Отзыв официального оппонента

на диссертацию Соколова Андрея Александровича на тему

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ»

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математическихнаук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**Актуальность работы.** На сегодняшний день в области обобщённой механики деформируемого твёрдого тела можно выделить следующие модели: микрополярные, микроморфные, градиентные и нелокальные. Эти модели предназначены для описания эффектов, возникающих на микро- и наноуровне, но при этом используют подходы макроуровня. Одной из ключевых проблем большинства таких моделей является необходимость определения большого количества материальных коэффициентов, что требует дополнительных исследований для их определения. Некоторые модели имеют умеренное количество новых коэффициентов, по сравнению с классическими аналогами, однако они требуют более сложных математических формулировок. В частности, нелокальные модели, которые учитывают дальнодействующие эффекты, оперируют интегро-дифференциальными уравнениями, что усложняет их анализ и увеличивает вычислительную сложность при численном решении.

Диссертационная работа Соколова А.А. сосредоточена на исследовании нелокальных моделей теплопроводности и термоупругости.

Важным этапом исследования является разработка численного алгоритма решения, и в данной работе был выбран метод конечных элементов, который был специально адаптирован для нелокальных моделей. Главным достижением работы стал программный комплекс NonLocFEM, который объединяет все предложенные алгоритмы и предназначен для работы на многопроцессорных вычислительных системах с использованием библиотек OpenMP и MPI. Результаты исследования подтверждают высокую эффективность программного комплекса и достоверность решений.

Анализ и решение интегро-дифференциальных уравнений стационарной теплопроводности и термоупругости представляет большую вычислительную **сложность**.

**Научная новизна** работы состоит в исследовании нелокальных уравнений стационарной теплопроводности и термоупругости, разработке новых методов их решения и реализации программного комплекса.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 111 страниц, включая 37 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 138 источников.

**Во введении** проведён обзор инженерных приложений, в которых могут быть востребованы задачи теплопроводности и термоупругости. Определена проблема моделирования поведения материалов, обладающих микро- и наноструктурой и иерархия моделей механики твёрдого тела. После этого Соколов А.А. приводит широкий обзор моделей обобщённой механики сплошной среды и останавливается на рассмотрении нелокальных моделей, их особенностях и методах численного исследования. Помимо обзорной части здесь также определены цели работы, её научная новизна, практическая значимость и личный вклад соискателя.

**В первой главе** описаны основные соотношения нелокальных моделей теплопроводности и термоупругости. Представлен интегральный нелокальный оператор и определённые с его помощью вектор плотности теплового потока и тензор напряжений, которые используются при описании уравнения стационарной теплопроводности и равновесия.

Нелокальная модель обладает тремя основными параметрами: весовой параметр, область нелокального влияния и функция нелокального влияния. Последние два параметра тесно связаны между собой, поэтому их определению посвящён целый раздел главы, где Соколов А.А. рассуждает о возможных вариациях областей нелокального влияния и определяет на них два семейства функций нелокального влияния: полиномиальное и экспоненциальное.

**Во второй главе** предложена схема численного решения уравнений стационарной теплопроводности и равновесия в нелокальных постановках при помощи метода конечных элементов. Основную сложность здесь представляет аппроксимация интегрального слагаемого, так как это приводит к аппроксимации вложенного интеграла, где область интегрирования внутреннего интеграла зависит от переменной интегрирования внешнего интеграла. Для решения этой проблемы был рассмотрен способ квадратурной аппроксимации области нелокального влияния, где область влияния аппроксимируется относительно квадратурных узлов сетки.

В конечном итоге автор приходит к системам линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), представленных в матрично-векторной форме. Здесь матрицы теплопроводности и жёсткости, по аналогии с интегральным нелокальным оператором, могут быть представлены в виде взвешенной суммы. Данные матрицы имеют разреженную и симметричную структуру, поэтому к ним применимы известные методы решения, например, метод сопряжённых градиентов.

**Третья глава** посвящена реализации программного комплекса NonLocFEM, написанном на языке программирования C++. В этой главе описана структура комплекса и краткое описание его возможностей, в частности использование параллельных вычислений при помощи технологий OpenMP и MPI.

Предложен алгоритм ассемблирования нелокальных матриц теплопроводности и жёсткости, с разделенными алгоритмами формирования потрета матрицы и интегрирования. Данный алгоритм ассемблирует матрицы построчно, что даёт возможность использовать параллельные вычисления без опасений, связанных с гонкой данных или барьерными синхронизациями.

Так же в этой главе рассмотрено семейство базисов квадратичного сенедипого элемента со свободным параметром. Предложена оценка параметра, при которой достигается минимум следа матрицы и как следствие минимум числа обусловленности, что в свою очередь должно ускорить сходимость итерационных методов решения.

**Четвёртая глава** посвящена результатам расчётов, сравнении решений между классическими и нелокальными постановками, а также применимости принципа Сен-Венана и его аналога для тепловой задачи — принципа стабильности тепловых потоков.

В качестве основного отличия решений в нелокальных постановках, по сравнению с классическими, стоит выделить появление кромочного эффекта, который проявляет себя в полях температуры и перемещений на границах, с заданными нагружениями, и на свободных от условий границах в полях плотности теплового потока и напряжений. Также стоит отметить снижение роли концентраторов, так как в нелокальных постановках, максимальный уровень напряжения и плотности теплового потока снижается.

**В пятой главе** проведены эксперименты, демонстрирующие эффективность программного комплекса NonLocFEM. В этой же главе проведён обзор методов, направленных на ускорение сходимости итерационных методов при решении СЛАУ. Продемонстрированные результаты демонстрируют работоспособность оценки, предложенной при обзоре базисов квадратичных серендиповых элементов, а также на основе предложенного анализа собственных чисел удалось установить достаточно тесную связь между матрицами, полученными, в локальном случае и нелокальном. Предложенный в этой главе способ предобуславливания, использующий неполное разложение Холецкого локальной матрицы, демонстрирует двукратное ускорение сходимости итерационных методов.

В качестве **замечаний по работе** следует отметить следующее:

1.

2.

3.

Несмотря на высказанные замечания, работа представляет собой завершенное исследование и воспринимается как единое целое. Она содержит значительные научные результаты и может найти применение в практике.

Считаю, что работа Соколова Андрея Александровича на тему «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, безусловно, заслуживает присуждения ему искомой ученой степени по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук, Никабадзе

доцент, Михаил

Федеральное государственное бюджетное Ушангиевич

образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет

имени М.В. Ломоносова»

119991, Россия, Москва,

ул. Колмогорова, 1.

тел. +7 (495) XXX-XX-XX

nikabadze@mail.ru

Подпись официального оппонента

Михаила Ушангиевича Никабадзе

должность, место работы Имя, Отчество, Фамилия