

Разработка математических моделей теории нелокальной упругости и их численное исследование и анализ

Выполнил студент группы ФН2-42М Соколов А.А.
Научный руководитель д.т.н., профессор, заведующий кафедрой ФН2
Кувыркин Г.Н.

МГТУ им. Н.Э. Баумана

23 июня 2021 г.



Введение

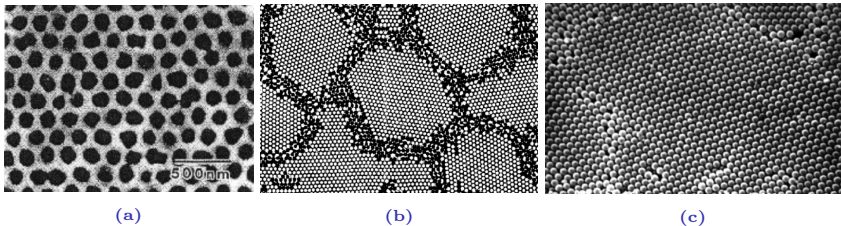


Рис. 1: Атомная решётка структурно-чувствительных материалов

Классические модели механики сплошной среды не применимы к материалам с микро- и наноструктурой, так как они не учитывают масштабных эффектов. Для описания подобных эффектов существует множество моделей, однако, наибольший интерес представляют те, в которых основные соотношения имеют ту же формулировку, что и классические. Одной из таких моделей является нелокальная модель Эрингена.

Постановка задачи

Определяющие соотношения имеют вид

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (1)$$

$$\hat{\sigma} = p_1 \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} + p_2 \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \hat{\mathbf{C}} \cdot \cdot \hat{\varepsilon} dS'(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' \in S'(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где $p_1 + p_2 = 1$, причём $p_1 > 0$ и $p_2 \geq 0$; φ — некоторая нормированная положительная функция в области $S'(\mathbf{x})$; $S'(\mathbf{x})$ — область нелокального влияния.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = \overline{1, 2};$$

$$C_{ijkl} = \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}.$$

В расчётах будем использовать функцию нелокального влияния

$$\varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} \left(1 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}{r^2} \right), & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq r, \\ 0, & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > r, \end{cases}$$

где r — радиус нелокального влияния.

Численный алгоритм решения

Решение будем искать методом конечных элементов

$$\begin{aligned}
 p_1 \iint_S N_{n,i}^{(e)} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS + p_2 \iint_S N_{n,i}^{(e)} \iint_{S'(\mathbf{x}) \cap S} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C_{ijkl} \varepsilon_{kl} dS'(\mathbf{x}) dS = \\
 = \oint_{\Gamma_2} N_n^{(e)} p_j d\Gamma - \iint_S N_n^{(e)} b_j dS, \quad i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad n \in I^{(e)}, \quad (e) \in S_h.
 \end{aligned}$$

Итоговое выражение, которое мы хотим получить, выглядит следующим образом

$$\left(p_1 \hat{\mathbf{K}}^{Loc} + p_2 \hat{\mathbf{K}}^{NonLoc} \right) \cdot \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{P}} - \hat{\mathbf{B}}.$$

Матрицу жёсткости будем ассамблировать из блоков $\hat{\mathbf{K}}_{nm}^{(e)(e')}$

$$\begin{aligned}
 K_{nmij}^{(e)(e')}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_{np} \delta_{mq} C_{ikjl} N_{n,k}^{(e)}(\mathbf{x}) N_{m,l}^{(e')}(\mathbf{y}) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{E}_p \otimes \mathbf{E}_q, \\
 i, j, k, l = \overline{1, 2}, \quad n, m, p, q = \overline{1, D}.
 \end{aligned}$$

Аппроксимируем локальную матрицу жёсткости и векторы плотности поверхностных и объёмных сил

$$\hat{\mathbf{K}}^{Loc} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \hat{\mathbf{K}}_{nm}^{(e)(e)}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) J_q^{(e)}, \quad (3)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{(be) \in \Gamma_h} \sum_{n \in I^{(be)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(be)}} w_q N_n^{(be)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{p}(\mathbf{x}_q) J_q^{(be)},$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I^{(e)}} \mathbf{E}_n \otimes \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q N_n^{(e)}(\mathbf{x}_q) \mathbf{b}(\mathbf{x}_q) J_q^{(e)},$$

