Chapitre 1

Statistiques descriptives

1.1 Généralités

Une statistique est une application d'une population Ω vers un ensemble de valeurs $\mathcal{C}$.

$$\begin{cases} X : & \Omega & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ & \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{cases}$$

• Ω : population finie d'individus ω. On va mesurer/observer un caractère particulier sur ces individus.
• $\mathcal{C}$: ensemble des valeurs possibles du caractère, appelées aussi modalités.
• X : Statistique (parfois appelée aussi caractère). Application qui à tout individu associe la valeur de son caractère.

• Une statistique peut être quantitative ou qualitative.
• Une statistique quantitative peut être discrète ou continue.
• Une statistique peut être multiple (à n paramètres).

1.2 Statistique simple (univariée)

1.2.1 Notations

On va se limiter à des statistiques quantitatives.

• Ω population finie de N individus.
• $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}$.

Première représentation : Une série statistique est un N-uplet $X = (v_1,\ v_2, \ldots,\ v_N)$
Par exemple : $X = (2.1,\ 5.23,\ 0.61,\ 2.1,\ 7.2,\ 0.61)$
On parle alors de **série statistique brute**.

Seconde représentation :
$\rightarrow$ L'ensemble des valeurs observables de X est fini. On peut écrire :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \quad (1 \leq p \leq N)$$

pour la suite on supposera $x_1 < x_2 < \ldots < x_p$.

• Effectif $n_i = \#(X^{-1}\{x_i\})$: nombre de fois que la valeur x_i a été observée dans la population ou nombre d'individus admettant x_i comme valeur du caractère.
• Effectif cumulé $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j = \#(X^{-1}\{]-\infty, x_i]\})$: nombre d'individus présentant une valeur de caractère plus petite que x_i, ou égale. On a la relation $N_i = N_{i-1} + n_i$ en posant

$N_0 = 0$ et peut remarquer que $N_p = N$
• Fréquence $f_i = n_i/N$.
• Fréquence cumulée $F_i = N_i/N = \sum_{j=1}^{i} f_j = F_{i-1} + f_i$ en posant $F_0 = 0$. On remarque que $F_p = 1$

• Une série statistique est une famille de la forme $(x_i, n_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ ou $(x_i, f_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$
On parle parfois de **série statistique dépouillée** ou de **série statistique regroupée et ordonnée**. .

1.2.2 Paramètres de position

Le mode
C'est la valeur du caractère d'effectif maximal

$$mode \ = \ x_i \text{ tq } n_i = \max_{1 \leq j \leq p}(n_j)$$

Attention : il n'est pas forcément unique.

La médiane
C'est la valeur du caractère qui sépare la population en deux parties égales.
Attention : parfois difficile à définir.

$$\eta \text{ tq } \#\{\omega_i \mid X(\omega_i) < \eta\} = \#\{\omega_i \mid X(\omega_i) > \eta\}$$

$$\eta \text{ tq } \#\{\omega_i \mid X(\omega_i) \leq \eta\} = \#\{\omega_i \mid X(\omega_i) \geq \eta\}$$

$$\eta = x_i \text{ tq } N_{i-1} < N/2 \leq N_i$$

Les quantiles

Dans le même esprit, on peut définir

- les quartiles : 3 valeurs qui découpent la population en 4 parties égales. Le deuxième quartile étant alors égal à la médiane
- les déciles : 9 valeurs qui découpent la population en 10 parties égales.
- les centiles : 99 valeurs qui découpent la population en 100 parties égales.
- ou tout autre découpage.

La moyenne arithmétique

$$m(X) = \overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}(n_i x_i) = \sum_{i=1}^{p}(f_i x_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i$$

Remarque : si on pose $\mathbf{n}=(n_1, n_2, \ldots n_p)$ et $\mathbf{X}=(x_1, x_2, \ldots x_p)$ alors

$$\sum_{i=1}^{p}(n_i x_i) = \mathbf{n}\cdot\mathbf{X}^t \quad \text{et} \quad m(X) = \frac{1}{N}\mathbf{n}\cdot\mathbf{X}^t$$

1.2.3 Paramètres de dispersion

L'étendue
C'est la plage de valeur du caractère observée sur la population

$$w = \max_{1\leq i\leq p}(x_i) - \min_{1\leq i\leq p}(x_i) = \max_{1\leq i\leq N}(v_i) - \min_{1\leq i\leq N}(v_i)$$

Attention : sensible aux erreurs de mesure.

Les quantiles
Dans le même ordre d'idée que l'étendue, on peut donner l'intervalle séparant le plus petit et le plus grand décile (80% de la population) ou celui séparant le quartile inférieur Q_I et le quartile supérieur Q_S (50% de la population) ou tout autre intervalle défini de manière similaire.

