群论作业

Clark

3 证明：有两个四阶群，且都是 Abel 群。

解：

由子群阶定理（Lagrange 定理）有，四阶群的子群阶只能是 1，2，4。设四阶群为 $G=\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$，其中 g_0 为单位元。若 G 中存在一个元素 g_i 的阶为 4，即 $g_i^4=g_0$，且有 $g_i^2,g_i^3\in G$，则 G 为循环群，且 $G\approx \mathrm{C}_4$。循环群显然是 Abel 群。若 G 中没有元素的阶为 4，则 G 中每个元素的阶只能是 1 或 2。此时有 $g_1^3=g_2^3=g_3^3=g_0$。考虑封闭性，$g_ig_j\in G,(i,j=0,1,2,3)$。具体考虑，假设 $g_1g_2=g_1$，推出 g_1 或 g_2 为 g_0，显然不成立。继续假设 $g_1g_2=g_0$，推出 $g_1^2g_2=g_1g_0=g_1$，与上述情况一致，显然不成立。于是有 $g_1g_2=g_3$。同理可得 g_ig_j 的乘法表：

	g_0	g_1	g_2	g_3
g_0	g_0	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_0	g_3	g_2
g_2	g_2	g_3	g_0	g_1
g_3	g_3	g_2	g_1	g_0

由此可知，此时的 $G=\{g_0,g_1,g_2,g_3\}$ 是群，且有 $G\approx V_4=\mathrm{Z}_2\times\mathrm{Z}_2$，其中 V_4 为 Klein 群。综上所述，四阶群有两种，且都是 Abel 群。

4 对群 $G=\{1,\mathrm{i},-1,-\mathrm{i}\}$，有没有非平庸的不变子群，如有，$G$ 对它的商群是什么？

解：

显然 $G\approx\mathrm{Z}_4$。于是有，G 的固有子群为 $\mathrm{Z}_2=\{1,-1\}$，且 Z_2 为正规子群。商群 $G/\mathrm{Z}_2=\{f_0,f_1\}$，其中 $\mathrm{Z}_2\to f_0$，$\mathrm{iZ}_2\to f_1$。

11 考虑下面六个函数的集合：

$$\begin{aligned} f_1(x)=x;\quad f_2(x)=1-x;\quad f_3(x)=\frac{x}{x-1};\\ f_4(x)=\frac{1}{x};\quad f_5(x)=\frac{1}{1-x};\quad f_6(x)=\frac{x-1}{x}. \end{aligned}\tag{1}$$

定义两个函数的乘积是以后面函数的输出作为前面函数的输入得到的整体函数依赖关系，如 $(f_1f_3)(x)=f_1(f_3(x))$。证明该集合在此运算法则下形成一个群，且该群与 D_3 群同构。

解：

只需通过较为复杂的计算便可以得出如下的乘法表：

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

封闭性：如乘法表所示，任意两个函数的复合仍属于该集合。结合律：显然满足结合律，即 $(f_if_j)f_k = f_i(f_jf_k)$。单位元：观察乘法表可知，单位元为 $f_1(x) = x$。逆元：由乘法表可知，每个元素都有逆元，例如：f_1 的逆元是 f_1；f_2、f_3、f_4 的阶为 2，逆元是其本身；f_5、f_6 互逆。综上所述，该集合在此运算法则下形成一个群，记为 G。

定义如下同构映射 $\phi : \phi(f_1) = e, \phi(f_2) = a, \phi(f_3) = b, \phi(f_4) = c, \phi(f_5) = d, \phi(f_6) = f$。不难验证，其与 D_3 的乘法表一致（如有些许区别，可以通过群的重排定理来保证一致性），且 ϕ 为双射映射保乘法法则不变。于是 $G \approx \mathrm{D}_3$。

PS：这应该 Mobius 变换（$f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$，其中 $z, a, b, c, d \in \mathbb{C}$ 且 $ad - bc \neq 0$）取实数域的情况，而出成的题目。

14 找出三阶对称群 S_3 的所有子群，并指出哪个子群是不变子群，哪个子群是含元素 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的循环群。

解：

已知 $\mathrm{S}_3 \approx \mathrm{D}_3$。由 D_3 的子群结构可知，其子群为 $H_0 = \{e\}$、$H_1 = \{e, a\}$、$H_2 = \{e, b\}$，$H_3 = \{e, c\}$、$H_4 = \{e, d, f\}$。且 S_3 的 6 个元素分别为：

$$
\begin{aligned}
p_e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad p_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\
p_c &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad p_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2}
$$

于是 S_3 的子群有：

一阶子群： $\{p_e\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\right\}$；

二阶子群： $\{p_e,p_a\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right\}$， $\{p_e,p_b\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\right\}$，

