**ОТЗЫВ**

**официального оппонента на диссертацию А.А. Соколова**

**«Математические модели нелокальной термоупругости и их численная реализация», представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математическихнаук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ**

На сегодняшний день существует большое количество моделей обобщённой механики деформируемого твёрдого тела — микрополярные, микроморфные, градиентные и нелокальные модели. Все они разработаны для описания эффектов, которые можно обнаружить в материалах при их рассмотрении на микро- и наноуровне. При этом такие модели являются моделями макроуровня.

Среди основных проблем большинства моделей обобщённой механики деформируемого твёрдого тела можно выделить проблему большого количества материальных коэффициентов, которыми оперируют эти модели. Все они требуют развития методов их определения. Но есть среди них и модели, где количество новых материальных коэффициентов, по сравнению с их классическими аналогами, вполне умеренное. В частности, в нелокальных моделях для описания дальнодействующих эффектов используют выражения типа свёртки, из-за чего конечные уравнения приобретают интегро-дифференциальную форму.

Для верификации и валидации любых новых моделей необходимо иметь возможность построения численных решений ряда задач. Таким образом, крайне **актуальны** задачи разработки численных алгоритмов и эффективных программных кодов для анализа новых моделей. В частности, интегро-дифференциальные уравнения, полученные при рассмотрении нелокальных моделей, требуют развития аппарата исследования, так как аппроксимация интегральных слагаемых является вычислительно **сложной** задачей. В работе был предложен и реализован в рамках **авторского** программного комплекса **новый** численный метод на основе метода конечных элементов, специально адаптированный под данный класс уравнений.

Поскольку использование таких моделей позволит прогнозировать поведение реальных структурно-чувствительных сред, исследование и анализ разработанных математических моделей являются **актуальными.**

**Научная новизна** работы заключается в разработке **новых** эффективных методов решения задач нелокальной теплопроводности и термоупругости, реализации предложенных **новых** алгоритмов в виде программного комплекса и проведении анализа моделей на примере решения задач с известными аналитическими решениями в классической постановке.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Список литературы содержит 138 источников.

**Во введении** обоснована актуальность темы исследований, проведён обзор литературы и методов описания материалов, обладающих микро- и наноструктурой, объяснена актуальность развития методов численного решения и анализа рассматриваемых в работе моделей, научная новизна полученных диссертантом результатов, их теоретическая и практическая значимость, вклад автора, сформулированы цели и задачи исследования, положения, выносимые автором на защиту, и другие формальные пункты, характеризующие представленную диссертацию.

**В первой главе** представлены определяющие соотношения нелокальной среды. Определён интегральный нелокальный оператор. С использованием данного оператора были определены уравнения стационарной теплопроводности и равновесия.

В этой же главе были предложены два параметрических семейства функций нелокального влияния: полиномиальное и экспоненциальное, заданных на областях, ограниченных кривыми Ламэ. Описан процесс вычисления нормирующих множителей и геометрический смысл параметров.

**Во второй главе** представлены общие сведения о методе конечных элементов и описан процесс аппроксимации уравнений, после которого автор перешёл к системам линейных алгебраических уравнений, записанных в матрично-векторной форме. Полученные матрицы имеют блочную структуру, где размерность и структура блоков зависит от рассматриваемого уравнения.

Аппроксимация интегральных слагаемых приводит к рассмотрению вложенных интегралов, где область интегрирования вложенного интеграла зависит от координат интегрирования внешнего интеграла, в связи с чем был предложен **новый** способ квадратурной аппроксимации области нелокального влияния. Суть этого способа подразумевает аппроксимацию области нелокального влияния относительно квадратурных узлов элементов и при интегрировании включать в расчёт только те элементы, квадратурные узлы которых хотя бы частично попали под область влияния.

**Третья глава** посвящена реализации **авторского** программного комплекса NonLocFEM. В ней приведено подробное описание структуры комплекса и его возможностей. Представлены, реализованные в программном комплексе, параллельный алгоритм ассемблирования матриц теплопроводности и жёсткости, а также алгоритм аппроксимации области нелокального влияния. Здесь же рассмотрено параметрическое семейство базисов квадратичного серендипового элемента, для которого приведена оценка параметра базиса, при которой число обусловленности матрицы будет минимальным.

**Четвёртая глава** посвящена расчётам. Представлен сравнительный анализ решений между локальной и нелокальной постановками, определены основные закономерности нелокальных решений в отношении параметров нелокальной модели.

Проведён анализ применимости принципа Сен-Венана и его аналога для тепловой задачи — принципа стабильности тепловых потоков. Было установлено, что вдали от точек приложения нагружений, решения действительно сливаются в единую поверхность, которая обладает кромочными эффектами на свободных от условий границах.

Также в этой главе был проведён анализ поведения решений на областях с концентраторами на примере растяжения Т-образной пластины и области с эллиптическим вырезом по центру. Было установлено, что в нелокальной постановке роль концентраторов напряжений ниже, чем в классической. При этом в окрестности концентратора наблюдается область с отрицательными значениями деформации, чего также не наблюдалось в классической постановке.

**Пятая глава** посвящена анализу эффективности программного комплекса NonLocFEM. Проведённый анализ эффективности параллельного алгоритма ассемблирования матриц жёсткости и теплопроводности свидетельствует о хорошей масштабируемости алгоритмов при расчётах на машинах с общей и распределённой памятью. Анализ скорости сходимости, которому посвящены два раздела главы, свидетельствуют о корректности полученной оценки оптимального параметра базиса конечных элементов, а предложенный способ предобуславливания на основе неполного разложения Холецкого ускоряет скорость сходимости метода сопряжённых градиентов в 2-2.5 раз.

В качестве **замечаний по работе** следует отметить следующее:

1. В 5 главе, при рассмотрении эффективности алгоритма ассемблирования матриц жёсткости и теплопроводности не продемонстрированы результаты ускорения алгоритма ассемблировании при использовании технологии MPI.
2. Не ясна причина использования квадратичных серендиповых элементов. Если проводить расчёты, например, билинейными элементами, будет ли большая разница между решениями? Если же использование квадратичных элементов необходимо, то почему использованы именно восьмиузловые, а не лагранжевы элементы с 9-ю узлами?
3. В работе был проведён анализ с исследованием поведения решений при использовании двух семейств функций нелокального влияния. Однако не был получен ответ из каких соображений следует выбирать ту или иную функцию.

Несмотря на высказанные замечания, работа представляет собой завершенное исследование и воспринимается как единое целое. Она содержит значительные научные результаты и может найти применение в практике.

**Основное содержание диссертации опубликовано** в 5 статьях журналов списка ВАК РФ (а также наукометрических баз Scopus и Web of Science), доложено в ряде международных и всероссийских конференций. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа полностью соответствует требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям в соответствии с Поставлением Правительства РФ от 24.09.2013 № 842 (ред. от 01.10.2018) «О порядке присуждения учёных степеней», а её автор Соколов Андрей Александрович безусловно заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ.

Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук,

Ведущий научный сотрудник,

федеральное государственное бюджетное

учреждение науки Институт проблем механики

имени А.Ю. Ишлинского Российской академии наук

119526, Россия, Москва, Пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1

тел. +7 (495) 434-41-35

burago@ipmnet.ru

Н.Г. Бураго

Подпись официального оппонента

Николая Георгиевича Бураго заверяю

должность, место работы Имя, Отчество, Фамилия