



Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)»  
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

---

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Прикладная математика»

**РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА**  
***К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ***  
***НА ТЕМУ:***  
**РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**  
**НЕЛОКАЛЬНОЙ УПРУГОСТИ И ИХ**  
**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ**

Студент группы ФН2-42М

А.А. Соколов

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Руководитель ВКР

Г.Н. Кувыркин

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

Нормоконтролер

М.М. Лукашин

\_\_\_\_\_  
(Подпись, дата)

2021 г.

## АННОТАЦИЯ

Расчётно-пояснительная записка 54 с., 45 рис., 3 табл., 21 источник.

Объектом исследования в данной работе выступает двумерное уравнение равновесия в нелокальной постановке. В качестве численного метода решения был выбран метод конечных элементов с использованием изопараметрических конечных элементов.

Цель работы — реализация эффективного конечно-элементного решателя уравнения равновесия в нелокальной постановке с граничными условиями первого и второго родов. Проанализировать полученные результаты и сравнить их с решением аналогичного уравнения в классической постановке.

В работе содержится постановка задачи и описание параллельного и распределённого алгоритма сборки матрицы жёсткости с использованием технологий OpenMP и MPI. Также были предложены различные варианты балансировки данных между процессами. Проанализирована эффективность и масштабируемость полученного алгоритма на примере результатов расчётов на системе K-10. Также в работе описаны особенности связанные с выполнением принципа Сен-Венана на примере вытянутой прямоугольной пластины. Проведено исследование поведения решения в областях со ступенчатым переходом, а также в областях с эллиптическими вырезами. Полученные результаты были сравнены с результатами решения уравнения в классической постановке. Результаты для областей со ступенчатым переходом также были сравнены с результатами натурных экспериментов. Для областей с эллиптическими вырезами была проанализирована зависимость максимальных напряжений от главных радиусов эллипсов.

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>АННОТАЦИЯ</b> . . . . .	2
<b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .	4
<b>1. Основные соотношения</b> . . . . .	6
1.1. Постановка задачи . . . . .	6
1.2. Выбор функций нелокального влияния . . . . .	8
1.3. Построение численной схемы решения на основе метода конеч- ных элементов . . . . .	10
<b>2. Программная реализация</b> . . . . .	17
2.1. Аппроксимация зоны нелокального влияния . . . . .	17
2.2. Распараллеливание алгоритма . . . . .	19
2.3. Балансировка данных . . . . .	20
<b>3. Результаты расчётов</b> . . . . .	22
3.1. Результаты распараллеливания . . . . .	22
3.2. Задача Неймана и проверка принципа Сен-Венана . . . . .	27
3.3. Расчёт на Т-образной области . . . . .	34
3.4. Задача Кирша с обобщением на эллиптические вырезы . . . . .	40
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .	52
<b>Список использованных источников</b> . . . . .	53

## ВВЕДЕНИЕ

Современное машиностроение ставит высокие требования к физико-механическим свойствам материалов из которых должны быть изготовлены детали конструкций или их покрытия. Как правило, такими материалами становятся различные структурно-чувствительные материалы, которые получают при помощи компактирования нанопорошков, осаждением на подложку, кристаллизацией аморфных сплавов и другими способами [1].

Использование классических математических моделей для структурно-чувствительных материалов некорректно, так как классические модели не учитывают масштабных эффектов, которые в телах малых размеров становятся сопоставимыми с размерами самого тела и начинают оказывать существенное влияние. Существует множество различных моделей, которые описывают подобные эффекты, однако наибольший интерес представляют модели, в которых основные соотношения имеют ту же формулировку, что и классические. Одной из таких моделей является нелокальной модель Эрингена [2], где определяющие соотношения имеют тот же вид, что и в классическом подходе, но представлены в интегро-дифференциальной форме. Такая формулировка открывает возможности для использования хорошо изученных численных методов, в частности метод конечных элементов.

В данной работе рассмотрено двумерное уравнение равновесия. Ранее, подобные уравнения в двумерных постановка были рассмотрены в работах [3], [4], [5] и многих других. Основной сложностью, с которой сталкиваются исследователи при решении подобных задач, это аппроксимация интегро-дифференциальных уравнений. В частности, в методе конечных элементов, которые применительно к данным задачам принято ещё называть методом нелокальных конечных элементов, приходится выполнять поиск ближайших соседей, что накладывает некоторые дополнительные накладные расходы при расчётах и усложняет структуру вычислительной программы.

Стоит отметить, что схемы решения такого рода уравнений отличаются высокой вычислительной сложностью, так как итоговые СЛАУ имеют высокую плотность заполненности и эта плотность стремится к константе при дроблении сетки. То есть, даже несмотря на использование разреженных и симметричных матриц, не всегда удаётся достичь существенной экономии ресурсов. Вместе с колоссальными объёмами требуемой оперативной памяти также существует проблема большого объёма вычислений, которая частично решается современными параллельными и распределёнными вычислительными системами.

Особым интересом исследования является проверка классических принципов и гипотез. В частности, одним из таких является принцип Сен-Венана [6], проверка которого представлена в разделе с результатами расчётов. Также особый интерес представляют области с концентраторами, так как они являются типичными проблемами механики разрушения из-за сингулярных деформаций и напряжений, которые в них возникают. В данной работе пойдёт речь об областях со ступенчатыми переходами и эллиптическими вырезами, так как они имеют достаточно простую структуру, а также различные теоретические и экспериментальные оценки и результаты.

## 1. Основные соотношения

### 1.1. Постановка задачи

Дано двумерное евклидово пространство  $\mathbb{R}^2$  с произвольно выбранной прямоугольной декартовой системой координат  $Ox_1x_2$ , в которой положение точки фиксировано радиус-вектором  $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ , где  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  — единичные орты координатных осей;  $x_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  — компоненты вектора  $\mathbf{x}$ . В произвольной замкнутой области  $S \subset \mathbb{R}^2$  с кусочно-гладкой границей  $\partial S$  уравнение равновесия сплошной среды имеет вид [6]

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где  $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial/\partial x_i \mathbf{e}_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  — дифференциальный оператор набла;

$\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  — вектор объёмных сил;

$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$  — тензор напряжений.

Тензор напряжений  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  определим следующим образом

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = p_1 \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + p_2 \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dS'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' \in S'(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{C}} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ ,  $i, j, k, l = \overline{1, 2}$  — тензор коэффициентов упругости;

$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$  — тензор упругой деформации;

$p_1 > 0$  и  $p_2 \geq 0$  — весовые доли, такие, что  $p_1 + p_2 = 1$ ;

$\varphi$  — функция нелокального влияния, некоторая нормированная положительная функция в области  $S'(\mathbf{x})$ ;

$S'(\mathbf{x})$  — область нелокального влияния.

Будем считать, что деформации малы, поэтому для определения компонентов тензора деформации  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  воспользуемся соотношением Коши [6]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad (3)$$

где  $u_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  — компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$ .

В случае линейного упругого изотропного тела для задачи в плосконапряжённой постановке компоненты тензора упругости  $\hat{\mathbf{C}}$  определяются следующим образом

$$C_{ijkl} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = \overline{1, 2},$$

где  $E$  — модуль Юнга;

$\nu$  — коэффициент Пуассона.

Будем рассматривать граничные условия первого и второго родов, также именуемые кинематическими и силовыми соответственно [6]

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{p}(\mathbf{x}),$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial S$  и  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \emptyset$ ;

$\mathbf{d}(\mathbf{x}) = d_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$  — некоторая функция, задающая перемещение на границе  $\Gamma_1$ ;

$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$  — некоторая функция, задающая давление на границе  $\Gamma_2$ ;

$\mathbf{n}$  — внешняя нормаль области  $S$ .

## 1.2. Выбор функций нелокального влияния

В определении тензора напряжений (2) не конкретизируется геометрия области нелокального влияния  $S'(\mathbf{x})$  и вид функции нелокального влияния  $\varphi$ . Чаще всего в расчётах используют функцию нормального распределения Гаусса, а зону нелокального влияния аппроксимируют в виде круга по правилу трёх сигм, но полученные при такой аппроксимации зоны получаются достаточно большими, что накладывает серьёзные требования на объёмы используемой оперативной памяти. Вместе с тем, вычисление экспонент является весьма затратным с вычислительной точки зрения, поэтому возникает предложение использовать весьма широкий класс полиномиальных функций нелокального влияния с фиксированными областями нелокального влияния  $S'(\mathbf{x})$ , которые можно представить в виде

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} A(1 - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^p)^q, & \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq 1, \\ 0, & \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') > 1, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\rho$  — метрическая функция, порождающая область  $S'(\mathbf{x})$ , которую в общем случае можно определить следующим образом

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt[n]{\left| \frac{x_1 - x'_1}{r_1} \right|^n + \left| \frac{x_2 - x'_2}{r_2} \right|^n}.$$

Тогда нормировочный множитель  $A$  примет значение

$$A = \frac{pn}{4r_1r_2B(1/n, 1/n)B(2/p, q+1)},$$



где  $r_1, r_2 > 0$  — радиусы нелокального влияния вдоль каждой оси;

$n > 0$  — параметр лебегова пространства;

$p, q > 0$  — параметры плотности распределения нелокального влияния;

$B$  — бета-функция Эйлера.

Форма зоны нелокального влияния  $S'(\mathbf{x})$  при различных параметрах лебегова пространства  $n$  и фиксированных радиусах влияния проиллюстрированы на рис. 1.

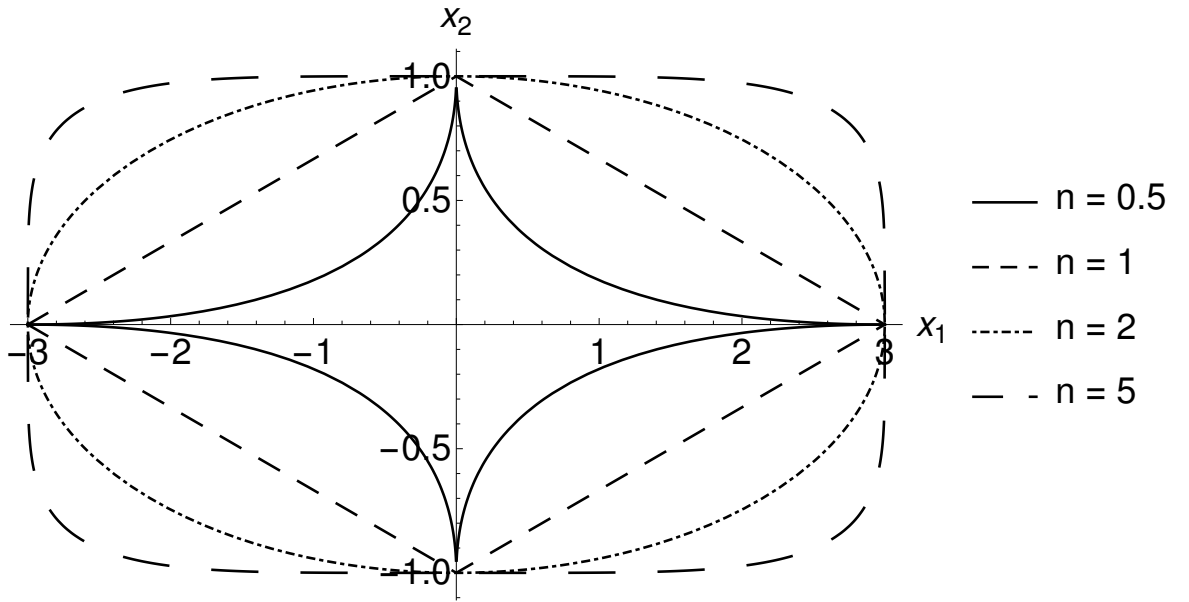


Рис. 1. Формы зоны нелокального влияния при различных параметрах  $n$  и радиусах  $r_1 = 3, r_2 = 1$

Предполагаем, что рассматриваемые материалы изотропны, поэтому будем считать, что область нелокального влияния представляет из себя круг, то есть  $r_1 = r_2 = r$ , а параметр  $n = 2$ . Что касается параметров плотности распределения влияния, то стоит отметить, что при увеличении параметра  $p$  распределение влияния становится более равномерным и стремится к константе, что в теории должно приводить к увеличению отклонения от классического закона. При увеличении параметра  $q$ , распределение влияния концентрируется в центре области и стремится к дельта-функции Дирака, которая при подстановке в (2) даст нам классический закон Гука. На рис. 2 и 3 представлены примеры функций влияния в разрезе по оси симметрии при

различных параметрах  $p$  и  $q$ . Для простоты и наглядности будем считать параметры  $p$  и  $q$  целыми и введём обозначение  $\varphi_{p,q}$ , которое даст понять какие параметры были выбраны.

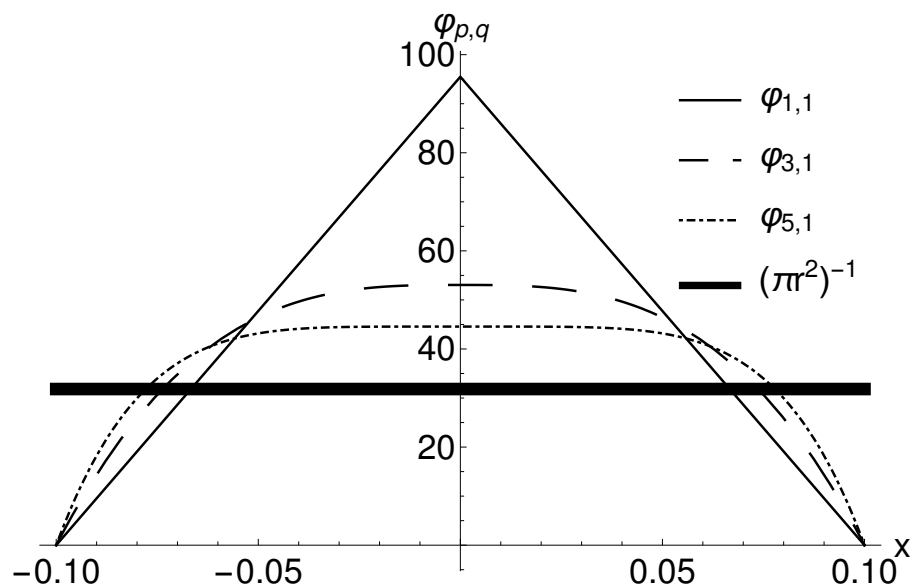


Рис. 2. Портреты функций влияния при вариации  $p$

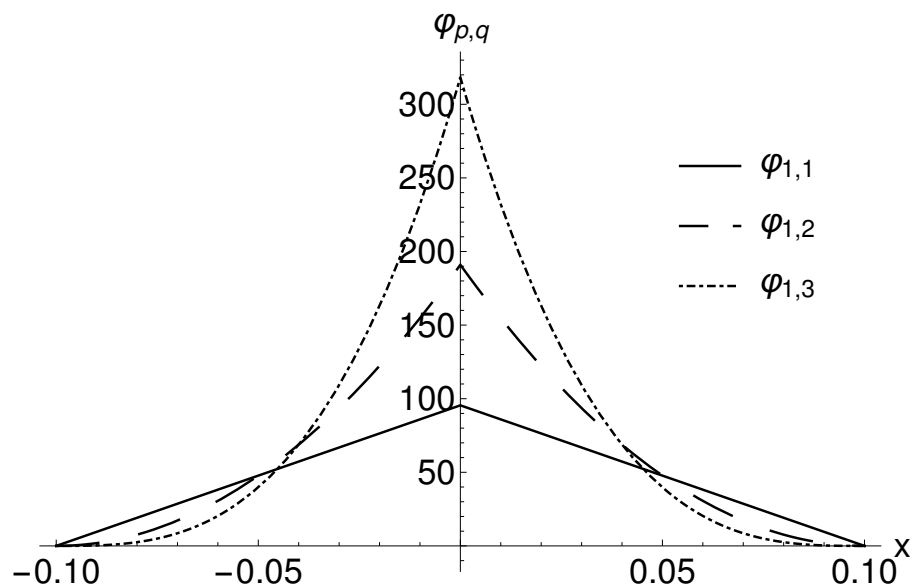


Рис. 3. Портреты функций влияния при вариации  $q$

### 1.3. Построение численной схемы решения на основе метода конечных элементов

В качестве численного метода решения уравнения (1) выберем метод конечных элементов с использованием изопараметрических конечных элемен-

тов [7], [8]. Для этого на области  $S$  введём сетку конечно-элементной модели  $S_h$ , которая включает в себя множества номеров узлов и элементов. Каждый элемент  $(e) \in S_h$  содержит в себе наборы узлов  $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in I^{(e)}}$  и базисных функций  $\{N_i^{(e)}\}_{i \in I^{(e)}}$  таких, что

$$N_i^{(e)}(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \quad i, j \in I^{(e)},$$

$$\sum_{i \in I^{(e)}} N_i^{(e)}(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in S^{(e)},$$

где  $I^{(e)}$  — набор индексов узлов элемента  $(e)$ ;

$\delta_{ij}$  — дельта-функция Кронекера;

$S^{(e)}$  — область элемента  $(e)$ .

Для каждого конечного элемента  $(e)$  введём локальную систему координат  $O\xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)}$ . Отображение из локальной системы координат  $O\xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)}$  в глобальную  $Ox_1x_2$  будем строить следующим образом

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^{(e)}) = N_i^{(e)}(\boldsymbol{\xi}^{(e)}) \mathbf{x}_i, \quad i \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h,$$

где  $\mathbf{x}_i$  — значение глобальных координат в узлах сетки. Тогда матрицу Якоби перехода из локальной системы координат в глобальную аппроксимируем следующим образом

$$\hat{\mathbf{J}}^{(e)} = \left( \frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{(e)}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{(e)}} \right)^{-1} \approx \left( \mathbf{x}_i \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{(e)}} \right)^{-1}, \quad i \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.$$

Домножим уравнение (1) на функцию формы  $N_n^{(e)}$  и проинтегрируем по области  $S$

$$\iint_S N_n^{(e)} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}) dS = \mathbf{0}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям, тогда по формуле Грина получим

$$\iint_S (\nabla_{\mathbf{x}} N_n^{(e)}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} dS = \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} \mathbf{p} d\Gamma - \iint_S N_n^{(e)} \mathbf{b} dS, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.$$

На место  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  подставим соотношение (2)

$$\begin{aligned} & p_1 \iint_S (\nabla_{\mathbf{x}} N_n^{(e)}) \cdot (\hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) dS + \\ & + p_2 \iint_S (\nabla_{\mathbf{x}} N_n^{(e)}) \cdot \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dS'(\mathbf{x}) dS = \\ & = \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} \mathbf{p} d\Gamma - \iint_S N_n^{(e)} \mathbf{b} dS, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h. \end{aligned}$$

Перейдём к индексной форме записи

$$p_1 \iint_S N_{n,i}^{(e)} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS + p_2 \iint_S N_{n,i}^{(e)} \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS'(\mathbf{x}) dS =$$

$$= \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} p_j d\Gamma - \iint_S N_n^{(e)} b_j dS, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.$$

Итоговое выражение, которое мы хотим получить можно записать в следующем виде

$$(p_1 \mathbf{K}^{Loc} + p_2 \mathbf{K}^{NonLoc}) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{P} - \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{K}^{Loc}$  и  $\mathbf{K}^{NonLoc}$  — матрицы жёсткости для локальной и нелокальной постановок соответственно;

$\mathbf{U}$  — вектор искомых перемещений;

$\mathbf{P}$  — дискретизация граничных условий второго рода;

$\mathbf{B}$  — дискретизация вектора объёмных сил.

