粒子物理基础作业

Clark

5.6 利用方程 (5.20) 和方程 (5.21) 估计氢原子 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级的 Lamb 位移的间隙。在这样一个跃迁中光子的频率是多少？（验值是 1057MHz。）

解：

根据正文内容，(5.20) 和 (5.21) 分别为

$$\begin{aligned} \triangle E_{\text{Lamb}} &= \alpha^5 mc^2 \frac{1}{4n^3} k(n,0), \\ \triangle E_{\text{Lamb}} &= \alpha^5 mc^2 \frac{1}{4n^3} \left(k(n,l) \pm \frac{1}{\pi\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right)} \right) \quad j = l \pm \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

对于 $2S_{1/2}$ 态，$n=2$，$l=0$，使用 (5.20)：

$$\triangle E_S = \alpha^5 mc^2 \frac{1}{4n^3} k(n,0). \tag{2}$$

代入 $n=2$:

$$\triangle E_S = \alpha^5 mc^2 \frac{1}{4\cdot 8} k(2,0) = \alpha^5 mc^2 \frac{1}{32} k(2,0), \tag{3}$$

其中 $k(2,0)\approx 13$：

$$\triangle E_S \approx \alpha^5 mc^2 \frac{13}{32}. \tag{4}$$

对于 $2P_{1/2}$ 态，$n=2$，$l=1$，$j=\frac{1}{2}$。由于 $j=l-\frac{1}{2}$，使用 (5.21) 中的负号：

$$\begin{aligned} \triangle E_P &= \alpha^5 mc^2 \frac{1}{4n^3} \left(k(n,l) - \frac{1}{\pi\left(j+\frac{1}{2}\right)\left(l+\frac{1}{2}\right)} \right) \\ &= \alpha^5 mc^2 \frac{1}{32} \left(k(2,1) - \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)} \right) \\ &= \alpha^5 mc^2 \frac{1}{32} \left(k(2,1) - \frac{1}{\pi\cdot 1\cdot \frac{3}{2}} \right) \\ &= \alpha^5 mc^2 \frac{1}{32} \left(k(2,1) - \frac{2}{3\pi} \right), \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $k(2,1) < 0.05$，与 $\frac{2}{3\pi}\approx 0.2122$ 相比很小，因此忽略 $k(2,1)$：

$$\triangle E_P \approx -\alpha^5 mc^2 \frac{1}{32}\frac{2}{3\pi}. \tag{6}$$

Lamb 位移间隙是 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级之间的能量差：

$$\begin{aligned}\triangle E &= \triangle E_S - \triangle E_P \\ &\approx \alpha^5 mc^2 \frac{13}{32} - \left(-\alpha^5 mc^2 \frac{1}{32}\frac{2}{3\pi}\right) \\ &= \alpha^5 mc^2 \frac{1}{32}\left(13 + \frac{2}{3\pi}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

计算 $13 + \frac{2}{3\pi}$：

$$\frac{2}{3\pi} = \frac{2}{3 \times 3.1416} \approx \frac{2}{9.4248} \approx 0.2122, \quad 13 + 0.2122 = 13.2122 \approx 13.2. \tag{8}$$

所以：

$$\triangle E \approx \alpha^5 mc^2 \frac{13.2}{32}. \tag{9}$$

现在计算 α^5：

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{137} \approx 0.00729927, \\ \alpha^2 &\approx 5.328 \times 10^{-5}, \\ \alpha^3 &\approx 3.889 \times 10^{-7}, \\ \alpha^4 &\approx 2.839 \times 10^{-9}, \\ \alpha^5 &\approx 2.072 \times 10^{-11}.\end{aligned} \tag{10}$$

之后计算 $\alpha^5 mc^2$：

$$\begin{aligned}\alpha^5 mc^2 &\approx 2.072 \times 10^{-11} \times 0.511 \times 10^6 \\ &= 2.072 \times 10^{-11} \times 5.11 \times 10^5 \\ &= 1.059 \times 10^{-5}\mathrm{eV}.\end{aligned} \tag{11}$$

再计算 $\triangle E$：

$$\begin{aligned}\triangle E &\approx 1.059 \times 10^{-5} \times \frac{13.2}{32} \\ &= 1.059 \times 10^{-5} \times 0.4125 \\ &= 4.367 \times 10^{-6}\mathrm{eV} \\ &\approx 4.37 \times 10^{-6}\mathrm{eV}.\end{aligned} \tag{12}$$

