粒子物理基础作业

Clark

8.3 为什么我们在分母上不用 $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^+\mathrm{e}^-)$ 来定义 R（方程 (8.7)）?

解：

由正文可知，(8.7) 为

$$R \equiv \frac{\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \text{强子}}{\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)}. \tag{1}$$

不使用 $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^+\mathrm{e}^-)$ 作为分母的主要原因为：过程 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$（Bhabha 散射）包含 t-道贡献，而 $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-$ 是纯 s-道过程，$\mu^+\mu^-$ 终态没有强相互作用，是纯电磁过程的理想参考，理论计算 $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)$ 更为简单和干净。在树图层次，$\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-$ 的截面为

$$\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}, \tag{2}$$

其中 α 是精细结构常数，s 是质心系能量的平方。相比之下，$\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ 的截面由于 t-道贡献而更为复杂：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mathrm{e}^+\mathrm{e}^-) = \frac{\alpha^2}{4s}\left[\frac{1+\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{2\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + (1+\cos^2\theta)\right], \tag{3}$$

这显示了向前方向的奇异性。因此，选择 $\sigma(\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mu^+\mu^-)$ 作为分母提供了更干净的理论基准来测量强子产生截面。

8.4 证明方程 (8.16)（提示：首先证明 $q_\mu L^{\mu\nu} = 0$。然后在任何 $K^{\mu\nu}$ 中的项不满足 $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$，将对 $L^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$ 没有贡献的意义上论证我们也可以取 $K^{\mu\nu}$ 使 $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$。）评论：方程 (8.16) 实际上从质子角度的电荷守恒更简单和一般地得到，但我在这里没建立能得到这个做法的体系（见 Halzen 和 Martin，8.2 和 8.3 节）。

（一种路径如下。取 $q^\mu = (0,0,0,q)$；得到 $q_\mu L^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。因此 $L^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & & & x \\ & & & x \\ & & & x \\ x & x & x & x \end{pmatrix}$，因此 x 可以也为零。）

解：

由正文可知，(8.13) 为

$$L^{\mu\nu}_{\text{电子}} = 2\left(p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu + g^{\mu\nu}((mc)^2 - p_1 \cdot p_2)\right). \tag{4}$$

计算：

$$q_\mu L^{\mu\nu} = 2\left[(p_1\cdot q)p_3^\nu + (p_3\cdot q)p_1^\nu + q^\nu\left((mc)^2 - p_1\cdot p_3\right)\right]. \tag{5}$$

由动量守恒 $q = p_1 - p_3$，可得：

$$\begin{aligned} p_1\cdot q &= p_1^2 - p_1\cdot p_3 = (mc)^2 - p_1\cdot p_3, \\ p_3\cdot q &= p_1\cdot p_3 - p_3^2 = (mc)^2 = -(p_1\cdot q). \end{aligned} \tag{6}$$

代入得：

$$\begin{aligned} q_\mu L^{\mu\nu} &= 2\left[(p_1\cdot q)p_3^\nu - (p_1\cdot q)p_1^\nu + q^\nu(p_1\cdot q)\right] \\ &= 2(p_1\cdot q)\left(p_3^\nu - p_1^\nu + q^\nu\right). \end{aligned} \tag{7}$$

由于 $q^\nu = p_1^\nu - p_3^\nu$，因此：

$$p_3^\nu - p_1^\nu + q^\nu = p_3^\nu - p_1^\nu + p_1^\nu - p_3^\nu = 0, \tag{8}$$

所以 $q_\mu L^{\mu\nu} = 0$ 得证。现在考虑在 Breit 参考系中，取 $q^\mu = (0,0,0,q)$。在此参考系中：

$$q_\mu L^{\mu\nu} = qL^{3\nu} = 0 \quad\Rightarrow\quad L^{3\nu} = 0. \tag{9}$$

由于 $L^{\mu\nu}$ 是对称张量，$L^{\nu 3} = 0$。因此 $L^{\mu\nu}$ 的矩阵形式为：

$$L^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} L^{00} & L^{01} & L^{02} & 0 \\ L^{10} & L^{11} & L^{12} & 0 \\ L^{20} & L^{21} & L^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

现在考虑 $L^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$ 的计算。将 $K_{\mu\nu}$ 写成矩阵形式：

$$K_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} K_{00} & K_{01} & K_{02} & K_{03} \\ K_{10} & K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{20} & K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{30} & K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

