

粒子物理基础作业

Clark

9.2 对任意（实数） c_V 和 c_A ，计算迹

$$\text{tr} \left[\gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_1 + m_1 c) \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_2 + m_2 c) \right]. \quad (1)$$

$$[\text{答案: } 4(c_V^2 + c_A^2)[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - p_1 \cdot p_2 g^{\mu\nu}] + 4(c_V^2 - c_A^2)m_1 m_2 g^{\mu\nu} - 8i c_V c_A \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{2\sigma}.]$$

解:

令 $\epsilon \equiv \frac{c_A}{c_V}$ ，并将原式记为 T ，则有:

$$\begin{aligned} T &= c_V^2 \text{tr} \left[\gamma^\mu (1 - \epsilon \gamma^5) (\not{p}_1 + m_1 c) \gamma^\nu (1 - \epsilon \gamma^5) (\not{p}_2 + m_2 c) \right] \\ &= c_V^2 \left\{ \underbrace{\text{tr} [\gamma^\mu (1 - \epsilon \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \epsilon \gamma^5) \not{p}_2]}_{T_1} + m_1 m_2 c^2 \underbrace{\text{tr} [\gamma^\mu (1 - \epsilon \gamma^5) \gamma^\nu (1 - \epsilon \gamma^5)]}_{T_2} \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

首先计算 T_2 部分。利用反费米子对易关系 $\{\gamma^\nu, \gamma^5\} = 0$ ，即 $\gamma^\nu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\nu$ ，可得 $(1 - \epsilon \gamma^5) \gamma^\nu = \gamma^\nu (1 + \epsilon \gamma^5)$ 。

$$\begin{aligned} T_2 &= \text{tr} [\gamma^\mu (1 - \epsilon \gamma^5) \gamma^\nu (1 - \epsilon \gamma^5)] \\ &= \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu (1 + \epsilon \gamma^5) (1 - \epsilon \gamma^5)] \\ &= \text{tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu (1 - \epsilon^2)] \\ &= (1 - \epsilon^2) \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\nu) \\ &= 4g^{\mu\nu} (1 - \epsilon^2). \end{aligned} \quad (3)$$

这里利用了 $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$ 以及含奇数个 γ 矩阵的迹为零。接下来计算 T_1 部分。同样利用对易关系将 $(1 - \epsilon \gamma^5)$ 移至一起:

$$\begin{aligned} T_1 &= \text{tr} [\gamma^\mu (1 - \epsilon \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \epsilon \gamma^5) \not{p}_2] \\ &= \text{tr} [\gamma^\mu \not{p}_1 (1 + \epsilon \gamma^5) \gamma^\nu (1 - \epsilon \gamma^5) \not{p}_2] \\ &= \text{tr} [\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \epsilon \gamma^5)^2 \not{p}_2] \\ &= \text{tr} [\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - 2\epsilon \gamma^5 + \epsilon^2) \not{p}_2] \\ &= (1 + \epsilon^2) \text{tr} (\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2) - 2\epsilon \text{tr} (\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_2). \end{aligned} \quad (4)$$

分别计算上述两项迹: 第一项利用标准迹公式:

$$\begin{aligned} \text{tr} (\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{p}_2) &= p_{1\lambda} p_{2\sigma} \text{tr} (\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma) \\ &= 4p_{1\lambda} p_{2\sigma} (g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\lambda\nu}) \\ &= 4(p_1^\mu p_2^\nu - g^{\mu\nu} p_1 \cdot p_2 + p_1^\nu p_2^\mu), \end{aligned} \quad (5)$$

第二项涉及 γ^5 的迹, 利用恒等式 $\text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) = -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \gamma^5 \not{p}_2) &= \text{tr}(\gamma^\mu \not{p}_1 \gamma^\nu (-\not{p}_2) \gamma^5) \\
 &= -p_{1\lambda} p_{2\sigma} \text{tr}(\gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^5) \\
 &= -p_{1\lambda} p_{2\sigma} (-4i\epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma}) \\
 &= 4ip_{1\lambda} p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} \\
 &= -4ip_{1\lambda} p_{2\sigma} \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

