粒子物理基础作业

Clark

4.5 (a) 证明所有 $n \times n$ 幺正矩阵的集合构成群。（为证明封闭性，例如，你必须证明两个幺正矩阵的乘积本身是幺正的。）

(b) 证明所有行列式为 1 的 $n \times n$ 幺正矩阵集合构成群。

(c) 证明 $O(n)$ 是一个群。

(d) 证明 $SO(n)$ 是一个群。

解：

(a) 设 $U(n)$ 表示所有 $n \times n$ 幺正矩阵的集合。

- **封闭性**：设 $A, B \in U(n)$，即 $A^\dagger A = I$，$B^\dagger B = I$。则 $(AB)^\dagger(AB) = B^\dagger A^\dagger AB = B^\dagger IB = B^\dagger B = I$。故 AB 是幺正矩阵，即 $AB \in U(n)$。
- **结合律**：矩阵乘法满足结合律，即对任意 $A, B, C \in U(n)$，有 $(AB)C = A(BC)$。
- **单位元**：单位矩阵 I 满足 $I^\dagger I = I$，故 $I \in U(n)$，且对任意 $A \in U(n)$，有 $AI = IA = A$。
- **逆元**：对任意 $A \in U(n)$，由 $A^\dagger A = I$ 知 $A^{-1} = A^\dagger$。且 $(A^{-1})^\dagger A^{-1} = (A^\dagger)^\dagger A^\dagger = AA^\dagger = I$。故 $A^{-1} \in U(n)$。

因此，$U(n)$ 构成群。

(b) 设 $SU(n)$ 表示所有行列式为 1（$\det SU(n) = 1$）的 $n \times n$ 幺正矩阵的集合。

- **封闭性**：设 $A, B \in SU(n)$，则 $\det A = 1$，$\det B = 1$。由 (a) 知 AB 是幺正矩阵，且 $\det AB = \det A \det B = 1 \times 1 = 1$。故 $AB \in SU(n)$。
- **结合律**：矩阵乘法满足结合律，即对任意 $A, B, C \in SU(n)$，有 $(AB)C = A(BC)$。
- **单位元**：单位矩阵 I 满足 $\det I = 1$，故 $I \in SU(n)$。
- **逆元**：对任意 $A \in SU(n)$，有 $\det A = 1$，且 $A^{-1} = A^\dagger$。则 $\det A^{-1} = \det A^\dagger = \overline{\det A} = 1$，且由 (a) 知 A^{-1} 是幺正矩阵，故 $A^{-1} \in SU(n)$。

因此，$SU(n)$ 构成群。

(c) 设 $O(n)$ 表示所有 $n \times n$ 正交矩阵的集合（满足 $A^T A = I$）。

- **封闭性**：设 $A, B \in O(n)$，即 $A^T A = I$，$B^T B = I$。则 $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T IB = B^T B = I$。故 $AB \in O(n)$。
- **结合律**：矩阵乘法满足结合律，即对任意 $A, B, C \in O(n)$，有 $(AB)C = A(BC)$。
- **单位元**：单位矩阵 I 满足 $I^T I = I$，故 $I \in O(n)$。
- **逆元**：对任意 $A \in O(n)$，由 $A^T A = I$ 知 $A^{-1} = A^T$。且 $(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^T A^T = AA^T = I$。故 $A^{-1} \in O(n)$。

因此，$O(n)$ 构成群。

(d) 设 $SO(n)$ 表示所有行列式为 1（$\det SO(n)=1$）的 $n\times n$ 正交矩阵的集合。

- **封闭性**：设 $A,B\in SO(n)$，则 $A^TA=I$，$\det A=1$，$B^TB=I$，$\det B=1$。由 (c) 知 AB 是正交矩阵，且 $\det AB=\det A\det B=1\times 1=1$。故 $AB\in SO(n)$。
- **结合律**：矩阵乘法满足结合律，即对任意 $A,B,C\in SO(n)$，有 $(AB)C=A(BC)$。
- **单位元**：单位矩阵 I 满足 $I^TI=I$ 且 $\det I=1$，故 $I\in SO(n)$。
- **逆元**：对任意 $A\in SO(n)$，有 $\det A=1$，且 $A^{-1}=A^T$。则 $\det A^{-1}=\det A^T=\det A=1$，且由 (c) 知 A^{-1} 是正交矩阵，故 $A^{-1}\in SO(n)$。

因此，$SO(n)$ 构成群。

4.10 证明“原始”Beta 衰变反应 $\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}$ 会破坏角动量守恒（所有三个粒子都具有自旋 1/2)。如果你是 Pauli，提出反应实际应是 $\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}+\bar{\nu}_\mathrm{e}$，你会给中微子安置什么自旋？

