粒子物理基础作业

Clark

7.7 构造代表动量 p 螺旋度 ± 1 归一化的旋量 $u^{(+)}$ 和 $u^{(-)}$。即，找出满足方程 (7.49) 和螺旋度算符（$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$ 的本征值 ± 1）的本征旋量的 u。

$$\text{解：}\left[u^{(\pm)} = A\begin{pmatrix} u \\ \frac{\pm c|\boldsymbol{p}|}{(E+mc^2)}u \end{pmatrix},\quad \text{其中}u = \begin{pmatrix} p_z \pm |\boldsymbol{p}| \\ p_x + \mathrm{i}p_y \end{pmatrix}\text{且}A^2 = \frac{(E+mc^2)}{2|\boldsymbol{p}|c(|\boldsymbol{p}| \pm p_z)}.\right] \tag{1}$$

解：

由正文可知，(7.49) 为

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u(p) = 0. \tag{2}$$

我们需要构造满足 Dirac 方程和螺旋度算符本征值条件的旋量。螺旋度算符定义为 $\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}$，其中 $\hat{\boldsymbol{p}} = \dfrac{\boldsymbol{p}}{|\boldsymbol{p}|}$ 是动量方向的单位矢量，$\boldsymbol{\Sigma}$ 是自旋算符。Dirac 理论中，自旋算符可以表示为：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 Pauli 矩阵。螺旋度算符的本征值方程为：

$$(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\Sigma})u^{(\pm)} = \pm u^{(\pm)}. \tag{4}$$

我们考虑旋量的线性组合：

$$u^{(\pm)} = au^{(1)} + bu^{(2)}, \tag{5}$$

其中 $u^{(1)}$ 和 $u^{(2)}$ 是 Dirac 方程的两个线性独立解：

$$u^{(1)} = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix},\quad u^{(2)} = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2} \\ -\frac{cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

螺旋度算符的矩阵形式为：

$$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \hat{p}_z & \hat{p}_x - \mathrm{i}\hat{p}_y \\ \hat{p}_x + \mathrm{i}\hat{p}_y & -\hat{p}_z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

将螺旋度算符作用于 $u^{(\pm)}$：

$$
\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\Sigma})u^{(\pm)} &= \begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma} & 0\\ 0 & \hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix}\left\{aN\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{cp_z}{E+mc^2}\\\frac{c(p_x+\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2}\end{pmatrix}+bN\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{c(p_x-\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2}\\-\frac{cp_z}{E+mc^2}\end{pmatrix}\right\}\\
&= N\left\{a\begin{pmatrix}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\\frac{c}{E+mc^2}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}p_z\\p_x+\mathrm{i}p_y\end{pmatrix}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\\\frac{c}{E+mc^2}(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}p_x-\mathrm{i}p_y\\-p_z\end{pmatrix}\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}\tag{9}
$$

计算各分量：

$$
\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\hat{p}_z\\\hat{p}_x+\mathrm{i}\hat{p}_y\end{pmatrix},\quad (\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{p}_x-\mathrm{i}\hat{p}_y\\-\hat{p}_z\end{pmatrix},\\
(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}p_z\\p_x+\mathrm{i}p_y\end{pmatrix} &= |\boldsymbol{p}|\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad (\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\sigma})\begin{pmatrix}p_x-\mathrm{i}p_y\\-p_z\end{pmatrix} = |\boldsymbol{p}|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}\tag{10}
$$

代入得：

$$
\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{\Sigma})u^{(\pm)} &= N\left\{a\begin{pmatrix}\hat{p}_z\\\hat{p}_x+\mathrm{i}\hat{p}_y\\\frac{c|\boldsymbol{p}|}{E+mc^2}\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\hat{p}_x-\mathrm{i}\hat{p}_y\\-\hat{p}_z\\0\\-\frac{c|\boldsymbol{p}|}{E+mc^2}\end{pmatrix}\right\}\\
&= \pm|\boldsymbol{p}|N\left\{a\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{cp_z}{E+mc^2}\\\frac{c(p_x+\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{c(p_x-\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2}\\-\frac{cp_z}{E+mc^2}\end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}\tag{11}
$$

比较第一个分量：

$$a\hat{p}_z+b(\hat{p}_x-\mathrm{i}\hat{p}_y)=\pm a.\tag{12}$$

由于 $\hat{p}_x=\dfrac{p_x}{|\boldsymbol{p}|}$，$\hat{p}_y=\dfrac{p_y}{|\boldsymbol{p}|}$，$\hat{p}_z=\dfrac{p_z}{|\boldsymbol{p}|}$，上式可写为：

$$ap_z+b(p_x-\mathrm{i}p_y)=\pm a|\boldsymbol{p}|.\tag{13}$$

解得：

$$b=\frac{\pm a|\boldsymbol{p}|-ap_z}{p_x-\mathrm{i}p_y}=a\frac{\pm|\boldsymbol{p}|-p_z}{p_x-\mathrm{i}p_y}.\tag{14}$$

