УДК 519.24, 51-74

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО НЕТОЧНЫМ НАБЛЮДЕНИЯМ

Оценка параметров дифференциальных уравнений

Г. Ш. Цициашвили[*], М. А. Осипова[*,]**

**Институт прикладной математики ДВО РАН*
*******Дальневосточный федеральный университет*

Поступила в редакцию __.__.20__ г.

Аннотация. В данной работе решена задача оценки параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка по неточным наблюдениям на коротком временном интервале. Речь идет о системах дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной (о нормальных системах), у которых число параметров совпадает с числом уравнений, с заданными начальными условиями. По аналогии с линейным регрессионным анализом на рассматриваемом отрезке времени выбирается достаточно большое число наблюдений и оцениваются значения функций, стоящие в правых частях нормальной системы уравнений, и значения их производных в начальный момент времени. По аналогии с методом моментов по оценкам значений функций и ее производных определяются неизвестные параметры исходной системы дифференциальных уравнений. В работе исследуется свойства полученных оценок и при определенных условиях, накладываемых на шаг разбиения временного отрезка, доказывается их асимптотическая несмещенность и состоятельность при увеличение числа наблюдений. Для двух частных случаев были проведены вычислительные эксперименты и их результаты продемонстрированы в работе.

Предложенный в работе алгоритм оценивания параметров системы обыкновенных дифференциальных уравнений по неточным детерминированным наблюдениям, в отличии от классических оптимизационных алгоритмов, позволяет оценить скорость сходимости полученных оценок к оцениваемым параметрам. А рассмотрение малого интервала временного наблюдения дает возможность построить процедуру планирования эксперимента. Наряду с системами обыкновенных дифференциальных уравнений предлагаемый алгоритм может быть применен и к системам уравнений в частных производных, что планируется реализовать авторами в дальнейшем.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, линейный регрессионный анализ, теорема существования и единственности, теорема о неявной функции; метод моментов.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оценки параметров системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений по неточным детерминированным наблюдениям с помощью известных оптимизационных алгоритмов решена в работах [1], [2]. Альтернативный подход для оценки параметров детерминированной рекуррентной последовательности, наблюдаемой со случайными аддитивными и мультипликативными ошибками, основанный на соотношениях между средними по траектории и их аппроксимации по неточным наблюдениям предложен в [3], [4].

Преимуществом первого подхода является возможность использования известных оптимизационных алгоритмов, а недостатком — отсутствие оценок скорости сходимости к оцениваемым параметрам. Преимуществом второго подхода является наличие теоретических оценок скорости сходимости к оцениваемым параметрам, а недостатком - необходимость установления предельных циклов или предельных распределений у рекуррентных последовательностей. При всех различиях в этих подходах общим является тот факт, что с увеличением длины отрезка наблюдения точность оценок повышается и при определенных условиях может стремиться к нулю. В то же время интересной является задача оценки параметров на малом интервале наблюдений, что тесно связано с оптимизационными методами планирования эксперимента (см., например, [5], [6]).

В настоящей работе эта задача решается для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом оценка параметров этой системы по неточным наблюдениям решается в предположении, что на относительно коротком отрезке можно проводить большое число наблюдений. Для оценки параметров используется метод линейного регрессионного анализа [6] применительно к функции регрессии, слабо отклоняющейся от исходной функции в малой окрестности наблюдаемого момента времени. Этот метод основан на минимизации среднеквадратичного отклонения последовательности наблюдений от линейной функции регрессии с оптимизируемыми значениями коэффициентов регрессии. При этом подбирается такая зависимость между числом наблюдений и интервалом между соседними наблюдениями, чтобы возникающая погрешность определения параметров стремилась к нулю при устремлении числа наблюдений к бесконечности. В работе также используется теорема о неявной функции, позволяющая установить, что полученные оценки параметров являются состоятельными в зависимости от числа наблюдений. На основе полученных результатов были проведены вычислительные эксперименты.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений при фиксированных значениях параметров $\beta_i = \beta_i^0$, $i = \overline{1,m}$,

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1,\ldots,x_m,\beta_1^0,\ldots,\beta_m^0),\ i=\overline{1,m}, \quad (1)$$

где $x_1 = x_1(t),\ldots,x_m = x_m(t)$ — некоторые функции. В [7] сформулирована и доказана теорема существования и единственности решения этой системы.

