

# Разработка математических моделей теории нелокальной упругости и их численное исследование и анализ

Выполнил студент группы ФН2-42М Соколов А.А.  
Научный руководитель профессор кафедры ФН2 Кувыркин Г.Н.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

23 июня 2021 г.



## Постановка задачи

Рассмотрим уравнение равновесия сплошной среды

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где тензор напряжений  $\hat{\sigma}$  определяется следующим образом

$$\hat{\sigma} = p_1 \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} + p_2 \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} dS'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' \in S'(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где  $p_1 + p_2 = 1$ , причём  $p_1 > 0$  и  $p_2 \geq 0$ ;

$\varphi$  — некоторая нормированная положительная функция в области  $S'(\mathbf{x})$ ;  
 $S'(\mathbf{x})$  — область нелокального влияния.

Будем рассматривать кинематические и силовые граничные условия

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{p}(\mathbf{x}),$$

где  $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial S$  и  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Положим, что перемещения малы, поэтому для определения компонент тензора деформаций  $\hat{\epsilon}$  воспользуемся соотношением Коши

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = \overline{1, 2},$$

где  $u_i, i = \overline{1, 2}$  — компоненты вектора перемещения  $\mathbf{u}$ .

Считаем, что рассматриваемый случай соответствует случаю линейного упругого изотропного тела для задачи в плоском напряжённом состоянии, поэтому компоненты тензора коэффициентов упругости  $\hat{\mathbf{C}}$  определим следующим образом:

$$C_{ijkl} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = \overline{1, 2},$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

В расчётах будем использовать функцию нелокального влияния  $\varphi$

$$\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} \left( 1 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{r^2} \right), & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq r, \\ 0, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > r, \end{cases}$$

где  $r$  — радиус нелокального влияния.

## Численный алгоритм решения

К уравнению (1) применим стандартную конечно-элементную процедуру аппроксимации и подставим в полученное уравнение (2). В итоге, перейдя к индексной форме записи, получим

$$\begin{aligned}
 p_1 \iint_S N_{n,i}^{(e)} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS + p_2 \iint_S N_{n,i}^{(e)} \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS'(\mathbf{x}) dS = \\
 = \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} p_j d\Gamma - \iint_S N_n^{(e)} b_j dS, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.
 \end{aligned}$$

Итоговое выражение, которое мы хотим получить, выглядит следующим образом

$$(p_1 \hat{\mathbf{K}}^{Loc} + p_2 \hat{\mathbf{K}}^{NonLoc}) \cdot \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{B}}.$$

Для простоты дальнейшего изложения введём тензор  $\hat{\mathbf{K}}_{nm}^{(e)(e')}$ , который по сути представляет из себя блок  $2 \times 2$  матрицы элемента  $(e)$ . Коэффициенты блока имеют вид

$$\begin{aligned}
 K_{nmij}^{(e)(e')}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{np} \delta_{mq} C_{ikjl} N_{n,k}^{(e)}(\mathbf{x}) N_{m,l}^{(e')}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_p \otimes \mathbf{E}_q, \\
 i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad n, m, p, q = \overline{1, D}.
 \end{aligned}$$

Аппроксимируем локальную матрицу жёсткости и векторы плотности поверхностных и объёмных сил

$$\hat{\mathbf{K}}^{Loc} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \hat{\mathbf{K}}_{nm}^{(e)(e)}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) J_q^{(e)}, \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{(be) \in \Gamma_h} \sum_{n \in I^{(be)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{p}(\mathbf{x}_q) J_q^{(be)},$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{b}(\mathbf{x}_q) J_q^{(e)},$$

где  $I^{(e)}$  — множество номеров узлов элементов  $(e)$ ;

$Q^{(e)}$  — множество номеров квадратурных узлов на элементе  $(e)$ ;

$\mathbf{x}_q$  — координата квадратурного узла  $q$ ;

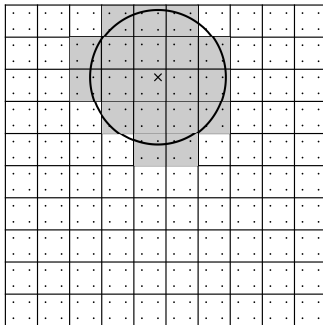
$w_q$  — квадратурный вес в квадратурном узле  $q$ ;

$J_q^{(e)} = \left| \det \hat{\mathbf{J}}^{(e)}(\mathbf{x}_q) \right|$  — якобиан вычисленный в квадратурной точке  $\mathbf{x}_q$ ;

$\mathbf{E}_n$  — единичный вектор размерности  $D$ .

