

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Дальневосточный федеральный университет

М.А. Гузев, Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА

Монография

Владивосток



2021

УДК 537.6
ББК 22.324
Г93

Рецензенты:

И.В. Прохоров, главный научный сотрудник ИПМ ДВО РАН;
Е.Г. Прилепкина, старший научный сотрудник ИПМ ДВО РАН.

Гузов, Михаил Александрович.

Г93 Прикладные задачи системного анализа : монография / М.А. Гузов, Г.Ш. Цициашвили, М.А. Осипова. – Владивосток : Изд-во Дальневост. федерал. ун-та, 2021. – 90 с. – (Лучшее научное издание ДВФУ-2021).

ISBN 978-5-7444-5130-1.

DOI <https://doi.org/10.24866/7444-5130-1>.

В монографию вошли наиболее значимые результаты авторов по моделированию и анализу сложных систем за последние несколько лет, отраженные в рецензируемых журналах различного уровня. Выбор материала определялся современными тенденциями широкого внедрения инструментов цифровых технологий в работу различных сложных систем, необходимостью создания новых, выходящих за рамки классических, алгоритмов обработки временных рядов для специалистов из различных предметных областей, и исследования синергетических эффектов в многоэлементных стохастических системах. Отталкиваясь от идеи развития нестандартных способов моделирования, получения новых аналитических результатов и оригинальных вычислительных алгоритмов, удалось построить и исследовать большое число разнообразных прикладных моделей. Методы решения, представленные в монографии задач, основаны на структурном анализе сложных систем и оценке их показателей эффективности.

Предназначена для исследователей в области системного анализа, прикладной математики и вероятностного моделирования.

УДК 537.6
ББК 22.324

ISBN 978-5-7444-5130-1

© ФГАОУ ВО ДВФУ, 2021

Оглавление

Введение	5
1. Вероятность обнаружения постороннего объекта автономными аппаратами как решение задачи Бюффона	7
1.2. Задача Бюффона в системе координат, связанной с движущимися по окружности аппаратами	8
1.3. Задача Бюффона в полярной системе координат	11
1.4. Возможные обобщения модели движения аппаратов	13
2. Защита сетевой структуры автономными аппаратами	16
2.1. Постановка задачи	17
2.2. Основные результаты	19
3. Построение потенциально опасных зон в горном массиве по результатам сейсмо-акустического мониторинга	21
3.1. Алгоритм кластеризации по матрице попарных расстояний....	23
3.2. Численный эксперимент по наблюдениям за горной выработкой «Антей»	25
3.3. Алгоритм прогнозирования критических событий	27
4. Формальная интерпретация задачи синтеза процедуры обработки поверхностей детали	31
4.1. Содержательная постановка задачи	34
4.2. Алгоритм обработки сторон детали	36
5. Синергетические эффекты в сложных стохастических системах	42
5.1. Применение систем массового обслуживания к конструированию телекоммуникационных сетей	46
5.2. Нестационарная пуассоновская модель непрерывно функционирующей системы массового обслуживания	50
5.2.1. Модель одноканальной системы	51
5.2.2. Модель ациклической сети	53
5.2.3. Сети обслуживания со сборкой и разборкой заявок	55
5.3. Эргодичность статистических оценок интенсивности пуассоновского потока	56

5.3.1. Оценка интенсивности пуассоновского потока.....	57
5.3.2. Оценка большого параметра показательного распределения.....	59
5.3.3. Ошибка в оценке среднего числа точек пуассоновского потока	60
5.4. Логико-вероятностное моделирование по модульному принципу	61
5.5. Раздельное резервирование элементов двухполюсника.....	65
5.6. Цифровизация информации, заданной в узлах решетки	69
5.6.1. Математический эквивалент термина «пиксель».....	70
5.6.2. Геометрическая интерпретация информации в узлах квадратной решетки	72
5.7. Разрешающая способность наиболее мощного решающего правила в задаче «свой-чужой»	74
Список литературы	79

Введение

Настоящая монография содержит результаты авторов последних нескольких лет, в область интересов которых попали актуальные задачи системного анализа. Одна часть монографии посвящена обработке временных рядов, предоставленных специалистами из различных прикладных областей, а другая часть – исследованию синергетических эффектов в многоэлементных системах. Полученные результаты опубликованы в российских и международных журналах.

Решить большое число разнообразных задач системного анализа удалось благодаря детальному изучению теоретико-графовой составляющей моделей. Это позволило построить оригинальные алгоритмы обработки информации и новые стохастические модели, а также получить новые аналитические результаты. Выбор материала определялся современными тенденциями широкого внедрения инструментов цифровых технологий в работу различных сложных систем.

В первой главе решается задача определения минимального числа автономных аппаратов, которые с единичной вероятностью могут обнаружить прохождение постороннего объекта через границу в форме окружности. Эта задача решается методами стохастической геометрии подобно классической задаче Бюффона.

Во второй главе решается задача защиты сетевой структуры автономными аппаратами. В ней используются результаты первой главы с добавлением классических результатов по теории чисел, в которых строится оценка числа точек с целочисленными координатами внутри круга большого радиуса.

Третья глава посвящена задаче определения потенциально опасных зон в горном массиве по результатам акустического мониторинга. Основным объектом решения данной задачи является неориентированный граф, указывающий на наличие связей между точками-источниками звуковых колебаний в горной толще.

Четвертая глава посвящена построению алгоритма последовательной обработки сторон плоской детали в машиностроении. Решение этой задачи основано на специальных приемах построения

нескольких графов, определяющих последовательность обработки сторон детали с условием выдерживания допустимых погрешностей линейных и угловых координат.

Пятая глава посвящена исследованию синергетических эффектов в сложных стохастических системах. Здесь под синергетическим эффектом понимается существенное изменение основных показателей работы системы при ее реструктуризации. В главе рассмотрены эффекты объединения одноканальных систем массового обслуживания в многоканальные, замена резервирования всего двухполюсника на раздельное резервирование его элементов, система массового обслуживания с переменной интенсивностью пуассоновского входного потока и детерминированным временем обслуживания, эргодичность статистических оценок интенсивности пуассоновского потока, логико-вероятностное моделирование по модульному принципу, разрешающая способность наиболее мощного решающего правила в задаче компьютерной безопасности. Выбор рассмотренных в данном разделе задач определяется их востребованностью в современных технических и социально-экономических системах.

Авторы благодарят В.Е. Лелюхина за большую помощь в содержательной постановке задачи синтеза процедуры обработки поверхностей детали.

1. Вероятность обнаружения постороннего объекта автономными аппаратами как решение задачи Бюффона

В современной подводной робототехнике (underwater robotic technique) важной является задача вычисления вероятности обнаружения постороннего мобильного объекта автономными необитаемыми подводными аппаратами. В первоначальной постановке эта задача относится к задачам захвата цели, к дифференциальным играм погони [1]. Возможны различные вариации этой постановки задачи, основанные на а) определении кратчайшей траектории, пройдя по которой робот или группа роботов, покроют своей областью видимости всю заданную территорию [2], б) на поиске минимального количества роботов, обеспечивающих гарантию захвата [3] и др. Все эти работы формулируют задачу захвата цели в терминах случайных графов [4], а не в терминах случайных множеств, что приводит к исчезновению первоначальной геометрической постановки вопроса.

Этот недостаток может быть преодолен обращением к одной из ключевых задач геометрической теории вероятностей – задаче Бюффона. Задача Бюффона (см. рис. 1.1) состоит в определении вероятности пересечения иглы длины l , бросаемой случайным образом на плоскость, разлинованную равноотстоящими (на расстоянии L) параллельными прямыми, с какой-либо из этих прямых. Эта задача легла в основу стохастической геометрии и получила широкое распространение в прикладной статистике.