Теорема 1. *Пусть функции $F_i = F_i(x_1,\ldots,x_m,\beta_1^0,\ldots,\beta_m^0)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial F_i}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,m}$, в прямоугольном параллелепипеде*

$$Q = \{(x_1,\ldots,x_m)\in R^m : |x_i - x_i^0| \le a_i,\ i=\overline{1,m}\}.$$

Тогда существует отрезок $[t_0 - r, t_0 + r]$, на котором система уравнений (1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_i(t_0) = x_i^0$, $i=\overline{1,m}$.

Замечание 1. *Из теоремы Вейерштрасса для функций непрерывных на компакте следует, что функции $x_i(t)$, $i=\overline{1,m}$, на отрезке $[t_0 - r, t_0 + r]$ (непрерывность следует из дифференцируемости) и функции $\left|F_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right|$, $i=\overline{1,m}$, на множестве Q (в силу непрерывности сомножителей) достигают своих наибольших конечных значений C_i.*

Обозначим

$$F_i(M_0) = F_i^0,\ i=1,\ldots,m,$$
$$M_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0,\beta_1^0,\ldots,\beta_m^0),$$
$$M_0^* = (x_1^0,\ldots,x_m^0,F_1^0,\ldots,F_m^0,\beta_1^0,\ldots,\beta_m^0),$$
$$G_i = G_i(x_1,\ldots,x_m,f_1,\ldots,f_m,\beta_1,\ldots,\beta_m) = F_i(x_1,\ldots,x_m,\beta_1,\ldots,\beta_m) - f_i,$$

и рассмотрим систему уравнений

$$G_i = 0,\ i=1,\ldots,m. \quad (2)$$

В [8] сформулированы условия, при которых систему (2) можно разрешить относительно переменных $\beta_1,\ldots,\beta_m$.

Теорема 2. *Если функции G_i, $i=\overline{1,m}$, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки M_0^* и якобиан*

$$\left.\frac{\partial(G_1,\dots,G_m)}{\partial(\beta_1,\dots,\beta_m)}\right|_{M_0^*}\neq 0, \qquad (3)$$

то существуют окрестности U, V, W *точек* $(x_1^0,\dots,x_m^0)$, $(F_1^0,\dots,F_m^0)$, $(\beta_1^0,\dots,\beta_m^0)$, *соответственно, такие, что система уравнений (2) однозначно разрешима в окрестности* $U\times V\times W$ *точки* M_0^* *относительно переменных* $\beta_1,\dots,\beta_m$. *При этом, если* $\beta_i = g_i(x_1,\dots,x_m, f_1,\dots, f_m)$, $i=\overline{1,m}$, — *указанное решение, то все функции* g_i *непрерывно дифференцируемы в окрестности* $U\times V$ *и* $\beta_i^0 = g_i(x_1^0,\dots,x_m^0,F_1^0,\dots,F_m^0)$.

Замечание 2. *При выполнении условий теоремы 2 функции* $g_i, i=1,\dots,m$, *непрерывны в точке* $(x_1^0,\dots,x_m^0,F_1^0,\dots,F_m^0)$.

2. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим дифференциальное уравнение при фиксированном значении параметра $\beta=\beta_0$

$$\frac{dx}{dt} = F(x,\beta_0) \qquad (4)$$

с начальным условием $x(0)=x_0$, полагая, что функция $F(x,\beta)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0,\beta_0)$ и $\left.\frac{\partial F}{\partial\beta}\right|_{M_0}\neq 0$. Пусть известны неточные наблюдения $y(t)=x(t)+\varepsilon(t)$ за состоянием $x(t)$ в моменты $t=kh, k=0,\pm1,\dots,\pm n, hn\le r$. Обозначим

$$\varepsilon_k=\varepsilon(kh),\ x_k=x(kh),\ y_k=y(kh)=x_k+\varepsilon_k,$$
$$F_0=F(x_0,\beta_0)$$

и предположим, что $\varepsilon_k, k=0,\pm1,\dots,\pm nh,$ — совокупность независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией σ^2. Ставится задача оценки параметра β_0 дифференциального уравнения (4) по этим наблюдениям.