计算张量收缩：

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}K_{\mu\nu} = L^{00}K_{00} &+ L^{01}K_{01} + L^{02}K_{02} + 0\cdot K_{03} \\ &+ L^{10}K_{10} + L^{11}K_{11} + L^{12}K_{12} + 0\cdot K_{13} \\ &+ L^{20}K_{20} + L^{21}K_{21} + L^{22}K_{22} + 0\cdot K_{23} \\ &+ 0\cdot K_{30} + 0\cdot K_{31} + 0\cdot K_{32} + 0\cdot K_{33}. \end{aligned} \tag{12}$$

可见，$K_{\mu\nu}$ 的第 3 行和第 3 列（即与指标 3 相关的分量）对 $L^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$ 没有贡献。因此，我们可以将这些分量设置为任意值而不影响最终结果。特别地，我们可以选择设置这些分量使得 $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$。在 Breit 参考系中，$q^\mu = (0,0,0,q)$，所以：

$$q_\mu K^{\mu\nu} = qK^{3\nu} = 0 \quad\Rightarrow\quad K^{3\nu} = 0. \tag{13}$$

由于 $K^{\mu\nu}$ 是对称张量，$K^{\nu 3} = 0$。这样我们就得到了满足 $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$ 的 $K^{\mu\nu}$。由于张量方程在 Lorentz 变换下协变，如果在某个参考系中 $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$ 成立，那么在所有参考系中都成立。因此，我们可以总是取 $K^{\mu\nu}$ 满足 $q_\mu K^{\mu\nu} = 0$，而不影响 $L^{\mu\nu}K_{\mu\nu}$ 的计算结果。

8.16 利用如下态计算八重态 $q\bar{q}$ 的色因子

(a) $b\bar{g}$

(b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - b\bar{b})$

(c) $\frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + b\bar{b} - 2g\bar{g})$

解：

由正文可知，(8.47) 为

$$f = \frac{1}{4}(c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_4^\dagger \lambda^\alpha c_4). \tag{14}$$

其中 c_i 为颜色波函数（c_1 和 c_2 分别为初始夸克和反夸克的颜色向量，c_3 和 c_4 分别为末态夸克和反夸克的颜色向量），$\lambda^\alpha(\alpha = 1, \cdots, 8)$ 为 Gell-Mann 矩阵，其是 $SU(3)$ 颜色空间的生成元。

(a) 颜色向量定义为：

$$c_1 = c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{代表b}), \quad c_2 = c_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{代表}\bar{g}). \tag{15}$$

代入公式：

$$f = \frac{1}{4}\sum_\alpha (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2) = \frac{1}{4}\sum_\alpha \lambda_{22}^\alpha \lambda_{33}^\alpha, \tag{16}$$

因为 $c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1 = \lambda_{22}^\alpha$，$c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2 = \lambda_{33}^\alpha$。检查 λ^α，只有 λ^8 在 $(2,2)$ 和 $(3,3)$ 位置非零：

$$\lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{22}^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \lambda_{33}^8 = -\frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{17}$$

因此：

$$f = \frac{1}{4}\lambda_{22}^8 \lambda_{33}^8 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}. \tag{18}$$

(b) 初始态为叠加态：$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|r\bar{r}\rangle - |b\bar{b}\rangle)$，末态相同，故 $|\psi_f\rangle = |\psi_i\rangle$。取颜色向量：$r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，反夸克类似。色因子公式为：

$$f = \frac{1}{4}\sum_\alpha \langle\psi_f| \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha |\psi_i\rangle = \frac{1}{4}\sum_\alpha \langle\psi_i| \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha |\psi_i\rangle. \tag{19}$$

展开内积：

$$\begin{aligned} \langle\psi_i| \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha |\psi_i\rangle &= \frac{1}{2}\left[\langle r\bar{r}| - \langle b\bar{b}|\right] \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha \left[|r\bar{r}\rangle - |b\bar{b}\rangle\right] \\ &= \frac{1}{2}(A - B - C + D), \end{aligned} \tag{20}$$