因此, T_1 为:

$$T_1 = 4(1 + \epsilon^2) [p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}] - 8i\epsilon\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{2\sigma}. \tag{7}$$

最后将 T_1 和 T_2 代入 T 的表达式, 并代入 $\epsilon = \frac{c_A}{c_V}$:

$$\begin{aligned}
 T &= c_V^2 \{4(1 + \epsilon^2) [p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}] - 8i\epsilon\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{2\sigma} + 4m_1 m_2 c^2 g^{\mu\nu} (1 - \epsilon^2)\} \\
 &= 4(c_V^2 + c_A^2) [p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (p_1 \cdot p_2) g^{\mu\nu}] + 4(c_V^2 - c_A^2) m_1 m_2 c^2 g^{\mu\nu} - 8ic_V c_A \epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{2\sigma}.
 \end{aligned} \tag{8}$$

9.8 对 $n \rightarrow p + W$ 利用耦合 $\gamma^\mu(1 + \epsilon\gamma^5)$, 而对轻子用 $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$, 计算中子 Beta 衰变的自旋平均振幅。证明在 $\epsilon = -1$ 时你的结果约化过程方程 (9.41)。

$$\begin{aligned}
 \left[\text{答案: } \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 \left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4)(1 - \epsilon^2) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)(1 + \epsilon)^2 \right. \right. \\
 \left. \left. - (1 - \epsilon^2) m_p m_n c^2 (p_2 \cdot p_4) \right] \right].
 \end{aligned}$$

解:

已知

$$\mathcal{M} = \frac{g_w^2}{8(M_W c)^2} [\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 + \epsilon\gamma^5) u(1)] [\bar{u}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(2)]. \tag{9}$$

计算自旋平均振幅平方:

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\frac{g_w^2}{8(M_W c)^2} \right]^2 \underbrace{\text{tr} [\gamma^\mu (1 + \epsilon\gamma^5) (\not{p}_1 + m_1 c) \gamma^\nu (1 + \epsilon\gamma^5) (\not{p}_3 + m_3 c)]}_{A^{\mu\nu}} \\
 &\quad \times \underbrace{\text{tr} [\gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_2 - m_2 c) \gamma_\nu (1 - \gamma^5) (\not{p}_4 + m_4 c)]}_{B_{\mu\nu}}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

利用习题 9.2 的结果, 对于强子张量 $A^{\mu\nu}$, 取 $c_V = 1, c_A = -\epsilon$ (因为 $1 + \epsilon\gamma^5 = 1 - (-\epsilon)\gamma^5$), $p_2 \rightarrow p_3$, $m_1 = m_n, m_3 = m_p$:

$$A^{\mu\nu} = 4(1 + \epsilon^2) [p_1^\mu p_3^\nu + p_1^\nu p_3^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3)] + 8i\epsilon\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p_{1\lambda} p_{3\sigma} + 4m_n m_p c^2 g^{\mu\nu} (1 - \epsilon^2). \tag{11}$$

对于轻子张量 $B_{\mu\nu}$, 取 $c_V = 1, c_A = 1$ (对应 $1 - \gamma^5$), $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_4$, 且 $c_V^2 - c_A^2 = 0$ (质量项消失):

$$B_{\mu\nu} = 8[p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_2 \cdot p_4)] - 8i\epsilon_{\mu\nu\phi\tau} p_2^\phi p_4^\tau. \tag{12}$$

