

高等量子力学作业

Clark

1. 四维时空中基本场的正则量子化。

- (a) 正确写出实标量场 $\phi(x)$ ，复标量场 $\varphi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ 在动量空间的二次量子化形式。
- (b) 给出 Dirac 费米子场 $\psi(x)$ 在动量空间的单位旋量 $u_s(p)$ 和 $v_s(p)$ ，正确写出 $\psi(x)$ 的二次量子化形式。
- (c) Majorana 费米子满足 $\psi^C(x) = \psi(x)$ ，写出 Majorana 费米子的二次量子化形式。

解：

- (a) 对于实标量场 $\phi(x)$ ，其 Lagrange 密度为 $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2$ ，满足 Klein-Gordon 方程 $(\partial^2 + m^2)\phi(x) = 0$ 。由于 $\phi(x)$ 是实场，满足 $\phi(x) = \phi^\dagger(x)$ 。在动量空间中，其二次量子化形式（平面波展开）为：

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (1)$$

其中， $p \cdot x = E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$ ， $E_p = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$ 。 $a_{\mathbf{p}}$ 和 $a_{\mathbf{p}}^\dagger$ 分别为湮灭算符和产生算符，满足玻色子对易关系：

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (2)$$

对于复标量场 $\varphi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ ，它描述带电粒子，粒子与反粒子不同。其二次量子化形式包含两组独立的产生湮灭算符， $a_{\mathbf{p}}$ 对应粒子， $b_{\mathbf{p}}$ 对应反粒子：

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} (a_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (3)$$

相应的共轭场为：

$$\varphi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} (b_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p}}^\dagger e^{ip \cdot x}), \quad (4)$$

其中产生湮灭算符满足非零对易关系：

$$[a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad [b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (5)$$

- (b) Dirac 场 $\psi(x)$ 满足 Dirac 方程 $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ 。在动量空间中，Dirac 旋量 $u_s(p)$ 和 $v_s(p)$ 分别对应正能解和负能解。在 Dirac 表象下，取 z 方向为自旋量化轴，单位旋量 $u_s(p)$ 和 $v_s(p)$ 的具体形式为：

$$\begin{aligned} u_s(p) &= \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \\ v_s(p) &= \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E_p + m} \xi_s \\ \xi_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \end{aligned} \quad (6)$$

其中 σ 为 Pauli 矩阵, χ_s 和 ξ_s 为二分量子旋量, 通常取:

$$\chi_1 = \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_2 = \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

它们满足归一化条件 $\bar{u}_r(p)u_s(p) = 2m\delta_{rs}$ 和 $\bar{v}_r(p)v_s(p) = -2m\delta_{rs}$ 。Dirac 场 $\psi(x)$ 的二次量子化形式为:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 (a_{\mathbf{p},s} u_s(p) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger v_s(p) e^{ip \cdot x}), \quad (8)$$

共轭场 $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0$ 为:

$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 (b_{\mathbf{p},s} \bar{v}_s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p},s}^\dagger \bar{u}_s(p) e^{ip \cdot x}), \quad (9)$$

其中 $a_{\mathbf{p},s}$ 和 $b_{\mathbf{p},s}$ 分别为电子和正电子的湮灭算符, 满足费米子反对易关系:

$$\{a_{\mathbf{p},r}, a_{\mathbf{q},s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{rs}, \quad \{b_{\mathbf{p},r}, b_{\mathbf{q},s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{rs}. \quad (10)$$

(c) Majorana 费米子是自身的反粒子, 满足条件 $\psi^C(x) = \psi(x)$ 。其中电荷共轭场定义为 $\psi^C = C\bar{\psi}^T$, 这里 $C = i\gamma^2\gamma^0$ 是电荷共轭矩阵。由于粒子等于反粒子, 这意味着在二次量子化展开中, 产生反粒子的算符 $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$ 应当等同于产生粒子的算符 $a_{\mathbf{p},s}^\dagger$ (在旋量基底选择合适的情况下)。具体来说, Majorana 场的二次量子化形式为:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{s=1}^2 (a_{\mathbf{p},s} u_s(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p},s}^\dagger v_s(p) e^{ip \cdot x}). \quad (11)$$

这里我们利用了 Majorana 旋量的性质, 即 $v_s(p) = u_s^C(p) = C\bar{u}_s(p)^T$ (在特定相位约定下)。此时场算符 $\psi(x)$ 满足 Majorana 条件 $\psi(x) = \psi^C(x)$ 。算符 $a_{\mathbf{p},s}$ 满足标准的费米子反对易关系:

$$\{a_{\mathbf{p},r}, a_{\mathbf{q},s}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{rs}. \quad (12)$$

