可约表示下的表示矩阵如下：

- 平凡表示 χ_1（一维）：
$$D_1(r) = (1), \quad D_1(s) = (1). \tag{47}$$
- 表示 χ_2（一维）：
$$D_2(r) = (1), \quad D_2(s) = (-1). \tag{48}$$
- 表示 χ_3（一维）：
$$D_3(r) = (-1), \quad D_3(s) = (1). \tag{49}$$
- 表示 χ_4（一维）：
$$D_4(r) = (-1), \quad D_4(s) = (-1). \tag{50}$$
- 二维表示 χ_5：采用几何表示，其中 r 对应旋转 $90°$ 矩阵，s 对应反射矩阵。
$$D_5(r) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_5(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{51}$$

简单验证，发现这些矩阵满足群关系：$D^4(r) = I$，$D^2(s) = I$，$D(s)D(r) = D^3(r)D(s)$，其中 I 是单位矩阵。

4. 一个 $N \times N(N = 2, 3, \ldots)$ 的实正交矩阵 O 满足 $O^T O = OO^T = 1_{N\times N}$ 且 $\det O = 1$。所有满足这些条件的 O 构成一个群 $SO(N)$。一个 $N \times N$ 的复幺正矩阵 U 满足 $U^\dagger U = UU^\dagger = 1_{N\times N}$，所有 U 构成一个群 $SU(N)$。

(a) 一个矩阵 O 中包含多少个自由参数？U 矩阵中包含多少个自由参数？

(b) 计算 Lie 群 $SO(N)$ 和 $SU(N)$ 独立生成元的数量。

(c) 证明 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 局域同构（local isomorphism）。

解：

(a) i. 实正交矩阵 O 满足 $O^T O = I$ 和 $\det O = 1$。矩阵 O 有 N^2 个实参数，但正交条件 $O^T O = I$ 施加约束。$O^T O = I$ 是一个对称矩阵方程，给出 $\dfrac{N(N+1)}{2}$ 个独立约束（因为对称矩阵有 $\dfrac{N(N+1)}{2}$ 个独立元素）。因此，自由参数个数为：

$$N^2 - \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(N-1)}{2}. \tag{52}$$

此外，$\det O = 1$ 不减少自由参数个数，因为它只是从 $O(N)$ 中选取连通单位元的分支（$SO(N)$ 是 $O(N)$ 的单位分支），而参数化已隐含在连续群中。故 $SO(N)$ 的自由参数个数为 $\dfrac{N(N-1)}{2}$。

ii. 复幺正矩阵 U 满足 $U^\dagger U = I$ 和 $\det U = 1$。矩阵 U 有 N^2 个复参数（即 $2N^2$ 个实参数），但幺正条件 $U^\dagger U = I$ 施加约束。$U^\dagger U = I$ 是一个厄米矩阵方程，给出 N^2 个实约束（因为厄米矩阵有 N^2 个实参数：N 个对角元为实数，$\dfrac{N(N-1)}{2}$ 个非对角元为复数，相当于 $N + 2 \times \dfrac{N(N-1)}{2} = N^2$ 个实参数）。因此，自由参数个数为：

$$2N^2 - N^2 = N^2 \quad (\text{实参数}). \tag{53}$$

再考虑 $\det U = 1$，这是一个复条件，但相当于一个实约束（因为 $\det U$ 是复数，但模为 1，故约束相位，相当于一个实参数）。因此，自由参数个数减少为 $N^2 - 1$。故 $SU(N)$ 的自由参数个数为 $N^2 - 1$。

(b) i. Lie 群的独立生成元数量等于其 Lie 代数的维度，即自由参数个数。对于 $SO(N)$，Lie 代数为 $\mathfrak{so}(N)$，由所有实反对称矩阵组成（满足 $A^T = -A$）。反对称矩阵有 $\dfrac{N(N-1)}{2}$ 个自由参数，故独立生成元数量为 $\dfrac{N(N-1)}{2}$。

ii. 对于 $SU(N)$，Lie 代数为 $\mathfrak{su}(N)$，由所有无迹厄米矩阵组成（满足 $A^\dagger = A$ 且 $\mathrm{tr}A = 0$）。厄米矩阵有 N^2 个实参数，无迹条件减少一个参数，故独立生成元数量为 $N^2 - 1$。

因此：

$$SO(N)\text{独立生成元数量} = \frac{N(N-1)}{2}, \quad SU(N)\text{独立生成元数量} = N^2 - 1. \tag{54}$$

(c) 要证明 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 局域同构，即证明它们的 Lie 代数同构，且存在一个局部双射同态。$SU(2)$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{su}(2)$，由所有 2×2 无迹厄米矩阵组成。其一组基为 Pauli 矩阵乘以 i：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{55}$$