能量与频率的关系为 $E = h\nu$，所以 $\nu = \dfrac{E}{h}$，其中 h 是 Planck 常数。使用 $h \approx 4.135667662 \times 10^{-15}\mathrm{eV \cdot s}$：

$$\nu = \frac{\triangle E}{h} = \frac{4.37 \times 10^{-6}}{4.136 \times 10^{-15}} \approx 1.057 \times 10^9 \mathrm{Hz} = 1057\mathrm{MHz}. \tag{13}$$

综上所述，氢原子 $2S_{1/2}$ 和 $2P_{1/2}$ 能级的 Lamb 位移间隙约为 4.37×10^{-6}eV，对应光子的频率约为 1057MHz，与验证值一致。

5.13 在书中我们用方程 (5.46) 计算了轻夸克赝标介子和矢量介子的质量。而同样的公式可以被用到包含粲和美夸克的重夸克系统。

(a) 计算赝标介子 $\eta_c(c\bar{c})$，$D^0(c\bar{u})$，$D_s^+(c\bar{s})$ 和对应的矢量介子 $\psi(c\bar{c})$，$D^{*0}(c\bar{u})$，$D^{*+}(c\bar{s})$ 的质量。并与粒子数据手册的实验值进行比较。

(b) 对底介子 u$\bar{b}$，s$\bar{b}$，c$\bar{b}$ 和 b$\bar{b}$ 做同样的计算。目前只有赝标量 $B^+(u\bar{b})$，$B_s^0(s\bar{b})$，$B_c^+(cb)$ 和矢量 $\Upsilon(b\bar{b})$ 被实验探测到了。

解：

根据正文内容，(5.46) 为 $3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$。而 (5.46) 对应的质量公式为：

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 - 477\frac{m_u^2}{m_1 m_2} \quad \text{对于赝标介子}, \\ M &= m_1 + m_2 + 159\frac{m_u^2}{m_1 m_2} \quad \text{对于矢量介子}. \end{aligned} \tag{14}$$

其中夸克质量取值为：$m_u = 308\text{MeV}$，$m_s = 483\text{MeV}$，$m_c = 1250\text{MeV}$，$m_b = 4500\text{MeV}$。实验值来自粒子数据手册。

(a) 粲介子

i. 赝标介子

A. $\eta_c(c\bar{c})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 1250 - 477\left(\frac{308}{1250}\right)^2 \\ &= 2500 - 477 \times 0.06073 \\ &= 2500 - 28.97 \\ &= 2471\text{MeV}, \end{aligned} \tag{15}$$

实验值：2980MeV。

B. $D^0(c\bar{u})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 308 - 477\frac{308}{1250} \\ &= 1558 - 477 \times 0.2464 \\ &= 1558 - 117.5 \\ &= 1440\text{MeV}, \end{aligned} \tag{16}$$

实验值：1865MeV。

C. $D_s^+(c\bar{s})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 483 - 477\frac{(308)^2}{(1250)(483)} \\ &= 1733 - 477 \times 0.1571 \\ &= 1733 - 74.94 \\ &= 1658\text{MeV}, \end{aligned} \tag{17}$$

实验值：1968MeV。

ii. 矢量介子

A. $\psi(c\bar{c})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 1250 + 159\left(\frac{308}{1250}\right)^2 \\ &= 2500 + 159 \times 0.06073 \\ &= 2500 + 9.656 \\ &= 2510\text{MeV}, \end{aligned} \tag{18}$$

实验值：3097MeV。

B. $D^{*0}(c\bar{u})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 308 + 159\frac{308}{1250} \\ &= 1558 + 159 \times 0.2464 \\ &= 1558 + 39.18 \\ &= 1597\text{MeV}, \end{aligned} \tag{19}$$

实验值：2007MeV。

C. $D^{*+}(c\bar{s})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 483 + 159\frac{(308)^2}{(1250)(483)} \\ &= 1733 + 159 \times 0.1571 \\ &= 1733 + 24.98 \\ &= 1758\text{MeV}, \end{aligned} \tag{20}$$

实验值：2112MeV。

(b) 底介子

i. 赝标介子

A. $B^{+}(u\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 308 + 4500 - 477\frac{308}{4500} \\ &= 4808 - 477 \times 0.06844 \\ &= 4808 - 32.65 \\ &= 4775\text{MeV}, \end{aligned} \tag{21}$$