2. 电磁场可以用四维磁矢势 $A_\mu(x)$ 来描述, 给出 $A_\mu(x)$ 的二次量子化形式 (请注意电磁规范的选择是否对量子化带来影响)。

解:

电磁场由四维矢量势 $A_\mu(x)$ 描述。为了对电磁场进行正则量子化, 我们必须首先确定规范条件, 因为由于规范不变性, Maxwell 方程组 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ 并不唯一确定 A_μ 的演化, 导致无法直接定义共轭动量或传播子。

通常有两种主要的量子化方案: Coulomb 规范 (Coulomb Gauge) 量子化和 Lorentz 规范 (Lorentz Gauge) 下的协变量子化 (Gupta-Bleuler 形式)。题中提到 “四维磁矢势”, 且要求给出 $A_\mu(x)$ 的形式, 一般是指保持显式 Lorentz 协变性的量子化方案。在协变量子化中, 我们采用 Fermi-Lagrange 密度:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (13)$$

由此得到的运动方程为无质量的 Klein-Gordon 方程 (即波动方程):

$$\partial^2 A_\mu = 0. \quad (14)$$

- (a) 动量空间展开: $A_\mu(x)$ 可以按平面波展开。由于 A_μ 是矢量场, 我们需要引入极化矢量 $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)$ 来描述其矢量性质。在四维时空中, 对于给定的四维动量 p , 存在 4 个线性独立的极化方向, 记为 $\lambda = 0, 1, 2, 3$ 。于是 $A_\mu(x)$ 的二次量子化形式为:

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_p}} \sum_{\lambda=0}^3 \left(a_{\mathbf{p},\lambda} \epsilon_\mu^{(\lambda)}(p) e^{-ip \cdot x} + a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger \epsilon_\mu^{(\lambda)*}(p) e^{ip \cdot x} \right), \quad (15)$$

其中: $E_p = |\mathbf{p}|$ 是光子的能量; $a_{\mathbf{p},\lambda}$ 和 $a_{\mathbf{p},\lambda}^\dagger$ 分别是对应极化状态 λ 的光子的湮灭和产生算符; $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(p)$ 是极化矢量组。通常选取基底使得 $\lambda = 1, 2$ 为横向极化 (物理光子), $\lambda = 3$ 为纵向极化, $\lambda = 0$ 为标量 (时间) 极化。

- (b) 对易关系与度规: 在协变量子化中, 正则对易关系 $[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{y}, t)] = ig_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ 导致产生和湮灭算符满足如下对易关系:

$$[a_{\mathbf{p},\lambda}, a_{\mathbf{q},\lambda'}^\dagger] = -g_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (16)$$

这里我们采用度规 $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 。

- 对于空间极化 $\lambda = 1, 2, 3$, $\epsilon^{(\lambda)} \cdot \epsilon^{(\lambda)} = -1$, 故 $[a_{\mathbf{p},i}, a_{\mathbf{q},j}^\dagger] = \delta_{ij} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$, 这是正常的玻色子对易关系。
- 对于时间极化 $\lambda = 0$, $\epsilon^{(0)} \cdot \epsilon^{(0)} = 1$, 故 $[a_{\mathbf{p},0}, a_{\mathbf{q},0}^\dagger] = -(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ 。负号的存在意味着 Hilbert 空间中存在范数为负的态 (Ghost states), 这是协变量子化必须处理的问题。

- (c) 规范选择的影响:

- 协变规范 (Lorentz Gauge): 如上所示, 为了保持显式的 Lorentz 协变性, 我们引入了非物理的纵向光子和标量光子。为了消除这些非物理态, 必须施加 Gupta-Bleuler 条件, 即要求物理态 $|\Psi\rangle$ 满足:

$$\partial^\mu A_\mu^{(+)} |\Psi\rangle = 0, \quad (17)$$

其中 $A_\mu^{(+)}$ 是场算符的正频部分 (包含湮灭算符)。这保证了物理态的期望值满足 Lorentz 规范条件 $\langle \Psi | \partial_\mu A^\mu | \Psi \rangle = 0$, 且物理观测量的贡献仅来自横向极化。

- Coulomb 规范 (Coulomb Gauge, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$): 如果在 Coulomb 规范下量子化, 只有两个横向极化 $\lambda = 1, 2$ 会作为动力学自由度出现。 A_0 不再是独立的算符, 而是由电荷分布通过瞬时 Coulomb 相互作用决定。此时 $A_\mu(x)$ 的展开式中求和仅对 $\lambda = 1, 2$ 进行, 且没有负范数态的问题, 但理论失去了显式的 Lorentz 协变形式。