Аппроксимацию вложенного интеграла организуем относительно квадратурных узлов, что наглядно проиллюстрировано на рис. 1 и приводит нас к следующей формуле

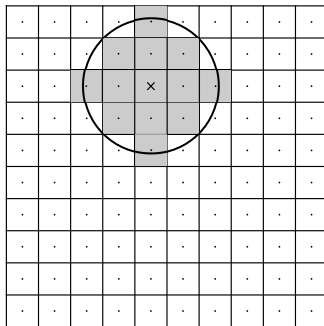
$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}^{NonLoc} = & \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \times \\ & \times \sum_{(e') \in S_h^q} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \hat{\mathbf{K}}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}. \quad (4) \end{aligned}$$



**Рис. 1:** Аппроксимация зоны нелокального влияния относительно квадратурного узла сетки

Можно упростить аппроксимацию вложенного интеграла если проводить её относительно центров элементов. Таким образом радиус поиска следует брать несколько больше, чем радиус нелокального влияния. Тогда расчётная формула (4) приобретает вид

$$\hat{\mathbf{K}}^{NonLoc} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e') \in S_h^{(e)}} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \times \\ \times \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \hat{\mathbf{K}}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}. \quad (5)$$



**Рис. 2:** Аппроксимация зоны нелокального влияния относительно центра конечного элемента

Формулы (3) и (5) не пригодны для параллельных и распределённых вычислений. Чтобы сделать их пригодными для каждого узла  $n$  введём множество элементов  $E^n$ , которым он принадлежит. Тогда аппроксимацию локальной и нелокальной матриц жёсткости можно переписать в следующем виде

$$\hat{\mathbf{K}}^{Loc} = \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e) \in E^n} \sum_{m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \hat{\mathbf{K}}_{nm}^{(e)(e)}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) J_q^{(e)}.$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}^{NonLoc} = & \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e) \in E^n} \sum_{(e') \in S_h^{(e)}} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \times \\ & \times \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \hat{\mathbf{K}}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что такой порядок знаков суммирования позволяет собирать матрицу жёсткости построчно, что открывает возможности для эффективного использования многопроцессорных систем.

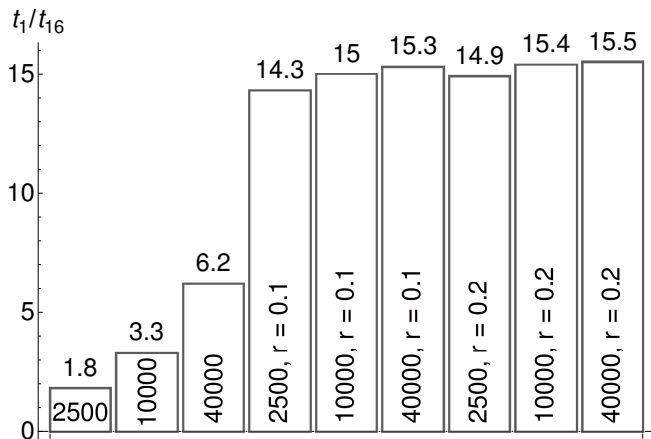


## Результаты распараллеливания

Проведём серию расчётов на области  $S = [0, 1] \times [0, 1]$  с введённой на ней равномерной сеткой  $S_h$ , состоящей из квадратичных серендиповых элементов. Подробность сетки, параметры и результаты расчёта указаны в табл. 1.