Воспользуемся соотношением Коши (3) и заменим перемещения  $\mathbf{u}$  интерполяционными соотношениями, то есть представим в виде конечной суммы  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}_m N_m^{(e)}(\mathbf{x})$ ,  $m \in I^{(e)}$ , где  $\mathbf{u}_m$  — искомые перемещения в  $m$ -ом узле. Также для простоты дальнейших выкладок, введём тензор  $\mathbf{K}_{nm}^{(e)(e')}$ , который по сути представляет из себя блок  $2 \times 2$  в  $n$ -ой строке и  $m$ -ом столбце матрицы жёсткости  $\mathbf{K}$ . Компоненты тензора  $\mathbf{K}_{nm}^{(e)(e')}$  можно определить следующим образом

$$K_{nmi j}^{(e)(e')}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{np} \delta_{mq} C_{ikjl} N_{n,k}^{(e)}(\mathbf{x}) N_{m,l}^{(e')}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_p \otimes \mathbf{E}_q, \quad i, j = \overline{1, 2},$$

где  $\mathbf{E}_i$  — единичный вектор, размерность которого совпадает с количеством узлов сетки. Тогда аппроксимацию матрицы  $\mathbf{K}^{Loc}$  можно записать в следующем виде

$$\mathbf{K}^{Loc} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n, m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \mathbf{K}_{nm}^{(e)(e)}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) J_q^{(e)}, \quad (5)$$

где  $Q^{(e)}$  — множество квадратурных узлов на элементе  $(e)$ ;

$\mathbf{x}_q$  — координата квадратурного узла  $q$ ;

$w_q$  — квадратурный вес в квадратурном узле  $q$ ;

$J_q^{(e)} = \left| \det \hat{\mathbf{J}}^{(e)}(\mathbf{x}_q) \right|$  — якобиан вычисленный в квадратурной точке  $\mathbf{x}_q$ .

Зону нелокального влияния  $S'(\mathbf{x})$  будем аппроксимировать относительно каждого квадратурного узла сетки в отдельности [3]. Тогда, те элементы  $(e)$ , квадратурные узлы  $Q^{(e)}$  которых хотя бы частично попали в область влияния, будут участвовать в расчёте. Таким образом, аппроксимацию матрицы  $\mathbf{K}^{NonLoc}$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{NonLoc} = & \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \times \\ & \times \sum_{(e') \in S_h^q} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \mathbf{K}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}. \quad (6) \end{aligned}$$

Иллюстрация такого способа аппроксимации наглядно продемонстрирована на рис. 4, где квадратурные узлы помечены точками, а квадратурный узел относительного которого происходит аппроксимация помечен крестом. Аппроксимированная зона нелокального влияния  $S_h^q \subset S_h$  выделена серым цветом.

Аппроксимацию граничных условий второго рода  $\mathbf{P}$  и вектора объёмных сил  $\mathbf{B}$  запишем в следующем виде

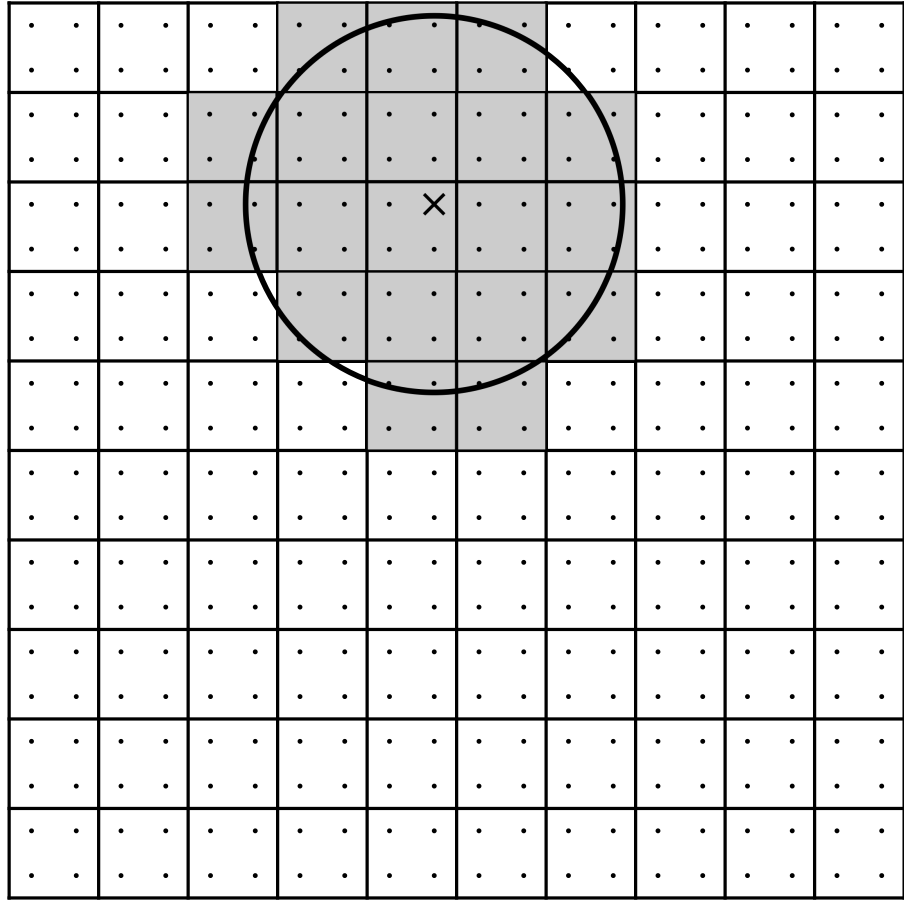


Рис. 4. Аппроксимация зоны нелокального влияния относительно квадратурного узла сетки

$$\mathbf{P} = \sum_{(be) \in \Gamma_h} \sum_{n \in I^{(be)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{p}(\mathbf{x}_q) J_q^{(be)}, \quad (7)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{b}(\mathbf{x}_q) J_q^{(e)}, \quad (8)$$

где  $\Gamma_h \subset S_h$  — конечно-элементная модель границы области  $S$ ;

$(be) \in \Gamma_h$  — одномерные элементы заданные на границе;

Вычисление матриц (5) и (6) можно упростить записав производные от функций форм в локальной системе координат элементов  $(e) \in S_h$

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_k} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi_j^{(e)}} \frac{\partial \xi_j^{(e)}}{\partial x_k}, \quad j, k = \overline{1, 2}, \quad i \in I^{(e)}.$$

Якобиан на границе аппроксимируем следующим образом

$$J^{(be)} = \sqrt{\left(x_{1i} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi^{(e)}}\right)^2 + \left(x_{2i} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi^{(e)}}\right)^2}, \quad i \in I^{(be)}, \quad (be) \in \Gamma_h.$$

Заметим, что индекс оси  $\xi^{(e)}$  не ставится, так как элемент одномерный.



## 2. Программная реализация

### 2.1. Аппроксимация зоны нелокального влияния

Основная сложность, которая возникает при решении задачи (1), является аппроксимация интегрального слагаемого в (2), так как в матрицах элементов необходимо учитывать влияние, которое приходится на соседние элементы. Действуя по правилам аппроксимации вложенных интегралов мы приходим к тому, что в уравнении (6) порядок сумм заставляет нас аппроксимировать зону нелокального влияния для каждого квадратурного узла сетки, что не очень практично, так как выполнять поиск ближайших соседей относительно квадратурных узлов может быть весьма затратной процедурой, а хранение индексов элементов, которые попадают в зону влияния, очень дорогим. Более того, такой подход попросту сложно реализовать программно, поэтому возникает предложение аппроксимировать зону нелокального влияния относительно центров элементов и учитывать в расчётах те элементы, центры которых попали в зону влияния [9]. Тогда формула (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{NonLoc} = & \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e') \in S_h^{(e)}} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \times \\ & \times \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \mathbf{K}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}. \quad (9) \end{aligned}$$

где  $S_h^{(e)} \subset S_h$  — зона влияния аппроксимированная на элементе  $(e)$ .

Такой способ аппроксимации проиллюстрирован на рис. 5, где центры элементов помечены точками, текущий элемент относительно которого проводится аппроксимация помечен крестом, а аппроксимированная зона закрашена серым цветом.

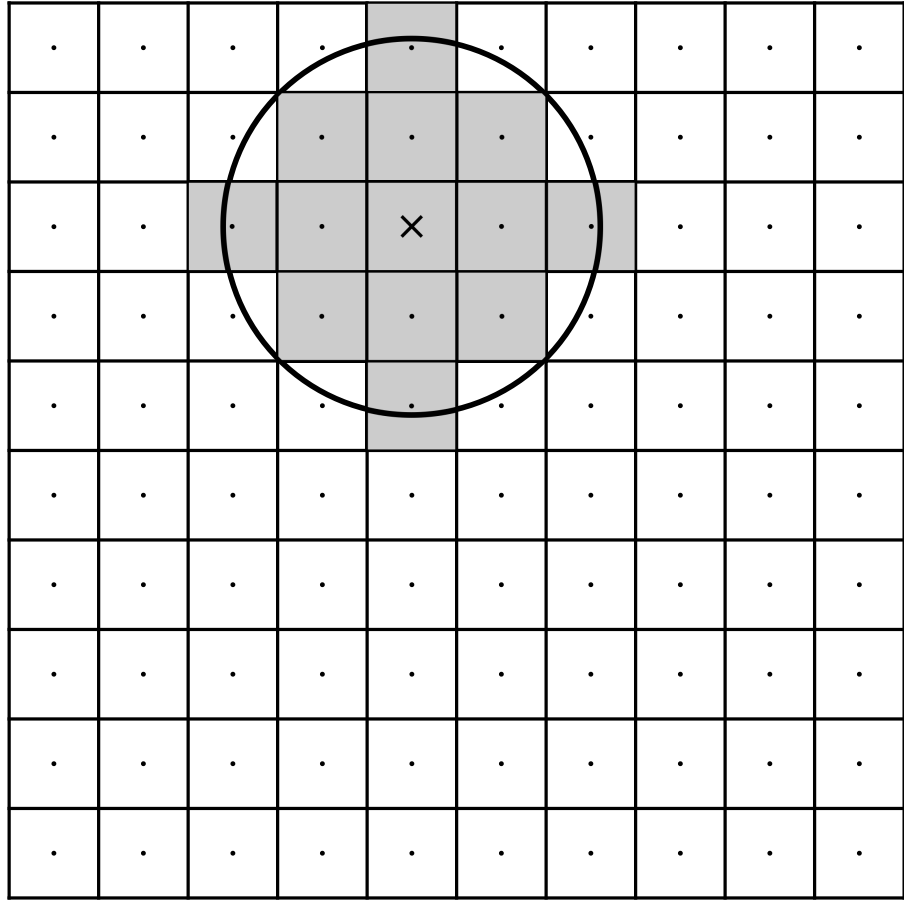


Рис. 5. Аппроксимация зоны нелокального влияния относительно центра конечного элемента

Заметим, что в формуле (9) поменялся порядок знаков суммирования, а значит и порядок действий. С точки зрения написания вычислительной программы это означает лишь перестановку циклов и введение дополнительных массивов индексов. Для успешного интегрирования, зону аппроксимации лучше всего брать несколько больше, нежели реальная зона нелокального влияния  $r$ , таким образом возникает шанс того, что все квадратурные узлы, которые попали под зону влияния  $S'(\mathbf{x})$ , будут учтены в расчёте. Естественно, радиус поиска следует определять исходя из грубости сетки, что наглядно продемонстрировано на рис. 5.

## 2.2. Распараллеливание алгоритма

Учитывая высокую вычислительную сложность подобных задач разумно использовать возможности современных вычислительных систем, а именно параллельные и распределённые вычисления. К сожалению, обход сетки, который задаётся порядком суммирования в (5) и (9) не позволяет эффективно использовать такие возможности, поэтому возникает предложение определить другой порядок обхода сетки, в котором не будет проблем связанных с гонкой данных и который позволит собирать части матрицы независимо сразу в нескольких процессах. Этого можно достичь определив для каждого узла сетки  $n \in S_h$  множество элементов  $E^n$ , которым он принадлежит. Такой подход позволяет эффективно использовать возможности параллельных и распределённых систем, так как каждая строка матрицы вычисляется независимо от всех остальных. Таким образом формулу (5) можно представить в следующей форме

$$\mathbf{K}^{Loc} = \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e) \in E^n} \sum_{m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \mathbf{K}_{nm}^{(e)(e)}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) J_q^{(e)}. \quad (10)$$

Для матрицы жёсткости  $\mathbf{K}^{NonLoc}$  формула (9) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{NonLoc} = & \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e) \in E^n} \sum_{(e') \in S_h^{(e)}} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \times \\ & \times \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \mathbf{K}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}. \end{aligned} \quad (11)$$

Так же преобразуем и формулу (8)

$$\mathbf{B} = \sum_{n \in I^{(e)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{(e) \in E^n} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{b}(\mathbf{x}_q) J_q^{(e)}. \quad (12)$$

Для общности, сделаем аналогичную процедуру и для аппроксимации граничных условий второго рода (7)

$$\mathbf{P} = \sum_{n \in \Gamma_h} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{(be) \in E^n} \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{p}(\mathbf{x}_q) J_q^{(be)}. \quad (13)$$

Стоит добавить, что для аппроксимации граничных условий второго рода менять порядок циклов не обязательно, так как данная операция, как правило, не является трудозатратной и поэтому её проще всего реализовать согласно классическому представлению, добавив лишь дополнительные условия по заполнению массивов в самой программе.

### 2.3. Балансировка данных

Как уже было сказано, поузловой обход сетки (10)-(12) позволяет достаточно эффективно использовать параллельные и распределённые вычисления. Однако при распределённых вычислениях возникает проблема балансировки данных между процессами, так как если раздать обработку узлов сетки между процессами равномерно, то данные могут иметь произвольное распределение, что может привести к слишком высоким затратам вычислительных ресурсов на некоторых узлах кластера, в то время как остальным придётся проводить время в ожидании. Такой дисбаланс также может привести к тому, что на некоторых узлах кластера может не хватить оперативной памяти, хотя потенциально такая задача могла бы поместиться при равномерном распределении данных. В таком случае необходимо делать балансировку данных между процессами.

Идеальная балансировка подразумевает распределение данных таким образом, чтобы потребляемые объёмы оперативной памяти и объёмы вычислений на всех процессах были одинаковыми, но практика показывает, что добиться такой балансировки в общем случае не удаётся, поэтому опишем два возможных варианта балансировки.

Первый вариант позволяет добиться равномерного распределения объёмов потребляемой оперативной памяти между процессами  $P$ . Этот вариант балансировки подразумевает под собой осреднение количества элементов матрицы между процессами  $p \in P$ . Чтобы этого добиться, необходимо подсчитать количество элементов матрицы  $M_p$ , которыми владеет каждый из процессов. Затем сложить все эти суммы  $M = \sum_{p \in P} M_p$  и взять среднее по количеству процессов  $M_m = M/|P|$ . После этого распределить узлы таким образом, чтобы количество элементов матрицы на каждом из процессов  $\widetilde{M}_p$  было примерно одинаковым, то есть  $\widetilde{M}_p \approx M_m$ . Для подсчёта количества элементов в матрице не требуется формировать полный портрет матрицы на каждом процессе, это можно делать построчно, что гораздо эффективнее и не приводит к высоким затратам оперативной памяти.

Второй вариант балансировки позволяет добиться равномерного распределения объёмов вычислений. Такой вариант балансировки достигается аналогичными методами, но в качестве осредняемого параметра выбирается количество вызовов функции интегрирования.

### 3. Результаты расчётов

#### 3.1. Результаты распараллеливания

Проведём серию расчётов на системе K-10 [10], где на каждом узле кластера установлено по два процессора Intel Xeon E5-2660 и по 128 Гб оперативной памяти. В качестве тестовой задачи возьмём задачу на области  $S = [0, 1] \times [0, 1]$ , с введённой на ней равномерной сеткой  $S_h$  из квадратичных серендиповых элементов. В качестве функции нелокального влияния выберем  $\varphi = \varphi_{2,1}$ , так как данная функция требует наименьшее количество вычислений, но при этом обеспечивает уменьшение влияния на расстоянии. Матрицы, которые получаются в расчётах, имеют симметричную и разреженную структуру, поэтому для удобства будем хранить их в CSR формате. Для индексации будем использовать 64-х битные числа, а для значений коэффициентов будем использовать числа с плавающей точкой двойной точности.

Расчёты показывают, что объёмы требуемой оперативной памяти и время вычислений  $t_1$  растут линейно относительно количества элементов сетки в классической постановке задачи и квадратично в нелокальной. Причём в нелокальной также наблюдается квадратичный рост относительно радиуса поиска ближайших соседей, так как среднее число соседей растёт в тех же пропорциях. Результаты расчётов представлены в табл. 1, где также указано время счёта на 16 потоках  $t_{16}$ . Из таблицы видно, что для задач в классической постановке не удаётся достичь существенного ускорения времени счёта, но для нелокальных задач время счёта ускорилося примерно в 15 раз, что более наглядно продемонстрированы на рис. 6.

При использовании параллельных и распределённых вычислений одновременно удаётся достичь ещё большего ускорения сборки матрицы жёсткости. В качестве демонстрации возможностей распределённых вычислений будем использовать 4 узла кластера и запустим на каждом процессы с 16

потоками. Случай с равномерным распределением узлов между процессами опустим и сразу рассмотрим случаи с балансировками, которые были описаны ранее.