其中：

$$\begin{aligned} A &= \langle \mathrm{r\bar{r}}| \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha |\mathrm{r\bar{r}}\rangle = (\langle \mathrm{r}| \lambda^\alpha |\mathrm{r}\rangle)(\langle \mathrm{\bar{r}}| \lambda^\alpha |\mathrm{\bar{r}}\rangle) = (\lambda_{11}^\alpha)^2, \\ B &= \langle \mathrm{r\bar{r}}| \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha |\mathrm{b\bar{b}}\rangle = (\langle \mathrm{r}| \lambda^\alpha |\mathrm{b}\rangle)(\langle \mathrm{\bar{r}}| \lambda^\alpha |\mathrm{\bar{b}}\rangle) = \lambda_{13}^\alpha \lambda_{31}^\alpha, \\ C &= \langle \mathrm{b\bar{b}}| \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha |\mathrm{r\bar{r}}\rangle = (\langle \mathrm{b}| \lambda^\alpha |\mathrm{r}\rangle)(\langle \mathrm{\bar{b}}| \lambda^\alpha |\mathrm{\bar{r}}\rangle) = \lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha, \\ D &= \langle \mathrm{b\bar{b}}| \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha |\mathrm{b\bar{b}}\rangle = (\langle \mathrm{b}| \lambda^\alpha |\mathrm{b}\rangle)(\langle \mathrm{\bar{b}}| \lambda^\alpha |\mathrm{\bar{b}}\rangle) = (\lambda_{33}^\alpha)^2. \end{aligned} \tag{21}$$

带入有：

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sum_\alpha \left(\lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha - \lambda_{13}^\alpha \lambda_{31}^\alpha - \lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha + (\lambda_{33}^\alpha)^2 \right) \\ &= \frac{1}{8} \sum_\alpha \left((\lambda_{11}^\alpha)^2 - \lambda_{13}^\alpha \lambda_{31}^\alpha - \lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha + (\lambda_{33}^\alpha)^2 \right). \end{aligned} \tag{22}$$

计算求和覆盖 $\alpha = 1, \cdots, 8$：

$$\begin{aligned} &\sum_\alpha (\lambda_{11}^\alpha)^2 = (\lambda_{11}^3)^2 + (\lambda_{11}^8)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \\ &\sum_\alpha (\lambda_{33}^\alpha)^2 = (\lambda_{33}^3)^2 + (\lambda_{33}^8)^2 = (-1)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \\ &\sum_\alpha \lambda_{13}^\alpha \lambda_{31}^\alpha = \lambda_{31}^1 \lambda_{13}^1 + \lambda_{31}^2 \lambda_{13}^2 = (1)(1) + (\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1 + 1 = 2, \\ &\sum_\alpha \lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha = \lambda_{13}^1 \lambda_{31}^1 + \lambda_{13}^2 \lambda_{31}^2 = (1)(1) + (-\mathrm{i})(\mathrm{i}) = 1 + 1 = 2. \end{aligned} \tag{23}$$

代入：

$$f = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3} - 2 - 2 + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{3} - 4\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{8}{3} - \frac{12}{3}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{1}{6}. \tag{24}$$

(c) 初始态为叠加态：$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\mathrm{r\bar{r}}\rangle + |\mathrm{b\bar{b}}\rangle - 2\,|\mathrm{g\bar{g}}\rangle)$，末态相同。色因子公式为：

$$f = \frac{1}{4} \sum_\alpha \langle \psi_i | \lambda^\alpha \otimes \lambda^\alpha | \psi_i \rangle. \tag{25}$$

展开后表达式为：

$$f = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \sum_\alpha \left((\lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha + \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha - 2\lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha) + (\lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - 2\lambda_{32}^\alpha \lambda_{23}^\alpha) - 2\left(\lambda_{13}^\alpha \lambda_{31}^\alpha + \lambda_{23}^\alpha \lambda_{32}^\alpha - 2\lambda_{33}^\alpha \lambda_{33}^\alpha\right) \right). \tag{26}$$

简化后：

$$f = \frac{1}{24} \sum_\alpha \left((\lambda_{11}^\alpha \lambda_{11}^\alpha + \lambda_{21}^\alpha \lambda_{12}^\alpha - 2\lambda_{31}^\alpha \lambda_{13}^\alpha) + (\lambda_{12}^\alpha \lambda_{21}^\alpha + \lambda_{22}^\alpha \lambda_{22}^\alpha - 2\lambda_{32}^\alpha \lambda_{23}^\alpha) - 2\left(\lambda_{13}^\alpha \lambda_{31}^\alpha + \lambda_{23}^\alpha \lambda_{32}^\alpha - 2\lambda_{33}^\alpha \lambda_{33}^\alpha\right) \right). \tag{27}$$