实验值：5279MeV。

B. $B_s^0(s\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 483 + 4500 - 477\frac{(308)^2}{(483)(4500)} \\ &= 4983 - 477 \times 0.04364 \\ &= 4983 - 20.82 \\ &= 4960\text{MeV}, \end{aligned} \tag{22}$$

实验值：5368MeV。

C. $B_c^+(c\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 4500 - 477\frac{(308)^2}{(1250)(4500)} \\ &= 5750 - 477 \times 0.01686 \\ &= 5750 - 8.04 \\ &= 5742\text{MeV}, \end{aligned} \tag{23}$$

实验值：6286MeV。

D. $\eta_b(b\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 4500 + 4500 - 477\left(\frac{308}{4500}\right)^2 \\ &= 9000 - 477 \times 0.004684 \\ &= 9000 - 2.234 \\ &= 8998\text{MeV}, \end{aligned} \tag{24}$$

实验值: 未精确测量，约 9390MeV。

ii. 矢量介子

A. $B^*(u\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 308 + 4500 + 159\frac{308}{4500} \\ &= 4808 + 159 \times 0.06844 \\ &= 4808 + 10.88 \\ &= 4809\text{MeV}, \end{aligned} \tag{25}$$

实验值: 未被探测到。

B. $B_s^*(s\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 483 + 4500 + 159\frac{(308)^2}{(483)(4500)} \\ &= 4983 + 159 \times 0.04364 \\ &= 4983 + 6.94 \\ &= 4990\text{MeV}, \end{aligned} \tag{26}$$

实验值: 未被探测到。

C. $B_c^*(c\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 1250 + 4500 + 159\frac{(308)^2}{(1250)(4500)} \\ &= 5750 + 159 \times 0.01686 \\ &= 5750 + 2.68 \\ &= 5753\text{MeV}, \end{aligned} \tag{27}$$

实验值: 未被探测到。

D. $Y(b\bar{b})$:

$$\begin{aligned} M &= 4500 + 4500 + 159\left(\frac{308}{4500}\right)^2 \\ &= 9000 + 159 \times 0.004684 \\ &= 9000 + 0.745 \\ &= 9001\text{MeV}, \end{aligned} \tag{28}$$

实验值: 9460MeV。

计算表明，使用夸克裸质量得到的理论值与实验值存在差异，尤其是对于重夸克系统，这可能是因为有效质量大于裸质量。

5.15 类似于方程 (5.60)，构造介子的（单态色波函数。

解：

根据正文内容，(5.60) 为

$$\psi(\text{颜色}) = \frac{\mathrm{rgb}-\mathrm{rbg}+\mathrm{gbr}-\mathrm{grb}+\mathrm{brg}-\mathrm{bgr}}{\sqrt{6}}. \tag{29}$$

这是一个完全反对称的波函数，用于三个夸克的颜色单态。介子由夸克（q）和反夸克（$\bar{\mathrm{q}}$）组成。颜色单态对应于 $3\otimes 3^*$ 的分解中的单态表示。单态波函数应具有形式：

$$\psi_{\text{单态}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i |i\rangle\,|\bar{i}\rangle\,, \tag{30}$$

其中 i 为颜色基态 $\mathrm{r,b,g}$，N 是归一化常数。考虑颜色基态 $\mathrm{r,b,g}$ 和对应的反颜色基态 $\bar{\mathrm{r}},\bar{\mathrm{b}},\bar{\mathrm{g}}$。单态波函数是这些基态的线性组合：

$$\psi_{\text{单态}} = A\left(\mathrm{r}\bar{\mathrm{r}}+\mathrm{b}\bar{\mathrm{b}}+\mathrm{g}\bar{\mathrm{g}}\right), \tag{31}$$

其中 A 是归一化常数。假设颜色状态是正交的，即：

$$\langle\mathrm{r}|\mathrm{r}\rangle = 1,\quad \langle\bar{\mathrm{r}}|\bar{\mathrm{r}}\rangle = 1,\quad \langle\mathrm{r}|\mathrm{b}\rangle = 0,\quad \text{等}. \tag{32}$$

因此：

$$\begin{aligned}\langle\psi_{\text{单态}}|\psi_{\text{单态}}\rangle &= |A|^2\left(\langle\mathrm{r}\bar{\mathrm{r}}|\mathrm{r}\bar{\mathrm{r}}\rangle+\langle\mathrm{b}\bar{\mathrm{b}}|\mathrm{b}\bar{\mathrm{b}}\rangle+\langle\mathrm{g}\bar{\mathrm{g}}|\mathrm{g}\bar{\mathrm{g}}\rangle\right)\\ &= |A|^2(1+1+1)\\ &= 3|A|^2.\end{aligned} \tag{33}$$