Количество элементов	Радиус поиска соседей	Среднее число соседей	Требуемый объём памяти	Время расчёта 1 поток	Время, расчёта 16 потоков
2500	0	—	3.7 Мб	0.031 с	0.017 с
10000	0	—	15 Мб	0.152 с	0.046 с
40000	0	—	59 Мб	1.280 с	0.207 с
2500	0.1	66	63 Мб	4.385 с	0.307 с
10000	0.1	281	916 Мб	76.65 с	5.102 с
40000	0.1	1143	13.3 Гб	1265 с	82.32 с
2500	0.2	257	210 Мб	17.40 с	1.166 с
10000	0.2	1042	3.1 Гб	288.4 с	18.71 с
40000	0.2	4194	47 Гб	4704 с	303.2 с

Таблица 1. Сравнение последовательного и параллельного режимов работы

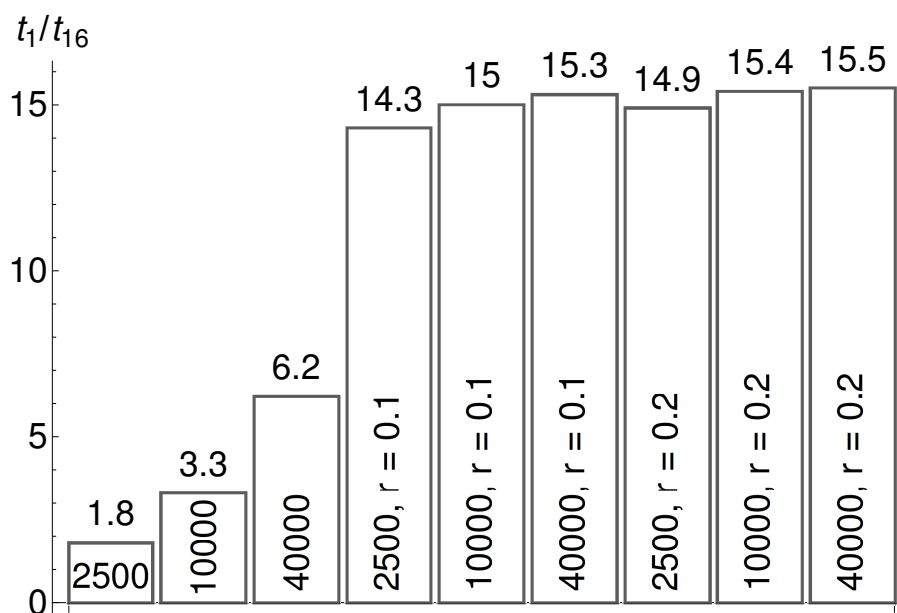


Рис. 6. Ускорение времени сборки матрицы жёсткости при использовании технологии OpenMP

В случае балансировки объёмов вычислений получаем заметное ускорение времени счёта, но при этом в распределении объёмов затрачиваемой оперативной памяти наблюдается сильный дисбаланс. Исходя из результатов, которые представлены в табл. 2, на четвёртом процессе объёмы используемой оперативной памяти в два раза выше, чем у всех остальных процессов, хотя при этом, время счёта у всех процессов примерно одинаковое. Такое, на первый взгляд, странное распределение можно объяснить тем, что в процессах, где объёмы используемой оперативной памяти меньше, количество самопересекающихся индексов в расчёте коэффициентов больше. Распределение

$N$	$r$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$t_{16}^1, \text{с}$	$t_{16}^2, \text{с}$	$t_{16}^3, \text{с}$	$t_{16}^4, \text{с}$
10000	0.1	181 Мб	173 Мб	174с Мб	388 Мб	1.269	1.312	1.222	1.482
10000	0.2	607 Мб	582 Мб	587 Мб	1.3 Гб	4.736	4.508	4.474	5.376
40000	0.1	2.5 Гб	2.5 Гб	2.5 Гб	5.8 Гб	20.34	20.93	19.54	23.48
40000	0.2	8.8 Гб	8.7 Гб	8.9 Гб	20.6 Гб	71.63	75.31	77.42	86.76

Таблица 2. Распределение объёмов данных и времени выполнения между процессами при балансировке объёмов вычислений

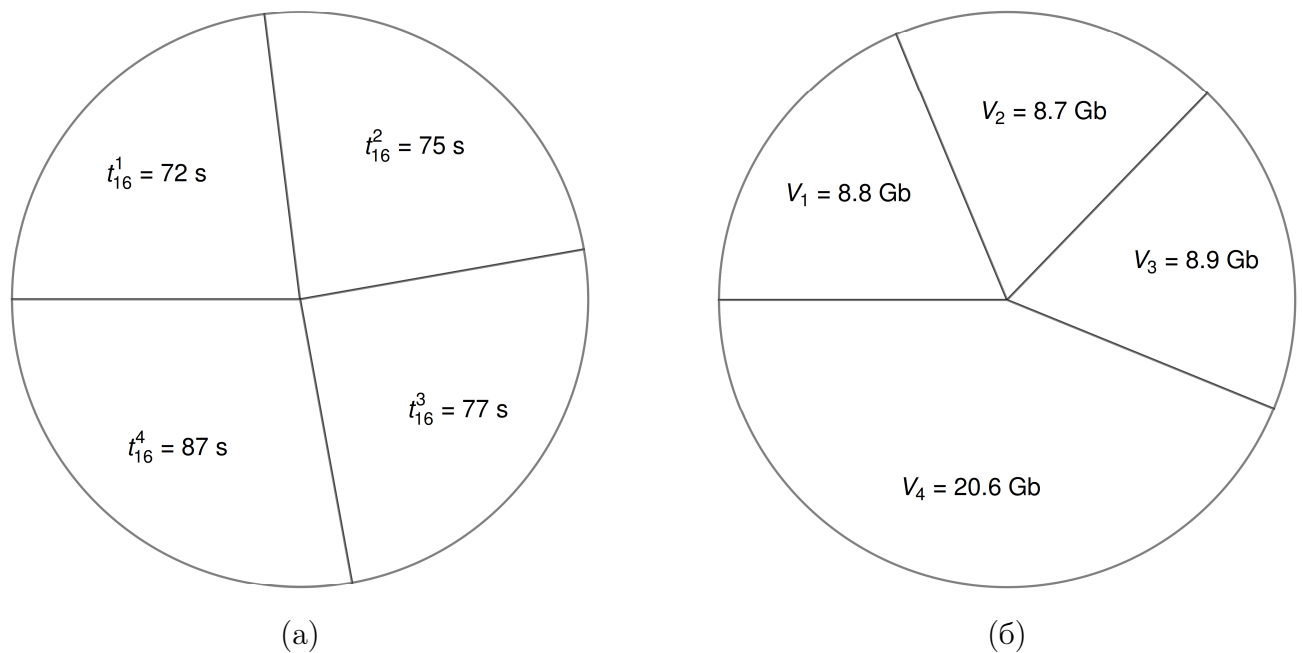


Рис. 7. Распределение времени счёта (а) и объёмов используемой оперативной памяти (б) при балансировке объёмов вычислений



объёмов оперативной памяти и времени счёта наглядно продемонстрировано на рис. 7 на примере задачи с 40000 элементами и радиусом нелокального влияния  $r = 0.1$ .

$N$	$r$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$t_{16}^1, \text{ c}$	$t_{16}^2, \text{ c}$	$t_{16}^3, \text{ c}$	$t_{16}^4, \text{ c}$
10000	0.1	225 Мб	229 Мб	233 Мб	229 Мб	1.675	1.786	1.123	0.887
10000	0.2	768 Мб	782 Мб	797 Мб	782 Мб	5.704	6.029	3.918	3.159
40000	0.1	3.3 Гб	3.3 Гб	3.4 Мб	3.3 Гб	26.74	27.96	16.91	13.70
40000	0.2	11.6 Гб	11.7 Гб	11.9 Гб	11.8 Гб	95.76	99.08	60.50	50.03

Таблица 3. Распределение объёмов данных и времени выполнения между процессами при балансировке количества элементов матрицы

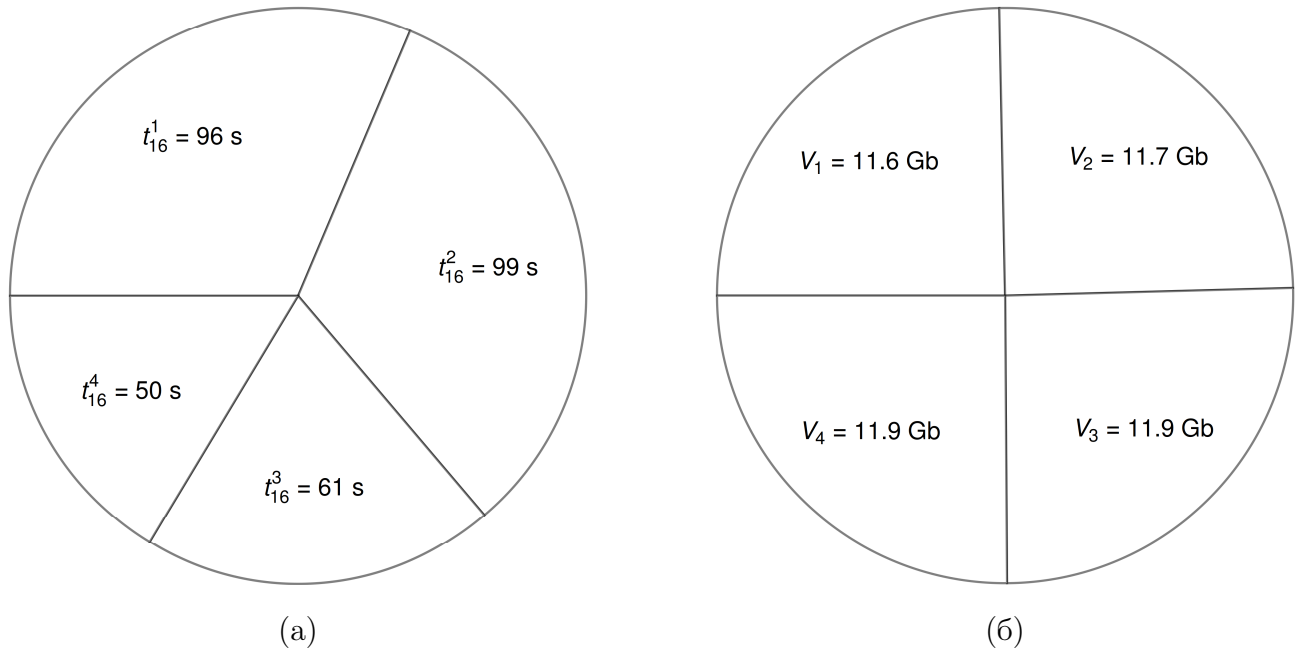


Рис. 8. Распределение времени счёта (а) и объёмов используемой оперативной памяти (б) при балансировке количества элементов матрицы

Решением проблемы дисбаланса в использовании оперативной памяти является балансировка количества элементов матрицы между процессами. При такой балансировке, данные распределяются равномерно, но при этом неравномерным становится время вычисления коэффициентов, что так же объясняется количеством самопересекающихся индексов в расчёте коэффициентов матрицы. Результаты расчётов представлены в табл. 3. Как и в слу-

чае балансировки объёмов вычислений на примере задачи с 40000 элементов и радиусом нелокального влияния  $r = 0.1$  покажем в виде диаграмм распределение времени вычислений и объёмов данных между процессами. Результаты представлены на рис. 8.

Подытожим результаты использования распределённых вычислений диаграммой представленной на рис. 9. Из данной диаграммы видно, что при использовании любой из балансировок наблюдается ускорение времени счёта при использовании нескольких процессов. Однако стоит отметить, что при балансировке объёмов вычислений время счёта ускоряется сильнее. Данный разрыв может быть больше, например, при другой нумерации узлов или принципиально другой геометрии области  $S$ . В любом случае, результаты показывают высокую эффективность и целесообразность использования такого вида вычислений.

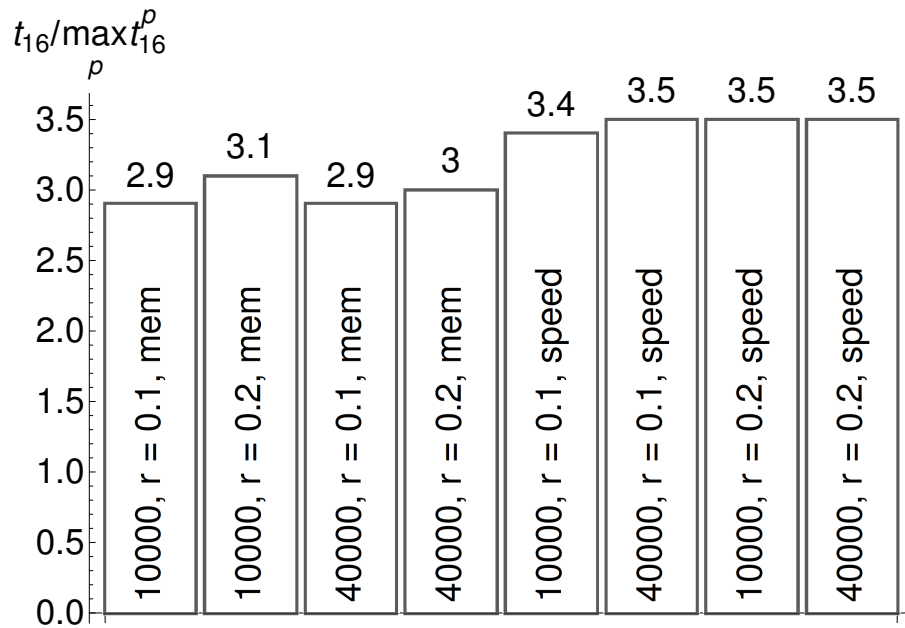


Рис. 9. Ускорение времени сборки матрицы жёсткости при использовании технологии MPI, где speed означает балансировку объёмов вычислений, а mem балансировку объёмов памяти

### 3.2. Задача Неймана и проверка принципа Сен-Венана

Далее, во всех расчётах будем использовать безразмерные параметры и переменные

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{p}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{E} = \frac{E}{P}, \quad \bar{u} = \frac{\bar{E}u}{(1 - \nu^2)},$$

где  $L$  — характерный размер области;  $P$  — нормировочный множитель для нагружений; черта над переменными означает, что они безразмерны. Примем коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , а безразмерный модуль Юнга  $\bar{E} = 21$ . Будем считать, что если не указано иного, функция нелокального влияния  $\varphi = \varphi_{2,1}$ .

При исследовании нелокальных моделей упругости важно опираться на принципы классической теории упругости, одним из которых является принцип Сен-Венана, согласно которому различные, но статически эквивалентные нагрузки вызывают в стержне одинаковые напряженные состояния вдали от точек приложения [6]. Данное явление не доказано в общем случае, но подтверждается многими теоретическими и экспериментальными исследованиями. Для проверки применимости принципа Сен-Венана к нелокальным задачам упругости рассмотрим задачу Неймана на области  $S = [0, 10] \times [0, 1]$ , с введённой на ней равномерной сеткой  $S_h$ , состоящей из 64000 квадратичных серендиповых элементов. Поставим следующие граничные условия

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=0} = -f(\bar{x}_2), \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=10} = f(\bar{x}_2),$$

где  $f$  — некоторая функция нагружения. Для получения единственности решения поставленной задачи, добавим два геометрических условия, которые так же нам дадут симметрию решения и зафиксируют его относительно цен-

тра области по каждой из осей

$$\bar{u}_1|_{\bar{x}_1=5} = 0, \quad \bar{u}_2|_{\bar{x}_2=0.5} = 0.$$

В классической постановке задачи, в силу симметрии, можно было бы обойтись рассмотрением лишь четверти области, но в нелокальной постановке приходится учитывать поиск ближайших соседей, который не допускает рассмотрения части области  $S$ .

Рассмотрим три случая нагружения с одинаковой нормировкой на области  $A = [0, 1]$

$$f_1(x) = 1,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0.5, \\ 4 - 4x, & x > 0.5, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 2 - 4x, & x \leq 0.5, \\ 4x - 2, & x > 0.5. \end{cases}$$

На рис. 10 и 11 изображены напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  вдоль оси нагружения в различных сечениях вдоль оси нагружения. Несмотря на различный характер нагружений, в центре области напряжения принимают одинаковую форму, которая в нелокальной постановке, в отличие от классической, не является

константой вдоль оси  $\bar{x}_2$ . Расчётные параметры и выбранные сечения указаны на рисунках.

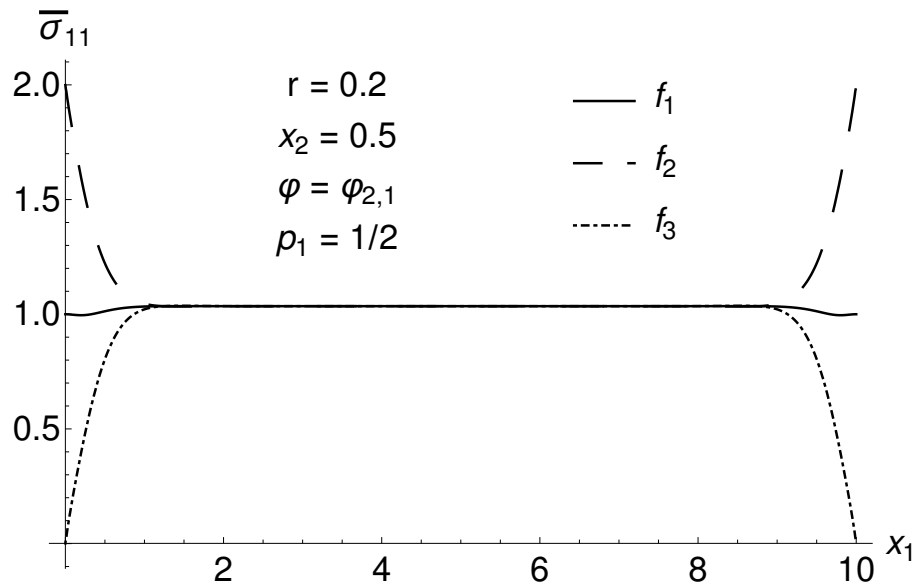


Рис. 10. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  в сечении  $\bar{x}_2 = 0.5$  при различных нагружениях.