综上所述, 给出的公式 (15) 是在保持 Lorentz 协变性前提下最通用的二次量子化形式。

3. 给定三个全同玻色子, 简记为 1、2、3。每个粒子在算符 B 下对应的本征值为 b^α , $\alpha = 1, 2, 3, 4, \dots$, 第 i 个粒子的本征矢记作 $|b^\alpha\rangle_i$ 。

- (a) 构造这三个粒子构成的系统的对称化基矢。

- (b) 现在假定 B 是位置算符 X (只考虑一个维度的空间即可), 本征值为 x 。在位置表象下, 写出对称性化的波函数。

解:

- (a) 对于全同玻色子系统，其多粒子态必须在任意两个粒子交换下保持对称。我们需要构造全对称化的基矢。设三个粒子分别处于单粒子态 α, β, γ （这里 α, β, γ 代表量子数索引，对应本征值 $b^\alpha, b^\beta, b^\gamma$ ）。

根据量子数 α, β, γ 是否相同，分为三种情况讨论：

- 三个量子数互不相同 ($\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$)：此时，我们需要对所有可能的排列进行求和并归一化。共有 $3! = 6$ 种排列。归一化系数为 $\frac{1}{\sqrt{3!}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 。对称化基矢为：

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|b^\alpha\rangle_1 |b^\beta\rangle_2 |b^\gamma\rangle_3 + |b^\alpha\rangle_1 |b^\gamma\rangle_2 |b^\beta\rangle_3 + |b^\beta\rangle_1 |b^\alpha\rangle_2 |b^\gamma\rangle_3 + |b^\beta\rangle_1 |b^\gamma\rangle_2 |b^\alpha\rangle_3 + |b^\gamma\rangle_1 |b^\alpha\rangle_2 |b^\beta\rangle_3 + |b^\gamma\rangle_1 |b^\beta\rangle_2 |b^\alpha\rangle_3). \quad (18)$$

- 有两个量子数相同 ($\alpha = \beta \neq \gamma$)：此时，态 $|b^\alpha\rangle$ 出现了 2 次，态 $|b^\gamma\rangle$ 出现了 1 次。全排列共有 $\frac{3!}{2!1!} = 3$ 个不同的项。归一化系数为 $\frac{1}{\sqrt{3!/2!}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 。对称化基矢为：

$$|\Psi_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|b^\alpha\rangle_1 |b^\alpha\rangle_2 |b^\gamma\rangle_3 + |b^\alpha\rangle_1 |b^\gamma\rangle_2 |b^\alpha\rangle_3 + |b^\gamma\rangle_1 |b^\alpha\rangle_2 |b^\alpha\rangle_3). \quad (19)$$

- 三个量子数都相同 ($\alpha = \beta = \gamma$)：此时，所有粒子都处于同一个单粒子态。只有 1 种排列。归一化系数为 1。对称化基矢为：

$$|\Psi_S\rangle = |b^\alpha\rangle_1 |b^\alpha\rangle_2 |b^\alpha\rangle_3. \quad (20)$$

- (b) 当算符 B 为位置算符 X 时，本征值为位置坐标 x 。单粒子本征矢为 $|x\rangle_i$ 。此时量子数 α, β, γ 对应具体的坐标值 x_1, x_2, x_3 。在位置表象下，系统的波函数 $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ 定义为系统态矢量在位置基 $|x_1\rangle_1 |x_2\rangle_2 |x_3\rangle_3$ 上的投影（注意这里的下标 1, 2, 3 标记粒子编号，而坐标变量 x_1, x_2, x_3 是自变量）。设三个粒子分别处于单粒子波函数 $\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x), \psi_\gamma(x)$ 所描述的状态。全同玻色子系统的波函数必须是全对称的，即交换任意两个坐标 (x_i, x_j) ，波函数值不变。类似于基矢的构造，波函数形式如下：

$$\Psi_S(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{N} \sum_P \psi_\alpha(x_{P_1}) \psi_\beta(x_{P_2}) \psi_\gamma(x_{P_3}), \quad (21)$$