则 $\mathfrak{su}(2)$ 的基为 $T_a = \dfrac{\sigma_a}{2}$（$a = 1, 2, 3$），满足对易关系：

$$[T_a, T_b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc} T_c. \tag{56}$$

$SO(3)$ 的 Lie 代数为 $\mathfrak{so}(3)$，由所有 3×3 实反对称矩阵组成。其一组基为：

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{57}$$

满足对易关系：

$$[L_a, L_b] = \epsilon_{abc} L_c. \tag{58}$$

比较对易关系，可见 $\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{so}(3)$ 有相同的结构常数（差一个因子 i）。具体地，定义映射 $\phi : \mathfrak{su}(2) \to \mathfrak{so}(3)$ 为：

$$\phi(T_a) = L_a, \quad a = 1, 2, 3. \tag{59}$$

则对易关系保持：

$$[\phi(T_a), \phi(T_b)] = [L_a, L_b] = \epsilon_{abc} L_c = \phi([T_a, T_b]), \tag{60}$$

因为 $[T_a, T_b] = \mathrm{i}\epsilon_{abc} T_c$，而 $\phi(\mathrm{i}T_c) = \mathrm{i}L_c$，但注意 ϕ 是实线性映射，而 Lie 代数同构需考虑复数扩展。实际上，$\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{so}(3)$ 是实 Lie 代数，且它们的复化同构。直接验证对易关系表明 ϕ 是 Lie 代数同构。因此，$\mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$。由 Lie 群理论，Lie 代数同构意味着 Lie 群局域同构。具体地，存在一个同态 $\Phi : SU(2) \to SO(3)$，其核为 $\{\pm I\}$，故 $SU(2)$ 是 $SO(3)$ 的双重覆盖，因此局域同构。

为构造 Φ，考虑 $SU(2)$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上的伴随表示。对于 $U \in SU(2)$，定义作用在向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 上，对应矩阵 $X = x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$。则变换：

$$X \to UXU^\dagger, \tag{61}$$

保持 X 的厄米性和无迹，故对应 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换。由于 $\det X = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$，该变换保持范数，故对应正交变换。且 $\det U = 1$ 保证变换属于 $SO(3)$。因此，映射 $\Phi(U)$ 定义为该变换，是群同态，且局部是微分同胚。

综上，$SU(2)$ 与 $SO(3)$ 局域同构。

5. 樱井（Sakurai）教材中的问题 4.7。

(a) $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ 是一个无自旋粒子对应的三维平面波波函数。证明 $\psi^*(\boldsymbol{r}, -t)$ 是动量方向反转的平面波波函数。

(b) 设 $\chi(\hat{\boldsymbol{n}})$ 是 $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ 算符的本征值为 $+1$ 的二分量本征旋量。利用 $\chi(\hat{\boldsymbol{n}})$ 的显式形式（用描述 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 的极角 β 和方位角 γ 表示），验证 $-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})$ 是自旋方向反转的二分量本征旋量。

解：

(a) 无自旋粒子的三维平面波波函数为：

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{62}$$

其中 $\boldsymbol{k}$ 是波矢量，$\omega=\dfrac{E}{\hbar}$ 是角频率，E 是能量。计算 $\psi^*(\boldsymbol{r},-t)$：

$$\psi^*(\boldsymbol{r},-t)=\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(-t))}\right]^*=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}+\omega t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}. \tag{63}$$

令 $\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}$，则：

$$\psi^*(\boldsymbol{r},-t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \tag{64}$$

其中 $\boldsymbol{k}'=-\boldsymbol{k}$ 对应动量方向反转（因为动量 $\boldsymbol{p}=\hbar\boldsymbol{k}$，所以 $\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{p}$）。因此，$\psi^*(\boldsymbol{r},-t)$ 是动量方向反转的平面波波函数。

(b) 自旋算符 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$ 的本征值为 $+1$ 的二分量本征旋量为：

$$\chi(\hat{\boldsymbol{n}})=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\beta}{2}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\sin\dfrac{\beta}{2}\end{pmatrix}, \tag{65}$$

其中 β 是极角，γ 是方位角，方向 $\hat{\boldsymbol{n}}=(\sin\beta\cos\gamma,\sin\beta\sin\gamma,\cos\beta)$。首先计算 $\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})$：

$$\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\beta}{2}\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma}\sin\dfrac{\beta}{2}\end{pmatrix}. \tag{66}$$

Pauli 矩阵 $\hat{\sigma}_2$ 为：

$$\hat{\sigma}_2=\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}. \tag{67}$$