计算缩并 $A^{\mu\nu}B_{\mu\nu}$ 。利用对称项与反对称项的乘积特性, 以及 $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_{\mu\nu\phi\tau} = -2(\delta_\phi^\lambda\delta_\tau^\sigma - \delta_\tau^\lambda\delta_\phi^\sigma)$:

$$\begin{aligned}
 A^{\mu\nu}B_{\mu\nu} &= 32(1 + \epsilon^2) [2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + 2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \\
 &\quad + (8i\epsilon)(-8i)\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon_{\mu\nu\phi\tau}p_{1\lambda}p_{3\sigma}p_{2\phi}p_{4\tau} \\
 &\quad + 4m_n m_p c^2(1 - \epsilon^2) \cdot 8(-2p_2 \cdot p_4) \\
 &= 64(1 + \epsilon^2) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \\
 &\quad - 128\epsilon [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) - (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \\
 &\quad - 64(1 - \epsilon^2)m_n m_p c^2(p_2 \cdot p_4).
 \end{aligned} \tag{13}$$

合并同类项:

$$\begin{aligned}
 A^{\mu\nu}B_{\mu\nu} &= 64 \{ [(1 + \epsilon^2) - 2\epsilon] (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + [(1 + \epsilon^2) + 2\epsilon] (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\
 &\quad - (1 - \epsilon^2)m_n m_p c^2(p_2 \cdot p_4) \} \\
 &= 64 \{ (1 - \epsilon)^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (1 + \epsilon)^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (1 - \epsilon^2)m_n m_p c^2(p_2 \cdot p_4) \}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

代回 $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ 的表达式:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 [(1 - \epsilon)^2(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (1 + \epsilon)^2(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (1 - \epsilon^2)m_n m_p c^2(p_2 \cdot p_4)]. \tag{15}$$

当 $\epsilon = -1$ 时, $(1 - \epsilon)^2 = 4$, $(1 + \epsilon)^2 = 0$, $(1 - \epsilon^2) = 0$, 结果简化为:

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = 2 \left(\frac{g_w}{M_W c} \right)^4 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4). \tag{16}$$

8.16 计算 $K^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e$ 和 $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ 。与观测到的分支比进行比较。

解:

由正文知 (9.77) 有

$$\frac{\Gamma(K^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} = \frac{m_e^2(m_\pi^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_\pi^2 - m_\mu^2)^2} = 1.283 \times 10^{-4}. \tag{17}$$

该公式与 π^- 衰变 ((9.77)) 相同, 只需将 m_π 替换为 m_K :

$$\begin{aligned}
 \frac{\Gamma(K^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e)}{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu)} &= \frac{m_e^2(m_K^2 - m_e^2)^2}{m_\mu^2(m_K^2 - m_\mu^2)^2} \\
 &= \left[\frac{(0.510999)\{(493.667)^2 - (0.510999)^2\}}{(105.6584)\{(493.667)^2 - (105.6584)^2\}} \right]^2 \\
 &= 2.57 \times 10^{-5}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

实验比值 (使用 Particle Physics Booklet 中的数据) 为:

$$\frac{1.55 \times 10^{-5}}{0.6344} = 2.44 \times 10^{-5}. \tag{19}$$

理论值与实验值符合得相当好。

9.17 计算如下过程的衰变率:

(a) $\Sigma^0 \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e$,

$$(b) \Sigma^- \rightarrow \Lambda + e + \bar{\nu}_e,$$

$$(c) \Xi^- \rightarrow \Xi^0 + e + \bar{\nu}_e,$$

$$(d) \Lambda \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e,$$

$$(e) \Sigma^- \rightarrow n + e + \bar{\nu}_e,$$

$$(f) \Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e.$$

假设耦合都是 $\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ ——即忽略强作用对轴耦合的修正——但忘掉 Cabibbo 因子。与实验数据进行比较。

解：

根据例 9.3，我们有：

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{30\pi^3\hbar} \left(\frac{g_w}{2M_W c^2} \right)^4 (\Delta mc^2)^5 X^2 \\ &= \frac{1}{30\pi^3(6.58212 \times 10^{-22})} \left(\frac{0.653}{2(80423)} \right)^4 (\Delta mc^2)^5 X^2 \\ &= (1.4123 \times 10^{-4})(\Delta mc^2)^5 X^2. \end{aligned} \quad (20)$$

