Lösungsstrategien für NP-schwere Probleme der Kombinatorischen Optimierung

— Übungsblatt 8 —

Walter Stieben (4stieben@inf)
Tim Reipschläger (4reipsch@inf)
Louis Kobras (4kobras@inf)
Hauke Stieler (4stieler@inf)

Abgabe am: 20. Juni 2016

Aufgabe 8.1

Zunächst sei bemerkt, dass $c(T) \leq c(H^*)$ gilt, alle Kanten in T haben weniger oder gleich viele Kosten wie die aus H^*.

Beweis: T ist ein *minimaler* Spannbaum, man kann also keine Kanten weglassen und trotzdem einen zusammenhängenden Graphen haben und die vorhandenen Kanten sind diejenigen mit minimalem Gewicht, womit $c(T) \not> c(H^*)$ gilt, also auch $c(T) \leq c(H^*)$ folgt.
Durch die Hinzunahme von M gibt es einen Eulerkreis für das Δ–TSP, somit ist $c(T^+) = c(H) = c(T) + c(M)$. Aus $(*)$ wissen wir, dass $c(M) \leq \frac{1}{2} \cdot c(H^*)$ gilt. Da alle Kanten aus T^+ in H^* enthalten sind gilt für T^+:

$$c(T^+) = c(H) = c(T) + c(M) \leq c(H^*) + \frac{1}{2} \cdot c(H^*) = \frac{3}{2} \cdot c(H^*)$$

Insgesamt gilt also $c(H) \leq \frac{3}{2} \cdot c(H^*)$.

□

Beweis für $(*)$:
Ein Matching erfüllt hier insbesondere die folgenden Eigenschaften

- Es gibt immer ein perfektes Matching (siehe Fußnote vom Aufgabenblatt).
- Es kann nur maximal $\frac{1}{2}V$ viele Matchingkanten geben, weil G' nur maximal so viele Knoten wie G bzw. T haben kann und jeder Knoten in G' laut Definition von Matchings nur von einer Matchingkante getroffen werden darf und eben zwei Knoten gleichzeitig von einer Matchingkante getroffen werden.
- Da die Dreiecksungleichung gilt, kann keine Matchingkante länger sein, als der Weg zwischen den beteiligten Knoten der Matchingkanten in T.
- Es wird ein Matching mit minimalen Kosten bestimmt.
- Es folgt direkt $c(M) \leq \frac{1}{2} \cdot c(H^*)$.

Aufgabe 8.2

Algorithm 1 Approx–3D–Matching

repeat
  Nehme erstes Tripel $t \in T$ in M auf
  for alle $t_i \in T$ **do**
    if $t \cap t_i \neq \emptyset$ **then**
      lösche t aus T
    end if
  end for
until $T = \emptyset$

Um zu zeigen, dass für das mit diesem Algorithmus gefundene M die Ungleichung $|M| \geq \frac{1}{3} \cdot |M^*|$ gilt machen wir folgende Annahme:

Wir betrachten 4 Tripel aus T und nehmen an, dass 3 dieser Tripel Elemente von M^* sind. Wir nehmen weiterhin an, dass das übrig gebliebene Tripel jeweils ein Element mit jedem der 3 Tripel aus M^* gemeinsam hat.
Nehmen wir nun das Tripel in M auf, das nicht in M^* ist, so streichen wir genau die 3 Tripel, die Element M^* sind von der optimalen Lösung. Selbst wenn es mehrere optimale Lösungen gibt (also mehrere M^* mit gleichen Betrag), streichen wir aus jeder dieser optimalen Lösungen genau 3.

Wir können offensichtlich nur maximal 3 Tripel jeder beliebigen optimalen Lösung M^* streichen, da die 3 Elemente aus unserem schlecht gewählten Tripel maximal in 3 unterschiedlichen Tripeln von M^* vorkommen können. Das liegt daran, dass sich die Tripel aus M^* nicht überschneiden dürfen, da es sonst keine gültige Lösung wäre und somit kann ein Element unseres schlecht gewählten Tripels immer nur genau in einem Tripel aus M^* vorkommen. Wenn wir für unsere Annahme nun $|M|$ und $|M^*|$ vergleichen, dann haben wir in M ein Tripel und in M^* 3 Tripel. Demnach ist $|M| = \frac{1}{3} \cdot |M^*|$ und wir sind noch in der Grenze.

Der beschriebene Fall ist offensichtlich der worst-case, denn wenn unser gewähltes Tripel nur 2 Tripel aus M^* schneidet, erhalten wir $|M| = 1$, $|M^*| = 2$ und somit $|M| = \frac{1}{2} \cdot |M^*|$, womit wir noch in der Grenze ist. Schneidet das schlecht gewählte Tripel nur ein Element aus M^*, muss das gewählte Tripel in einer anderen optimalen Lösung M_2^* sein, da man die 2 Tripel offensichtlich austauschen kann. Allerdings würde dieser Fall der Annahme widersprechen.

Somit findet unser Algorithmus immer Mengen M, für die gilt $|M| \geq \frac{1}{3}|M^*|$.