



Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет
имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Прикладная математика»

РАСЧЁТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЕ
НА ТЕМУ:
РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
НЕЛОКАЛЬНОЙ УПРУГОСТИ И ИХ
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Студент группы ФН2-42М

А.А. Соколов

(Подпись, дата)

Руководитель ВКР

Г.Н. Кувыркин

(Подпись, дата)

Нормоконтролер

М.М. Лукашин

(Подпись, дата)

2021 г.

АННОТАЦИЯ

СОДЕРЖАНИЕ

АННОТАЦИЯ	2
ВВЕДЕНИЕ	4
1. Основные соотношения	4
1.1. Постановка задачи	4
1.2. Выбор функций нелокального влияния	5
1.3. Построение численной схемы решения на основе метода конеч- ных элементов	7
2. Программная реализация	10
2.1. Аппроксимация зоны нелокального влияния	10
2.2. Распараллеливание алгоритма	11
Список использованных источников	13

ВВЕДЕНИЕ

1. Основные соотношения

1.1. Постановка задачи

Дано двумерное евклидово пространство \mathbb{R}^2 с произвольно выбранной прямоугольной декартовой системой координат Ox_1x_2 , в которой положение точки фиксировано радиус-вектором $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, где \mathbf{e}_i , $i = \overline{1, 2}$ — единичные орты координатных осей; x_i , $i = \overline{1, 2}$ — компоненты вектора \mathbf{x} . В произвольной замкнутой области $S \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей ∂S уравнение равновесия сплошной среды имеет вид [1]

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

где $\nabla_{\mathbf{x}} = \partial/\partial x_i \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, 2}$ — дифференциальный оператор набла; $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, 2}$ — вектор объёмных сил; $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, $i, j = \overline{1, 2}$ — тензор напряжений, который определяется следующим образом

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = p_1 \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + p_2 \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dS'(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, $i, j = \overline{1, 2}$ — тензор упругой деформации; $\hat{\mathbf{C}} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, $i, j, k, l = \overline{1, 2}$ — тензор коэффициентов упругости; $p_1 > 0$ и $p_2 \geq 0$ — весовые доли, такие, что $p_1 + p_2 = 1$; φ — функция нелокального влияния, некоторая нормированная положительная функция в области $S'(\mathbf{x})$; $S'(\mathbf{x})$ — область нелокального влияния; $\mathbf{x}' \in S'(\mathbf{x})$

Будем считать, что деформации малы, поэтому для определения компонентов тензора деформации $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ воспользуемся соотношением Коши [1]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = \overline{1, 2}, \quad (3)$$

где u_i , $i = \overline{1, 2}$ — компоненты вектора перемещений \mathbf{u} .

В случае линейно упругого изотропного тела компоненты тензора упругости $\hat{\mathbf{C}}$ определяются следующим образом [1]

$$C_{i,j,k,l} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = \overline{1, 2},$$

где λ и μ — константы Ламе, которые можно определить через коэффициент Пуассона ν и модуль Юнга E как

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Будем рассматривать граничные условия первого и второго родов, также именуемые кинематическими и силовыми соответственно [1]

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = \mathbf{d}(\mathbf{x}), \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_2} = \mathbf{p}(\mathbf{x}),$$

где $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial S$; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \emptyset$; $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = d_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, $i = \overline{1, 2}$ — некоторые функции, задающие перемещение и давление на границах соответственно.