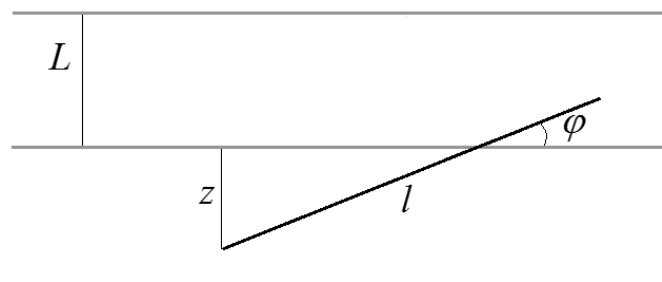


Рис. 1.1. Задача Бюффона

Основным элементом вероятностной модели в задаче Бюффона являются случайные величины, определяющие взаимное расположение отрезка, занимаемого иглой на плоскости, и равноотстоящих горизонтальных прямых [5], [6]. Такими случайными величинами являются расстояние z от нижнего конца отрезка до первой вышележащей прямой и угол φ между этой прямой и отрезком. Зная закон распределения случайного вектора (z, φ) , образованного этими случайными величинами, можно определить вероятность события $P(l \sin \varphi \geq z)$ пересечения иглы с одной из параллельных прямых. Для наступления этого события необходимо и достаточно, чтобы отрезок пересекался с прямой, лежащей непосредственно над его нижним концом.

По аналогии с [7] представим задачу вычисления вероятности обнаружения постороннего мобильного объекта автономными необитаемыми подводными аппаратами в терминах задачи Бюффона следующим образом. Пусть n аппаратов движутся по окружности радиуса R с фиксированной линейной скоростью v . Расстояния между соседними вдоль окружности аппаратами одинаковы.

Каждый аппарат снабжен локатором кругового обзора с радиусом обзора r . Локатор кругового обзора можно понимать, как устройство, вращающее луч с угловой скоростью достаточно большой, чтобы линейная скорость движения луча заметно превосходила линейную скорость движения аппаратов. Требуется вычислить вероятность обнаружения мобильного объекта с помощью локаторов, установленных на аппаратах (см. рис. 1.2). Здесь под обнаружением понимается попадание объекта в круг, обозреваемый каким-либо из аппаратов.

1.2. Задача Бюффона в системе координат, связанной с движущимися по окружности аппаратами

Особенностью задачи вычисления вероятности обнаружения в неподвижной системе координат является тот факт, что и аппараты, и объект движутся и потому требуется какой-то переход к задаче Бюффона, в которой по крайней мере параллельные прямые неподвижны.

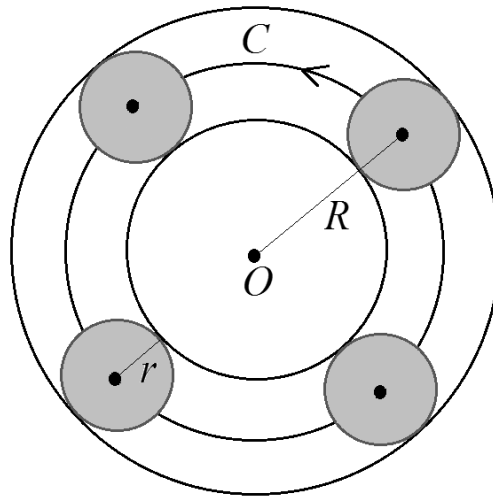


Рис. 1.2. Движение аппаратов по окружности
в неподвижной системе координат

Эта процедура реализуется путем перехода от неподвижной системы координат к системе координат, связанной с аппаратами, вращающимися вокруг некоторой точки O по окружности C радиуса R . В этой вращающейся системе координат неподвижными становятся круги обзора радиуса r локаторов, установленных на аппаратах. Чтобы мобильный объект был обнаружен аппаратами необходимо, чтобы траектория движения объекта в подвижной системе координат пересекала один из указанных кругов.

В целях упрощения данной задачи предположим, что в неподвижной системе координат мобильный объект движется по отрезку, соединяющему начальную точку движения мобильного объекта с центром O окружности C . Тогда его траектория во вращающейся системе координат наряду с движением объекта к центру окружности C должна учитывать вращение движущейся системы координат (см. рис. 1.3). В результате эта траектория $A = A_\psi$ будет представлять собой некоторую кривую, начинающуюся в случайной точке ψ окружности C_* , радиуса $R + r$ с центром в точке O . Таким образом, в системе координат, связанной с движущимися по окружности аппаратами, круги радиуса r играют роль параллельных прямых, а кривые A_ψ — роль отрезка в задаче Бюффона.

Всюду далее полагаем, что случайный угол ψ имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2\pi]$. Переход от кривой $A_{\psi'}$ к кривой $A_{\psi''}$ осуществляется поворотом кривой $A_{\psi'}$ на угол $\psi'' - \psi'$ вокруг точки O . Следует отметить, что на окружности C_* каждый круг D_i радиуса r выделяет дугу F_i , ограниченную двумя кривыми $A_{\psi'_i}$, $A_{\psi''_i}$, касающимися снаружи круга D_i , $i = 1, \dots, n$ (см. рис. 1.4).

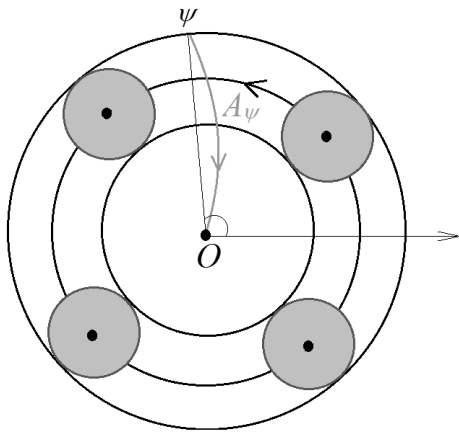


Рис. 1.3. Траектория движения объекта в декартовой системе координат, связанной с движущимися по окружности аппаратами

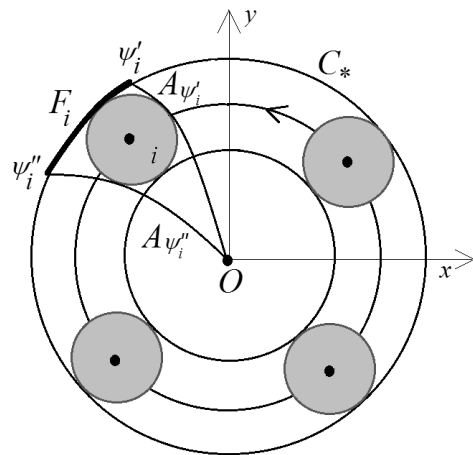


Рис. 1.4. Область контроля одного круга обзора в декартовой системе координат (x, y) , связанной с движущимися аппаратами

Таким образом, на окружности C_* круг обзора D_i с центром в точке, где находится аппарат i , выделяет дугу F_i , $i = 1, \dots, n$.

Теперь можно вычислить вероятность обнаружения мобильного объекта аппаратами с установленными на них локаторами кругового обзора. Пусть множество \mathcal{F} является объединением дуг F_i : $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Это множество является объединением конечного числа непересекающихся дуг (может быть меньшего, чем n числа). Тогда суммарная угловая длина этих дуг $s(\mathcal{F})$, деленная на 2π , является искомой вероятностью. Отсюда следует, что если дуги F_i , $i = 1, \dots, n$, не пересекаются, то вероятность обнаружения объекта аппаратами $P = \frac{ns(F_i)}{2\pi}$. В общем случае $P = \min\left(1, \frac{ns(F_i)}{2\pi}\right)$.

1.3. Задача Бюффона в полярной системе координат

Задача определения кривых A_ψ и нахождения дуг F_i как правило решается численно. Однако при некоторых дополнительных предположениях возможно получение аналитических формул. Перейдем от декартовой системы координат (x, y) , связанной с вращающимися вокруг точки O аппаратами, к полярной системе координат (см. рис. 1.5) с $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \arctg x/y$.

В декартовой системе координат (x, y) окружность радиуса r с центром в точке $(0, R)$ описывается уравнениями

$$x = x(\psi) = r \cos \psi, \quad y = y(\psi) = R + r \sin \psi, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi,$$

дающими параметрическое задание окружности: ψ – параметр. В полярной системе координат (ρ, φ) эта окружность задается параметрически уравнениями

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{r^2}{R^2} \cos^2 \psi + \left(1 + \frac{r}{R} \sin \psi \right)^2 \right)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg \frac{\frac{r}{R} \cos \psi}{1 + \frac{r}{R} \sin \psi},$$

т.к. ψ остается параметром. Типичный вид образа окружности радиуса r в этой полярной системе координат имеет вид яйцеобразной фигуры с заостренным верхним концом (см. рис. 1.5).