Количество конечных элементов	Радиус поиска соседей	Среднее число соседей	Требуемый объём памяти	Время расчёта 1 поток	Время, расчёта 16 потоков
2500	0	—	3.7 Мб	0.031 с	0.017 с
10000	0	—	15 Мб	0.152 с	0.046 с
40000	0	—	59 Мб	1.280 с	0.207 с
2500	0.1	66	63 Мб	4.385 с	0.307 с
10000	0.1	281	916 Мб	76.65 с	5.102 с
40000	0.1	1143	13.3 Гб	1265 с	82.32 с
2500	0.2	257	210 Мб	17.40 с	1.166 с
10000	0.2	1042	3.1 Гб	288.4 с	18.71 с
40000	0.2	4194	47 Гб	4704 с	303.2 с

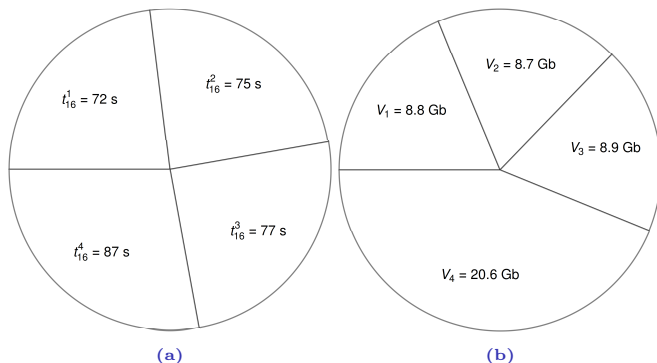
**Таблица 1:** Затрачиваемые вычислительные ресурсы на различных сетках и при различных радиусах поиска ближайших соседей



**Рис. 3:** Ускорение времени сборки матрицы жёсткости при использовании технологии OpenMP на 16 потоках в сравнении со временем счёта на 1 потоке

$N$	$\tilde{r}$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$t_{16}^1, \text{ c}$	$t_{16}^2, \text{ c}$	$t_{16}^3, \text{ c}$	$t_{16}^4, \text{ c}$
10000	0.1	181 Мб	173 Мб	174 Мб	388 Мб	1.269	1.312	1.222	1.482
10000	0.2	607 Мб	582 Мб	587 Мб	1.3 Гб	4.736	4.508	4.474	5.376
40000	0.1	2.5 Гб	2.5 Гб	2.5 Гб	5.8 Гб	20.34	20.93	19.54	23.48
40000	0.2	8.8 Гб	8.7 Гб	8.9 Гб	20.6 Гб	71.63	75.31	77.42	86.76

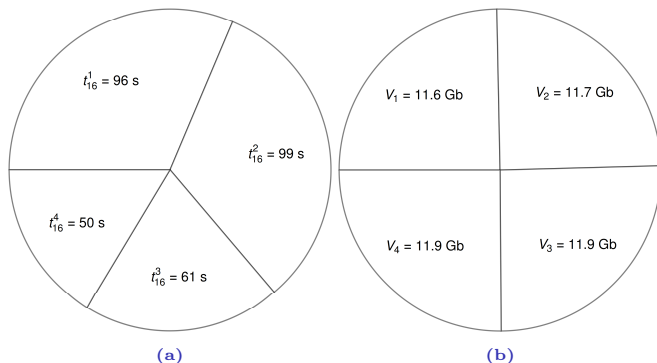
**Таблица 2:** Распределение объёмов данных и времени выполнения между процессами при балансировке объёмов вычислений



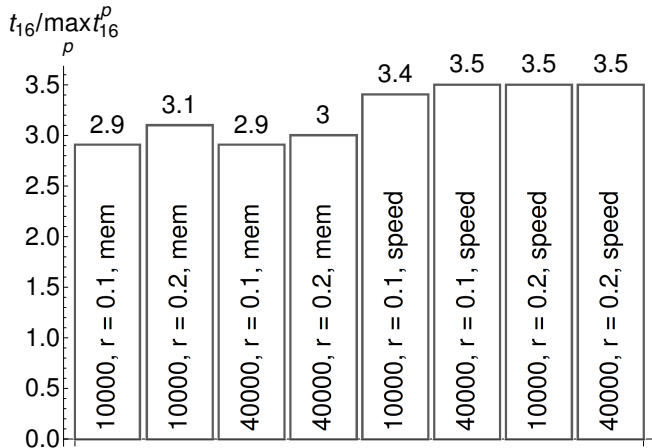
**Рис. 4:** Распределение времени счёта (a) и объёмов используемой оперативной памяти (b) при балансировке объёмов вычислений