取 $a=1$，则：

$$b=\frac{\pm|\boldsymbol{p}|-p_z}{p_x-\mathrm{i}p_y}.\tag{15}$$

因此，旋量可表示为：

$$u^{(\pm)}=N\begin{pmatrix}1\\\frac{\pm|\boldsymbol{p}|-p_z}{p_x-\mathrm{i}p_y}\\\frac{cp_z}{E+mc^2}+\frac{c(p_x-\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2}\cdot\frac{\pm|\boldsymbol{p}|-p_z}{p_x-\mathrm{i}p_y}\\\frac{c(p_x+\mathrm{i}p_y)}{E+mc^2}-\frac{cp_z}{E+mc^2}\cdot\frac{\pm|\boldsymbol{p}|-p_z}{p_x-\mathrm{i}p_y}\end{pmatrix}.\tag{16}$$

化简后可得：

$$u^{(\pm)} = A \begin{pmatrix} p_z \pm |\boldsymbol{p}| \\ p_x + \mathrm{i}p_y \\ \frac{\pm c|\boldsymbol{p}|(p_z \pm |\boldsymbol{p}|)}{E+mc^2} \\ \frac{\pm c|\boldsymbol{p}|(p_x + \mathrm{i}p_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ \frac{\pm c|\boldsymbol{p}|}{E+mc^2} u \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 $u = \begin{pmatrix} p_z \pm |\boldsymbol{p}| \\ p_x + \mathrm{i}p_y \end{pmatrix}$，$A = \dfrac{N}{p_z \pm |\boldsymbol{p}|}$。现在确定归一化常数 A。归一化条件为 $u^{(\pm)\dagger}u^{(\pm)} = \dfrac{2E}{c}$：

$$\begin{aligned} u^{(\pm)\dagger}u^{(\pm)} &= |A|^2 \left(u^\dagger u + \frac{c^2|\boldsymbol{p}|^2}{(E+mc^2)^2} u^\dagger u \right) \\ &= |A|^2 \left(1 + \frac{c^2|\boldsymbol{p}|^2}{(E+mc^2)^2} \right) u^\dagger u. \end{aligned} \tag{18}$$

计算 $u^\dagger u$：

$$\begin{aligned} u^\dagger u &= (p_z \pm |\boldsymbol{p}| p_x - \mathrm{i}p_y) \begin{pmatrix} p_z \pm |\boldsymbol{p}| \\ p_x + \mathrm{i}p_y \end{pmatrix} \\ &= (p_z \pm |\boldsymbol{p}|)^2 + p_x^2 + p_y^2 \\ &= p_z^2 \pm 2p_z|\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{p}|^2 + p_x^2 + p_y^2 \\ &= 2|\boldsymbol{p}|^2 \pm 2p_z|\boldsymbol{p}| \\ &= 2|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| \pm p_z). \end{aligned} \tag{19}$$

又因为 $c^2|\boldsymbol{p}|^2 = E^2 - m^2c^4$，所以：

$$1 + \frac{c^2|\boldsymbol{p}|^2}{(E+mc^2)^2} = 1 + \frac{E^2 - m^2c^4}{(E+mc^2)^2} = \frac{2E(E+mc^2)}{(E+mc^2)^2} = \frac{2E}{E+mc^2}. \tag{20}$$

因此：

$$u^{(\pm)\dagger}u^{(\pm)} = |A|^2 \cdot \frac{2E}{E+mc^2} \cdot 2|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| \pm p_z) = |A|^2 \cdot \frac{4E|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| \pm p_z)}{E+mc^2}. \tag{21}$$

令其等于 $\dfrac{2E}{c}$：

$$|A|^2 \cdot \frac{4E|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| \pm p_z)}{E+mc^2} = \frac{2E}{c}. \tag{22}$$

解得：

$$|A|^2 = \frac{E+mc^2}{2c|\boldsymbol{p}|(|\boldsymbol{p}| \pm p_z)}. \tag{23}$$

因此，我们得到了满足 Dirac 方程和螺旋度算符本征值条件的归一化旋量 $u^{(\pm)}$。

7.14 证明 $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 在方程 (7.52) 变换下是不变的。

解：

由正文可知，(7.52) 为

$$\psi \to \psi' = S\psi, \tag{24}$$

其中 S 是如下 4×4 矩阵：

$$S = a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & a_- \\ 0 & a_+ & a_- & 0 \\ 0 & a_- & a_+ & 0 \\ a_- & 0 & 0 & a_+ \end{pmatrix}, \tag{25}$$

其中

$$a_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)}, \tag{26}$$

如通常一样 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$。我们需要证明赝标量量 $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 在此变换下保持不变，即：

$$(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = \bar{\psi}\gamma^5\psi. \tag{27}$$