1.2. Выбор функций нелокального влияния

В определении тензора напряжений (2) не конкретизируется геометрия области нелокального влияния $S'(\mathbf{x})$ и вид функции нелокального влияния φ . Чаще всего в расчётах используют функцию нормального распределения Гаусса, а зону нелокального влияния аппроксимируют по правилу трёх сигм, но полученные при такой аппроксимации зоны получаются весьма большими, что накладывает серьёзные требования на объёмы используемой оперативной памяти. Вместе с тем, вычисление экспонент является весьма затратным с вычислительной точки зрения, поэтому предлагается использовать весьма широкий класс полиномиальных функций нелокального влияния с фиксированными областями нелокального влияния $S'(\mathbf{x})$, которые можно предста-

ВИТЬ В ВИДЕ

$$\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} A(1 - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}')^p)^q, & \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \leq 1, \\ 0, & \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') > 1, \end{cases} \quad (4)$$

где ρ — метрическая функция, которую в общем случае можно определить следующим образом

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt[n]{\left| \frac{x_1 - x'_1}{r_1} \right|^n + \left| \frac{x_2 - x'_2}{r_2} \right|^n}.$$

Тогда нормировочный множитель A примет значение

$$A = \frac{pn}{4r_1r_2B(1/n, 1/n)B(2/p, q+1)},$$

где $r_1, r_2 > 0$ — радиусы нелокального влияния вдоль каждой оси; $n > 0$ — параметр лебегова пространства; $p, q > 0$ — параметры плотности распределения нелокального влияния; B — бета-функция Эйлера.

Предполагается, что изучаемые тела изотропны, поэтому будем считать, что область нелокального влияния представляет из себя круг, то есть $r_1 = r_2 = r$, а параметр $n = 2$. Что касается параметров плотности распределения влияния, то стоит отметить, что при увеличении параметра p распределение влияния становится более равномерным и стремится к константе, что в теории должно приводить к увеличению отклонения от классического закона. При увеличении параметра q распределение влияния концентрируется в центре области и стремится к дельта-функции Дирака, которая даст нам классический закон Гука. На рис. 1 и 2 представлены примеры функций влияния в разрезе по оси симметрии при различных параметрах p и q . Для наглядности введём обозначение $\varphi_{p,q}$, которое даст понять какие параметры были выбраны.