要求归一化：

$$\langle\psi_{\text{单态}}|\psi_{\text{单态}}\rangle = 1 \implies 3|A|^2 = 1 \implies |A| = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{34}$$

因此，归一化波函数为：

$$\psi_{\text{单态}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{r}\bar{\mathrm{r}}+\mathrm{b}\bar{\mathrm{b}}+\mathrm{g}\bar{\mathrm{g}}\right). \tag{35}$$

在 $SU(3)$ 颜色变换下，该波函数对应于迹操作 $\sum_i |i\rangle\,|\bar{i}\rangle$，它是 $SU(3)$ 不变的，因此是颜色单态。综上所述，介子的单态色波函数为：

$$\psi(\text{颜色}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{r}\bar{\mathrm{r}}+\mathrm{b}\bar{\mathrm{b}}+\mathrm{g}\bar{\mathrm{g}}\right). \tag{36}$$

5.18 构造一个全反对称的自旋/味道重子八重态。（在此构形中我们不需要颜色去反对称波函数。然而，一个反对称的十重态无法构造。对称波函数。然而，一个反对称的十重态无法构造。见 Halzen and Martin，参考文献 [19]，习题 2.18。）

解：

根据问题要求，我们需要构造一个全反对称的自旋/味道重子八重态波函数。重子由三个夸克组成，每个夸克有自旋和味道自由度。由于夸克是 Fermion，总波函数必须是全反对称的。这里我们仅考虑自旋和味道部分，不需要颜色波函数。自旋函数 ψ_{ij} 定义为夸克 i 和 j 之间的反对称自旋单态，参考 (5.51)、(5.52) 和 (5.53)：

$$\psi_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_i\,|\downarrow\rangle_j - |\downarrow\rangle_i\,|\uparrow\rangle_j),\quad \psi_{ij} = -\psi_{ji}. \tag{37}$$

味道函数 ϕ_{ij} 定义为夸克 i 和 j 之间的反对称味道八重态函数：

$$\phi_{ij} = -\phi_{ji}. \tag{38}$$

全反对称的自旋/味道波函数可构造为：

$$\psi = A\left(\psi_{12}(\phi_{31}+\phi_{32})+\psi_{23}(\phi_{12}+\phi_{13})+\psi_{31}(\phi_{23}+\phi_{21})\right), \tag{39}$$

其中 A 是归一化常数。该波函数在任意两个夸克交换下改变符号，满足全反对称性。此构造适用于八重态，而十重态无法构造全反对称波函数。

5.19 (a) 推导表 5.5 第二列的表达式。

(b) 从这些结果出发利用书中所给的夸克质量计算表 5.5 的第三列。

解：

表 5.5 为：（数值由核磁子 $e\hbar/2m_pc$ 多重态给出。来源：《粒子物理手册》(2006)。）

表 1: 八重态重子的磁偶极矩

重子	磁矩	预言	实验
p	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_{\rm u}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{\rm d}$	2.79	2.793
n	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_{\rm d}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{\rm u}$	-1.86	-1.913
Λ	$\mu_{\rm s}$	-0.58	-0.613
Σ^+	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_{\rm u}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{\rm s}$	2.68	2.458
Σ^0	$\left(\frac{2}{3}\right)(\mu_{\rm u}+\mu_{\rm d})-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{\rm s}$	0.82	?
Σ^-	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_{\rm d}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{\rm s}$	-1.05	-1.160
Ξ^0	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_{\rm s}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{\rm u}$	-1.40	-1.250
Ξ^-	$\left(\frac{4}{3}\right)\mu_{\rm s}-\left(\frac{1}{3}\right)\mu_{\rm d}$	-0.47	-0.651

(a) 利用 (5.62)，即

$$\psi(\text{重子八重态}) = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\psi_{12}(\text{自旋})\psi_{12}(\text{味道})+\psi_{23}(\text{自旋})\psi_{23}(\text{味道})+\psi_{13}(\text{自旋})\psi_{13}(\text{味道})\right), \tag{40}$$