按照定义，变换后的量为：

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' &= (\psi'^{\dagger}\gamma^0\gamma^5\psi') \\ &= (S\psi)^{\dagger}\gamma^0\gamma^5(S\psi) \\ &= \psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0\gamma^5 S\psi.\end{aligned} \tag{28}$$

因此，我们需要证明：

$$S^{\dagger}\gamma^0\gamma^5 S = \gamma^0\gamma^5. \tag{29}$$

首先，我们证明 γ^5 与 S 对易。在 Dirac 表示中，γ^5 矩阵为：

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

计算 $\gamma^5 S$：

$$\begin{aligned}\gamma^5 S &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_-\sigma_1 & a_+ I \\ a_+ I & a_-\sigma_1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{31}$$

计算 $S\gamma^5$：

$$\begin{aligned}S\gamma^5 &= \begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_-\sigma_1 & a_+ I \\ a_+ I & a_-\sigma_1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{32}$$

比较两式，我们发现：

$$\gamma^5 S = S\gamma^5. \tag{33}$$

因此，γ^5 与 S 对易。现在，我们需要计算 $S^{\dagger}\gamma^0\gamma^5 S$。利用上面的对易关系：

$$S^{\dagger}\gamma^0\gamma^5 S = S^{\dagger}\gamma^0 S\gamma^5. \tag{34}$$

已知 $S^{\dagger}\gamma^0 S = \gamma^0$，我们得到：

$$S^{\dagger}\gamma^0\gamma^5 S = \gamma^0\gamma^5. \tag{35}$$

因此，变换后的赝标量为：

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' &= \psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0\gamma^5 S\psi \\ &= \psi^{\dagger}\gamma^0\gamma^5\psi \\ &= \bar{\psi}\gamma^5\psi.\end{aligned} \tag{36}$$

这就证明了赝标量 $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ 在沿 x 方向的 Lorentz 变换下是不变的。为了完整性，我们简要说明 $S^\dagger\gamma^0 S = \gamma^0$。对于沿 x 方向的 Lorentz 变换，变换矩阵 S 满足：

$$S^\dagger\gamma^0 S = \gamma^0. \tag{37}$$

这一性质可以通过直接计算验证。首先计算 $S^\dagger$：

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix}, \tag{38}$$

因为 $a_\pm$ 是实数，且 σ_1 是 Hermitian 矩阵。然后计算 $S^\dagger\gamma^0 S$：

$$\begin{aligned} S^\dagger\gamma^0 S &= \begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_+ I & -a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & -a_+ I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_+ I & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_+^2 I - a_-^2\sigma_1^2 & a_+a_- I\sigma_1 - a_+a_-\sigma_1 I \\ a_+a_-\sigma_1 I - a_+a_- I\sigma_1 & a_-^2\sigma_1^2 - a_+^2 I \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{39}$$

由于 $\sigma_1^2 = I$，且 I 与 σ_1 对易，我们得到：

$$S^\dagger\gamma^0 S = \begin{pmatrix} (a_+^2 - a_-^2) I & 0 \\ 0 & -(a_+^2 - a_-^2) I \end{pmatrix}. \tag{40}$$

由 $a_\pm$ 的定义：

$$a_+^2 - a_-^2 = \frac{1}{2}(\gamma+1) - \frac{1}{2}(\gamma-1) = 1. \tag{41}$$

因此：

$$S^\dagger\gamma^0 S = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \gamma^0. \tag{42}$$

7.26 计算在质心系中电子-缪子散射的振幅（方程 (7.106)），假设 e 和 μ 沿 z 轴相互接近，相斥，然后沿 z 轴返回。假设初态和末态粒子都具有螺旋度 $+1$。（答案：$\mathcal{M} = -2g_e^2$）

解：

由正文可知，(7.106) 为

$$\mathrm{M} = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2}\left[\bar{u}^{(s_3)}(p_3)\gamma^\mu u^{(s_1)}(p_1)\right]\left[\bar{u}^{(s_4)}(p_4)\gamma_\mu u^{(s_2)}(p_2)\right]. \tag{43}$$

在质心系中，我们设定动量如下：

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_e, 0, 0, p) \quad (\text{入射电子}), \\ p_2 &= (E_\mu, 0, 0, -p) \quad (\text{入射缪子}), \\ p_3 &= (E_e, 0, 0, -p) \quad (\text{出射电子}), \\ p_4 &= (E_\mu, 0, 0, p) \quad (\text{出射缪子}). \end{aligned} \tag{44}$$

