INFORME DE GUÍA PRÁCTICA

I. PORTADA

Tema:	Tema de la guía práctica proporcionada por el docente
Unidad de Organización Curricular:	BÁSICA
Nivel y Paralelo:	Segundo - A
Alumnos participantes:	Cardenas Cuello Evelyn Jhoana Gamboa Guaman Jonathan Alexis Llumitasig Pasochoa Josue Neptali Pashma Alvarez Juan Carlos …………………………..
Asignatura:	Calculo Integral
Docente:	Ing. Gabriel León, Mg.

II. INFORME DE GUÍA PRÁCTICA

2.1 Objetivos

General:
Comprender y aplicar el concepto de integrales dobles y su relación con el cálculo de áreas de superficies curvas, utilizando herramientas tecnológicas y métodos teóricos para resolver ejercicios prácticos dentro del contexto del Cálculo Integral.

Específicos:
- Identificar los distintos tipos de regiones de integración y clasificarlas correctamente para facilitar el desarrollo de integrales dobles.
- Aplicar el Teorema de Fubini para resolver integrales dobles como integrales iteradas, analizando cuál es el orden de integración más conveniente en cada caso.
- Calcular el área real de una superficie definida por una función en dos variables sobre una región dada, utilizando la fórmula correspondiente y herramientas como GeoGebra y software de cálculo.

2.2 Modalidad
Presencial

2.3 Tiempo de duración
Presenciales: 8
No presenciales: 0

2.4 Instrucciones
Revisar conceptos de integral dobles, y resolver los ejercicios de aplicación

2.5 Listado de equipos, materiales y recursos

Listado de equipos y materiales generales empleados en la guía práctica:
- Inteligencia artificial
- Calculadora
- Hojas y esferos
- Software matemático (GeoGebra)
- Formulario

TAC (Tecnologías para el Aprendizaje y Conocimiento) empleados en la guía práctica:
☒Plataformas educativas
☒Simuladores y laboratorios virtuales

☐Aplicaciones educativas
☐Recursos audiovisuales
☐Gamificación
☒Inteligencia Artificial
Otros (Especifique): ______________________

2.6 Actividades desarrolladas

Descripción detallada de los pasos realizados para efectuar la práctica y alcanzar los resultados.

- Conceptos básicos de Integrales Dobles, Superficies
- Descripción de los ejercicios.
- Resolución de los ejercicios.
- Cálculos realizados a mano o en software especializado.
- Análisis de resultados.

2.7 Resultados obtenidos

Integrales Dobles y Clasificación de Regiones de Integración

Las integrales dobles son una extensión natural del concepto de integral definida a funciones de dos variables. Su interpretación geométrica está asociada al volumen bajo una superficie $z = f(x,y)$ sobre una región R del plano xy[1].

Al límite de la suma de volúmenes de infinitos paralelepípedos se le denomina integral doble de f en R y se denota como:

$$\iint_R f(x,y)dA$$

Si este límite existe, se dice que la función f es integrable en R

Aplicación del Teorema de Fubini al cálculo de integrales dobles

Para calcular una integral doble, se utiliza el Teorema de **Fubini**, el cual establece que si una función $f(x,y)$ es continua en una región cerrada y acotada R, entonces es posible evaluar la integral doble como una integral iterada, es decir, como dos integrales simples consecutivas[2].

Esto significa que podemos integrar primero con respecto a una variable (por ejemplo, y), y luego con respecto a la otra (en este caso, x), o viceversa, dependiendo de cómo esté definida la región. La clave está en escoger el orden que más se adapte a la geometría de la región o que facilite el cálculo[2].

En notación, el Teorema de Fubini permite escribir:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\ dy\ dx\ = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\ dx\ dy$$

Clasificación de las Regiones de Integración

Cuando trabajamos con integrales dobles, una parte fundamental del proceso es identificar y describir correctamente la **región de integración** R. Esta región representa el dominio en el plano xy sobre el cual se calcula el volumen bajo una superficie definida por una función $f(x, y)$. Dependiendo de cómo se comportan los límites de integración[3].