где $I^{(e)}$ — множество номеров узлов элементов (e) ;

$Q^{(e)}$ — множество номеров квадратурных узлов на элементе (e) ;

\mathbf{x}_q — координата квадратурного узла q ;

w_q — квадратурный вес в квадратурном узле q ;

$J_q^{(e)} = \left| \det \hat{\mathbf{J}}^{(e)}(\mathbf{x}_q) \right|$ — якобиан вычисленный в квадратурной точке \mathbf{x}_q ;

\mathbf{E}_n — единичный вектор размерности D .

Аппроксимируем нелокальную матрицу жёсткости

$$\widehat{\mathbf{K}}^{NonLoc} =$$

$$\sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I(e)} \sum_{q \in Q(e)} w_q J_q^{(e)} \sum_{(e') \in S_h^q} \sum_{m' \in I(e')} \sum_{q' \in Q(e')} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \widehat{\mathbf{K}}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}.$$

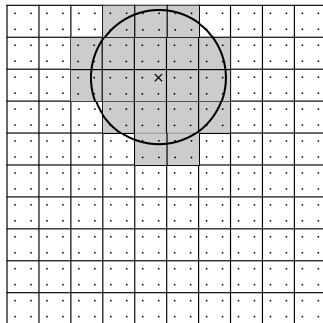


Рис. 2: Квадратурная аппроксимация

$$\widehat{\mathbf{K}}^{NonLoc} =$$

$$\sum_{(e) \in S_h} \sum_{n \in I(e)} \sum_{(e') \in S_h^{(e)}} \sum_{m' \in I(e')} \sum_{q \in Q(e)} w_q J_q^{(e)} \times \sum_{q' \in Q(e')} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \widehat{\mathbf{K}}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}.$$

(4)

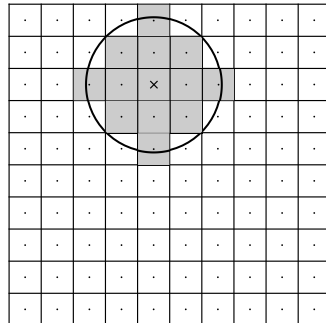


Рис. 3: Элементная аппроксимация

Формулы (3) и (4) не пригодны для параллельных и распределённых вычислений, поэтому поменяем порядок суммирования

$$\hat{\mathbf{K}}^{Loc} = \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e) \in E^n} \sum_{m \in I^{(e)}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q \hat{\mathbf{K}}_{nm}^{(e)(e)}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_q) J_q^{(e)}.$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}^{NonLoc} = & \sum_{n \in I^{(e)}} \sum_{(e) \in E^n} \sum_{(e') \in S_h^{(e)}} \sum_{m' \in I^{(e')}} \sum_{q \in Q^{(e)}} w_q J_q^{(e)} \times \\ & \times \sum_{q' \in Q^{(e')}} w_{q'} \varphi(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) \hat{\mathbf{K}}_{nm'}^{(e)(e')}(\mathbf{x}_q, \mathbf{x}_{q'}) J_{q'}^{(e')}. \end{aligned}$$

Результаты распараллеливания

Была проведена серия расчётов на гибридном вычислительном кластере К-10, где на каждом узле стоит по 128 Гб оперативной памяти и по два процессора Intel Xeon E5-2660. Расчёт проводился на области $S = [0, 1] \times [0, 1]$ с введённой на ней равномерной сеткой S_h , состоящей из квадратичных серендиповых элементов.

