education

Графы: введение

Алгоритмы и структуры данных

Почуев Илья

Графы: о чём будем говорить?

- Введение в графы
- Представление графа и варианты обхода
- Решение задач

Что будет на занятии

- Графы: определение и область применения
- Виды графов

education

Графы: определение и область применения

Где используются

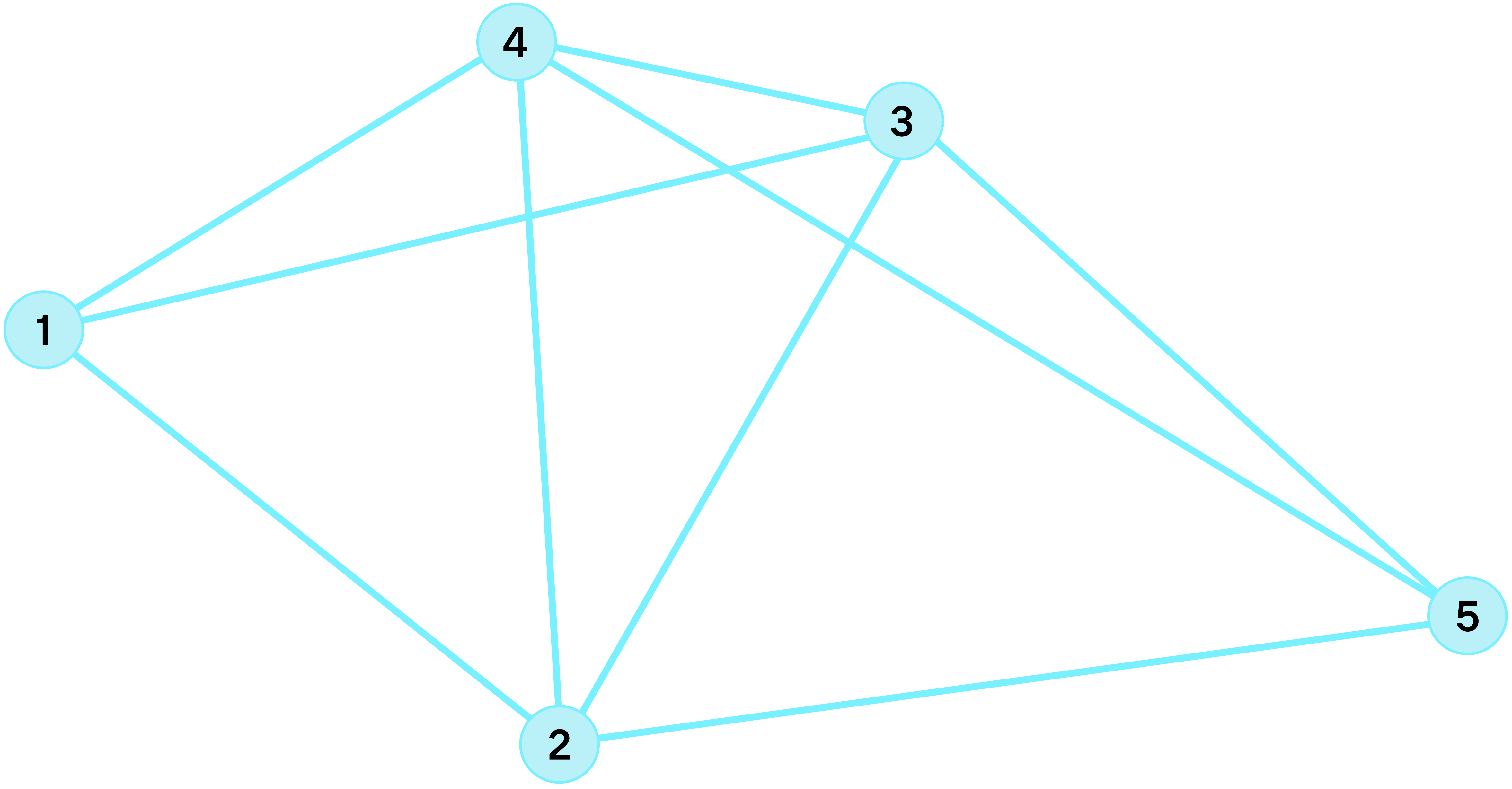
- **Социальные сети:** графы используются для представления дружеских связей между людьми или связей между пользователями в социальных сетях. Анализ графов в социальных сетях позволяет распознавать виды связей, классифицировать пользователей, находить сообщества и предсказывать взаимодействия

- **Маршрутизация:** графы находят применение в компьютерных сетях для определения оптимальных маршрутов передачи данных или пакетов между узлами. Например, алгоритмы Дейкстры и Беллмана — Форда используются для поиска кратчайшего пути в графах с помощью расчёта весов рёбер

- **Neo4j:** это графовая база данных, которая предназначена для хранения и обработки данных в виде графов. Графовая база данных отличается от традиционных реляционных баз данных тем, что она моделирует данные в виде узлов (вершин) и отношений (рёбер) между этими узлами. Это делает её особенно подходящей для работы с данными, которые имеют сложные связи и зависимости

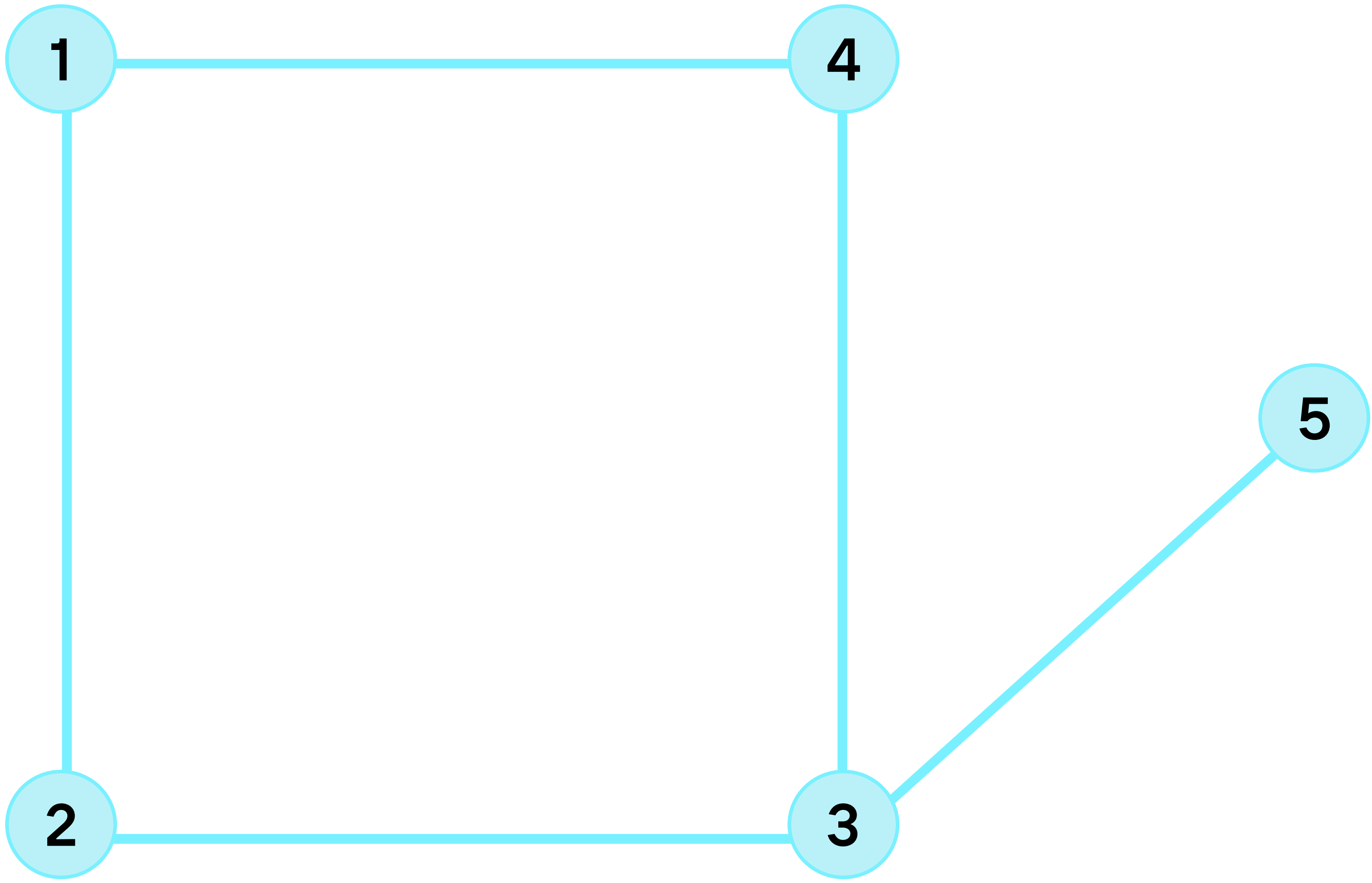
Определение

Граф — это сетевая структура данных, которая состоит из вершин (узлов) и рёбер (связей), соединяющих эти вершины. Граф используется для представления различных видов связей между объектами или сущностями



Определение

- Пара множеств G = (V, E)
- **V —** строго не пустое множество, количество вершин
- **E —** множество рёбер графа
- **V(G) —** обозначение вершин графа G
- **E(G) —** обозначение рёбер графа G



