UNIVERSIDAD TÉCNICA DE AMBATO
FACULTAD DE INGENIERÍA EN SISTEMAS ELECTRÓNICA E INDUSTRIAL
CARRERA DE SOFTWARE
CICLO ACADÉMICO: MARZO – JULIO 2025

EJERCICIOS GRUPO#4

I. PORTADA

Tema:	Aplicaciones geométricas de la integral: Área, volúmenes, superficies
Unidad de Organización Curricular:	BÁSICA
Nivel y Paralelo:	2do Software "B"
Alumnos participantes:	Lizano Christian
Asignatura:	Calculo Integral
Docente:	Ing. Gabriel León, Mg.

II. INFORME DE GUÍA PRÁCTICA

2.1 Objetivos

General:
Aplicar los criterios analíticos de integración múltiple para el cálculo de áreas bajo una superficie en la resolución de ejercicios.

2.2 Listado de equipos, materiales y recursos

Listado de equipos y materiales generales empleados en la guía práctica:

- Inteligencia artificial
- TAC, Calculadora
- Texto de trabajo
- Hojas y esferos
- Software matemático (GeoGebra)
- Formulario.

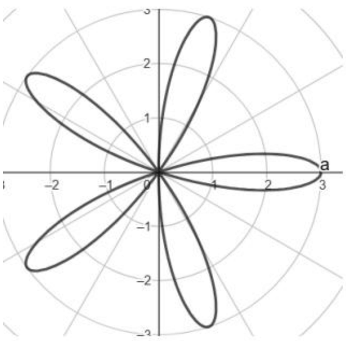
TAC (Tecnologías para el Aprendizaje y Conocimiento) empleados en la guía práctica:

☒Plataformas educativas
☒Simuladores y laboratorios virtuales
☐Aplicaciones educativas
☐Recursos audiovisuales
☐Gamificación
☒Inteligencia Artificial
Otros (Especifique): ____________________

2.3 Actividades por desarrollar

Utilizando plano Polar calcular el área por medio de integrales definidas:

1. $3 * \cos(5\theta)$



$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} [3 * \cos(5\theta)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 3^2 * [\cos(5\theta)]^2 \, d\theta$$

$$A=\frac{1}{2}*9\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}[\cos(5\theta)]^2\,d\theta$$

$$A=\frac{9}{2}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1+\cos(5*2\theta)}{2}\,d\theta$$

$$A=\frac{9}{4}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}1+\cos(10\theta)\,d\theta$$

$$A=\frac{9}{4}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}d\theta+\frac{9}{4}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos(10\theta)\,d\theta$$

$$A=\frac{9\theta}{4}+\frac{9}{4}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos(10\theta)\,d\theta$$

$$u=10\theta \qquad du=10*d\theta \qquad d\theta=\frac{du}{10}$$

$$A=\frac{9\theta}{4}+\frac{9}{4}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos(u)\frac{d\theta}{10}$$

$$A=\frac{9\theta}{4}+\frac{9}{40}\int_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos(u)\,du$$

$$A=\frac{9\theta}{4}+\frac{9sen(10\theta)}{40}\Big|_{\frac{11\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}$$

$$A=\left[\frac{\frac{9\pi}{6}}{4}+\frac{9sen\left(\frac{10\pi}{6}\right)}{40}\right]-\left[\frac{\frac{9*11\pi}{6}}{4}+\frac{9sen\left(\frac{10*11\pi}{6}\right)}{40}\right]$$

$$A=\left[\frac{9\pi}{24}+\frac{9sen\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{40}\right]-\left[\frac{99\pi}{24}+\frac{9sen\left(\frac{55\pi}{3}\right)}{40}\right]$$

