高等量子力学作业

Clark

2.3 一个电子受到一个时间无关的、强度为 B 的沿 z 方向的均匀磁场的作用。在 $t=0$ 时已知电子处在 $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ 的本征态上，本征值为 $s_z=\hbar/2$，其中 $\hat{\mathbf{n}}$ 是一个单位矢量，位于 xz 平面上，与 z 轴夹 β 角。

(a) 求找到电子处在 $s_x=\hbar/2$ 态上作为时间函数的概率。

(b) 求作为时间函数的 S_x 的期望值。

(c) 为让你自己放心，在 (i)$\beta\to 0$ 和 (ii)$\beta\to\pi/2$ 的极限情况下证明你的答案是有意义的。

解：

已知 $\mathbf{S}=\dfrac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$。由于 $\hat{\mathbf{n}}$ 是一个单位矢量，位于 xz 平面上，与 z 轴夹 β 角，可得 $\hat{\mathbf{n}}=\hat{x}\sin\beta+\hat{z}\cos\beta$。因此 $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}=\dfrac{\hbar}{2}(\sigma_x\sin\beta+\sigma_z\cos\beta)$。注意到 $\mathbf{M}=2\mu_B\mathbf{S}$，且 Hamilton 量为 $H=-\mathbf{M}\cdot\mathbf{B}$，其中 $\mathbf{B}=\hat{z}B$，于是有 $H=-\dfrac{eB}{mc}S_z$。现在假设 $t=0$ 时，$\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ 的本征态为 $|\psi\rangle$，即 $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,|\psi\rangle=\dfrac{\hbar}{2}\,|\psi\rangle$。于是初态 $|\psi(0)\rangle$ 可表示为 $|\psi(0)\rangle=\cos\dfrac{\beta}{2}\,|+\rangle+\sin\dfrac{\beta}{2}\,|-\rangle$，其中 $|+\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $|-\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 分别是 S_z 的本征值为 $\dfrac{\hbar}{2}$ 和 $-\dfrac{\hbar}{2}$ 的归一化本征态。而时间演化算符为 $U(t)=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Ht}{\hbar}}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t S_z}{\hbar}}$，其中 $\omega=-\dfrac{eB}{mc}$。因此电子在时间 t 时刻的态为 $|\psi(t)\rangle=U(t)\,|\psi(0)\rangle=\cos\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\,|+\rangle+\sin\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\,|-\rangle=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\\ \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\end{pmatrix}$。

(a) 已知 s_x 的本征值为 $\dfrac{\hbar}{2}$ 的归一化本征态为 $|S_x;+\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，因此电子处在 $s_x=\dfrac{\hbar}{2}$ 态上的概率为 $P=|\langle S_x;+|\psi(t)\rangle|^2=\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}+\sin\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\right)\right|^2=\dfrac{1}{2}\left(\cos^2\dfrac{\beta}{2}+\sin^2\dfrac{\beta}{2}+\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right)\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\sin\beta\cos\omega t\right)$,其中 $\langle +|\psi(t)\rangle=\cos\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}$，$\langle -|\psi(t)\rangle=\sin\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}$，$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2}$ 和 $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$。

(b) $\langle S_x\rangle_t=\langle\psi(t)|S_x|\psi(t)\rangle=\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\\ \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\end{pmatrix}^{\dagger}\dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\\ \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\end{pmatrix}=\dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} & \sin\dfrac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\\ \sin\frac{\beta}{2}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega t}{2}}\end{pmatrix}=\dfrac{\hbar}{2}\sin\beta\cos\omega t$。

(c) (i) 当 $\beta\to 0$ 时，$|\psi(0)\rangle\to|+\rangle$，此时电子处在 $s_x=\dfrac{\hbar}{2}$ 态上的概率 $P_{s_x=\frac{\hbar}{2}}\to\dfrac{1}{2}(1+0)=\dfrac{1}{2}$，这与 $|+\rangle$ 态测量 S_x 得到 $\dfrac{\hbar}{2}$ 的概率始终为 $\dfrac{1}{2}$ 一致。S_x 的期望值 $\langle S_x\rangle\to\dfrac{\hbar}{2}\cdot 0=0$，这与 $|+\rangle$ 态中 $\langle S_x\rangle=0$ 一致。

(ii) 当 $\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$|\psi(0)\rangle\to\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle+|-\rangle)=|S_x;+\rangle$，此时电子处在 $s_x=\dfrac{\hbar}{2}$ 态上的概率