Решение этой задачи проводится в два этапа. Сначала строятся с использованием модификации метода наименьших квадратов оценки $\bar{x}_0, \bar{F}_0$ и исследуется их сходимость к оцениваемым параметрам x_0, F_0. Затем по аналогии с методом моментов строится оценка $\bar{\beta}_0$ и исследуется ее сходимость к оцениваемому параметру β_0.

Обозначим

$$\bar{x}_0=\frac{\sum_{k=-n}^{n} y_k}{2n+1},\quad \bar{F}_0=\frac{\sum_{k=-n}^{n} y_k kh}{\sum_{k=-n}^{n}(kh)^2}. \qquad (5)$$

Теорема 3. *Пусть* $h=n^{-\alpha}$. *Тогда при* $\alpha>1$ *оценка* $\bar{x}_0$ *являются асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой параметра* x_0. *Оценка* $\bar{F}_0$ *является асимптотически несмещенной оценкой параметра* F_0. *При* $1<\alpha<3/2$ *оценка* $\bar{F}_0$ *является состоятельной оценкой* F_0.

Доказательство. Обозначим

$$\tilde{y}_k = x_0+F_0kh+\varepsilon_k,$$

$$\tilde{x}_0=\sum_{k=-n}^{n}\frac{\tilde{y}_k}{2n+1},\quad \tilde{F}_0=\frac{\sum_{k=-n}^{n}\tilde{y}_k kh}{\sum_{k=-n}^{n}(kh)^2}.$$

Оценки $\tilde{x}_0, \tilde{F}_0$ получены методом наименьших квадратов для коэффициентов x_0, F_0 линейной регрессии и удовлетворяют следующим соотношениям

$$M\tilde{x}_0=x_0,\ M\tilde{F}_0=F_0,$$

$$D\tilde{x}_0=\frac{\sigma^2}{2n+1},\ D\tilde{F}_0=\frac{\sigma^2}{\sum_{k=-n}^{n}(kh)^2}. \qquad (6)$$

В свою очередь, почти наверное выполняются равенства

$$\bar{x}_0-\tilde{x}_0=\frac{\sum_{k=-n}^{n}(\bar{y}_k-\tilde{y}_k)}{2n+1},$$

$$\bar{F}_0-\tilde{F}_0=\frac{\sum_{k=-n}^{n}(\bar{y}_k-\tilde{y}_k)kh}{\sum_{k=-n}^{n}(kh)^2}. \qquad (7)$$

Причем разности $\bar{y}_k - \tilde{y}_k = x_k - x_0 - F_0 kh$, $k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ являются детерминированными величинами.

Из замечания 1 следует существование числа C, удовлетворяющего неравенству

$\sup\limits_{|t|\le nh} |x''(t)| = \sup\limits_{|t|\le nh} \left| \frac{\partial F(x,\beta_0)}{\partial x} F(x,\beta_0) \right| = 2C$. Тогда из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$x(kh) = x(0) + F_0 kh + \frac{(kh)^2}{2} x''(kh\tau_k),$$
$$|\tau_k| \le 1,\ k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$$

следуют неравенства

$$|x_k - x_0 - F_0 kh| \le C(kh)^2,\ k = 0, \pm 1, \ldots, \pm n. \quad (8)$$

Из формул (7), (8) при $n \to \infty$ следует

$$|\bar{x}_0 - \tilde{x}_0| \le \frac{\sum\limits_{k=-n}^{n} |x_k - x_0 - F_0 kh|}{2n+1} \le$$

$$\le \frac{2Ch^2 \sum\limits_{k=1}^{n} k^2}{2n+1} \sim \frac{Ch^2 n^2}{3}, \quad (9)$$

$$|\bar{F}_0 - \tilde{F}_0| \le \frac{\sum\limits_{k=-n}^{n} |(x_k - x_0 - F_0 kh)kh|}{\sum\limits_{k=-n}^{n} (kh)^2} \le$$

$$\le \frac{Ch^3 \sum\limits_{k=1}^{n} k^3}{\sum\limits_{k=1}^{n} h^2 k^2} \sim \frac{Chn}{4}. \quad (10)$$