Podemos clasificar a R en tres tipos principales:

Región Tipo I – Barrido vertical

En este tipo de región, se recorre verticalmente, es decir, se fija un valor de x y se deja que y varíe entre dos curvas que dependen de x [4] . Los límites de integración en este caso se expresan como:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

Este enfoque es útil cuando las curvas que limitan a la región son funciones de x.

Ejemplo:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{x=0}^{2} \int_{y=x^2}^{2x} f(x,y)\,dy\,dx$$

Región Tipo II – Barrido horizontal

Aquí, el recorrido es horizontal. Se fija y y se permite que x varíe entre dos funciones que dependen de y [4]. La integral doble se escribe como:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Este tipo es más conveniente cuando las fronteras de la región están dadas como funciones de y.

Ejemplo:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{y=0}^{2} \int_{x=y^2}^{y+2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Región Tipo III – Compuesta o general

Hay ocasiones en las que la región no puede describirse completamente como Tipo I o II debido a su forma irregular. En estos casos, se divide la región en varias partes más simples (Tipo I o II) y se calcula una integral doble para cada subregión[5]. Finalmente, se suman los resultados:

$$\iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA + \cdots$$

Comprender esta clasificación permite elegir correctamente el orden de integración y facilita el planteamiento de los límites, lo cual es clave para resolver integrales dobles de forma eficiente.

Ejemplo:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_{x=-1}^{0} \int_{y=-x}^{x} f(x,y)dy\,dx + \int_{x=0}^{1} \int_{y=x}^{-x} f(x,y)dy\,dx$$

Cálculo de Área de una Superficie Usando Integrales Dobles

En cálculo multivariable, cuando se desea conocer el área real de una superficie curva en el espacio, no basta con medir su proyección en el plano, ya que esa "sombra" no representa la longitud real de la superficie. Por eso, se utiliza una técnica basada en integrales dobles, que permite sumar pequeñas áreas diferenciales ajustadas según la forma e inclinación de la superficie[6].

Cuando una superficie está definida por una función de la forma:

$$z = f(x,y)$$

y se encuentra sobre una región RRR del plano xy, su área se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$A = \iint_R \sqrt{1 + \left(\frac{\delta f}{\delta x}\right)^2 + \left(\frac{\delta f}{\delta y}\right)^2}\, dA$$

$$\textit{Formula que aparece en libros}$$
$$(\text{Cálculo Vectorial de Jerrold E. Marsden Anthony J. Tromba})$$

¿Qué significa esta fórmula?

$$\frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\delta f}{\delta y}\ \textit{Son las derivadas parciales de la funcion}$$

La raíz cuadrada nos da el "factor de estiramiento" que sufre el plano al elevarlo a una superficie.

Al sumar todos esos pedacitos de área con la integral doble, obtenemos el **área real de la superficie**, no solo su proyección en el plano.

Esta expresión puede parecer complicada al principio, pero tiene una interpretación bastante intuitiva. La raíz cuadrada sirve para corregir la medida del área, teniendo en cuenta que la superficie puede estar inclinada o curvada. Las derivadas parciales $\frac{\delta f}{\delta x}$ y $\frac{\delta f}{\delta y}$ indican cómo cambia la altura z en cada dirección. En otras palabras, miden la inclinación de la superficie.

Al elevarlas al cuadrado y sumarlas, obtenemos una medida de qué tan "empinada" es la superficie en cada punto[7].

El diferencial dA representa una pequeña área en el plano xy, y la integral doble se encarga de sumar todos esos elementos ajustados sobre toda la región R.