$P_{s_x=\frac{\hbar}{2}} \to \frac{1}{2}(1+1\cdot\cos\omega t)=\frac{1}{2}(1+\cos\omega t)$。在 $t=0$ 时，$P_{s_x=\frac{\hbar}{2}}=\frac{1}{2}(1+1)=1$，与初态 $|S_x;+\rangle$ 一致，之后随时间演化，概率振荡，符合客观规律。S_x 的期望值 $\langle S_x\rangle \to \frac{\hbar}{2}\cdot 1\cdot\cos\omega t=\frac{\hbar}{2}\cos\omega t$。在 $t=0$ 时，$\langle S_x\rangle=\frac{\hbar}{2}\cdot 1=\frac{\hbar}{2}$，与初态 $|S_x;+\rangle$ 一致，之后随时间演化，期望值振荡，符合客观规律。

综上所述，(i) 和 (ii) 两种极限情况均与物理事实相符，答案是有意义的。

练习 (a) 利用一维谐振子的能量本征波函数公式

$$u_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right), \tag{1}$$

其中，$H_n(x)$ 代表 Hermite 多项式，证明其传播子可表达为

$$K(x'',t;x',t_0)=\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\mathrm{i}\hbar\sin(\omega(t-t_0))}}\exp\left\{\frac{\mathrm{i}m\omega}{2\hbar\sin(\omega(t-t_0))}\left[(x''^2+x'^2)\cos(\omega(t-t_0))-2x''x'\right]\right\}. \tag{2}$$

证明过程中，可使用关于如下 Hermite 多项式的等式

$$\exp(-(\xi^2+\eta^2))\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta^n}{2^n n!}\right)H_n(\xi)H_n(\eta)=\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\exp\left(-\frac{\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\zeta}{1-\zeta^2}\right). \tag{3}$$

(b) 在以上传播子公式中，求 $\triangle t=t-t_0\to 0$ 时的极限式，其中指数因子中保留到 $\triangle t$ 的一阶。说明指数因子在此极限下与经典谐振子 Lagrange 量之间的关系。

解：

(a) 一维简谐振子的传播子可以定义为 $K(x'',t;x',t_0)=\langle x''|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}H(t-t_0)}{\hbar}}|x'\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\langle x''|n\rangle\langle n|x'\rangle\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}H(t-t_0)}{\hbar}}=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x'')u_n^*(x')\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_n(t-t_0)}{\hbar}}$，其中 $|n\rangle$ 是能量本征态，$\langle x'|n\rangle=u_n(x)$ 是能量本征函数，能量本征值为 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$。此外，注意到 Hermite 多项式是实函数，于是有 $u_n^*(x')=u_n(x')$。最后得到传播子 $K(x'',t;x',t_0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{m\omega(x''^2+x'^2)}{2\hbar}}H_n\left(x''\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)H_n\left(x'\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+\frac{1}{2})\omega(t-t_0)}$。注意到 Hermite 多项式的性质，我们可以令 $\tau=t-t_0$，$\xi=x''\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$，$\eta=x'\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$，$\zeta=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}$，从而将传播子表示为 $K(x'',t;x',t_0)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta^n}{2^n n!}\right)H_n(\xi)H_n(\eta)$。根据题中给出的关于 Hermite 多项式的等式，我们可以将上式中的求和部分替换为右侧的表达式，从而得到传播子 $K(x'',t;x',t_0)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\exp\left(-\frac{\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\zeta}{1-\zeta^2}\right)$。接下来，我们需要对该表达式进行简化。首先，注意到 $1-\zeta^2=1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega\tau}=2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\sin\omega\tau$，因此 $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\sin\omega\tau}}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}}}{\sqrt{2\mathrm{i}\sin\omega\tau}}$。其次，注意到 $\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\zeta=\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}$，因此 $\frac{\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\zeta}{1-\zeta^2}=\frac{\xi^2+\eta^2-2\xi\eta\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}}{2\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\sin\omega\tau}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}(\xi^2+\eta^2)-2\xi\eta}{2\mathrm{i}\sin\omega\tau}$。将这些结果代入传播子的表达式中，我们得到 $K(x'',t;x',t_0)=\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\omega\tau}{2}}}{\sqrt{2\mathrm{i}\sin\omega\tau}}\cdot\mathrm{e}^{\xi^2+\eta^2}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}(\xi^2+\eta^2)-2\xi\eta}{2\mathrm{i}\sin\omega\tau}}$。

进一步简化后，我们得到

$$\begin{aligned}
K(x'',t;x',t_0) &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \mathrm{i}\hbar\sin\omega\tau}}\exp\left(\frac{\xi^2+\eta^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}(\xi^2+\eta^2)-2\xi\eta}{2\mathrm{i}\sin\omega\tau}\right)\\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \mathrm{i}\hbar\sin\omega\tau}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{(\xi^2+\eta^2)\cos\omega\tau-2\xi\eta}{2\sin\omega\tau}\right)\\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \mathrm{i}\hbar\sin\omega\tau}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}m\omega}{2\hbar\sin\omega\tau}\left[(x''^2+x'^2)\cos\omega\tau-2x''x'\right]\right)\\
&= \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi \mathrm{i}\hbar\sin\omega(t-t_0)}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}m\omega}{2\hbar\sin\omega(t-t_0)}\left[(x''^2+x'^2)\cos\omega(t-t_0)-2x''x'\right]\right),
\end{aligned} \tag{4}$$