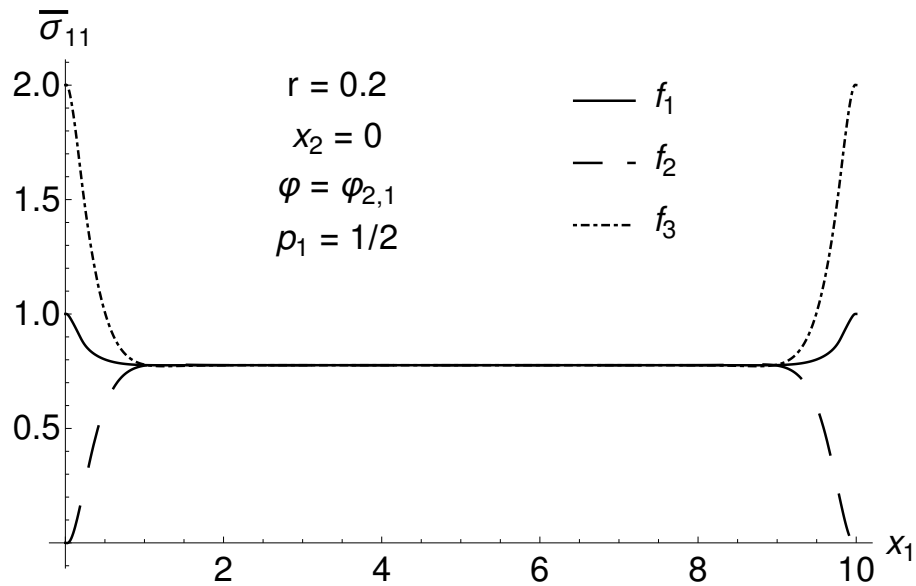


Рис. 11. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  в сечении  $\bar{x}_2 = 0$  при различных нагружениях.

Рассматривая центральное сечение вдоль другой оси, можем убедиться в том, что в нелокальной постановке поверхность напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  имеет более сложную форму. Вариация весового параметра  $p_1$  влияет на отклонение напряжений на границе, в то время как вариация радиуса нелокального

влияния  $r$  влияет на размах кромочного эффекта. Важно отметить, что интегральная нагрузка в каждом сечении равна приложенной, что говорит нам о выполнении принципа Сен-Венана. Результаты расчётов представлены на рис. 12 и 13.

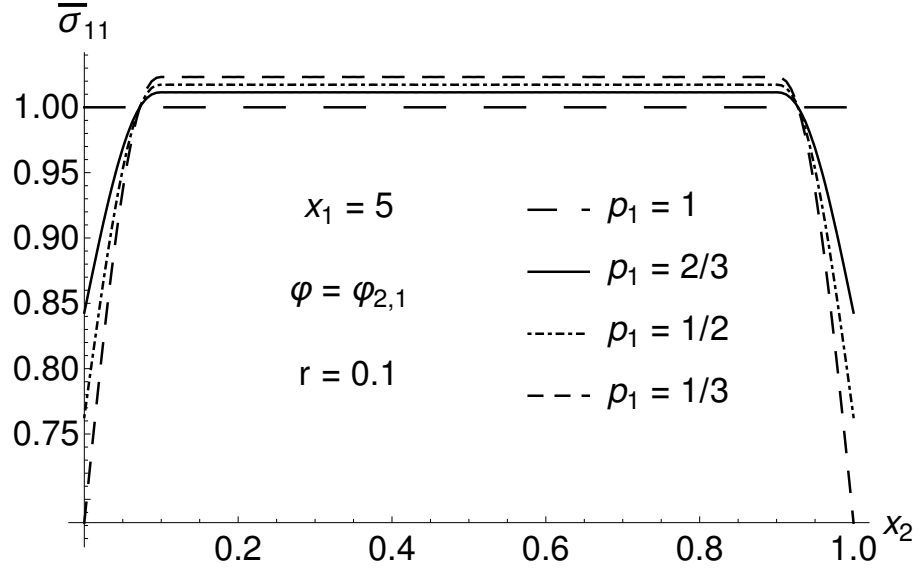


Рис. 12. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  в сечении  $\bar{x}_1 = 5$  при вариации  $p_1$

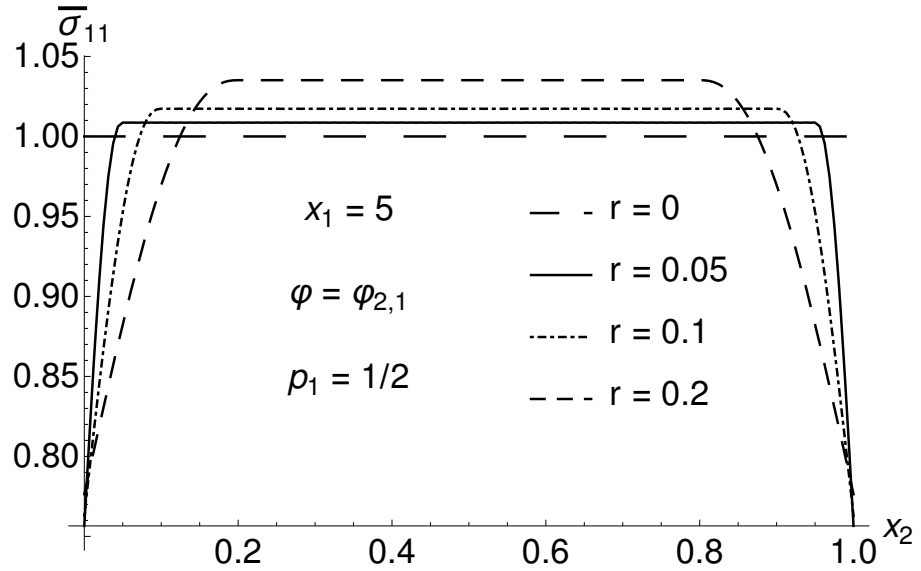


Рис. 13. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  в сечении  $\bar{x}_1 = 5$  при вариации  $r$

В деформациях  $\bar{\varepsilon}_{11}$  кромочный эффект проявляется лишь вблизи приложения нагрузки. При увеличении радиуса нелокального влияния  $r$ , так же как и в напряжениях, увеличивается размах кромочного эффекта, а при уменьшении весового параметра  $p_1$  отклонение от решения задачи в класси-

ческой постановке увеличивается, что продемонстрировано на рис. 14 и 15. В силу того, что размах краевого эффекта достаточно узкий в сравнии с размерами области, на рисунках отображается лишь часть области, где деформации отличны от константы.

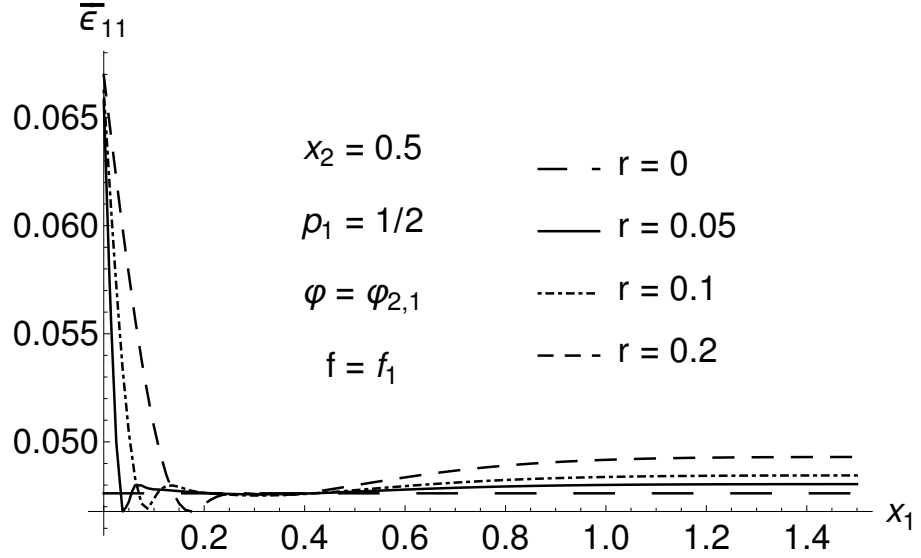


Рис. 14. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{11}$  в сечении  $\bar{x}_1 = 5$  при вариации  $r$

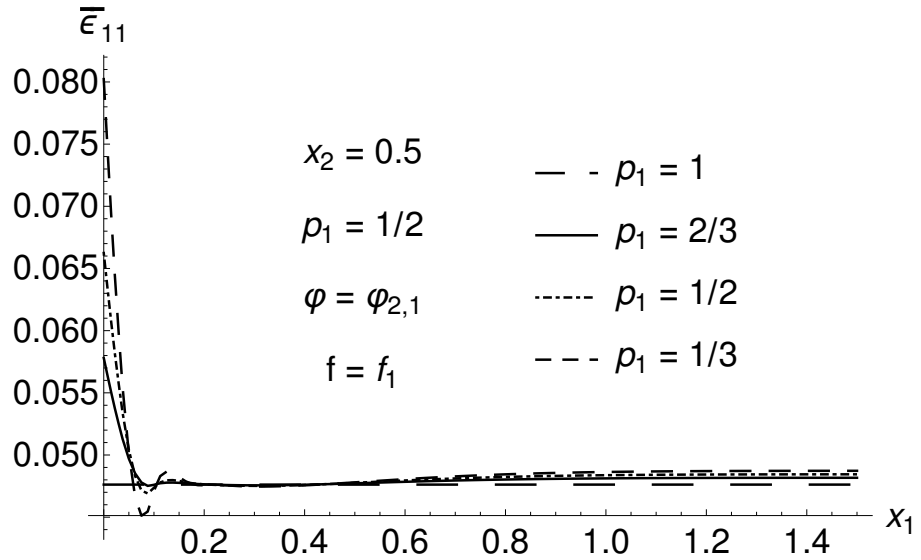


Рис. 15. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{11}$  в сечении  $\bar{x}_1 = 5$  при вариации  $\rho_1$

Стоит отметить, что в отличие от классической постановки, в нелокальной также возникают касательные напряжения  $\bar{\sigma}_{12}$ . Их характер имеет весьма сложную, но симметричную структуру. На рис. 16 и 17 изображены кривые в сечениях отстоящих от границы на величину радиуса нелокального

влияния при различных весовых параметрах. Похожие результаты, но только на другой области, были получены в статье [5].

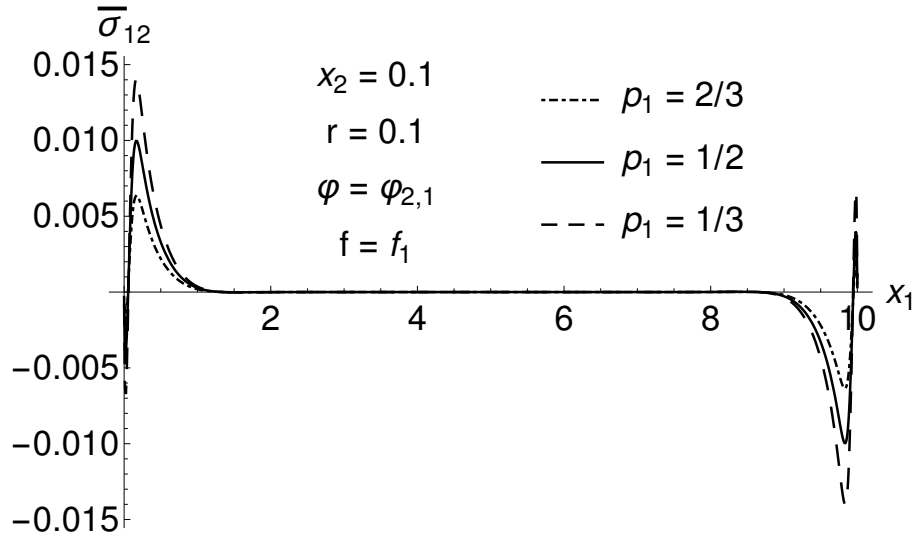


Рис. 16. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{12}$  в сечении  $\bar{x}_2 = 0.1$

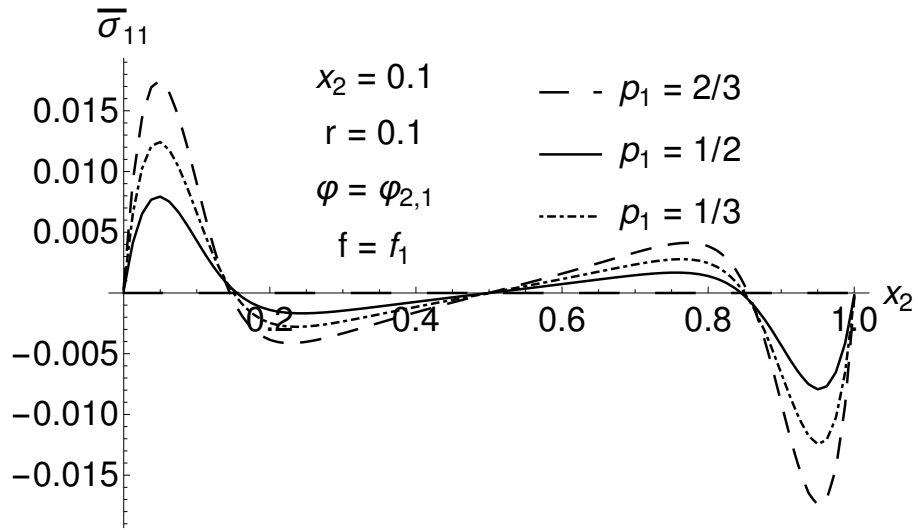


Рис. 17. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{12}$  в сечении  $\bar{x}_1 = 0.1$

Вариация основных параметров семейства функций нелокального влияния (4) показывает, что в перемещениях  $\bar{u}_1$  в нелокальной постановке наблюдается увеличение отклонения относительно классического решения при увеличении параметра  $p$  и достигает своего максимума при константной функции влияния. При увеличении параметра  $q$ , напротив, отклонение в перемещениях уменьшается, что наглядно продемонстрировано на рис. 18 и 19 соответственно, где показаны не сами отклонения, а относительная разница



решений и где было выбрано сечение с наибольшим отклонением.

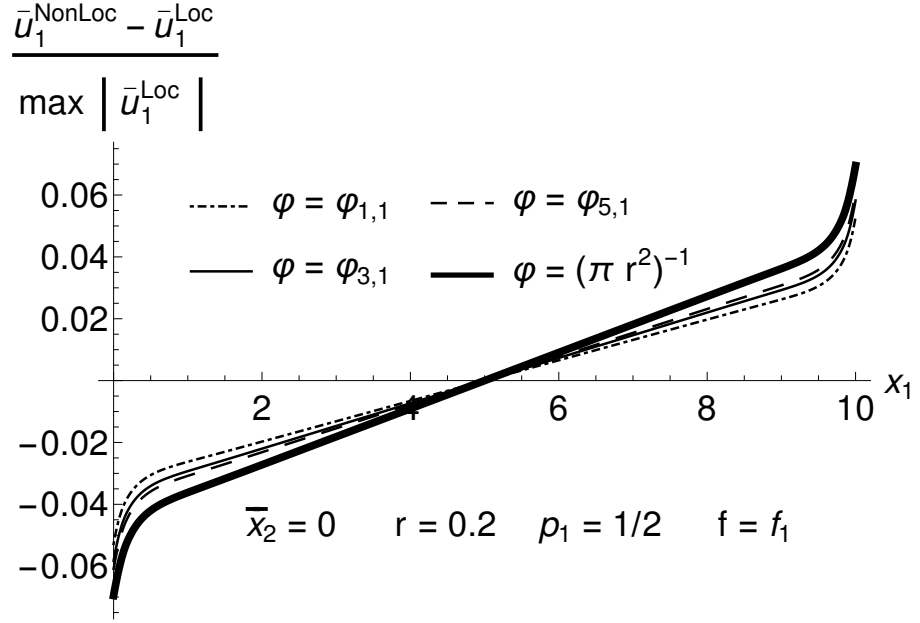


Рис. 18. Относительная разница нелокального и локального решений при вариации параметра  $p$

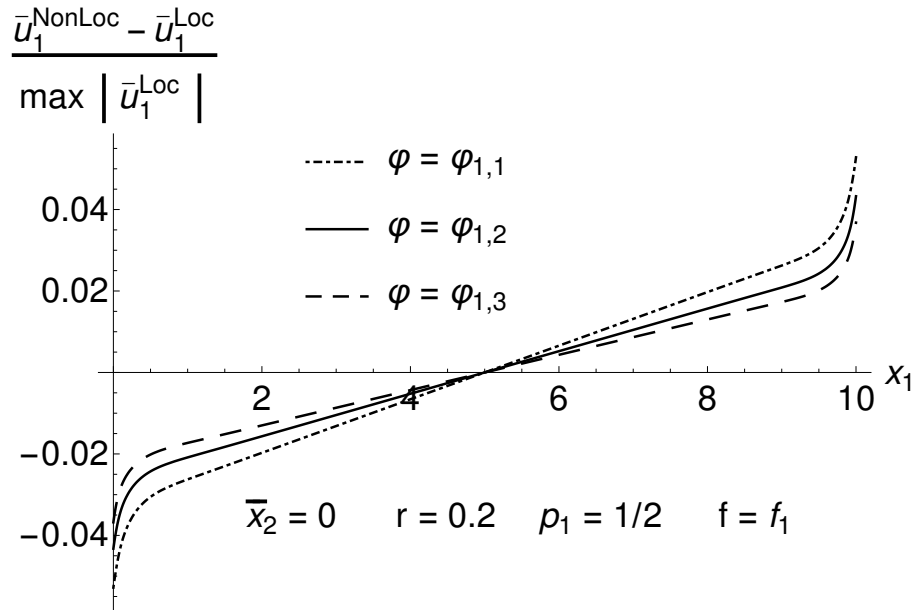


Рис. 19. Относительная разница нелокального и локального решений при вариации параметра  $q$

Таким образом, выбор функции нелокального влияния может повлиять на итоговое решение, но так как все рассматриваемые функции относились к единому семейству полиномиальных функций, качественно решение остаётся неизменным.