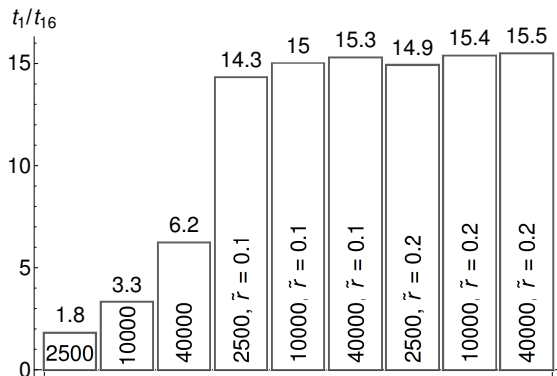


Рис. 4: Ускорение времени сборки матрицы жёсткости при использовании технологии OpenMP на 16 потоках в сравнении со временем счёта на 1 потоке

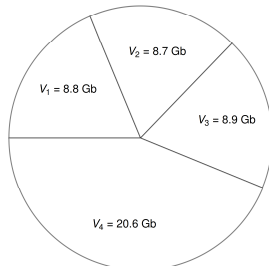
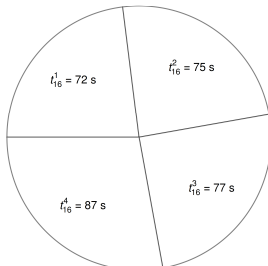
Для задачи на сетке состоящей из 40000 элементов с радиусом поиска $\tilde{r} = 0.2$.

Балансировка
объёмов

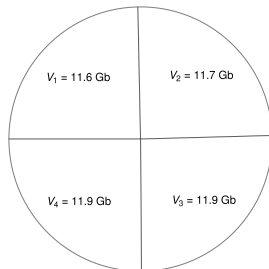
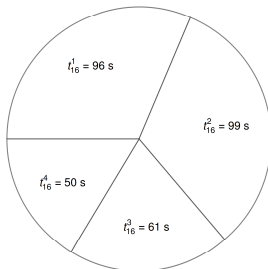
Распределение времени

Распределение памяти

вычислений



данных



Принцип Сен-Венана

Область $S = [0, 10] \times [0, 1]$ с введённой на ней равномерной сеткой S_h , состоящей из 64000 квадратичных серендиповых элементов. Граничные условия

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=0} = -f(\bar{x}_2), \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_1=10} = f(\bar{x}_2),$$

Дополнительные условия

$$\bar{u}_1|_{\bar{x}_1=5} = 0, \quad \bar{u}_2|_{\bar{x}_2=0.5} = 0.$$

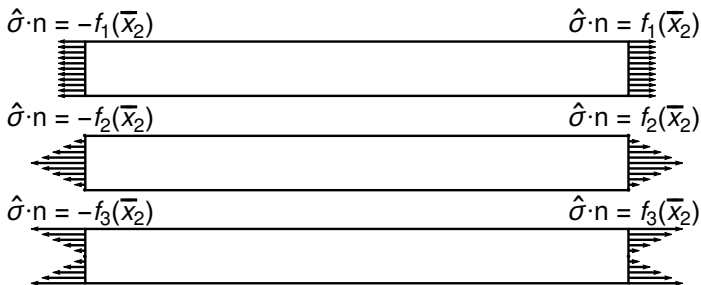


Рис. 5: Прикладываемые нагрузки к прямоугольной пластине

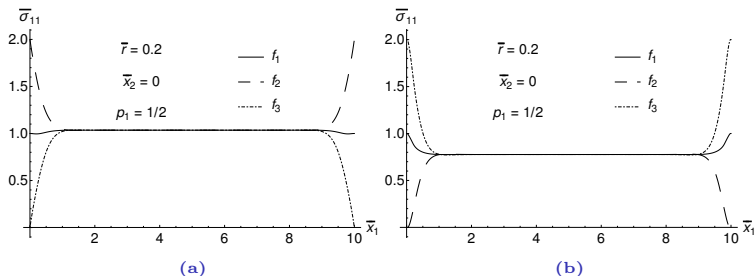


Рис. 6: Распределение напряжений $\bar{\sigma}_{11}$ в сечении (a) $\bar{x}_2 = 0.5$; (b) $\bar{x}_2 = 0$