其中用到了 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}=\cos\omega\tau+\mathrm{i}\sin\omega\tau$。这就是我们所要证明的传播子表达式。

(b) 当 $\triangle t=t-t_0\to 0$ 时，即 $\tau\to 0$，此时有 $\sin\omega\tau\approx\omega\tau$ 和 $\cos\omega\tau\approx 1$。因此求得的传播子精确解可近似为 $K\approx\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\mathrm{i}\hbar\omega\tau}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}m\omega}{2\hbar\omega\tau}\left((x''^2+x'^2)-2x''x'\right)\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi\mathrm{i}\hbar\tau}}\exp\left(\frac{\mathrm{i}m}{2\hbar\tau}(x''-x')^2\right)$。注意到经典谐振子的 Lagrange 量为 $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$，在 $\tau\to 0$ 时，$\dot{x}\approx\frac{x''-x'}{\tau}$，因此有 $L\approx\frac{1}{2}m\left(\frac{x''-x'}{\tau}\right)^2-\frac{1}{2}m\omega^2x'^2$。忽略掉势能项（因为在 $\tau\to 0$ 时，势能项对传播子的贡献可以忽略），我们得到 $L\approx\frac{1}{2}m\left(\frac{x''-x'}{\tau}\right)^2$。将其代入指数因子中，我们发现指数因子实际上是经典作用量的指数形式，即 $\exp\left(-\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\int_{t_0}^{t}L\mathrm{d}t\right)=\exp\left(\frac{\mathrm{i}S}{\hbar}\right)$，其中 $t\to t_0$。此时，传播子的指数因子与经典自由粒子的 Lagrange 量相关，表现为自由粒子的作用量。这表明在短时间间隔内（$\tau\to 0$），量子力学的传播子与经典力学的作用量密切相关，换句话说，对于谐振子来讲，在短时间极限下（$\tau\to 0$），其行为类似于自由粒子，因为势能的影响可以忽略。

2.9 设 $|a'\rangle$ 和 $|a''\rangle$ 是厄米算符 A 的本征态，本征值分别为 a' 和 $a''(a'\neq a'')$。Hamilton 量算符由下式给出

$$H=|a'\rangle\,\delta\,\langle a''|+|a''\rangle\,\delta\,\langle a'|, \tag{5}$$

其中 δ 只是个实数。

(a) 显然，$|a'\rangle$ 和 $|a''\rangle$ 不是这个 Hamilton 量的本征态。写出该 Hamilton 量的本征态。它们的能量本征值是什么？

(b) 假定已知 $t=0$ 时系统处在 $|a'\rangle$ 态上。在 Schrodinger 绘景中写出 $t>0$ 时的态矢量。

(c) 假定已知 $t=0$ 时系统处在 $|a'\rangle$ 态上，在 $t>0$ 时找到该系统在 $|a''\rangle$ 态的概率是多少？

(d) 你能想出与这个问题相对应的一种物理情况吗？

解：

显然这个 Hamilton 量可显式地表示为 $H=\delta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$。

(a) 因此其本征值可通过该式求解 $\det(H-EI)=0$ 得到，其中 I 为单位矩阵，即 $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$E$ 为本征值。可解得 $E_1=\delta$ 和 $E_2=-\delta$，对应的归一化本征态分别为 $|E_1\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 和

$|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。

(b) 显然 $|a'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|E_1\rangle + |E_2\rangle) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$。因此 $t > 0$ 时的态矢量为 $|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Ht}{\hbar}}|a'\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}E_1 t}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}E_2 t}{\hbar}}\frac{1}{\sqrt{2}}|E_2\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\delta t}{\hbar}}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\delta t}{\hbar} \\ -\mathrm{i}\sin\frac{\delta t}{\hbar} \end{pmatrix}$。

(c) 概率显然为，$P = |\langle a''|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\delta t}{\hbar} \\ -\mathrm{i}\sin\frac{\delta t}{\hbar} \end{pmatrix}\right|^2 = \sin^2\frac{\delta t}{\hbar}$。

(d) 这是一个经典的二能级系统的例子（比如自旋为 $-\frac{1}{2}$ 的系统）。假设 $|a'\rangle$ 和 $|a''\rangle$ 分别表示原子中的两个能级，且它们之间通过某种相互作用（如电磁辐射）耦合，δ 表示这种耦合的强度。初始时，系统处于能级 $|a'\rangle$，随着时间的推移，由于耦合的存在，系统有可能跃迁到能级 $|a''\rangle$，跃迁概率随时间变化，这正是量子力学中二能级系统动力学的典型表现。