Intérêt : Élimine les mesures aberrantes.

L'écart arithmétique moyen
Calcule la moyenne des écarts à la moyenne

$$E = \frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq p} n_i|x_i - \overline{x}| = \sum_{1\leq i\leq p} f_i|x_i - \overline{x}| = \frac{1}{N}\sum_{1\leq i\leq N}|v_i - \overline{x}|$$

peu utilisé.

L'écart quadratique moyen ou variance

Calcule la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

$$V(X) = \sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq p} n_i (x_i - \overline{x})^2 = \sum_{1 \leq i \leq p} f_i (x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} (v_i - \overline{x})^2$$

Relation de Koenig-Huygens

$$\sigma_X^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq p} n_i . x_i^2 \right) - \overline{x}^2 = \left(\sum_{1 \leq i \leq p} f_i . x_i^2 \right) - \overline{x}^2 = \left(\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} v_i^2 \right) - \overline{x}^2$$

L'écart type

C'est la racine carré de la variance : même dimension que le caractère étudié.

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq p} n_i (x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\left(\sum_{1 \leq i \leq p} f_i . x_i^2 \right) - \overline{x}^2} = \ldots$$

1.2.4 Les moments

Moment d'ordre k

$$m_k(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}(n_i.x_i^k) = \sum_{i=1}^{p}(f_i.x_i^k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} v_i^k$$

Moment centré d'ordre k

$$\mu_k(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{p}(n_i.(x_i - \overline{x})^k) = \sum_{i=1}^{p}(f_i.(x_i - \overline{x})^k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(v_i - \overline{x})^k$$

Propriétés :
- $m_0(X) = \mu_0(X) = 1$
- $m_1(X) = \overline{x}$ et $\mu_1(X) = 0$
- $\mu_2(X) = \sigma_X^2$
- $\sigma_X^2 = m_2(X) - m_1(X)^2$ (Relation de Koenig-Huygens)

- Si une série statistique est symétrique par rapport à sa moyenne alors tous ses moments centrés d'ordre impair sont nuls.
- Par contre il ne suffit pas de vérifier que $\mu_3(X) = 0$ pour conclure que la série est symétrique par rapport à sa moyenne.

1.2.5 Paramètres de formes

Premier coefficient de Fisher : coefficient d'asymétrie

$$\delta = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$$

- série symétrique $\rightarrow \delta = 0$
- grands écarts positifs % à la moyenne $\rightarrow \delta > 0$ ("bosse décalée vers la gauche")
- grands écarts négatifs % à la moyenne $\rightarrow \delta < 0$ ("bosse décalée vers la droite")
- le coefficient d'asymétrie est considéré comme significatif lorsque $|\delta| > 0,5$
- S'applique essentiellement à une série unimodale.

Second coefficient de Fisher : coefficient d'aplatissement

$$a = \frac{\mu_4}{\sigma^4} = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

- Une grande valeur de a traduit un resserrement autour de la moyenne ("courbe en pic")
- Une petite valeur de a traduit un étalement de la série ("courbe plate")
- Si la distribution est normale alors a=3
- S'applique essentiellement à une série unimodale.

1.2.6 Découpage en classes

Lorsque X est un caractère continu ou que les fréquences f_i sont faibles (p proche de N) on est amené à découper le domaine de valeurs de X en classes (sous-intervalles).

$$C_1 = [a_0, a_1], C_2 =]a_1, a_2], \ldots, C_{p'} =]a_{p'-1}, a_{p'}]$$

avec $p' \leq p$ et $a_0 \leq x_1 < x_p \leq a_{p'}$

Intérêt : Représentation graphique (histogramme) et mise en évidence d'une classe modale (classe de hauteur maximale dans l'histogramme)
$\rightarrow$ Les classes peuvent être éventuellement de largeurs différentes.

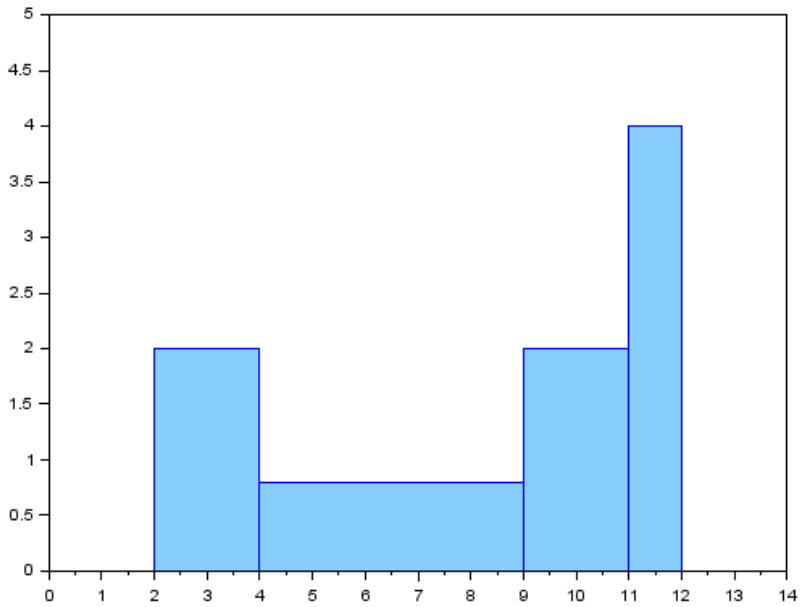
• On note alors n_i l'effectif de la classe C_i : $n_i = \#\{X^{-1}]a_{i-1}, a_i]\}$.
• On peut ensuite définir N_i, f_i et F_i comme vu précédemment pour une série statistique dépouillée.