Формулы (6), (9), (10) приводят к соотношениям

$$|M\bar{x}_0 - x_0| \preceq \frac{Ch^2 n^2}{2},\quad D\bar{x}_0 = D\tilde{x}_0 \quad (11)$$

$$|M\bar{F}_0 - F_0| \preceq \frac{3Chn}{4},\quad D\bar{F}_0 = D\tilde{F}_0. \quad (12)$$

В свою очередь, $a_n \preceq b_n$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n / b_n \le 1$. Тогда из условия $h = n^{-\alpha}, \alpha > 1$, и соотношений (11), (12) имеем

$$|M\bar{x}_0 - x_0| \to 0,\ |M\bar{F}_0 - F_0| \to 0,\ n \to \infty, \quad (13)$$

что означает асимптотическую несмещенность оценок $\bar{x}_0, \bar{F}_0$.

Из неравенства Бьеноме — Чебышева, условия $h = n^{-\alpha}, \alpha > 1$, и соотношений (9), (11) получаем для любого $\delta > 0$

$$P(|\bar{x}_0 - x_0| > \delta) \le P(|\bar{x}_0 - \tilde{x}_0| + |\tilde{x}_0 - x_0|) > \delta) =$$
$$= P(|\tilde{x}_0 - x_0| \ge \delta - |\bar{x}_0 - \tilde{x}_0|) \le$$
$$\le \frac{\sigma^2}{(2n+1)(\delta - |\bar{x}_0 - \tilde{x}_0|)^2} \to 0,\ n \to \infty. \quad (14)$$

Таким образом, при $h = n^{-\alpha}, \alpha > 1$, оценка $\bar{x}_0$ является состоятельной оценкой x_0.

В то же время из соотношений (10), (12), (13) при $h = n^{-\alpha}, 1 < \alpha < 3/2$, получим для любого $\delta > 0$

$$P(|\bar{F}_0 - F_0| > \delta) \le P(|\bar{F}_0 - \tilde{F}_0| + |\tilde{F}_0 - F_0| > \delta) =$$
$$= P(|\tilde{F}_0 - F_0| > \delta - |\bar{F}_0 - \tilde{F}_0|) \le$$
$$\le \frac{3\sigma^2}{h^2 n^3 (\delta - |\bar{F}_0 - \tilde{F}_0|)^2} \to 0,\ n \to \infty. \quad (15)$$

Следовательно, при выполнении условия $h = n^{-\alpha}$, $1 < \alpha < 3/2$, оценка $\bar{F}_0$ является состоятельной оценкой F_0. Теорема доказана.

Теорема 4. *Уравнение* $F(\bar{x}_0, \beta) = \bar{F}_0$ *имеет единственное решение* $\bar{\beta}_0$, *являющееся состоятельной оценкой параметра* β_0.

Доказательство. Так как функция $F(x,\beta)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0,\beta_0)$ и $\left.\frac{\partial F}{\partial \beta}\right|_{M_0} \ne 0$, то выполняются условия теоремы для функции $G(x, f, \beta) = F(x,\beta) - f$. Значит в некоторой окрестности точки $M_0^*(x_0, F_0, \beta_0)$ уравнение разрешимо относительно $\beta = g(x, f)$, при этом $\beta_0 = g(x_0, F_0)$. Тогда из замечания 2 получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что в окрестности

$$\{(x, f) : |x - x_0| \le \delta(\varepsilon), |f - F_0| \le \delta(\varepsilon)\}$$

точки (x_0, F_0) неравенство $|\beta - \beta_0| \le \varepsilon$ выполняется.

