高等量子力学作业

Clark

1.4 利用左矢-右矢代数规则证明或计算下列公式：

(a) $\mathrm{tr}(XY) = \mathrm{tr}(YX)$，其中 X 和 Y 都是算符。

(b) $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$，其中 X 和 Y 都是算符。

(c) 在左矢-右矢形式下 $\exp[\mathrm{i}f(A)] =?$ 其中 A 是厄米算符，其本征值是已知的。

(d) $\sum_{a'} \psi^*_{a'}(\mathbf{x}')\psi_{a'}(\mathbf{x}'')$，其中 $\psi_{a'}(\mathbf{x}') = \langle \mathbf{x}'|a'\rangle$。

解：

(a) 注意到 $\mathrm{tr}(XY) = \sum\limits_a \langle a|XY|a\rangle$，以及恒等算符 $I = \sum\limits_b |b\rangle\langle b| = \sum\limits_a |a\rangle\langle a|$，于是有 $\mathrm{tr}(XY) = \sum\limits_{a,b} \langle a|X|b\rangle\langle b|Y|a\rangle = \sum\limits_{b,a} \langle b|Y|a\rangle\langle a|X|b\rangle = \sum\limits_b \langle b|YX|b\rangle = \mathrm{tr}(YX)$。

(b) 引入辅助态矢 $|\alpha\rangle$，已知 $XY|\alpha\rangle \overset{DC}{\leftrightarrow} \langle\alpha|(XY)^\dagger$，假设 $Y|\alpha\rangle = |\beta\rangle$，于是有 $Y|\alpha\rangle = |\beta\rangle \overset{DC}{\leftrightarrow} \langle\beta| = \langle\alpha|Y^\dagger$ 和 $X|\beta\rangle \overset{DC}{\leftrightarrow} \langle\beta|X^\dagger$。于是有 $XY|\alpha\rangle = X(Y|\alpha\rangle) = X|\beta\rangle \overset{DC}{\leftrightarrow} \langle\beta|X^\dagger = \langle\alpha|Y^\dagger X^\dagger$。最终有 $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$。

(c) 插入恒等算符 $I = \sum\limits_a |a\rangle\langle a|$，有 $\exp[\mathrm{i}f(A)] = \sum\limits_a \exp[\mathrm{i}f(A)|a\rangle\langle a|]$，其中 A 为厄米算符，于是最终写成 $\exp[\mathrm{i}f(A)] = \sum\limits_a \exp[\mathrm{i}f(a)|a\rangle\langle a|]$。

(d) $\sum\limits_{a'} \psi^*_{a'}(\mathbf{x}')\psi_{a'}(\mathbf{x}'') = \sum\limits_{a'} (\langle\mathbf{x}'|a'\rangle)^*\langle\mathbf{x}''|a'\rangle = \sum\limits_{a'} \langle\mathbf{x}''|a'\rangle\langle a'|\mathbf{x}'\rangle = \langle\mathbf{x}''|\mathbf{x}'\rangle = \delta(\mathbf{x}''-\mathbf{x}')$，其中我们使用了恒等算符 $I = \sum\limits_{a'} |a'\rangle\langle a'|$。

1.5 (a) 考虑两个右矢 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$。假定 $\langle a'|\alpha\rangle, \langle a''|\alpha\rangle, \cdots$ 和 $\langle a'|\beta\rangle, \langle a''|\beta\rangle, \cdots$ 均为已知,其中 $|a'\rangle, |a''\rangle, \cdots$ 组成基右矢的完备集。求在该基下算符 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 的矩阵表示。

(b) 现在考虑一个自旋 1/2 系统，设 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ 分别为 $|s_z = \hbar/2\rangle$ 和 $|s_x = \hbar/2\rangle$ 态。写出在通常（s_x 对角）的基下，与 $|\alpha\rangle\langle\beta|$ 对应的方阵的显示式。

解：

(a) 令 $X = |\alpha\rangle\langle\beta|$，已知 $|a'\rangle, |a''\rangle, \cdots$ 组成基右矢的完备集，于是假设第 i 个基右矢为 $|a_i\rangle$。于是有 $X_{ij} = \langle a_i|\alpha\rangle\langle\beta|a_j\rangle$。

(b) 考虑一个自旋 1/2 系统,沿用书中的定义,使用基矢 $|\pm\rangle$。于是有 $\langle +|s_z = \hbar/2\rangle = 1$ 和 $\langle -|s_z = \hbar/2\rangle = 0$,注意到 (1.4.17a):$|S_x;\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$,有 $\langle\pm|s_x = \hbar/2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$。于是 $|s_z = \hbar/2\rangle\langle s_x = \hbar/2| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。

1.13 一束自旋 1/2 的原子通过如下一系列斯特恩-盖拉赫类的测量：

(a) 第一次测量存留 $s_z = \hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_z = -\hbar/2$ 的原子。

(b) 第二次测量存留 $s_n = \hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_n = -\hbar/2$ 的原子，其中 s_n 是算符 $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ 的本征值，而 $\hat{\mathbf{n}}$ 在 xz 平面上与 z 轴夹角为 β。