解：

根据角动量守恒原理，分析“原始”Beta 衰变 $\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}$ 的角动量问题。中子、质子和电子均具有自旋 $\frac{1}{2}$。中子自旋为 $\frac{1}{2}$，衰变后质子和电子的自旋组合可能的总自旋为 0 或 1（对应总角动量量子数 $J=0$ 或 $J=1$)，但中子的角动量量子数为 $J=\frac{1}{2}$，无法与 $J=0$ 或 $J=1$ 匹配，因此该衰变违反角动量守恒。

Pauli 提出实际反应为 $\mathrm{n}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}+\bar{\nu}_\mathrm{e}$，引入中微子（$\bar{\nu}_\mathrm{e}$）以解决角动量守恒问题。中微子的自旋必须满足衰变后系统的总角动量与中子角动量守恒。中子自旋为 $\frac{1}{2}$，质子、电子和中微子的自旋组合必须能形成总角动量 $J=\frac{1}{2}$。如果中微子自旋为 $\frac{1}{2}$，则三个自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子（p、e、$\bar{\nu}_\mathrm{e}$）的总自旋可能为 $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$。当总自旋为 $\frac{1}{2}$ 且轨道角动量为 0 时，总角动量 $J=\frac{1}{2}$，与中子角动量匹配，满足角动量守恒。如果中微子自旋不为 $\frac{1}{2}$（如 0 或 1)，则总自旋无法可靠地形成 $J=\frac{1}{2}$，导致角动量不守恒。综上所述，给中微子安置自旋 $\frac{1}{2}$ 是最为合理的选择。

4.30 下列反应可能的总同位旋是多少：

(a) $\mathrm{K}^-+\mathrm{p}\to\Sigma^0+\pi^0$；

(b) $\mathrm{K}^-+\mathrm{p}\to\Sigma^++\pi^-$；

(c) $\bar{\mathrm{K}}^0+\mathrm{p}\to\Sigma^++\pi^0$；

(d) $\bar{\mathrm{K}}^0+\mathrm{p}\to\Sigma^0+\pi^+$；

找出截面的比例，假定一个或另一个同位旋道主导。

解：

利用 CG 系数，可以计算出如下结果：

$$
\begin{cases}
\mathrm{K}^-+\mathrm{p}: & |\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle\,|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,|1\ 0\rangle-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,|1\ 0\rangle \\
\bar{\mathrm{K}}^0+\mathrm{p}: & |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle\,|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle=|1\ 1\rangle,
\end{cases}
\tag{1}
$$

$$\begin{cases} \Sigma^0+\pi^0: & |1\ 0\rangle\,|1\ 0\rangle=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,|2\ 0\rangle-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,|0\ 0\rangle \\ \Sigma^+ +\pi^-: & |1\ 1\rangle\,|1\ -1\rangle=\sqrt{\dfrac{1}{6}}\,|2\ 0\rangle+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,|1\ 0\rangle+\sqrt{\dfrac{1}{3}}\,|0\ 0\rangle \\ \Sigma^+ +\pi^0: & |1\ 1\rangle\,|1\ 0\rangle=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,|2\ 1\rangle+\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,|1\ 1\rangle \\ \Sigma^0+\pi^+: & |1\ 0\rangle\,|1\ 1\rangle=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,|2\ 1\rangle-\sqrt{\dfrac{1}{2}}\,|1\ 1\rangle . \end{cases} \tag{2}$$

(a) $\mathcal{M}_a=-\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}\mathcal{M}_0$；$I_{\text{tot}}=0$。

(b) $\mathcal{M}_b=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}\mathcal{M}_1+\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{3}}\mathcal{M}_0$；$I_{\text{tot}}=1$或$0$。

(c) $\mathcal{M}_c=\sqrt{\frac{1}{2}}\mathcal{M}_1$；$I_{\text{tot}}=1$。

(d) $\mathcal{M}_d=-\sqrt{\frac{1}{2}}\mathcal{M}_1$；$I_{\text{tot}}=1$。

可以进一步计算出散射截面的比例：

$$\sigma_a:\sigma_b:\sigma_c:\sigma_d=\frac{1}{6}|\mathcal{M}_0|^2:\frac{1}{2}\left|\sqrt{\frac{1}{3}}\mathcal{M}_0+\sqrt{\frac{1}{2}}\mathcal{M}_1\right|^2:\frac{1}{2}|\mathcal{M}_1|^2:\frac{1}{2}|\mathcal{M}_1|^2. \tag{3}$$

于是有：

- 若 $I=0$，有 $\sigma_a:\sigma_b:\sigma_c:\sigma_d=1:1:0:0$。
- 若 $I=1$，有 $\sigma_a:\sigma_b:\sigma_c:\sigma_d=0:1:2:2$。

4.33 (a) α 粒子是两个质子和两个中子的束缚态，即一个 $^4\mathrm{He}$ 核。不存在原子量是 4（$^4\mathrm{H}$）的氢原子的同位素，也没有锂 $^4\mathrm{Li}$。关于 α 粒子的同位旋你得到什么结论？