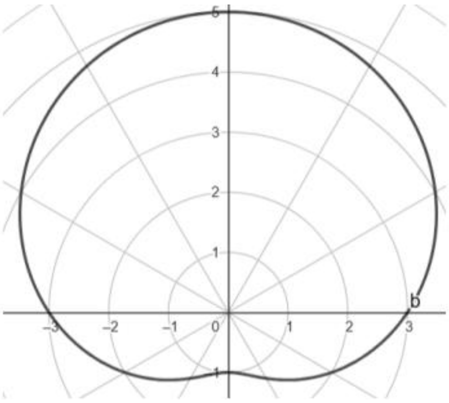
$$A=[1.1986]-[13.1490]$$

$$A=|-11.9504|$$

$$A\,total=11.9504*5$$

$$A\,total=59.7521$$

2. $3+2\sin(\theta)$



$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} [3 + 2sen(\theta)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} 9 + 12sen(\theta) + 4[sen(\theta)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{9}{2}\int_{0}^{2\pi} d\theta + \frac{12}{2}\int_{0}^{2\pi} sen(\theta)\, d\theta + \frac{4}{2}\int_{0}^{2\pi} [sen(\theta)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{9\theta}{2} - 6\cos(\theta) + 2\int_{0}^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$A = \frac{9\theta}{2} - 6\cos(\theta) + \frac{2}{2}\int_{0}^{2\pi} 1 - \cos(2\theta)\, d\theta$$

$$A = \frac{9\theta}{2} - 6\cos(\theta) + \int_{0}^{2\pi} d\theta - \int_{0}^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta$$

$$A = \frac{9\theta}{2} - 6\cos(\theta) + \theta - \int_{0}^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta$$

$$u = 2\theta \qquad du = 2d\theta \qquad d\theta = \frac{du}{2}$$

$$A = \frac{9\theta}{2} - 6\cos(\theta) + \theta - \int_{0}^{2\pi} \cos(u) \frac{du}{2}$$

$$A = \frac{9\theta}{2} - 6\cos(\theta) + \theta - \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \cos(u) du$$

$$A = \frac{9\theta}{2} - 6\cos(\theta) + \theta - \frac{sen(2\theta)}{2} \Big|_{0}^{2\pi}$$

$$A = \frac{11\theta}{2} - 6\cos(\theta) - \frac{sen(2\theta)}{2} \Big|_{0}^{2\pi}$$

$$A = \left[\frac{11(2\pi)}{2} - 6\cos(2\pi) - \frac{sen(4\pi)}{2}\right] - \left[\frac{11(0)}{2} - 6\cos(0) - \frac{sen(0)}{2}\right]$$

$$A = [28.4847] - [-6]$$

$$A = 11\pi = 34.4847$$

3. $2 - 4\cos(\theta)$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [2 - 4\cos(\theta)]^2\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} 4 - 16\cos(\theta) + 16[\cos(\theta)]^2\, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} 4 - 16\cos(\theta) + 16\left[\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right] d\theta$$

$$A = \frac{4}{2}\int_{\alpha}^{\beta} d\theta - \frac{16}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \cos(\theta)\, d\theta + \frac{16}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right] d\theta$$

$$A = 2\int_{\alpha}^{\beta} d\theta - 8\int_{\alpha}^{\beta} \cos(\theta)\, d\theta + \frac{8}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [1 + \cos(2\theta)]\, d\theta$$

$$A = 2\int_{\alpha}^{\beta} d\theta - 8\int_{\alpha}^{\beta} \cos(\theta)\, d\theta + 4\int_{\alpha}^{\beta} d\theta + 4\int_{\alpha}^{\beta} [\cos(2\theta)]\, d\theta$$

$$A = 2\theta - 8sen(\theta) + 4\theta + 4\int_{\alpha}^{\beta} [\cos(2\theta)]\, d\theta$$

$$u = 2\theta \quad du = 2d\theta \quad d\theta = \frac{du}{2}$$

$$A = 2\theta - 8sen(\theta) + 4\theta + 4\int_{\alpha}^{\beta} [\cos(u)]\frac{du}{2}$$

$$A = 2\theta - 8sen(\theta) + 4\theta + 4\int_{\alpha}^{\beta} [\cos(u)]\frac{du}{2}$$