2.12 考虑一个处在一维简谐振子位势中的粒子。假定 $t = 0$ 时态矢量为

$$\exp\left(-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)|0\rangle, \tag{6}$$

其中 p 是动量算符，而 a 是某个具有长度量纲的数，$|0\rangle$ 是这样的一个态，它使 $\langle x\rangle = 0 = \langle p\rangle$。利用 Heisenberg 绘景求 $t \geq 0$ 时的期待值。

解：

由题意，可推测出 $|0\rangle$ 是简谐振子基态，因此有题中所示结果 $\langle 0|x|0\rangle = 0$ 和 $\langle 0|p|0\rangle = 0$。注意到 $\exp\left(-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)$ 是一个平移算符，它将位置算符 x 平移 a。于是有 $\exp\left(\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)x\exp\left(-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)\left(\left[x, \exp\left(-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)\right] + \exp\left(-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)x\right) = \exp\left(\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)\mathrm{i}\hbar\left(-\frac{\mathrm{i}a}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right) + x = x + a$，其中用到了 $[x, G(p)] = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p}G(p)$。而动量算符 p 在这个变换下保持不变，即 $\exp\left(\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right)p\exp\left(-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}\right) = p$。正文部分，(2.3.45a) 和 (2.3.45b) 已经给出 Heisenberg 绘景中位置和动量算符的时间演化形式，即 $x_H(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$ 和 $p_H(t) = -m\omega x(0)\sin\omega t + p(0)\cos\omega t$。因此 $t \geq 0$ 时的期待值为

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle_t &= \langle\psi(0)|x_H(t)|\psi(0)\rangle = \langle 0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}\left(x\cos\omega t + \frac{p}{m\omega}\sin\omega t\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}|0\rangle \\
&= \langle 0|\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}x\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}\right)\cos\omega t + \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}\frac{p}{m\omega}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}\right)\sin\omega t\right)|0\rangle \\
&= \langle 0|\left((x+a)\cos\omega t + \frac{p}{m\omega}\sin\omega t\right)|0\rangle \\
&= a\cos\omega t,
\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\langle 0|x|0\rangle = 0$ 和 $\langle 0|p|0\rangle = 0$。同理可得

$$\begin{aligned}
\langle p\rangle_t &= \langle\psi(0)|p_H(t)|\psi(0)\rangle = \langle 0|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}\left(p\cos\omega t - m\omega x\sin\omega t\right)\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}|0\rangle \\
&= \langle 0|\left(\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}p\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}\right)\cos\omega t - \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}m\omega x\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}pa}{\hbar}}\right)\sin\omega t\right)|0\rangle \\
&= \langle 0|(p\cos\omega t - m\omega(x+a)\sin\omega t)|0\rangle \\
&= -m\omega a\sin\omega t,
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\langle 0|x|0\rangle = 0$ 和 $\langle 0|p|0\rangle = 0$。综上所述，我们得到了 $t \geq 0$ 时位置和动量的期待值分别为 $\langle x\rangle_t = a\cos\omega t$ 和 $\langle p\rangle_t = -m\omega a\sin\omega t$。这表明粒子在简谐振子势中以幅度 a 和频率 ω 进行简谐运动。

2.16 考虑一个称为关联函数的函数，其定义为

$$C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle\,, \tag{9}$$

其中 $x(t)$ 是 Heisenberg 绘景中的位置算符。对一个一维简谐振子的基态明显地求出该关联函数。

解：

正文部分，(2.3.45a) 已经给出 Heisenberg 绘景中位置算符的时间演化形式，即 $x_H(t) = x(0)\cos\omega t + \dfrac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t$。于是有 $C(t) = \langle x(t)x(0)\rangle = \langle 0|x_H(t)x(0)|0\rangle = \langle 0|\left(x(0)\cos\omega t + \dfrac{p(0)}{m\omega}\sin\omega t\right)x(0)|0\rangle = \langle 0|\left(x^2(0)\cos\omega t + \dfrac{p(0)x(0)}{m\omega}\sin\omega t\right)|0\rangle$。已知 $\langle 0|x(0)|0\rangle = 0$ 和 $\langle 0|p(0)|0\rangle = 0$，于是有 $C(t) = \cos\omega t\,\langle 0|x^2(0)|0\rangle + \dfrac{1}{m\omega}\langle 0|p(0)x(0)|0\rangle\sin\omega t$。注意到 $x = \sqrt{\dfrac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$ 和 $p = \mathrm{i}\sqrt{\dfrac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$，其中 $a^\dagger$ 和 a 分别是简谐振子的上升算符和下降算符，且满足 $[a, a^\dagger] = 1$。因此有 $x^2 = \dfrac{\hbar}{2m\omega}((a^\dagger)^2 + a^2 + aa^\dagger + a^\dagger a) = \dfrac{\hbar}{2m\omega}((a^\dagger)^2 + a^2 + 2a^\dagger a + 1)$。由于 $a|0\rangle = 0$ 和本征态的正交性：$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$，可得 $\langle 0|x^2|0\rangle = \dfrac{\hbar}{2m\omega}\langle 0|1|0\rangle = \dfrac{\hbar}{2m\omega}$ 和 $\langle 0|p(0)x(0)|0\rangle = -\mathrm{i}\dfrac{\hbar}{2}$。最终，我们得到了该关联函数为 $C(t) = \dfrac{\hbar}{2m\omega}\cos\omega t - \dfrac{1}{m\omega}\mathrm{i}\dfrac{\hbar}{2}\sin\omega t = \dfrac{\hbar}{2m\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$。