Una vez comprendida su estructura, la fórmula anterior puede expresarse de forma más compacta, lo cual es común en presentaciones prácticas y materiales de enseñanza. **La expresión se simplifica a**:

$$\boldsymbol{A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x,y)^2] + [fy(x,y)^2]}\ \ dA}$$

En esta forma:

Se usa la notación $f_X\,(x,y)\quad y\quad f_y\,(x,y)$ para representar las derivadas parciales de f respecto a x y y, respectivamente.

El significado matemático es exactamente el mismo que en la fórmula anterior, pero escrito de forma más sencilla.

Esta versión resulta más accesible y funcional para quienes ya están familiarizados con la notación de derivadas parciales.

Interpretación práctica

Esta fórmula calcula el área real de una superficie curva, tomando en cuenta cómo cambia la pendiente en cada dirección. En lugar de sumar áreas planas, se suman áreas que se estiran según la inclinación de la superficie en cada punto. Este método es especialmente útil en ingeniería y física, donde las superficies suelen representar estructuras reales que no son planas, como techos, terrenos, o incluso campos de energía en el espacio.

Clasificación de las Superficies

Aquí te van las principales superficies que debes conocer con sus ecuaciones y formas:

1. **Plano**

$$\boldsymbol{z = ax + by + c}$$

- Es una superficie completamente plana (como una hoja inclinada).
- Se ve como una rampa o una mesa inclinada.

2. **Paraboloide elíptico**

$$\boldsymbol{z = x^2 + y^2}$$

- Forma de tazón o copa.
- Tiene un mínimo en el centro, se abre hacia arriba.

3. **Paraboloide hiperbólico**

$$\boldsymbol{z = x^2 - y^2}$$

- Forma de silla de montar.

- Se abre hacia arriba en una dirección y hacia abajo en la otra.

4. **Cono elíptico**

$$z^2 = x^2 - y^2$$

- Superficie que se parece a un cono doble (hacia arriba y hacia abajo).

¿Cómo se obtiene los limites?

Cuando la región es un **círculo** o tiene simetría radial, es **mucho mejor usar coordenadas polares**:

$$x = rcos\theta \qquad\qquad y = rsen\theta$$

En coordenadas polares, el disco de radio 1 se describe así:

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Y el diferencial de área se convierte en:

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

2.8 Habilidades blandas empleadas en la práctica

☐ Liderazgo
☐ Trabajo en equipo
☐ Comunicación asertiva
☐ La empatía
☐ Pensamiento crítico
☒ Flexibilidad
☐ La resolución de conflictos
☒ Adaptabilidad
☒ Responsabilidad

2.9 Conclusiones

Comprender la diferencia entre regiones Tipo I, Tipo II y Tipo III fue fundamental para plantear correctamente los límites de integración. Al identificar el tipo de región, el desarrollo de las integrales se volvió más directo y con menos errores, lo que evidenció la importancia de esta clasificación para resolver problemas de manera eficiente.

Aplicar el Teorema de Fubini facilitó mucho el cálculo de integrales dobles, ya que permitió descomponer la integral en pasos más manejables. Además, se notó que escoger adecuadamente el orden de integración puede simplificar bastante el proceso, sobre todo en regiones irregulares o con funciones complejas.

La fórmula para calcular el área real de una superficie fue clave para entender cómo las derivadas parciales influyen en la medida real del área. Con su aplicación y el uso del software

GeoGebra, se logró visualizar y calcular superficies más realistas, lo que amplió nuestra perspectiva sobre el uso de integrales dobles en problemas aplicados.

2.10 Recomendaciones

Dedicar más tiempo a la práctica con diferentes tipos de regiones de integración para fortalecer el criterio al momento de elegir el orden adecuado de integración.

Aprovechar al máximo herramientas como GeoGebra o calculadoras simbólicas, ya que permiten verificar resultados y entender visualmente el comportamiento de las funciones en 3D.

Revisar con anticipación los conceptos teóricos antes de resolver los ejercicios, ya que una base sólida facilita la aplicación correcta de los métodos y reduce errores comunes durante los cálculos.