其中 P 表示对粒子坐标索引 (1, 2, 3) 的排列， \mathcal{N} 是归一化常数。具体写出三种情况：

- 若三个单粒子态互不相同 ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$)：

$$\begin{aligned} \Psi_S(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} & (\psi_\alpha(x_1) \psi_\beta(x_2) \psi_\gamma(x_3) + \psi_\alpha(x_1) \psi_\gamma(x_2) \psi_\beta(x_3) \\ & + \psi_\beta(x_1) \psi_\alpha(x_2) \psi_\gamma(x_3) + \psi_\beta(x_1) \psi_\gamma(x_2) \psi_\alpha(x_3) \\ & + \psi_\gamma(x_1) \psi_\alpha(x_2) \psi_\beta(x_3) + \psi_\gamma(x_1) \psi_\beta(x_2) \psi_\alpha(x_3)). \end{aligned} \quad (22)$$

这正是积和式 (Permanent) 的形式。

- 若有两个单粒子态相同 ($\alpha = \beta \neq \gamma$)：

$$\Psi_S(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\psi_\alpha(x_1) \psi_\alpha(x_2) \psi_\gamma(x_3) + \psi_\alpha(x_1) \psi_\gamma(x_2) \psi_\alpha(x_3) + \psi_\gamma(x_1) \psi_\alpha(x_2) \psi_\alpha(x_3)). \quad (23)$$

- 若三个单粒子态都相同 ($\alpha = \beta = \gamma$)：

$$\Psi_S(x_1, x_2, x_3) = \psi_\alpha(x_1) \psi_\alpha(x_2) \psi_\alpha(x_3). \quad (24)$$

4. 假定上面的粒子是费米子，重复一下上述操作。

解：

- (a) 对于全同费米子系统，其多粒子态必须在任意两个粒子交换下保持反对称（Antisymmetric）。根据 Pauli 不相容原理，没有两个费米子可以处于完全相同的单粒子态。因此，只有当三个单粒子态的量子数互不相同（ $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ）时，才能构造出非零的反对称化基矢。如果任意两个量子数相同，态矢量为零。

对于 $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ 的情况，我们需要对所有排列进行求和，奇排列取负号，偶排列取正号。归一化系数为 $\frac{1}{\sqrt{3!}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ 。反对称化基矢（Slater 行列式形式）为：

$$|\Psi_A\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|b^\alpha\rangle_1 |b^\beta\rangle_2 |b^\gamma\rangle_3 - |b^\alpha\rangle_1 |b^\gamma\rangle_2 |b^\beta\rangle_3 - |b^\beta\rangle_1 |b^\alpha\rangle_2 |b^\gamma\rangle_3 + |b^\beta\rangle_1 |b^\gamma\rangle_2 |b^\alpha\rangle_3 + |b^\gamma\rangle_1 |b^\alpha\rangle_2 |b^\beta\rangle_3 - |b^\gamma\rangle_1 |b^\beta\rangle_2 |b^\alpha\rangle_3). \quad (25)$$

- (b) 在位置表象下，费米子系统的波函数 $\Psi_A(x_1, x_2, x_3)$ 也必须是关于粒子坐标交换反对称的。这可以通过构造单粒子波函数的 Slater 行列式得到。设三个粒子分别处于单粒子波函数 $\psi_\alpha(x), \psi_\beta(x), \psi_\gamma(x)$ 。反对称波函数为：

$$\Psi_A(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \det \begin{pmatrix} \psi_\alpha(x_1) & \psi_\beta(x_1) & \psi_\gamma(x_1) \\ \psi_\alpha(x_2) & \psi_\beta(x_2) & \psi_\gamma(x_2) \\ \psi_\alpha(x_3) & \psi_\beta(x_3) & \psi_\gamma(x_3) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

展开该行列式，我们得到：

$$\begin{aligned} \Psi_A(x_1, x_2, x_3) = & \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_\alpha(x_1)\psi_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3) - \psi_\alpha(x_1)\psi_\gamma(x_2)\psi_\beta(x_3) \\ & - \psi_\beta(x_1)\psi_\alpha(x_2)\psi_\gamma(x_3) + \psi_\beta(x_1)\psi_\gamma(x_2)\psi_\alpha(x_3) \\ & + \psi_\gamma(x_1)\psi_\alpha(x_2)\psi_\beta(x_3) - \psi_\gamma(x_1)\psi_\beta(x_2)\psi_\alpha(x_3)). \end{aligned} \quad (27)$$

同样地，如果任意两个单粒子态相同（例如 $\psi_\alpha = \psi_\beta$ ），则行列式有两列相同，波函数恒为零，符合 Pauli 不相容原理。