### 3.3. Расчёт на Т-образной области

Пусть теперь  $S \subset [0, 1] \times [0, 1]$  — Т-образная область, изображённая на рис. 20, с введённой на ней равномерной сеткой  $S_h$ , состоящей из 30000 квадратных серендиповых элементов. Также на рис. 20 отметим интересующие нас сечения. Коэффициент Пуассона  $\nu$  по прежнему равен 0.3, а безразмерный модуль Юнга  $\bar{E} = 21$ . Функция нелокального влияния  $\varphi = \varphi_{2,1}$ . Будем действовать растягивающей силой приложенной к нижнему концу пластины, верхний конец жёстко заделаем

$$\bar{\mathbf{u}}|_{\bar{x}_2=1} = 0, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=0} = -1.$$

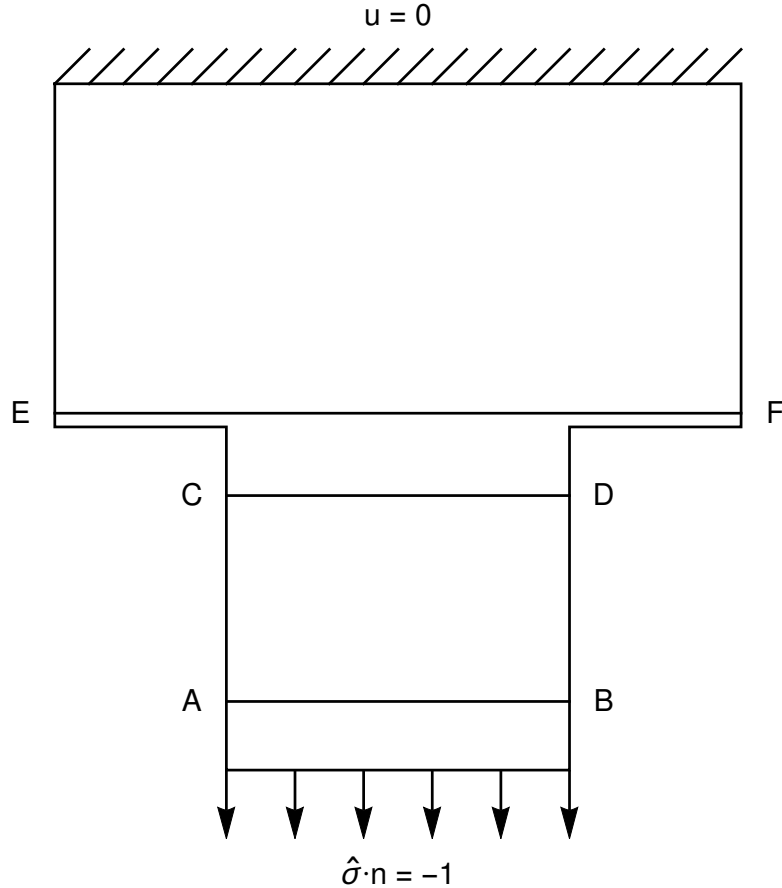


Рис. 20. Т-образная область с заданными граничными условиями и интересующими нас сечениями

Проведём серию расчётов, варьируя основные параметры модели. При рассмотрении деформаций  $\bar{\varepsilon}_{22}$ , помимо эффектов связанных с прикладыва-

емой нагрузкой, которые были описаны в предыдущем разделе на примере задачи Неймана, возникают и угловые эффекты, которые характеризуются возникающими отрицательными деформациями со стороны верхней части области. Причём, чем больше радиус нелокального влияния  $r$ , тем шире возникающий эффект, что наглядно показано на рис. 21.

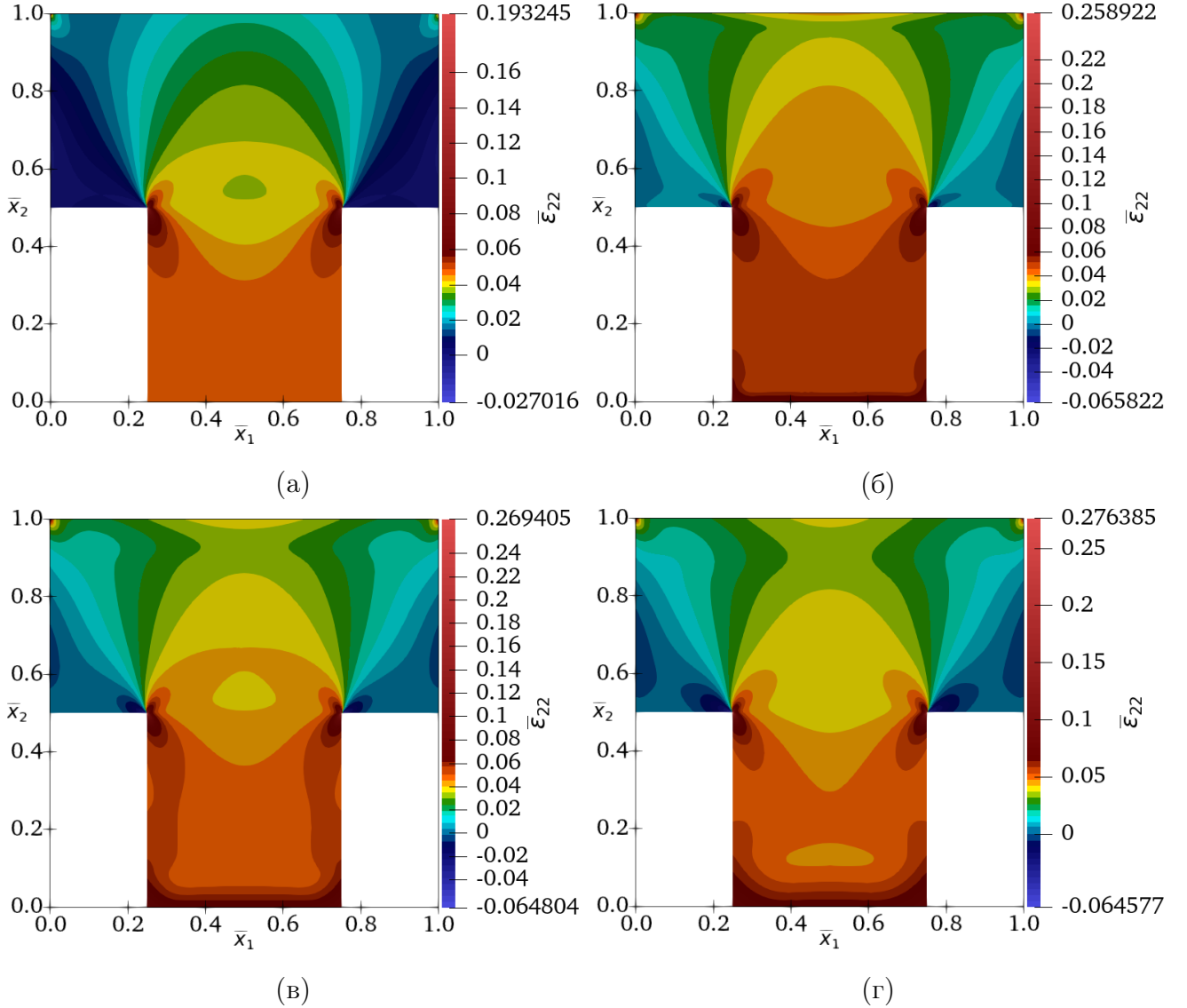


Рис. 21. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{22}$  в Т-образной области при  $p_1 = 1/2$  и а)  $r = 0$ ; б)  $r = 0.05$ ; в)  $r = 0.1$ ; г)  $r = 0.15$

Схожие угловые эффекты в деформациях  $\bar{\epsilon}_{22}$  ранее были описаны в книге Андреева [11] после проведения серии натурных экспериментов. В книге Андреев также утверждает, что интегральная нагрузка напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в сечениях близких к ступенчатому переходу может отличаться от приклады-

ваемой нагрузки, однако данный эффект не удалось обнаружить численно, так как во всех сечениях, даже самых близких к ступенчатому переходу, интегральная нагрузка сохраняется. Однако, стоит заметить, максимальное значение напряжений в концентраторах уменьшилось. Результаты с распределением напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  продемонстрированы на рис. 22.

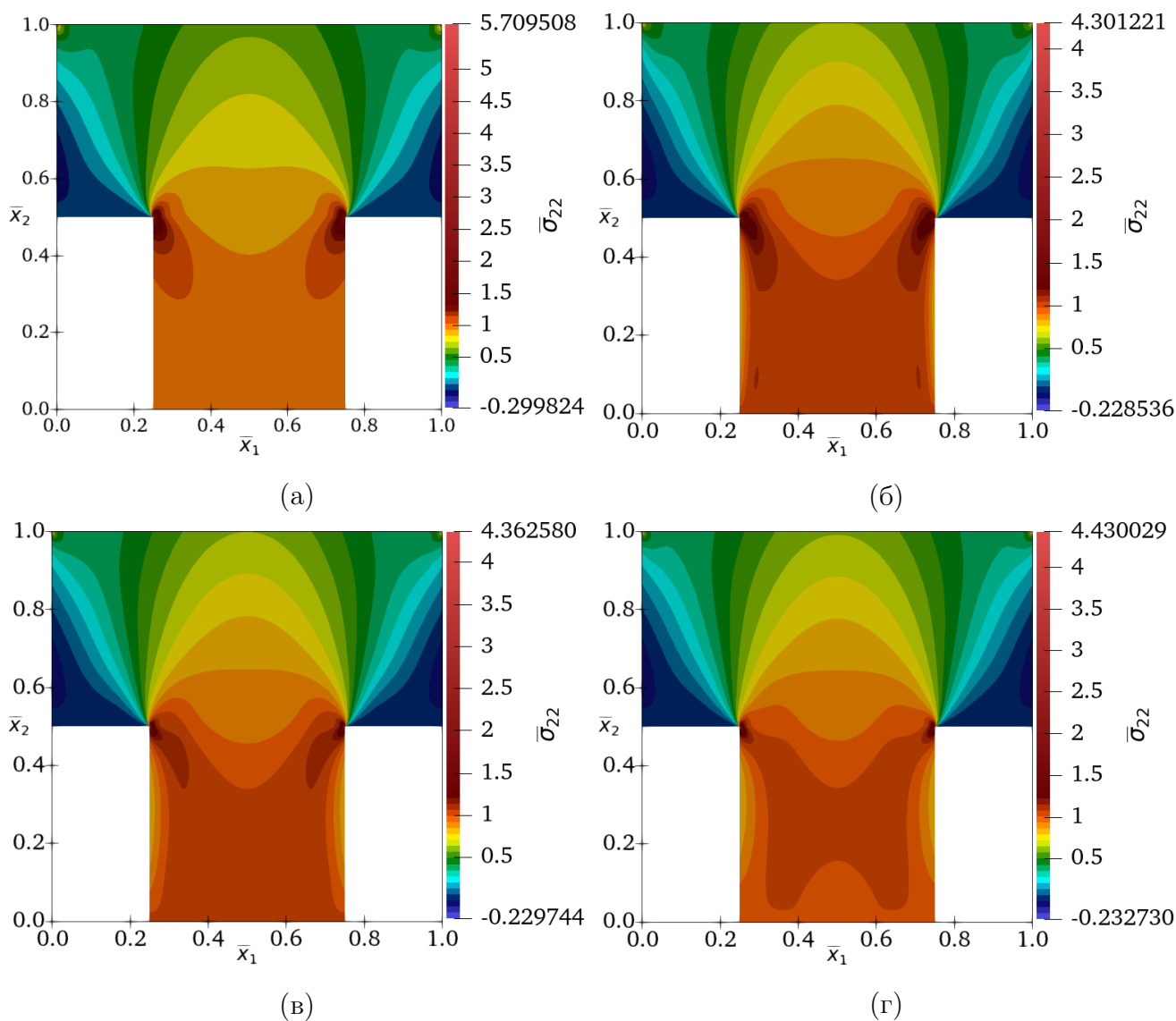


Рис. 22. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в Т-образной области при  $p_1 = 1/2$  и  
а)  $r = 0$ ; б)  $r = 0.05$ ; в)  $r = 0.1$ ; г)  $r = 0.15$

Теперь же, рассмотрим деформации и напряжения в сечениях, которые указаны на рис. 20, но уже при вариации весового параметра  $p_1$ . В сечении АВ в деформациях  $\bar{\varepsilon}_{22}$ , изображённых на рис. 23, можно наблюдать влияние краевого эффекта вблизи приложенной нагрузки, которое говорит о

неравномерности деформирования вблизи границ области, несмотря на равномерную нагрузку. В напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  из-за этого наблюдается «двугорбая» структура, которая изображена на рис. 24.

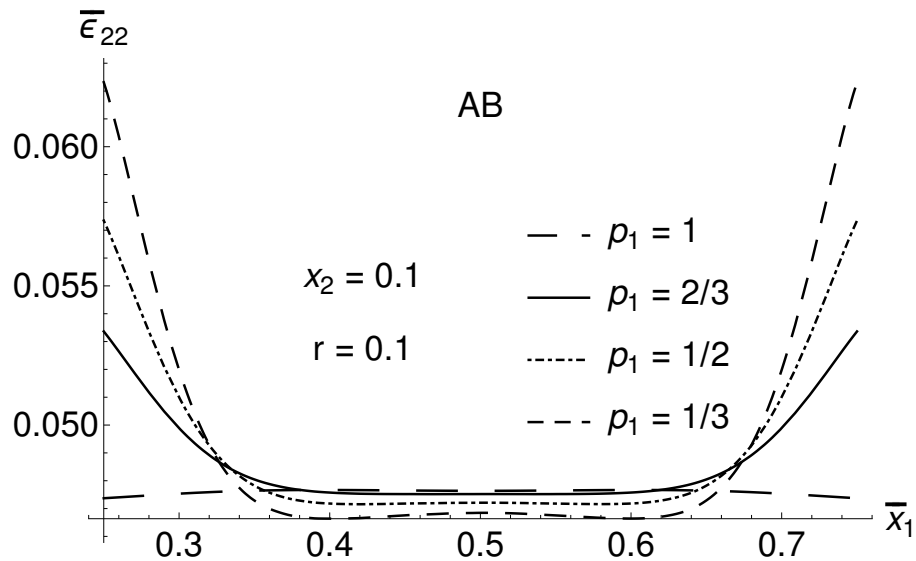


Рис. 23. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{22}$  в Т-образной области в сечении АВ при вариации весовых параметров

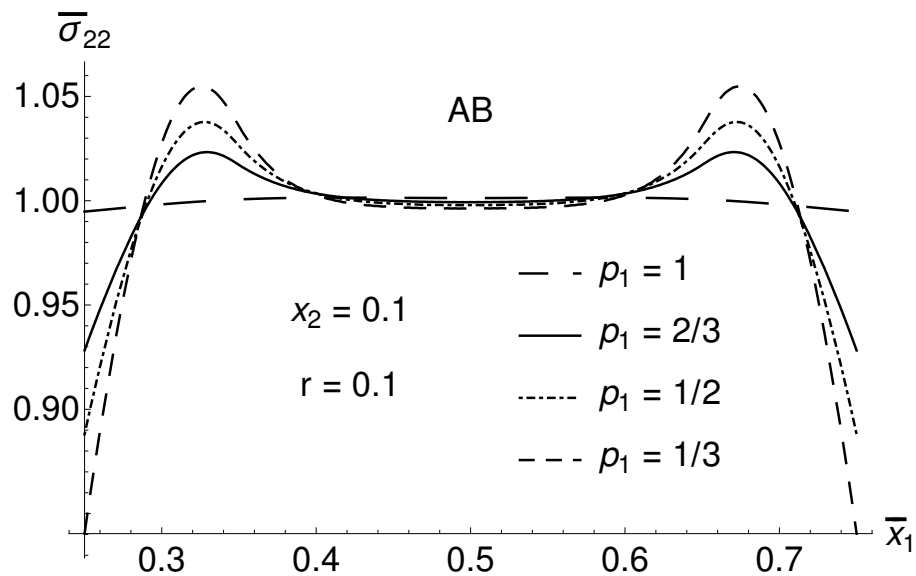


Рис. 24. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в Т-образной области в сечении АВ при вариации весовых параметров

В сечении CD над кромочным эффектом от нагружения на нижнем конце пластины начинает преобладать угловой эффект, который даёт «двугорбые» структуры в деформациях  $\bar{\epsilon}_{22}$  и напряжениях  $\bar{\sigma}_{22}$ , изображённых на

рис. 25 и 26 соответственно. Деформации близки к классическим и имеют лишь количественные различия, в то время как напряжения имеют существенные отклонения вблизи границы области.

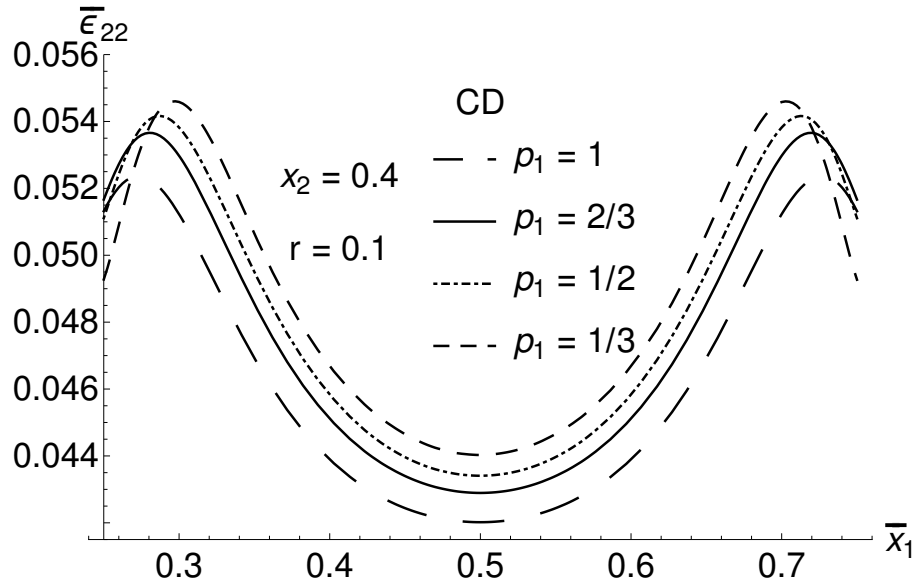


Рис. 25. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{22}$  в Т-образной области в сечении CD при вариации весовых параметров

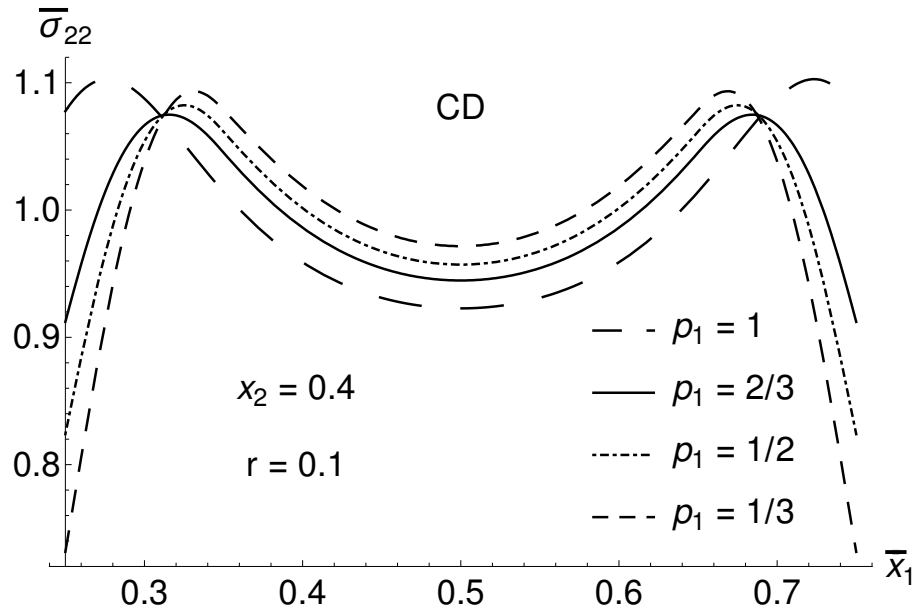


Рис. 26. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в Т-образной области в сечении CD при вариации весовых параметров

И наконец в сечении EF можем наблюдать угловой эффект с отрицательными деформациями  $\bar{\epsilon}_{22}$ , который тем сильнее, чем меньше весовой параметр  $p_1$ . В напряжениях  $\bar{\sigma}_{22}$  наблюдается смягчение концентраторов, которое

также зависит в большей степени от параметра  $p_1$ . Здесь, как и в предыдущих сечениях также наблюдается пересечение напряжений в общих точках. Решения представлены на рис. 27 и 28.