$$A = 2\theta - 8sen(\theta) + 4\theta + \frac{4sen(2\theta)}{2}$$

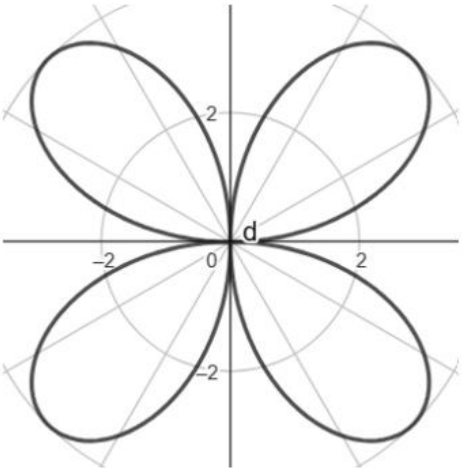
$$A = 6\theta - 8sen(\theta) + 2sen(2\theta)$$

$$Area\ externa = \left[\frac{6*5\pi}{3} - 8sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{2*5\pi}{3}\right)\right] - \left[\frac{6\pi}{3} - 8sen\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$Area\ externa = [31.0493] - [6.2100]$$
$$Area\ externa = 24.8392$$

$$Area\ interna = \left[\frac{6*4\pi}{3} - 8sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{2*4\pi}{3}\right)\right] - \left[\frac{6*2\pi}{3} - 8sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2sen\left(\frac{2*2\pi}{3}\right)\right]$$
$$Area\ interna = [24.8397] - [12.4200]$$
$$Area\ interna = 12.4196$$
$$Area\ externa \sin area\ interna = 24.8392 - 12.4196$$
$$Area\ externa \sin area\ interna = 12.4201$$

4. $4 * \sin(2\theta)$



$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [4\text{sen}\,(2\theta)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 16[sen(2\theta)]^2 \, d\theta$$

$$A = \frac{16}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos\,(4\theta)}{2} d\theta$$

$$A = \frac{16}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \frac{16}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\,(4\theta) d\theta$$

$$A = 4\theta - 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\,(4\theta) d\theta$$

$$u = 4\theta \qquad du = 4d\theta \qquad d\theta = \frac{du}{4}$$

$$A = 4\theta - 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\frac{du}{4}$$

$$A = 4\theta - \frac{4}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\, du$$

$$A = 4\theta - sen(4\theta)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left[\frac{4\pi}{2} - sen\left(\frac{4\pi}{2}\right)\right] - [4(0) - 2sen(0)]$$

$$A = [2\pi - sen(2\pi)] + 2\,sen(0)$$

$$A = [2\pi - sen(2\pi)] + 0$$

$$A = 6.1737$$

$$A\; total = 6.1737 * 4$$

$$A\; total = 8\pi = 24.6949$$

5. Encontrar la longitud de arco de la curva $y = \frac{(x-2)^2}{6}$ en un intervalo (-2, 2)

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2 dx}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2 dx}$$

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{6}$$

$$f'(x) = \frac{2}{6} * (x-2) * 1$$

$$f'(x) = \frac{x-2}{3}$$

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2}\, dx$$

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + \frac{x^2 - 4x + 4}{9}}\, dx$$

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{9 + x^2 - 4x + 4}{9}}\, dx$$

$$L = \int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{x^2 - 4x + 13}{9}}\, dx$$

$$L = \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}{\sqrt{9}}\, dx$$

$$L = \frac{1}{3} \int_{-2}^{2} \sqrt{(x-2)^2 + 9}\, dx$$

$$u = x - 2 \quad du = dx$$

$$L = \frac{1}{3} \int_{-2}^{2} \sqrt{u^2 + 9}\, du$$

Aplicando la formula directa obtenemos:

$$L = \frac{1}{3}\left[\frac{u}{2}\sqrt{u^2+9} + \frac{9}{2}\ln(u + \sqrt{u^2+9})\right]$$

$$L = \left[\frac{u}{6}\sqrt{u^2+9} + \frac{9}{6}\ln(u + \sqrt{u^2+9})\right]$$

Reemplazamos el valor de u:

$$L = \left[\frac{x-2}{6}\sqrt{(x-2)^2+9} + \frac{3}{2}\ln\left((x-2)+\sqrt{(x-2)^2+9}\right)\right]$$