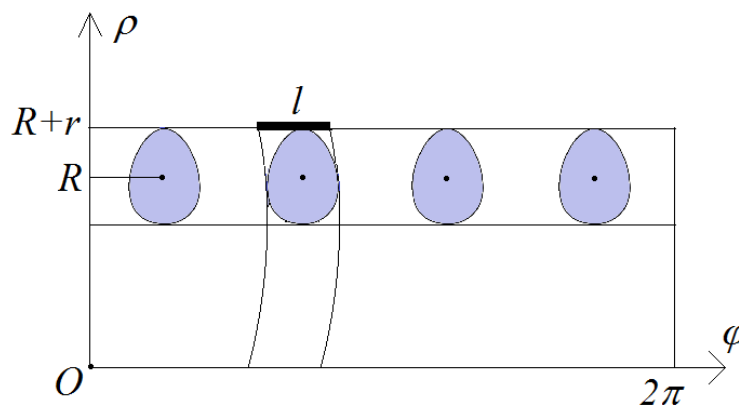


Рис. 1.5. Область контроля одним кругом обзора
в полярной системе координат,
связанной с движущимися аппаратами

Однако при малом отношении $r/R \ll 1$ можно приближенно последнюю систему уравнений переписать в виде

$$\frac{\rho}{R} \approx 1 + \frac{r}{R} \sin \psi, \quad \varphi \approx \frac{r}{R} \cos \psi.$$

Таким образом, круг радиуса r в системе координат (x, y) , вращающейся вместе с аппаратами, переходит в нормированной полярной системе координат $(\rho/R, \varphi)$ приблизительно в круг радиуса r/R (см. рис. 1.6).

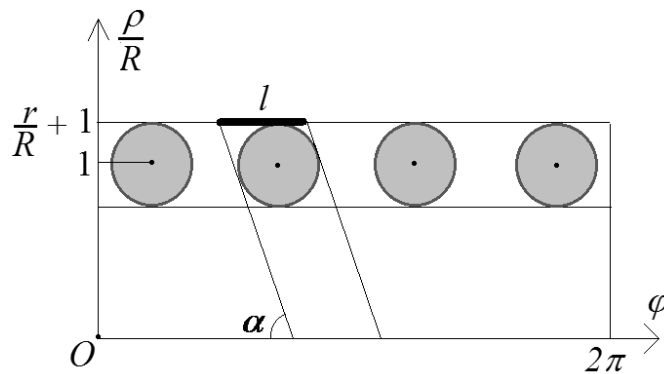


Рис. 1.6. Область контроля одним кругом обзора в нормированной полярной системе координат, связанной с движущимися аппаратами

В свою очередь, при асимптотическом условии $r/R \ll 1$ траектория A_ψ переходит в прямую. Если линейная скорость движения аппарата равна v , а скорость движения мобильного объекта в неподвижной системе координат равна u , то тогда в полярной системе координат, связанной с движущимися аппаратами, скорость движения мобильного объекта приблизительно равна $\sqrt{v^2/R^2 + u^2/R^2}$ и составляет угол $\alpha = \arctgu/v$ с горизонтальной прямой, являющейся образом окружности C_* . Поэтому каждый круг, изображающий зону контроля локатора кругового обзора, перекрывает для мобильного объекта отрезок длины $l = \frac{2r}{R} \sin \alpha$ (см. рис. 1.6).

Обозначим $M = \min \left(n: \frac{ns(F_i)}{2\pi} \geq 1 \right)$ минимальное число аппаратов, которые обеспечивают единичную вероятность обнаружения мобильного объекта. Очевидно, что в этом случае

расстояние по углу φ между центрами соседних кругов обзора должно меньше l , следовательно, $M = \min \left(n: \frac{nr}{\pi R \sin \alpha} \geq 1 \right)$.

Пусть $k_- < 1 < k_+$, $\max(|1 - k_-|, |1 - k_+|) \ll 1$ и на отрезке $[k_-, k_+]$ задано вероятностное распределение $p(dk)$ такое, что $\int_{k_-}^{k_+} kp(dk) = 1$. Заменим радиус R на kR , тогда в полярной системе координат в силу асимптотического условия $r/R \ll 1$ образом круга обзора приблизительно станет круг радиуса $\frac{r}{kR}$. Функция $\frac{r}{kR}$ является выпуклой вниз по k , следовательно, в силу неравенства Йенсена

$$\frac{r}{R} \int_{k_-}^{k_+} \frac{p(dk)}{k} \geq \frac{r}{R} \cdot \frac{1}{\int_{k_-}^{k_+} kp(dk)} = \frac{r}{R}. \quad (1.1)$$

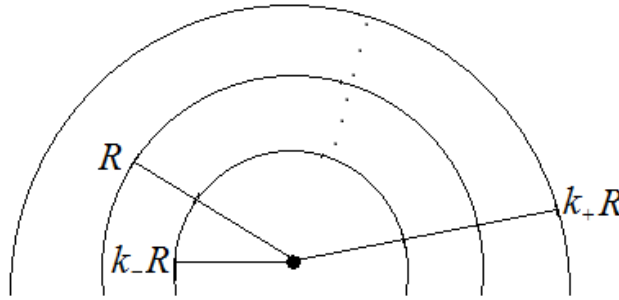


Рис. 1.7. Стохастизация радиуса движения аппаратов

Таким образом, вероятность обнаружения при случайном распределении параметра k увеличивается по сравнению с вероятностью обнаружения при среднем значении множителя k .

1.4. Возможные обобщения модели движения аппаратов

Предположим, что аппараты движутся с линейной скоростью v по траектории с переменным радиусом $k(t)R$, $k_- \leq k(t) \leq k_+$, — галсами (см. рис. 1.8). Эта траектория состоит из отрезков с постоянным радиусом и отрезков с постоянным углом, причем доля отрезков с постоянным углом пренебрежимо мала. Пусть процесс $k(t)$ подчиняется гипотезе эргодичности: «среднее по ансамблю совпадает со средним по траектории» и имеет предельное распределение $p(dk)$, $k_- \leq k \leq k_+$. Тогда выполняется неравенство (1.1),

характеризующее вероятность обнаружения при движении аппаратов по траектории с переменным радиусом.

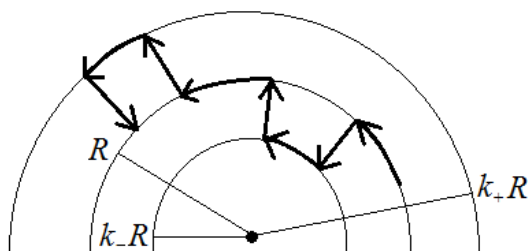


Рис. 1.8. Движение аппарата по траектории с переменным радиусом

Пусть теперь аппараты движутся по некоторому отрезку $[A, B]$ длины R в одном направлении и, дойдя до его конца, поворачивают и движутся в обратном направлении (см. рис. 1.9). Полагаем, что расстояние между центрами кругов обзора следующих друг за другом аппаратов равно $2R/n$, подобная модель была рассмотрена в [8]. Тогда круги обзора, связанные с локаторами на аппаратах, перемещаются по горизонтальной полосе ширины $2r$ и длины R .

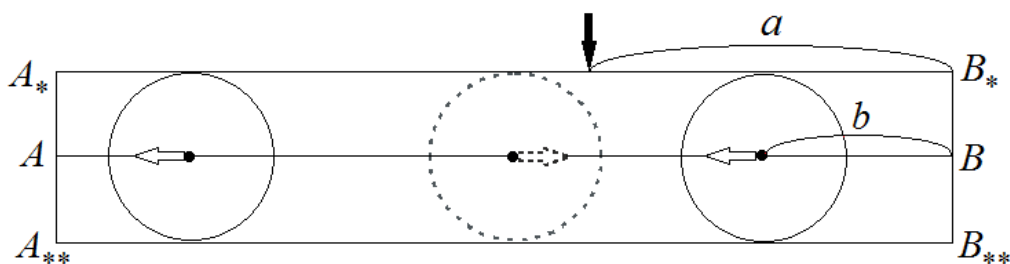


Рис. 1.9. Движение аппаратов и объекта в неподвижной системе координат

Объект в неподвижной системе координат движется вертикально и его горизонтальная координата в момент пересечения полосы равна a , $0 \leq a \leq R$. Перейдем в систему координат, связанную с движущимися аппаратами и обозначим b расстояние от аппарата, ближайшего по направлению движения аппаратов к правому концу отрезка $[A, B]$, до точки B . Пусть вероятностное распределение случайного вектора (a, b) является равномерным на прямоугольнике $[0, R] \times [0, 2R/n]$. Тогда в системе координат, связанной с движущимися аппаратами, на отрезке $[A_*, B_*]$ можно указать

подотрезки длины $l = 2r/\sin\alpha$, при попадании в которые объект будет обнаружен (см. рис. 1.10).