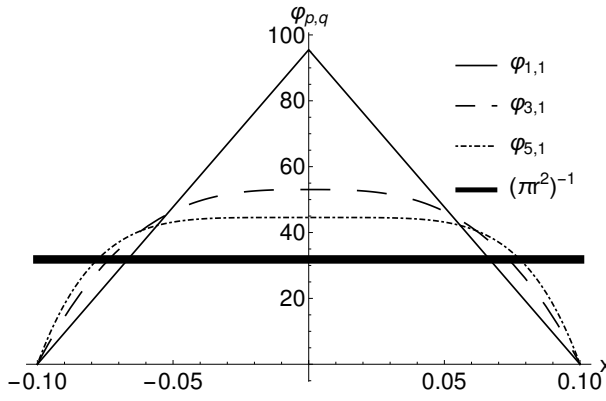


Рис. 1 Портреты функций влияния
при вариации p

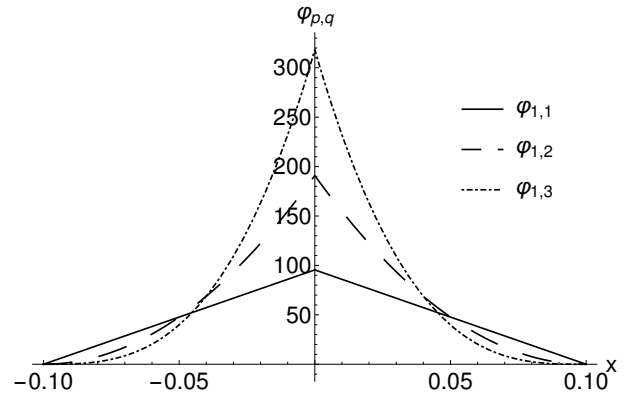


Рис. 2 Портреты функций влияния
при вариации q

1.3. Построение численной схемы решения на основе метода конечных элементов

В качестве численного метода решения уравнения (1) выберем метод конечных элементов с использованием изопараметрических конечных элементов [2], [3]. Для этого на области S введём сетку конечно-элементной модели S_h . Каждый элемент $(e) \in S_h$ содержит в себе наборы узлов $\{\mathbf{x}_i^{(e)}\}_{i \in I^{(e)}}$ и базисных функций $\{N_i^{(e)}\}_{i \in I^{(e)}}$ таких, что $N_i^{(e)}(\mathbf{x}_j^{(e)}) = \delta_{ij}$ и $\sum_{i \in I^{(e)}} N_i^{(e)}(\mathbf{x}) = 1$, $\forall \mathbf{x} \in S^{(e)}$, где $I^{(e)}$ — набор индексов узлов элемента (e) , δ_{ij} — дельта-функция Кронекера, $S^{(e)}$ — область элемента (e) . Для каждого элемента (e) введём локальную систему координат $O\xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)}$. Отображение из локальной системы координат $O\xi_1^{(e)}\xi_2^{(e)}$ в глобальную Ox_1x_2 будем строить следующим образом

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}^{(e)}) = N_i^{(e)}(\boldsymbol{\xi}^{(e)}) \mathbf{x}_i^{(e)}, \quad i \in I^{(e)}, (e) \in S_h,$$

где $\mathbf{x}_i^{(e)}$ — значение глобальных координат в узлах элемента (e) . Тогда матрицу Якоби перехода из локальной системы координат в глобальную аппроксимируем следующим образом

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}^{(e)}}{\partial \mathbf{x}} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{(e)}} \right)^{-1} \approx \left(\mathbf{x}_i^{(e)} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \boldsymbol{\xi}^{(e)}} \right)^{-1}, \quad i \in I^{(e)}, (e) \in S_h.$$

Домножим уравнение (1) на функцию формы $N_n^{(e)}$ и проинтегрируем

по области S

$$\iint_S N_n^{(e)} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}) dS = \mathbf{0}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.$$

Проинтегрируем первое слагаемое по частям, тогда по формуле Грина получим

$$\iint_S (\nabla_{\mathbf{x}} N_n^{(e)}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} dS - \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} \mathbf{p} d\Gamma + \iint_S N_n^{(e)} \mathbf{b} dS = \mathbf{0}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.$$

На место $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ подставим соотношение (2)

$$\begin{aligned} p_1 \iint_S (\nabla_{\mathbf{x}} N_n^{(e)}) \cdot (\hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) dS + p_2 \iint_S (\nabla_{\mathbf{x}} N_n^{(e)}) \cdot \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} dS'(\mathbf{x}) dS - \\ - \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} \mathbf{p} d\Gamma + \iint_S N_n^{(e)} \mathbf{b} dS = \mathbf{0}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h. \end{aligned}$$

Перейдём к индексной форме записи

$$\begin{aligned} p_1 \iint_S \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS + p_2 \iint_S \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i} \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS'(\mathbf{x}) dS - \\ - \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} p_i d\Gamma + \iint_S N_n^{(e)} b_i dS = \mathbf{0}, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h. \end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением Коши (3) и заменим перемещения \mathbf{u} интерполяционными соотношениями, то есть представим в виде $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}_i^{(e)} N_i^{(e)}(\mathbf{x})$, $i \in I^{(e)}$, где $\mathbf{u}_i^{(e)}$ – искомые перемещения в узлах элемента (e) . Тогда уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{2} \iint_S \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i} C_{ijkl} \left(u_{lm}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_k} + u_{km}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_l} \right) dS - \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} p_i d\Gamma + \iint_S N_n^{(e)} b_i dS + \\ + \frac{p_2}{2} \iint_S \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i} \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C_{ijkl} \left(u_{lm'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_k} + u_{km'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_l} \right) dS'(\mathbf{x}) dS = \mathbf{0}, \\ i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad n, m \in I^{(e)}, \quad m' \in I^{(e')}, \quad (e) \in S_h, \quad (e') \in S'_h, \quad S'_h \subset S_h, \end{aligned}$$