Evaluamos la integral en los puntos (-2, 2):

$$L = \left[\frac{2-2}{6}\sqrt{(2-2)^2+9} + \frac{3}{2}\ln\left((2-2)+\sqrt{(2-2)^2+9}\right)\right] - \left[\frac{-2-2}{6}\sqrt{(-2-2)^2+9} + \frac{3}{2}\ln\left((-2-2)+\sqrt{(-2-2)^2+9}\right)\right]$$

$$L = \left[\frac{0}{6}\sqrt{(0)^2+9} + \frac{3}{2}\ln\left((0)+\sqrt{(0)^2+9}\right)\right] - \left[\frac{-4}{6}\sqrt{(-4)^2+9} + \frac{3}{2}\ln\left((-4)+\sqrt{(-4)^2+9}\right)\right]$$

$$L = \left[\frac{0}{6}\sqrt{9} + \frac{3}{2}\ln\left(\sqrt{9}\right)\right] - \left[\frac{-4}{6}\sqrt{16+9} + \frac{3}{2}\ln\left((-4)+\sqrt{16+9}\right)\right]$$

$$L = \left[\frac{3}{2}\ln(3)\right] - \left[\frac{-4}{6}\sqrt{25} + \frac{3}{2}\ln\left((-4)+\sqrt{25}\right)\right]$$

$$L = \left[\frac{3}{2}\ln(3)\right] - \left[\frac{-4}{6}(5) + \frac{3}{2}\ln\left((-4)+5\right)\right]$$

$$L = \left[\frac{3}{2}\ln(3)\right] - \left[\frac{-20}{6} + \frac{3}{2}\ln(1)\right]$$

$$L = \left[\frac{3}{2}\ln(3)\right] + \frac{10}{3} - \frac{3}{2}\ln(1)$$

$$L = \frac{3}{2}[\ln(3) - \ln(1)] + \frac{10}{3}$$

$$L = \frac{3}{2}[\ln(3) - \ln(1)] + \frac{10}{3}$$

$$L = \frac{3}{2}[\ln(3)] + \frac{10}{3}$$

$$L = \frac{3\ln(3)}{2} + \frac{10}{3}$$

$$L = \frac{3*(1.0986)}{2} + 3.3333$$

$$L = \frac{3.2958}{2} + 3.3333$$

$$L = 1.6479 - 3.3333$$

$$L = 4.9812$$

6. Área, volumen y centroide, dada la región acotada por las gráficas de $y = \ln(x)$ con límites a=1 y b=e
    - Calcular el área de la región
    - El volumen del solido generado al girar la región alrededor del eje de las x
    - El volumen del solido generado al girar la región alrededor del eje de las y
    - El centroide de la región
7. Encontrar el volumen del solido formado al hacer girar la región acotada por las funciones $y^2 = x,\ x = 2y$ alrededor del eje de las y.

2.4 Resultados obtenidos

El estudiante al concluir la práctica será capaz de Identificar fórmulas y procesos de la integral definida para la resolución de problemas geométricos en el plano y espacio

2.5 Habilidades blandas empleadas en la práctica

☒ Liderazgo
☒ Trabajo en equipo
☐ Comunicación asertiva
☐ La empatía
☒ Pensamiento crítico
☐ Flexibilidad
☐ La resolución de conflictos
☐ Adaptabilidad
☒ Responsabilidad

2.6 Conclusiones

Los estudiantes desarrollaron destrezas para la resolución de ejercicios relacionados con problemas sobre aplicaciones geométricas de las integrales

2.7 Anexos