(c) 第三次测量存留 $s_z = -\hbar/2$ 的原子而舍弃 $s_z = \hbar/2$ 的原子。当第一次测量存活下的 $s_z = \hbar/2$ 束流归一到 1 时，找到 $s_z = -\hbar/2$ 束流的强度是什么？如果我们想使最后找到 $s_z = -\hbar/2$ 束流的强度取最大值，我们必须怎么设置第二次测量仪器取向？

解：

第一次测量后，剩余态矢均为 $|+\rangle$。第二次测量后，态矢变成 $|S_n;+\rangle = \cos\dfrac{\beta}{2}|+\rangle + \sin\dfrac{\beta}{2}|-\rangle$。第三次测量后，输出 $|-\rangle$。于是找到 $s_z = -\hbar/2$ 的概率为 $P(\beta) = |\langle +|S_n;+\rangle\langle S_n;+|-\rangle|^2 = \cos^2\dfrac{\beta}{2}\sin^2\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{4}\sin^2\beta$。若取最大值，令 $\beta = 90°$,，此时有 $P(90°) = \dfrac{1}{4}$。

1.15 设 A 和 B 是两个可观测量。假定 A 和 B 的共同本征右矢 $\{|a',b'\rangle\}$ 构成一组正交完备的基右矢集合。我们是否总可以得出结论

$$[A,B] = 0? \tag{1}$$

如果你的答案是可以，证明这一论断。如果你的答案是不可以，举出一个反例。

解：

可以。

取恒等算符 $I = \sum_{a',b'}|a',b'\rangle\langle a',b'|$，并且需要注意到 $|a',b'\rangle = |a'\rangle\otimes|b'\rangle$，因此 $A|a',b'\rangle = a'|a',b'\rangle$ 与 $B|a',b'\rangle = b'|a',b'\rangle$。于是有 $AB = AB\cdot I = AB\sum_{a',b'}|a',b'\rangle\langle a',b'| = A\sum_{a',b'}b'|a',b'\rangle\langle a',b'| = \sum_{a',b'}b'a'|a',b'\rangle\langle a',b'| = BA$。因此 $AB = BA$，即 $[A,B] = 0$。

1.18 (a) 推导 Schwartz 不等式的最简单的方法如下。首先注意到，对于任何复数 λ 都有

$$(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|)\cdot(|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle) \geq 0. \tag{2}$$

然后，选择 λ，使得上面的这个不等式约化为 Schwartz 不等式。

(b) 证明，如果在 λ 为纯虚数的情况下，问题所涉及的态满足

$$\triangle A|\alpha\rangle = \lambda\triangle B|\alpha\rangle, \tag{3}$$

则推广的不确定性关系中的等号成立。

(c) 利用通常的波动力学规则进行的直接计算可证明，由下式给出的 Gauss 型波包

$$\langle x'|\alpha\rangle = \frac{1}{(2\pi d^2)^4}\exp\left[\frac{\mathrm{i}\langle p\rangle x'}{\hbar} - \frac{(x'-\langle x\rangle)^2}{4d^2}\right], \tag{4}$$

满足最小不确定性关系

$$\sqrt{\langle(\triangle x)^2\rangle}\sqrt{\langle(\triangle p)^2\rangle} = \frac{\hbar}{2}. \tag{5}$$

证明这样的一个 Gauss 型波包的确满足

$$\langle x'|\triangle x|\alpha\rangle = (\text{虚数})\langle x'|\triangle p|\alpha\rangle \tag{6}$$

的要求，与 (b) 相符。

解：

(a) 目标是证明：$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$。令 $|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle$，并且我们知道内积的非负性：$\langle\gamma|\gamma\rangle \geq 0$。于是有 $(\langle\alpha| + \lambda^*\langle\beta|)\cdot(|\alpha\rangle + \lambda|\beta\rangle) \geq 0$。现在令 $\lambda = -\dfrac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\beta|\beta\rangle}$，此时变成 $\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle - |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 \geq 0$。移项有最终的结果，$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$，Schwartz 不等式即证。

(b) 不确定性关系为：$\langle(\triangle A)^2\rangle\langle(\triangle B)^2\rangle = \dfrac{1}{4}|\langle[A,B]\rangle|^2$。$\lambda$ 为纯虚数，即 $\lambda^* = -\lambda$。注意到 $\triangle A|\alpha\rangle = \lambda\triangle B|\alpha\rangle$，于是左矢的情况为：$\triangle A\langle\alpha| = -\lambda\langle\alpha|\triangle B$。现在我们考虑 $[\triangle A, \triangle B]$ 的结果，已知 $\triangle A = A - \langle A\rangle$ 和 $\triangle B = B - \langle B\rangle$，于是有 $[\triangle A, \triangle B] = [A, B]$。现在引入一个辅助态 $|\alpha\rangle$，于是我们有 $\langle\alpha|[A,B]|\alpha\rangle = \langle\alpha|[\triangle A, \triangle B]|\alpha\rangle = \langle\alpha|\triangle A\triangle B - \triangle B\triangle A|\alpha\rangle = \langle\alpha|\triangle A\triangle B|\alpha\rangle - \langle\alpha|\triangle B\triangle A|\alpha\rangle = (\langle\alpha|\triangle A)\triangle B|\alpha\rangle - \langle\alpha|\triangle B(\triangle A|\alpha\rangle) = \lambda^*\langle\alpha|(\triangle B)^2|\alpha\rangle - \lambda\langle\alpha|(\triangle B)^2|\alpha\rangle = -2\lambda\langle\alpha|(\triangle B)^2|\alpha\rangle$，满足 (1.4.53)。