2.33 类似于 (2.6.26) 式，动量空间的传播子由 $\langle \mathbf{p}'', t'|\mathbf{p}', t_0\rangle$ 给出。推导对自由粒子的 $\langle \mathbf{p}'', t'|\mathbf{p}', t_0\rangle$ 显示表示式。

解：

回忆 (2.6.26) 写为

$$\begin{aligned} K(\mathbf{x}'', t; \mathbf{x}', t_0) = \langle \mathbf{x}'', t|\mathbf{x}', t_0\rangle &= \sum_{a'} \langle \mathbf{x}''|a'\rangle\langle a'|\mathbf{x}'\rangle \exp\left(-\frac{\mathrm{i}E_{a'}(t-t_0)}{\hbar}\right) \\ &= \sum_{a'} \langle \mathbf{x}''|\exp\left(-\frac{\mathrm{i}Ht}{\hbar}\right)|a'\rangle\langle a'|\exp\left(\frac{\mathrm{i}Ht_0}{\hbar}\right)|\mathbf{x}'\rangle\,. \end{aligned} \tag{10}$$

我们认为 Heisenberg 绘景下，时间演化算符在使基改变时，有如下关系 $|a', t\rangle_H = U^\dagger(t)|a'\rangle_S$。因此，可以理解为相对于 Schrodinger 绘景中的态右矢以“反向”演化。于是，对于自由粒子（$H = \dfrac{p^2}{2m}$），动量空间的传播子可表示为

$$\langle \mathbf{p}'', t'|\mathbf{p}', t_0\rangle = \langle \mathbf{p}''|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}Ht}{\hbar}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}Ht_0}{\hbar}}|\mathbf{p}'\rangle = \exp\left(\frac{1}{\mathrm{i}\hbar}\frac{\mathbf{p}'^2}{2m}(t-t_0)\right)\delta(\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'). \tag{11}$$

练习 考虑另一个 Bell 纠缠态 $|\psi'\rangle_{AB} = (1/\sqrt{2})(|+\rangle_A|+\rangle_B + |-\rangle_A|-\rangle_B)$，类似于自旋为 0 的 Bell 态的讨论，任找三个方向 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，对相应方向的自旋进行测量。

1. 证明如果隐变量理论成立，则有如下的 Bell 不等式

$$P(\mathbf{a}+, \mathbf{b}+) + P(\mathbf{b}+, \mathbf{c}+) + P(\mathbf{a}+, \mathbf{c}+) + P(\mathbf{a}-, \mathbf{b}-) + P(\mathbf{b}-, \mathbf{c}-) + P(\mathbf{a}-, \mathbf{c}-) \geq 1; \tag{12}$$

2. 在量子力学中，分别求出上式中每一项的表达式；

3. 利用所得到的结果，在量子力学中找到一个破坏上述 Bell 不等式的反例；
4. 对于 Alice 对粒子 1 自旋测量和没有测量的两种情况，分别计算出相应子系统 B 的约化密度算符和 von Neumann 熵，并在此基础上，验证无交流定理。