计算如下自旋/味道波函数，其中使用了 (5.51)，(5.52) 和 (5.53)。

- $$\begin{aligned}|p:\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{udu}-\mathrm{duu})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(\mathrm{uud}-\mathrm{udu})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{uud}-\mathrm{duu})\right]\\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}[\mathrm{udu}(2\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)+\mathrm{perms}]\\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}}[2\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)\mathrm{u}(\uparrow)-\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{u}(\uparrow)-\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{u}(\downarrow)+\mathrm{perms}].\end{aligned} \tag{41}$$

- $$
\begin{aligned}
|n:\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{udd}-\mathrm{dud})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(\mathrm{dud}-\mathrm{ddu})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{udd}-\mathrm{ddu})\right]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[\mathrm{udd}(-2\downarrow\uparrow\uparrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\uparrow\uparrow\downarrow)+\mathrm{perms}]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[-2\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{d}(\uparrow)+\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)+\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)+\mathrm{perms}].
\end{aligned}
\tag{42}
$$

- $$
\begin{aligned}
|\Sigma^+:\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{usu}-\mathrm{suu})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(\mathrm{uus}-\mathrm{usu})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{uus}-\mathrm{suu})\right]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[\mathrm{usu}(2\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)+\mathrm{perms}]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[2\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)\mathrm{u}(\uparrow)-\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{u}(\uparrow)-\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{u}(\downarrow)+\mathrm{perms}].
\end{aligned}
\tag{43}
$$

- $$
\begin{aligned}
|\Sigma^-:\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{dsd}-\mathrm{sdd})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(\mathrm{dds}-\mathrm{dsd})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{dds}-\mathrm{sdd})\right]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[\mathrm{dsd}(2\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)+\mathrm{perms}]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[2\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)-\mathrm{d}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{d}(\uparrow)-\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)+\mathrm{perms}].
\end{aligned}
\tag{44}
$$

- $$
\begin{aligned}
|\Xi^0:\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{uss}-\mathrm{sus})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(\mathrm{sus}-\mathrm{ssu})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{uss}-\mathrm{ssu})\right]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[\mathrm{uss}(-2\downarrow\uparrow\uparrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\uparrow\uparrow\downarrow)+\mathrm{perms}]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[-2\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)+\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)+\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)+\mathrm{perms}].
\end{aligned}
\tag{45}
$$

- $$
\begin{aligned}
|\Xi^-:\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{dss}-\mathrm{sds})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(\mathrm{sds}-\mathrm{ssd})+\frac{1}{2}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{dss}-\mathrm{ssd})\right]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[\mathrm{dss}(-2\downarrow\uparrow\uparrow+\uparrow\downarrow\uparrow+\uparrow\uparrow\downarrow)+\mathrm{perms}]\\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}[-2\mathrm{d}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)+\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)+\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)+\mathrm{perms}].
\end{aligned}
\tag{46}
$$

- $$
\begin{aligned}
|\Sigma^0:\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{3}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{usd}-\mathrm{sud}+\mathrm{dsu}-\mathrm{sdu})+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(\mathrm{dus}-\mathrm{dsu}+\mathrm{uds}-\mathrm{usd})\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(\mathrm{uds}-\mathrm{sdu}+\mathrm{dus}-\mathrm{sud})\right]\\
&= \frac{1}{6}[\mathrm{usd}(2\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow-\uparrow\uparrow\downarrow)+(6\ \mathrm{perms})]\\
&= \frac{1}{6}[2\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)-\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{d}(\uparrow)-\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)+(6\ \mathrm{perms})].
\end{aligned}
\tag{47}
$$

- $$\begin{aligned}
|\Lambda:\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{3}\Bigg[&\frac{1}{2\sqrt{6}}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(2\mathrm{uds}-2\mathrm{dus}+\mathrm{usd}-\mathrm{sud}-\mathrm{dsu}+\mathrm{sdu})\\
&+\frac{1}{2\sqrt{6}}(\uparrow\uparrow\downarrow-\uparrow\downarrow\uparrow)(2\mathrm{sud}-2\mathrm{sdu}+\mathrm{dus}-\mathrm{dsu}-\mathrm{uds}+\mathrm{usd})\\
&+\frac{1}{2\sqrt{6}}(\uparrow\uparrow\downarrow-\downarrow\uparrow\uparrow)(2\mathrm{usd}-2\mathrm{dsu}+\mathrm{uds}-\mathrm{sdu}-\mathrm{dus}+\mathrm{sud})\Bigg]\\
=&\frac{1}{6\sqrt{3}}[3\mathrm{uds}(\uparrow\downarrow\uparrow-\downarrow\uparrow\uparrow)+(6\text{ perms})]\\
=&\frac{1}{2\sqrt{3}}[\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)-\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)+(6\text{ perms})].
\end{aligned}\tag{48}$$