$N$	$\tilde{r}$	$V_1$	$V_2$	$V_3$	$V_4$	$t_{16}^1, \text{ c}$	$t_{16}^2, \text{ c}$	$t_{16}^3, \text{ c}$	$t_{16}^4, \text{ c}$
10000	0.1	225 Мб	229 Мб	233 Мб	229 Мб	1.675	1.786	1.123	0.887
10000	0.2	768 Мб	782 Мб	797 Мб	782 Мб	5.704	6.029	3.918	3.159
40000	0.1	3.3 Гб	3.3 Гб	3.4 Мб	3.3 Гб	26.74	27.96	16.91	13.70
40000	0.2	11.6 Гб	11.7 Гб	11.9 Гб	11.8 Гб	95.76	99.08	60.50	50.03

**Таблица 3:** Распределение объёмов данных и времени выполнения между процессами при балансировке количества элементов матрицы



**Рис. 5:** Распределение времени счёта (a) и объёмов используемой оперативной памяти (b) при балансировке количества элементов матрицы



**Рис. 6:** Ускорение времени сборки матрицы жёсткости при использовании технологии MPI, где speed означает балансировку объёмов вычислений, а mem балансировку объёмов памяти

# Принцип Сен-Венана

Рассмотрим область  $S = [0, 10] \times [0, 1]$  с введённой на ней равномерной сеткой  $S_h$ , состоящей из 64000 квадратичных серендиповых элементов. Поставим граничные условия

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=0} = -f(\bar{x}_2), \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=10} = f(\bar{x}_2),$$

Дополнительные условия

$$\bar{u}_1|_{\bar{x}_1=5} = 0, \quad \bar{u}_2|_{\bar{x}_2=0.5} = 0.$$

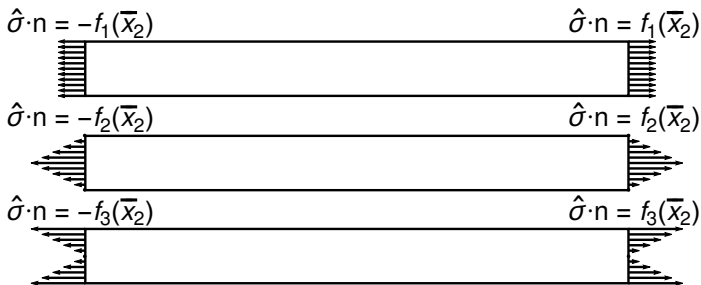
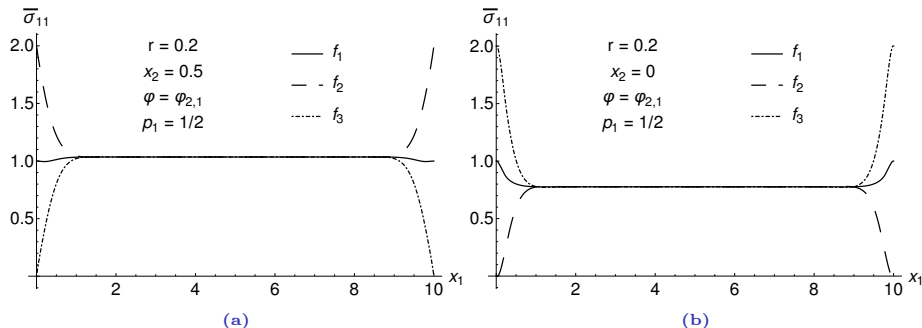


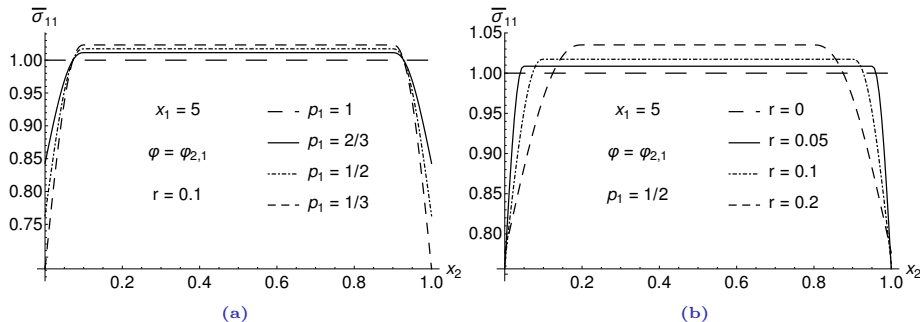
Рис. 7: Прикладываемые нагрузки к прямоугольной пластине

На рис. 8 изображены распределения напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  вдоль оси нагружения в различных сечениях. Несмотря на различный характер нагружений, при удалении от них напряжение принимает одинаковую форму, которая в нелокальной постановке, в отличие от классической, не является константной вдоль оси  $\bar{x}_2$ .