где S'_h — аппроксимированная зона нелокального влияния. Аппроксимируем интегралы конечными суммами и наконец придём к конечному равенству, где происходит ассамблирование матрицы жёсткости и правой части

$$\begin{aligned}
& \frac{p_1}{2} \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n, m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_q) C_{ijkl} \left(u_{lm}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_q) + u_{km}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_l}(\mathbf{x}_q) \right) J_q + \\
& + \frac{p_2}{2} \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_q) J_q \sum_{(e') \in S'_h(q)} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) C_{ijkl} \times \\
& \times \left(u_{lm'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_k}(\mathbf{x}_{q'}) + u_{km'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_l}(\mathbf{x}_{q'}) \right) J_{q'} + \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)} b_i J_q = \\
& = \sum_{(be) \in \Gamma_h} \sum_{n \in I^{(be)}} \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)} p_i J_q, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad (5)
\end{aligned}$$

где $Q^{(e)}$ — набор индексов квадратурных узлов элемента (e) ; $S'_h(q)$ — аппроксимированная зона нелокального влияния на квадратурном узле q ; Γ_h — конечно-элементная модель границы области S ; (be) — одномерные элементы заданные на границе; w_q — квадратурные веса; $J_q = \left| \det \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{x}_q) \right|$ — якобиан вычисленный в квадратурной точке \mathbf{x}_q .

Вычисление системы (5) можно упростить записав производные от функций форм в локальной системе координат

$$\frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial x_k} = \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi_j^{(e)}} \frac{\partial \xi_j^{(e)}}{\partial x_k}, \quad j, k = \overline{1, 2}, \quad i \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.$$

Якобиан на границе аппроксимируем следующим образом

$$J^{(e)} = \sqrt{\left(x_{1i}^{(e)} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi^{(e)}} \right)^2 + \left(x_{2i}^{(e)} \frac{\partial N_i^{(e)}}{\partial \xi^{(e)}} \right)^2}, \quad i \in I^{(e)}, \quad (e) \in \Gamma_h.$$

Заметим, что индекс оси $\xi^{(e)}$ не ставится, так как элемент одномерный.

2. Программная реализация

2.1. Аппроксимация зоны нелокального влияния

Основной проблемой, которая возникает при решении данной задачи, является аппроксимация интегрального слагаемого в (2), так как в матрицах элементов необходимо учитывать влияние, которое приходится на соседние элементы. Действуя по правилу аппроксимации вложенных интегралов мы приходим к тому, что в уравнении (5) порядок сумм заставляет нас аппроксимировать зону нелокального влияния для каждого квадратурного узла сетки, что не очень практично, так как выполнять поиск ближайших соседей относительно квадратурных узлов может быть весьма затратной процедурой, а хранении индексов элементов, которые попадают в зону влияния, очень дорогим. Более того, такой подход попросту сложно реализовать программно, поэтому предлагается аппроксимировать зону нелокального влияния относительно центров элементов и учитывать в расчётах те элементы центры которых попали в зону влияния. Тогда формулу (5) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{p_1}{2} \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n, m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_q) C_{ijkl} \left(u_{lm}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_q) + u_{km}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_l}(\mathbf{x}_q) \right) J_q + \\
& + \frac{p_2}{2} \sum_{(e) \in S_h} \sum_{(e') \in S_h'} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_q) J_q \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) C_{ijkl} \times \\
& \times \left(u_{lm'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_k}(\mathbf{x}_{q'}) + u_{km'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_l}(\mathbf{x}_{q'}) \right) J_{q'} + \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)} b_i J_q = \\
& = \sum_{(be) \in \Gamma_h} \sum_{n \in I^{(be)}} \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)} p_i J_q, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad (6)
\end{aligned}$$

Для успешного интегрирования, зону аппроксимации лучше всего брать несколько больше, нежели реальная зона нелокального влияния, таким образом возникает шанс того, что все квадратурные узлы, которые попали под зону влияния $S'(\mathbf{x})$ будут учтены. Естественно, радиус поиска следует определять

исходя из грубости сетки.