  其中“perm”代表三种排列方式（除列出的一种外还有另外两种），即让奇异夸克分别处于第一、第二或第三的位置。而 Σ^0 和 Λ 粒子的情况稍显复杂，因其涉及全部三个夸克，共存在六种不同的排列方式。

现在使用 (5.67)，即重子 $\boldsymbol{B}$ 的此磁矩为

$$\mu_B=\langle B\uparrow|\left(\mu_1+\mu_2+\mu_3\right)_z|B\uparrow\rangle=\frac{2}{\hbar}\sum_{i=1}^{3}\langle B\uparrow|\left(\mu_i S_{iz}\right)|B\uparrow\rangle\,.\tag{49}$$

计算如下结果。定义

$$|a\rangle\equiv\frac{2}{3\sqrt{2}}\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)\mathrm{u}(\uparrow),\tag{50}$$

有

$$\begin{aligned}
\sum(\mu_i S_{iz})\,|a\rangle&=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}-\mu_{\mathrm{d}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}\right)|a\rangle\\
&=\frac{\hbar}{2}\frac{2}{3\sqrt{2}}(2\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{d}})\,|a\rangle\,,
\end{aligned}\tag{51}$$

和

$$\mu_a=\frac{2}{\hbar}\langle a|\sum\mu_i S_{iz}|a\rangle=\frac{2}{9}(2\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{d}}).\tag{52}$$

定义

$$|b\rangle\equiv-\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{u}(\uparrow),\tag{53}$$

有

$$\begin{aligned}
\sum(\mu_i S_{iz})\,|b\rangle&=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(-\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{d}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}\right)|b\rangle\\
&=-\frac{\hbar}{2}\frac{1}{3\sqrt{2}}\mu_{\mathrm{d}}\,|b\rangle\,,
\end{aligned}\tag{54}$$

和

$$\mu_b=\frac{2}{\hbar}\langle b|\sum\mu_i S_{iz}|b\rangle=\frac{1}{18}\mu_{\mathrm{d}}.\tag{55}$$

定义

$$|c\rangle\equiv-\frac{1}{3\sqrt{2}}\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{u}(\downarrow),\tag{56}$$

有

$$\begin{aligned}
\sum(\mu_i S_{iz})\,|c\rangle&=-\frac{1}{3\sqrt{2}}\left(\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{d}}\frac{\hbar}{2}-\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}\right)|c\rangle\\
&=-\frac{\hbar}{2}\frac{1}{3\sqrt{2}}\mu_{\mathrm{d}}\,|c\rangle\,,
\end{aligned}\tag{57}$$

和

$$\mu_c=\frac{2}{\hbar}\langle c|\sum\mu_i S_{iz}|c\rangle=\frac{1}{18}\mu_{\mathrm{d}}.\tag{58}$$

于是可以得到总的磁矩 μ

$$\begin{aligned}\mu &= 3(\mu_a+\mu_b+\mu_c) = 3\left[\frac{2}{9}(2\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{d}})+\frac{2}{18}\mu_{\mathrm{d}}\right]\\ &= \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{d}}).\end{aligned} \tag{59}$$

对比波函数可知，对于 n、Σ^+、Σ^-、Ξ^0 和 Ξ^- 这些粒子，无需进行新的计算（其中部分粒子的波函数整体存在负号，但平方后负号会消除；有时列出的置换方式有所不同，但这不影响最终结果）。

$$\begin{aligned}
\mathrm{n}:&\quad (\mathrm{p}\text{不变，仅交换}\mathrm{u}\leftrightarrow\mathrm{d}): &\quad \mu &= \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{u}}),\\
\Sigma^+:&\quad (\mathrm{p}\text{不变，仅交换}\mathrm{d}\to\mathrm{s}): &\quad \mu &= \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{s}}),\\
\Sigma^-:&\quad (\mathrm{n}\text{不变，仅交换}\mathrm{u}\to\mathrm{s}): &\quad \mu &= \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{d}}-\mu_{\mathrm{s}}),\\
\Xi^0:&\quad (\mathrm{n}\text{不变，仅交换}\mathrm{d}\to\mathrm{s}): &\quad \mu &= \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{s}}-\mu_{\mathrm{u}}),\\
\Xi^-:&\quad (\Xi^0\text{不变，仅交换}\mathrm{u}\to\mathrm{d}): &\quad \mu &= \frac{1}{3}(4\mu_{\mathrm{s}}-\mu_{\mathrm{d}}).
\end{aligned} \tag{60}$$