(c) 已知 $\triangle A = A - \langle A\rangle$ 和 $\triangle B = B - \langle B\rangle$，于是有 $\langle x'|\triangle x|\alpha\rangle = \langle x'|x|\alpha\rangle - \langle x'|\langle x\rangle|\alpha\rangle = (x' - \langle x\rangle)\langle x'|\alpha\rangle$，同理有 $\langle x'|\triangle p|\alpha\rangle = (p - \langle p\rangle)\langle x'|\alpha\rangle = \left(-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'} - \langle p\rangle\right)\langle x'|\alpha\rangle$，其中用到了动量算符在坐标表象的表示 $p = -\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$。由 $\langle x'|\alpha\rangle = \dfrac{1}{(2\pi d^2)^4}\exp\left[\dfrac{\mathrm{i}\langle p\rangle x'}{\hbar} - \dfrac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right]$，可知 $-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x'}\langle x'|\alpha\rangle = -\dfrac{\mathrm{i}\hbar}{(2\pi d^2)^4}\left(\dfrac{\mathrm{i}\langle p\rangle}{\hbar} - \dfrac{x' - \langle x\rangle}{4d^2}\cdot 2\right)\exp\left[\dfrac{\mathrm{i}\langle p\rangle x'}{\hbar} - \dfrac{(x' - \langle x\rangle)^2}{4d^2}\right] = \left(\langle p\rangle + \dfrac{\mathrm{i}\hbar(x' - \langle x\rangle)}{2d^2}\right)\langle x'|\alpha\rangle$。于是有 $\langle x'|\triangle p|\alpha\rangle = \dfrac{\mathrm{i}\hbar}{2d^2}(x' - \langle x\rangle)\langle x'|\alpha\rangle = \dfrac{\mathrm{i}\hbar}{2d^2}\langle x'|\triangle x|\alpha\rangle$。令 $\lambda = \dfrac{\mathrm{i}\hbar}{2d^2}$ 确实为纯虚数，符合 (b)。

PS：本题的 (c) 为小黄书第二章 2.6(1) 的变体。

1.23 考虑一个三维右矢空间。如果某一组正交的右矢集合，比如 $|1\rangle$，$|2\rangle$ 和 $|3\rangle$，用作基右矢，算符 A 和 B 由

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i}b \\ 0 & \mathrm{i}b & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

表示，其中 a 和 b 都是实数。

(a) 显然，A 展示了一个简并的谱，B 也展示了一个简并的谱吗？

(b) 证明 A 和 B 对易。

(c) 找到一组新的正交归一右矢集合，它们是 A 和 B 的共同本征态，具体确定在这三个本征右矢的每一个本征右矢上 A 和 B 的本征值。你确定的本征值能完全地表征每个本征右矢吗？

解：

(a) 求解公式为 $\det(B - \lambda I) = 0$，即 $\begin{vmatrix} b-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -ib \\ 0 & ib & -\lambda \end{vmatrix} = 0$，具体写成 $(b-\lambda)\cdot\lambda^2 - (b-\lambda)(\mathrm{i}b)(-\mathrm{i}b) = (b-\lambda)(\lambda^2 - b^2) = 0$，解得 $\lambda = b$、$\lambda = \pm b$。因此 B 也是简并的谱。

(b) $[A,B]=AB-BA$。分别计算 $AB=\begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}ab \\ 0 & -\mathrm{i}ab & 0 \end{pmatrix}$，以及 $BA=\begin{pmatrix} ab & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}ab \\ 0 & -\mathrm{i}ab & 0 \end{pmatrix}$，可得 $AB-BA=0$。于是 $[A,B]=0$，即 A 和 B 对易。

(c) 取 A 的本征值为 $|1\rangle$、$|2\rangle$ 和 $|3\rangle$，分别对应本征值为 a、$-a$ 和 $-a$。欲求 A 和 B 的共同本征态，最简单的方法就是取其中一个 $\lambda=b$ 的本征态为 $|1\rangle$，不妨将其对应为 b_1。之后，可通过线性组合来得到。即对于 $\lambda=b$ 有 $\begin{pmatrix} -b & -\mathrm{i}b \\ \mathrm{i}b & -b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=0$，解得 $-bb_2=-\mathrm{i}bb_3$，即 $b_2=\mathrm{i}b_3$。同理，取 $\lambda=-b$,有 $\begin{pmatrix} b & -\mathrm{i}b \\ \mathrm{i}b & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=0$,解得 $bb_2=-\mathrm{i}bb_3$,即 $b_2=-\mathrm{i}b_3$。综上所述,有如下表格:

A 的本征值	B 的本征值	本征态
a	b	$\|1\rangle$
$-a$	b	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|2\rangle+\mathrm{i}\,\|3\rangle)$
$-a$	$-b$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\|2\rangle-\mathrm{i}\,\|3\rangle)$

1.27 (a) 假定 $f(A)$ 是一个具有性质 $A\,|a'\rangle=a'\,|a'\rangle$ 的厄米算符 A 的一个函数。已知从基 a' 到基 b' 的变换矩阵时，求 $\langle b''|f(A)|b'\rangle$ 的值。

(b) 利用 (a) 中所得结果的连续态类比，求

$$\langle \mathbf{p}''|F(r)|\mathbf{p}'\rangle\,. \tag{8}$$

尽你所能简化你的表示式。注意，r 是 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中 x，y 和 z 都是算符。

解：

(a) 利用恒等算符 $I=\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|$。有 $\langle b''|f(A)|b'\rangle=\langle b''|f(A)\sum_{a'}|a'\rangle\langle a'|\,b\rangle=\sum_{a'}\langle b''|f(A)\,|a'\rangle\langle a'|\,b'\rangle=\sum_{a'}f(a')\,\langle b''|a'\rangle\,\langle a'|b'\rangle$。注意 $\langle b''|a'\rangle$ 和 $\langle a'|b'\rangle$ 均为已知，即"已知从基 a' 到基 b' 的变换矩阵"。

(b) 利用恒等算符 $I=\int \mathrm{d}\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}'\rangle\,\langle\mathbf{x}'|$。有 $\langle\mathbf{p}''|F(r)|\mathbf{p}'\rangle=\langle\mathbf{p}''|F(r)\int\mathrm{d}\mathbf{x}'\,|\mathbf{x}'\rangle\,\langle\mathbf{x}'|\,\mathbf{p}'\rangle=\int\mathrm{d}\mathbf{x}'\,\langle\mathbf{p}''|F(r)\,|\mathbf{x}'\rangle\,\langle\mathbf{x}'|\,\mathbf{p}'\rangle=\int\mathrm{d}\mathbf{x}'F(r')\,\langle\mathbf{p}''|\mathbf{x}'\rangle\,\langle\mathbf{x}'|\mathbf{p}'\rangle=\dfrac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\mathrm{d}\mathbf{x}'F(r')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')\cdot\mathbf{x}'}{\hbar}}$，其中用到了 $\langle x'|p'\rangle=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p'x'}{\hbar}\right)$。现在,令 $\mathbf{p}'-\mathbf{p}''=\mathbf{q}$,于是有 $\langle\mathbf{p}''|F(r)|\mathbf{p}'\rangle=\dfrac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\mathrm{d}\mathbf{x}'F(r')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(\mathbf{p}'-\mathbf{p}'')\cdot\mathbf{x}'}{\hbar}}=\dfrac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\mathrm{d}\mathbf{x}'F(r')\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}'}{\hbar}}=\dfrac{1}{(2\pi\hbar)^3}\int\mathrm{d}r'F(r')\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}qr'\cos\theta}{\hbar}}=\dfrac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3}\int\mathrm{d}r'F(r')$ $\cdot\left(-\int_0^{\pi}\mathrm{d}\cos\theta\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}qr'\cos\theta}{\hbar}}\right)=\dfrac{1}{4\pi^2\hbar^3}\int\mathrm{d}r'F(r')\cdot\dfrac{\hbar}{\mathrm{i}qr'}2\mathrm{i}\sin\dfrac{qr'}{\hbar}=\dfrac{1}{2\pi^2\hbar^2}\int\mathrm{d}rF(r')\dfrac{\sin\frac{\mathrm{i}qr'}{\hbar}}{qr'}$，其中用到了 $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$。

1.28 (a) 设 x 和 p_x 是一维的坐标和线动量。求经典 Possion 括号

$$[x,F(p_x)]_{\text{经典}} \tag{9}$$

的值。

(b) 这一次，设 x 和 p_x 是相应的量子力学算符，求对易关系

$$\left[x, \exp\left(\frac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)\right]. \tag{10}$$

(c) 利用在 (b) 中得到的结果，证明

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle, \quad (x\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle) \tag{11}$$

是坐标算符 x 的本征态。相应的本征值是什么？

解：

(a) 已知 $[f,g]_{经典} = \dfrac{\partial f}{\partial q}\dfrac{\partial g}{\partial p} - \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{\partial g}{\partial q}$，于是有 $[x, F(p_x)]_{经典} = \dfrac{\partial x}{\partial x}\dfrac{\partial F(p_x)}{\partial p_x} = \dfrac{\partial F(p_x)}{\partial p_x}$。

(b) 利用对易子与 Possion 括号的关系，有 $\left[x, \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)\right] = \mathrm{i}\hbar\left[x, \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)\right]_{经典} = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial x}{\partial x}\dfrac{\partial \exp\left(\frac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)}{\partial p_x} = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\mathrm{i}a}{\hbar}\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right) = -a\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)$。于是有 $\left[x, \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)\right] = -a\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)$。