其中 $p=|\boldsymbol{p}|$ 是动量大小，$E_{\mathrm{e}}=\sqrt{p^2c^2+m^2c^4}$，$E_\mu=\sqrt{p^2c^2+M^2c^4}$，$m$ 是电子质量，M 是缪子质量。根据螺旋度 $+1$ 的旋量表达式，我们有：对于电子（质量 m）：

$$u(1)=\begin{pmatrix}a_+\\0\\a_-\\0\end{pmatrix},\quad u(3)=\begin{pmatrix}0\\a_+\\0\\a_-\end{pmatrix},\qquad a_\pm=\sqrt{\frac{E_{\mathrm{e}}\pm mc^2}{c}},\tag{45}$$

对于缪子（质量 M）：

$$u(2)=\begin{pmatrix}0\\b_+\\0\\b_-\end{pmatrix},\quad u(4)=\begin{pmatrix}b_+\\0\\b_-\\0\end{pmatrix},\qquad b_\pm=\sqrt{\frac{E_\mu\pm Mc^2}{c}}.\tag{46}$$

首先计算传播子分母：

$$(p_1-p_3)^2=(0,0,0,2p)^2=-4p^2.\tag{47}$$

振幅可写为：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}&=-\frac{g_{\mathrm{e}}^2}{-4p^2}\left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\right]\left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right]\\&=\frac{g_{\mathrm{e}}^2}{4p^2}\left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\right]\left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)\right].\end{aligned}\tag{48}$$

定义电子流和缪子流：

$$J_{\mathrm{e}}^\mu=\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1),\quad J_\mu^\mu=\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2),\tag{49}$$

使用 Dirac 表示下的 γ 矩阵：

$$\gamma^0=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix},\quad \gamma^i=\begin{pmatrix}0&\sigma^i\\-\sigma^i&0\end{pmatrix}.\tag{50}$$

首先计算电子流 J_{e}^μ。计算 $\bar{u}(3)$：

$$\bar{u}(3)=u(3)^\dagger\gamma^0=\begin{pmatrix}0&a_+&0&a_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_+&0&-a_-\end{pmatrix},\tag{51}$$

时间分量：

$$
\begin{aligned}
J_{\mathrm{e}}^0 = \bar{u}(3)\gamma^0 u(1) &= \begin{pmatrix} 0 & a_+ & 0 & -a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \\ a_- \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a_+ & 0 & -a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \\ -a_- \\ 0 \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{52}
$$

空间分量（$i = 1, 2, 3$）：

$$
\begin{aligned}
J_{\mathrm{e}}^i = \bar{u}(3)\gamma^i u(1) &= \begin{pmatrix} 0 & a_+ & 0 & -a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \\ a_- \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a_+ & 0 & -a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i \begin{pmatrix} a_- \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\sigma^i \begin{pmatrix} a_+ \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a_+ & 0 & -a_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^i a_- \\ \sigma_{21}^i a_- \\ -\sigma_{11}^i a_+ \\ -\sigma_{21}^i a_+ \end{pmatrix} \\
&= a_+ \sigma_{21}^i a_- - a_-(-\sigma_{21}^i a_+) = 2a_+ a_- \sigma_{21}^i.
\end{aligned} \tag{53}
$$

现在计算缪子流 $J_{\mu,\mu}$。计算 $\bar{u}(4)$：

$$
\bar{u}(4) = u(4)^\dagger \gamma^0 = \begin{pmatrix} b_+ & 0 & b_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_+ & 0 & -b_- & 0 \end{pmatrix}, \tag{54}
$$

时间分量：

$$
\begin{aligned}
J_{\mu}^0 = \bar{u}(4)\gamma^0 u(2) &= \begin{pmatrix} b_+ & 0 & -b_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_+ \\ 0 \\ b_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_+ & 0 & -b_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_+ \\ 0 \\ -b_- \end{pmatrix} = 0,
\end{aligned} \tag{55}
$$

空间分量（$i=1,2,3$）：

$$
\begin{aligned}
J_\mu^i &= \bar{u}(4)\gamma^i u(2) = \begin{pmatrix} b_+ & 0 & -b_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ b_+ \\ 0 \\ b_- \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_+ & 0 & -b_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^i \begin{pmatrix} 0 \\ b_- \end{pmatrix} \\ -\sigma^i \begin{pmatrix} 0 \\ b_+ \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b_+ & 0 & -b_- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{12}^i b_- \\ \sigma_{22}^i b_- \\ -\sigma_{12}^i b_+ \\ -\sigma_{22}^i b_+ \end{pmatrix} \\
&= b_+\sigma_{12}^i b_- + (-b_-)(-\sigma_{12}^i b_+) = 2b_+b_-\sigma_{12}^i.
\end{aligned} \tag{56}
$$

现在计算流乘积：

$$
\begin{aligned}
[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)]\,[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)] &= J_{\mathrm{e}}^\mu J_{\mu,\mu} = J_{\mathrm{e}}^0 J_\mu^0 - \sum_{i=1}^3 J_{\mathrm{e}}^i J_\mu^i \\
&= 0 - \sum_{i=1}^3 (2a_+a_-\sigma_{21}^i)(2b_+b_-\sigma_{12}^i) \\
&= -4a_+a_-b_+b_- \sum_{i=1}^3 \sigma_{21}^i\sigma_{12}^i,
\end{aligned} \tag{57}
$$

