Отзыв официального оппонента

на диссертацию Соколова Андрея Александровича на тему

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ»

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математическихнаук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

На сегодняшний день существует большое количество моделей обобщённой механики деформируемого твёрдого тела — микрополярные, микроморфные, градиентные и нелокальные модели. Все они разработаны для описания эффектов, которые можно обнаружить в материалах при их рассмотрении на микро- и наноуровне, но при этом эти модели оперируют подходами макроуровня.

Среди основных проблем большинства моделей обобщённой механики деформируемого твёрдого тела можно выделить проблему большого количества материальных коэффициентов, которыми оперируют эти модели. Все они требуют развития методов их определения. Но есть среди них и модели, где количество новых материальных коэффициентов, по сравнению с их классическими аналогами, вполне умеренное, однако, такие модели оперируют более сложными выражениями. В частности, нелокальные модели для моделирования дальнодействующих эффектов опрерируют выражениями типа свёртки, из-за чего конечные уравнения приобретают интегро-дифференциальную форму.

Интегро-дифференциальные уравнения, полученные при рассмотрении нелокальных моделей, так же требует развития аппарата исследования, в частности развития численных методов решения, так как аппроксимация интегральных слагаемых является вычислительно сложной задачей. В работе был предложен и реализован в рамках программного комплекса численный метод на основе метода конечных элементов, специально адаптированный под данный класс уравнений.

Поскольку использование таких моделей позволит прогнозировать поведение реальных структурно-чувствительных сред, исследование и анализ разработанных математических моделей являются **актуальными.**

**Сложность** состоит в анализе и аппроксимации интегральных слагаемых, которые использованы для моделирования пространственной нелокальности.

**Научная новизна** работы заключается в разработке **новых** эффективных методов решения задач нелокальной теплопроводности и термоупругости, реализации предложенных алгоритмов в виде программного комплекса и проведении анализа моделей на примере решения задач с известными аналитическими решениями в классической постановке.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Список литературы содержит 138 источников.

**Во введении** приведена актуальность темы исследований, проведён обзор литературы и методов описания материалов, обладающих микро- и наноструктурой, объяснена актуальность развития методов численного решения и анализа рассматриваемых в работе моделей, научная новизна полученных диссертантом результатов, их теоретическая и практическая значимость, вклад автора, сформулированы цели и задачи исследования, положения, выносимые автором на защиту, и другие формальные пункты, характеризующие представленную диссертацию.

**В первой главе** представлены определяющие соотношения нелокальной среды. Определён интегральный нелокальный оператор. С использованием данного оператора были определены уравнения стационарной теплопроводности и равновесия.

В этой же главе были предложены два параметрических семейства функций нелокального влияния: полиномиальное и экспоненциальное, заданных на областях, ограниченных кривыми Ламэ. Описан процесс вычисления нормирующих множителей и геометрический смысл параметров.

**Во второй главе** представлены общие сведения о методе конечных элементов и описан процесс аппкросимации уравнений, после которого автор перешёл к системам линейных алегбраических уравнений, записанных в матрично-векторной форме. Полученные матрицы имеют блочную структуру, где размерность и структура блоков зависит от рассматриваемого уравнения.

Аппроксимация интегральных слагаемых приводит к рассмотрению вложенных интегралов, где область интегрирования вложенного интеграла зависит от координат интегрирования внушнего интеграла, в связи с чем был предложен способ квадратурной аппроксимации области нелокального влияния. Суть этого способа подразумевает аппроксимацию области нелокального влияния относительно квадратурных узлов элементов и при интегрировании включать в расчёт только те элементы, квадратурные узлы которых хотя бы частично попали под область влияния.

**Третья глава** посвящена реализации **авторского** программного комплекса NonLocFEM. В ней приведено подробное описание структуры комплекса и его возможностей. Представлены, реализованные в программном комплексе, параллельный алгоритм ассемблирования матриц теплопроводности и жёсткости, а также алгоритм аппроксимации области нелокального влияния. Здесь же рассмотрено параметрическое семейство базисов квадратичного серендипового элемента, для которого приведена оценка параметра базиса, при которой число обусловленности матрицы будет минимальным.

**Четвёртая глава** посвящена расчётам. Представлен сравнительный анализ решений между локальной и нелокальной постановками, определены основные закономерности нелокальных решений в отношении параметров нелокальной модели.

Проведён анализ применимости принципа Сен-Венана и его аналога для тепловой задачи — принципа стабильности тепловых потоков. Было установлено, что вдали от точек приложения нагружений, решения действительно сливаются в единую поверхность, которая обладает кромочными эффектами на свободных от условий границах.

Также в этой главе был проведён анализ поведения решений на областях с концентраторами на примере растяжения Т-образной пластины и области с эллиптическим вырезом по центру. Было установлено, что в нелокальной постановке роль концентраторов напряжений ниже, чем в классической. При этом в окресности концентратора также наблюдается область с отрицательными значениями деформации, чего также не наблюдалось в классической постановке.

**Пятая глава** посвящена анализу эффективности программного комплекса NonLocFEM. Проведённый анализ эффективности параллельного алгоритма ассемблирования матриц жёсткости и теплопроводности свидетельствует о хорошей масштабируемости алгоритмов при расчётах на машинах с общей и распределённой памятью. Анализ скорости сходимости, которому посвящены два последующих раздела главы, свидетельствуют о корректности полученной оценки оптимального параметра базиса конечных элементов, а предложенный способ предобуславливания на основе неполного разложения Холецкого ускоряет скорость сходимости метода споряжённых градиентов в 2-2.5 раз.

В качестве **замечаний по работе** следует отметить следующее:

1. В 5 главе, при рассмотрении эффективности алгоритма ассемблирования матриц жёсткости и теплопроводности не продемонстрированы результаты ускорения алгоритма ассемблировании при использовании технологии MPI.
2. Не ясна причина использования квадратичных серендиповых элементов. Если проводить расчёты, например, билинейными элементами, будет ли большая разница между решениями? Если же использование квадратичных элементов необходимо, то почему использованы именно восьмиузловые, а не лагранжевы элементы с 9-ю узлами?

Несмотря на высказанные замечания, работа представляет собой завершенное исследование и воспринимается как единое целое. Она содержит значительные научные результаты и может найти применение в практике.

Считаю, что работа Соколова Андрея Александровича на тему «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, безусловно, заслуживает присуждения ему искомой ученой степени по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук, Николай

Ведущий научный сотрудник, Георгиевич

федеральное государственное бюджетное Бураго

учреждение науки Институт проблем механики

имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

119526, Россия, Москва,

Пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

тел. +7 (495) 434-41-35

burago@ipmnet.ru

Подпись официального оппонента

Николая Георгиевича Бураго заверяю

должность, место работы Имя, Отчество, Фамилия