$$(a) \Sigma^0(uds) \rightarrow \Sigma^+(uus) + e + \bar{\nu}_e:$$

$$\Delta mc^2 = (1192.642) - (1189.37) = 3.372 \text{ MeV}.$$

$$\begin{aligned} d \rightarrow u: \Sigma^0 &= [(us - su)d + (ds - sd)u]/2 \rightarrow [(us - su)u + (us - su)u]/2 \\ &= (us - su)u = \sqrt{2}\Sigma^+, \quad \text{所以 } X = \sqrt{2}\cos\theta_C = 1.377. \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Gamma = (1.4123 \times 10^{-4})(3.372)^5(1.377)^2 = 0.1167/\text{s}.$$

$$(b) \Sigma^-(dds) \rightarrow \Lambda(uds) + e + \bar{\nu}_e:$$

$$\Delta mc^2 = 81.766 \text{ MeV}.$$

$$\begin{aligned} d \rightarrow u: \Sigma^- &= (ds - sd)d/\sqrt{2} \rightarrow (us - su)d/\sqrt{2} + (ds - sd)u/\sqrt{2} \\ &= \sqrt{2}\Sigma^0, \quad \text{所以 } X = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\Gamma = 0.$$

$$(c) \Xi^-(dss) \rightarrow \Xi^0(uss) + e + \bar{\nu}_e:$$

$$\Delta mc^2 = 6.48 \text{ MeV}.$$

$$\begin{aligned} d \rightarrow u: \Xi^- &= [(ds - sd)s]/\sqrt{2} \rightarrow [(us - su)s]/\sqrt{2} \\ &= \Xi^0, \quad \text{所以 } X = \cos\theta_C = 0.9738. \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Gamma = (1.4123 \times 10^{-4})(6.48)^5(0.9738)^2 = 1.530/\text{s}.$$

$$(d) \Lambda(uds) \rightarrow p(uud) + e + \bar{\nu}_e:$$

$$\Delta mc^2 = 1115.683 - 938.272 = 177.4 \text{ MeV}.$$

$$\begin{aligned} s \rightarrow u: \Lambda &= [2(ud - du)s + (us - su)d - (ds - sd)u]/\sqrt{12} \\ &\rightarrow [2(ud - du)u + (uu - uu)d - (du - ud)u]/\sqrt{12} \\ &= 3(ud - du)u/\sqrt{12} = \sqrt{3/2}p, \quad \text{所以 } X = \sqrt{3/2}\sin\theta_C = 0.2786. \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Gamma = (1.4123 \times 10^{-4})(177.4)^5(0.2786)^2 = 1.926 \times 10^6/\text{s}.$$

(e) $\Sigma^-(dds) \rightarrow n(udd) + e + \bar{\nu}_e$:

$$\begin{aligned} \Delta mc^2 &= (1197.449) - (939.565) = 257.9 \text{ MeV}. \\ s \rightarrow u: \Sigma^- &= [(ds - sd)d]/\sqrt{2} \rightarrow [(du - ud)d]/\sqrt{2} \\ &= -n, \quad \text{所以 } X = -\sin \theta_C = -0.2275. \\ \Gamma &= (1.4123 \times 10^{-4})(257.9)^5(0.2275)^2 = 8.340 \times 10^6/\text{s}. \end{aligned} \quad (25)$$

(f) $\Xi^0(uss) \rightarrow \Sigma^+(uus) + e + \bar{\nu}_e$:

$$\begin{aligned} \Delta mc^2 &= (1314.83) - (1189.37) = 125.5 \text{ MeV}. \\ s \rightarrow u: \Xi^0 &= [(us - su)s]/\sqrt{2} \rightarrow [(uu - uu)s + (us - su)u]/\sqrt{2} \\ &= [(us - su)u]/\sqrt{2} = \Sigma^+, \quad \text{所以 } X = \sin \theta_C = 0.2275. \\ \Gamma &= (1.4123 \times 10^{-4})(125.5)^5(0.2275)^2 = 2.276 \times 10^5/\text{s}. \end{aligned} \quad (26)$$

为了比较实验衰变率，注意分支比为 $\Gamma/\Gamma_{\text{tot}} = \Gamma\tau$ ，所以 $\Gamma = (\text{b.r.})/\tau$ 。

(a) 未知。

(b) $(5.73 \times 10^{-5})/(1.479 \times 10^{-10}) = 3.87 \times 10^5/\text{s}$.