$\{p_e,p_c\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\right\}$；

三阶子群： $\{p_e,p_d,p_f\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}$；

六阶子群：
$$\begin{aligned}S_3&=\{p_e,p_a,p_b,p_c,p_d,p_f\}\\&=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}.\end{aligned}\tag{3}$$

显然，3 阶子群 $\{p_e,p_d,p_f\}=\left\{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right\}$ 是正规子群，且它是含元素 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ 的循环群。

20 若 $G=H\otimes K$，证明：

(1) 商群 G/H 与 K 同构；

(2) G 与 H 和 K 同态。

解：

由于 $G=H\otimes K$，于是取群 G 的有序对 (h,k)，其中 $h\in H,k\in K$，并定义群运算为 $(h_1,k_1)(h_2,k_2)=(h_1h_2,k_1k_2)$，其中单位元为 (e_H,e_K)，另外 e_H 也是群 H 的单位元，e_K 也是群 K 的单位元。注意到，H 和 K 都是 G 的子群，于是 $H=H\otimes\{e_K\}$，即子群 H 嵌入到群 G 中，仍认为是子群 H。

(1) 商群 G/H 的元素是 H 在 G 中的左陪集。由于 $H=H\otimes\{e_K\}$，任取 $(h,k)\in G$ 所在的陪集为，$(h,k)H=\{(h,k)(h',e_K)|h'\in H\}=\{(hh',k)|h'\in H\}$。这是因为 hh' 取遍 H，所以 $(h,k)H=H\otimes\{k\}$。由此我们得出，每个陪集唯一对应一个 $k\in K$。现在，我们定义一种映射 $\phi:G/H\to K$，使得 $\phi((h,k)H)=k$。注意到这个定义是良定义的，因为如果 $(h_1,k_1)H=(h_2,k_2)H$，则存在 $h'\in H$ 使得 $(h_1,k_2)=(h_2,k_2)(h',e_K)=(h_2h',k_2)$，这导致 $k_1=k_2$。下面验证 ϕ 是一个同构映射。

- 同态性:对于任意的两个陪集 $(h_1,k_1)H$ 和 $(h_2,k_2)H$,有 $\phi((h_1,k_1)H\cdot(h_2,k_2)H)=\phi((h_1h_2,k_1k_2)H)=k_1k_2$，且有 $\phi((h_1,k_1)H\cdot(h_2,k_2)H)=k_1\cdot k_2$。所以 ϕ 是同态映射。
- 单射性：若 $\phi((h_1,k_1)H)=\phi((h_2,k_2)H)$，则 $k_1=k_2$，所以 $(h_1,k_1)H=H\otimes\{k_1\}=H\otimes\{k_2\}=(h_2,k_2)H$。所以 ϕ 是单射映射。
- 满射性：对于任意的 $k\in K$，取 $(e_H,k)\in G$，则 $\phi((e_H,k)H)=k$。所以 ϕ 是满射映射。

综上所述，ϕ 是一个同构映射，于是证明了商群 G/H 与 K 同构，即 $G/H \approx K$。

PS：本题略显超纲，理论上应该直接用群同态基本定理来直接证明的。即构造一种映射 $\phi: G \to K, \phi((h,k)) = k$。按照相同的步骤证明同态性与满射性。之后确定核，即 $\ker\phi = \{(h,k) \in G | \phi((h,k)) = e_K\} = \{(h, e_K) | h \in H\} = H \otimes \{e_K\}$，再将 $H \otimes \{e_K\}$ 与 H 等同，即证 $\ker\phi = H$。基于群同态基本定理有：$G/\ker\phi \approx \mathrm{im}\phi$，即证 $G/H \approx K$。

(2) 定义一种映射 $\phi_H : G \to H, \phi_H((h,k)) = h$。下面验证 ϕ_H 是一个同态映射。同态性：对于任意的 $(h_1,k_1),(h_2,k_2) \in G$,有 $\phi_H((h_1,k_1)(h_2,k_2)) = \phi_H((h_1h_2, k_1k_2)) = h_1h_2 = \phi_H((h_1,k_1))\phi_H((h_2,k_2))$。所以 ϕ_H 是同态映射，于是证明了 G 与 H 同态，即 $G \sim H$。

同理，还可定义另一种映射 $\phi_K : G \to K, \phi_K((h,k)) = k$，并按照相同的步骤证明 ϕ_K 是一个同态映射，即 $\phi_K((h_1,k_1)(h_2,k_2)) = \phi_K((h_1h_2,k_1k_2)) = k_1k_2 = \phi_K((h_1,k_1))\phi_K((h_2,k_2))$。于是证明了 G 与 K 同态，即 $G \sim K$。

PS：其实还可以进一步证明这两个同态映射 ϕ_H 与 ϕ_K 是满射同态映射，即证明满射性。但这并不是题目要求的内容。