计算各项求和：

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha \lambda_{11}^\alpha\lambda_{11}^\alpha = \frac{4}{3},\\
&\sum_\alpha \lambda_{22}^\alpha\lambda_{22}^\alpha = \frac{4}{3},\\
&\sum_\alpha \lambda_{33}^\alpha\lambda_{33}^\alpha = \frac{4}{3},\\
&\sum_\alpha \lambda_{21}^\alpha\lambda_{12}^\alpha = 2,\\
&\sum_\alpha \lambda_{12}^\alpha\lambda_{21}^\alpha = 2,\\
&\sum_\alpha \lambda_{31}^\alpha\lambda_{13}^\alpha = \lambda_{31}^4\lambda_{13}^4+\lambda_{31}^5\lambda_{13}^5 = (1)(1)+(\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1+1 = 2,\\
&\sum_\alpha \lambda_{13}^\alpha\lambda_{31}^\alpha = 2,\\
&\sum_\alpha \lambda_{32}^\alpha\lambda_{23}^\alpha = \lambda_{32}^6\lambda_{23}^6+\lambda_{32}^7\lambda_{23}^7 = (1)(1)+(\mathrm{i})(-\mathrm{i}) = 1+1 = 2,\\
&\sum_\alpha \lambda_{23}^\alpha\lambda_{32}^\alpha = 2.
\end{aligned} \tag{28}$$

代入表达式：

$$\begin{aligned}
&\sum_\alpha (\lambda_{11}^\alpha\lambda_{11}^\alpha+\lambda_{21}^\alpha\lambda_{12}^\alpha-2\lambda_{31}^\alpha\lambda_{13}^\alpha) = \frac{4}{3}+2-2\cdot 2 = \frac{4}{3}+2-4 = \frac{4}{3}-2 = -\frac{2}{3},\\
&\sum_\alpha (\lambda_{12}^\alpha\lambda_{21}^\alpha+\lambda_{22}^\alpha\lambda_{22}^\alpha-2\lambda_{32}^\alpha\lambda_{23}^\alpha) = 2+\frac{4}{3}-2\cdot 2 = 2+\frac{4}{3}-4 = \frac{4}{3}-2 = -\frac{2}{3},\\
&\sum_\alpha (\lambda_{13}^\alpha\lambda_{31}^\alpha+\lambda_{23}^\alpha\lambda_{32}^\alpha-2\lambda_{33}^\alpha\lambda_{33}^\alpha) = 2+2-2\cdot\frac{4}{3} = 4-\frac{8}{3} = \frac{12}{3}-\frac{8}{3} = \frac{4}{3},\\
&-2\sum_\alpha (\lambda_{13}^\alpha\lambda_{31}^\alpha+\lambda_{23}^\alpha\lambda_{32}^\alpha-2\lambda_{33}^\alpha\lambda_{33}^\alpha) = -2\cdot\frac{4}{3} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned} \tag{29}$$

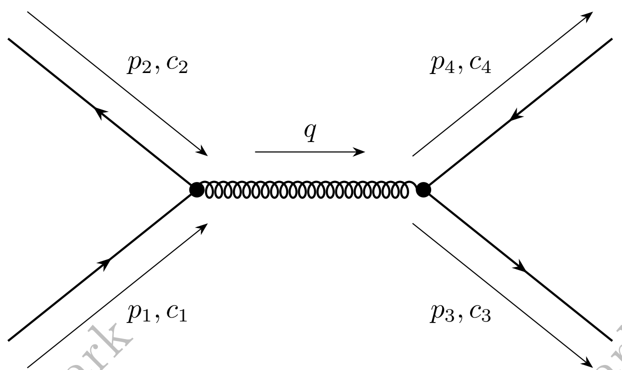
总和为：

$$-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}-\frac{8}{3} = -\frac{12}{3} = -4. \tag{30}$$

因此：

$$f = \frac{1}{24}(-4) = -\frac{1}{6}. \tag{31}$$

8.17 计算下图的振幅 $\mathcal{M}$



这种情形下色因子（类似于方程 (8.47)）是多少？计算色单态位形的 f。你能解释这个结果吗？（答案：0；单态不能耦合到八重态（胶子）。）

解：

根据 Feynman 规则，振幅为：

$$\mathcal{M} = \mathrm{i}\left[\bar{v}(2)c_2^+\left(-\frac{\mathrm{i}g_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu\right)c_1u(1)\right]\times\left(-\frac{\mathrm{i}g_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2}\right)\times\left[\bar{u}(3)c_3^+\left(-\frac{\mathrm{i}g_s}{2}\lambda^\beta\gamma^\nu\right)c_4v(4)\right], \tag{32}$$

其中 $q = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$。简化得：

$$\mathcal{M} = -\frac{g_s^2}{4q^2}\left[\bar{v}(2)\gamma^\mu u(1)\right]\left[\bar{u}(3)\gamma_\mu v(4)\right]\left(c_2^+\lambda^\alpha c_1\right)\left(c_3^+\lambda^\alpha c_4\right). \tag{33}$$