解：

(a) 考虑 Bell 纠缠态 $|\psi'\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A|+\rangle_B+|-\rangle_A|-\rangle_B)$。在隐变量理论中，假设存在局部隐变量 λ，决定测量结果。对于方向 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$，定义 Alice 的测量结果 $A(\mathbf{a},\lambda)=\pm1$，Bob 的测量结果 $B(\mathbf{b},\lambda)=\pm1$。由于态 $|\psi'\rangle$ 在相同方向测量时结果相关，隐变量理论必须满足 $A(\mathbf{a},\lambda)=B(\mathbf{a},\lambda)$ 对于所有 $\mathbf{a}$。考虑 Bell 不等式：$S=P(\mathbf{a}+,\mathbf{b}+)+P(\mathbf{b}+,\mathbf{c}+)+P(\mathbf{a}+,\mathbf{c}+)+P(\mathbf{a}-,\mathbf{b}-)+P(\mathbf{b}-,\mathbf{c}-)+P(\mathbf{a}-,\mathbf{c}-)\geq 1$ 其中 $P(\mathbf{a}+,\mathbf{b}+)$ 表示 Alice 测量方向 $\mathbf{a}$ 得 $+$ 且 Bob 测量方向 $\mathbf{b}$ 得 $+$ 的概率，其他类似。在隐变量理论中，概率为：$P(\mathbf{a}+,\mathbf{b}+)=\int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)[A(\mathbf{a},\lambda)=+1且B(\mathbf{b},\lambda)=+1]$ 类似定义其他概率。因此，$S=\int \mathrm{d}\lambda\rho(\lambda)I(\lambda)$，其中，$I(\lambda)=[A(\mathbf{a},\lambda)=+1且B(\mathbf{b},\lambda)=+1]+[A(\mathbf{b},\lambda)=+1且B(\mathbf{c},\lambda)=+1]+[A(\mathbf{a},\lambda)=+1且B(\mathbf{c},\lambda)=+1]+[A(\mathbf{a},\lambda)=-1且B(\mathbf{b},\lambda)=-1]+[A(\mathbf{b},\lambda)=-1且B(\mathbf{c},\lambda)=-1]+[A(\mathbf{a},\lambda)=-1且B(\mathbf{c},\lambda)=-1]$。由于 $A(\mathbf{a},\lambda)=B(\mathbf{a},\lambda)$，令 $X=A(\mathbf{a},\lambda)$，$Y=A(\mathbf{b},\lambda)$，$Z=A(\mathbf{c},\lambda)$，则：$I(\lambda)=[X=+1且Y=+1]+[Y=+1且Z=+1]+[X=+1且Z=+1]+[X=-1且Y=-1]+[Y=-1且Z=-1]+[X=-1且Z=-1]$。对于任意 $X,Y,Z\in\{+1,-1\}$，检查所有可能取值：

- 若 $X=Y=Z=+1$，则前三个条件为真，$I=3$。
- 若 $X=Y=Z=-1$，则后三个条件为真，$I=3$。
- 若 $X=+1,Y=+1,Z=-1$，则第一个条件为真，$I=1$。
- 若 $X=+1,Y=-1,Z=+1$，则第三个条件为真，$I=1$。
- 若 $X=+1,Y=-1,Z=-1$，则第五个条件为真，$I=1$。
- 若 $X=-1,Y=+1,Z=+1$，则第二个条件为真，$I=1$。
- 若 $X=-1,Y=+1,Z=-1$，则第六个条件为真，$I=1$。
- 若 $X=-1,Y=-1,Z=+1$，则第四个条件为真，$I=1$。

因此，对于所有 λ，有 $I(\lambda)\geq 1$，故 $S\geq 1$。Bell 不等式得证。

(b) 在量子力学中，态 $|\psi'\rangle_{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle_A|+_z\rangle_B+|-_z\rangle_A|-_z\rangle_B)$。对于方向 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，测量概率为：$P(\mathbf{a}+,\mathbf{b}+)=\langle\psi'|P_{A,+\mathbf{a}}\otimes P_{B,+\mathbf{b}}|\psi'\rangle$ 其中投影算符 $P_{A,+\mathbf{a}}=\frac{1}{2}(I+\boldsymbol{\sigma}_A\cdot\mathbf{a})$，$P_{B,+\mathbf{b}}=\frac{1}{2}(I+\boldsymbol{\sigma}_B\cdot\mathbf{b})$。类似定义其他投影算符。计算得：$P(\mathbf{a}+,\mathbf{b}+)=\frac{1}{4}\langle I+\boldsymbol{\sigma}_A\cdot\mathbf{a}+\boldsymbol{\sigma}_B\cdot\mathbf{b}+(\boldsymbol{\sigma}_A\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}_B\cdot\mathbf{b})\rangle$。由于 $\langle\boldsymbol{\sigma}_A\cdot\mathbf{a}\rangle=0$，$\langle\boldsymbol{\sigma}_B\cdot\mathbf{b}\rangle=0$，且 $\langle(\boldsymbol{\sigma}_A\cdot\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}_B\cdot\mathbf{b})\rangle=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$，所以：$P(\mathbf{a}+,\mathbf{b}+)=\frac{1}{4}(1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$。类似地：$P(\mathbf{b}+,\mathbf{c}+)=\frac{1}{4}(1+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$，$P(\mathbf{a}+,\mathbf{c}+)=\frac{1}{4}(1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$，$P(\mathbf{a}-,\mathbf{b}-)=\frac{1}{4}(1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$，$P(\mathbf{b}-,\mathbf{c}-)=\frac{1}{4}(1+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ 和 $P(\mathbf{a}-,\mathbf{c}-)=\frac{1}{4}(1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$。因此，

$$
\begin{aligned}
S&=P(\mathbf{a}+,\mathbf{b}+)+P(\mathbf{b}+,\mathbf{c}+)+P(\mathbf{a}+,\mathbf{c}+)+P(\mathbf{a}-,\mathbf{b}-)+P(\mathbf{b}-,\mathbf{c}-)+P(\mathbf{a}-,\mathbf{c}-)\\
&=2\left(\frac{1}{4}(1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\frac{1}{4}(1+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\frac{1}{4}(1+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\right)\\
&=\frac{1}{2}(3+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