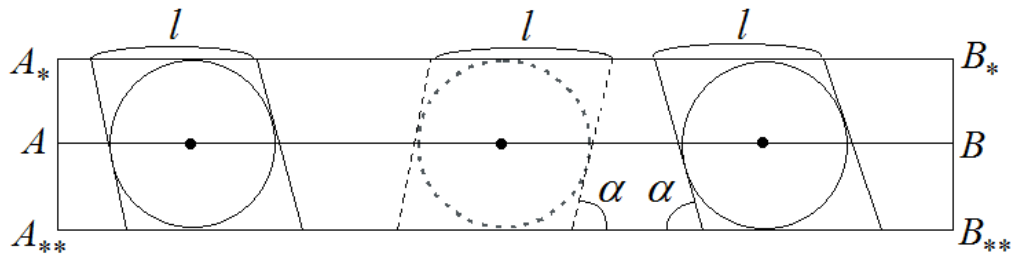


Рис. 1.10. Движение объекта в системе координат, связанной с аппаратами

При движении аппаратов по прямой задача вычисления вероятности обнаружения объекта оказывается более сложной, чем при движении аппаратов по окружности. Получить относительно простое решение в этой задаче удалось для величины M минимального числа аппаратов, при котором вероятность обнаружения объекта равна единице, а именно, $M = \min \left(n: \frac{nr}{R\sin\alpha} \geq 1 \right)$. Подобный прием может быть использован при работе с мультиагентными системами, рассмотренными в [9].

2. Защита сетевой структуры автономными аппаратами

В настоящее время внимание исследователей сосредоточено на изучении структур, порождаемых группами самодвижущихся частиц [10]–[14]. Анализ этих структур приводит к необходимости решения различных задач, связанных с теорией динамических систем. Модельными объектами могут быть системы частиц, изучаемые в рамках статистики Максвелла–Больцмана, Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна [15]. Бильярдные системы, для которых стохастические свойства в их поведении могут возникать при малом числе частиц и даже при отсутствии случайных факторов [16], являются важным аналогом самодвижущихся частиц.

Число самодвижущихся частиц, как правило, считается достаточно большим. В частности, такие предположения используются при моделировании движения транспортных средств, толпы и стаи [13], финансовых рынков и других социально-экономических систем [14]. В связи с этим следует отметить модель квантовой экономики [17], в которой большое количество самодвижущихся частиц приводит к появлению синергетических эффектов – нелинейной (экспоненциальной или степенной) зависимости характеристик модели от числа частиц.

В то же время системы самодвижущихся частиц аналогичны по механическим свойствам системам мобильных роботов, для описания которых используются модели дифференциальных игр [18]–[20], лежащие в основе систем искусственного интеллекта. В рамках этих моделей решаются различные задачи: определение кратчайшей траектории робота или группы роботов, охватывающей всю область наблюдения [18], [21], поиск минимального количества роботов, гарантирующих захват [22], и многие другие.

В последнее время особый интерес приобретают задачи защиты сетевых структур тел с помощью систем самодвижущихся частиц. Попытки решения этих задач привели исследователей к использованию моделей случайных графов [20]–[22]. Однако в этих моделях отсутствуют геометрические факторы, связанные с макроскопическими

характеристиками исследуемой системы. В данном разделе для макроскопической модели сетевой структуры самодвижущихся частиц специального вида показано уменьшение минимального числа аппаратов, защищающих рассматриваемую структуру.

2.1. Постановка задачи

Исследуемая в этом разделе сетевая структура состоит из группы $N(n)$ тел, расположенных в узлах квадратной решетки, содержащейся в окружности радиусом $2nR_c$, где n – натуральное число (см. рис. 2.1). Защита этой группы тел может выполняться различными способами. Это приводит к необходимости рассмотрения нескольких моделей.

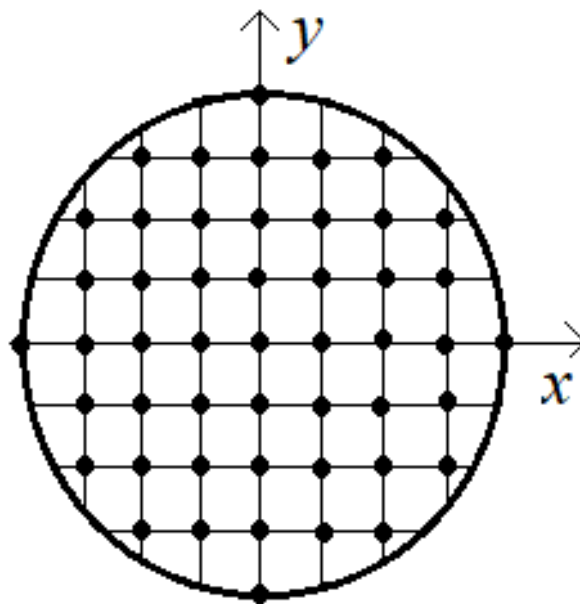


Рис. 2.1. Расположение тел в сетевой структуре

Рассмотрим базовую модель (БМ), в соответствии с которой тело защищает от проникновения постороннего объекта группа аппаратов, движущихся по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью. Каждый аппарат снабжен локатором кругового обзора с радиусом обзора r (см. рис. 2.2). БМ подробно проанализирована в [14]–[16]. При этом предполагается, что движение аппаратов является равномерным по углу.

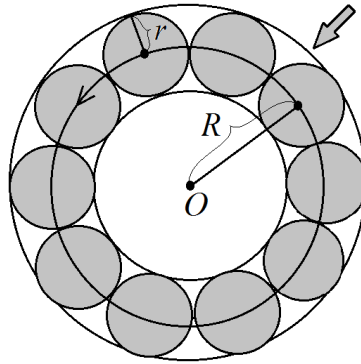


Рис. 2.2. Расположение кругов обзора локаторов для обнаружения постороннего объекта

Показано [14]–[16], что минимальное число M аппаратов, обеспечивающих единичную вероятность обнаружения объекта, приблизительно пропорционально радиусу R окружности, по которой движутся аппараты, деленному на радиус r кругового обзора локатора, установленного на аппарате (см. затемненные круги на рис. 2.2):

$$\frac{\pi}{d} \leq M \leq \frac{\pi}{d} + 1, \quad d = \arcsin \frac{r}{R} \quad (r \ll R). \quad (2.1)$$

Возвращаясь к рассмотрению сетевой структуры, мы выбираем параметр $R_c = R + r$, а расстояние между узлами решетки равным $2(R + r)$. БМ приводит к следующей стратегии защиты сети: вокруг каждого тела формируется независимая группа аппаратов (модель I, см. рис. 2.3).

Рассмотрим альтернативную систему защиты $N(n)$ тел, в соответствии с которой аппараты движутся по окружности радиусом $2(n + 1)(R + r)$ (модель II, см. рис. 2.4). Задачей работы является оценка отношения числа аппаратов, необходимых для реализации модели I, к числу аппаратов, необходимых для реализации модели II, при обнаружении постороннего объекта с единичной вероятностью.

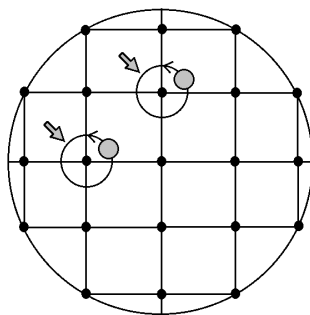


Рис. 2.3. Модель I.