La série est alors donnée sous la forme de la famille $((n_1,C_1),(n_2,C_2),\ldots (n_{p'}, C_{p'}))$
On parle alors d'une série statistique **en classes** ou **regroupée en classes** ou encore, parfois, **classée**.

• À toute série classée on peut faire correspondre une série statistique dépouillée $(x'_i, n_i)_{i\in[\![1,p']\!]}$ où x'_i est le centre de la classe C_i ($x'_i = (a_{i-1} + a_i)/2$).

1.2.7 Histogramme

Lorsque la statistique est découpée en classes, on ne la représente plus par un diagramme en bâtons, mais par un histogramme. Chaque classe est représentée par un rectangle dont la base est proportionnelle à la largeur de la classe et la **surface** proportionnelle à l'effectif (ou, ce qui revient au même, à la fréquence) de la classe. C'est bien la surface et non la hauteur du rectangle qui est proportionnelle à l'effectif. Cette remarque prend toute son importance lorsque les classes sont de largeurs différentes.



Exemple : on travaille sur une statistique découpées selon les quatre classes suivantes : [2,4],]4,9],]9,11],]11,12] et chaque classe est d'effectif 4.
L'axe des ordonnées peut être vu comme une densité.

1.2.8 La classe modale (paramètre de position)

C'est la classe correspondant au rectangle le plus haut dans l'histogramme (on parle bien ici de hauteur et non de surface). Elle peut ne pas être unique. Il arrive qu'on définisse le mode de la statistique comme le milieu de la classe modale (cette définition n'est pas entièrement équivalente à celle donnée plus haut). Dans l'exemple précédent, la classe modale est la dernière (classe]11,12]) et le mode est 11,5.

1.3 Statistique double (bivariée)

1.3.1 Notations

On va se limiter à des statistiques quantitatives.

• Ω population finie de N individus.
• Une statistique double C est une application de Ω dans $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{cases} C : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \omega & \longmapsto & C(\omega) \end{cases}$$

$C(\omega)$ est de la forme (x, y). On peut définir deux statistiques simples à partir de C

Première statistique marginale

$$\begin{cases} X : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \text{la première valeur du couple } C(\omega) \end{cases}$$

Seconde statistique marginale

$$\begin{cases} Y : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \text{la seconde valeur du couple } C(\omega) \end{cases}$$

Par **abus de langage**, on écrit que $C = (X, Y)$.

Les ensembles des valeurs observables de X et Y sont finis. On peut écrire :

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\} \quad \text{par ordre croissant}$$

$$Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, x_q\} \quad \text{par ordre croissant}$$

avec $1 \leq p \leq N$, $1 \leq q \leq N$ et a priori $p \neq q$

Effectifs et fréquences

• Effectif $n_{ij} = \#(C^{-1}\{(x_i, y_j)\})$: nombre d'individus admettant (x_i,y_j) comme valeur du caractère C

• Effectif $n_{i\bullet} = \#(X^{-1}\{x_i\})$: nombre d'individus admettant x_i comme première valeur du caractère C ou nombre d'individus admettant x_i comme valeur du caractère X

Remarque : $n_{i\bullet} = \sum_{1 \leq j \leq q} n_{ij}$

• Effectif $n_{\bullet j} = \#(Y^{-1}\{y_j\})$: nombre d'individus admettant y_j comme seconde valeur du caractère C ou nombre d'individus admettant y_j comme valeur du caractère Y