В свою очередь, из соотношений (14), (15) следует, что для любых $\varepsilon, \delta(\varepsilon)$ существует такое $n_0(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$, что при любом $n > n_0(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$ справедливы неравенства

$$P(|\bar{x}_0 - x_0| \le \delta(\varepsilon)) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$P(|\bar{F}_0 - F_0| \le \delta(\varepsilon)) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (18)$$

и, следовательно, из соотношений (18) имеем $P(|\bar{\beta}_0 - \beta_0| \le \varepsilon) \ge 1 - \varepsilon$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0(\varepsilon)$ такое, что при $n > n_0(\varepsilon)$ $P(|\bar{\beta}_0 - \beta_0| > \varepsilon) < \varepsilon$, что означает состоятельность (сходимость по вероятности при $n \to \infty$) построенной оценки.

3. СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему (1) с начальными условиями $x_i(0) = x_i^0, i = \overline{1,m}$. Полагаем, что функции $F_i(x_1,\dots,x_m,\beta_1,\dots,\beta_m)$, $i = 1,\dots,m$, непрерывно дифференцируемы в окрестности точки M_0 и якобиан $\left.\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(\beta_1,\dots,\beta_m)}\right|_{M_0} \ne 0.$

Пусть известны неточные наблюдения $y_i(t) = x_i(t) + \varepsilon_i(t)$ за состоянием $x_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, в моменты $t = kh$, $k = 0,\pm1,\dots,\pm n$, $hn \le r$, и $\varepsilon_i(kh), i = \overline{1,m}, k = 0,\pm1,\dots,\pm nh$, — совокупность независимых и одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и дисперсией σ^2. Ставится задача оценки вектора параметров $(\beta_1^0,\dots,\beta_m^0)$ системы уравнений (1) по этим наблюдениям.

Обозначим

$$\bar{x}_i^0 = \frac{\sum_{k=-n}^{n} y_i(kh)}{2n+1}, \quad \bar{F}_i^0 = \frac{\sum_{k=-n}^{n} y_i(kh)}{\sum_{k=-n}^{n} (kh)^2}, \quad i = \overline{1,m}. \qquad (19)$$

Теорема 5. Пусть $h = n^{-\alpha}$. Тогда при $\alpha > 1$ оценка $\bar{x}_i^0$ является асимптотически несмещенной и состоятельной оценкой параметра x_i^0. Оценка $\bar{F}_i^0$ является асимптотически несмещенной оценкой параметра F_i^0. При $1 < \alpha < 3/2$ оценка $\bar{F}_i^0$ является состоятельной оценкой величины $F_i^0, i = 1,\dots,m$.

Теорема 6. *Система уравнений*

$$F_i(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_m,\beta_1,\dots,\beta_m) = F_i^0, \; i = \overline{1,m}. \qquad (20)$$

имеет единственное решение $(\bar{\beta}_1^0,\dots\bar{\beta}_m^0)$, *которое является состоятельной оценкой вектора параметров* $(\beta_1^0,\dots,\beta_m^0)$.

Доказательства теорем 5, 6 почти дословно повторяют доказательства теорем 3, 4.

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Вычислительный эксперимент проводился сначала для задачи Коши $\frac{dx}{dt} = \beta_0 x$, $x(0) = 1$, в случае $\beta_0 = 0{,}5$. Решение этого уравнения имеет вид $x = e^{b_0 t}$. Мы предположили, что по наблюдением за процессом, описываемым этим уравнением, получены неточные наблюдения $y_{\pm k} = e^{b_0 h(\pm k)} + \varepsilon_{\pm k}$ в моменты времени $\pm kh$, $k = 0,1,\dots,n$, $h = n^{-5/4}$, $n = 10000$. Здесь $\varepsilon_{\pm k}$, $k = 0,1,\dots,n$, независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке $[-1/2, 1/2]$. По формуле (5) оценивались сначала параметры x_0, $F_0 = F(x_0,\beta_0)$ (в наших обозначениях $\bar{x}_0, \bar{F}_0$), затем формула для оценки параметра β_0 была найдена из уравнения $\bar{F}_0 = \bar{x}_0 \bar{\beta}_0$.

Таблица 1.