(c) $< (2.3 \times 10^{-3})/(1.639 \times 10^{-10}) = 1.4 \times 10^7/\text{s}$.

(d) $(8.32 \times 10^{-4})/(2.631 \times 10^{-10}) = 3.16 \times 10^6/\text{s}$.

(e) $(1.017 \times 10^{-3})/(1.479 \times 10^{-10}) = 6.88 \times 10^6/\text{s}$.

(f) $(2.7 \times 10^{-4})/(2.90 \times 10^{-10}) = 9.3 \times 10^5/\text{s}$.

符合程度不是很好，这是因为我们忽略了对轴矢量耦合的修正（这些修正可以在完整的 Cabibbo 模型中计算）。(a) 尚未测量，(b) 显然完全是由于轴耦合修正引起的，(c) 只是一个下限——所以这些没有真正的测试。(d) 偏差约 $\frac{1}{3}$ ，(e) 偏差约 $\frac{1}{7}$ （还不错），但对于 (f)，计算值不到测量值的三分之一。

9.18 (a) 证明只要 CKM 矩阵是么正的 ($V^{-1} = V^\dagger$)（对实验验证见习题 9.33），减除 $K^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$ 的 GIM 机制对三代（或任意数目）都成立。（注意： $u \rightarrow d + W^+$ 带 CKM 因子 V_{ud} ； $d \rightarrow u + W^-$ 带因子 V_{ud}^* 。）

(b) 在 3×3 么正矩阵中有多少独立的实参数？ $n \times n$ 矩阵呢？（提示：知道么正矩阵 (U) 可被写成形式 $U = e^{iH}$ 是有帮助的，其中 H 是厄米矩阵。因此等价的问题是，在一般的厄米矩阵中有多少独立的实参数？）我们可以自由地改变每个夸克波函数的位相（ u 的归一化实际只确定了 $|N|^2$ ；见习题 7.3），因此这些参数中的 $2n$ 个是任意的——或 $(2n-1)$ ，因为改变所有夸克波函数以同样的量对 V 没有效果。问题：我们可能因此把 CKM 矩阵约化成实矩阵吗（如果它是实和么正的，那么它是正交的： $V^{-1} = \tilde{V}$ ）。

(c) 在一般的 3×3 （实）正交矩阵中有多少独立的实参数？ $n \times n$ 矩阵呢？

(d) 因此，结果是什么？你能约化 CKM 矩阵成实形式吗？两代情形（ $n=2$ ）如何？

解：

- (a) 参考图 9.4 和 9.5, 以及同样的图用于 t (代替 u 或 c), 以此类推 (对于假定的第 4 代及更高代), 以及 (9.81), 总振幅正比于

$$[V_{ud}^* V_{us} + V_{cd}^* V_{cs} + V_{td}^* V_{ts} + \cdots] = \sum_{j=1}^n V_{jd}^* V_{js} = \sum_{j=1}^n \tilde{V}_{dj}^* V_{js} = (V^\dagger V)_{ds}. \quad (27)$$

但是如果 V 是么正的, 那么 $(V^\dagger V)_{ds} = \delta_{ds} = 0$ 。

- (b) 因为 $H = H^\dagger = \tilde{H}^*$, 对角元素是实数 ($H_{ii}^* = H_{ii} \Rightarrow n$ 个实数), 非对角元素是复共轭对 ($H_{ij}^* = H_{ji} \Rightarrow$ 主对角线上方每个元素有两个实数——也就是说, 每个非对角元素对应一个实数, 共有 $n^2 - n$ 个)。所以表征一个 $n \times n$ 厄米矩阵总共需要 n^2 个实数, 因此表征一个 $n \times n$ 么正矩阵也需要 n^2 个实数。特别地, 在一个 3×3 么正矩阵中有 9 个实参数。