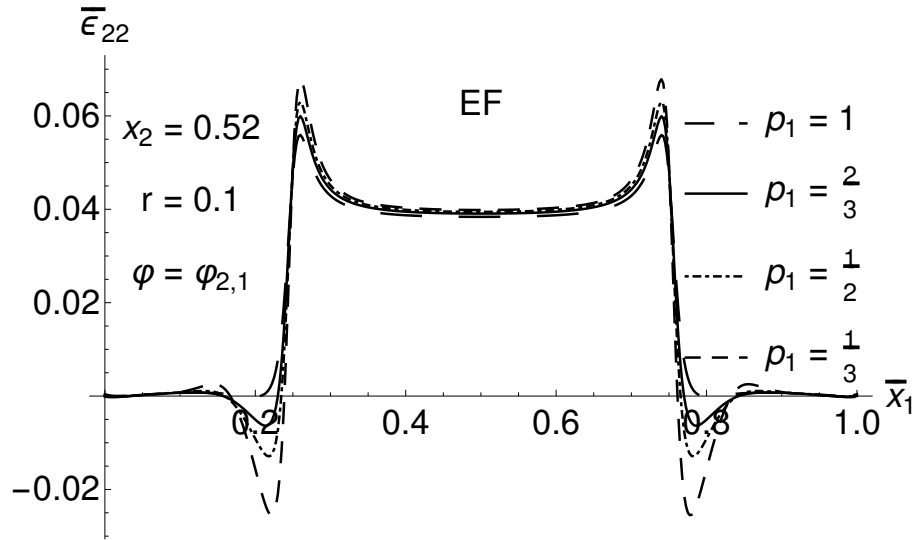


Рис. 27. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{22}$  в Т-образной области в сечении EF при вариации весовых параметров

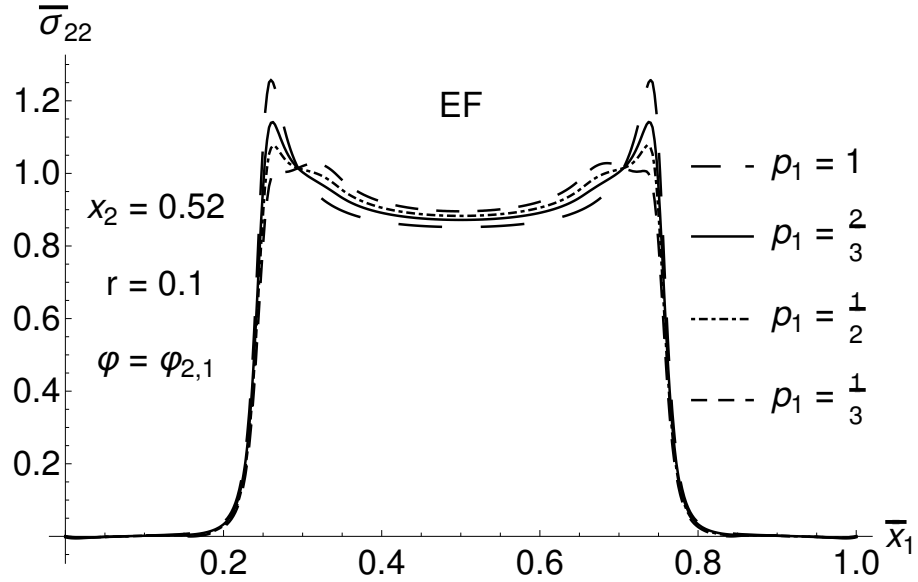


Рис. 28. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в Т-образной области в сечении EF при вариации весовых параметров

### 3.4. Задача Кирша с обобщением на эллиптические вырезы

Рассмотрим задачу Кирша [12] с обобщением на эллиптические вырезы на области  $S \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$ , со следующими граничными условиями

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=-1} = -1, \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=1} = 1.$$

Также добавим два дополнительных условия, которые зафиксируют область относительно главных осей и дадут симметрию решения

$$\bar{u}_i|_{\bar{x}_i=0} = 0, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Коэффициента Пуассона  $\nu = 0.3$ , безразмерный модуль Юнга  $\bar{E} = 21$ .

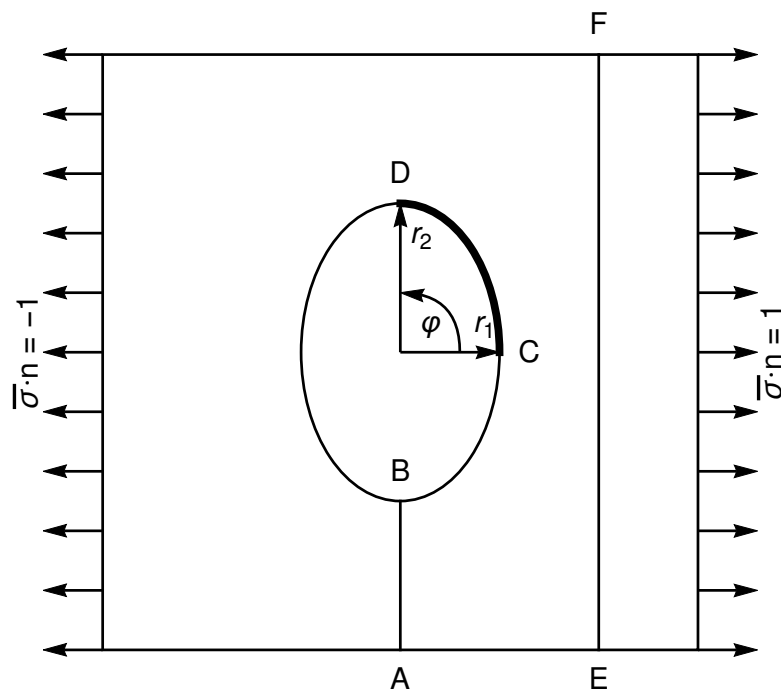


Рис. 29. Область с эллиптическим вырезом, заданными нагрузжениями и интересующими сечениями

Отметим на рис. 29 сечения, которые представляют особый интерес: это сечение АВ; граница эллипса CD с введённой дополнительной угловой



координатой  $\varphi$ ; и сечение EF, которое находится посередине между правой крайней точкой эллипса и правой границей области  $S$ . В расчётах будем варьировать радиус  $r_1$ , радиус  $r_2$  будем считать постоянным и равным 0.2.

Для начала рассмотрим классическую задачу Кирша с круговым вырезом, т. е. когда  $r_1 = r_2$ . В деформациях  $\bar{\varepsilon}_{11}$ , в областях на окружности смежных с концентраторами, возникают отрицательные деформации, размах которых тем шире, чем больше радиус нелокального влияния  $r$ . Такое поведение очень похоже на поведение, которое наблюдалось ранее в Т-образной области. Результаты представлены на рис. 30.

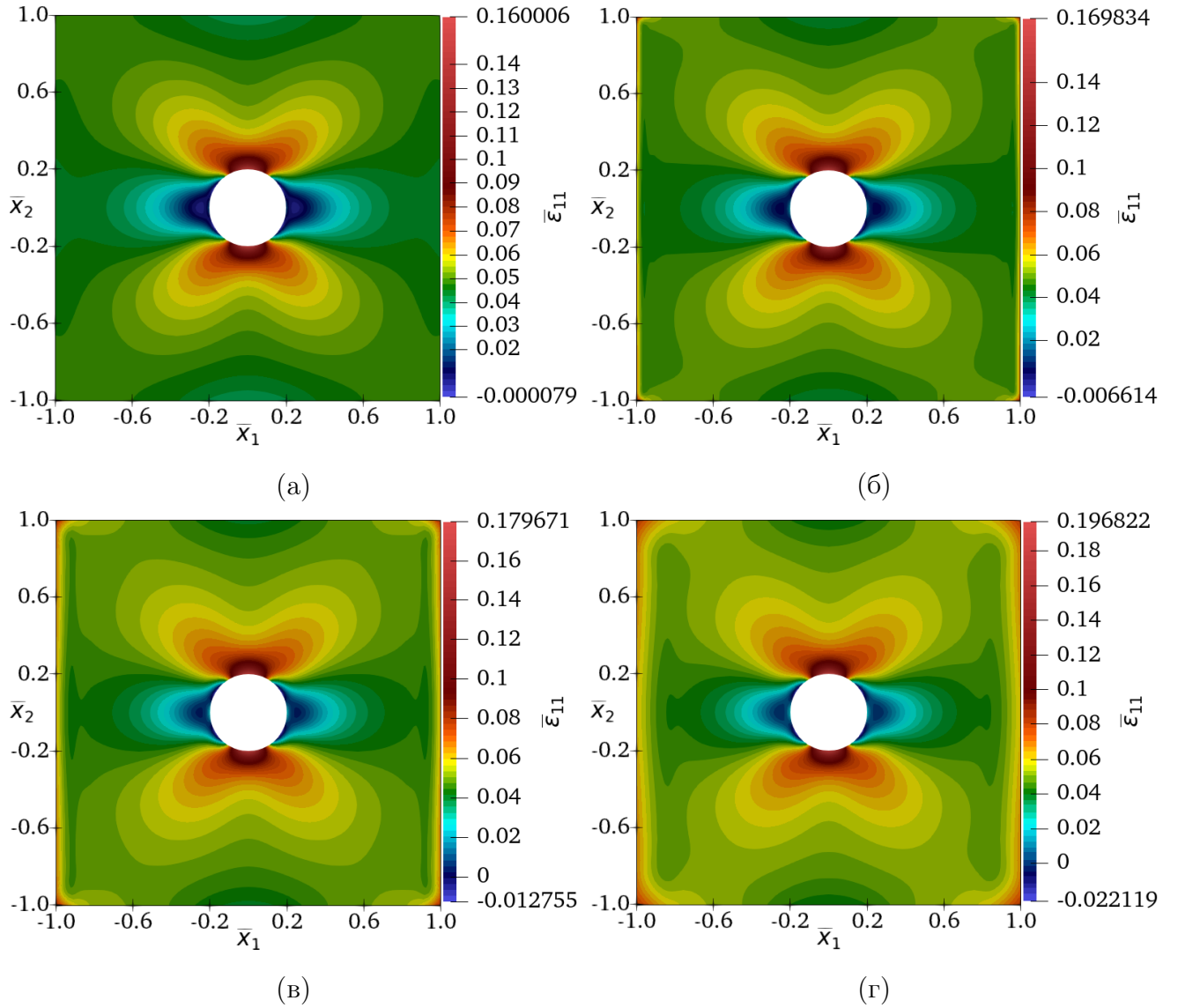


Рис. 30. Распределение деформаций  $\bar{\varepsilon}_{11}$  в области с круговым вырезом при  $p_1 = 1/2$  и а)  $r = 0$ ; б)  $r = 0.05$ ; в)  $r = 0.1$ ; г)  $r = 0.2$

В напряжениях  $\bar{\sigma}_{11}$ , так же, как и в Т-образной области, происходит смягчение концентраторов, в следствие чего максимальный уровень напряжений ниже, чем в классической постановке, в то время как уровень деформаций  $\bar{\varepsilon}_{11}$ , напротив, провышается. Как и во всех расчётах до этого, здесь также наблюдается кромочный эффект на верхнем и нижнем концах области, который характеризуется снижением напряжений вблизи границы. Результаты расчётов представлены на рис. 31.

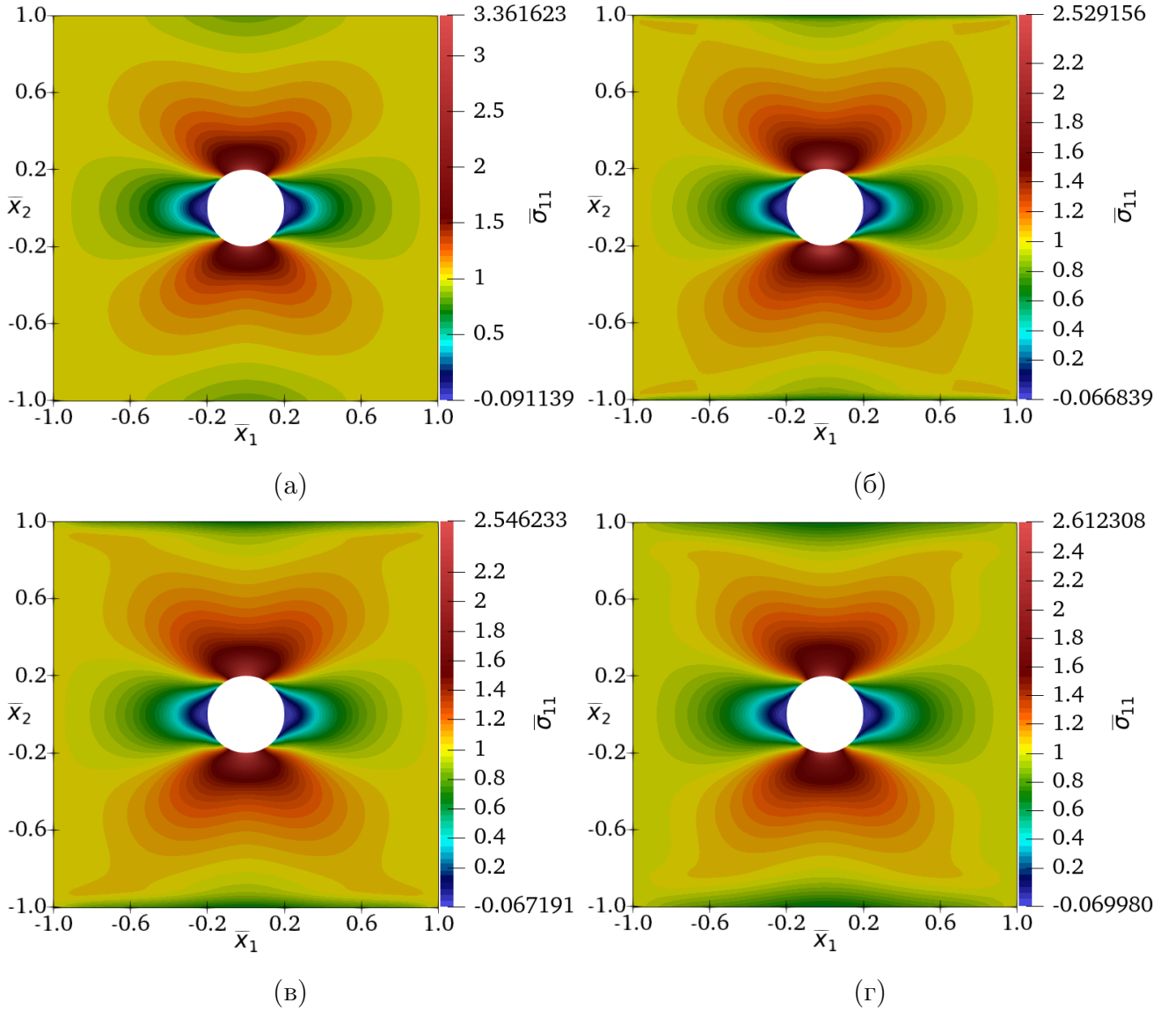


Рис. 31. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  в области с круговым вырезом при  $p_1 = 1/2$  и а)  $r = 0$ ; б)  $r = 0.05$ ; в)  $r = 0.1$ ; г)  $r = 0.2$

Наконец рассмотрим интересующие нас сечения при вариации весового параметра  $p_1$ . В сечении АВ качественных различий в деформациях  $\bar{\varepsilon}_{11}$  нет,

но в нелокальном случае, вблизи отверстия наблюдается их увеличение. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  напротив, уменьшают своё значение как вблизи отверстия, так и вблизи нижней границы области, но при этом в центре области напряжения в среднем выше, что объясняет равенство интегралов приложенной нагрузки и нагрузки взятой в сечениях. Результаты представлены на рис. 32 и 33.

