Lösungsstrategien für NP-schwere Probleme der Kombinatorischen Optimierung

— Übungsblatt 3 —

Walter Stieben (4stieben@inf)
Tim Reipschläger (4reipsch@inf)
Louis Kobras (4kobras@inf)
Hauke Stieler (4stieler@inf)

Abgabe am: 2. Mai 2016

Aufgabe 3.1

Aufgabe 3.1.1

Aufgabe 3.1.2

Aufgabe 3.2

a)

Wenn $\forall v \in D : grad(v) = n > k$ gelten soll, dann gibt es zu viele Kanten ($(n)^2$ viele), als dass man diese durch k viele Knoten überdecken könnte. Mit k Knoten mit $grad(v) = n$ kann man maximal $(n) \cdot k$ Kanten überdecken.

Bildet D eine $|D|$-Clique in G, so ist $k = |D| - 2$ und bildet eine Ausnahme, da man mit k vielen Knoten zwar rechnerisch genug Kanten abdecken könnte, jedoch zwei Knoten in der $|D|$-Clique übrig bleiben, die gemeinsam wieder eine Kante hätten. Diese Kante würde nicht abgedeckt werden.

Wenn also $|D| > k$ gilt, gibt es keine Knotenüberdeckung in G.

b)

Hinrichtung
TODO: Hinrichtung machen.

Rückrichtung
Angenommen G' hat eine Knotenüberdeckung mit k' Knoten.
Fügt man die in D enthaltenen Knoten zu G' hinzu, so hat G genau k viele Knoten, da $k' = k - |D| \Leftrightarrow k = k' + |D|$ gilt. Alle hinzugefügten Knoten nimmt man in die Knotenüberdeckung von G mit auf, somit sind alle zu diesen "neuen" Knoten inzidenten Kanten auch in der Knotenüberdeckung enthalten und es gibt keine Kanten, die nicht getroffen werden.
Somit hat G eine Knotenüberdeckung mit k Knoten wenn G' eine mit k' vielen Knoten hat.

c)

Im folgenden wird angenommen, dass G' genau $k' \cdot (k+1)$ viele Knoten und eine k' Knotenüberdeckung besitzt. Hat G' weniger Knoten, so kann man welche Hinzufügen, ohne, dass sich etwas ändert.

Behauptung:
Die Knoten der k' Knotenüberdeckung können keine weiteren Kanten aufnehmen.

Beweis:
Jeder der k' vielen Knoten in der Überdeckung hat genau k viele zu ihm inzidente Kanten in G'. Dadurch gibt es neben diesen Knoten noch $k' \cdot k$ weitere Knoten, die mit den k' vielen Knoten der Überdeckung die insgesamt $k \cdot k' + k' = k' \cdot (k+1)$ viele Knoten in G' ergeben.

Angenommen einer der k' vielen Knoten hat mehr als k Kanten, dann wäre er in D und nicht mehr in G', wodurch G' keine $k' \cdot (k+1)$ Knoten mehr hätte. Angenommen einer der k' vielen Knoten hat weniger als k viele Kanten, dann müsste ein anderer Knoten v aus der Überdeckung $k+1$ viele Kanten besitzen, damit G' weiterhin $k' \cdot (k+1)$ Knoten und eine k' Knotenüberdeckung besitzt. Dadurch wäre aber v in D und nicht mehr in G', wodurch G' keine $k' \cdot (k+1)$ vielen Knoten mehr hätte.
Es hat also jeder Knoten der k' Knotenüberdeckung in G' genau k viele zu ihm inzidente Kanten.

Behauptung:
Enthält G' mindestens $k' \cdot (k+1) + 1$ Knoten, so gibt es keine Überdeckung in G und G'.

Beweis:
Angenommen G' enthält $k' \cdot (k+1) + n$ Knoten, dann folgt aus obigen, dass die zusätzlichen Knoten $v_1, \ldots, v_n$ jeweils nicht mit einem Knoten u aus der Knotenüberdeckung in G' verbunden sein dürfen (da u sonst $k+1$ inzidente Kanten besäße und nicht in G' wäre, s.o.).
Daher muss er mit einem Knoten w verbunden sein, der nicht in der Knotenüberdeckung aber noch in G' ist. Folglich gibt es eine Kante (w, v_i) mit $1 \leq i \leq n$, welche weder durch die Knotenüberdeckung in G', noch durch die in G getroffen wird.

In G' kann (w, v_i) nicht getroffen werden, da sich dann die Anzahl der Knoten in der Überdeckung ändern würde, die jedoch durch $k' = k - |D|$ fest gegeben ist.
In G kann (w, v_i) aber auch nicht getroffen werden, da jeder zusätzliche Knoten v_i nicht mit einem Knoten der Überdeckung in G, sondern nur mit "unbeteiligten" Knoten verbunden ist. Nimmt man also jeden Knoten v_i mit in die Überdeckung aus G mit auf, erhöht sich dadurch die Größe der Überdeckung für jeden zusätzlichen Knoten, womit die minimale Überdeckung in G die Größe $k+n$ hätte.

Dadurch ist es nicht möglich, dass G' mehr als $k' \cdot (k+1)$ Knoten enthält und G eine Überdeckung mit der Größe $\leq k$ besitzt.

$\square$

d)

Man kann beim Einlesen von $E(G)$ für jeden Knoten dessen Grad speichern indem man für jede Kante den Grad der beiden Knoten jeweils inkrementiert. Dies ist mit indizierten Knoten in $\mathcal{O}(1)$ machbar, ansonsten in $\mathcal{O}(|V(G)|)$.
Mit dem gespeicherten Grad für jeden Knoten kann man durch einmaliges iterieren über die Knotenmenge $V(G)$ die Menge D erzeugen. Das entspricht einer Laufzeit von $\mathcal{O}(|V(G)|)$.
Einlesen, speichern und D erzeugen ist also in $\mathcal{O}(|V(G)|)$ möglich.

Auch das löschen von D aus G geht schnell, denn man kann in $\mathcal{O}(|V(G)|)$ die Knoten und in $\mathcal{O}(|E(G)|)$ die Kanten löschen. Speichert man alle Mengenkardinalitäten zwischen (also von $G, V(G), D$), was kaum Zeit kostet bei jeder Änderung die Kardinalität zu aktualisieren, so kann man in konstanter Zeit prüfen, ob $|V(G')| > k' \cdot (k+1)$ gilt.