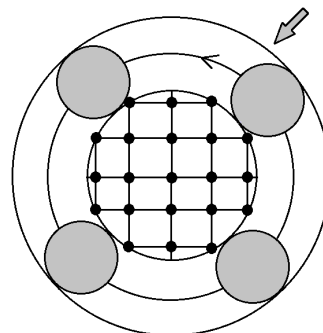


Рис. 2.4. Модель II.

2.2. Основные результаты

Очевидно, что в модели I окружности, по которым движутся аппараты вокруг разных $N(n)$ тел, не пересекаются и лежат полностью в круге радиусом $2(n+1)(r+R)$. Пусть $M_1(n)$ – минимальное количество аппаратов, позволяющих с вероятностью 1 обнаружить объект и реализующих данную стратегию. Тогда из (24) следует, что

$$N(n) \frac{\pi}{d} \leq M_1(n) \leq N(n) \left(\frac{\pi}{d} + 1 \right).$$

Ясно, что величина $M_1(n)$ имеет порядок $N(n)/d$: $M_1(n) \sim N(n)/d$.

В свою очередь, минимальное число $M_2(n)$ аппаратов, движущихся по окружности радиусом $2(n+1)(R+r)$ и позволяющих обнаружить с вероятностью единица объект в модели II, удовлетворяет соотношению

$$\pi \left(\arcsin \frac{r}{2(n+1)(R+r)} \right)^{-1} \leq M_2(n) \leq \pi \left(\arcsin \frac{r}{2(n+1)(R+r)} \right)^{-1} + 1.$$

Поскольку $r \ll R$, то $d \sim r/R \ll 1$, и числа $M_1(n)$, $M_2(n)$ имеют следующий порядок:

$$M_1(n) \sim \frac{N(n)R}{r}, \quad M_2(n) \sim \frac{nR}{r}. \quad (2.2)$$

Для вычисления $N(n)$ переходим от декартовой системы координат (x, y) к системе безразмерных координат (X, Y) : $X = \frac{x}{2(r+R)}$, $Y = \frac{y}{2(r+R)}$. Тогда окружность радиусом $r+R$ преобразуется в окружность радиусом $1/2$, а окружность C_n , содержащая сетевую структуру $N(n)$ тел, преобразуется в окружность радиусом n . При этом образ круга диаметром $2(R+r)$ является круг единичного диаметра. Следовательно, задача вычисления $N(n)$ редуцируется к задаче нахождения площади фигуры, состоящей из единичных квадратов, целиком содержащихся в круге радиусом n .

Теперь используем известные оценки для $N(n)$. Так, в [26], [27] (см., также [28]) приведена оценка К. Гаусса, который показал, что все единичные квадраты, пересекающие границу круга C_n , содержатся в кольце

$$\{(X, Y): (n - \sqrt{2})^2 \leq X^2 + Y^2 \leq (n + \sqrt{2})^2\},$$

имеющем площадь $4\pi\sqrt{2}n$. Поэтому справедливо неравенство

$$\left| \frac{N(n)}{\pi n^2} - 1 \right| \leq \frac{4\sqrt{2}}{n}. \quad (2.3)$$

Отсюда для больших значений n получаем следующую оценку:

$$N(n) \sim \pi n^2. \quad (2.4)$$

Комбинирование (25) с (26) дает

$$\frac{M_1(n)}{M_2(n)_2} \sim \frac{N(n)}{n} \sim n.$$

Оценка значения $N(n)$, приведенная в формуле (2.3), неоднократно уточнялась. В частности, К. Гаусс показал, что $\left| \frac{N(10)}{\pi \cdot 10^2} - 1 \right| \leq 0,01$, тогда как для $n = 10$ правая часть неравенства (2.3) примерно равна 0,566. Уточнение оценки значения $N(n)$ продолжается исследователями [29].

В работе рассмотрена модельная сетевая структура, элементы которой расположены в вершинах единичной квадратной решетки, содержащихся в круге большого радиуса. Однако полученные для этой модели оценки минимального числа аппаратов, обеспечивающих с единичной вероятностью обнаружение постороннего объекта, позволяют распространить результаты работы на другие условия геометрического расположения элементов сетевой структуры.

3. Построение потенциально опасных зон в горном массиве по результатам сейсмо-акустического мониторинга

При разработке месторождений и ведении подземных горных работ в сложных горногеологических условиях и на больших глубинах необходимо применение эффективных методов и средств прогноза и предотвращения проявлений горного давления, наиболее опасными формами которого являются горные и горнотектонические удары. В мировой горной практике для прогнозирования опасных проявлений горного давления широко применяются многоканальные автоматизированные системы геомеханического мониторинга, к числу которых относится геоакустический измерительный комплекс Prognoz ADS, установленный на ряде удароопасных месторождений России [30], [31]. Его работа основана на измерении и обработке параметров акустической активности массива горных пород, изменение которых отражает процессы деформирования и перераспределения напряжений в горном массиве под влиянием горных работ.

Для выделения в массиве горных пород потенциально удароопасного участка, где формируется очаг разрушительного геодинамического явления, мы использовали методы кластерного анализа. Алгоритм определения потенциально опасных зон основывается на теории графов. Этот алгоритм использует представление наблюдений в виде графа, вершинами которого являются точки-источники звука. Мы вводим ребра в граф, если расстояния между точками меньше некоторого критического значения. Компоненты связности графа характеризуют принадлежность микро сейсмо-акустических явлений к кластерам. Исходными данными для построения этих кластеров является массив координат точек – источников звука. Таким образом эти данные позволяют создать фильм, который показывает динамику развития опасных зон.

Для реализации этого алгоритма разработано математическое обеспечение, которое позволяет представить в горном массиве процесс образования очагов разрушительных геодинамических явлений по

данным сейсмоакустического мониторинга. Программное обеспечение анализирует информацию через некоторый временной интервал и выделяет потенциально опасные зоны. Графический результат работы математического обеспечения представляется в интерактивном режиме и позволяет получить информацию, связанную с наблюдаемыми процессами. Матобеспечение позволяет работать с 3D изображениями и оценивать размеры и смещение найденных зон. Тесты предлагаемого алгоритма и матобеспечения в сочетании с автоматизированной системой гео-механического мониторинга в условиях работающего горного производства в Дальневосточном регионе показало свою эффективность для определения потенциально опасных зон в горном массиве. Предварительная версия этого алгоритма представлена в [32].

При обработке посуточной динамики индекса КУД [33] возникает задача определения границы КУД, при достижении которой необходимо приостанавливать горные работы и применять способы предотвращения горных ударов. Сложность этой задачи состоит в достаточном редком возникновении горных ударов или проявлений техногенной сейсмичности. В условиях месторождения “Антей” только в четырех процентах случаев повышение акустической активности завершаются разрушительным геодинамическим явлением.

Показатель КУД нормируется по среднему значению входящих в него параметров за 5 предыдущих суток и определяется из выражения: $KUD = EN/Rtv$, где E – общая суточная энергия в активной зоне, N – суточное число звуковых сигналов в активной зоне, R – среднее расстояние между источниками звуковых сигналов, t – среднее время между соседними звуковыми сигналами, v – скорость миграции центра акустической зоны. Процедура прогноза проявлений горного давления в зависимости от выбора критического уровня c представлена в виде: если $KUD \geq c$, тогда прогнозируется проявление. Критический уровень c выбирается по относительным частотам ρ_x правильно спрогнозировать проявление и ρ_0 – правильно спрогнозировать отсутствие проявления. При некотором значении a , выбранном экспертами, при $\rho_x \geq a$ выбирается значение $c = c_x$, максимизирующее $\rho_0(c)$.

3.1. Алгоритм кластеризации по матрице попарных расстояний

Известные в литературе [34], [35] алгоритмы выделения компонент связности в неориентированных графах основаны на поиске в глубину или в ширину, а алгоритмы выделения компонент сильной связности в орграфах – на вариации алгоритма поиска в глубину (алгоритмы Косарайю, Тарьяна). Эти алгоритмы определяют все вершины, достижимые из выбранной s при построении «дерева поиска», которое является компонентой связности, содержащей вершину s . Далее берется вершина, не попавшая в построенные ранее компоненты связности, и для нее строится «дерево поиска». Недостаток этих алгоритмов – это повторное возвращение к уже обработанным вершинам в «дереве поиска» и определение для каждой вершины из «дерева поиска» всех смежных с ней.