(c) 由 (b) 可知，$x\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right) = \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)x - a\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)$。于是有 $x\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle = \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)x\,|x'\rangle - a\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle = (x'-a')\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle$，其中用到了 $x\,|x'\rangle = x'\,|x'\rangle$。显然，$\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p_x a}{\hbar}\right)|x'\rangle$ 是坐标算符 x 的本征态，相应的本征值为 $x'-a'$。

1.33 (a) 证明下列各式：

i. $\langle p'|x|\alpha\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle$，

ii. $\langle\beta|x|\alpha\rangle = \int \mathrm{d}p'\phi_\beta^*(p')\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')$。其中，$\phi_\alpha(p') = \langle p'|\alpha\rangle$ 和 $\phi_\beta(p') = \langle p'|\beta\rangle$ 都是动量空间波函数。

(b)

$$\exp\left(\frac{\mathrm{i}x\Xi}{\hbar}\right) \tag{12}$$

的物理意义是什么？其中 x 是位置算符，而 Ξ 是某个量纲为动量的数，证明你的答案的正确性。

解：

(a) i. 利用恒等算符 $I = \displaystyle\int \mathrm{d}p''\,|p''\rangle\langle p''| = \int \mathrm{d}x'\,|x'\rangle\langle x'|$。于是有 $\langle p'|x|\alpha\rangle = \displaystyle\int \mathrm{d}p''\,\langle p'|x\,|p''\rangle\langle p''|\,\alpha\rangle$。计算 $\langle p'|x|p''\rangle = \displaystyle\int \mathrm{d}x'\,\langle p'|x\,|x'\rangle\langle x'|\,p''\rangle = \int \mathrm{d}x'x'\,\langle p'|x'\rangle\langle x'|p''\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\int \mathrm{d}x'x'\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(p'-p'')x'}{\hbar}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\int \mathrm{d}x'\exp^{-\frac{\mathrm{i}(p'-p'')x'}{\hbar}} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')$，其中用到了 $\langle x'|p'\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\exp\left(\dfrac{\mathrm{i}p'x'}{\hbar}\right)$ 和坐标算符 x 在动量表象的形式，即 $x = \mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial p}$。于是 $\langle p'|x|\alpha\rangle = \displaystyle\int \mathrm{d}p''\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\delta(p'-p'')\langle p''|\alpha\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\int \mathrm{d}p''\delta(p'-p'')\langle p''|\alpha\rangle = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\langle p'|\alpha\rangle$。

ii. 仿照 (i) 的步骤即可，即 $\langle\beta|x|\alpha\rangle = \displaystyle\int \mathrm{d}p'\,\langle\beta|x\,|p'\rangle\langle p'|\,\alpha\rangle = \int \mathrm{d}p'\,\langle\beta|x|p'\rangle\,\phi_\alpha(p') = \int \mathrm{d}p'\phi_\beta^*(p')\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial p'}\phi_\alpha(p')$，最后一步直接用到了 (i) 的结论。

(b) 显然是动量平移算符。令 $\mathcal{T}(\Xi) = \exp\left(\dfrac{\mathrm{i}x\Xi}{\hbar}\right)$，此时仅需验证 $\mathcal{T}(\Xi)\,|p\rangle$ 也是动量算符 p 的本征态即可。于是有 $p\mathcal{T}(\Xi)\,|p'\rangle = ([p,\mathcal{T}(\Xi)] + \mathcal{T}(\Xi)p)\,|p'\rangle = \left(-\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\mathcal{T}(\Xi) + p'\mathcal{T}(\Xi)\right)|p'\rangle =$

$(p'+\Xi)\mathcal{T}(\Xi)\left|p'\right\rangle$，其中用到了 $p\left|p'\right\rangle = p'\left|p'\right\rangle$ 和 $[p,F(x)] = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}F(x)$。于是，$\mathcal{T}(\Xi)\left|p'\right\rangle$ 确实是动量算符 p 的本征态，对应的本征值为 $p'+\Xi$。

练习 证明简谐振子的激发态 $|n\rangle$ 上的不确定性关系为：

$$\langle(\triangle x)^2\rangle\langle(\triangle p)^2\rangle = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\hbar^2. \tag{13}$$