(b) 反应 $\mathrm{d}+\mathrm{d}\to\alpha+\pi^0$ 从未被看到。解释原因。

(c) 你会期待 $^4\mathrm{Be}$ 存在吗？四个中子的束缚态怎样？

解：

(a) α 粒子是 $^4\mathrm{He}$ 核，由两个质子和两个中子组成。同位旋（isospin）是强相互作用中的守恒量子数，质子和中子被视为同位旋二重态（质子：$I_3=+\frac{1}{2}$，中子：$I_3=-\frac{1}{2}$）。对于 α 粒子，计算总同位旋第三分量 I_3：$I_3=2\times\left(+\frac{1}{2}\right)+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$。而不存在原子量为 4 的氢同位素（$^4\mathrm{H}$，即三个中子和一个质子，$I_3=-1$）或锂同位素（$^4\mathrm{Li}$，即三个质子和一个中子，$I_3=+1$），这表明对于 $A=4$ 的核素，只有 $I_3=0$ 的态是稳定的束缚态。这意味着 α 粒子的总同位旋 $I=0$，因为如果 $I>0$，则应存在其他 I_3 值的同位旋多重态，但实验上未观察到。因此，结论是：**α 粒子的总同位旋 $I=0$**。

(b) 氘核（d）是质子和中子的束缚态，其总同位旋 $I=0$（基态为同位旋单态）。α 粒子的同位旋 $I=0$，π^0 介子的同位旋 $I=1$（$I_3=0$）。考虑反应前后的同位旋守恒：

- 初态（两个氘核）：每个氘核 $I=0$，组合后总同位旋 $I=0$。
- 终态（$\alpha+\pi^0$）：α 有 $I=0$，π^0 有 $I=1$，组合后总同位旋 $I=1$。

由于初态和终态的总同位旋不同（$0 \neq 1$），反应违反同位旋守恒。强相互作用要求同位旋守恒，因此该反应被禁止，所以实验上从未被观察到。至于其他守恒律（如电荷、重子数）可以验证均满足，但同位旋不守恒是主要原因。

(c)
- $^4\mathrm{Be}$：如果指原子量为 4 的铍核，则它由 4 个质子和 0 个中子组成（(pppp)），总 $I_3 = +2$。但 α 粒子的同位旋 $I = 0$，意味着 $A = 4$ 的系统中只有 $I_3 = 0$ 的态是稳定的。$^4\mathrm{Be}$ 的 $I_3 = +2$ 不符合同位旋守恒要求，而且 Coulomb 斥力在 4 个质子间极强，无法形成束缚态。实验上不存在 $^4\mathrm{Be}$。
- 四个中子的束缚态（tetraneutron）：由 4 个中子组成，总 $I_3 = -2$。同样，由于 α 粒子 $I = 0$，$I_3 = -2$ 的态不应存在。中子之间只有强相互作用，但双中子系统已无束缚态（只有虚态），四个中子更无法形成稳定束缚态。实验上未确认四个中子的束缚态存在。

因此，**既不期待 $^4\mathrm{Be}$ 存在，也不期待四个中子的束缚态存在**，原因在于同位旋守恒和核力特性。实际上，$^4\mathrm{H}$、$^4\mathrm{He}$、$^4\mathrm{Li}$ 都不存在。

4.35 (a) 中微子是 P 的本征态吗？如果是，其内禀宇称是多少？

(b) 现在我们知道 τ^+ 和 θ^+ 实际都是 K^+，方程 (4.53) 的衰变中哪个实际上破坏了宇称守恒？

解：

根据文章内容，(4.53) 为：

$$\begin{aligned}
&\theta^+ \to \pi^+ + \pi^0 && (P = (-1)^2 = +1) \\
&\tau^+ \to \left\{ \begin{matrix} \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 \\ \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \end{matrix} \right\} && (P = (-1)^3 = -1).
\end{aligned} \tag{4}$$

(a) 不能。原因在于中微子具有手性（chirality）：在标准模型中，中微子只以左手性（left-handed）形式参与弱相互作用，而反中微子只以右手性（right-handed）形式存在。宇称算符 P 会改变粒子的手性，即将左手中微子变换为右手中微子。然而，右手中微子在标准模型中并不存在（假设中微子质量为零或极小），因此中微子的波函数在宇称变换下不会保持本征态形式。换言之，中微子没有确定的内禀宇称。

(b) θ^+ 的衰变过程破坏了宇称守恒，因为 K^+ 为赝标量介子，其具有 $P = -1$ 的内禀宇称本征值。PS：严格来说，θ^+ 的衰变过程确实从理论上违反了宇称守恒，τ^+ 的衰变过程确实从理论上不违反宇称守恒。但是由于两者其实是同一个粒子（即 K^+ 介子），所以从整体来看，整个弱衰变过程是宇称不守恒的。