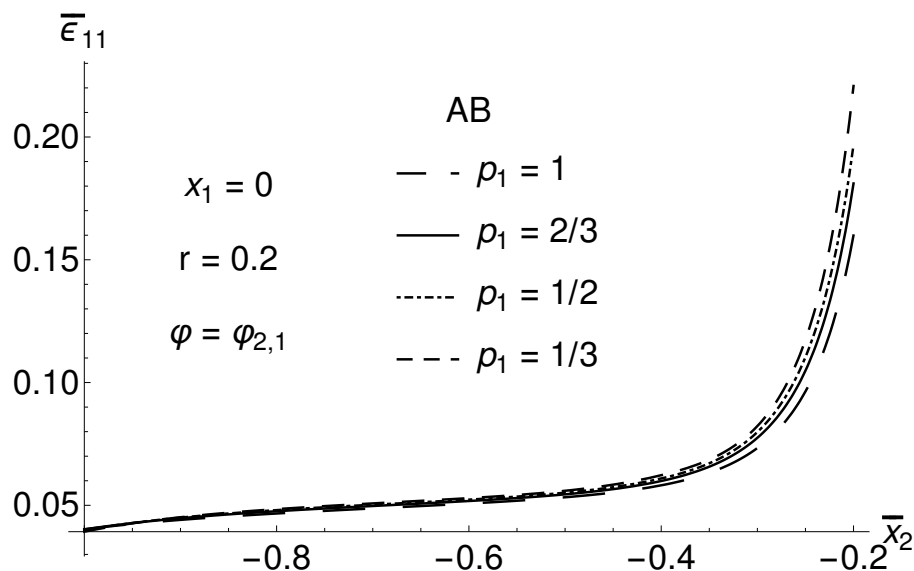


Рис. 32. Распределение деформаций  $\bar{\varepsilon}_{22}$  в сечении АВ при вариации весов при  $r_1 = 0.2$

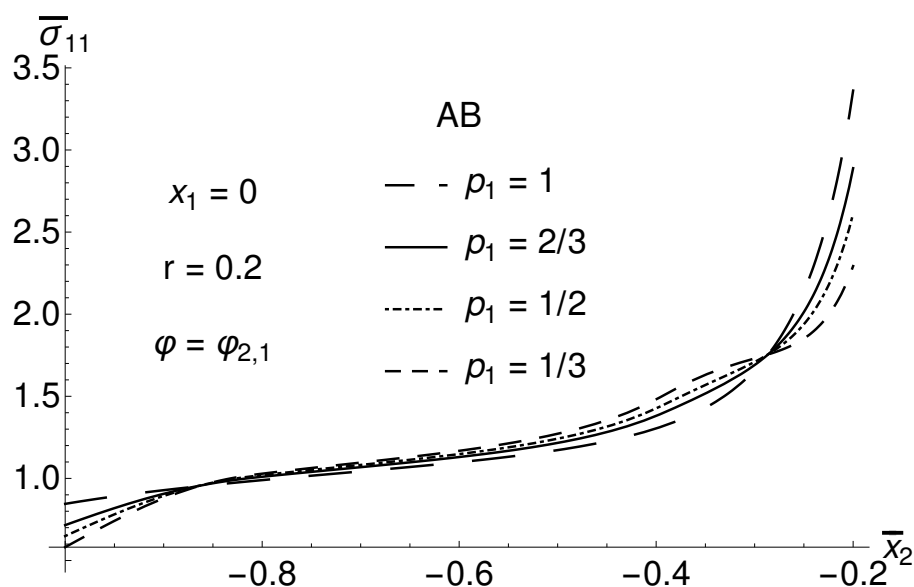


Рис. 33. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в сечении АВ при вариации весов при  $r_1 = 0.2$

На дуге CD хорошо видны возникающие в нелокальном случае отри-

цательные деформации  $\bar{\epsilon}_{11}$ , которые при уменьшении параметра  $p_1$  увеличиваются по модулю. Напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  в верхней точке, при уменьшении параметра  $p_1$  становится меньше и в правой точке окружности практически неотличимы от полученных при решении классического уравнения. Результаты представлены на рис. 34 и 35.

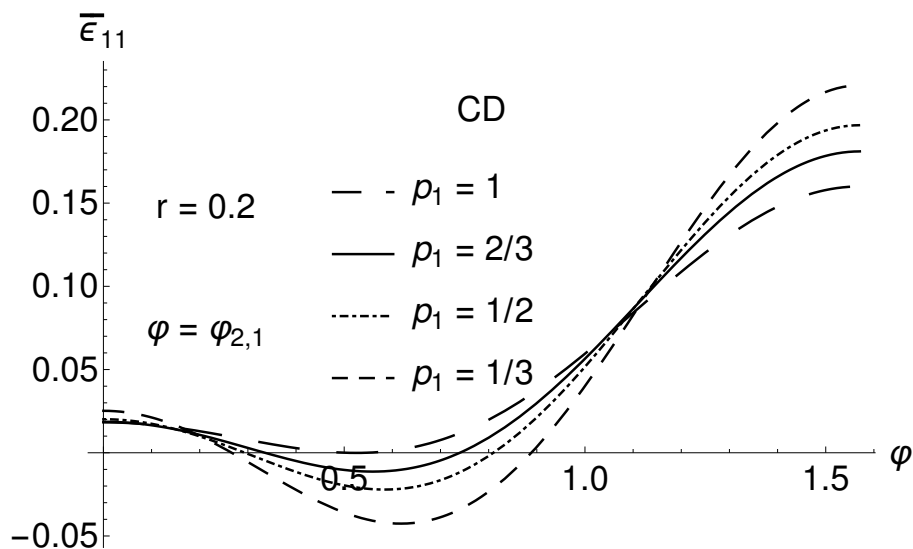


Рис. 34. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{22}$  на дуге CD при вариации весов при  $r_1 = 0.2$

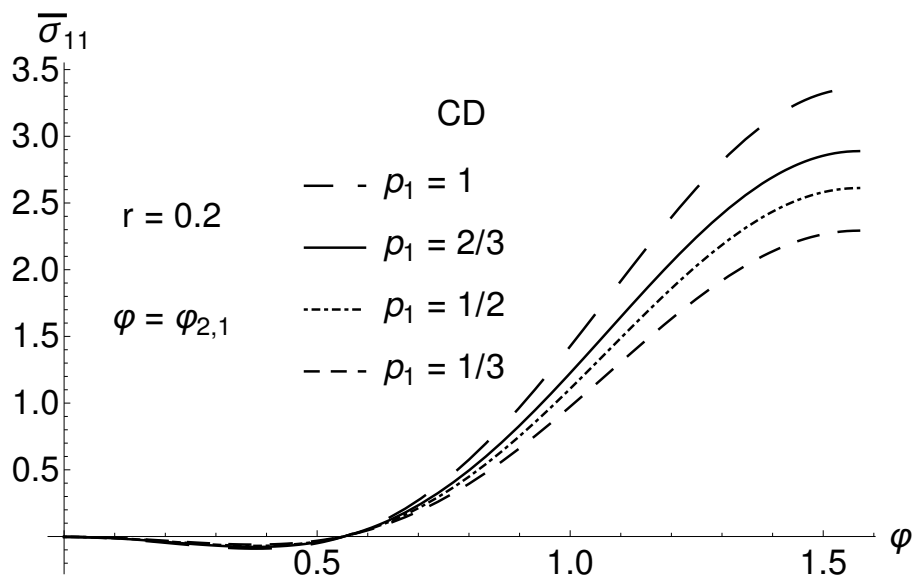


Рис. 35. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  на дуге CD при вариации весов при  $r_1 = 0.2$

И наконец рассмотрим сечение EF, равностоящее от правой точки окружности и правой границы области  $S$ . И деформации  $\bar{\epsilon}_{11}$  и напряже-

ния  $\bar{\sigma}_{11}$  имеют «двугорбую» структуру, которая характеризуется снижением уровня деформаций и напряжений в центре области. Однако под действием коромочного эффекта, который приходится со стороны приложенной нагрузки, деформации  $\bar{\epsilon}_{11}$  увеличиваются при приближении к границе области  $S$ , в то время как напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  напротив, становятся меньше и приобретают дополнительные приграничные «горбы». Результаты представлены на рис. 36 и 37.

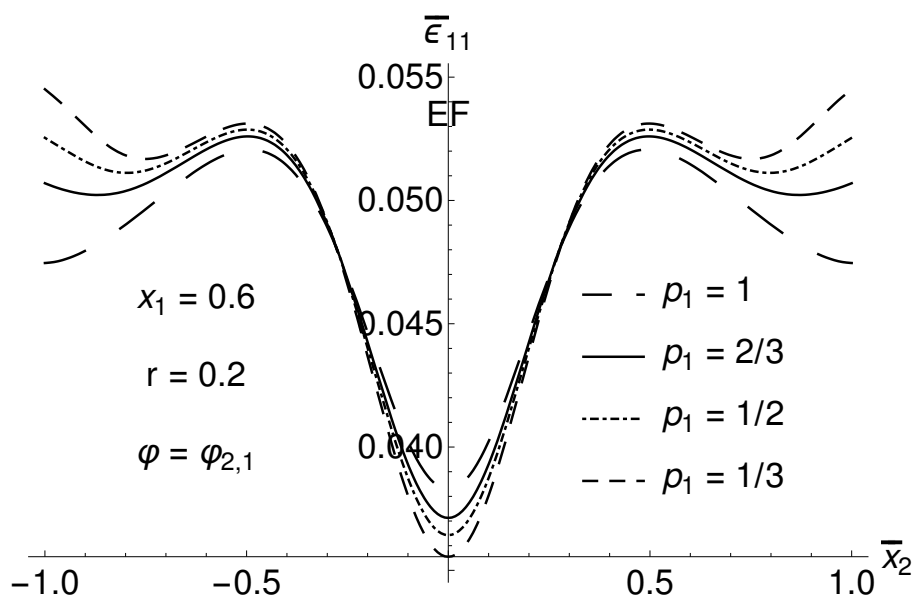


Рис. 36. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{22}$  в сечении EF при вариации весов

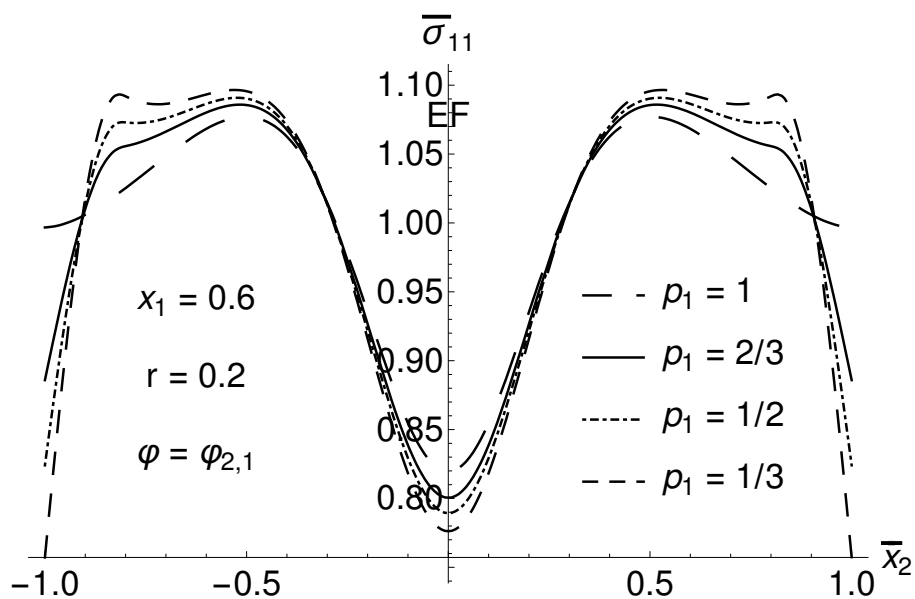


Рис. 37. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в сечении EF при вариации весов

Теперь рассмотрим случай, когда радиус эллипса  $r_1 = 0.1$ . В этом слу-

чае, деформации  $\bar{\varepsilon}_{11}$  на верхнем и нижнем концах эллипса становятся больше, чем в случае, когда  $r_1 = r_2$ . Также как и в случае с кругом, в нелокальной постановке задачи на границах эллипса смежных с концентраторами возникают отрицательные деформации, которые в два раза больше по модулю при аналогичных весовых параметрах. Результаты представлены на рис. 38.

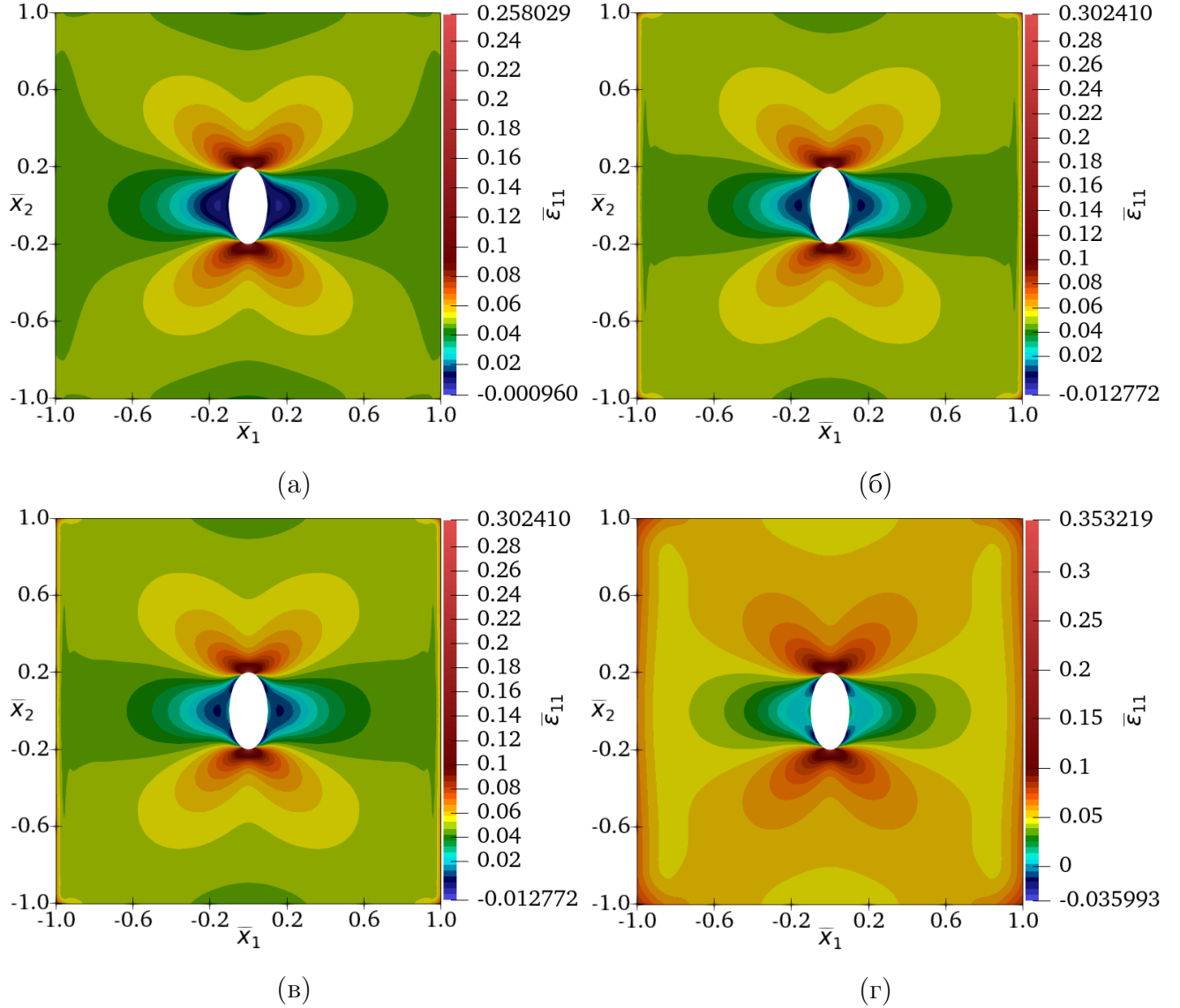


Рис. 38. Распределение деформаций  $\bar{\varepsilon}_{11}$  в области с эллиптическим вырезом при  $r_1 = 0.1$ ,  $p_1 = 1/2$  и а)  $r = 0$ ; б)  $r = 0.05$ ; в)  $r = 0.1$ ; г)  $r = 0.2$

В напряжениях  $\bar{\sigma}_{11}$  также наблюдается увеличение напряжений в концентраторах. Как и ранее, в нелокальном случае, максимальный уровень напряжений ниже, чем в классическом и можно наблюдать кромочный эффект, который характеризуется снижением напряжений на верхней и нижней гра-

ницах области. Результаты представлены на рис. 39.

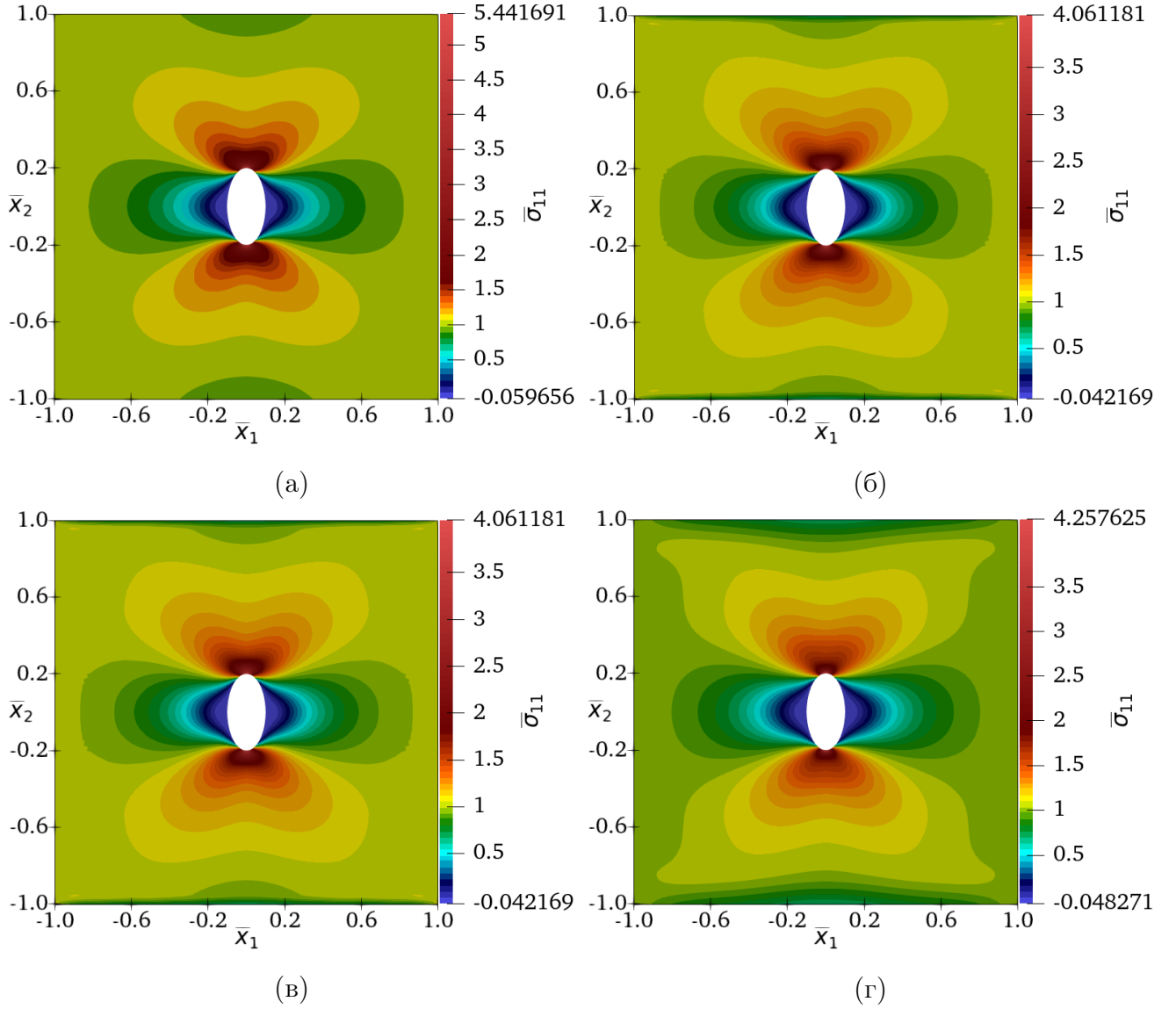


Рис. 39. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  в области с эллиптическим вырезом при  $r_1 = 0.1$ ,  $p_1 = 1/2$  и а)  $r = 0$ ; б)  $r = 0.05$ ; в)  $r = 0.1$ ; г)  $r = 0.2$

Рассмотрим более детально разницу решений при вариации радиуса эллиптического выреза  $r_1$ . Ясно, что при любом радиусе  $r_1$  максимальные напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  находятся на верхней и нижней точках эллипса и для классического случая, на основе теоретических исследований [12], была получена следующая зависимость

$$\sigma_{11}^{max} \approx \left(1 + 2\frac{r_2}{r_1}\right) p,$$

где  $p$  — приложенная нагрузка. Таким образом, рассмотрев сечение АВ, можем убедиться в том, что для классической постановки задачи зависимость прослеживается. В случае нелокальной постановки задачи, ситуация не столь очевидна, хотя зависимость максимального уровня напряжений от радиуса эллипса сохраняется. На рис. 40 и 41 видно, что при удалении от эллиптического выреза, решения сливаются и практически не отличаются друг от друга. В нелокальном случае на нижней границе области наблюдается понижение напряжений.