解：

利用公式 $\langle(\triangle A)^2\rangle = \langle A^2\rangle - (\langle A\rangle)^2$，有 $\langle(\triangle x)^2\rangle = \langle x^2\rangle - (\langle x\rangle)^2$ 和 $\langle(\triangle p)^2\rangle = \langle p^2\rangle - (\langle p\rangle)^2$。首先计算 $\langle(\triangle x)^2\rangle$，由于是激发态 $|n\rangle$，于是 $\langle(\triangle x)^2\rangle = \langle n|(\triangle x)^2|n\rangle = \langle n|x^2|n\rangle - (\langle n|x|n\rangle)^2$。利用公式：$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^\dagger + a)$，$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}(a^\dagger a + aa^\dagger + (a^\dagger)^2 + a^2)$，$p = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$，$p^2 = \frac{m\hbar\omega}{2}(a^\dagger a + aa^\dagger - (a^\dagger)^2 - a^2)$，$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$，$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$。可以确定 $\langle n|x|n\rangle = 0$，以及 $\langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1) = \frac{\hbar}{m\omega}(n+\frac{1}{2})$。于是得到 $\langle n|(\triangle x)^2|n\rangle = \langle n|x^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}(n+\frac{1}{2})$。同理可以计算出 $\langle(\triangle p)^2\rangle = \langle n|(\triangle p)^2|n\rangle = \langle n|p^2|n\rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}(2n+1) = m\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$。所以最终的结果为，$\langle(\triangle x)^2\rangle\langle(\triangle p)^2\rangle = \langle n|(\triangle x)^2|n\rangle\langle n|(\triangle p)^2|n\rangle = \frac{\hbar}{m\omega}(n+\frac{1}{2})\cdot m\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) = \left(n+\frac{1}{2}\right)^2\hbar^2$。

练习 相干态可以定义为

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle. \tag{14}$$

证明上述定义的相干态在粒子数表象中写为

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{15}$$

解：

令 $A = \alpha a^\dagger, B = -\alpha^* a$，于是有 $[A,B] = [\alpha a^\dagger, -\alpha^* a] = -\alpha^*\alpha[a^\dagger, a] = -|\alpha|^2(-1) = |\alpha|^2$。利用 Baker-Campbell-Hausdorff 公式，即 $\mathrm{e}^A\mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]}$，有 $D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = \mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]} = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^* a}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$。于是有 $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}\mathrm{e}^{-\alpha^* a}|0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger}|0\rangle$，其中用到了 $a|0\rangle = 0$ 和 $\mathrm{e}^{ca}|0\rangle = 0$，$c$ 为常数。现在，利用 Taylor 展开有 $\mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}$，以及 $(a^\dagger)^n|0\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle$，可得 $|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}(a^\dagger)^n|0\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$。

PS：题目出错了，分母位置少了“`\sqrt{}`”。本题为小黄书第二章 2.45 原题。

练习 压缩相干态 $|\alpha,\xi\rangle$ 是通过先压缩算符 $S(\xi)$ 谐振子基态，再平移 $D(\alpha)$ 得到的。其定义为

$$|\alpha,\xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle, \tag{16}$$

其中，$D(\alpha)$ 负责产生平均振幅（相干部分），而 $S(\xi)$ 负责压缩噪声分布。

1 计算压缩相干态的平均振幅 $\langle\alpha,\xi|X|\alpha,\xi\rangle$ 和 $\langle\alpha,\xi|P|\alpha,\xi\rangle$；

2 计算压缩相干态中 $\langle\alpha,\xi|X^2|\alpha,\xi\rangle$ 和 $\langle\alpha,\xi|P^2|\alpha,\xi\rangle$；

3 计算压缩相干态在位置和动量上不确定度 $\langle(\triangle X)^2\rangle$ 和 $\langle(\triangle P)^2\rangle$，并计算出在该态上的不确定性关系；

4 当 $\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 和 $\xi = re^{\mathrm{i}\theta}$ 取什么值时,压缩相干态可以满足最小不确定性关系 $\sqrt{\langle(\triangle X)^2\rangle}\sqrt{\langle(\triangle P)^2\rangle} = 1$?

解:

题中的无量纲的位置和动量算符定义为:$X = \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}x = a^\dagger + a$ 和 $P = \sqrt{\frac{2}{m\hbar\omega}}p = \mathrm{i}(a^\dagger - a)$,且有 $[X, P] = 2\mathrm{i}$。此外,相干态表象的平移算符 $D(\alpha)$ 定义为 $D(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$,相干压缩态的压缩算符 $S(\xi)$ 定义为 $S(\xi) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi(a^\dagger)^2)}$,其中 $\xi = re^{\mathrm{i}\theta}$。

1 $\langle\alpha,\xi|X|\alpha,\xi\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)XD(\alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)(a^\dagger + a)D(\alpha)S(\xi)|0\rangle$。利用平移算符 $D(\alpha)$ 的性质:$D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = a + \alpha$ 和 $D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^*$,有 $\langle\alpha,\xi|X|\alpha,\xi\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)(a^\dagger + a + \alpha^* + \alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)(a^\dagger + a + 2\mathrm{Re}(\alpha))S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)(a^\dagger + a)S(\xi)|0\rangle + 2\mathrm{Re}(\alpha)$。利用压缩算符 $S(\xi)$ 的性质:$S^\dagger(\xi)aS(\xi) = a\cosh r - a^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh r$ 和 $S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi) = a^\dagger\cosh r - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r$,有 $\langle\alpha,\xi|X|\alpha,\xi\rangle = \langle 0|(a^\dagger\cosh r - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r + a\cosh r - a^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh r)|0\rangle + 2\mathrm{Re}(\alpha) = 2\mathrm{Re}(\alpha)$。其中用到了 $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$,$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$,以及本征矢的正交性 $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$。同理可得 $\langle\alpha,\xi|P|\alpha,\xi\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)PD(\alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)\mathrm{i}(a^\dagger - a)D(\alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)\mathrm{i}(a^\dagger - a + \alpha^* - \alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)\mathrm{i}(a^\dagger - a)S(\xi)|0\rangle + 2\mathrm{Im}(\alpha) = \langle 0|(\mathrm{i}(a^\dagger\cosh r - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r) - \mathrm{i}(a\cosh r - a^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cosh r))|0\rangle + 2\mathrm{Im}(\alpha) = 2\mathrm{Im}(\alpha)$。最终有 $\langle\alpha,\xi|X|\alpha,\xi\rangle = 2\mathrm{Re}(\alpha)$ 和 $\langle\alpha,\xi|P|\alpha,\xi\rangle = 2\mathrm{Im}(\alpha)$。