В настоящей работе для факторизации ориентированного и неориентированного графов предложены последовательные алгоритмы прохождения по всем вершинам графа и построение на каждом шаге классов эквивалентности, которые лишены перечисленных недостатков. А в случае ориентированного графа алгоритм последовательно устанавливает отношение частичного порядка между кластерами.

При работе алгоритма выделения компонент связности в неориентированном графе на шаге k поступает информация о связи k -ой вершины ребром с построенными на предыдущем шаге компонентами связности. Если такие компоненты связности найдены, то они объединяются в одну вместе с k -ой вершиной. Иначе появляется новая компонента связности, состоящая из одной k -ой вершины.

Пусть даны координаты $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ точек, являющихся источниками звука в горном массиве. Эти точки перенумерованы в порядке поступления от них звуковых сигналов. Опишем алгоритм разделения набора точек на кластеры в последовательности трехмерных векторов. Во-первых, матрица $R = ||r_{i,j}||_{i,j=1}^n$ составлена из расстояний между точками:

$$r_{i,j} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$$

Используя эту матрицу и некоторое критическое расстояние r , выбранное экспертом, построим матрицу $D = ||d_{i,j}||_{i,j=1}^n$: $d_{i,j} = 1$, если $r_{i,j} \leq r$, $d_{i,j} = 0$ иначе. Далее матрица D рассматривается как матрица смежности некоторого неориентированного графа с множеством вершин $\{1, \dots, n\}$. Скажем, что две вершины графа эквивалентны [36], [37], если в графе существует путь, соединяющий эти вершины. Построим алгоритм разделения вершин графа на такие классы эквивалентности, называемые компонентами связности. Для нашей цели важно не только выделить все компоненты связности, но и найти компоненту с наибольшим числом вершин и рассмотреть этот процесс в реальном времени. Поэтому на каждом временном шаге мы получаем координаты новой точки, числа и соответствующие им числа.

Рассмотрим неориентированный граф с конечным множеством вершин $\{1, \dots, n\}$ и ребер. Зададим граф матрицей смежности $||d_{ij}||_{i,j=1}^n$ и положим $d_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$. Скажем, что две вершины неориентированного графа эквивалентны [36], если в графе можно провести путь, соединяющий эти вершины. Построим алгоритм разбиения множества вершин графа на классы эквивалентности, называемые компонентами связности.

На шаге 1 рассмотрим первую вершину (обозначена 1) и составим компоненту связности $K_1 = \{1\}$. На шаге $t - 1$ вершины $1, \dots, t - 1$ разбиты на компоненты связности K_i , $i \in J$:

$$K_i \cap K_j = \emptyset, i \neq j, i, j \in J, \bigcup_{i \in J} K_i = \{1, \dots, t - 1\}.$$

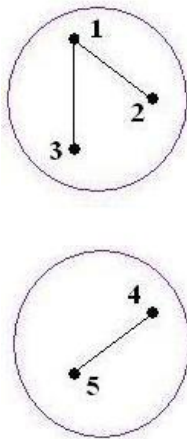
На шаге t рассматриваем вершину t , вычисляем $c_i = \max_{j \in K_i} d_{jt}$, $i \in J$, и полагаем

$$K_i := K_i, i \in J/I, K_t := \{t\} \cup [\bigcup_{i \in I} K_i], J := (J/I) \cup \{t\}, \\ I = \{i \in J: c_i = 1\}.$$

Ниже приведена графическая визуализация одного шага работы алгоритма и описаны компоненты связности в рассматриваемых случаях. Пусть на 5 шаге (рис. 3.1) были определены 2 компоненты связности $K_3 = \{1, 2, 3\}$, $K_5 = \{4, 5\}$. На 6 шаге приведены возможные

варианты факторизации: 1 вариант – вершина 6 не соединена ребром ни с одной из вершин {1,2,3,4,5}; 2 вариант – вершина 6 соединена ребром с вершиной 3; 3 вариант – вершина 6 соединена ребром с вершинами 3,4.

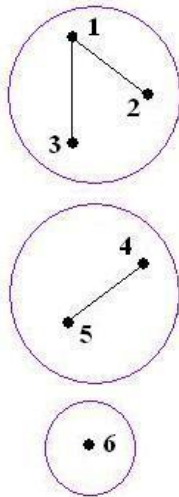
5-ый шаг



$$K_3 = \{1,2,3\}$$

$$K_5 = \{4,5\}$$

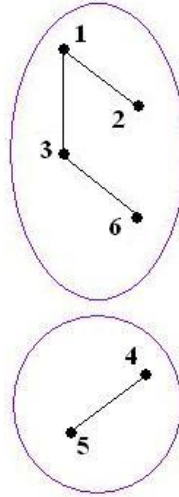
1 вариант
6-го шага



$$K_3 = \{1,2,3\}$$

$$K_5 = \{4,5\}, K_6 = \{6\}$$

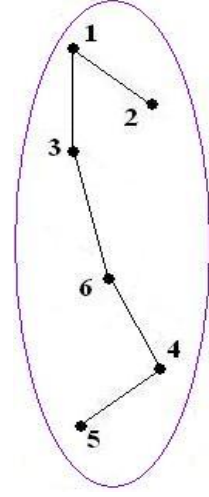
2 вариант
6-го шага



$$K_6 = \{1,2,3,6\}$$

$$K_5 = \{4,5\}$$

3 вариант
6-го шага



$$K_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Рис. 3.1. 5 и 6 шаг работы алгоритма

3.2. Численный эксперимент по наблюдениям за горной выработкой «Антей»

Месторождение урановых руд «Антей» расположено в юго-восточном Забайкалье России и характеризуются сложными горногеологическими и геомеханическими условиями, которые предопределили опасные проявления горного давления при ведении горных работ [38]. Месторождение состоит из локализованных в зонах разломов крутопадающих рудных тел субмеридионального простирания мощностью от нескольких до первых десятков метров и протяженностью по глубине до 1500 м. Вмещающими породами являются мелко- и средне зернистые лейкократовые граниты, а также биотитовые граниты и

гранитогнейсы. Практически все разновидности пород месторождения, а особенно лейкократовые граниты, проявляют склонность к упругому деформированию и хрупкому разрушению в динамической форме. Предел прочности пород на одноосное сжатие вмещающих гранитоидов в среднем изменяется от 121 до 239 МПа, модуль Юнга – от 59,3 до 68,3 ГПа. По результатам натурных измерений установлено, что в гранитах фундамента действует неравнокомпонентное поле напряжений, где преобладают горизонтальные сжимающие напряжения, наибольшие из которых в 1,5–2,5 раза и более превышают гравитационную составляющую от веса налегающей толщи пород. На месторождении «Антей» применяются методы и средства оценки и контроля удароопасности, включая автоматизированную геоакустическую систему контроля горного давления «Prognoz ADS», которая позволяет регистрировать и определять параметры АЭ-событий в частотном диапазоне 0,5–12 кГц [31]. В настоящее время на 6 горизонтах месторождения «Антей» установлено более 30 приемных преобразователей системы «Prognoz ADS».

На рисунках 3.2–3.6 представлены результаты вычислительного эксперимента по данным, полученными с месторождения «Антей» [31] в период с 01.02.2010 г. по 30.06.2010 г. при условии $r = 4m$. На рисунках в указанные периоды наблюдений красным цветом выделены точки, входящие в наиболее крупный кластер, а синим цветом – остальные точки.

