

## ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

УДК 519.248, 519.176

СВЯЗНОСТЬ ПЛАНАРНОГО ГРАФА  
С ВЫСОКОНАДЁЖНЫМИ РЁБРАМИ

Г. Ш. Цицианвили, А. С. Лосев

*Институт прикладной математики ДВО РАН, г. Владивосток, Россия*

E-mail: Guram@iam.dvo.ru, A.S.Losev@yandex.ru

Приведены результаты вычислительных экспериментов по определению вероятности несвязности планарных графов с высоконадёжными рёбрами. Полученные результаты подтверждают теоретическую, не более чем кубическую, оценку сложности проводимых вычислений, основанных на рассмотрении двойственных графов и построении асимптотических соотношений. Приведены результаты сравнения используемого метода с методом Монте-Карло, которые свидетельствуют о существенном сокращении числа арифметических операций и времени счета.

**Ключевые слова:** вероятность связности, двойственный граф, минимальный разрез.

## Введение

В работе [1] доказаны асимптотические формулы вычисления вероятности несвязности планарного графа с высоконадёжными рёбрами, обобщающие известную формулу Буртина — Питтеля [2]. Параметрами доказанного соотношения являются минимальное число  $D$  рёбер в разрезах и число  $C$  разрезов с  $D$  рёбрами. Рассмотрение двойственных графов [3], в которых разрезы исходного графа порождают циклы, и использование известных алгоритмов перечисления циклов в произвольных графах [4] позволили сократить количество арифметических операций и получить сложность вычисления констант  $D$ ,  $C$  не более чем кубическую от числа граней графа, а в частных случаях линейную.

В настоящей работе рассмотрены отдельные случаи планарных графов с минимальным числом рёбер в разрезах  $D = 2, 3, 4, 5$ , в том числе нанотрубка, имеющая прикладное значение. Для рассмотренных графов построены двойственные графы, точно вычислены константы  $D$ ,  $C$  и получены асимптотические соотношения для вероятности несвязности. На основе полученных соотношений проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие быстроедействие предложенного алгоритма по сравнению с методом Монте-Карло.

## 1. Основные результаты

Рассмотрим неориентированный связный граф  $G$  с конечным множеством вершин  $U$  и рёбер  $W$ . Под разрезом графа понимается некоторое подмножество рёбер, после удаления которых граф перестаёт быть связным. Обозначим через  $d(L)$  объём разреза  $L$  (число его рёбер),  $D$  — минимальный объём разреза,  $C$  — число разрезов объёма  $D$ . Пусть рёбра графа  $G$  отказывают независимо с вероятностями  $h$ .



**Теорема 1.** Для вероятности несвязности графа выполняется соотношение

$$\bar{P} \sim Ch^D, \quad h \rightarrow 0. \quad (1)$$

Данная теорема 1 является обобщением известной асимптотической формулы Буртина — Питтеля [2] и доказана в [1].

Предположим, что граф  $G$  является планарным и каждое ребро в нём принадлежит какому-либо простому циклу. Ребра графа разбивают плоскость на грани. Сопоставим графу  $G$  двойственный граф  $G^*$ . Каждой грани  $z$  графа  $G$  соответствует вершина  $z^*$  графа  $G^*$ , каждому ребру  $w$  графа  $G$ , принадлежащему граням  $z_1, z_2$ , соответствует ребро  $w^*$ , соединяющее вершины  $z_1^*, z_2^*$ . Нас будут интересовать разрезы минимального объёма, а значит, двойственные им циклы минимальной длины.