2 $X^2 = (a^\dagger + a)^\dagger(a^\dagger + a) = a^\dagger a + aa^\dagger + (a^\dagger)^2 + a^2 = 2a^\dagger a + 1 + (a^\dagger)^2 + a^2$,其中用到了 $[a, a^\dagger] = 1 = aa^\dagger - a^\dagger a$。同理有 $P^2 = (\mathrm{i}(a^\dagger - a))^\dagger(\mathrm{i}(a^\dagger - a)) = 2a^\dagger a + 1 - (a^\dagger)^2 - a^2$。通过上述性质,可以计算出 $S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)S(\xi) = a\cosh r - a^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh r + \alpha$ 和 $S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)S(\xi) = a^\dagger\cosh r - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r + \alpha^*$。首先计算 $\langle\alpha,\xi|a^2|\alpha,\xi\rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle\alpha,\xi|a^2|\alpha,\xi\rangle &= \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^2D(\alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)S(\xi)|0\rangle \\
&= \langle 0|S^\dagger(\xi)(a^2 + \alpha^2 + 2\alpha a)S(\xi)|0\rangle \\
&= \langle 0|S^\dagger(\xi)aS(\xi)S^\dagger(\xi)aS(\xi)|0\rangle + 2\alpha\langle 0|S^\dagger(\xi)aS(\xi)|0\rangle + \alpha^2 \\
&= \alpha^2 + 2\alpha\langle 0|(a\cosh r - a^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh r)|0\rangle + \langle 0|(a\cosh r - a^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh r)^2|0\rangle \\
&= \alpha^2 + \langle 0|(a^2\cosh^2 r + (a^\dagger)^2\sinh^2 r - a^\dagger a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r - aa^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r)|0\rangle \\
&= \alpha^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r \\
&= \alpha^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh 2r,
\end{aligned} \tag{17}$$

其中用到了 $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$,$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$,$a|0\rangle = 0$。本征矢的正交性 $\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$,

以及 $2\cosh r\sinh r=\sinh 2r$。同理可以计算 $\langle\alpha,\xi|(a^\dagger)^2|\alpha,\xi\rangle$：

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha,\xi|(a^\dagger)^2|\alpha,\xi\rangle &= \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)(a^\dagger)^2D(\alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)S(\xi)|0\rangle \\
&= \langle 0|S^\dagger(\xi)((a^\dagger)^2+(\alpha^*)^2+2\alpha^*a^\dagger)S(\xi)|0\rangle \\
&= \langle 0|S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi)S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi)|0\rangle + 2\alpha^*\langle 0|S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi)|0\rangle + (\alpha^*)^2 \\
&= (\alpha^*)^2 + 2\alpha^*\langle 0|(a^\dagger\cosh r - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r)|0\rangle + \langle 0|(a^\dagger\cosh r - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r)^2|0\rangle \\
&= (\alpha^*)^2 + \langle 0|((a^\dagger)^2\cosh^2 r + a^2\sinh^2 r - aa^\dagger\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r - a^\dagger a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r)|0\rangle \\
&= (\alpha^*)^2 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r \\
&= (\alpha^*)^2 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh 2r.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

最后计算 $\langle\alpha,\xi|a^\dagger a|\alpha,\xi\rangle$：

$$
\begin{aligned}
\langle\alpha,\xi|a^\dagger a|\alpha,\xi\rangle &= \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger aD(\alpha)S(\xi)|0\rangle = \langle 0|S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)S(\xi)|0\rangle \\
&= \langle 0|S^\dagger(\xi)(a^\dagger a+|\alpha|^2+\alpha^*a+\alpha a^\dagger)S(\xi)|0\rangle \\
&= \langle 0|S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi)S^\dagger(\xi)aS(\xi)|0\rangle + |\alpha|^2 + \alpha^*\langle 0|S^\dagger(\xi)aS(\xi)|0\rangle + \alpha\langle 0|S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi)|0\rangle \\
&= |\alpha|^2 + \langle 0|(a^\dagger\cosh r - a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh r)(a\cosh r - a^\dagger\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh r)|0\rangle \\
&= |\alpha|^2 + \langle 0|(a^\dagger a\cosh^2 r - (a^\dagger)^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r + aa^\dagger\sinh^2 r - a^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\cosh r\sinh r)|0\rangle \\
&= |\alpha|^2 + \sinh^2 r.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

