Отзыв официального оппонента

на диссертацию Соколова Андрея Александровича на тему

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ»

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математическихнаук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

**Актуальность работы.** Диссертационная работа Соколова А.А. посвящена исследованию нелокальных моделей теплопроводности и термоупругости. Данный класс моделей позволяет учесть дальнодействующие эффекты, которые могут возникать в материалах обладающих микро- и наноструктурой. В качестве основного преимущества данного класса моделей, по сравнению с другими моделями обобщённой механики сплошной среды, можно выделить малое количество материальных параметров, требующих экспериментального уточнения. К недостаткам стоит отнести более сложную формулировку уравнений, которые выражены в интегро-дифференциальной форме, что влечёт за собой большую вычислительную сложность.

Важным этапом, после разработки математических моделей, является разработка численного алгоритма решения. В работе Соколов А.А. сделал выбор в пользу метода конечных элементов, который применительно к моделям данного класса так же принято называть методом нелокальных конечных элементов. В качестве основной особенности, предложенного алгоритма, стоит выделить способ аппроксимации области нелокального влияния, где аппроксимация происходит относительно центров конечных элементов. Это позволило упростить конечный алгоритм и представить его в форме, где алгоритм интегрирования и алгоритм формирования портрета матрицы могут быть реализованы независимо друг от друга.

Но главным достижением в данной работе является программный комплекс NonLocFEM, который собрал в себе реализацию всех предложенных в работе алгоритмов. Данный программный комплекс предназначен для вычислений на многопроцессорных вычислительных машинах и в качестве инструментов для распараллеливания кода использует такие библиотеки, как OpenMP и MPI. Показанные в работе результаты свидетельствуют о высокой эффективности, реализованного в программе кода, а так же о достоверности решений.

Анализ и решение интегро-дифференциальных уравнений представляет большую выислительную **сложность**.

**Научная новизна** работы состоит в исследовании нелокальных уравнений стационарной теплопроводности и термоупругости, разработке новых методов их решения и реализации программного комплекса.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 111 страниц, включая 37 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 138 источников.

**Во введении** приведён широкий обзор литературы, посвящённой современным инженерным задачам, трудностям, с которыми сталкиваются исследователи, а также моделям обобщённой механики сплошной среды, предназначенные для исследования материалов обладающих микро- и наноструктурой. Также здесь объяснена актуальность темы исследования, научная новизна, вклад автора, сформулированы цели и задачи исследования, положения, выносимые автором на защиту, и другие пункты.

**В первой главе** представлены математические модели нелокальной теплопроводности и нелокальной термоупругости. Рассмотрен интегральный нелокальный оператор, на его основе сформулированы уравнения стационарной теплопроводности и равновесия в интегро-дифференциальной форме, а также предложены два семейства функций нелокального влияния: полиномиальное и экспоненциальное.

**Во второй главе** описаны общие сведения о методе конечных элементов и схема аппроксимации уравнений стационарной теплопроводности и равновесия в нелокальных постановках. Получены матрично-векторые уравнения, основной особенностью которых является разбиение матриц теплопроводности и жёсткости на взвешенные суммы, где весовые параметры аналогичны интегральному нелокальному оператору.

Здесь же предложен способ квадратурной аппроксимации области нелокального влияния, подразумевающий аппроксимацию области относительно каждого квадратурного узла и учёт в расчёте тех элементов, квадратурные узлы которых попали в область. Представлены алгоритмы ассемблирования слагаемых систем алгебраических уравнений, соответствующих слагаемым исходных уравнений, а также вычисления производных величин, таких как вектор плотности теплового потока и тензор напряжений.

**В третьей главе** представлена общая структура программного комплекса NonLocFEM, описана взаимосвязь модулей программы, их структура и особенности. Стоит отметить возможность использовать многопроцессорные вычислительные системы при помощи технологий OpenMP и MPI.

Далее в главе описаны алгоритмы и структуры, реализованные в программном комплексе: параллельный алгоритм ассемблирования матриц теплопроводности и жёсткости, аппроксимация области нелокального влияния относительно центров жлементов на основе k-d дерева, а также оптимизированный базис для квадратичных серендиповых элементов.

**В четвёртой главе** представлен сравнительный анализ решений между классической постановкой и нелокальной. Продемонстрирована применимость принципов Сен-Венана и стабильности тепловых потоков в контексте нелокальных постановок. Изучено влияние нелокальных эффектов в областях с концентраторами тепловых потоков и напряжений. Проведён анализ температурных деформаций на областях с эллиптическими вырезами.

Главной особенностью нелокальных решений, по сравнению с их классическими аналогами, стоит считать кромочные эффекты, которые характеризуются увеличением температуры и перемещений вблизи точек приложения нагружений и снижением производных величи, таких как плотность теплового потока и напряжения на свободных от нагружений границах. Также стоит отметить снижение роли концентраторов в нелокальных постановках и увеличению уровня напряжения внутри области.

**В пятой главе** проведён анализ эффективности программного комплекса NonLocFEM. Представлены результаты ускорения расчётов на 18-ядерном процессоре Intel Core i9-10980XE, а также данные о балансировке данных между шестью вычислительными узлами, свидетельствующие о высоком уровне параллельности кода программы.

Также был проведён анализ сходимости метода сопряжённых градиентов при вариации свободного параметра базиса и весового параметра модели. Представленные данные свидетельствуют об ускорении сходимости метода споряжённых градиентов при увеличении вклада нелокального влияния. В последнем разделе главы был предложен предобуславливатель на основе неполного разложения Холецкого локальной матрицы жёсткости. При применении такого способа предобуславливания системы удалось получить двукратное ускорение сходимости решения.

В качестве **замечаний по работе** следует отметить следующее:

1. В работе представленно исследование двух семейств функций нелокального влияния: полиномиальные и экспоненциальные. Показано, что качественных различий в решениях, при их использовании не наблюдается. Распространяется ли это и на другие потенциальные семейства функций нелокального влияния?
2. Предложенный в работе алгоритм численного решения оперирует блочными матрицами и в работе были введены определения блоков, из которых ассемблируются матрицы теплопроводности (2.9) и жёсткости (2.10). Однако процедура, при которой были получены имеено такие определения блоков, не до конца понятна.

Несмотря на высказанные замечания, работа представляет собой завершенное исследование и воспринимается как единое целое. Она содержит значительные научные результаты и может найти применение в практике.

Считаю, что работа Соколова Андрея Александровича на тему «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, безусловно, заслуживает присуждения ему искомой ученой степени по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук, Евгений

Ведущий научный сотрудник, Борисович

Федеральный исследовательский центр Савенков

Институт прикладной математики

имени М.В. Келдыша Российской академии наук

125047, Россия, Москва,

Миусская пл., д. 4.

тел. +7 (495) XXX-XX-XX

e.savenkov@gmail.com

Подпись официального оппонента

Евгения Борисовича Савенкова заверяю

должность, место работы Имя, Отчество, Фамилия