интервалы распределения	относительные частоты
0.387413-0.432612	0.027
0.432612-0.477811	0.238
0.477811-0.52301	0.477
0.52301-0.568209	0.229
0.568209-0.613408	0.029

В табл. 1 представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного 1000 раз, а именно, интервальное распределение (5 интервалов) относительных частот $\bar{\beta}_0$.

Также был проведен вычислительный эксперимент для системы уравнений Лоренца с заданными начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$, в случае $\sigma_0 = 1$, $r_0 = 2$, $b_0 = 3$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma_0(y - x), \\ \dfrac{dy}{dt} = x(r_0 - z) - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - b_0 z, \end{cases} \qquad (21)$$

с заданными начальными условиями $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $z(0) = 1$, в случае $\sigma_0 = 1$, $r_0 = 2$, $b_0 = 3$. Решение этой системы не выписывается в явном виде, а решается конечно-разностным методом. Выпишем соответствующие уравнения для сетки $\{\pm kh,\ k = 0,1,\ldots, n\}$ с шагом $h = n^{-5/4}$, $n = 10000$:

$$\begin{cases} x_{\pm(k+1)} = x_{\pm k} \pm \sigma_0 h(y_{\pm k} - x_{\pm k}), \\ y_{\pm(k+1)} = y_{\pm k} \pm h(x_{\pm k}(r_0 - z_{\pm k}) - y_{\pm k}), \\ z_{\pm(k+1)} = z_{\pm k} \pm h(x_{\pm k} y_{\pm k} - b_0 z_{\pm k}), \end{cases}$$

$x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$. Мы предположили, что по наблюдением за процессом, описываемым этими уравнением, получены неточные наблюдения

$$X_{\pm k} = x_{\pm k} + \varepsilon_1(\pm hk),\ Y_{\pm k} = y_{\pm k} + \varepsilon_2(\pm hk),$$

$$Z_{\pm k} = z_{\pm k} + \varepsilon_3(\pm hk),\ k = 0,1,\ldots, n,$$

где $\varepsilon_i(\pm hk)$, $i = 1,2,3$, $k = 0,1,\ldots, n$, — независимые случайные величины, распределенные равномерно на отрезке $[-1/2,1/2]$. По формулам (19) оценивались сначала параметры $x_0, y_0, z_0, F_i^0 = F_i(x_0, y_0, z_0, \sigma_0, r_0, b_0), i = 1,2,3$, в наших обозначениях $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{F}_i^0$, $i = 1,2,3$. Далее оценки параметров σ_0, r_0, b_0 были найдены из соотношений

$$\begin{cases} \bar{F}_1^0 = \sigma(\bar{y}_0 - \bar{x}_0), \\ \bar{F}_2^0 = \bar{x}_0(r - \bar{z}_0) - \bar{y}_0, \\ \bar{F}_3^0 = \bar{x}_0 \bar{y}_0 - b\bar{z}_0. \end{cases}$$

Таблица 2.

интервалы распределения $\bar{\sigma}_0$	относительные частоты $\bar{\sigma}_0$
0.883607-0.931473	0.035
0.931473-0.979339	0.275
0.979339-1.0272	0.486
1.0272-1.07507	0.192
1.07507-1.12294	0.015
интервалы распределения $\bar{r}_0$	относительные частоты $\bar{r}_0$
1.89817-1.94253	0.038
1.94253-1.98689	0.242
1.98689-2.031262	0.471
2.03126-2.07562	0.224
2.07562-2.11998	0.025
интервалы распределения $\bar{b}_0$	относительные частоты $\bar{b}_0$
2.87579-2.92301	0.021
2.92301-2.97022	0.267
2.97022-3.01744	0.457
3.01744-3.06466	0.231
3.06466-3.11188	0.024

В табл. 2 представлены результаты вычислительного эксперимента, проведенного 1000 раз, а именно, интервальное распределение относительных частот $\bar{\sigma}_0, \bar{r}_0, \bar{\beta}_0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наряду с системами обыкновенных дифференциальных уравнений предлагаемый метод оценки параметров может быть применен к уравнениям или системам уравнений в частных производных. В качестве основы для развития этого метода оценки параметров может быть взята теорема существовании решения системы уравнений в частных производных в окрестности некоторой точки (см., например, [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пененко, А. В. Согласованные численные схемы для решения нелинейных обратных задач идентификации источников градиентными алгоритмами и методами Ньютона–Канторовича / А. В. Пененко // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2018. – Том 21, № 1. – С. 99–116.