2.11 Referencias bibliográficas

[1] A. Nieblas Aguilar, "Estrategia didáctica para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las integrales dobles y su solución usando un software interactivo GeoGebra en estudiantes de diferentes carreras de la universidad autónoma de Sinaloa," 2023.
[2] A. Garcıa, "Métodos para resolver integrales: Leibniz vs Fubini vs Cambio de Variable."
[3] T. de preparación para el Parcial and I. Cálculo III, "INTEGRALES DOBLES."
[4] B. Acevedo Frıas, "Integrales dobles y triples, de lıneas y de superficie," *Departamento de Matemáticas y Estadıstica*, 1993.
[5] J. E. Marsden, A. J. Tromba, and others, "Cálculo vectorial: problemas resueltos," 1993.
[6] S. Cano Casanova and S. Merchán Rubira, "Cálculo," 2015.
[7] J. E. Marsden, A. J. Tromba, and M. L. Mateos, *Cálculo vectorial*, vol. 1. Addison-Wesley Iberoamericana México, 1991.

2.12 Anexos

Resolución de los ejercicios de Áreas Dobles

1. $D = \left\{(x, y) 0 \le x \le 0; \frac{1}{2}x \le y \le 1\right\}$

$$\iint x^2 e^{xy}\, dA$$

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} x^2 e^{xy}\, dy\, dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} x^2 e^{xy}\, dy\, dx$$

$$u = xy \rightarrow du = x\,dy \rightarrow dy = \frac{du}{x}$$

$$\int_{x=0}^{x=2} x^2 \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} e^u\,dy\,dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} x^2 \int_{y=\frac{1}{2}x}^{y=1} e^u \frac{du}{x}\,dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} e^u\,dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^u \Big|_{\frac{x}{2}}^{1} dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^{xy} \Big|_{\frac{x}{2}}^{1} dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^{x(1)} - xe^{x\left(\frac{x}{2}\right)} dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^x - xe^{\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^x\,dx - \int_{x=0}^{x=2} xe^{\frac{x^2}{2}} dx$$

$$Por\ Partes (Integrla\ 1)$$

$$\int_{x=0}^{x=2} xe^x\,dx$$

$$u = x \qquad du = dx$$

$$dv = e^x \qquad v = e^x$$

$$u\,v - \int v\,du$$

$$xe^x - \int e^x\,dx$$

$$xe^x - e^x$$

$$Por\ Sustitucion\ (Integral\ 2)$$

$$-\int_{x=0}^{x=2} x e^{\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$u = \frac{x^2}{2} \quad \rightarrow du = x\, dx \quad \rightarrow dx = \frac{du}{x}$$

$$-\int_{x=0}^{x=2} \cancel{x} e^{u} \frac{du}{\cancel{x}}$$

$$-\int_{x=0}^{x=2} e^{u} du$$

$$e^{u}$$

$$e^{\frac{x^2}{2}}$$

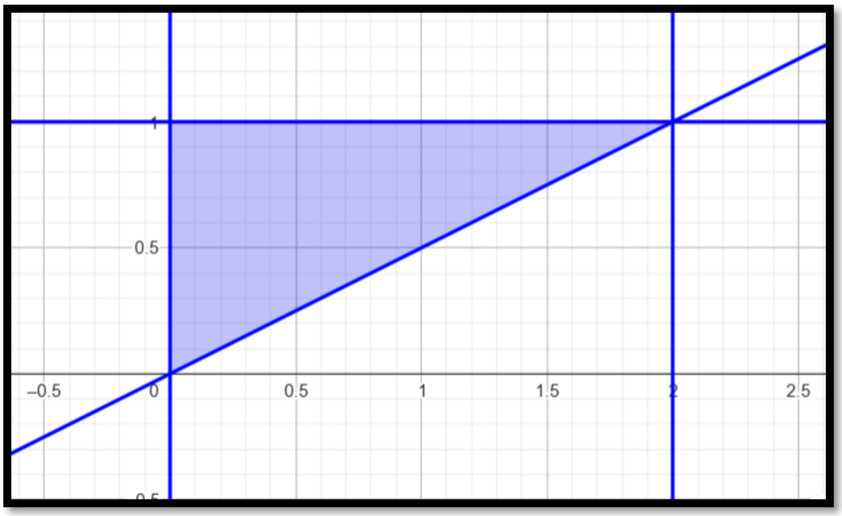
Volvemos a unir los resultados de la integrales y procedemos a evaluar