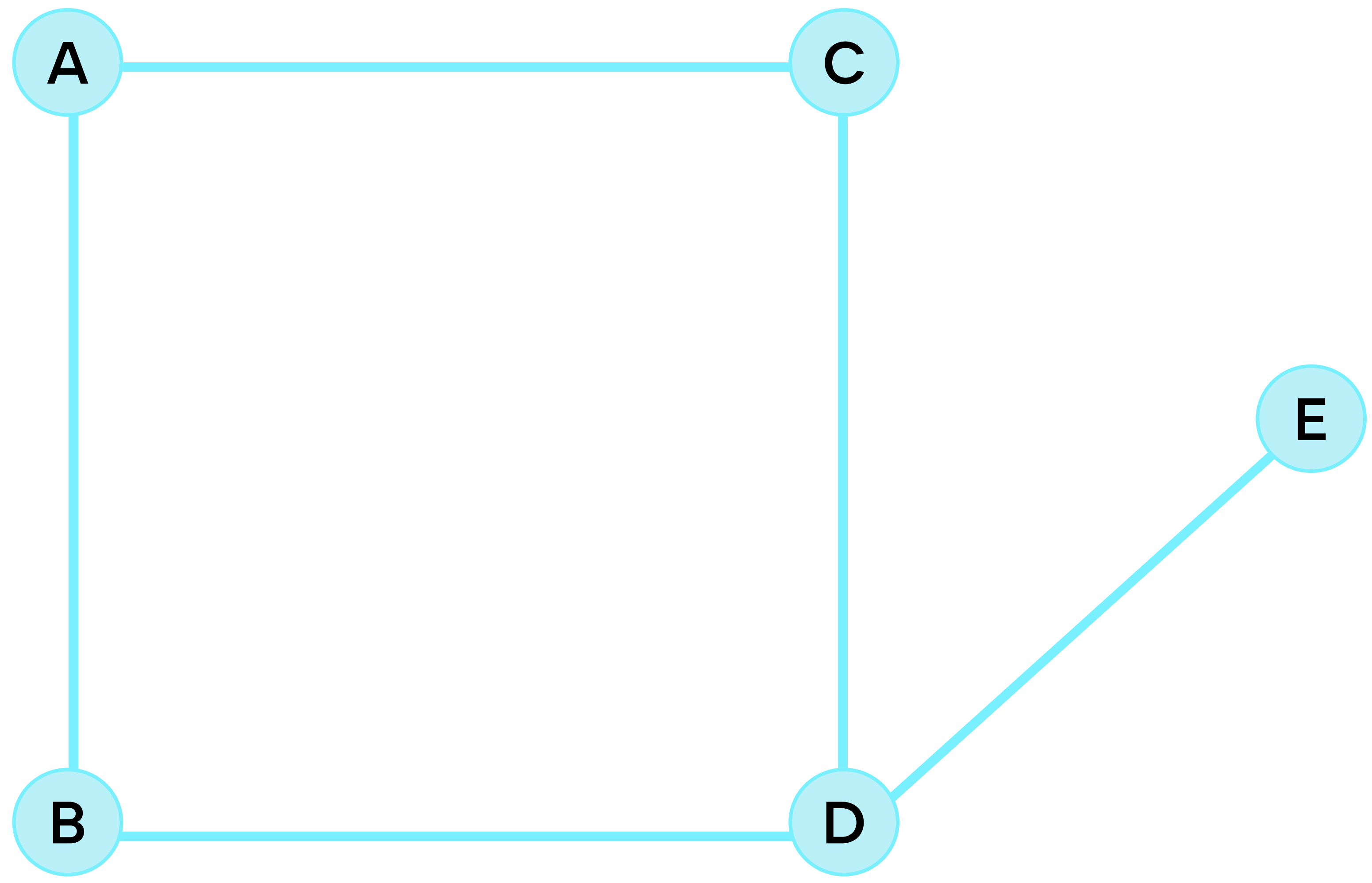
Отношение вершин и рёбер

1 **Смежными** вершинами называются вершины, которые соединены одним ребром

2 **Инцидентное ребро —** это ребро, которое имеет общую вершину с другим ребром

Определение

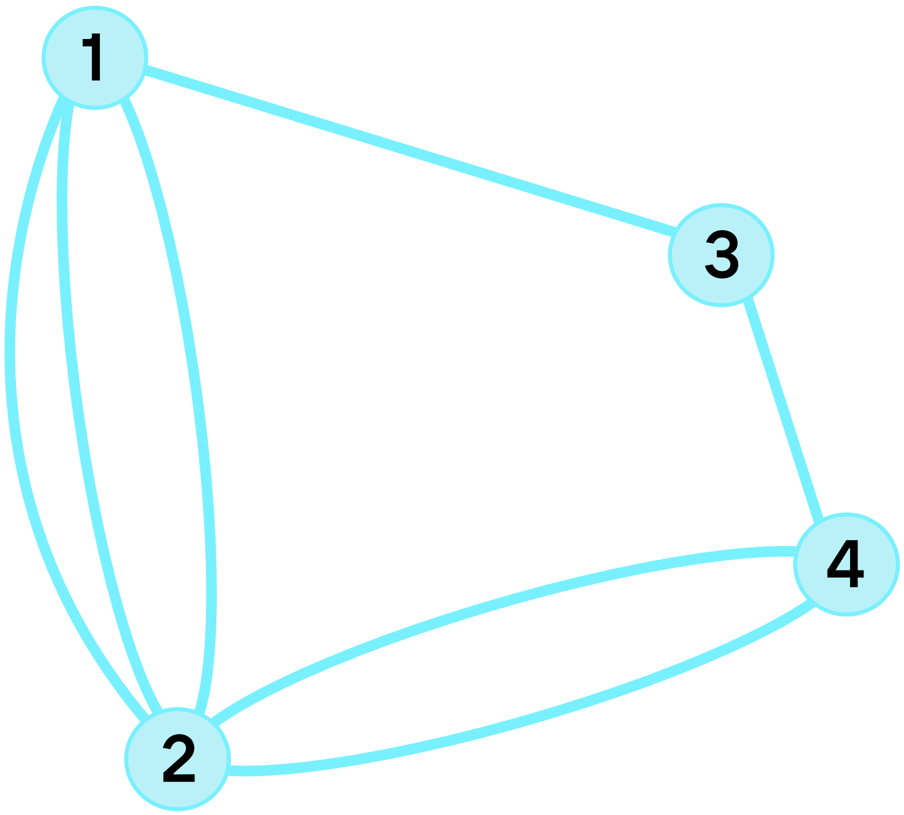
- Вершины **A** и **B** являются смежными
- Ребро **AB** инцидентно ребру **AC**
- Смежными называют 2 вершины, соединённые рёбрами, и рёбра, имеющие хотя бы одну общую вершину



Виды графов

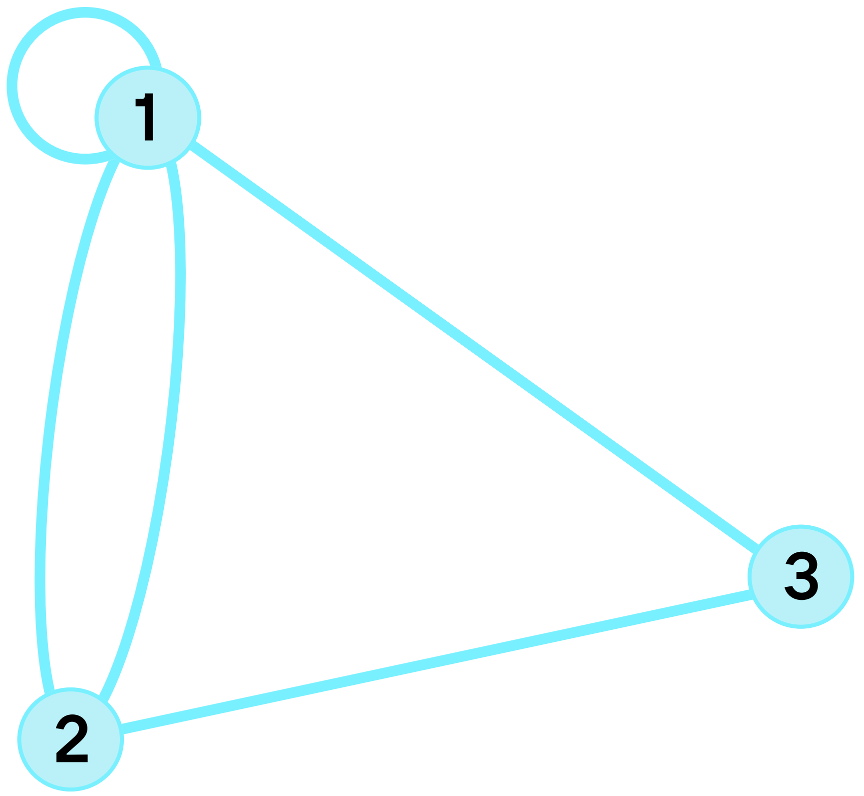
Мультиграф

- **Мультиграф —** обобщение понятия графа. В мультиграфе могут быть кратные рёбра, то есть несколько рёбер, соединяющих одну и ту же пару вершин
- В мультиграфе E является мультимножеством, то есть одна пара может входить в него несколько раз
- Кратность ребра **1,2** равна **3**
- Другими словами, две вершины могут быть соединены двумя и более рёбрами



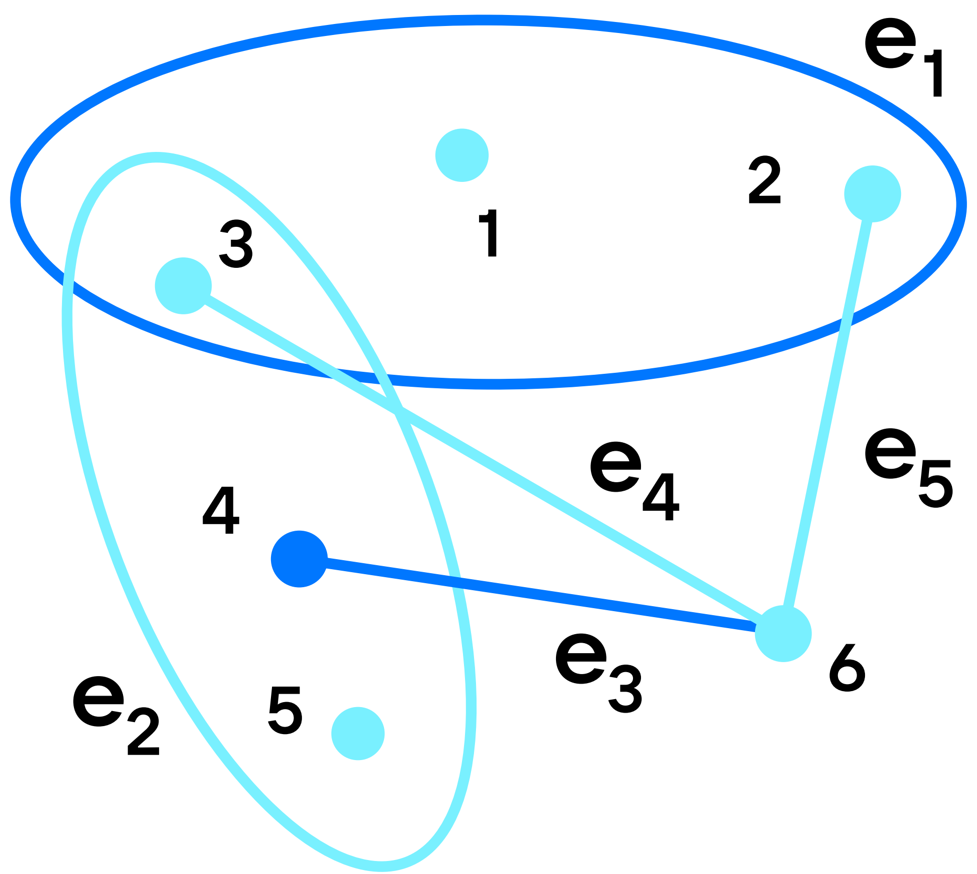
Псевдограф

- Две вершины могут быть соединены двумя и более рёбрами
- В графе присутствуют петли, то есть рёбра вида **vv**
- **Петля —** линия, начинающаяся и заканчивающаяся в одной и той же вершине
- В отличие от обычных графов, в псевдографах допускается наличие таких элементов
- **Мультиграф:** в мультиграфе допускаются кратные рёбра, но не петли