计算 Pauli 矩阵乘积求和：

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \sigma_{21}^i\sigma_{12}^i &= \sigma_{21}^1\sigma_{12}^1 + \sigma_{21}^2\sigma_{12}^2 + \sigma_{21}^3\sigma_{12}^3 \\
&= (1)(1) + (\mathrm{i})(-\mathrm{i}) + (0)(0) = 1 + 1 + 0 = 2.
\end{aligned} \tag{58}
$$

因此：

$$
[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)]\,[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)] = -8a_+a_-b_+b_-. \tag{59}
$$

代入振幅表达式：

$$
\mathcal{M} = \frac{g_{\mathrm{e}}^2}{4p^2}(-8a_+a_-b_+b_-) = -\frac{2g_{\mathrm{e}}^2}{p^2}a_+a_-b_+b_-. \tag{60}
$$

计算 a_+a_- 和 b_+b_-：

$$
\begin{aligned}
a_+a_- &= \sqrt{\frac{E_{\mathrm{e}}+mc^2}{c}}\sqrt{\frac{E_{\mathrm{e}}-mc^2}{c}} = \sqrt{\frac{E_{\mathrm{e}}^2-m^2c^4}{c^2}} = \frac{\sqrt{E_{\mathrm{e}}^2-m^2c^4}}{c} = \frac{pc}{c} = p, \\
b_+b_- &= \sqrt{\frac{E_\mu+Mc^2}{c}}\sqrt{\frac{E_\mu-Mc^2}{c}} = \sqrt{\frac{E_\mu^2-M^2c^4}{c^2}} = \frac{\sqrt{E_\mu^2-M^2c^4}}{c} = \frac{pc}{c} = p,
\end{aligned} \tag{61}
$$

因此：

$$
\mathcal{M} = -\frac{2g_{\mathrm{e}}^2}{p^2}\cdot p\cdot p = -2g_{\mathrm{e}}^2. \tag{62}
$$

补充 在量子电动力学（QED）中，$g_e = \mathrm{e}$，因此最终结果为：

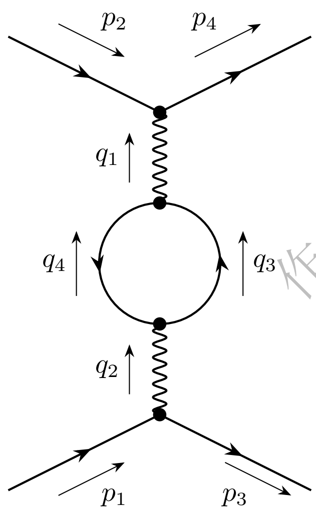
$$\mathcal{M} = -2\mathrm{e}^2. \tag{63}$$

7.42 推导方程 (7.176)。你将需要那个最后的 Feynman 规则：对一个闭合费米子圈要包含一个因子 -1 并求迹。

解：

由正文可知，(7.176) 为

$$\mathcal{M} = -\frac{\mathrm{i}g_e^4}{q^4}\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left\{\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{tr}\left(\gamma_\mu(\not{k}+mc)\gamma_\nu(\not{k}-\not{q}+mc)\right)}{(k^2-m^2c^2)((\not{k}-\not{q})^2-m^2c^2)}\right\}\left[\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)\right]. \tag{64}$$



考虑电子-缪子散射的箱图修正，其中包含一个闭合的电子圈。根据 Feynman 规则，我们逐步构建振幅表达式。首先，写出完整的振幅表达式，包含所有传播子、顶点因子和动量守恒 δ 函数：

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \int &\frac{\mathrm{d}^4q_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4q_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4q_3}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4q_4}{(2\pi)^4}\\ &\times\left[\bar{u}(p_3)(\mathrm{i}g_e\gamma^\mu)u(p_1)\right]\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\lambda}}{q_2^2}\left[\mathrm{LOOP}\right]\frac{-\mathrm{i}g_{\kappa\nu}}{q_1^2}\left[\bar{u}(p_4)(\mathrm{i}g_e\gamma^\nu)u(p_2)\right]\\ &\times(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_3-q_2)(2\pi)^4\delta^4(q_2-q_3-q_4)\\ &\times(2\pi)^4\delta^4(q_3+q_4-q_1)(2\pi)^4\delta^4(q_1+p_2-p_4).\end{aligned} \tag{65}$$

其中，闭合费米子圈（LOOP）的贡献为：

$$\mathrm{LOOP} = (-1)\cdot\mathrm{tr}\left[(\mathrm{i}g_e\gamma^\lambda)\frac{\mathrm{i}(\not{q}_4+mc)}{q_4^2-m^2c^2}(\mathrm{i}g_e\gamma^\kappa)\frac{\mathrm{i}(\not{q}_3+mc)}{q_3^2-m^2c^2}\right]. \tag{66}$$