$$xe^{x} - e^{x} - e^{\frac{x^2}{2}}\Big|_{0}^{2}$$

$$(2)e^{2} - e^{2} - e^{\frac{2^2}{2}} - \left[(0)e^{0} - e^{0} - e^{\frac{0^2}{2}}\right]$$

$$\cancel{2e^{2} - 2e^{2}} - (-2)$$

$$2\, u^{2}$$



2. $D = \{(x, y) - 2 \leq y \leq 3 \,;\, y^2 - 3 \leq x \leq y + 3\}$

$$\iint 3x^2 + y^2 dA$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} 3x^2 + y^2 dx\, dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} 3x^2 + y^2 dx\, dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} 3x^2\, dx + \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} 3x^2 dx \quad dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} 3x^2\, dx + \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} y^2 dx \quad dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} 3 \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} x^2\, dx + y^2 \int_{x=y^2-3}^{x=y+1} dx \quad dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} \frac{\cancel{3}x^3}{\cancel{3}} + xy^2 \Big|_{y^2-3}^{y+1} \quad dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} x^3 + xy^2 |_{y^2-3}^{y+1}\, dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} [(y+1)^3 + (y+1)y^2] - [(y^2-3)^3 + (y^2-3)y^2]\, dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} [\, y^3 + 3y^2 + 3y + 1 \, + y^3 + y^2] - [y^6 - 9y^4 + 27y^2 - 27 + y^4 - 3y^2]\, dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} [\, 2y^3 + 4y^2 + 3y + 1] - [y^6 - 8y^4 + 24y^2 - 27]\, dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} 2y^3 + 4y^2 + 3y + 1 - y^6 + 8y^4 - 24y^2 + 27\, dy$$

$$\int_{y=-2}^{y=3} -y^6 + 8y^4 + 2y^3 - 20y^2 + 3y + 28\, dy$$

$$-\frac{y^7}{7} + 8\frac{y^5}{5} + 2\frac{y^4}{4} - 20\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} + 28y\Big|_{-2}^{3}$$

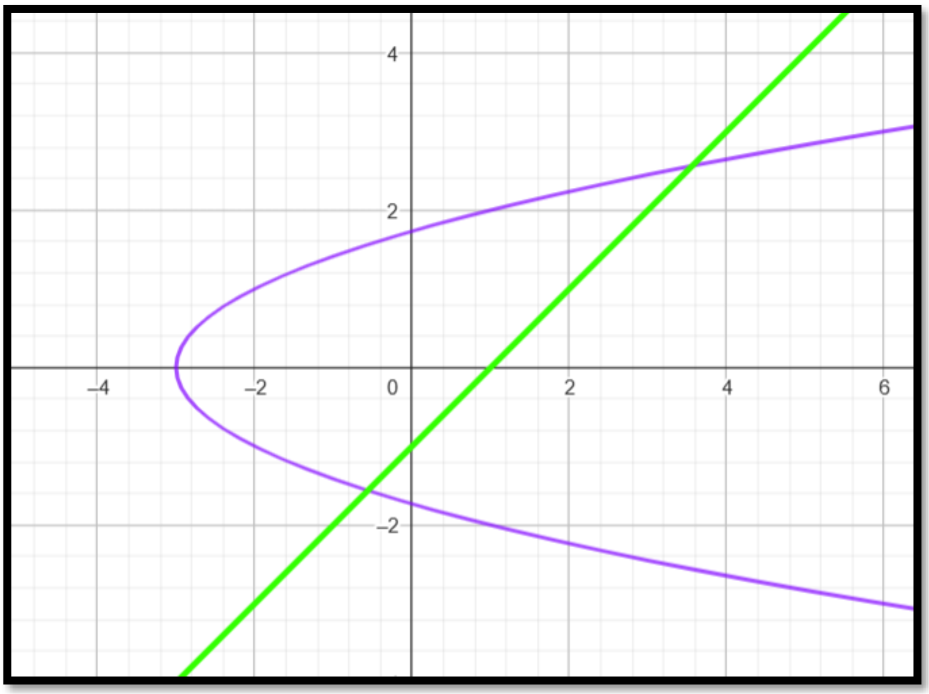
$$\left[-\frac{3^7}{7} + 8\frac{3^5}{5} + 2\frac{3^4}{4} - 20\frac{3^3}{3} + \frac{3 * 3^2}{2} + 28(3)\right]$$