2. Penenko, A. V., Khassenova, Z. T., Penenko, V. V., Pyanova, E. A. Numerical study of a direct variational data assimilation algorithm in Almaty city conditions / A. V. Penenko [и др.] // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. – 2019. – Том 7, № 1. – P. 53–64.

3. Tsitsiashvili, G. Sh. Study of Synergistic Effects in Complex Stochastic Systems Mathematics / G. Sh. Tsitsiashvili // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, no 12. – P. 1396.

4. Цициашвили, Г. Ш., Осипова, М. А. Оценка параметров нелинейных рекуррентных соотношений / Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова // Вестник Воронежского ГУ. Системный анализ и информационные технологии. – 2021. – Том 3. – С. 27-37.

5. Ермаков, С. М. Математическая теория планирования эксперимента / С. М. Ермаков. – М.: Наука, 1983.

6. Рыков, В. В., Иткин, В. Ю. Математическая статистика и планирование эксперимента / В. В. Рыков, В. Ю. Иткин. – М.: Российский государственный ун-т нефти и газа им. И. М. Губкина, 2008.

7. Виленкин, Н. Я., Доброхотова, М. А., Сафонов, А. Н. Дифференциальные уравнения / Н. Я. Виленкин, М. А. Доброхотова, А. Н. Сафонов. – М.: Просвещение, 1984. – 176 с.

8. Кудрявцев, Л. Д. Краткий курс математического анализа / Л. Д. Кудрявцев. – Т. 2. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2005. – 424 с.

Цициашвили Гурами Шалвович – д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН. E-mail: guram@iam.dvo.ru

Осипова Марина Анатольевна – канд. физ.-мат. наук, доцент ДВФУ, научный сотрудник ИПМ ДВО РАН. E-mail: mao1975@list.ru

ESTIMATION OF PARAMETERS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS ACCORDING TO INACCURATE OBSERVATIONS

G. Sh. Tsitsiashvili[*], M. A. Osipova[*,]**

**Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of Russian Academy Sciences*
***Far Eastern Federal University*

Annotation. In this paper, the problem of estimating the parameters of a system of ordinary differential equations of the first order from inaccurate observations over a short time interval is solving. We are talking about systems of differential equations resolved with respect to the derivative (about normal systems), in which the number of parameters coincides with the number of equations, with given initial conditions. By analogy with linear regression analysis, a sufficiently large number of observations are selecting over the time under consideration and the values of the functions standing in the right parts of the normal system of equations and the values of their derivatives at the initial moment of time are estimating. By analogy with the method of moments, unknown parameters of the initial system of differential equations are determining by estimates of the values of functions and its derivatives. In the work, the properties of the obtained estimates are investigating and, under certain conditions imposed on the step of splitting the time interval, their asymptotic non-bias and consistency with an increase in the number of observations are proving. Computational experiments were carriing out for two special cases and their results are demonstrating in the work.

The algorithm proposed in the paper for estimating the parameters of a system of ordinary differential equations by inaccurate deterministic observations, in contrast to classical optimization algorithms, allows us to estimate the rate of convergence of the obtained estimates to the estimated parameters. In addition, the consideration of a small interval of time observation makes it possible to build an experiment planning procedure. Along with systems of ordinary differential equations, the proposed algorithm can be applying to systems of partial differential equations, which is planning to be implemented by the authors in the future.

Keywords: ordinary differential equations, linear regression analysis, existence and uniqueness theorem, implicit function theorem; method of moments.

Tsitsiashvili Gurami Sh. – Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Main Scientific Researcher, Institute for Applied Mathematics FEB RAS. E-mail: guram@iam.dvo.ru

Osipova Marina A. – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Far Eastern Federal University, Main Scientific Researcher, Institute for Applied Mathematics FEB RAS. E-mail: mao1975@list.ru