计算 $-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})$：

$$\begin{aligned}-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})&=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\beta}{2}\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma}\sin\dfrac{\beta}{2}\end{pmatrix}\\ &=-\mathrm{i}\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma}\sin\dfrac{\beta}{2}\\ \mathrm{i}\cos\dfrac{\beta}{2}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\gamma}\sin\dfrac{\beta}{2}\\ \cos\dfrac{\beta}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{68}$$

现在验证这是自旋方向反转（即 $\hat{\boldsymbol{n}}\to-\hat{\boldsymbol{n}}$）的本征旋量。方向反转对应极角 $\beta\to\pi-\beta$，方位角 $\gamma\to\gamma+\pi$。自旋方向反转后的本征旋量应为：

$$\chi(-\hat{\boldsymbol{n}})=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\pi-\beta}{2}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\gamma+\pi)}\sin\dfrac{\pi-\beta}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\dfrac{\beta}{2}\\ -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}\cos\dfrac{\beta}{2}\end{pmatrix}. \tag{69}$$

但我们需要验证 $-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})$ 是 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(-\hat{\boldsymbol{n}})$ 的本征值为 $+1$ 的本征旋量，即满足：

$$(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(-\hat{\boldsymbol{n}}))\left(-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})\right)=-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}}). \tag{70}$$

利用 Pauli 矩阵的性质：$\hat{\sigma}_2\hat{\boldsymbol{\sigma}}\hat{\sigma}_2 = -\hat{\boldsymbol{\sigma}}^*$，以及 $\hat{\sigma}_2^2 = I$，我们有：

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(-\hat{\boldsymbol{n}})\left(-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*\right) &= \mathrm{i}\hat{\sigma}_2(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})^*\chi^* \\
&= \mathrm{i}\hat{\sigma}_2\left((\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\chi\right)^* \\
&= \mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^* \quad (\text{因为}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})\chi = \chi) \\
&= -\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*.
\end{aligned} \tag{71}$$

因此，$-\mathrm{i}\hat{\sigma}_2\chi^*(\hat{\boldsymbol{n}})$ 确实是 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot(-\hat{\boldsymbol{n}})$ 的本征值为 $+1$ 的本征旋量，即自旋方向反转的二分量本征旋量。

6. 正四面体群 T 同构于交错群 A_4，后者是四个客体的置换群 S_4 的正规子群。T 的生成元满足 $s^2 = t^3 = (st)^3 = 1$。

(a) 给定下表所示的在所有不可约表示（irreducible representation）中 s、t 的表示矩阵，检查这些不可约表示是实表示（real）、赝实表示（pseudo-real）还是复表示（complex）。

表 3: A_4 生成元在每个不可约表示中的表示矩阵，其中 $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$。

	s	t
D_1	1	1
$D_{1'}$	1	ω
$D_{1''}$	1	ω^2
D_3	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) 现在改变 3 维不可约表示的基底，使得 s 和 t 的表示矩阵写为：

$$D_3'(s) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_3'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}. \tag{72}$$

检查 D_3' 是实表示、赝实表示还是复表示。

解：

(a) 群 A_4 的阶为 12，有 4 个不可约表示：三个一维表示 D_1、$D_{1'}$、$D_{1''}$ 和一个三维表示 D_3。表示类型的判断可通过 Frobenius-Schur 指标（简称 FS 指标）进行。FS 指标定义为：

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^2), \tag{73}$$

其中 χ 是表示的特征标。FS 指标取值为 1、-1 或 0，分别对应实表示、赝实表示和复表示。首先，计算每个表示的特征标。对于一维表示，特征标就是表示矩阵本身（标量）。对于三维表示，特征标是矩阵的迹。

- **一维表示**：一维表示的特征标是复数，但可直接判断：

- D_1：$\chi(s)=1$，$\chi(t)=1$。特征标均为实数，且 FS 指标计算中，g^2 的特征标与 g 相同（因为一维），所以 $\chi(g^2)=\chi(g)$。则 FS 指标为 $\frac{1}{12}\sum_g \chi(g)$。但一维表示的 FS 指标可直接判断：由于特征标全为实数，表示是实表示。
- $D_{1'}$：$\chi(s)=1$，$\chi(t)=\omega$，其中 $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 是复数。但注意 ω 不是实数，所以特征标不是实数，表示可能是复表示。计算 FS 指标：由于特征标不是实数，FS 指标应为 0，表示复表示。
- $D_{1''}$：$\chi(s)=1$，$\chi(t)=\omega^2$，类似地，特征标不是实数，是复表示。