$$-\left[-\frac{(-2)^7}{7} + 8\frac{(-2)^5}{5} + 2\frac{(-2)^4}{4} - 20\frac{(-2)^3}{3} + \frac{3(-2)^2}{2} + 28(3)\right]$$

$$\frac{1203}{35} - \left[-\frac{2260}{105}\right]$$

$$\frac{1205}{35} + \frac{2260}{105}$$

$$\frac{1175}{21}u^2$$



3. Hallar por medio de integrales dobles el área delimitada por las siguientes curvas

$$\boldsymbol{y = x^2 - 5\, ;\, y = -x - 3}$$

$$\iint y\, dA$$

$$x^2 - 5 = -x - 3$$

$$x^2 - 5 + x + 3 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -2$$

$$x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \int_{y=x^2-5}^{y=-x-3} y\, dy\, dx$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \left. \frac{y^2}{2} \right|_{=x^2-5}^{y=-x-3} dx$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \left[\frac{(-x-3)^2}{2}\right] - \left[\frac{(x^2-5)^2}{2}\right] dx$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{9}{2} - \left[\frac{x^4}{2} - \frac{10x^2}{2} + \frac{25}{2}\right] dx$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{9}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{5x^2}{2} - \frac{25}{2}\, dx$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \frac{x^2 + 10x^2}{2} + 3x + \frac{9-25}{2} - \frac{x^4}{2}\, dx$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \frac{11x^2}{2} + 3x - \frac{16}{2} - \frac{x^4}{2}\, dx$$

$$\int_{x=-2}^{x=1} \frac{11x^2}{2} + 3x - 8 - \frac{x^4}{2}\, dx$$

$$\left. \frac{11x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 8x - \frac{x^5}{10} \right|_{-2}^{1}$$

$$\left. \frac{11x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 8x - \frac{x^5}{10} \right|_{-2}^{1}$$