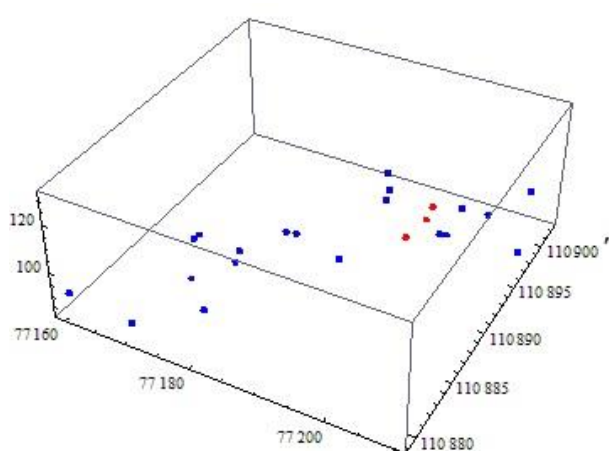


Рис. 3.2. Результаты
за 01.02.10-28.02.10

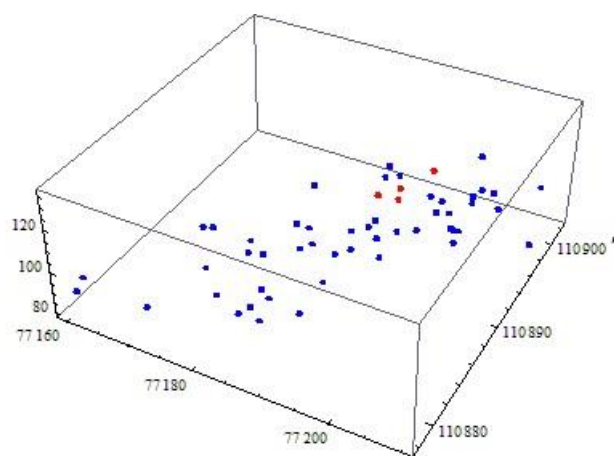


Рис. 3.3. Результаты
за 01.02.10-31.03.10

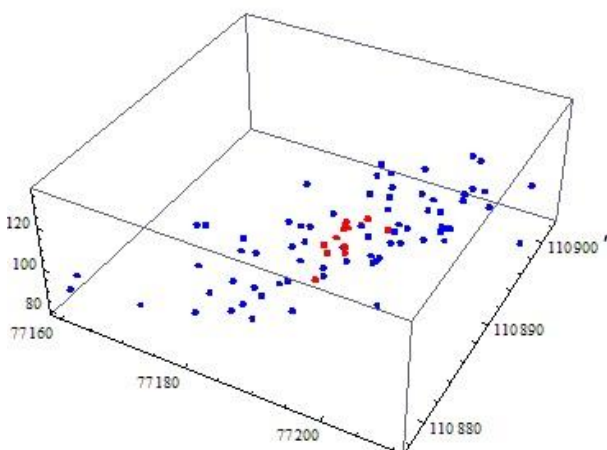


Рис. 3.4. Результаты за
01.02.10-30.04.10

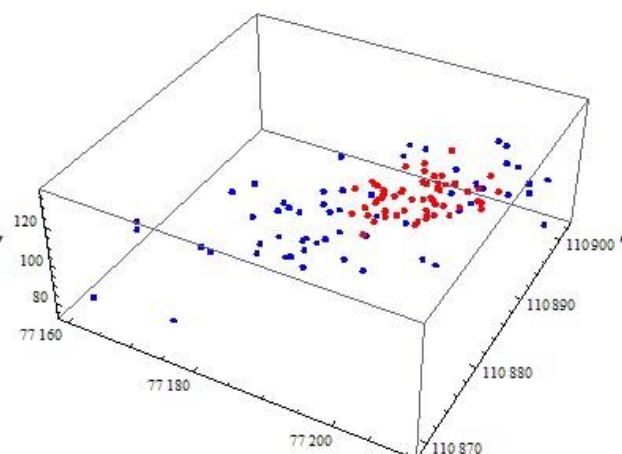


Рис. 3.5. Результаты за
01.02.10-31.05.10

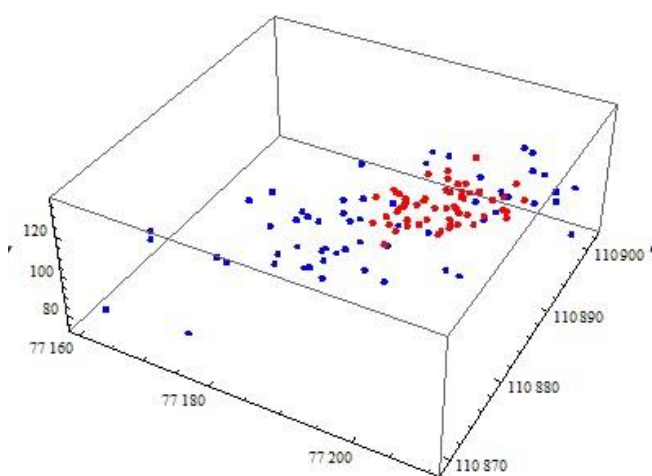


Рис. 3.6. Результаты за 01.02.10-30.06.10

3.3. Алгоритм прогнозирования критических событий

В работе [39] рассмотрена задача прогнозирования критического события в горной шахте по значению обобщенного показателя, вычисленного на основании данных акустического мониторинга [30]. С точки зрения обработки данных специфика этой задачи состоит в том, что критические события являются редкими. Настоящая задача была решена путем выбора способа прогнозирования критического события по результатам анализа частот прогнозирования наличия критического события и его отсутствия в обучающей выборке. Однако в [39] не было представлено полного математического обоснования

алгоритма построения этого правила. В настоящей заметке восполнен этот информационный пробел.

Пусть задана обучающая выборка, состоящая из двумерных векторов (x_k, y_k) , $k = 1, \dots, n$, где $x_k > 0$, – значение обобщенного показателя, y_k – логическая переменная, характеризующая наличие критического события. Если $y_k = \times$, то событие присутствует в момент времени k , в противном случае $y_k = \bullet$ (рис. 3.7).



Рис. 3.7. Представление обучающей выборки на прямой набором символов \times , \bullet

Для предсказания критического события сформулируем следующее правило: если $x_k \geq c$, где $c > 0$, то в момент k происходит критическое событие, в противном случае прогнозируется отсутствие критического события. Пусть в обучающей выборке содержится n_\times моментов наступления критических событий и $n_\bullet = n - n_\times$ моментов отсутствия критических событий. Обозначим $n_\times(c)$ количество правильных прогнозов критического события и $n_\bullet(c)$ – количество правильных прогнозов отсутствия критического события при заданном значении c (рис. 3.8, 3.9).

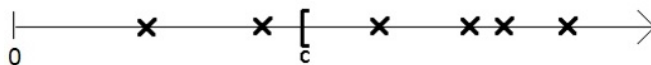


Рис. 3.8. Определение числа $n_\times(c)$: точки \times правее c

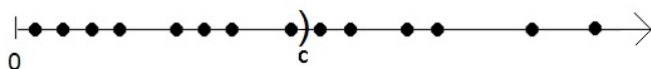


Рис. 3.9. Определение числа $n_\bullet(c)$: точки \bullet левее c

Введем частоты $\rho_\times(c) = n_\times(c)/n_\times$, $\rho_\bullet(c) = n_\bullet(c)/n_\bullet$ прогноза критического события и прогноза отсутствия критического события. В [39] возникла задача корректного определения значения c , задающего

границу для правил прогноза. Для этого можно потребовать, чтобы выполнялось соотношение $\rho_{\times}(c) \geq a$, где величина a определяется экспертным методом и характеризует допустимую частоту ошибок прогнозирования. При выполнении этого соотношения поставим задачу максимизации $\rho_{\bullet}(c)$ и обозначим через c_* наибольшее значение c , являющееся решением этой оптимизационной задачи (строго говоря, решением этой оптимизационной задачи является отрезок с правым концом c_*):

$$\max(\rho_{\bullet}(c): \rho_{\times}(c) \geq a) \Rightarrow c = c_*. \quad (3.1)$$

Рассмотрим вспомогательную оптимизационную задачу:

$$\max(c: \rho_{\times}(c) \geq a) \Rightarrow c = c^*. \quad (3.2)$$

Теорема 3.1. *Задачи (3.1), (3.2) имеют единственные решения c_*, c^* , и справедливо равенство $c_* = c^*$.*

Доказательство. Из определения функции $\rho_{\times}(c)$, $c \geq 0$, следует, что она является ступенчатой, невозрастающей и непрерывной слева (рис. 3.10), а функция $\rho_{\bullet}(c)$, $c \geq 0$, является ступенчатой, неубывающей и непрерывной справа (рис. 3.11).