**Рис. 8:** Распределение напряжений  $\bar{\sigma}_{11}$  при различных нагружениях в сечении (a)  $\bar{x}_2 = 0.5$ ; (b)  $\bar{x}_2 = 0$

Рассматривая центральное сечение вдоль другой оси, можем убедиться в том, что в нелокальной постановке поверхность напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  имеет более сложную форму. Вариация весового параметра  $p_1$  влияет на отклонения значений напряжения на границах, в то время как вариация радиуса нелокального влияния  $r$  влияет на размах кромочного эффекта.



**Рис. 9:** Распределение напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  в сечении  $\bar{x}_1 = 5$  при вариации (a)  $p_1$ ; (b)  $r$

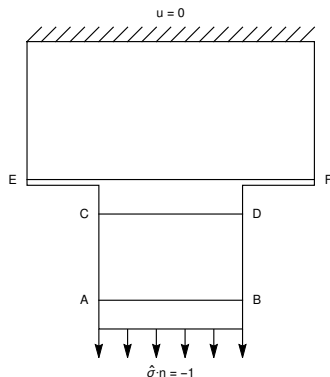
Важно отметить, что равнодействующая напряжения  $\bar{\sigma}_{11}$  совпадает с прикладываемым нагружением, что говорит нам о выполнении принципа Сен-Венана.



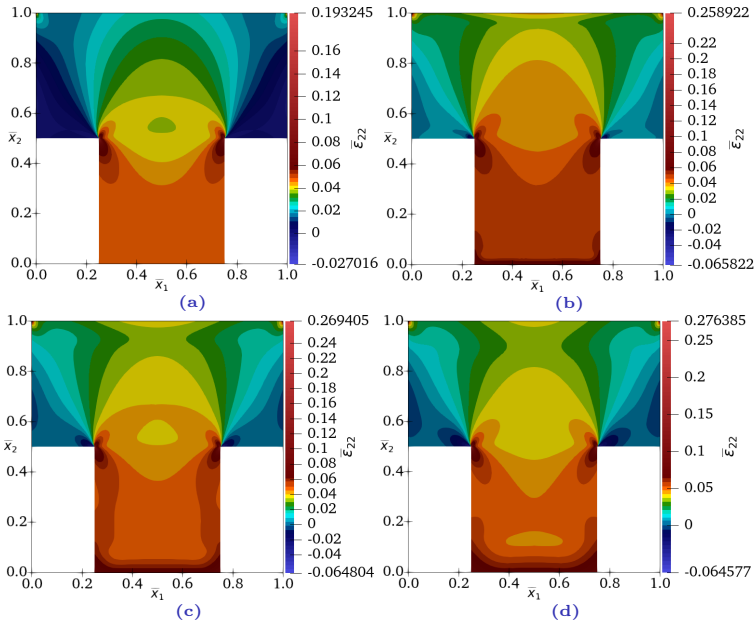
# Т-образная область

Теперь рассмотрим Т-образную область  $S \subset [0, 1] \times [0, 1]$  с введённой на ней равномерной сеткой  $S_h$ , состоящей из 30000 квадратных серендиповых элементов. Поставим следующие граничные условия

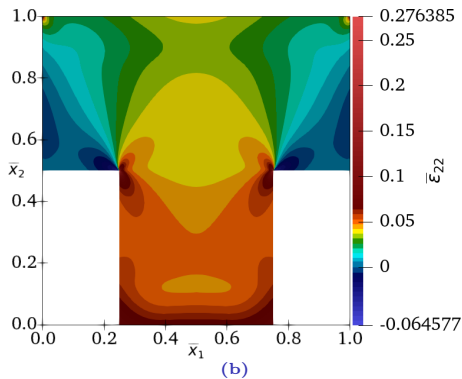
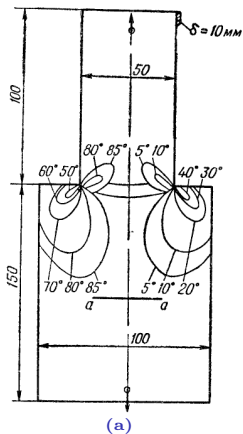
$$\bar{u}|_{\bar{x}_2=1} = 0, \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_2=0} = -1.$$



