№9) Дана обучающая выборка:

x_1	0	1	0	2	2	2	4	3
x_2	-1	0	0	0	1	0	1	2
y	0	0	0	0	0	1	1	1

1) Методом линейного дискриминантного анализа:

$$\Sigma_0 = \frac{1}{N_0-1}\cdot\sum_{y^{(i)}=0}(x^{(i)}-\mu_0)(x^{(i)}-\mu_0)^T =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{N_1-1}\cdot\sum_{y^{(i)}=0}(x^{(i)}-\mu_1)(x^{(i)}-\mu_1)^T =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \frac{1}{N-K}\cdot\sum_{i=K}\sum_{y^{(i)}=K}(x^{(i)}-\mu_K)(x^{(i)}-\mu_K)^T = \begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&2/3\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_0^{-1} = \begin{pmatrix}2&-2\\-2&4\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{общ}^{-1} = \begin{pmatrix}8/5&-\frac{6}{5}\\-\frac{6}{5}&12/5\end{pmatrix}$$

Дискриминантные ф-ции:

$$\boxed{\begin{aligned}\delta_0(x) &= \frac{8}{5}x_1 - \frac{6}{5}x_2 - \frac{4}{5} + \ln\frac{5}{8}\\ \delta_1(x) &= \ln\frac{3}{8} - \frac{4}{5} - \frac{6}{5}x_2 + \frac{8}{5}x_1\end{aligned}}$$

А также уравнение разделяющей поверхности

$$\boxed{-2x_1 + \ln\frac{5}{3} + 4 = 0}$$

2. Методом квадратичного дискр. анализа.

Кв. дискр. ф-ции:

$$\delta_0(x) = (x_1 + 1 + x_2 + 1 - 1 - 2x_2)\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \ln\left(\frac{5}{8}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}\right) =$$

$$= (-1)(x_1^2 + 2x_2^2) + 2x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2 - 1 + \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

$$\delta_1(x) = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}\Big)\begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} - \ln\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \ln\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{3}{16}\right) - \frac{4x_1^2}{3} - \frac{4}{3}x_2^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{20}{3}x_1 - \frac{4}{3}x_2 - \frac{28}{3}\right.$$

А такие разделяющая поверхность (кривая):

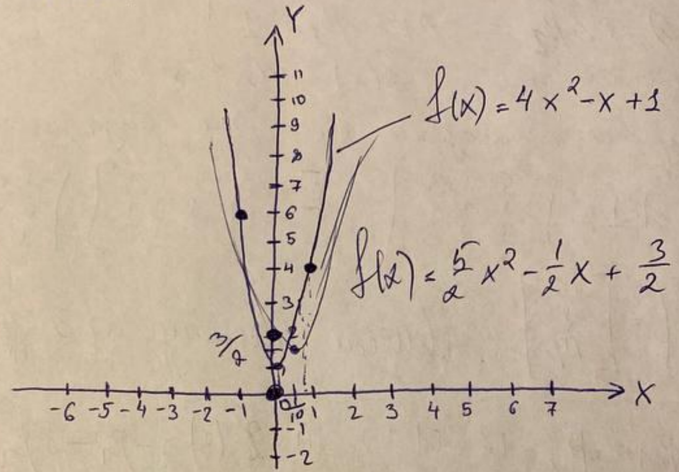
$$-2x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1^2 + 2(x_1 - x_2) - 1 + \ln\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x_1^2 - 4x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1 - 4x_2 + 11 + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{25}{3}\right) = 0$$

№3. Дана обучающая выборка:

x	1	1	0	0	-1
y	4	4	0	2	6

① Изобразить точки:



② Построить модель в виде $f(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ и построить этот график

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad G = X^{\cancel{*}} \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}; \quad G' = y \cdot X^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix};$$

$$* \; G \cdot \beta = G'; \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 2 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Отсюда имеем систему из 3 уравнений с 3 неи

$$\begin{cases} 5\beta_0+\beta_1+3\beta_2=16 & (1)\\ \beta_0+3\beta_1+\beta_2=2 & (2)\\ 3\beta_0+\beta_1+3\beta_2=14 & (3)\end{cases}$$

$(1)-(3) \Rightarrow 2\beta_0 = 2 \Rightarrow \beta_0 = 1$

$\cancel{(1)-(2)\,3=8\beta_0}$

$3\cdot(2)-(3) \Rightarrow 8\beta_1 = -8 \Rightarrow \beta_1=-1$ $\;\Big|\to \beta_2 = 2-1+3 = 4$

Соответственно: $f(x) = 4x^2 - x + 1.$

③ Построить модель того же вида, имея $\lambda=1$:

$$X\cdot X^T+\lambda\cdot I = \begin{bmatrix}5&1&3\\1&3&1\\3&1&3\end{bmatrix} + E = \begin{bmatrix}5&1&3\\1&3&1\\3&1&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&1&3\\1&4&1\\3&1&4\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\beta_0\\\beta_1\\\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16\\2\\14\end{bmatrix}$$. Имеем систему из 3 ур-ий с 3 неизв:

$$\begin{cases} 6\beta_0+\beta_1+3\beta_2=16 & (1)\\ \beta_0+4\beta_1+\beta_2=2 & (2)\\ 3\beta_0+\beta_1+4\beta_2=14 & (3)\end{cases}$$

$(1)-2\cdot(3) \Rightarrow -\beta_1-5\beta_2=-12$

$4\beta_1+\beta_2=0{,}5$

$\beta_2 = \frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$\beta_1=-\frac{1}{2}$

$\beta_0=\frac{3}{2}$

Соответственно: $f(x) = \frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$;

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{5}{2}} = \frac{1}{10}$; $y_0 = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}-\frac{1}{20}+\frac{3}{2} = -\frac{1}{40}+\frac{3}{2}=$

$y_0 = \frac{59}{40} =$

№ 15 Homework Vitalsky A.V. PI

Дана обучающая выборка:

x_1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
x_2	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

— Оценим вероятности

$P_r'\{Y=0|\ldots\} = P_r'\{Y=1|\ldots\} = \frac{1}{2}$

- $P_r\{Y=0 | X_1=1; X_2=1\} = \dfrac{P_r\{X_1=1|Y=0\}\,P_r\{Y=0\}\cdot P_r\{X_2=1|Y=0\}}{P_r\{X_1=1; X_2=1\}} =$

$P_r'\{X_2=1|Y=0\} = \frac{3}{5}$

$P_r' = \{X_1=1|Y=0\} = \frac{2}{5}$

$P_r' = \{X_2=1|Y=1\} = 1$

$P_r'\{X_2=0|Y=0\} = \frac{2}{5}$

$P_r'\{X_2=0|Y=1\} = 0$

$P_r'\{X_1=0|Y=1\} = \frac{2}{5}$

$P_r'\{X_1=0|Y=0\} = \frac{3}{5}$

$P_r'\{X_1=1|Y=1\} = \frac{3}{5}$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{21}{50}} = \frac{\frac{6}{50}}{\frac{21}{50}} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

- $P_r\{Y=1 | X_1=1; X_2=1\} = \dfrac{P_r\{X_2=1|Y=1\}\cdot P_r\{Y=1\}\cdot P_r\{X_1=1|Y=1\}}{P_r\{X_1=1; X_2=1\}} =$

$$= \frac{\frac{3}{10}}{\frac{21}{50}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$