严格计算 FS 指标对于一维表示：对于 $D_{1'}$，特征标 χ 满足 $\chi(t)=\omega$，$\chi(t^2)=\chi^2(t)=\omega^2$，但 t 和 t^2 属于不同共轭类。A_4 有 4 个共轭类：单位元 e（1 个元素）、二阶元素 s 类（3 个元素）、三阶元素 t 类（4 个元素）、三阶元素 t^2 类（4 个元素）。计算 $\sum_g \chi(g^2)$：

- $g=e$：$g^2=e$，$\chi(e)=1$。
- $g=s$：$g^2=e$，$\chi(e)=1$，有 3 个 s 类元素，贡献 $3\times 1=3$。
- $g=t$：$g^2=t^2$，$\chi(t^2)=\omega^2$，有 4 个 t 类元素，贡献 $4\times\omega^2$。
- $g=t^2$：$g^2=t$，$\chi(t)=\omega$，有 4 个 t^2 类元素，贡献 $4\times\omega$。

总和：$\sum_g \chi(g^2)=1+3+4\omega^2+4\omega=4+4(\omega^2+\omega)$。由于 $\omega^2+\omega=-1$，所以总和为 $4+4(-1)=0$。FS 指标为 $\frac{0}{12}=0$，故 $D_{1'}$ 是复表示。同理 $D_{1''}$ 也是复表示。对于 D_1，$\chi(g)=1$ 对所有 g，所以 $\sum_g \chi(g^2)=12$，FS 指标为 1，是实表示。

- **三维表示** D_3：计算特征标：
  - 单位元 e：$\chi(e)=3$。
  - s 类元素：矩阵 $D_3(s)$ 的对角元素为 $1,-1,-1$，迹为 -1，所以 $\chi(s)=-1$。
  - t 类元素：矩阵 $D_3(t)$ 是置换矩阵，迹为 0，所以 $\chi(t)=0$。
  - t^2 类元素：矩阵 $D_3(t^2)$ 是置换矩阵，迹为 0，所以 $\chi(t^2)=0$。

  现在计算 FS 指标 $\frac{1}{12}\sum_g \chi(g^2)$。对于每个共轭类：
  - $g=e$：$g^2=e$，$\chi(e)=3$，1 个元素，贡献 3。
  - $g=s$：$g^2=e$，$\chi(e)=3$，3 个元素，贡献 $3\times 3=9$。
  - $g=t$：$g^2=t^2$，$\chi(t^2)=0$，4 个元素，贡献 0。
  - $g=t^2$：$g^2=t$，$\chi(t)=0$，4 个元素，贡献 0。

  总和：$\sum_g \chi(g^2)=3+9+0+0=12$。FS 指标为 $\frac{12}{12}=1$。因此，D_3 是实表示。

综上：

- D_1：实表示。
- $D_{1'}$：复表示。
- $D_{1''}$：复表示。
- D_3：实表示。

(b) D_3' 是 D_3 的等价表示，因为它们通过基底变换相联系。等价表示具有相同的特征标，因此 FS 指标相同。由 (a) 知 D_3 的 FS 指标为 1，故 D_3' 也是实表示。为验证，可直接计算 D_3' 的特征标：

- 单位元 e：$D_3'(e)$ 是单位矩阵，迹为 3。
- s：$D_3'(s)$ 的矩阵是对称矩阵，对角元素为 $-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}$。其矩阵是如下形式：

$$D_3'(s)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{pmatrix}, \tag{74}$$

  迹为 $\frac{1}{3}(-1-1-1)=-1$，所以 $\chi(s)=-1$。
- t：$D_3'(t)$ 是对角矩阵，对角元为 $1,\omega^2,\omega$。其矩阵形式是如下形式：

$$D_3'(t)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \omega^2 & 0\\ 0 & 0 & \omega\end{pmatrix}, \tag{75}$$

  迹为 $1+\omega^2+\omega=1+(-1)=0$，所以 $\chi(t)=0$。
- t^2：$D_3'(t^2)$ 是 $D_3'^2(t)$，对角元为 $1,\omega,\omega^2$，迹为 $1+\omega+\omega^2=0$，所以 $\chi(t^2)=0$。

特征标与 D_3 相同，因此 FS 指标为 1，是实表示。尽管 $D_3'(t)$ 包含复数，但表示是实表示，意味着存在一个实向量空间基底，使得所有表示矩阵是实矩阵。事实上，D_3' 可通过相似变换变为实表示。具体地，D_3' 等价于 D_3，而 D_3 的矩阵是实矩阵（给定表中 $D_3(s)$ 和 $D_3(t)$ 都是实矩阵），所以 D_3' 是实表示。因此，D_3' 是实表示。