如果我们写成, 例如, $V_{us} = \langle u|V|s \rangle$, 很明显改变 s 夸克波函数的 (任意) 相位 ($|s\rangle \rightarrow e^{i\phi} |s\rangle$) 将以同样的因子改变 V_{us} , V_{cs} 和 V_{ts} , 而改变 u 夸克波函数的相位 ($|u\rangle \rightarrow e^{i\phi} |u\rangle$) 将以因子 $e^{-i\phi}$ 改变 V_{ud} , V_{us} 和 V_{ub} 。另一方面, 以相同的量改变所有夸克的相位不会影响 CKM 矩阵的元素。所以在 CKM 矩阵中有 $2n - 1$ 个任意的相位因子, 我们可以选择它们以使矩阵尽可能为实数。

- (c) 一个实正交矩阵是么正的 ($O = O^*, O\tilde{O} = 1 \Rightarrow O\tilde{O}^* = O\tilde{O}^\dagger = 1$), 所以它可以写成 $O = e^{iA}$ 的形式, 其中 A 是厄米的。但是 $O = O^* \Rightarrow e^{iA} = e^{-iA^*} \Rightarrow A = -A^*$ (所以 A 是纯虚的)。但是 $A = A^\dagger = \tilde{A}^* = -\tilde{A}$, 所以 A 是反对称的。它的对角元素全为零, 它的非对角元素是纯虚的且成对相反 ($A_{ij} = -A_{ji}$), 所以问题是主对角线上方有多少个元素。答案: 非对角元素总数的一半, 即 $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ 。特别地, 在一个 3×3 (实) 正交矩阵中有 3 个实参数。

- (d) 因为 CKM 矩阵是么正的, 它包含 n^2 个实参数, 但是其中 $2n - 1$ 个可以通过适当选择夸克相位来消除, 留下 $n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2$ 个。特别地, 对于 3×3 的情况, 有 4 个实参数。但是一个 3 维实么正 (即正交) 矩阵只携带 3 个实参数。所以不能将一般的 3×3 CKM 矩阵约化为实矩阵。但是对于 $n = 2$, CKM 矩阵将有 1 个实参数, 而实正交 2×2 矩阵有 $\frac{1}{2}(4 - 2) = 1$ 个, 所以只有两代时可以将 CKM 矩阵约化为实形式。所以如果 CP 破坏来自 CKM 矩阵中的虚部项, 除非有 (至少) 三代, 否则它不会发生。

- 9.22 (a) 计算 GSW 模型中 $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$ 的微分和总截面。(答案: 与方程 (9.100) 相同, 只是 $c_A c_V$ 的符号反号了。)

- (b) 计算比率 $\sigma(\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-) / \sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-)$ 。假设能量足够高你可以取 $m_e = 0$ 。

解:

由正文知 (9.99) 有

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \left(\frac{\hbar c}{\pi} \right)^2 \left(\frac{g_z}{4M_Z c^2} \right)^4 E^2 \left((c_V + c_A)^2 + (c_V - c_A)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right). \quad (28)$$

(9.100) 有

$$\sigma = \frac{2}{3\pi} (\hbar c)^2 \left(\frac{g_z}{2M_Z c^2} \right)^4 E^2 (c_V^2 + c_A^2 + c_V c_A). \quad (29)$$

(9.96) 有

$$\mathcal{M} = \frac{g_z^2}{8(M_Z c^2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)u(2)]. \quad (30)$$

(9.97) 有

$$\begin{aligned}
 \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle &= 2 \left(\frac{g_z}{4M_Z c^2} \right)^4 \text{tr}(\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_3) \\
 &\quad \times \text{tr}(\gamma_\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_4 + m_e)) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{g_z}{M_Z c^2} \right)^4 ((c_V + c_A)^2 (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (c_V - c_A)^2 (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) \\
 &\quad - m^2 c^2 (c_V^2 - c_A^2) (p_1 \cdot p_3)).
 \end{aligned} \tag{31}$$