注意闭合费米子圈规则：包含因子 -1 并对 Dirac 矩阵求迹。现在逐步简化积分变量：

(a) 对 q_2 积分，利用 $\delta^4(p_1-p_3-q_2)$，得到 $q_2 = p_1 - p_3 \equiv q$；

(b) 对 q_1 积分，利用 $\delta^4(q_1+p_2-p_4)$，得到 $q_1 = p_4 - p_2$；

(c) 由动量守恒 $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$，可得 $p_1 - p_3 = p_4 - p_2$，因此 $q_1 = q$；

(d) 对 q_3 积分，利用 $\delta^4(q - q_3 - q_4)$，得到 $q_3 = q - q_4$；

(e) 重命名 q_4 为 k，则 $q_3 = q - k$；

(f) 剩余一个 δ 函数 $(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$，确保总动量守恒。

代入这些关系，振幅变为：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}=\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}&\left[\bar{u}(p_3)(\mathrm{i}g_\mathrm{e}\gamma^\mu)u(p_1)\right]\frac{-\mathrm{i}g_{\mu\lambda}}{q^2}\\&\times\left\{(-1)\cdot\mathrm{tr}\left[(\mathrm{i}g_\mathrm{e}\gamma^\lambda)\frac{\mathrm{i}(\not{k}+mc)}{k^2-m^2c^2}(\mathrm{i}g_\mathrm{e}\gamma^\kappa)\frac{\mathrm{i}(\not{q}-\not{k}+mc)}{(q-k)^2-m^2c^2}\right]\right\}\\&\times\frac{-\mathrm{i}g_{\kappa\nu}}{q^2}\left[\bar{u}(p_4)(\mathrm{i}g_\mathrm{e}\gamma^\nu)u(p_2)\right].\end{aligned}\tag{67}$$

现在整理常数因子：

$$\begin{aligned}&\mathrm{i}g_\mathrm{e}\cdot(-\mathrm{i})\cdot(-1)\cdot\mathrm{i}g_\mathrm{e}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}g_\mathrm{e}\cdot\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}g_\mathrm{e}\\&=\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})\cdot(-1)\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}\cdot g_\mathrm{e}^4\\&=\mathrm{i}\cdot(-\mathrm{i})\cdot(-1)\cdot\mathrm{i}^4\cdot(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}\cdot g_\mathrm{e}^4\\&=(1)\cdot(-1)\cdot(1)\cdot(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}\cdot g_\mathrm{e}^4\\&=(1)\cdot(-1)\cdot(-\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}\cdot g_\mathrm{e}^4\\&=(1)\cdot(\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}\cdot g_\mathrm{e}^4\\&=(1)\cdot(-1)\cdot g_\mathrm{e}^4=-g_\mathrm{e}^4.\end{aligned}\tag{68}$$

但我们需要额外乘以 i 因子（来自 LSZ 约化公式），因此总常数为 $-\mathrm{i}g_\mathrm{e}^4$。代入并整理，得到：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}=-&\frac{\mathrm{i}g_\mathrm{e}^4}{q^4}\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left[\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)\right]\\&\times\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{tr}\left[\gamma_\mu(\not{k}+mc)\gamma_\nu(\not{q}-\not{k}+mc)\right]}{(k^2-m^2c^2)((q-k)^2-m^2c^2)}.\end{aligned}\tag{69}$$

由于迹是标量，我们可以重新标记积分变量 $k\to-k$，并利用 $\not{q}-\not{k}=-(\not{k}-\not{q})$，但迹在同时改变所有 γ 矩阵符号时不变（因为迹是线性的且 $\mathrm{tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu)=4g^{\mu\nu}$ 等性质），因此可以写作：

$$\mathcal{M}=-\frac{\mathrm{i}g_\mathrm{e}^4}{q^4}\left[\bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)\right]\left\{\int\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{tr}\left(\gamma_\mu(\not{k}+mc)\gamma_\nu(\not{k}-\not{q}+mc)\right)}{(k^2-m^2c^2)((k-q)^2-m^2c^2)}\right\}\left[\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)\right].\tag{70}$$