整合上述结果,我们就计算出 $\langle\alpha,\xi|X^2|\alpha,\xi\rangle = 2\langle\alpha,\xi|a^\dagger a|\alpha,\xi\rangle+1+\langle\alpha,\xi|(a^\dagger)^2|\alpha,\xi\rangle+\langle\alpha,\xi|a^2|\alpha,\xi\rangle = 2(|\alpha|^2+\sinh^2 r)+1+(\alpha^*)^2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh 2r+\alpha^2-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh 2r = 4(\mathrm{Re}(\alpha))^2+\cosh 2r-\sinh(2r)\cos\theta$，其中用到了 $\alpha^2+(\alpha^*)^2+2|\alpha|^2 = 4(\mathrm{Re}(\alpha))^2$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 2\cos\theta$ 和 $2\sinh^2 2r+1 = \cosh 2r$。同理可得 $\langle\alpha,\xi|P^2|\alpha,\xi\rangle = 2\langle\alpha,\xi|a^\dagger a|\alpha,\xi\rangle + 1 - \langle\alpha,\xi|(a^\dagger)^2|\alpha,\xi\rangle - \langle\alpha,\xi|a^2|\alpha,\xi\rangle = 2(|\alpha|^2+\sinh^2 r) + 1 - (\alpha^*)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\sinh 2r - (\alpha)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\sinh 2r = 4(\mathrm{Im}(\alpha))^2 + \cosh 2r + \sinh(2r)\cos\theta$，其中用到了 $-\alpha^2-(\alpha^*)^2+2|\alpha|^2 = 4(\mathrm{Im}(\alpha))^2$。最后的结果为 $\langle\alpha,\xi|X^2|\alpha,\xi\rangle = 4(\mathrm{Re}(\alpha))^2 + \cosh 2r - \sinh(2r)\cos\theta$ 和 $\langle\alpha,\xi|P^2|\alpha,\xi\rangle = 4(\mathrm{Im}(\alpha))^2 + \cosh 2r + \sinh(2r)\cos\theta$。

3 利用公式 $\langle(\triangle A)^2\rangle = \langle A^2\rangle - (\langle A\rangle)^2$，有 $\langle(\triangle X)^2\rangle = \langle X^2\rangle - (\langle X\rangle)^2$ 和 $\langle(\triangle P)^2\rangle = \langle P^2\rangle - (\langle P\rangle)^2$。首先计算 $\langle(\triangle X)^2\rangle$，有 $\langle(\triangle X)^2\rangle = \langle\alpha,\xi|(\triangle X)^2|\alpha,\xi\rangle = \langle\alpha,\xi|X^2|\alpha,\xi\rangle - (\langle\alpha,\xi|X|\alpha,\xi\rangle)^2 = 4(\mathrm{Re}(\alpha))^2 + \cosh 2r - \sinh(2r)\cos\theta - (2\mathrm{Re}(\alpha))^2 = \cosh 2r - \sinh(2r)\cos\theta$。同理可以计算出 $\langle(\triangle P)^2\rangle = \langle\alpha,\xi|(\triangle P)^2|\alpha,\xi\rangle = \langle\alpha,\xi|P^2|\alpha,\xi\rangle - (\langle\alpha,\xi|P|\alpha,\xi\rangle)^2 = 4(\mathrm{Im}(\alpha))^2 + \cosh 2r + \sinh(2r)\cos\theta - (2\mathrm{Im}(\alpha))^2 = \cosh 2r + \sinh(2r)\cos\theta$。所以最终的结果为，$\langle(\triangle X)^2\rangle = \cosh 2r - \sinh(2r)\cos\theta$ 和 $\langle(\triangle P)^2\rangle = \cosh 2r + \sinh(2r)\cos\theta$。不确定性关系为 $\sqrt{\langle(\triangle X)^2\rangle}\sqrt{\langle(\triangle P)^2\rangle} = \sqrt{\cosh^2 2r - \sinh^2(2r)\cos^2\theta} = \sqrt{1+\sinh^2(2r)\sin^2\theta}$，其中用到了 $\cosh^2 2r - \sinh^2 2r = 1$ 和 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。

4 根据上一小问，我们得到 $\sqrt{\langle(\triangle X)^2\rangle}\sqrt{\langle(\triangle P)^2\rangle} = \sqrt{1+\sinh^2(2r)\sin^2\theta}$。显然，当 $r=0$ 或 $\sin\theta = 0$ 时，就可以满足最小不确定性关系 $\sqrt{\langle(\triangle X)^2\rangle}\sqrt{\langle(\triangle P)^2\rangle} = 1$。对于 $\sin\theta = 0$，有 $\theta = n\pi$，$n = 0, 1, \cdots$。于是对于 $\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$\xi = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，取 $r = 0$ 或 $\theta = n\pi, n = 0, 1, \cdots$，即可满足最小不确定性关系。