最终我们得到量子力学中 S 的表达式为：$S=\dfrac{1}{2}(3+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$。

(c) Bell 不等式要求 $S\geq 1$。在量子力学中，$S=\dfrac{1}{2}(3+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$。欲使 $S<1$，需：$3+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}<2$，即 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}<-1$。取三个方向 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$ 在同一平面内，两两夹角为 $120°$，则：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=\cos 120°=-\dfrac{1}{2}$。所以：$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}=-\dfrac{3}{2}=-1.5<-1$，代入到 S，可得 $S=\dfrac{1}{2}\left(3-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{4}=0.75<1$。因此，量子力学违反 Bell 不等式，反例成立。

(d) **没有测量时子系统 B 的约化密度算符和熵。**整体的 Bell 纠缠态为 $|\psi'\rangle_{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(|+_z\rangle_A|+_z\rangle_B+|-_z\rangle_A|-_z\rangle_B)$。密度算符定义为 $\rho_{AB}=|\psi'\rangle\langle\psi'|$，展开写为：

$$\rho_{AB}=\frac{1}{2}\left(|{++}\rangle\langle{++}|+|{++}\rangle\langle{--}|+|{--}\rangle\langle{++}|+|{--}\rangle\langle{--}|\right),\tag{14}$$

其中 $|{++}\rangle=|+_z\rangle_A|+_z\rangle_B$，$|{--}\rangle=|-_z\rangle_A|-_z\rangle_B$。约化密度算符定义为 $\rho_B=\mathrm{tr}_A\rho_{AB}$，具体有 $\mathrm{tr}_A|{++}\rangle\langle{++}|=|+_z\rangle_B\langle+_z|$,$\mathrm{tr}_A|{--}\rangle\langle{--}|=|-_z\rangle_B\langle-_z|$,$\mathrm{tr}_A|{++}\rangle\langle{--}|=|+_z\rangle_B\langle-_z|\langle-_z|+_z\rangle_A=0$，$\mathrm{tr}_A|{--}\rangle\langle{++}|=0$。所以：$\rho_B=\dfrac{1}{2}\left(|+_z\rangle_B\langle+_z|+|-_z\rangle_B\langle-_z|\right)=\dfrac{1}{2}I_B$，其中 I_B 是 Bob 的 Hilbert 空间上的单位算符。von Neumann 熵定义为 $S(\rho_B)=-\mathrm{tr}(\rho_B\log\rho_B)$。由于 $\rho_B=\dfrac{1}{2}I_B$，本征值均为 $\dfrac{1}{2}$，所以：$S(\rho_B)=-2\times\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1}{2}=-\log\dfrac{1}{2}=\log 2$，取底数为 2，则 $S(\rho_B)=1$。
Alice 测量粒子 A 后，子系统 B 的约化密度算符和熵。假设 Alice 在 z 方向测量自旋。以概率 $\dfrac{1}{2}$ 得到 $|+\rangle$，态坍缩为 $|+_z\rangle_A|+_z\rangle_B$；以概率 $\dfrac{1}{2}$ 得到 $|-\rangle$，态坍缩为 $|-_z\rangle_A|-_z\rangle_B$。如果 Bob 不知道测量结果，则 Bob 的态为混合态：$\rho_B=\dfrac{1}{2}|+_z\rangle_B\langle+_z|+\dfrac{1}{2}|-_z\rangle_B\langle-_z|=\dfrac{1}{2}I_B$，与没有测量时相同。熵 $S(\rho_B)=1$。如果 Alice 测量其他方向，如方向 $\mathbf{a}$，由于 $|\psi'\rangle$ 在任意基下形式相同，测量之后，Bob 的态为 $\dfrac{1}{2}|+_a\rangle_B\langle+_a|+\dfrac{1}{2}|-_a\rangle_B\langle-_a|=\dfrac{1}{2}I_B$，熵仍为 1。
因此，无论 Alice 是否测量，只要 Bob 不知道结果，Bob 的约化密度算符和熵均不变，验证了无通讯定理。