现在计算 Σ^0。定义

$$|a\rangle \equiv \frac{1}{3}\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow), \tag{61}$$

有

$$\begin{aligned}\sum(\mu_i \mathrm{S}_{iz})\,|a\rangle &= \frac{1}{3}\left(\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}-\mu_{\mathrm{s}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{d}}\frac{\hbar}{2}\right)|a\rangle\\ &= \frac{\hbar}{2}\frac{1}{3}(\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{d}})\,|a\rangle\,,\end{aligned} \tag{62}$$

和

$$\mu_a = \frac{2}{\hbar}\langle a|\sum(\mu_i S_{iz})|a\rangle = \frac{1}{9}(\mu_{\mathrm{u}}-\mu_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{d}}). \tag{63}$$

定义

$$|b\rangle \equiv -\frac{1}{6}\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{d}(\uparrow), \tag{64}$$

有

$$\begin{aligned}\sum(\mu_i S_{iz})\,|b\rangle &= -\frac{1}{6}\left(-\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{s}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{d}}\frac{\hbar}{2}\right)|b\rangle\\ &= -\frac{\hbar}{2}\frac{1}{6}(-\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{d}})\,|b\rangle\,,\end{aligned} \tag{65}$$

和

$$\mu_b = \frac{2}{\hbar}\langle b|\sum(\mu_i S_{iz})|b\rangle = \frac{1}{36}(-\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{s}}+\mu_{\mathrm{d}}). \tag{66}$$

定义

$$|c\rangle \equiv -\frac{1}{6}\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow), \tag{67}$$

有

$$\begin{aligned}\sum(\mu_i S_{iz})\,|c\rangle &= -\frac{1}{6}\left(\mu_{\mathrm{u}}\frac{\hbar}{2}+\mu_{\mathrm{s}}\frac{\hbar}{2}-\mu_{\mathrm{d}}\frac{\hbar}{2}\right)|c\rangle\\ &= -\frac{\hbar}{2}\frac{1}{6}(\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{s}}-\mu_{\mathrm{d}})\,|c\rangle\,,\end{aligned} \tag{68}$$

和

$$\mu_c = \frac{2}{\hbar}\langle c|\sum(\mu_i S_{iz})|c\rangle = \frac{1}{36}(\mu_{\mathrm{u}}+\mu_{\mathrm{s}}-\mu_{\mathrm{d}}). \tag{69}$$

于是可以得到总的磁矩 μ

$$\begin{aligned}\mu &= 6(\mu_a+\mu_b+\mu_c)\\ &= 6\left[\frac{1}{9}(\mu_\mathrm{u}-\mu_\mathrm{s}+\mu_\mathrm{d})+\frac{1}{36}(-\mu_\mathrm{u}+\mu_\mathrm{s}+\mu_\mathrm{d})+\frac{1}{36}(\mu_\mathrm{u}+\mu_\mathrm{s}-\mu_\mathrm{d})\right]\\ &= \frac{1}{3}(2\mu_\mathrm{u}+2\mu_\mathrm{d}-\mu_\mathrm{s}).\end{aligned} \tag{70}$$

最后计算 Λ。定义

$$|a\rangle \equiv \frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{u}(\uparrow)\mathrm{d}(\downarrow)\mathrm{s}(\uparrow), \tag{71}$$

有

$$\begin{aligned}\sum(\mu_i S_{iz})\,|a\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\mu_\mathrm{u}\frac{\hbar}{2}-\mu_\mathrm{d}\frac{\hbar}{2}+\mu_\mathrm{s}\frac{\hbar}{2}\right)|a\rangle\\ &= \frac{\hbar}{2\sqrt{3}}(\mu_\mathrm{u}-\mu_\mathrm{s}+\mu_\mathrm{s})\,|a\rangle\,,\end{aligned} \tag{72}$$

和

$$\mu_a = \frac{2}{\hbar}\,\langle a|\sum(\mu_i S_{iz})|a\rangle = \frac{1}{12}(\mu_\mathrm{u}-\mu_\mathrm{d}+\mu_\mathrm{s}). \tag{73}$$

定义

$$|b\rangle \equiv -\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{u}(\downarrow)\mathrm{d}(\uparrow)\mathrm{s}(\uparrow), \tag{74}$$