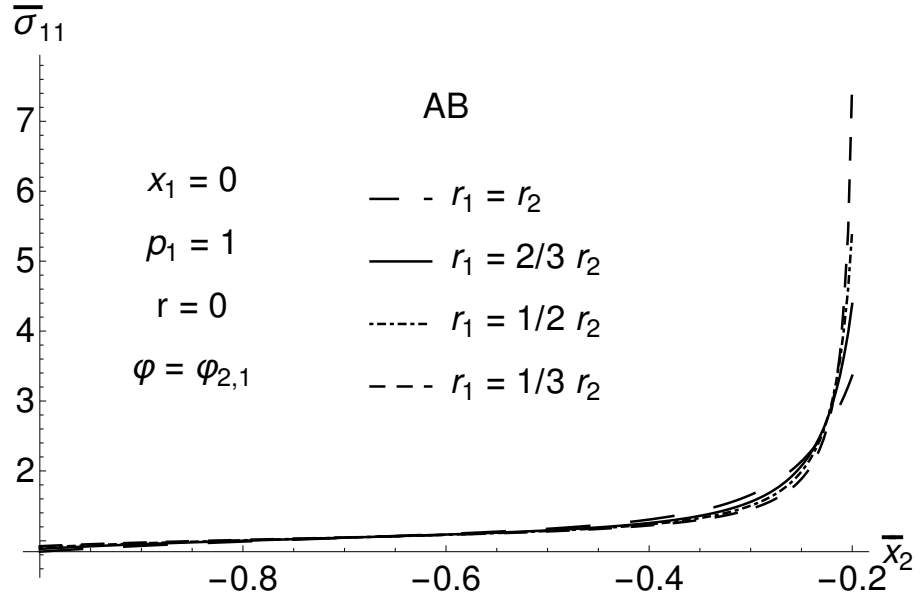


Рис. 40. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в сечении АВ в классической постановке задачи при вариации радиуса  $r_1$

Рассмотрим дугу CD, но так как при вариации  $r_1$  её длина и кривизна будет разной, будем рассматривать её в относительных величинах. Для начала опишем её параметрически следующим образом

$$\begin{cases} x_1(\varphi) = r_1 \cos \varphi, \\ x_2(\varphi) = r_2 \sin \varphi. \end{cases}$$

Длину  $l$ , зависящую от угла  $\varphi$ , определим следующим образом



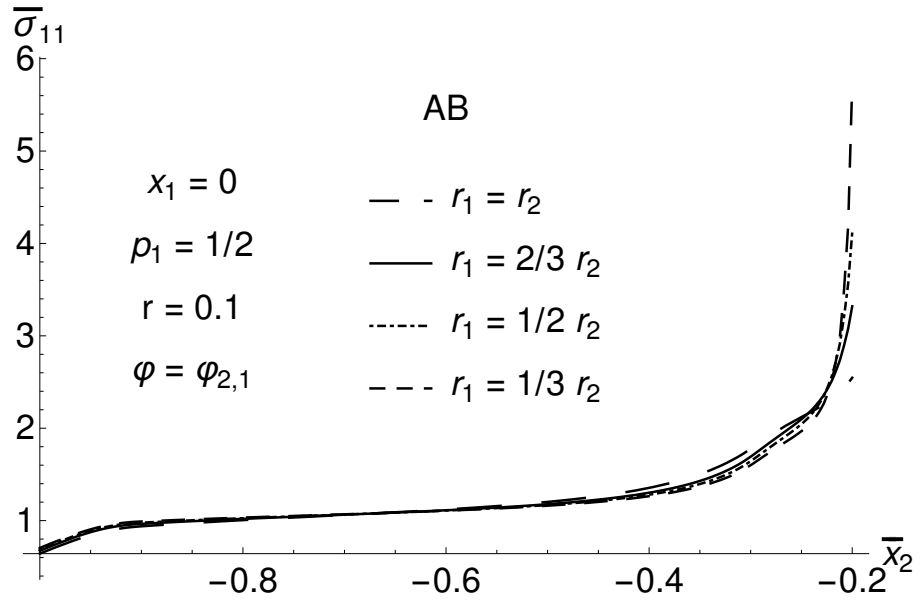


Рис. 41. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{22}$  в сечении АВ в нелокальной постановке задачи при вариации радиуса  $r_1$

$$l(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \varphi}\right)^2} d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

И наконец перейдём к безразмерному виду

$$s(\varphi) = \frac{l(\varphi)}{l\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Дальнейшие результаты будем представлять относительно длины  $s$ , то есть для этого придётся определить  $s^{-1} = \varphi(s)$ , что легко сделать численно благодаря современным математическим пакетам. Заметим, что в случае, когда  $r_1 = r_2$  данная зависимость будет линейной. В остальных случаях придётся иметь дело с эллиптическими интегралами 2-го рода.

Рассмотрим деформации  $\bar{\varepsilon}_{11}$ , возникающие на дуге CD. При уменьшении радиуса  $r_1$  уменьшается и длина дуги, но даже в относительных величинах, область на которой происходит концентрация деформаций стремительно сужается и деформации увеличиваются. Аналогичную картину видим и в

нелокальном случае, где мы также можем видеть возникающие отрицательные деформации, которые увеличиваются по модулю и ширине при уменьшении радиуса  $r_1$ . Результаты расчётов задачи в классической постановке представлены на рис. 42, в нелокальной постановке на рис. 43.

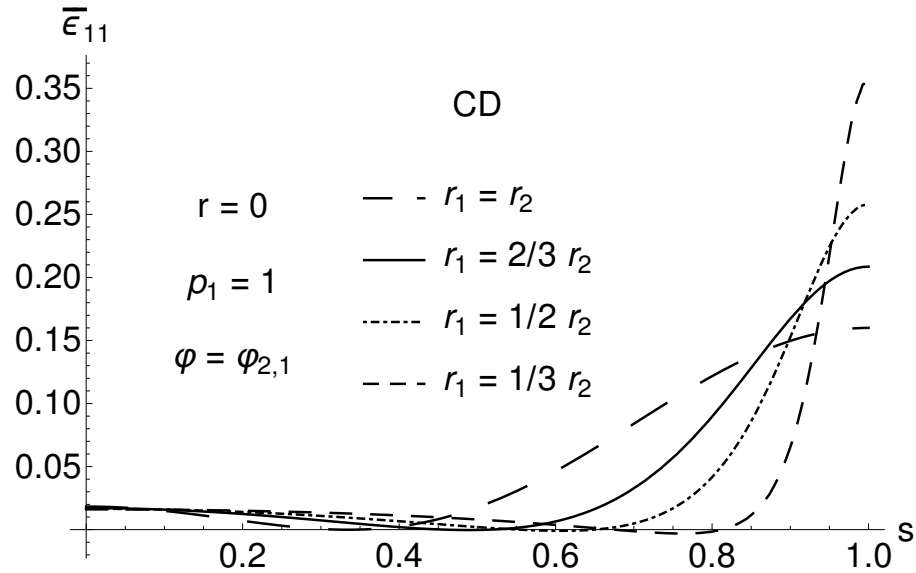


Рис. 42. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{11}$  на дуге CD в классической постановке задачи при вариации радиуса  $r_1$

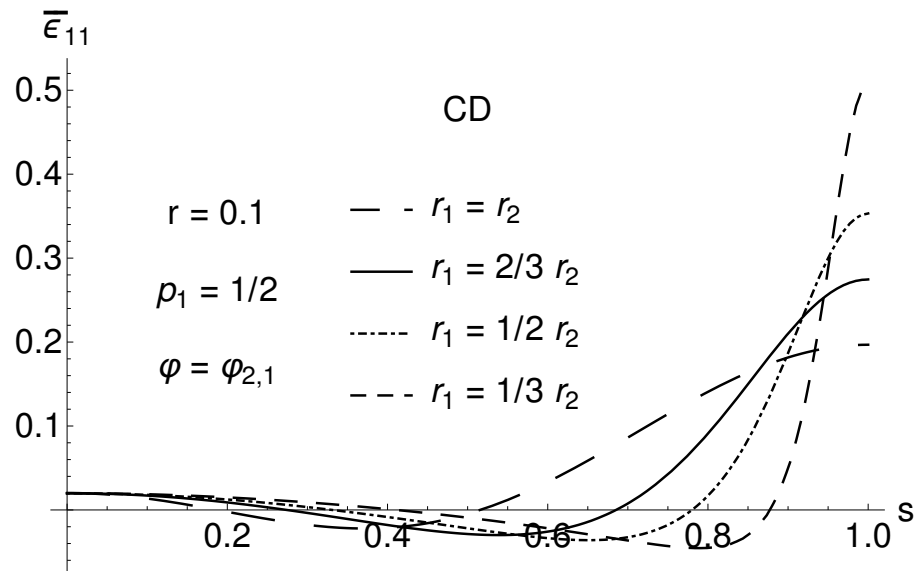


Рис. 43. Распределение деформаций  $\bar{\epsilon}_{11}$  на дуге CD в классической постановке задачи при вариации радиуса  $r_1$

Теперь рассмотрим напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$ , концентраторы которых гораздо удобнее рассматривать при обходе дуги CD. Как и в случае с деформациями

$\bar{\varepsilon}_{11}$ , наблюдается сужение зоны концентрации. В нелокальном случае происходит смягчение концентратора и для наглядности, на рис. 44 и 45 выведены пиковые значения напряжений. Учитывая, что темпы роста как в локальном, так и в нелокальном законках похожи, это говорит лишь о том, что нелокальная теория не способна полностью погасить возникающие концентраторы.

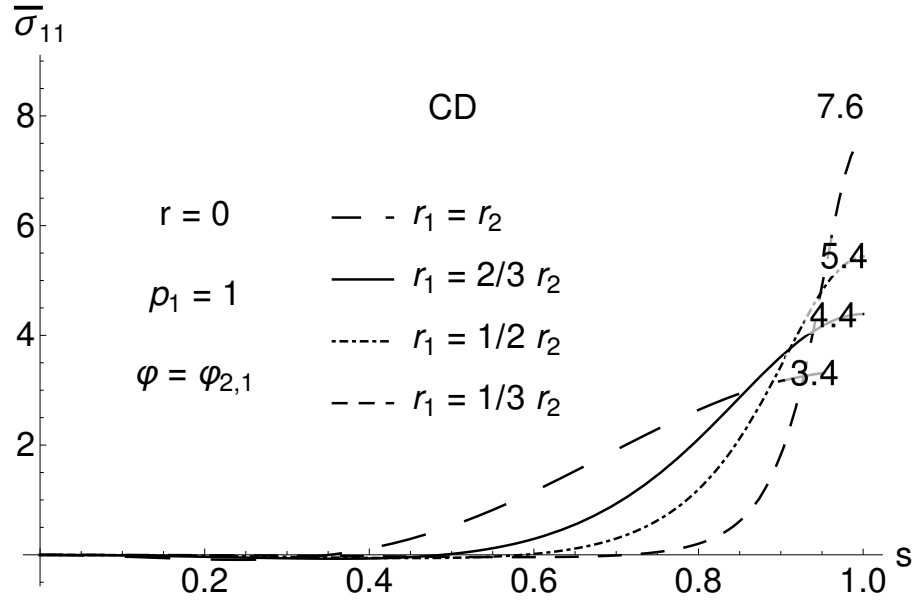


Рис. 44. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  на дуге CD в классической постановке задачи при вариации радиуса  $r_1$

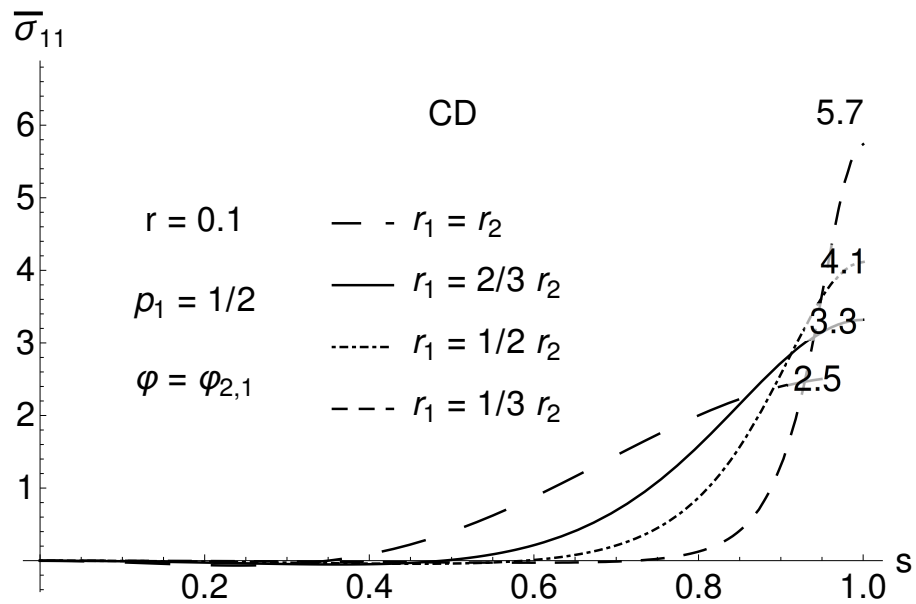


Рис. 45. Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  на дуге CD в классической постановке задачи при вариации радиуса  $r_1$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было рассмотрено двумерное уравнение равновесия в нелокальной постановке. Исследования показали, что несмотря на такую постановку задачи, здесь, как и в классическом случае, выполняется принцип Сен-Венана, который, в отличие от классического решения, не даёт константы вдали от приложенных нагрузжений, но в тоже время интегрально совпадает с ними. В областях со ступенчатыми переходами или эллиптическими вырезами наблюдается смягчение концентраторов, которое характеризуется увеличением деформаций, но снижением напряжений. Также в окрестностях концентраторов в деформациях наблюдаются отрицательные величины, которые тем больше и тем шире, чем больше вклад и радиус нелокального влияния соответственно.

Был предложен и реализован параллельный и распределённый поузловой алгоритм сборки матрицы жёсткости на основе метода конечных элементов и написана программа на языке программирования C++. Были также предложены и реализованы различные варианты балансировки данных между процессами. Распараллеливание программы было произведено при помощи технологии параллельного программирования OpenMP [13]. Распределённые вычисления были реализованы на основе технологии MPI [14]. Для хранения и решения разреженных симметричных СЛАУ использовалась библиотека линейной алгебры Eigen [15]. В качестве распределённых решателей СЛАУ были использованы библиотеки PETSc [16] и Intel MKL PARDISO [17]. Для реализации обобщённой конечно-элементной модели была использована библиотека символьного дифференцирования на этапе компиляции symdiff [18]. Моделирование геометрии и генерация конечно-элементной сетки была сделана в SALOME [19]. Обработка результатов и выводение графиков были сделаны при помощи Paraview [20] и Wolfram Mathematica [21].

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Thangadurai T.D., Manjubaashini N., Thomas S., Maria H.J. Nanostructured Materials. Springer International Publishing, 2020. 210 p.
2. Eringen A.C. Nonlocal continuum field theories. New York-Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.
3. Pisano A.A., Sofi A., Fuschi P., 2009. Nonlocal integral elasticity: 2D finite element based solutions. Int. J. Solids Struct. 46, 3836–3849.
4. Wen P.H., Huang X.J., Aliabadi M.H. Two Dimensional Nonlocal Elasticity Analysis by Local Integral Equation Method. CMES, vol.96, no.3, pp.199-225, 2013
5. Abdollahi R. Benchmarks in nonlocal elasticity defined by Eringen's integral model / Abdollahi R., Boroomand B. – Int. J. Solids Struct, 2013, 50, p. 2758–2771.
6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
7. Zienkiewicz O. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Seventh edition. / O. Zienkiewicz, R. Taylor, J.Z. Zhu – 2013. – 756 p.
8. Bathe K-J. Finite Element Procedures. Second edition. — 2014. — 1065 p.
9. Kuvyrkin G.N., Savelyeva I. Yu., Sokolov A.A. Features of the software implementation of the numerical solution of stationary heat equation taking into account the effects of nonlocal finite element method. Journal of Physics: Conference Series, Volume 1479, Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems 11-13 November 2019, Voronezh, Russian Federation

10. <https://www.kiam.ru/MVS/resources/k10.html> (Дата обращения 31.03.2021)
11. Андреев А.В. Инженерные методы определения концентрации напряжений в деталях машин. М.: Машиностроение, 1976, 72 с.
12. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин: Справочник. 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1993. — 640 с: ил.
13. Антонов А.С. Параллельное программирование с использованием технологии OpenMP — М.: Изд-во Московского Университета, 2009. — 78 с.
14. Абрамян, М.Э. Параллельное программирование на основе технологии MPI 2.0 : учебник — Ростов-на-Дону; Таганрог: Изд-во ЮФУ, 2018. — 357 с.
15. Eigen: <https://eigen.tuxfamily.org/> (Дата обращения 31.03.2021)
16. PETSc: <https://www.mcs.anl.gov/petsc> (Дата обращения 31.03.2021)
17. Intel MKL PARDISO: <https://software.intel.com/content/www/us/en/develop/documentation/onemkl-developer-reference-c/top.html> (Дата обращения 31.03.2021)
18. Краснов М.М. Метапрограммирование шаблонов C++ в задачах математической физики. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, 84 с.
19. SALOME: <https://www.salome-platform.org/> (Дата обращения 31.03.2021)
20. Paraview: <https://www.paraview.org/> (Дата обращения 31.03.2021)
21. Mangano S. Mathematica Cookbook. — O'Reilly Media: Sebastopol, 2010. — 800 p.