3.11 (a) 证明密度算符 ρ（在 Schrodinger 绘景中）的时间演化算符由下式给定

$$\rho(t)=U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0).\tag{15}$$

(b) 假定在 $t=0$ 是有一个纯系综。证明只要时间演化算符由 Schrodinger 方程控制，则它不可能演化成一个混合系统。

解：

(a) 正文部分，(3.4.27) 已经给出在某个 t_0 时刻密度算符的定义：$\rho(t_0)=\sum_i w_i|a^{(i)}\rangle\langle a^{(i)}|$。考虑 Schrodinger 绘景,于是有 $\rho(t)=\sum_i w_i|a^{(i)},t\rangle\langle a^{(i)},t|=\sum_i w_iU(t,t_0)|a^{(i)},t_0\rangle\langle a^{(i)},t_0|U^\dagger(t,t_0)=U(t,t_0)\sum_i w_i|a^{(i)},t_0\rangle\langle a^{(i)},t_0|U^\dagger(t,t_0)=U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0)$。

(b) 根据密度算符的性质,在纯系综下,我们有 $\rho^2=1$。现在计算,$\rho^2(t)=U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0)U(t,t_0)\cdot\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0)=U(t,t_0)\rho^2(t_0)U^\dagger(t,t_0)=\rho(t_0)$。这是完全合理的，即如果所有粒子处于相同的态，那么无论我对其中哪一个粒子做什么操作，等价于我对它们的全体做一样的操作，其结果仍然是一个纯系综。

3.28 考虑由两个自旋 $\frac{1}{2}$ 的粒子组成的一个系统。观察者 A 专门测量其中一个粒子的自旋分量（s_{1z}，s_{1x}，等等），同时观察者 B 测量另一个粒子的自旋分量。假定已知系统处于自旋单态，即 $S_{总}=0$。

(a) 当观察者 B 不做任何测量时，观察者 A 得到 $s_{1z}=\hbar/2$ 的概率是什么？对于 $s_{1x}=\hbar/2$ 求解同样问题。

(b) 观察者 B 肯定地确认粒子 2 的自旋处于 $s_{2z}=\hbar/2$ 态。如果观察者 A(i) 测量 s_{1z}；(ii) 测 s_{1x}，则对观察者 A 的测量结果能给出的结论是什么？解释你的答案。

解：

已知自旋单态为 $|s=0,m_s=0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle)$。

(a) 其实如果 B 不进行测量，那么他在这个问题中的存在是无关紧要的。观察者 A 得到 $s_{1z}=\frac{\hbar}{2}$ 时，有 $P_{1,z+}=|{}_1\langle+|00\rangle|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_2\right|^2=\frac{1}{2}$。观察者 A 得到 $s_{1x}=\frac{\hbar}{2}$ 时，有对应的本征态 $|x,+\rangle_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1+|-\rangle_1)$。最后得到概率，$P_{1,x+}=|{}_1\langle x,+|00\rangle|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_2-\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_2\right)\right|^2=\frac{1}{2}$。因此在此情况下，观察者 A 其实是分不清对粒子 1 进行的测量，是在 z 方向上的还是在 x 方向上的。

(b) 当观察者 B 肯定地确认粒子 2 的自旋处于 $s_{2z}=\frac{\hbar}{2}$ 态后，由于粒子 1 和粒子 2 构成一个自旋单态，于是可以肯定地确定粒子 1 处在 $s_{1z}=-\frac{\hbar}{2}$ 的态上。为了说明这一点，我们构造一个对应此时情况的投影算符 $P=I_1\otimes(|+\rangle\langle+|)_2$。于是有 $P_{2,z+}=|P|00\rangle|^2=\left|I_1\otimes(|+\rangle\langle+|)_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle-|-+\rangle)\right|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_1|+\rangle_2\right|^2=\frac{1}{2}$。于是最后得到观察者 B 观测后的态，$|\psi'\rangle=\frac{P|00\rangle}{\sqrt{|P|00\rangle|^2}}=-|-\rangle_1|+\rangle_2\approx|-\rangle_1|+\rangle_2$，最后一步我们忽略了全局相位因子。因此，观察者 A 测量 s_{1z}，一定得到 $s_{1z}=\frac{\hbar}{2}$，概率为 1。现在考虑测量 s_{2x} 的情况，此时的本征态为 $|x,+\rangle_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1+|-\rangle_1)$ 和 $|x,-\rangle_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1-|-\rangle_1)$。于是得到 $s_{1x}=\frac{\hbar}{2}$ 的概率为 $P_{1,x+}=|{}_1\langle x,+|-\rangle_1|^2=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}{}_1\langle-|-\rangle_1\right|^2=\frac{1}{2}$；得到 $s_{1x}=-\frac{\hbar}{2}$ 的概率为 $P_{1,x-}=|{}_1\langle x,-|-\rangle_1|^2=\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}{}_1\langle-|-\rangle_1\right|^2=\frac{1}{2}$。