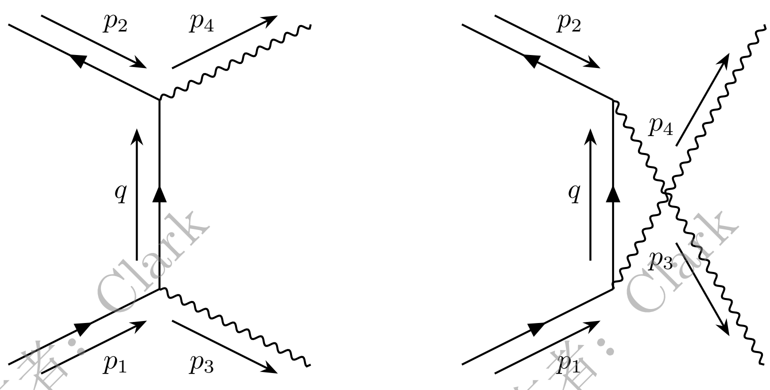
7.50 (a) 在此理论中，对湮灭（$\mathrm{e}^++\mathrm{e}^-\to\gamma+\gamma$）计算振幅 $\mathcal{M}$。

(b) 计算 $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$，假设能量足够高我们可以忽略电子和“光子”的质量（$m_\mathrm{e},m_\gamma\to0$）。

(c) 在质心系中计算 (b) 的结果。用入射电子能量 E 和散射角 θ 表达你的结果。

(d) 计算质心系中对湮灭的微分截面，仍然假定 $m_\mathrm{e}=m_\gamma=0$。总截面是有限的吗？

解：



(a) 依据公式

$$\int \left[\bar{v}(p_2)\mathrm{i}g_\mathrm{e}\frac{\mathrm{i}(\not{q}+m_\mathrm{e}c)}{q^2-m_\mathrm{e}^2c^2}\mathrm{i}g_\mathrm{e}u(p_1)\right]\times(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_3-q)(2\pi)^4\delta^4(p_2+q-p_4)\frac{\mathrm{d}^4q}{(2\pi)^4}. \tag{71}$$

于是，对于电子-正电子湮灭为双光子的过程，有两个 Feynman 图贡献，对应于两个光子交换的通道。根据 Feynman 规则，总振幅为两个图的和：

$$\mathcal{M}=\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2, \tag{72}$$

其中第一个图的振幅为：

$$\mathcal{M}_1=\frac{\mathrm{e}^2}{(p_1-p_3)^2-m_\mathrm{e}^2c^2}\left[\bar{v}(p_2)(\not{p}_1-\not{p}_3+m_\mathrm{e}c)u(p_1)\right], \tag{73}$$

第二个图的振幅为：

$$\mathcal{M}_2=\frac{\mathrm{e}^2}{(p_1-p_4)^2-m_\mathrm{e}^2c^2}\left[\bar{v}(p_2)(\not{p}_1-\not{p}_4+m_\mathrm{e}c)u(p_1)\right], \tag{74}$$

因此总振幅为：

$$\mathcal{M}=\mathrm{e}^2\bar{v}(p_2)\left[\frac{\not{p}_1-\not{p}_3+m_\mathrm{e}c}{(p_1-p_3)^2-m_\mathrm{e}^2c^2}+\frac{\not{p}_1-\not{p}_4+m_\mathrm{e}c}{(p_1-p_4)^2-m_\mathrm{e}^2c^2}\right]u(p_1). \tag{75}$$

(b) 在零质量极限 $m_\mathrm{e}\to 0$，$m_\gamma\to 0$ 下，我们有：

$$(p_1-p_3)^2=-2p_1\cdot p_3,\quad (p_1-p_4)^2=-2p_1\cdot p_4, \tag{76}$$

并且由于 $m_\mathrm{e}=0$，Dirac 方程给出 $\not{p}_1u(p_1)=0$，$\bar{v}(p_2)\not{p}_2=0$。振幅简化为：

$$\mathcal{M}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}\bar{v}(p_2)\left[\frac{\not{p}_3}{p_1\cdot p_3}+\frac{\not{p}_4}{p_1\cdot p_4}\right]u(p_1). \tag{77}$$

现在计算振幅平方的平均值 $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle$。对初态自旋求平均（因子 $\frac{1}{4}$）：

$$\begin{aligned}\langle|\mathcal{M}|^2\rangle&=\frac{1}{4}\sum_{\text{spins}}|\mathcal{M}|^2\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{e}^2}{2}\right)^2\sum_{\text{spins}}\left|\bar{v}(p_2)\left[\frac{\not{p}_3}{p_1\cdot p_3}+\frac{\not{p}_4}{p_1\cdot p_4}\right]u(p_1)\right|^2.\end{aligned} \tag{78}$$

利用迹技术：

$$\sum_{\text{spins}}|\bar{v}(p_2)Au(p_1)|^2=\mathrm{tr}\left[A\not{p}_1\bar{A}\not{p}_2\right], \tag{79}$$

其中 $A=\frac{\not{p}_3}{p_1\cdot p_3}+\frac{\not{p}_4}{p_1\cdot p_4}$，$\bar{A}=\gamma^0A^\dagger\gamma^0$。在计算后得到：

$$\langle|\mathcal{M}|^2\rangle=\mathrm{e}^4\left[\frac{p_2\cdot p_3}{p_1\cdot p_3}+\frac{p_2\cdot p_4}{p_1\cdot p_4}-\frac{(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4)}{2(p_1\cdot p_3)(p_1\cdot p_4)}\right]. \tag{80}$$