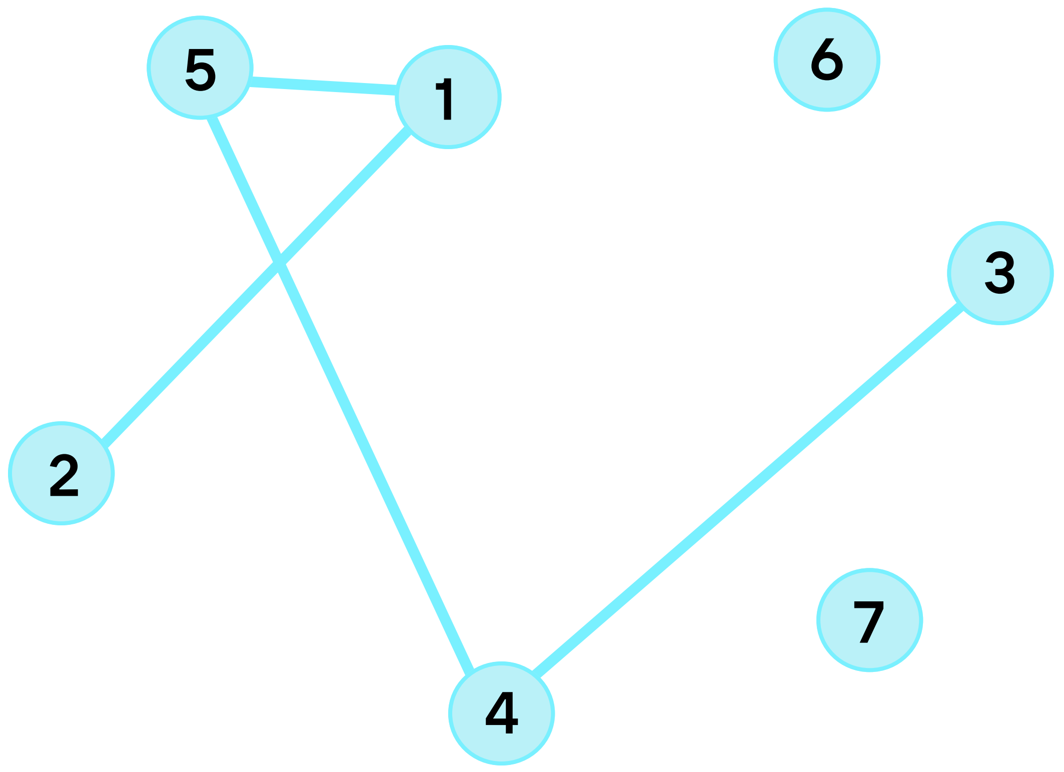
Гиперграф

- **Гиперграф —** это граф, в котором рёбра могут связывать не только две вершины, как в обычном графе, но и произвольное количество вершин
- Такое ребро называется гиперребром
- Гиперграфы могут быть полезны для анализа сложных сетей, таких как социальные сети или транспортные сети, где связи между узлами могут быть более сложными, чем просто две вершины, соединённые ребром



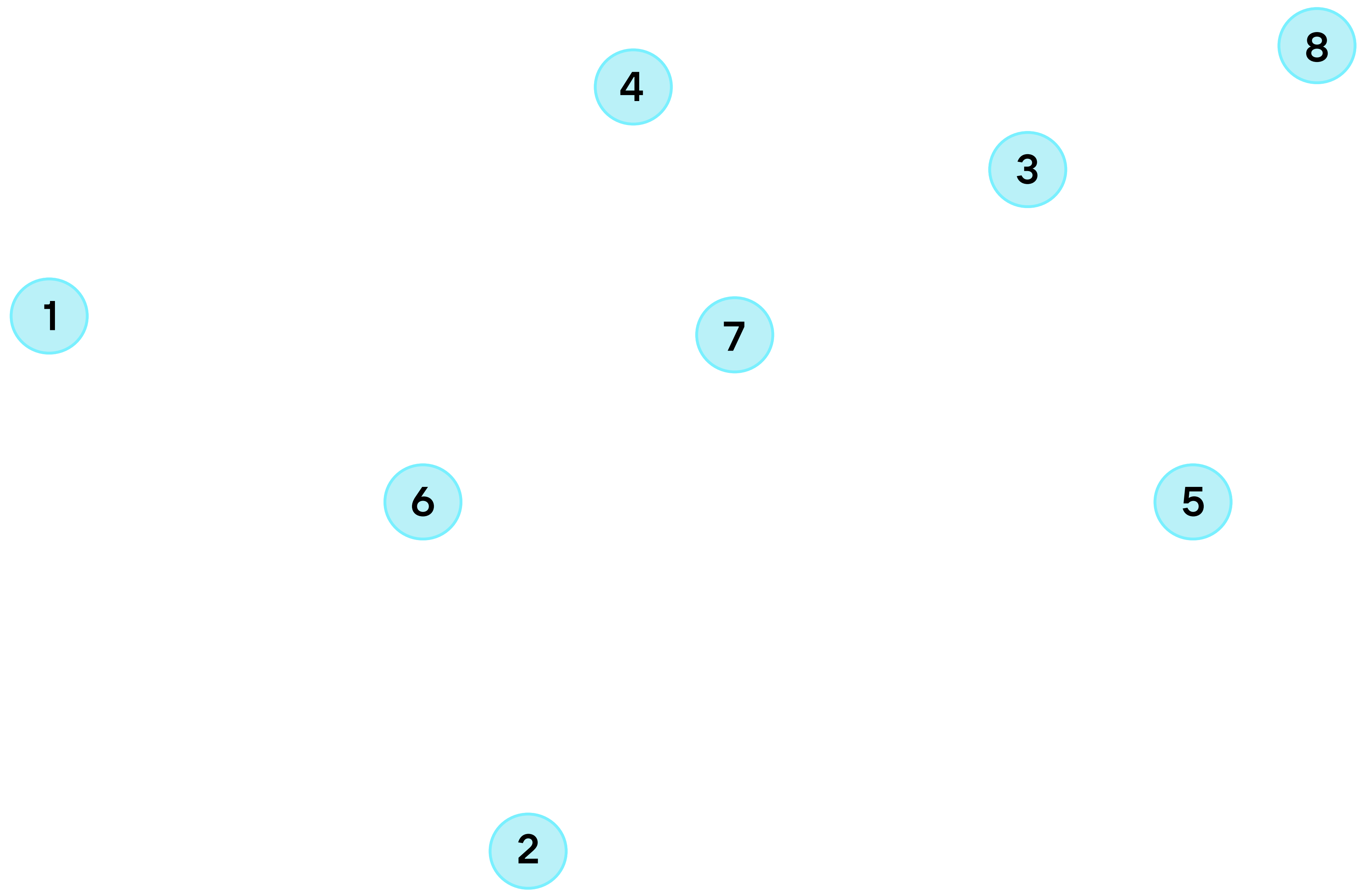
Конечный граф

- Граф, в котором множество вершин и множество рёбер являются конечными множествами
- В противном случае он называется бесконечным графом
- Все графы, которые мы будем рассматривать, будут конечными
- Бесконечные графы используются для изучения абстрактных математических концепций, таких как топология, теория множеств и анализ. Или для моделирования физических систем, таких как кристаллические решётки, фрактальные структуры и другие



Нулевой граф

Нулевым или несвязным он называется тогда, когда множество E пусто, то есть когда в графе нет рёбер. В этом случае он состоит из одних вершин G(V,)=P



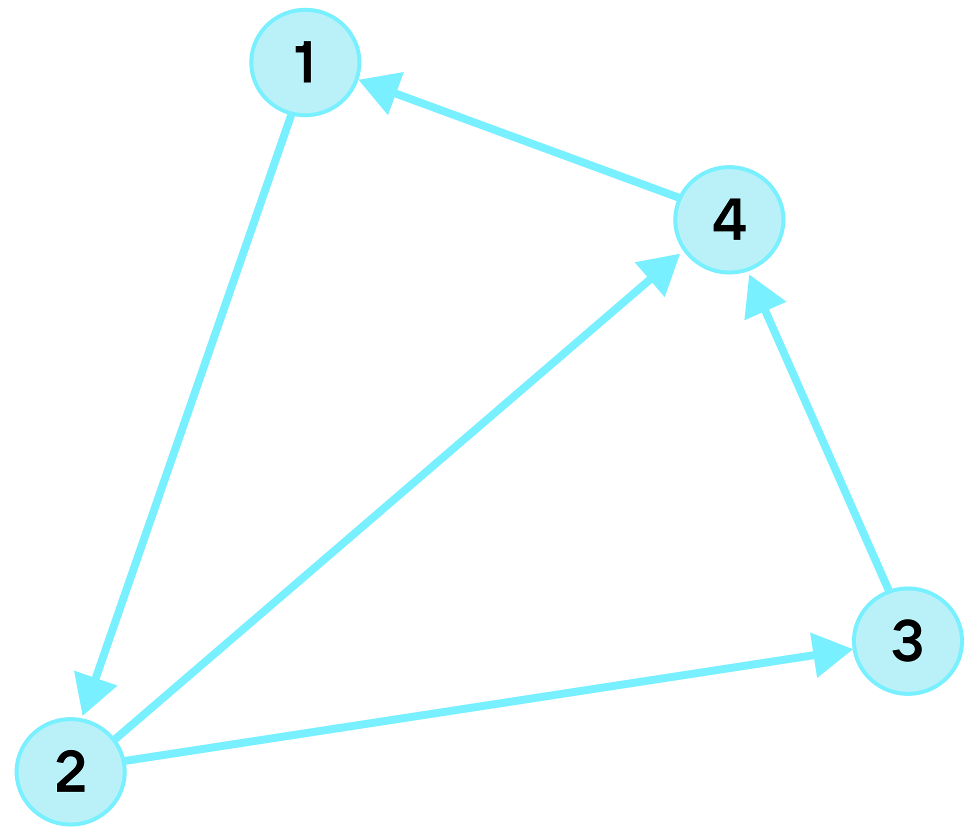
Нулевой граф

Ориентированные графы

- Все графы, которые мы рассматривали до этого, помимо всего прочего были неориентированными
- Каждое ребро имеет определённое направление
- Направление ребра указывает, какая вершина является начальной, а какая — конечной
- Неориентированный граф — это граф, в котором рёбра не имеют направления и могут быть пройдены в обоих направлениях