Обозначим  $m$  число рёбер,  $n$  — число граней (включая внешнюю) в планарном графе  $G$ . Пусть элементы  $a_{ij}$  матрицы  $A$  определяют число рёбер, содержащихся в пересечении граней  $z_i \cap z_j$  ( $i \neq j$ ) графа  $G$ ,  $a_{ii} = 0$ . Элементы степени  $A^l$ ,  $l > 1$ , матрицы  $A$  обозначим  $a_{ij}^{(l)}$ . В работе [4] получены формулы вычисления  $c_k$  — числа простых циклов длины  $k$ ,  $k = 3, 4, 5$ , в двойственном графе, а в работе [1] — формула для  $c_2$ :

$$c_2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}(a_{ij} - 1), \quad c_3 = \frac{1}{6} \text{tr} A^3, \quad c_4 = \frac{1}{8} \left( \text{tr} A^4 - 2m - 2 \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_{ij}^{(2)} \right),$$

$$c_5 = \frac{1}{10} \left( \text{tr} A^5 - 5 \text{tr} A^3 - 5 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} - 2 \right) a_{ij}^{(3)} \right).$$

Из формулы Эйлера [5] в работе [1] получены соотношения

$$D \leq 5, \quad D = \min(k : 2 \leq k \leq 5, c_k > 0), \quad C = c_D. \quad (2)$$

Из вышеизложенного следует, что вычисление асимптотических констант  $D, C$  произвольных планарных графов путём перехода к двойственным графам и с использованием известных алгоритмов перечисления их циклов имеет сложность не более чем кубическую, что значительно меньше, чем в прямых алгоритмах счёта. В частных случаях, когда любые две внутренние грани имеют не более одного общего ребра, сложность вычислений становится линейной. Последнее часто встречается в приложениях и имеет практическую значимость, в частности при создании и изучении различных наноматериалов, в основе которых лежат гексагональные структуры [3]. Одно из таких соединений рассмотрено далее в примере 2.

## 2. Вычислительный эксперимент

**Пример 1.** Приведём примеры планарных графов, минимальное число рёбер в разрезах которых  $D = 2, 3, 4, 5$ . На рис. 1–4 построены графы  $G_1, G_2, G_3, G_4$  с  $D = 2, 3, 4, 5$  соответственно и двойственные к ним графы  $G_1^*, G_2^*, G_3^*, G_4^*$ .

Из формулы (2) нетрудно определить, что

$$C_{G_1} = 4, \quad C_{G_2} = 7, \quad C_{G_3} = 8, \quad C_{G_4} = 12,$$

где  $C_{G_i}$  имеет смысл константы  $C$  для графа  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . В свою очередь, из теоремы 1 следует:

$$\bar{P}_{G_1} \sim 4h^2, \quad \bar{P}_{G_2} \sim 7h^3, \quad \bar{P}_{G_3} \sim 8h^4, \quad \bar{P}_{G_4} \sim 12h^5, \quad h \rightarrow 0.$$



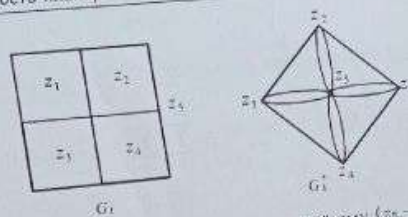


Рис. 1. Пример графа с  $D = 2$  и двойственный ему ( $z_5$  — внешняя грань)

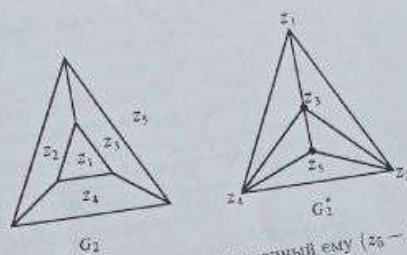


Рис. 2. Пример графа с  $D = 3$  и двойственный ему ( $z_7$  — внешняя грань)

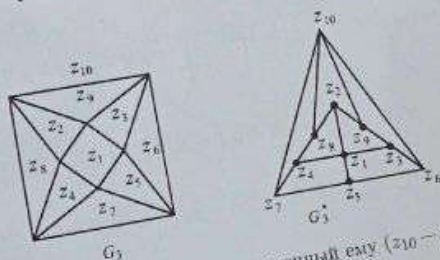


Рис. 3. Пример графа с  $D = 4$  и двойственный ему ( $z_{20}$  — внешняя грань)