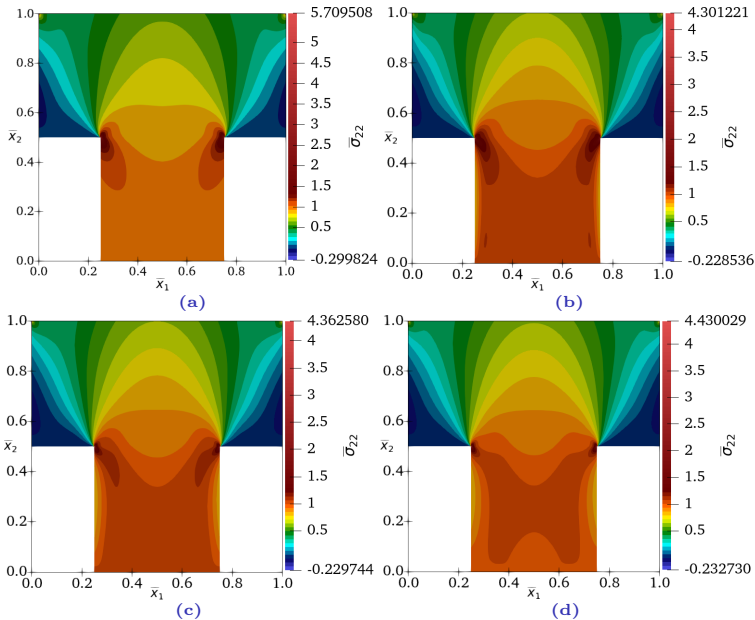
**Рис. 10:** Т-образная область с заданными граничными условиями и интересующими нас сечениями



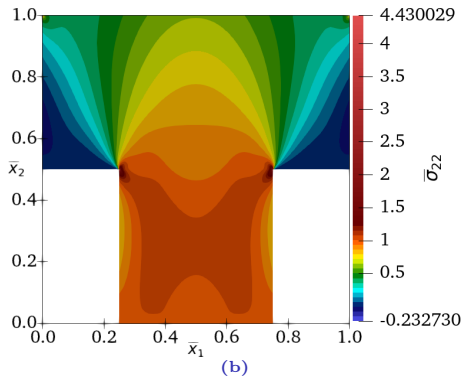
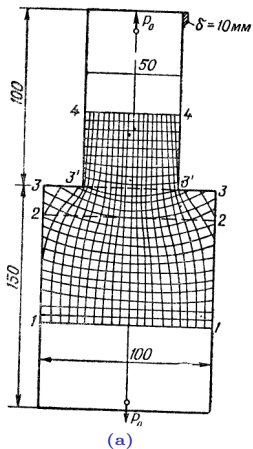
**Рис. 11:** Распределение деформации  $\bar{\epsilon}_{22}$  в Т-образной области при  $p_1 = 1/2$  и (a)  $r = 0$ ; (b)  $r = 0.05$ ; (c)  $r = 0.1$ ; (d)  $r = 0.15$



**Рис. 12:** Сравнение распределения деформации в эксперименте (a) и численном расчёте (b) при  $p_1 = 1/2$  и  $r = 0.15$



**Рис. 13:** Распределение напряжения  $\bar{\sigma}_{22}$  в Т-образной области при  $p_1 = 1/2$  и (a)  $r = 0$ ; (b)  $r = 0.05$ ; (c)  $r = 0.1$ ; (d)  $r = 0.15$



**Рис. 14:** Сравнение распределения напряжения в эксперименте (a) и численном расчёте (b) при  $p_1 = 1/2$  и  $r = 0.15$

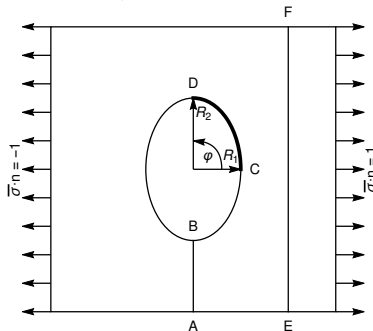
# Задача Кирша

Рассмотрим задачу Кирша на области  $S \subset [-1, 1] \times [-1, 1]$  с обобщением на эллиптические вырезы, со следующими граничными условиями