与 QED 结果比较，得到色因子：

$$f = \frac{1}{4}\left(c_2^+\lambda^a c_1\right)\left(c_3^+\lambda^a c_4\right). \tag{34}$$

在色单态配置中，夸克-反夸克对处于色单态：

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|r\bar{r}\rangle + |g\bar{g}\rangle + |b\bar{b}\rangle\right). \tag{35}$$

对应的色旋量为：

$$\begin{aligned} c_1 = c_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \\ c_3 = c_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{36}$$

计算色因子：

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(1\ 0\ 0)\lambda^a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (0\ 1\ 0)\lambda^a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + (0\ 0\ 1)\lambda^a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]^2 \\ &= \frac{1}{12}(\mathrm{tr}\lambda^a)(\mathrm{tr}\lambda^a). \end{aligned} \tag{37}$$

由于 Gell-Mann 矩阵 λ^a 都是无迹的：

$$\mathrm{tr}\lambda^a = 0 \quad 对于所有 a = 1, \cdots, 8, \tag{38}$$

因此：

$$f = \frac{1}{12}\times 0\times 0 = 0. \tag{39}$$

物理解释：色单态不能耦合到色八重态（胶子）。在量子色动力学中，胶子本身携带颜色，属于色八重态表示。色单态是颜色中性的，而色八重态的胶子带有颜色。由于颜色守恒，颜色中性的单态不能通过单胶子交换与另一个颜色中性的单态耦合。这个结果反映了量子色动力学中颜色的规范对称性。

8.23 计算分支比 $\Gamma(\eta_c \to 2g)/\Gamma(\eta_c \to 2\gamma)$。（提示：对分子利用方程 (8.90)，对分母则通过利用把方程 (7.168) 和方程 (7.171) 做适当修改。有两种改动：（i）夸克电荷是 Qe 且（ii）对单态的夸克有一个色因子 3（方程 (8.30)）。答案：$\frac{9}{8}(\alpha_s/\alpha)$。）

解：

由正文可知，(8.90) 为

$$\Gamma(\eta_c \to 2g) = \frac{8\pi}{3c}\frac{\alpha_s^2}{m^2}|\psi(0)|^2, \tag{40}$$

(7.68) 为

$$\sigma = \frac{4\pi}{cv}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2, \tag{41}$$

(7.171) 为

$$\Gamma = v\boldsymbol{\sigma}|\psi(0)|^2 = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2|\psi(0)|^2. \tag{42}$$

对于 η_c 衰变到两个光子，需要进行两处修改：

(a) 夸克电荷：粲夸克电荷为 $Qe = \frac{2}{3}e$，因此耦合常数 α 需替换为 $\frac{4}{9}\alpha$（因为截面与耦合常数的平方成正比，即 $\alpha^2 \to \left(\frac{2}{3}\right)^4\alpha^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2\alpha^2$）。

(b) 色因子：η_c 是色单态，色波函数为

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|r\bar{r}\rangle + |g\bar{g}\rangle + |b\bar{b}\rangle). \tag{43}$$

在计算振幅时，颜色部分给出因子：

$$\sum_{\text{颜色}}\langle\text{色单态}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{i=1}^{3}\delta_{ii} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot 3 = \sqrt{3}. \tag{44}$$

由于衰变率与振幅的平方成正比，因此色因子为 $(\sqrt{3})^2 = 3$。

综合考虑电荷修正和色因子，得到：

$$\begin{aligned}\Gamma(\eta_c \to 2\gamma) &= 3\times\left(\frac{4}{9}\right)^2\times\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2|\psi(0)|^2\\ &= 3\times\frac{16}{81}\times\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2|\psi(0)|^2\\ &= \frac{48}{81}\times\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2|\psi(0)|^2\\ &= \frac{16}{27}\times\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2|\psi(0)|^2.\end{aligned} \tag{45}$$

计算分支比：

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\eta_c \to 2g)}{\Gamma(\eta_c \to 2\gamma)} &= \frac{\frac{8\pi}{3c}\left(\frac{\hbar\alpha_s}{m}\right)^2|\psi(0)|^2}{\frac{16}{27}\times\frac{4\pi}{c}\left(\frac{\hbar\alpha}{m}\right)^2|\psi(0)|^2}\\ &= \frac{8\pi}{3c}\times\frac{27}{16\times 4\pi}\times\left(\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2\\ &= \frac{8\times 27}{3\times 16\times 4}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2\\ &= \frac{216}{192}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2\\ &= \frac{9}{8}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2.\end{aligned} \tag{46}$$

因此，分支比为 $\frac{9}{8}\left(\frac{\alpha_s}{\alpha}\right)^2$。