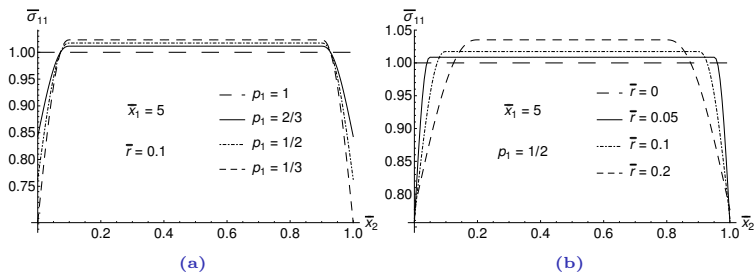


Рис. 7: Распределение напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ в сечении $\bar{x}_1 = 5$ при вариации (a) ρ_1 ; (b) r

Т-образная область

Область $S \subset [0, 1] \times [0, 1]$ — Т-образная область с введённой на ней равномерной сеткой S_h , состоящей из 30000 квадратных серендиповых элементов. Граничные условия

$$\bar{u}|_{\bar{x}_2=1} = 0, \quad \bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{\bar{x}_2=0} = -1.$$

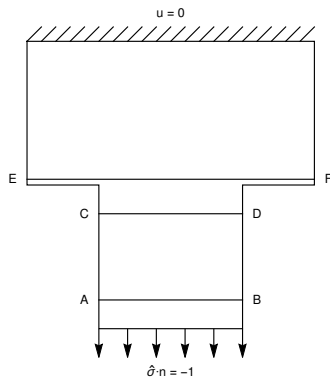


Рис. 8: Т-образная область с заданными граничными условиями и интересующими нас сечениями

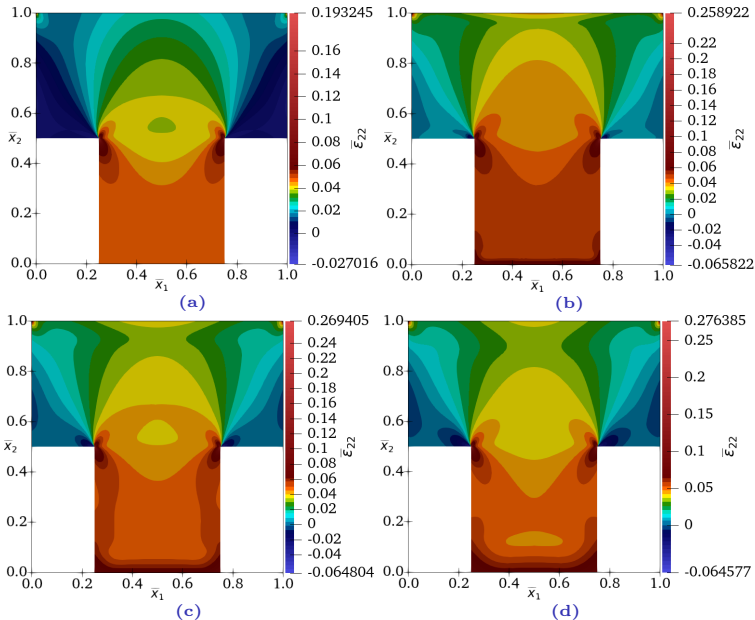


Рис. 9: Распределение деформации $\bar{\varepsilon}_{22}$ в Т-образной области при $p_1 = 1/2$ и (a) $r = 0$; (b) $r = 0.05$; (c) $r = 0.1$; (d) $r = 0.15$

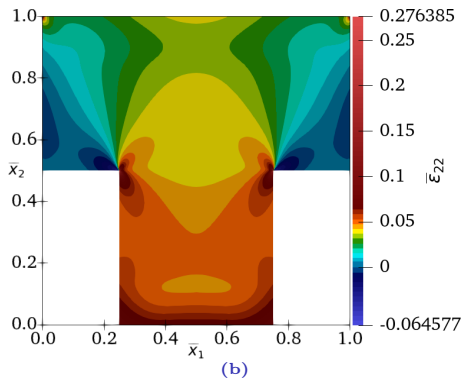
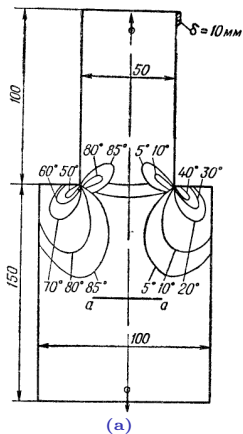