有

$$\begin{aligned}\sum(\mu_i S_{iz})\,|b\rangle &= -\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\mu_\mathrm{u}\frac{\hbar}{2}+\mu_\mathrm{d}\frac{\hbar}{2}+\mu_\mathrm{s}\frac{\hbar}{2}\right)|b\rangle\\ &= -\frac{\hbar}{2}\frac{1}{2\sqrt{3}}(-\mu_\mathrm{u}+\mu_\mathrm{d}+\mu_\mathrm{s})\,|b\rangle\,,\end{aligned} \tag{75}$$

和

$$\mu_b = \frac{2}{\hbar}\,\langle b|\sum(\mu_i S_{iz})|b\rangle = \frac{1}{12}(-\mu_\mathrm{u}+\mu_\mathrm{d}+\mu_\mathrm{s}). \tag{76}$$

于是可以得到总的磁矩 μ

$$\begin{aligned}\mu &= 6(\mu_a+\mu_b)\\ &= 6\left[\frac{1}{12}(\mu_\mathrm{u}-\mu_\mathrm{d}+\mu_\mathrm{s})+\frac{1}{12}(-\mu_\mathrm{u}+\mu_\mathrm{d}+\mu_\mathrm{s})\right]\\ &= \mu_\mathrm{s}.\end{aligned} \tag{77}$$

(b) 核磁子为 $\mu_\mathrm{N}=\dfrac{e\hbar}{2m_\mathrm{p}c}$。夸克的磁矩以核磁子为单位表示为：

$$\begin{aligned}\mu_\mathrm{u} &= \frac{2}{3}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{u}},\\ \mu_\mathrm{d} &= -\frac{1}{3}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{d}},\\ \mu_\mathrm{s} &= -\frac{1}{3}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{s}}.\end{aligned} \tag{78}$$

利用 (5.66)

$$\begin{aligned}\mu_\mathrm{u} &= \frac{2}{3}\frac{e\hbar}{2m_\mathrm{u}c},\\ \mu_\mathrm{d} &= -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_\mathrm{d}c},\\ \mu_\mathrm{s} &= -\frac{1}{3}\frac{e\hbar}{2m_\mathrm{s}c}.\end{aligned} \tag{79}$$

以及已知的 $m_\mathrm{u}=m_\mathrm{d}=336\mathrm{MeV}$，$m_\mathrm{s}=540\mathrm{MeV}$，和 $m_\mathrm{p}=938\mathrm{MeV}$。可以计算出入下结果

- p：
$$\frac{1}{3}\left[4\left(\frac{2}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}-\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}\right]=\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}=\frac{938}{336}=2.79. \tag{80}$$
- n：
$$\frac{1}{3}\left[4\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}-\left(\frac{2}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}\right]=-\left(\frac{2}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}=-\left(\frac{2}{3}\right)\frac{938}{336}=-1.86. \tag{81}$$
- Λ：
$$-\left(\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{s}}}=-\left(\frac{1}{3}\right)\frac{938}{538}=-0.58. \tag{82}$$
- Σ^+：
$$\frac{1}{3}\left[4\left(\frac{2}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}-\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{s}}}\right]=\frac{938}{9}\left(\frac{8}{336}+\frac{1}{538}\right)=2.68. \tag{83}$$
- Σ^0：
$$\frac{1}{3}\left\{2\left[\left(\frac{2}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}+\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}\right]-\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{s}}}\right\}=\frac{m_{\mathrm{p}}}{9}\left(\frac{2}{m_{\mathrm{u}}}+\frac{1}{m_{\mathrm{s}}}\right)=\frac{938}{9}\left(\frac{2}{336}+\frac{1}{538}\right)=0.81. \tag{84}$$
- Σ^-：
$$\frac{1}{3}\left[4\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}-\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{s}}}\right]=\frac{938}{9}\left(-\frac{4}{336}+\frac{1}{538}\right)=-1.05. \tag{85}$$
- Ξ^0：
$$\frac{1}{3}\left[4\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{s}}}-\left(\frac{2}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}\right]=\frac{938}{9}\left(-\frac{4}{538}-\frac{2}{336}\right)=-1.40. \tag{86}$$
- Ξ^-：
$$\frac{1}{3}\left[4\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{s}}}-\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{u}}}\right]=\frac{938}{9}\left(-\frac{4}{538}+\frac{1}{336}\right)=-0.46. \tag{87}$$