Lösungsstrategien für NP-schwere Probleme der Kombinatorischen Optimierung

— Übungsblatt 5 —

Walter Stieben (4stieben@inf)
Tim Reipschläger (4reipsch@inf)
Louis Kobras (4kobras@inf)
Hauke Stieler (4stieler@inf)

Abgabe am: 23. Mai 2016

Aufgabe 5.1

Aufgabe 5.2

a)

Laufzeitanalyse

Die Laufzeit des von $\texttt{EXPLORE}(\Phi, d)$ lässt sich mittels Rekurrenzgleichung und Substitutionsmethode bestimmen.

Zunächst die Rekurrenzgleichung in Abhängigkeit von d und n. Die Menge C taucht nicht auf, da sie nicht Teil der Eingabe von $\texttt{EXPLORE}(\Phi, d)$ ist. Dem n wäre also noch ein linearer Faktor hinzuzuzählen, was jedoch für die Laufzeit nicht weiter von Bedeutung ist.

$$T(d, n) = \begin{cases} n & \text{, für } d = 0 \\ n \cdot 3 \cdot T(d-1) & \text{, sonst} \end{cases}$$

Mittels der Sibstitutionsmethode ergibt sich folgende Kette:

$$\begin{aligned} T(d, n) &= n + 3 \cdot T(d-1) \\ &= n + 3 \cdot (n + 3 \cdot T(d-2)) \\ &= n + 3n + 9 \cdot T(d-2) \\ &= 4n + 9 \cdot T(d-2) \\ &= 4n + 9 \cdot (n + 3 \cdot T(d-3)) \\ &= 4n + 9n + 27 \cdot T(d-3) \\ &= 13n + 27 \cdot T(d-3) \\ &= 13n + 27 \cdot (n + 3 \cdot T(d-4)) \\ &= 13n + 27n + 81 \cdot T(d-4) \\ &= 40n + 81 \cdot T(d-4) \qquad (1) \\ &\vdots \\ &= \frac{3^k - 1}{2} + 3^k \cdot T(d-k) \end{aligned}$$

Nach drei Substitutionen lässt sich erkennen, dass der Koeffizient von T stets 3^k (wegen der Folge $3, 9, 27, 81, \ldots$) und der vom n stets $\frac{3^k-1}{2}$ sein kann (wegen der Folge $1, 4, 13, 40, \ldots$).

> Beweise zu den Gleichungen ersparen wir uns hier der einfachheitshalber.

Der Abbruch des Algorithmus' geschieht bei $k = d$. Dadurch ist $T(d-k) = T(d-d) = T(0) = n$ und wir erhalten die finale Laufzeit in der Größenordnung

$$\mathcal{O}\left(\frac{3^d - 1}{2} + 3^d \cdot n\right).$$

b)

Wenn man $d = \frac{n}{2}$ wählt, so erhält und in die Laufzeit aus 2.a) einsetzt, erhält man folgende neue Laufzeit:

$$\begin{aligned}
\frac{3^{n/2} - 1}{2} + 3^{n/2} \cdot n &= 3^{n/2} \cdot 0,5 - \left(\frac{1}{2}\right) + 3^{n/2} \cdot n \qquad \text{(Die } \mathcal{O}\text{-Notation ignoriert Konstanten)} \\
&= 3^{n/2} + 3^{n/2} \cdot n \\
&= \left(\sqrt{3}\right)^n + \left(\sqrt{3}\right)^n \cdot n \\
&= (n+1) \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n
\end{aligned}$$

> Die Notation $n/2$ statt $\frac{n}{2}$ wird zwar von Mathematikern und Theoretikern oftmals abgelehnt, wird hier jedoch zugunsten der Lesbarkeit verwendet.

Somit ist die Laufzeit von `EXPLORE`(Φ, d) mit $d = \frac{n}{2}$ in $\mathcal{O}\left((n+1) \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Um jedoch alle möglichen Belegungen durchzugehen bedarf es $\frac{2^n}{\frac{n}{2}} = \frac{2^{n+1}}{n}$ Aufrufe. Jeder Aufruf von `EXPLORE`(Φ, d) geht $d = \frac{n}{2}$ Belegungen durch, wodurch man nicht volle 2^n mögliche Belegungen benötigt.

Die Anzahl multipliziert mit der Anzahl an Schritten aus vorheriger Rechnung ergibt die Gesamtlaufzeit von $\mathcal{O}\left(\frac{2^{n+1}}{n} \cdot (n+1) \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Somit haben wir eine Laufzeit der Form $\mathcal{O}\left(p(n) \cdot \left(\sqrt{3}\right)^n\right)$ mit $p(n) = \frac{2^{n+1}}{n} \cdot (n+1)$.