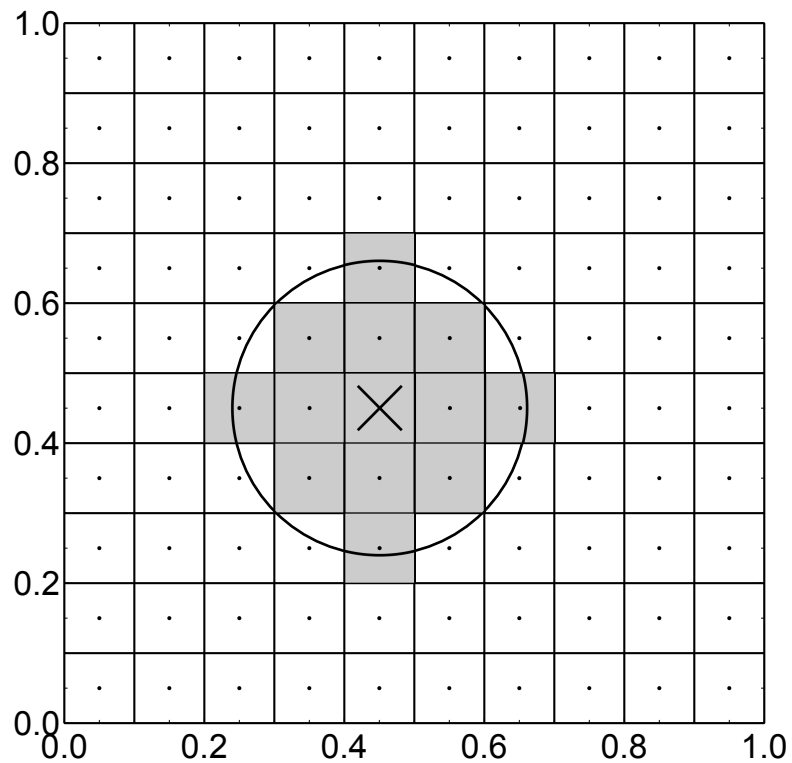


Рис. 3 Аппроксимация зоны нелокального влияния

2.2. Распараллеливание алгоритма

Обход сетки, который задаётся порядком суммирования в (7) не позволяет эффективно использовать возможности параллельных и распределённых систем, поэтому для эффективного распараллеливания алгоритма необходимо делать обход сетки по узлам, что позволит собирать глобальную матрицу жёсткости построчно и каждый узел кластера сможет собирать свою

часть матрицы независимо от остальных.

$$\begin{aligned}
& \frac{p_1}{2} \sum_{n \in S_h} \sum_{(e) \in E^{(n)}} \sum_{m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_q) C_{ijkl} \times \\
& \quad \times \left(u_{lm}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_k}(\mathbf{x}_q) + u_{km}^{(e)} \frac{\partial N_m^{(e)}}{\partial x_l}(\mathbf{x}_q) \right) J_q + \\
& + \frac{p_2}{2} \sum_{n \in S_h} \sum_{(e) \in E^{(n)}} \sum_{(e') \in S_h^{(e)}} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \frac{\partial N_n^{(e)}}{\partial x_i}(\mathbf{x}_q) J_q \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) C_{ijkl} \times \\
& \quad \times \left(u_{lm'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_k}(\mathbf{x}_{q'}) + u_{km'}^{(e')} \frac{\partial N_{m'}^{(e')}}{\partial x'_l}(\mathbf{x}_{q'}) \right) J_{q'} + \sum_{n \in S_h} \sum_{(e) \in E^{(n)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)} b_i J_q = \\
& = \sum_{(be) \in \Gamma_h} \sum_{n \in I^{(be)}} \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)} p_i J_q, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad (7)
\end{aligned}$$

$E^{(n)}$ — набор элементов, которым принадлежит узел n .

Список использованных источников

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
2. Zienkiewicz O. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals. Seventh edition. / O. Zienkiewicz, R. Taylor, J.Z. Zhu – 2013. – 756 p.
3. Bathe K-J. Finite Element Procedures. Second edition. — 2014. — 1065 p.