5. 我们已经学过了谐振子的量子数的升降算符、角动量第三分量的升降算符、和粒子的产生和湮灭算符，

- (a) 把各自的对易关系明确写出来，比较它们数学上的异同。
(b) 思考它们在物理上有啥联系，又有什么完全不一样的地方。

解：

- (a) 各自的对易关系：

- 谐振子升降算符：

设 a 为湮灭算符（降算符）， a^\dagger 为产生算符（升算符）。它们满足 Heisenberg-Weyl 代数：

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (28)$$

若定义粒子数算符 $N = a^\dagger a$ ，则有 $[N, a] = -a$ 和 $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ 。这表明 a^\dagger 和 a 分别使 N 的本征值增加和减少 1。

- 角动量升降算符:

设 J_z 为角动量第三分量, $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$ 为升降算符。它们满足 $\mathfrak{su}(2)$ Lie 代数:

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z, \quad [J_z, J_{\pm}] = \pm\hbar J_{\pm}. \quad (29)$$

这里 J_{\pm} 使 J_z 的本征值增加或减少 \hbar 。

- 粒子产生湮灭算符:

– 玻色子 (Bosons): 设 a_k, a_k^\dagger 为模式 k 的湮灭和产生算符。它们满足正则对易关系 (CCR):

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0. \quad (30)$$

对于单模情形, 这与谐振子的代数结构完全一致。

– 费米子 (Fermions): 设 c_k, c_k^\dagger 为模式 k 的湮灭和产生算符。它们满足正则反对易关系 (CAR):

$$\{c_k, c_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'}, \quad \{c_k, c_{k'}\} = \{c_k^\dagger, c_{k'}^\dagger\} = 0. \quad (31)$$

其中 $\{A, B\} = AB + BA$ 。这意味着 $c_k^\dagger c_k^\dagger = 0$, 即不能在同一状态产生两个费米子。

数学上的异同:

- 相同点: 它们都扮演着“梯子算符” (Ladder Operators) 的角色。它们与某个厄米算符 (N 或 J_z) 的对易关系形式均为 $[H, A] = \lambda A$ (其中 λ 为常数), 这意味着算符 A 可以将该厄米算符的本征态映射到另一个本征值相差 λ 的本征态上, 从而生成整个能谱。
- 不同点:
 - 代数结构: 谐振子/玻色子服从对易关系 (Lie 代数), 对应无穷维表示; 费米子服从反对易关系 (Clifford 代数), 对应有限维表示。
 - 谱的结构: 谐振子/玻色子的粒子数谱是无界的 ($n = 0, 1, 2, \dots$); 角动量谱是有界的 ($-j \leq m \leq j$); 费米子的粒子数谱是严格受限的 ($n = 0, 1$), 这是 $c^{\dagger 2} = 0$ 的直接数学推论。

(b) 物理联系:

- 场的量子化: 自由玻色量子场论在数学上等价于无穷多个独立的谐振子集合。粒子的产生和湮灭算符本质上就是这些谐振子的升降算符。
- 代数同构:
 - 玻色子算符与谐振子算符在数学上是同构的。
 - 费米子算符与自旋 $\frac{1}{2}$ 系统 (角动量特例) 在数学上有紧密联系。对于单模费米子, 可以映射到 Pauli 矩阵: $c \leftrightarrow \sigma_-, c^\dagger \leftrightarrow \sigma_+, 2c^\dagger c - 1 \leftrightarrow \sigma_z$ 。
 - Schwinger 玻色子表示: 将角动量算符与两个谐振子算符 a 和 b 联系起来。

$$J_+ = \hbar a^\dagger b, \quad J_- = \hbar b^\dagger a, \quad J_z = \frac{\hbar}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b). \quad (32)$$

在这个图像下, 自旋向上对应 a 模式的激发, 自旋向下对应 b 模式的激发。总角动量 j 对应总粒子数 $N = a^\dagger a + b^\dagger b$ 的一半。这揭示了角动量代数与谐振子代数之间深刻的内在联系。

完全不一样的地方：

- 统计性质：玻色子算符导致的波函数是对称的（Bose-Einstein 统计），允许宏观数量的粒子占据同一态（如激光、BEC）；费米子算符导致的波函数是反对称的（Fermi-Dirac 统计），服从 Pauli 不相容原理，导致了费米面、简并压等现象。
- Hilbert 空间的维度：谐振子（或单模玻色场）的 Hilbert 空间是无穷维的（ $L^2(\mathbb{R})$ ）。而对于固定的总角动量 j ，角动量算符作用的空间是有限维的（ $2j + 1$ 维）。费米子空间对于每个模式只有 2 维（有粒子/无粒子），这反映了物质的“硬度”和不可入性。