(c) 在质心系中，设入射电子和正电子能量为 E，动量大小为 $p=\dfrac{E}{c}$（在零质量极限下）。选择坐标系使得电子沿 $+z$ 方向运动，正电子沿 $-z$ 方向运动。四动量分量为：

$$\begin{aligned}p_1&=\left(\frac{E}{c},0,0,p\right),\\p_2&=\left(\frac{E}{c},0,0,-p\right),\\p_3&=\left(\frac{E}{c},\frac{E}{c}\sin\theta,0,\frac{E}{c}\cos\theta\right),\\p_4&=\left(\frac{E}{c},-\frac{E}{c}\sin\theta,0,-\frac{E}{c}\cos\theta\right).\end{aligned} \tag{81}$$

计算所需的标量积：

$$
\begin{aligned}
p_1 \cdot p_3 &= \frac{E^2}{c^2}(1-\cos\theta), \\
p_1 \cdot p_4 &= \frac{E^2}{c^2}(1+\cos\theta), \\
p_2 \cdot p_3 &= \frac{E^2}{c^2}(1+\cos\theta), \\
p_2 \cdot p_4 &= \frac{E^2}{c^2}(1-\cos\theta), \\
p_1 \cdot p_2 &= 2\frac{E^2}{c^2}, \\
p_3 \cdot p_4 &= 2\frac{E^2}{c^2}.
\end{aligned} \tag{82}
$$

代入振幅平方表达式：

$$
\begin{aligned}
\langle|\mathcal{M}|^2\rangle &= \mathrm{e}^4\left[\frac{\frac{E^2}{c^2}(1+\cos\theta)}{\frac{E^2}{c^2}(1-\cos\theta)} + \frac{\frac{E^2}{c^2}(1-\cos\theta)}{\frac{E^2}{c^2}(1+\cos\theta)} - \frac{\left(2\frac{E^2}{c^2}\right)\left(2\frac{E^2}{c^2}\right)}{2\left[\frac{E^2}{c^2}(1-\cos\theta)\right]\left[\frac{E^2}{c^2}(1+\cos\theta)\right]}\right] \\
&= \mathrm{e}^4\left[\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} - \frac{2}{1-\cos^2\theta}\right],
\end{aligned} \tag{83}
$$

化简：

$$
\begin{aligned}
\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} &= \frac{(1+\cos\theta)^2+(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{2(1+\cos^2\theta)}{1-\cos^2\theta} = \frac{2(1+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta}.
\end{aligned} \tag{84}
$$

因此：

$$
\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = \mathrm{e}^4\left[\frac{2(1+\cos^2\theta)}{\sin^2\theta} - \frac{2}{\sin^2\theta}\right] = 2\mathrm{e}^4\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = 2\mathrm{e}^4\cot^2\theta. \tag{85}
$$

(d) 在质心系中，两体末态的微分截面公式为：

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{S\langle|\mathcal{M}|^2\rangle}{(E_{\mathrm{cm}})^2}, \tag{86}
$$

其中 $E_{\mathrm{cm}} = 2E$ 是质心系总能量，$S = \frac{1}{2}$ 是全同玻色子末态的统计因子。代入 $\langle|\mathcal{M}|^2\rangle = 2\mathrm{e}^4\cot^2\theta$：

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} &= \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{e}^4\cot^2\theta}{(2E)^2} \\
&= \left(\frac{\hbar c}{8\pi}\right)^2 \frac{\mathrm{e}^4\cot^2\theta}{4E^2} \\
&= \left(\frac{\hbar c\mathrm{e}^2}{16\pi E}\right)^2 \cot^2\theta.
\end{aligned} \tag{87}
$$

总截面为：

$$
\sigma = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\sin\theta\mathrm{d}\theta, \tag{88}
$$

代入微分截面：

$$
\sigma = 2\pi\left(\frac{\hbar c\mathrm{e}^2}{16\pi E}\right)^2\int_0^{\pi}\cot^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta. \tag{89}
$$

计算积分：

$$
\int_0^{\pi}\cot^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi}\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta. \tag{90}
$$

在 $\theta \to 0$ 和 $\theta \to \pi$ 时，被积函数发散：

$$\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \sim \frac{1}{\theta} \quad (\theta \to 0), \quad \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \sim \frac{1}{\pi - \theta} \quad (\theta \to \pi). \tag{91}$$

因此积分发散，总截面不是有限的。这种发散是红外发散的典型例子，在量子电动力学中需要通过包括软光子辐射来正确处理。

$$\sigma \to \infty. \tag{92}$$

总截面不是有限的，这是由于在向前和向后方向（$\theta = 0, \pi$）的发散行为造成的。

Clark 作者：Clark