(a) 考虑反缪子中微子与电子的弹性散射过程 $\bar{\nu}_\mu(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow \bar{\nu}_\mu(p_3) + e^-(p_4)$ 。该过程由 Z^0 玻色子交换介导。与中微子散射过程 $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-$ 相比，主要区别在于入射和出射的中微子变为反中微子。根据 Feynman 规则，反中微子线的流为 $\bar{v}(1)\gamma^\mu(c_V^{(\nu)} - c_A^{(\nu)}\gamma^5)v(3)$ 。对于缪子中微子，其只参与左手相互作用，故 $c_V^{(\nu)} = c_A^{(\nu)} = \frac{1}{2}$ ，顶点因子为 $\frac{-ig_z}{2}\gamma^\mu(1 - \gamma^5)$ 。电子顶点的因子为 $\frac{-ig_z}{2}\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)$ 。散射振幅 \mathcal{M} 写为：

$$\mathcal{M} = \frac{g_z^2}{8(M_Z c)^2} [\bar{v}(1)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)v(3)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)u(2)]. \tag{32}$$

计算自旋平均振幅模方 $\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$ 。由于入射反中微子是右手的（无质量极限下），不需要对中微子自旋平均（只有一种态），但需对电子自旋平均并对末态自旋求和。

$$\langle |\mathcal{M}|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{g_z}{M_Z c} \right)^4 L_\nu^{\mu\nu} E_{\mu\nu}, \tag{33}$$

其中反中微子张量 $L_\nu^{\mu\nu}$ 和电子张量 $E_{\mu\nu}$ 分别为：

$$\begin{aligned}
 L_\nu^{\mu\nu} &= \text{tr} \left[\gamma^\mu (1 - \gamma^5) \not{p}_3 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \right], \\
 E_{\mu\nu} &= \text{tr} \left[\gamma_\mu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (c_V - c_A \gamma^5) (\not{p}_4 + m_e) \right].
 \end{aligned} \tag{34}$$

注意反中微子张量中动量 p_1, p_3 的次序与中微子散射情况相反（因为 $v(p)\bar{v}(p) = \not{p}$ ，且流的形式为 $\bar{v}(1) \cdots v(3)$ ，取模方迹时顺序为 $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ）。利用迹定理计算：

$$\begin{aligned}
 L_\nu^{\mu\nu} &= 2\text{tr} \left[\gamma^\mu \not{p}_3 \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \not{p}_1 \right] \\
 &= 8 [p_3^\mu p_1^\nu + p_3^\nu p_1^\mu - g^{\mu\nu} (p_1 \cdot p_3) - i\epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} p_{3\alpha} p_{1\beta}].
 \end{aligned} \tag{35}$$

与中微子张量 $L_\nu^{\mu\nu}$ 相比，反对称部分（含 ϵ 项）变号，因为 $\epsilon^{\cdots p_3 p_1} = -\epsilon^{\cdots p_1 p_3}$ 。电子张量（忽略电子质量 $m_e \approx 0$ ）为：

$$E_{\mu\nu} \approx 4(c_V^2 + c_A^2) [p_{2\mu} p_{4\nu} + p_{2\nu} p_{4\mu} - g_{\mu\nu} (p_2 \cdot p_4)] - 8i c_V c_A \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_2^\rho p_4^\sigma. \tag{36}$$

缩并 $L_\nu^{\mu\nu} E_{\mu\nu}$ ：

$$\begin{aligned}
 L_\nu^{\mu\nu} E_{\mu\nu} &= 32(c_V^2 + c_A^2) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
 &\quad + (-8i)(-8i c_V c_A) \epsilon^{\mu\alpha\nu\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p_{3\alpha} p_{1\beta} p_2^\rho p_4^\sigma \\
 &= 32(c_V^2 + c_A^2) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
 &\quad - 64 c_V c_A [-2(\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta)] p_{3\alpha} p_{1\beta} p_2^\rho p_4^\sigma \\
 &= 32(c_V^2 + c_A^2) [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_3 \cdot p_2)] \\
 &\quad + 128 c_V c_A [(p_3 \cdot p_2)(p_1 \cdot p_4) - (p_3 \cdot p_4)(p_1 \cdot p_2)].
 \end{aligned} \tag{37}$$