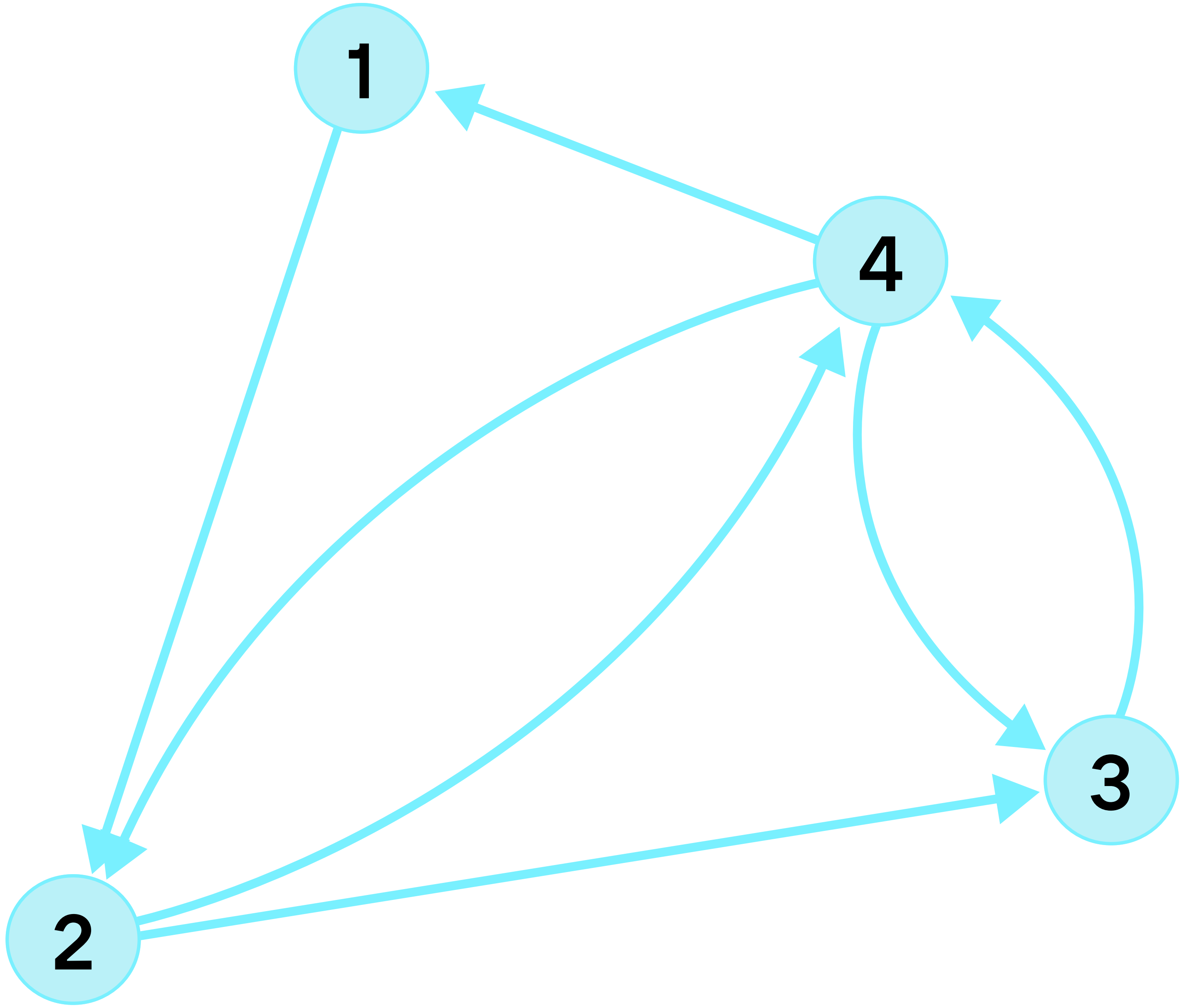
Ориентированные графы

- Ориентированным графом (или орграфом) называется упорядоченная пара множеств G = (V, E), где элементами множества E являются упорядоченные пары элементов V
- Элементы множества V называют вершинами или узлами, а элементы E — ориентированными рёбрами или дугами орграфа G
- Запись $e = uv$ (где $e \in E$ и $u, v \in V$) означает, что дуга e имеет начало в u и конец в v
- Дуга 1,2 имеет начало в узле 1 и конец в узле 2



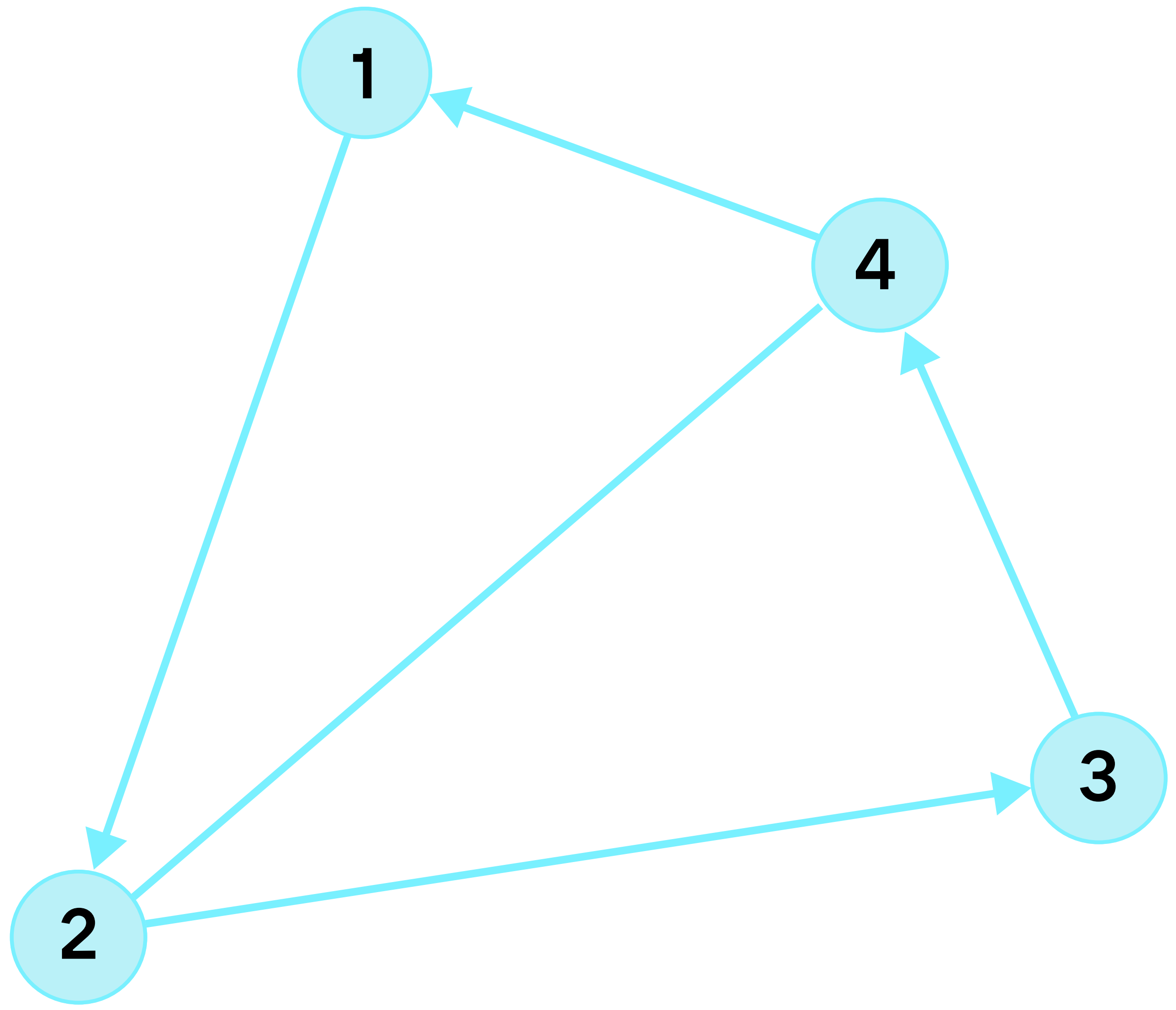
Ориентированный мультиграф

- Два узла могут быть соединены кратными рёбрами противоположного направления
- Дуги вида **ab** и **ba**