Рис. 10: Сравнение распределения деформации в эксперименте (a) и численном расчёте (b) при $p_1 = 1/2$ и $r = 0.15$

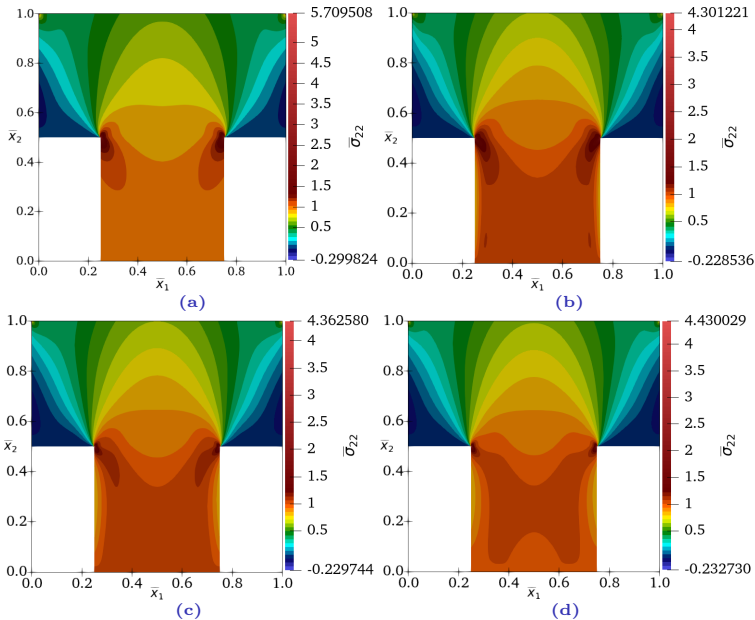


Рис. 11: Распределение напряжения $\bar{\sigma}_{22}$ в Т-образной области при $p_1 = 1/2$ и (a) $r = 0$; (b) $r = 0.05$; (c) $r = 0.1$; (d) $r = 0.15$

Задача Кирша

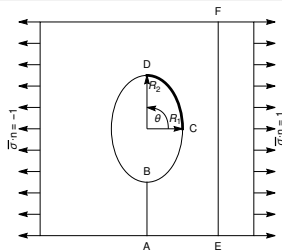
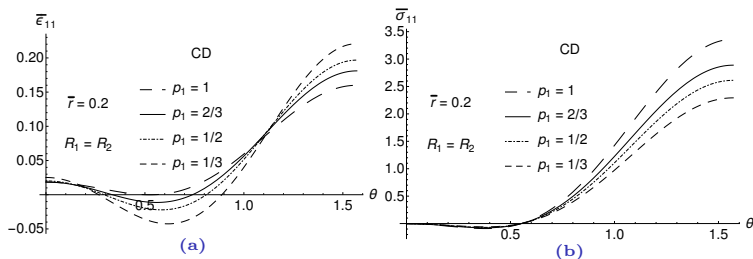


Рис. 12: Область с эллиптическим вырезом

Рис. 13: Распределение (а) деформации $\bar{\epsilon}_{11}$ и (б) напряжения $\bar{\sigma}_{11}$ на дуге CD

Заклучение

- Разработан параллельный и распределённый алгоритм сборки матрицы жёсткости для задач нелокальной упругости.
- Рассмотрена масштабируемость полученного алгоритма.
- Проведено исследование применимости принципа Сен-Венана на примере растяжения вытянутой пластины.
- Исследованы решения в областях со ступенчатыми переходами и проведены сравнения с экспериментальными данными.
- Исследованы решения в областях с эллиптическими вырезами.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!