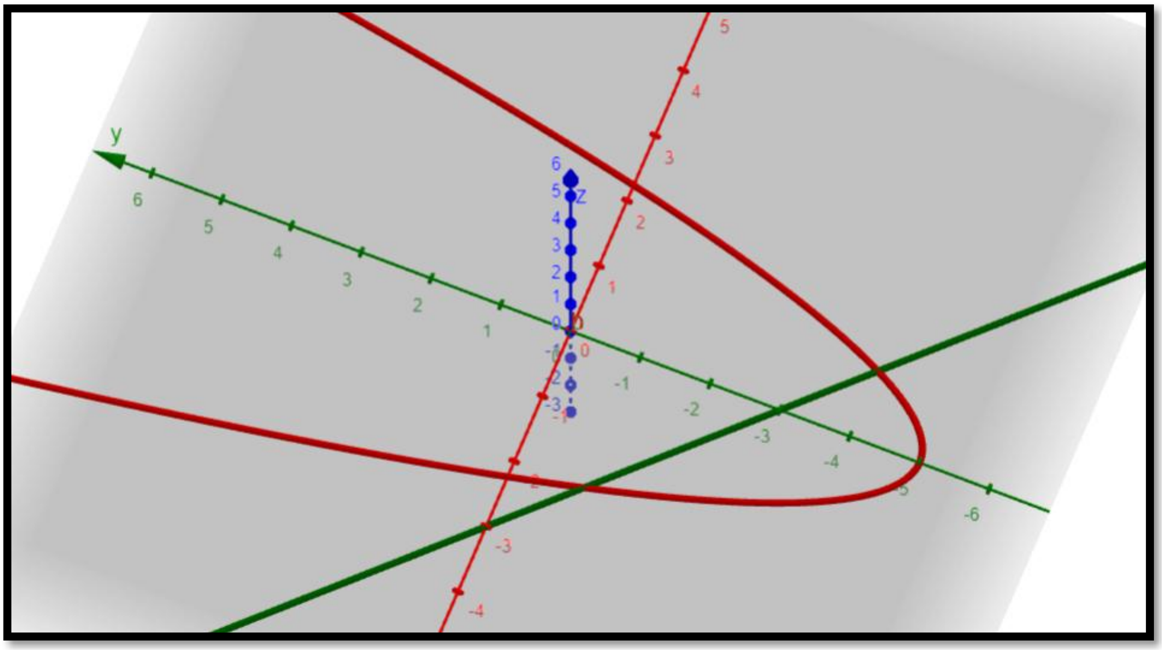
$$\left[\frac{11(1)^3}{6}+\frac{3(1)^2}{2}-8(1)-\frac{(1)^5}{10}\right]-\left[\frac{11(-2)^3}{6}+\frac{3(-2)^2}{2}-8(1)-\frac{(-2)^5}{20}\right]$$

$$-\frac{143}{30}-\left[-\frac{158}{15}\right]$$

$$-\frac{143}{30}+\frac{158}{15}$$

$$\left|-\frac{153}{10}\right|$$

$$15.3\ u^2$$



Ejercicio 1 Calcular el área de la superficie definida por $z = x^2$ sobre el triángulo limitado por $0 \leq y \leq x \;\; y \;\; 0 \leq x \leq 1$

Paso 1: Derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \ , \ \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Paso 2: Integral

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dy\ dx$$

$$A = \iint \sqrt{1 + (2x)^2 + (0)^2}\, dy\, dx$$

$$A = \iint \sqrt{1 + 4x^2}\, dy\, dx$$

$$A = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2}\, dy\, dx$$

$$A = \int_0^x \sqrt{1 + 4x^2}\, dy$$

$$A = \sqrt{1 + 4x^2} \int_0^x dy$$

$$A = \left| \sqrt{1 + 4x^2}\; y \right|_0^x$$

$$A = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} * x\;\; dx$$

$$u = 1 + 4x^2$$

$$du = 8x\; dx$$

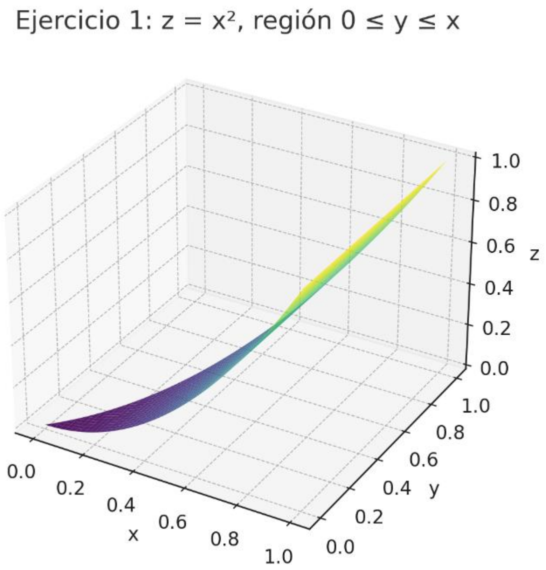
$$dx = \frac{du}{8x}$$

$$A = \frac{1}{8} \int_0^1 \sqrt{u}\;\; du$$

$$A = \frac{1}{8} \left| \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} \right|_0^1$$

