Отзыв официального оппонента

на диссертацию Соколова Андрея Александровича на тему

«МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ»

представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математическихнаук по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

На сегодняшний день существует большое количество моделей обобщённой механики деформируемого твёрдого тела — микрополярные, микроморфные, градиентные и нелокальные модели. Все они разработаны для описания эффектов, которые можно обнаружить в материалах при их рассмотрении на микро- и наноуровне, но при этом эти модели оперируют подходами макроуровня.

Среди основных проблем большинства моделей обобщённой механики деформируемого твёрдого тела можно выделить проблему большого количества материальных коэффициентов, которыми оперируют эти модели. Все они требуют развития методов их определения. Но есть среди них и модели, где количество новых материальных коэффициентов, по сравнению с их классическими аналогами, вполне умеренное, однако, такие модели оперируют более сложными выражениями. В частности, нелокальные модели для моделирования дальнодействующих эффектов опрерируют выражениями типа свёртки, из-за чего конечные уравнения приобретают интегро-дифференциальную форму.

Интегро-дифференциальные уравнения, полученные при рассмотрении нелокальных моделей, так же требует развития аппарата исследования, в частности развития численных методов решения, так как аппроксимация интегральных слагаемых является вычислительно сложной задачей. В работе был предложен и реализован в рамках программного комплекса численный метод на основе метода конечных элементов, специально адаптированный под данный класс уравнений.

Поскольку использование таких моделей позволит прогнозировать поведение реальных структурно-чувствительных сред, исследование и анализ разработанных математических моделей являются **актуальными.**

**Сложность** состоит в анализе и аппроксимации интегральных слагаемых, которые использованы для моделирования пространственной нелокальности.

**Научная новизна** работы заключается в разработке новых эффективных методов решения задач нелокальной теплопроводности и термоупругости, реализации предложенных алгоритмов в виде программного комплекса и проведении анализа моделей на примере решения задач с известными аналитическими решениями в классической постановке.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 111 страниц, включая 37 рисунков и 9 таблиц. Список литературы содержит 138 источников.

**Во введении** приведён широкий обзор литературы, посвящённой современным инженерным задачам, трудностям, с которыми сталкиваются исследователи, а также моделям обобщённой механики сплошной среды, предназначенные для исследования материалов обладающих микро- и наноструктурой. Также здесь объяснена актуальность темы исследования, научная новизна, вклад автора, сформулированы цели и задачи исследования, положения, выносимые автором на защиту, и другие формальные пункты.

**В первой главе** представлены математические модели нелокальной теплопроводности и нелокальной термоупругости. Рассмотрен интегральный нелокальный оператор, на его основе сформулированы уравнения стационарной теплопроводности и равновесия в интегро-дифференциальной форме, а также предложены два семейства функций нелокального влияния: полиномиальное и экспоненциальное.

**Во второй главе** описаны общие сведения о методе конечных элементов и схема аппроксимации уравнений стационарной теплопроводности и равновесия в нелокальных постановках. Получены матрично-векторые уравнения, основной особенностью которых является разбиение матриц теплопроводности и жёсткости на взвешенные суммы, где весовые параметры аналогичны интегральному нелокальному оператору.

Здесь же предложен способ квадратурной аппроксимации области нелокального влияния, подразумевающий аппроксимацию области относительно каждого квадратурного узла и учёт в расчёте тех элементов, квадратурные узлы которых попали в область. Представлены алгоритмы ассемблирования слагаемых систем алгебраических уравнений, соответствующих слагаемым исходных уравнений, а также вычисления производных величин, таких как вектор плотности теплового потока и тензор напряжений.

**В третьей главе** представлена общая структура программного комплекса NonLocFEM, описана взаимосвязь модулей программы, их структура и особенности. Стоит отметить возможность использовать многопроцессорные вычислительные системы при помощи технологий OpenMP и MPI.

Далее в главе описаны алгоритмы и структуры, реализованные в программном комплексе: параллельный алгоритм ассемблирования матриц теплопроводности и жёсткости, аппроксимация области нелокального влияния относительно центров жлементов на основе k-d дерева, а также оптимизированный базис для квадратичных серендиповых элементов.

**В четвёртой главе** представлен сравнительный анализ решений между классической постановкой и нелокальной. Продемонстрирована применимость принципов Сен-Венана и стабильности тепловых потоков в контексте нелокальных постановок. Изучено влияние нелокальных эффектов в областях с концентраторами тепловых потоков и напряжений. Проведён анализ температурных деформаций на областях с эллиптическими вырезами.

Главной особенностью нелокальных решений, по сравнению с их классическими аналогами, стоит считать кромочные эффекты, которые характеризуются увеличением температуры и перемещений вблизи точек приложения нагружений и снижением производных величи, таких как плотность теплового потока и напряжения на свободных от нагружений границах. Также стоит отметить снижение роли концентраторов в нелокальных постановках и увеличению уровня напряжения внутри области.

**В пятой главе** проведён анализ эффективности программного комплекса NonLocFEM. Представлены результаты ускорения расчётов на 18-ядерном процессоре Intel Core i9-10980XE, а также данные о балансировке данных между шестью вычислительными узлами, свидетельствующие о высоком уровне параллельности кода программы.

Также был проведён анализ сходимости метода сопряжённых градиентов при вариации свободного параметра базиса и весового параметра модели. Представленные данные свидетельствуют об ускорении сходимости метода споряжённых градиентов при увеличении вклада нелокального влияния. В последнем разделе главы был предложен предобуславливатель на основе неполного разложения Холецкого локальной матрицы жёсткости. При применении такого способа предобуславливания системы удалось получить двукратное ускорение сходимости решения.

В качестве **замечаний по работе** следует отметить следующее:

1.

2.

3.

Несмотря на высказанные замечания, работа представляет собой завершенное исследование и воспринимается как единое целое. Она содержит значительные научные результаты и может найти применение в практике.

Считаю, что работа Соколова Андрея Александровича на тему «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ И ИХ ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ» удовлетворяет всем требованиям ВАК РФ, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, безусловно, заслуживает присуждения ему искомой ученой степени по специальности 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат полностью отражает содержание диссертации.

Официальный оппонент

Доктор физико-математических наук, Евгений

Ведущий научный сотрудник, Борисович

Федеральный исследовательский центр Савенков

Институт прикладной математики

имени М.В. Келдыша Российской академии наук

125047, Россия, Москва,

Миусская пл., д. 4.

тел. +7 (495) XXX-XX-XX

e.savenkov@gmail.com

Подпись официального оппонента

Евгения Борисовича Савенкова заверяю

должность, место работы Имя, Отчество, Фамилия