Remarque : $n_{\bullet j} = \sum_{1 \leq i \leq p} n_{ij}$

On définit également les effectifs cumulés $N_{i\bullet}$ et $N_{\bullet j}$ ainsi que les fréquences f_{ij}, $f_{i\bullet}$, $f_{\bullet j}$, $F_{i\bullet}$ et $F_{\bullet j}$ en divisant les effectifs correspondants par N. Ainsi, par exemple

$$f_{ij} = \frac{1}{N} n_{ij}$$

Tableau de contingence

$X\backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q	total
x_1	n_{11}	$\dots$	n_{1j}	$\dots$	n_{1q}	$n_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	n_{i1}	$\dots$	n_{ij}	$\dots$	n_{iq}	$n_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_p	n_{p1}	$\dots$	n_{pj}	$\dots$	n_{pj}	$n_{1\bullet}$
total	$n_{\bullet 1}$	$\dots$	$n_{\bullet j}$	$\dots$	$n_{\bullet q}$	N

$X\backslash Y$	y_1	$\dots$	y_j	$\dots$	y_q	total
x_1	f_{11}	$\dots$	f_{1j}	$\dots$	f_{1q}	$f_{1\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_i	f_{i1}	$\dots$	f_{ij}	$\dots$	f_{iq}	$f_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_p	f_{p1}	$\dots$	f_{pj}	$\dots$	f_{pj}	$f_{1\bullet}$
total	$f_{\bullet 1}$	$\dots$	$f_{\bullet j}$	$\dots$	$f_{\bullet q}$	1

1.3.2 Covariance et coefficient de corrélation

Covariance
Elle donne une mesure du lien existant entre les deux caractères X et Y.

$$cov(X,Y) = \sigma_{XY} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} x_i y_j \right) - \overline{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} n_{ij} (x_i - \overline{x})(y_j - \overline{y})$$

Si les deux caractères sont indépendants l'un de l'autre alors la covariance est nulle. Réciproque fausse.

Coefficient de corrélation
C'est une normalisation de la covariance qui évite les effets d'échelle.

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$
- Si X et Y sont indépendants alors $\rho_{XY} = 0$. Réciproque fausse.
- S'il existe une relation affine entre X et Y alors $\rho_{XY} = \pm 1$. Réciproque fausse.

1.3.3 Droite de régression linéaire

Droite de régression de Y en X
On cherche la droite d'équation $Y = aX + b$ approchant "au mieux" le nuage de points de la statistique double C.

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2} \\ b = \overline{y} - \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}\overline{x} \end{cases}$$

Cette droite passe par le point $(\overline{x}, \overline{y})$

Droite de régression de X en Y
On cherche la droite d'équation $X = \alpha Y + \beta$ approchant "au mieux" le nuage de points de la statistique double C.

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2} \\ \beta = \overline{x} - \dfrac{\sigma_{XY}}{\sigma_Y^2}\overline{y} \end{cases}$$

Cette droite passe aussi par le point $(\overline{x}, \overline{y})$

Les deux droites sont confondues ssi $a = \dfrac{1}{\alpha}$ ssi $\dfrac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2\sigma_Y^2} = 1$ ssi $\rho_{XY}^2 = 1$

1.3.4 Régression logarithmique

Lorsque le nuage de points ne semble pas rectiligne, on peut chercher d'autres type de relation entre X et Y, tout en s'appuyant sur la technique de la régression linéaire.

Si on soupçonne une relation de la forme $Y = \beta X^{\alpha}$
En passant au logarithme, la relation devient : $\ln(Y) = \ln(\beta) + \alpha \cdot \ln(X)$
On calcule alors la droite de régression sur le couple $(X', Y') = (\ln(X), \ln(Y))$
Si le résultat est $Y' = A \cdot X' + B$ et que le coefficient de corrélation est satisfaisant
Alors on admet que $Y \simeq e^B \cdot X^A$ (i.e. $\beta = e^B$ et $\alpha = A$)

Si on soupçonne une relation de la forme $Y = \beta \alpha^X$
En passant au logarithme, la relation devient : $\ln(Y) = \ln(\beta) + \ln(\alpha) \cdot X$
On calcule alors la droite de régression sur le couple $(X', Y') = (X, \ln(Y))$
Si le résultat est $Y' = A \cdot X' + B$ et que le coefficient de corrélation est satisfaisant
Alors on admet que $Y \simeq e^B \cdot (e^A)^X$ (i.e. $\beta = e^B$ et $\alpha = e^A$)

1.3.5 Régression polynomiale

$Y = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ et $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$
On cherche une relation de la forme $y_i \simeq P(x_i)$ où $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
On pose $S_k = \sum_{i=1}^{N} x_i^k$ $(= N \cdot m_k(X))$ et $T_k = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^k$
Soit M la matrice carrée d'ordre $n+1$ définie par : $[M]_{\ell,c} = S_{\ell+c-2}$
Soit B le vecteur ${}^t(T_0, T_1, \ldots, T_n)$
Et soit A le vecteur d'inconnues ${}^t(a_0, a_1, \ldots, a_n)$

A est solution du système $M \cdot A = B$