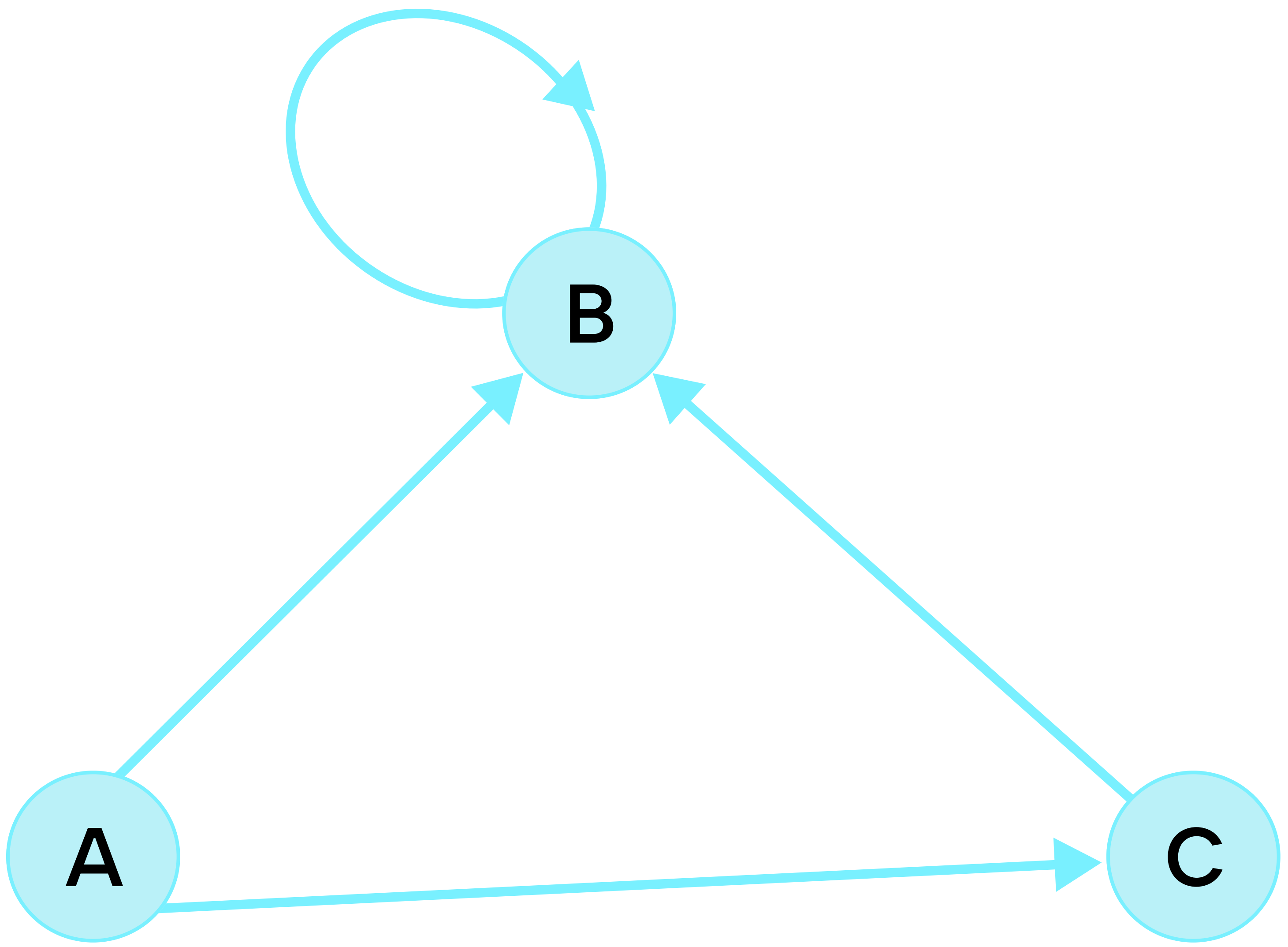
Смешанный граф

- Пара дуг 2,4 и 4,2 соответствует одному неориентированному ребру
- Если в графе присутствуют как ориентированные, так и неориентированные дуги, то этот граф называется **смешанным**
- Кратные дуги одного направления, как правило, не используются



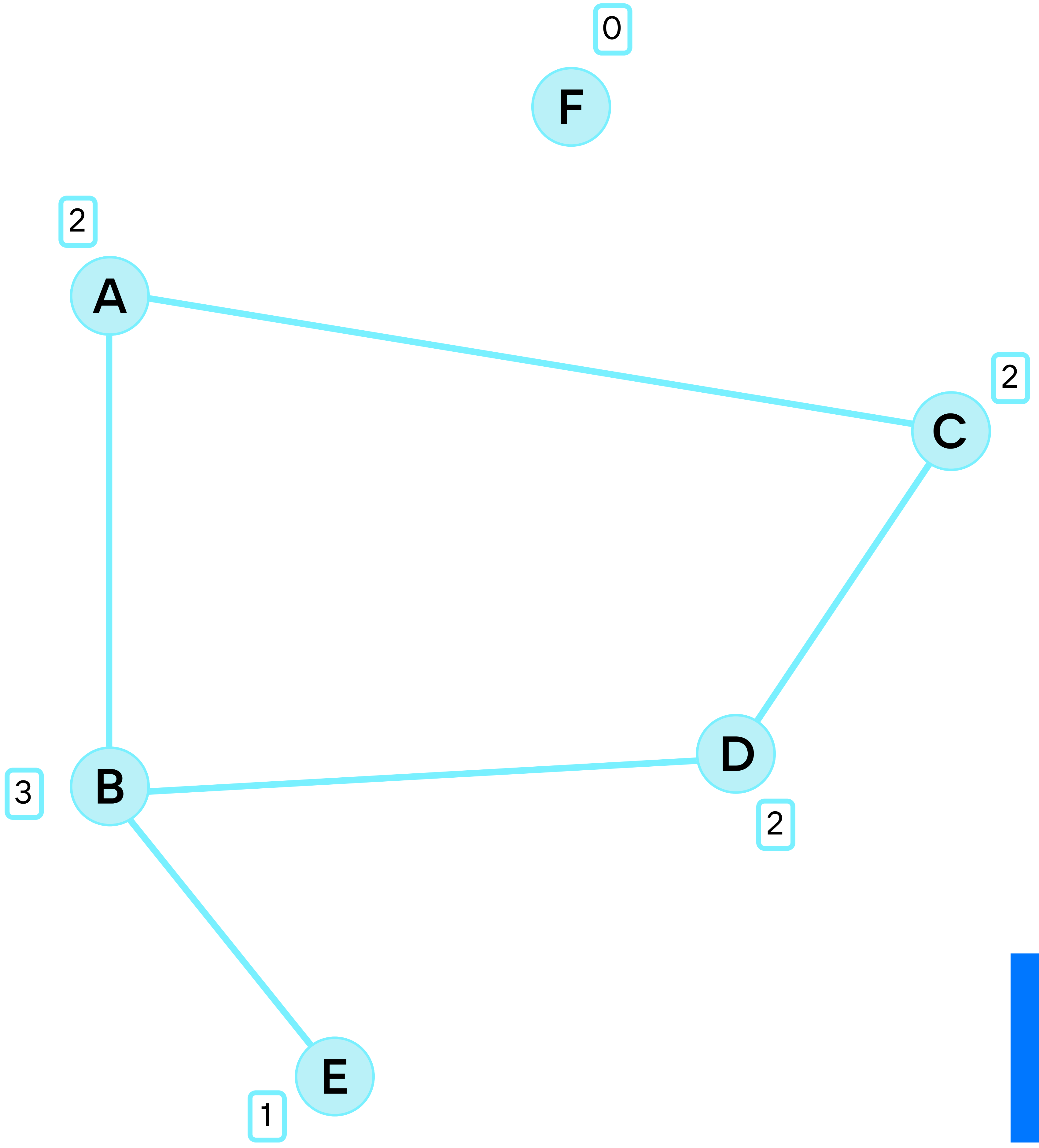
Ориентированный псевдограф

- Петля, так же как и другие рёбра, может быть ориентированной
- Для петли неважно, как она ориентирована
- Направление здесь скорее формальность



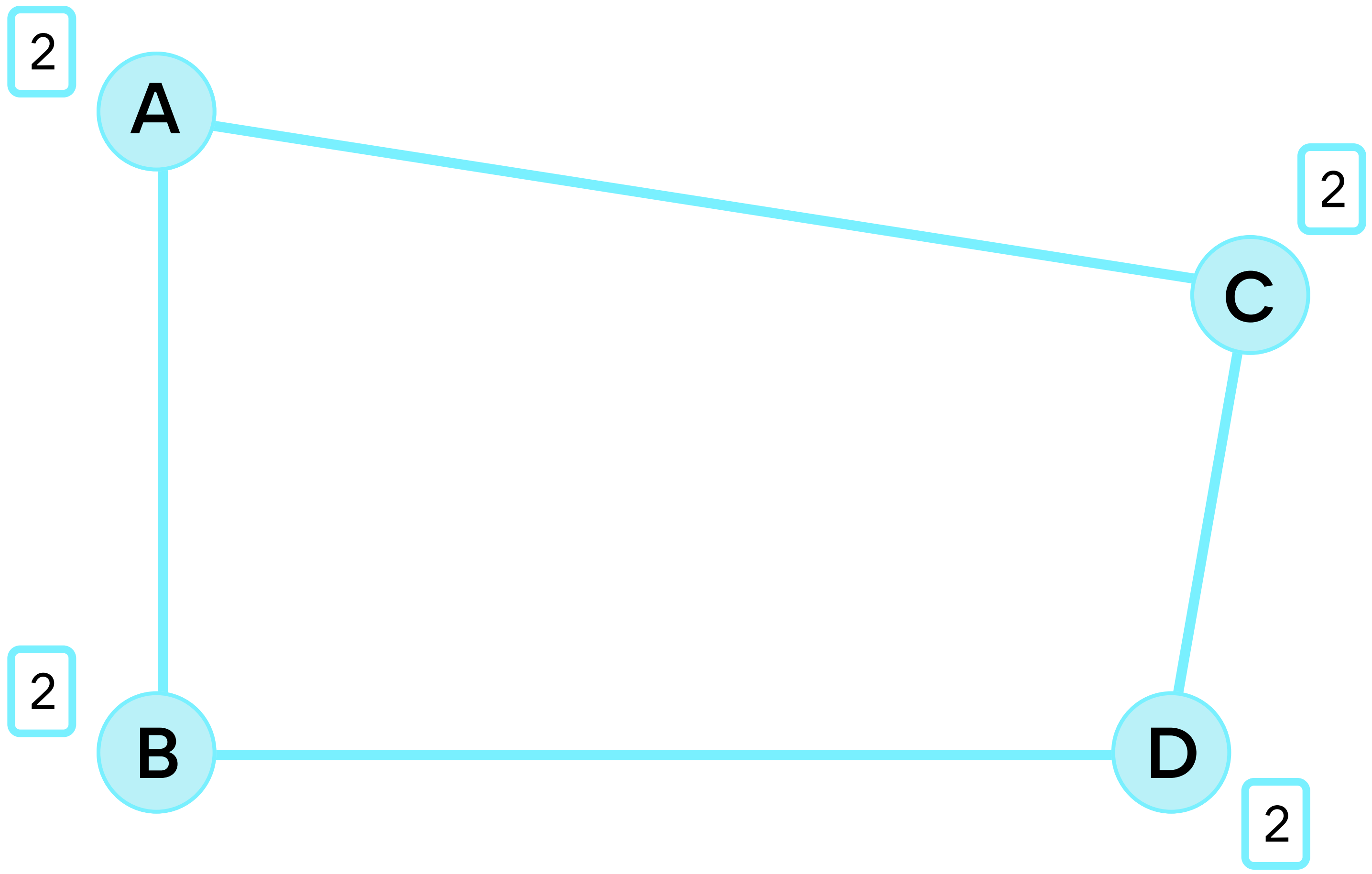
Степень или валентность вершины

- Степень вершины определяется количеством рёбер, связанных с данной вершиной
- В неориентированном графе степень вершины равна количеству рёбер, инцидентных этой вершине
- Если степень равна 0, как у вершины F, то такая вершина называется изолированной
- Степень обозначается как deg Vi



Правильный граф

- Граф, в котором степени всех вершин равны, называется правильным
- Такой граф ещё называют полным или регулярным
- Для степени k граф называется k-регулярным
- 3-регулярный граф называется кубическим
- Сумма всех степеней для этого графа — 8



Степень вершины в орграфе

Определяют два вида степени

- **Исходящая степень вершины** — количество рёбер, которые выходят из вершины v

  $d^+(v)$; $deg^+(v)$; outdegree(v)