整理同类项:

$$L_{\nu}^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 32 [(c_V^2 + c_A^2 - 4c_V c_A)(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (c_V^2 + c_A^2 + 4c_V c_A)(p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)]. \quad (38)$$

注意到对于中微子散射, 系数分别为 $(c_V + c_A)^2$ 对应 s 通道项, $(c_V - c_A)^2$ 对应 u 通道项。这里由于 $c_V c_A$ 项变号, 对应关系发生交换。在质心系中, 令 E 为入射能量, θ 为散射角:

$$\begin{aligned} (p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) &= (2E^2)(2E^2) = 4E^4, \\ (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) &= [E^2(1 + \cos \theta)][E^2(1 + \cos \theta)] = 4E^4 \cos^4 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (39)$$

代入截面公式 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \langle |\mathcal{M}|^2 \rangle$, 其中 $s = 4E^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2 \left(\frac{\hbar c}{\pi} \right)^2 \left(\frac{g_z}{4M_Z c^2} \right)^4 E^2 \left[(c_V - c_A)^2 + (c_V + c_A)^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} \right]. \quad (40)$$

这与中微子散射截面 (9.99) 相比, $(c_V - c_A)^2$ 与 $(c_V + c_A)^2$ 的位置互换了, 或者等价地说, 将 c_A 替换为 $-c_A$ 。对立体角积分求总截面:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{d\sigma}{d\Omega} d(\cos \theta) \\ &\propto \int_{-1}^1 \left[(c_V - c_A)^2 + (c_V + c_A)^2 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 \right] d(\cos \theta) \\ &= 2(c_V - c_A)^2 + (c_V + c_A)^2 \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^2}{4} dx \\ &= 2(c_V - c_A)^2 + (c_V + c_A)^2 \cdot \frac{2}{3}. \end{aligned} \quad (41)$$

代入系数整理得:

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \left(\frac{\hbar c}{\pi} \right)^2 \left(\frac{g_z}{4M_Z c^2} \right)^4 E^2 \cdot 4\pi \left[(c_V - c_A)^2 + \frac{1}{3}(c_V + c_A)^2 \right] \\ &= \frac{2}{3\pi} (\hbar c)^2 \left(\frac{g_z}{2M_Z c^2} \right)^4 E^2 (c_V^2 + c_A^2 - c_V c_A). \end{aligned} \quad (42)$$

该结果与 (9.100) 相比, 括号内的 $c_V c_A$ 项符号相反。

(b) 用 (a) 中结果及 (9.100):

$$R \equiv \frac{\sigma(\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-)}{\sigma(\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_\mu + e^-)} = \frac{c_V^2 + c_A^2 - c_V c_A}{c_V^2 + c_A^2 + c_V c_A}. \quad (43)$$

对于电子, 根据表 9.1, 其弱中性流耦合常数为:

$$c_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_w, \quad c_A = -\frac{1}{2}. \quad (44)$$

取 $\sin^2 \theta_w = 0.2314$, 则:

$$\begin{aligned} c_V &= -0.5 + 2(0.2314) = -0.0372, \\ c_A &= -0.5. \end{aligned} \quad (45)$$

计算各项数值:

$$\begin{aligned} c_V^2 + c_A^2 &= (-0.0372)^2 + (-0.5)^2 = 0.00138 + 0.25 = 0.25138, \\ c_V c_A &= (-0.0372)(-0.5) = 0.0186. \end{aligned} \quad (46)$$

代入比率 R :

$$R = \frac{0.25138 - 0.0186}{0.25138 + 0.0186} = \frac{0.23278}{0.2700} \approx 0.862. \quad (47)$$

即反中微子-电子散射截面约为中微子-电子散射截面的 86.2%。