$$A = \left[\frac{(1+4(1)^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\right] - \left[\frac{(1+4(0)^2)^{\frac{3}{2}}}{12}\right]$$

$$A = 0.848$$



Ejercicio2 Calcular el área de la superficie $z = y$ sobre la región triangular limitada por $0 \leq x \leq y$, $0 \leq y \leq 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \ , \ \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \ dy \ dx$$

$$A = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{2} \, dx \ dy$$

$$A = \int_0^y \sqrt{2} \, dx$$

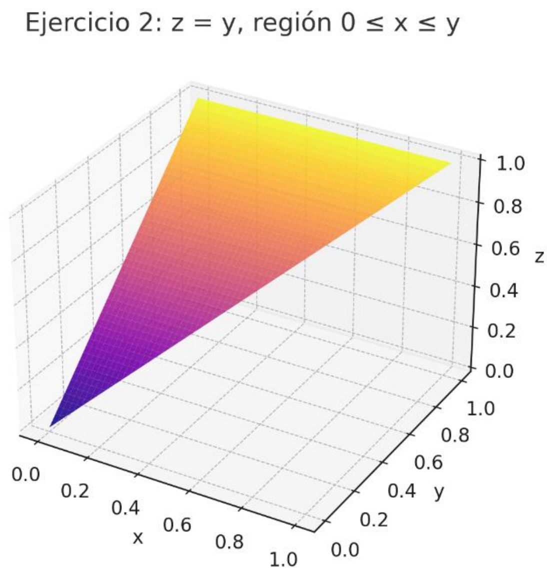
$$A = \sqrt{2}\int_0^y dx$$

$$A = \left|\sqrt{2}\,x\right|_0^y$$

$$A = \int_0^1 \sqrt{2}\,y\,dy$$

$$A = \sqrt{2}\left|\frac{y^2}{2}\right|_0^1$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Ejercicio 3 Calcular el área de la superficie $z = x + y$, sobre el triángulo con vértices en $(0,0), (1,0), (0,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \ , \ \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dy\ dx$$

$$A = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{3}\, dy\, dx$$

$$A = \int_0^{1-x} \sqrt{3}\, dy$$

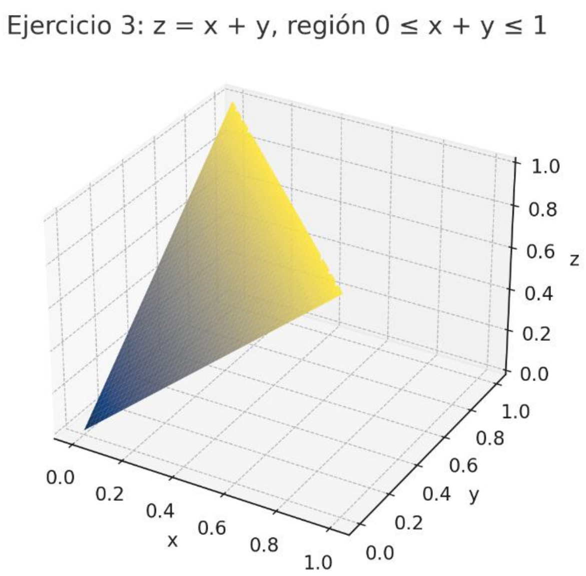
$$A = \sqrt{3}\ \int_0^{1-x} dy$$

$$A = \left|\sqrt{3}\, y\,\right|_0^{1-x}$$

$$A = \int_0^1 \sqrt{3}\ (1 - x)\, dx$$

$$A = \sqrt{3}\left|x - \frac{x^2}{2}\right|_0^1$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$


Ejercicio 3: z = x + y, región 0 ≤ x + y ≤ 1
x
y
z
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0