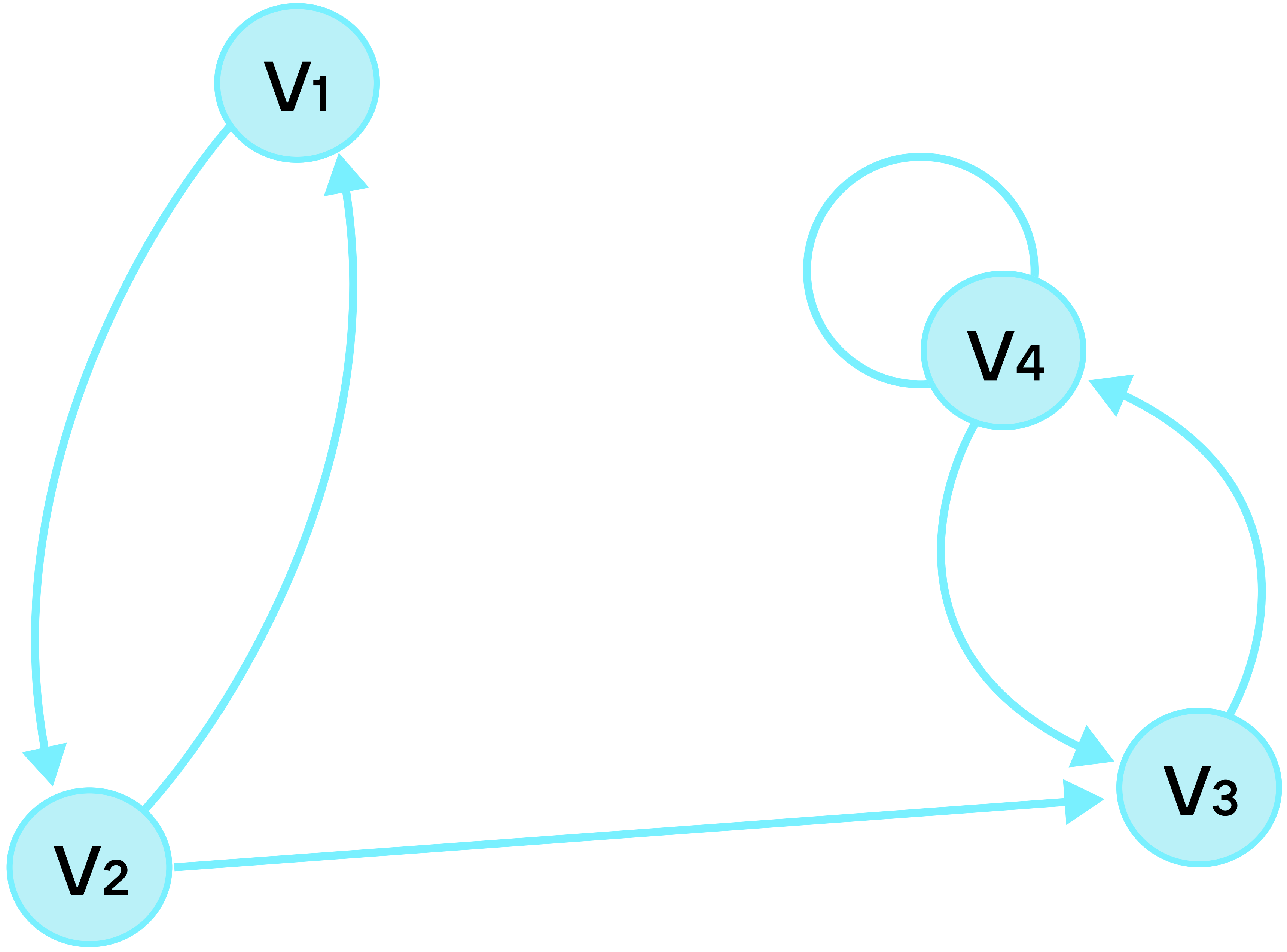
- **Входящая степень вершины** — количество рёбер, входящих в вершину v

  $d^-(v)$; $deg^-(v)$; indegree(v)

  indegree(v1) = 1; indegree(v2) = 1

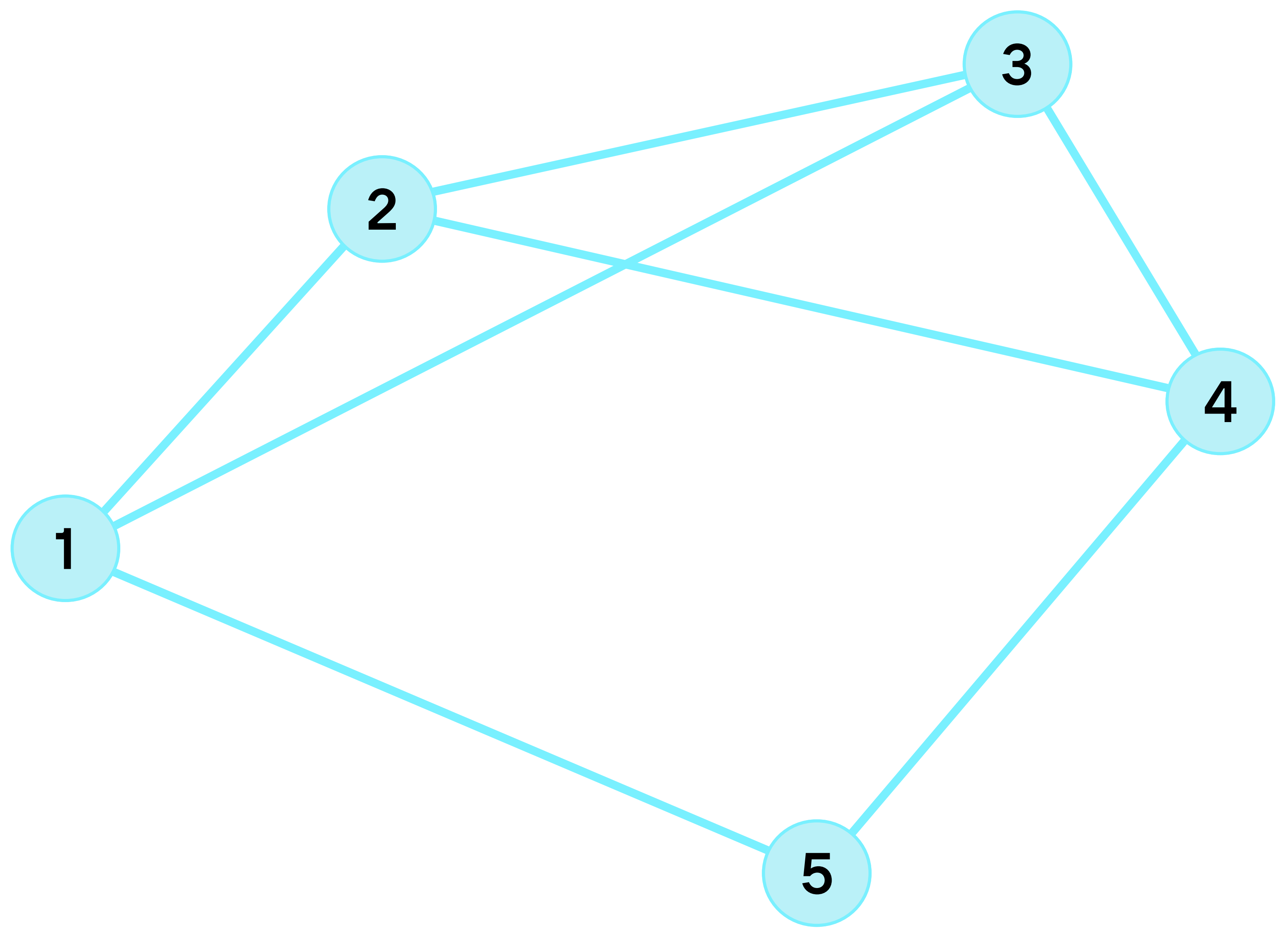
  indegree(v4) = 2; outdegree(v4) = 2

- Исходящая и входящая полустепень подразумевает разбиение степени пополам, если бы мы говорили про неориентированный граф



Простой граф

Простой граф (или простой неориентированный граф) — это граф, в котором отсутствуют петли (циклы, начинающиеся и заканчивающиеся в одном и том же узле) и кратные рёбра (несколько рёбер, соединяющих одни и те же два узла). Простой граф состоит из множества вершин (узлов) и множества рёбер, которые соединяют эти вершины



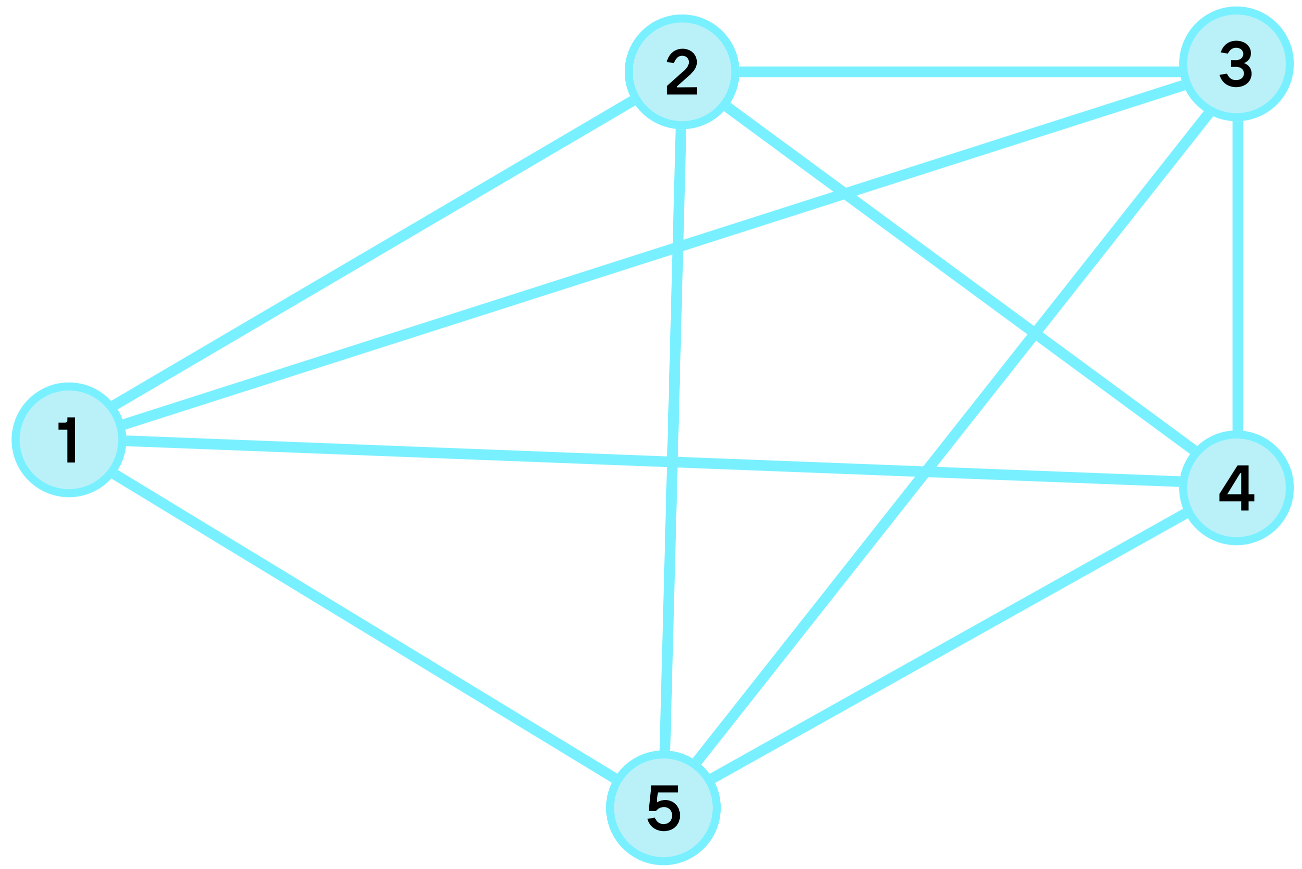
Простой граф

Максимальное число рёбер в простом графе можно рассчитать, используя формулу:

max_edges = n * (n−1) / 2

Где:

- **max_edges** — максимальное количество рёбер в графе
- **n** — количество вершин в графе



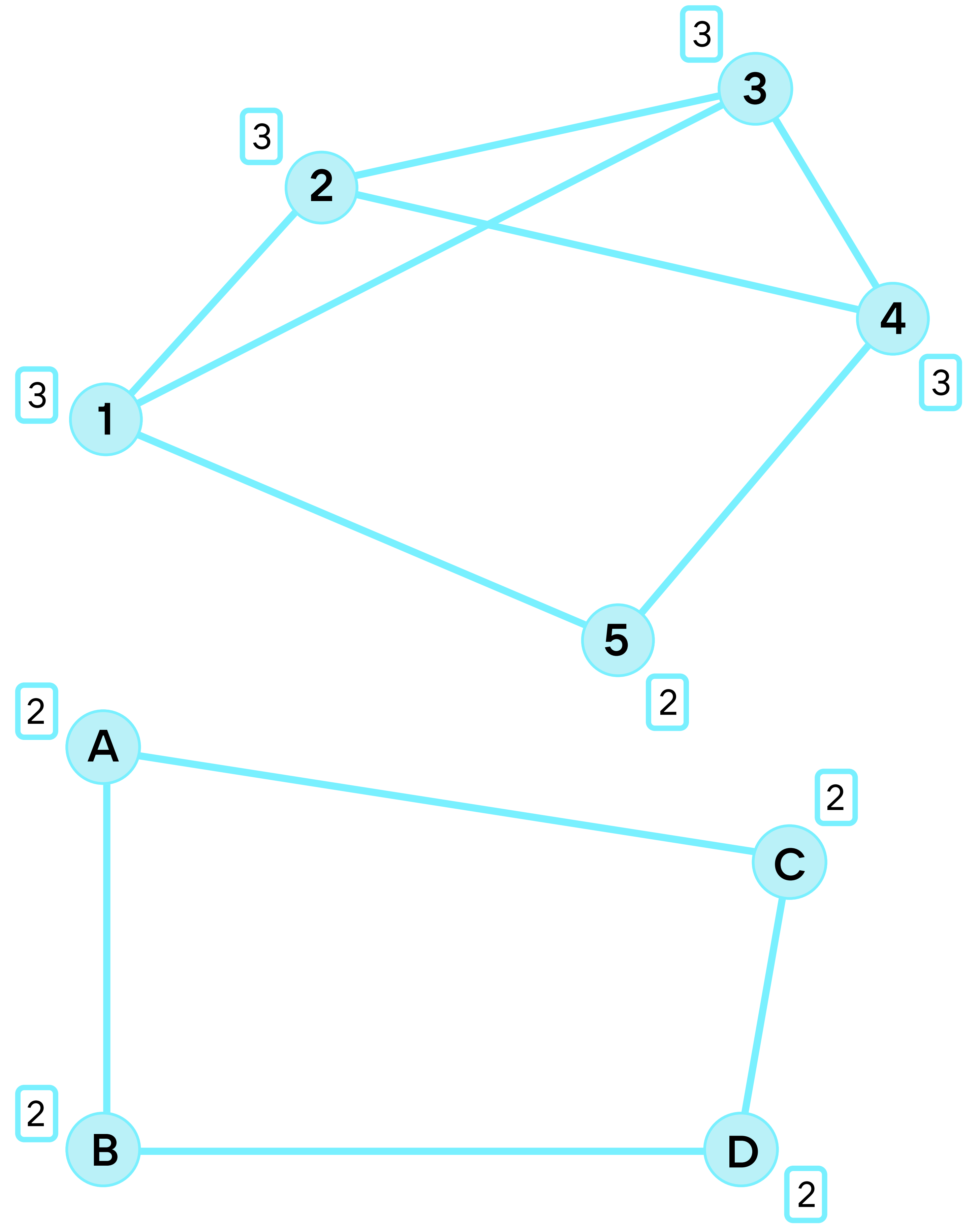
Лемма о рукопожатиях

Чтобы понять суть леммы о рукопожатиях, представим, что каждая вершина в графе представляет собой гостя на вечеринке, а каждое ребро между вершинами представляет рукопожатие между гостями. Таким образом, лемма утверждает, что общее количество рукопожатий на вечеринке будет чётным, потому что каждое рукопожатие добавляет 2 к общему количеству

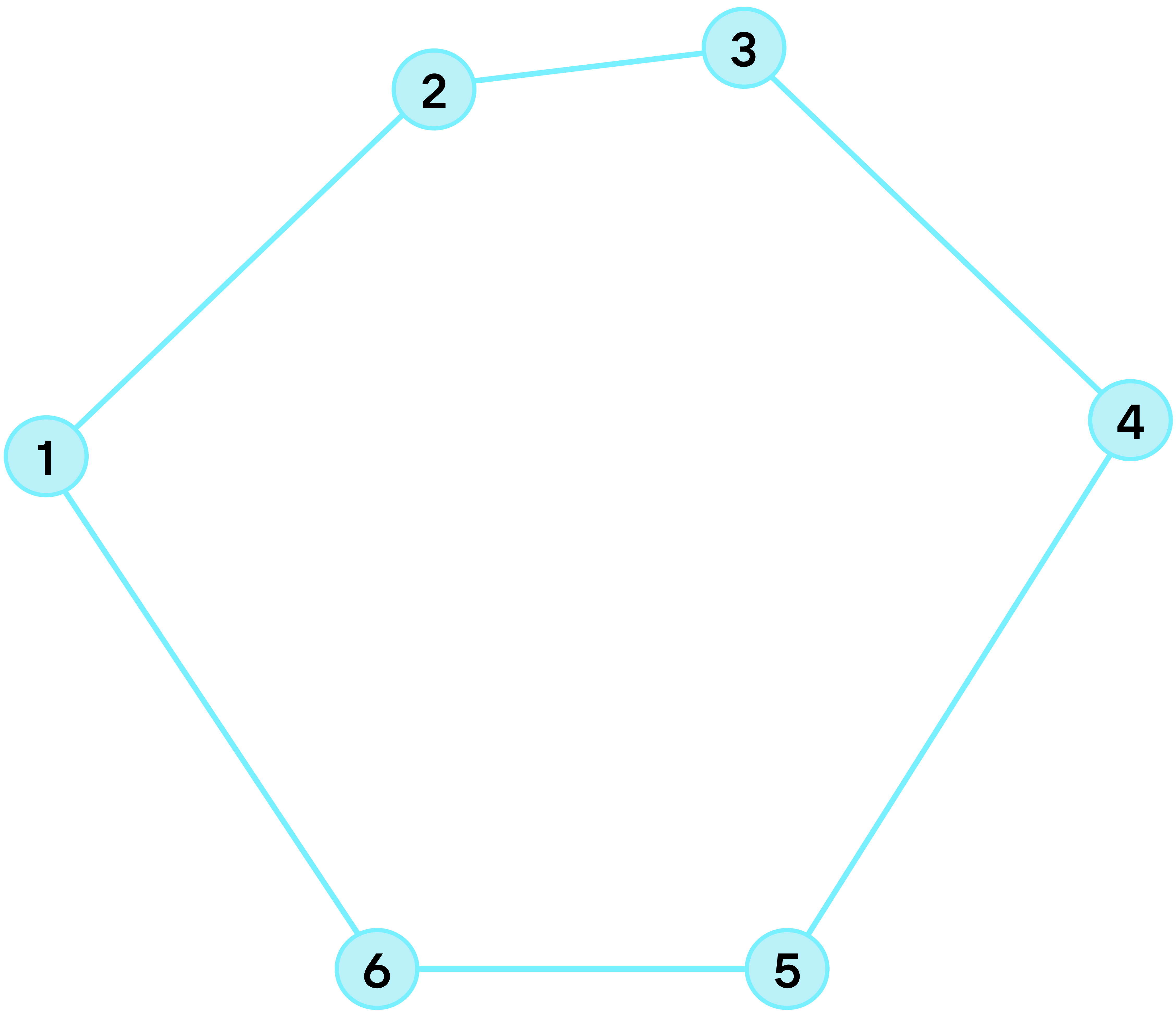
Лемма о рукопожатиях

- В любом **конечном неориентированном графе** сумма всех степеней вершин равна удвоенному количеству его рёбер
- Поскольку у каждого ребра два конца и каждый конец даёт степень, равную единице, то рёбер будет в два раза меньше, чем их концов
- Вершины нечётных степеней графа иногда называются нечётными вершинами или нечётными узлами. Используя эту терминологию, можно перефразировать лемму таким образом: каждый граф имеет чётное число нечётных вершин
- Для k-регулярного графа (где каждая вершина имеет степень k) формула для суммы степеней вершин выглядит следующим образом: **2*m = k*n**

  Где:
  - **m —** количество рёбер в графе
  - **n —** количество вершин в графе
  - **k —** степень каждой вершины