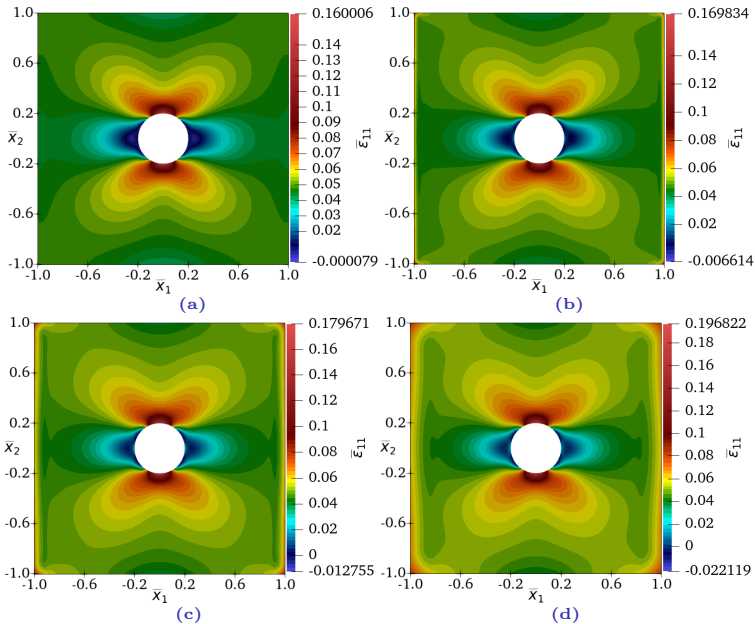
$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=-1} = -1, \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=1} = 1.$$

Также добавим два дополнительных условия, которые зафиксируют область относительно центра масс области по каждой из осей и дадут симметрию решению

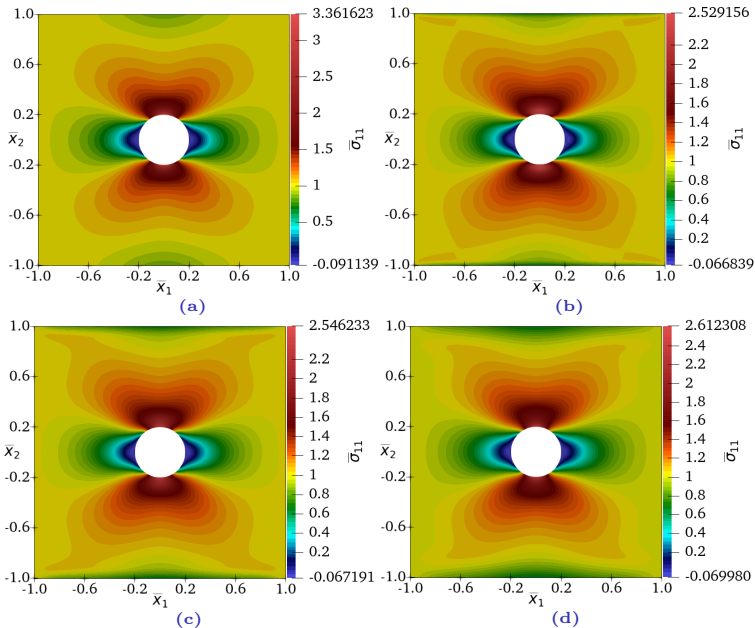
$$\bar{u}_i|_{\bar{x}_i=0} = 0, \quad i = \overline{1, 2}.$$



**Рис. 15:** Область с эллиптическим вырезом, заданными нагрузками и интересующими сечениями



**Рис. 16:** Распределение деформации  $\bar{\varepsilon}_{11}$  в области с круговым вырезом при  $p_1 = 1/2$  и (а)  $r = 0$ ; (b)  $r = 0.05$ ; (c)  $r = 0.1$ ; (d)  $r = 0.2$



**Рис. 17:** Распределение деформации  $\bar{\sigma}_{11}$  в области с круговым вырезом при  $p_1 = 1/2$  и (a)  $r = 0$ ; (b)  $r = 0.05$ ; (c)  $r = 0.1$ ; (d)  $r = 0.2$