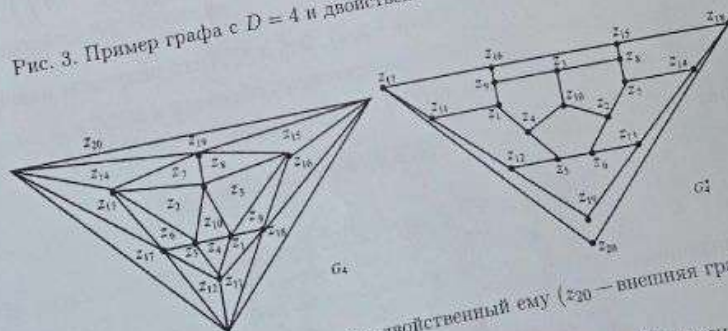


Рис. 4. Пример графа с  $D = 5$  и двойственный ему ( $z_{20}$  — внешняя грань)

Сравним результаты вычисления вероятности несвязности  $\bar{P}$  по асимптотической формуле и методом Монте-Карло  $\bar{P}^*$  с числом реализаций  $10^6$ . Положим  $h = 0,05$ ,



тогда

$$\bar{P}_{G_1} \approx 0,01, \quad \bar{P}_{G_1}^* \approx 0,009982, \quad \left| \frac{\bar{P}_{G_1}^*}{\bar{P}_{G_1}} - 1 \right| \approx 0,0018,$$

$$\bar{P}_{G_2} \approx 0,000875, \quad \bar{P}_{G_2}^* \approx 0,000821, \quad \left| \frac{\bar{P}_{G_2}^*}{\bar{P}_{G_2}} - 1 \right| \approx 0,061714,$$

$$\bar{P}_{G_3} \approx 0,00005, \quad \bar{P}_{G_3}^* \approx 0,000048, \quad \left| \frac{\bar{P}_{G_3}^*}{\bar{P}_{G_3}} - 1 \right| \approx 0,041667.$$

В результате проведённых вычислений время счёта методом Монте-Карло составило несколько часов, а по асимптотическому соотношению — не более минуты, что подтверждает полученную теоретическую оценку о том, что вычисление констант имеет не более чем кубическую сложность. Полученные результаты несложно распространить на произвольные планарные графы с соответствующим числом рёбер в разрезах.

**Пример 2.** Аналогичным образом определим вероятность несвязности  $\bar{P}$  нанотрубки, которая получается склеиванием гексагональной решётки по противоположным сторонам. Данное соединение является основным элементом в различных наноструктурах и имеет прикладное значение [6].

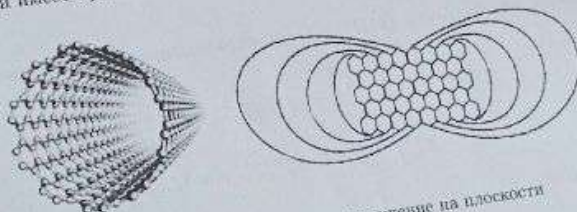


Рис. 5. Нанотрубка и её расположение на плоскости

Из формул (1), (2) следует

$$D = 2, \quad C = 18, \quad \bar{P} \sim 18h^2, \quad h \rightarrow 0.$$

Положим  $h = 0,005$  и проведём вычислительный эксперимент, аналогичный описанному в примере 1. Имеем

$$\bar{P} \approx 0,00045, \quad \bar{P}^* \approx 0,00044, \quad \left| \frac{\bar{P}^*}{\bar{P}} - 1 \right| \approx 0,02272.$$

В результате эксперимента подтверждена линейная оценка сложности вычисления констант  $D, C$ . В итоге время счёта вероятности несвязности нанотрубки методом Монте-Карло составило чуть более суток, что в несколько сотен раз больше, чем по асимптотическому соотношению.

Полученные формулы определения параметров планарного графа на основе построения двойственных графов существенно облегчают задачу в вычислительном плане, что подтверждается расчётами. А построение двойственного графа в обход традиционным подходам существенно уменьшает оценку сложности вычисления вероятности несвязности произвольных планарных графов и имеет не более чем кубическую