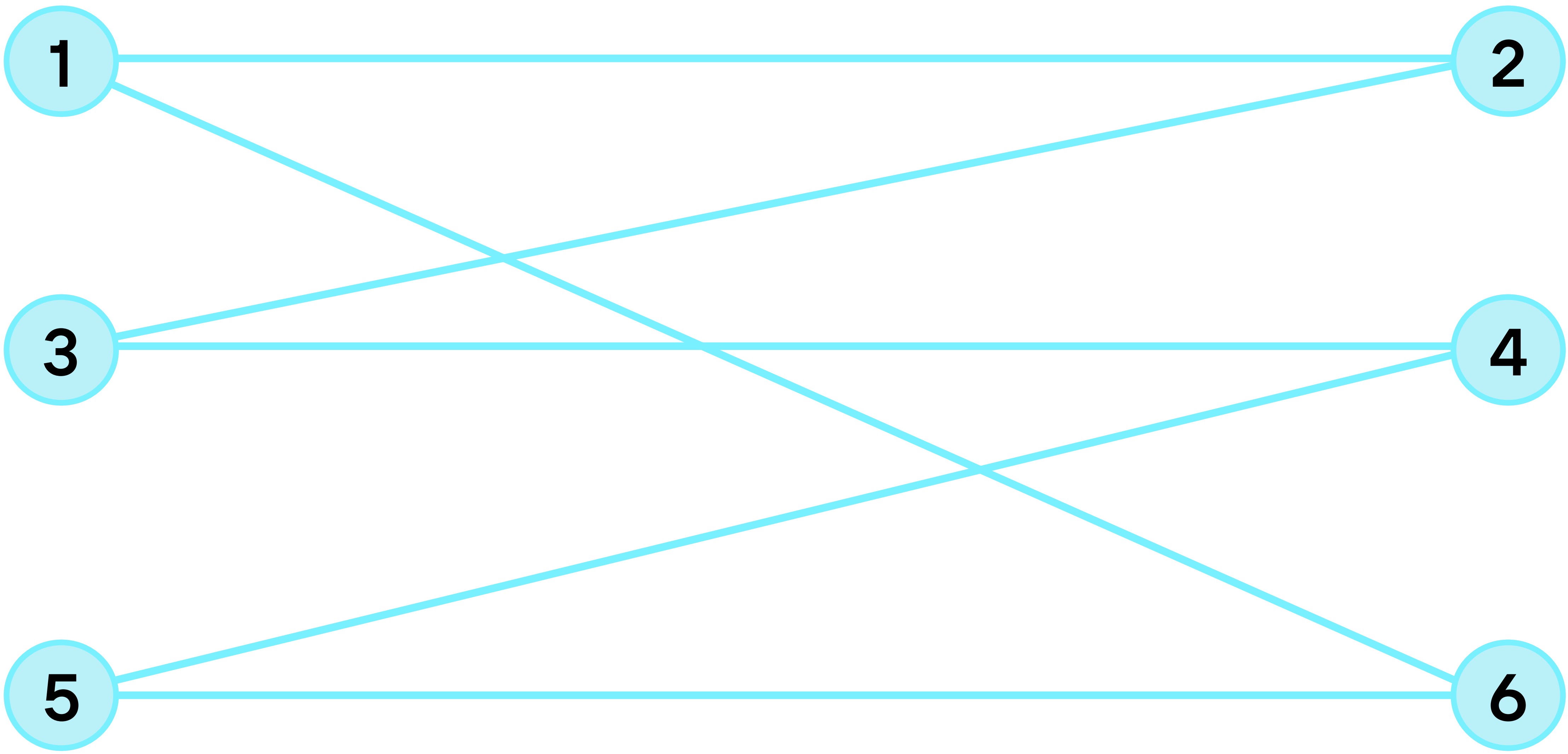


Что здесь изображено?

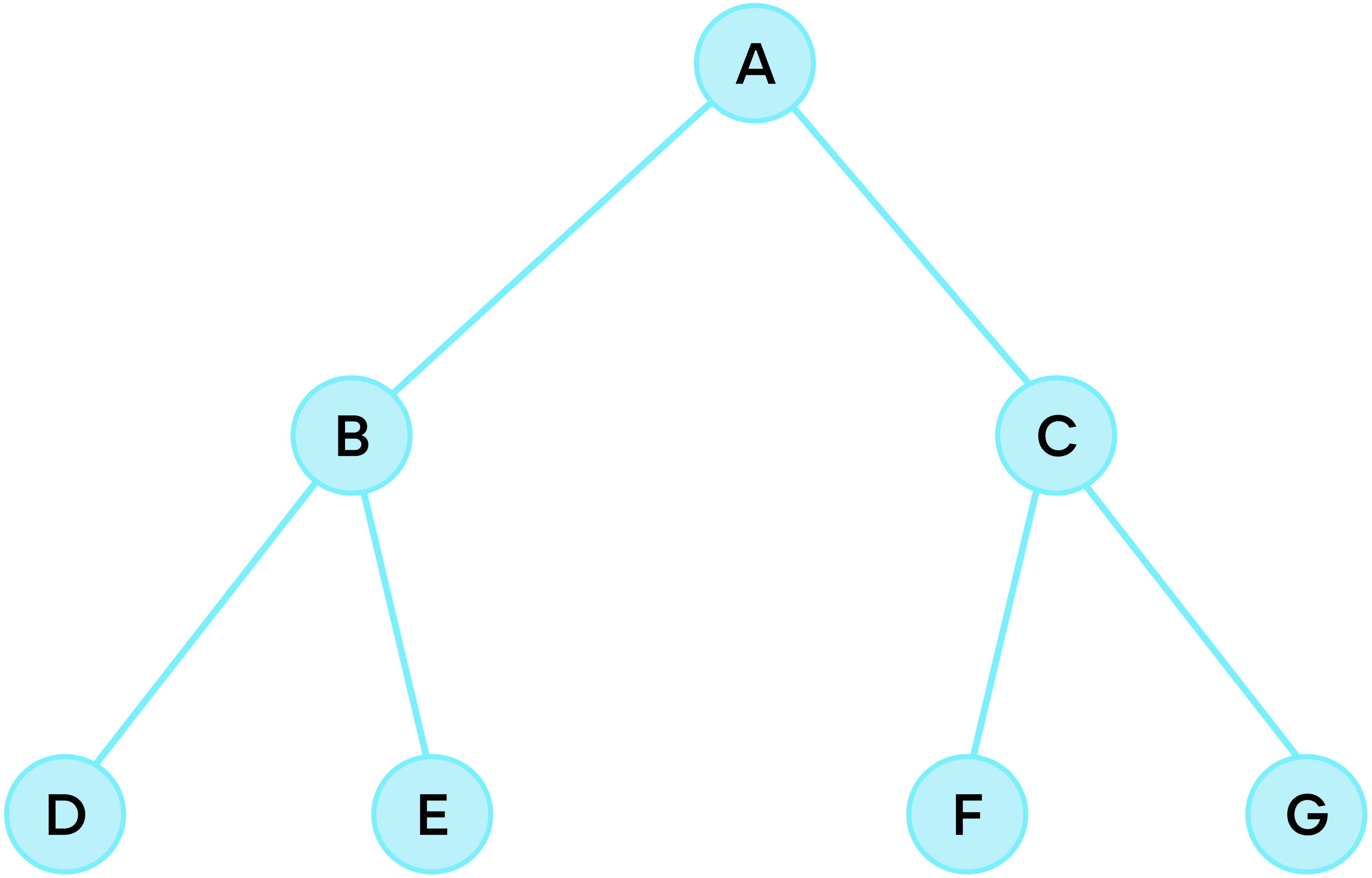


Двудольный граф

Двудольный граф G = (V, E) — это граф, у которого множество вершин **V** можно разбить на два непересекающихся подмножества **u** и **v** так, что каждое ребро из множества рёбер E соединяет вершины из разных подмножеств.

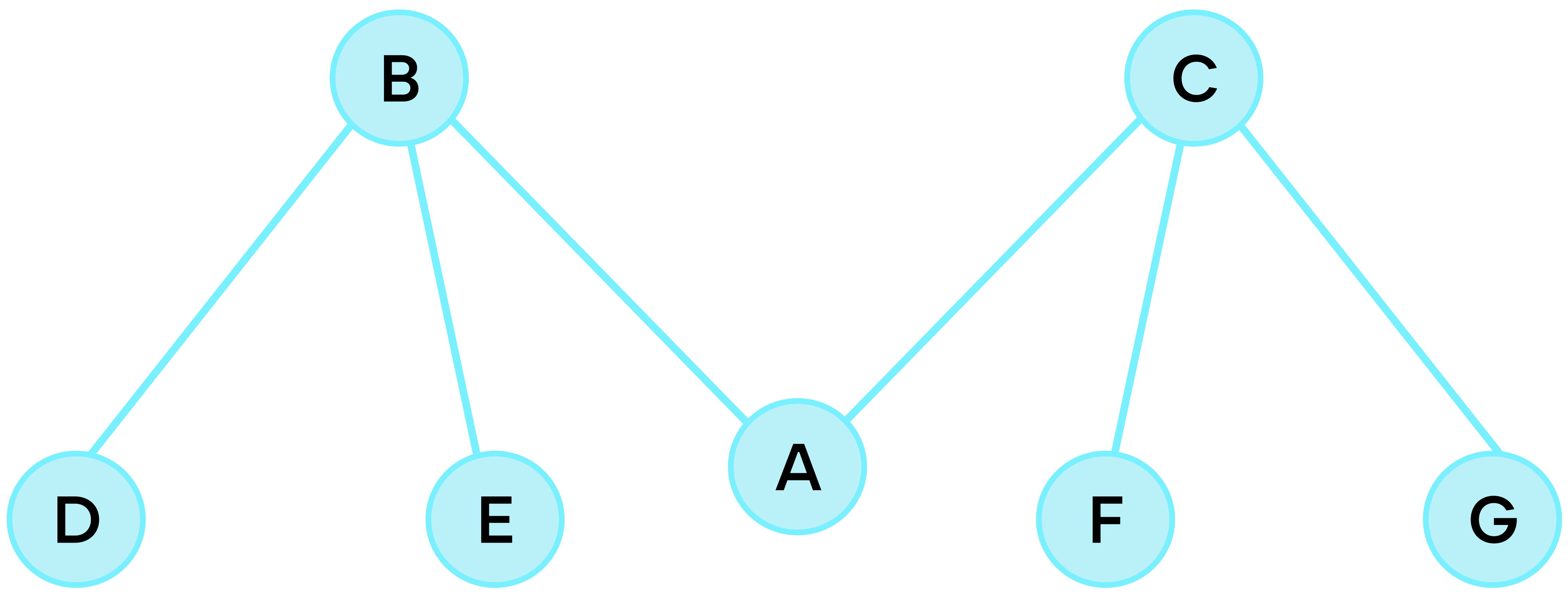


Что здесь изображено?



Двудольный граф

Дерево как частный случай двудольного графа: любое дерево является двудольным графом, так как его можно разбить на два непересекающихся подмножества вершин (например, по уровням или по чётности расстояния от корня), так что каждое ребро соединяет вершины из разных подмножеств.



Резюме

- **Граф — это сетевая структура данных,** которая состоит из вершин (узлов) и рёбер (связей), соединяющих эти вершины
- **Различают множество видов графа:** правильный, двудольный, простой, мультиграф и другие

education

Спасибо
за внимание