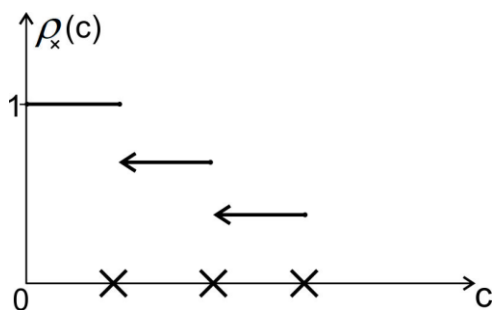


Рис. 3.10. Вид функции $\rho_{\times}(c)$

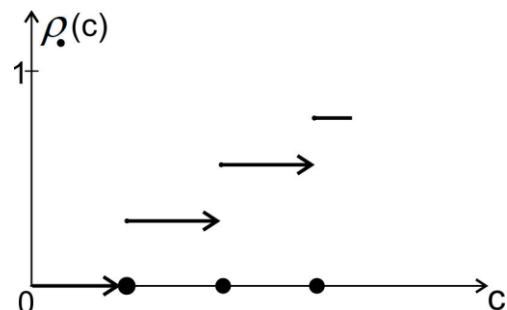


Рис. 3.11. Вид функции $\rho_{\bullet}(c)$

Из свойств функции $\rho_{\times}(c)$ следует, что множество $\{c: \rho_{\times}(c) \geq a\} = [0, c^*]$ и значит точка c^* определяется единственным способом. В свою очередь,

$$\max(\rho_{\bullet}(c): \rho_{\times}(c) \geq a) = \max(\rho_{\bullet}(c): c \in [0, c^*]). \quad (3.3)$$

Так как функция $\rho_{\bullet}(c)$, $c \geq 0$, является неубывающей и непрерывной справа, то ее максимум на отрезке $[0, c^*]$ достигается в единственной точке c_* . При этом возможны два варианта расположения c_* по отношению к точкам \bullet . Для первого из них на

рис. 3.12 точка c_* совпадает с точкой \bullet , для второго на рис. 3.13 точка c_* лежит или между соседними точками \bullet , или между нулем и ближайшей к нему точкой \bullet .

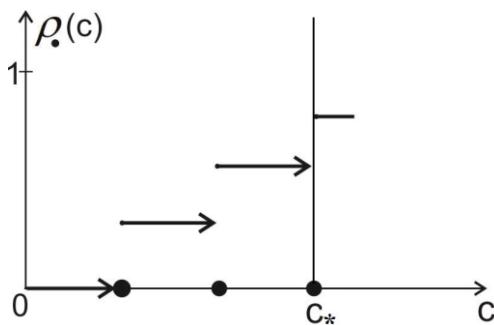


Рис. 3.12. Первый вариант
расположения c_*

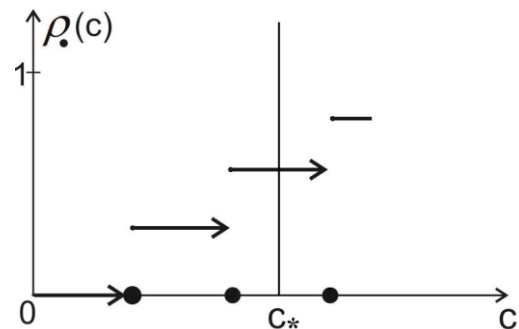


Рис. 3.13. Второй вариант
расположения c_*

Замечание 1. При вычислении c_* требуется знание всей выборки, состоящей из n элементов, а при вычислении c^* требуется знание только ее части, состоящей из n_x элементов. Вследствие того, что критические события являются редкими, справедливо соотношение $n_x \ll n$.

Замечание 2. Функция $\rho_x(c)$ характеризует степень безопасности работы в шахте, а функция $\rho_*(c)$ характеризует отсутствие ложных тревог, что влияет на экономические результаты деятельности предприятия.

Для выборки длины 310 мы имеем $n_x = 13$, $n_* = 197$. Если $a = 0,7$, тогда $c_* = 5,116$, $\rho_x(c_*) = 0,77$, $\rho_*(c_*) = 0,86$. Вычисления по приведенным формулам основаны на выборке длины $n_* = 13$. Поэтому сложность таких вычислений невелика.

4. Формальная интерпретация задачи синтеза процедуры обработки поверхностей детали

Тенденция цифровизации общества, проникновение в сферу судостроительного производства технологических роботов, широкое использование оборудования с числовым программным управлением и необходимость ускорения подготовки производства требуют дальнейшего развития формальных инструментов и методов на основе теоретических разработок, описывающих реальные процессы и взаимосвязи между объектами. Для повышения эффективности судостроительных предприятий требуется разработка систем управления на основе современных достижений цифровых технологий, с учетом необходимого и достаточного информационного обеспечения [40].

Основной проблемой на пути организации цифрового производства (СІМ) в судостроении и судоремонте является невозможность автоматического формирования технологий обработки и сборки деталей и узлов [41]. Применяемые на сегодняшний день системы автоматизированного проектирования технологических процессов являются не более чем инструментом выбора типовых операций или процессов из специализированной базы данных [42]. Для повышения эффективности судостроительных предприятий требуется разработка систем управления на основе современных достижений цифровых технологий, с учетом необходимого и достаточного информационного обеспечения. Практика применения существующих систем автоматизации управления ресурсами сложных производств характеризуется рядом проблем, связанных с несогласованностью организационного взаимодействия подразделений и служб; чрезвычайной сложностью, а зачастую и невозможностью стыковки CAD, PLM и ERP систем; отсутствием формальных методов для автоматизации подготовки технологических процессов (бизнес-процессов); корректного производственного планирования при изменении выпускаемой продукции [41].

К одному из первых системных подходов к разработке технологических процессов можно отнести идею типизации

технологических процессов, изложенную в 30-х годах прошлого столетия профессором А.П. Соколовским [43, 44]. В основе типизации технологических процессов лежит попытка поставить в прямое соответствие элементы множества отработанных на практике технологий элементам множества конструкций. Это позволяет с некоторой долей приближения быстро подобрать описание процесса аналога для изготовления деталей. Кроме указанного подхода в нашей стране давно обсуждается вопрос о проектировании единичных технологических процессов, однако из-за отсутствия целостной формализованной системы проектирование выполняется по наитию и имеет существенные различия в разных технологических школах.

За рубежом использование компьютерных технологий для планирования процесса производства сформировалось четыре десятилетия назад. С тех пор активно ведутся научноисследовательские работы в области автоматизации процесса планирования CAPP (Computer-Aided Process Planning) [45], которые представляют практически полный аналог САПР ТП (систем автоматизированного проектирования технологических процессов) в России. Основными причинами разработки CAPP являются сокращение трудоемкости формирования технологических инструкций и повышение качества принимаемых решений [42, 46, 47]. Задачи CAPP систем – определение технологий и параметров, необходимых для преобразования заготовки в готовую деталь (изделие). Планирование процессов изготовления включает в себя интерпретацию проектных данных, формирование операций и определение их последовательности для изготовления деталей, подбор станков и режущих инструментов, определение параметров резания, выбор оснастки и приспособлений, а также расчет затрат времени обработки [42].

Проблеме формализации проектирования технологий и интеграции CAD, CAPP и ERP систем посвящены работы многих современных зарубежных авторов: Ван Л. (Wang L.) [48, 49], Галеви Г. (Halevi G.) [46, 47], Гао Л. (Gao L.) [50, 51, 52], Рейд Р.Д. (Reid, R. D.) [53], Сандерс Н.Р. (Sanders, N. R.) [53], Юсоф Ю. (Yusof Y.) [42], Хриссолурис Г. (Chryssolouris G.) [54], и др. В зарубежной практике

для определения и формирования технологической информации в системах САРР используется несколько подходов, основные – вариативный и генеративный подходы [42, 46, 55].

Вариативный подход, как следует из названия, создает план процесса как вариант существующего плана, при этом наиболее распространенным инструментом является так называемая групповая технология (GT – group technology). GT использует сходство между деталями, для их классификации в семействах элементов [42]. В сопоставлении с отечественными подходами, можно сказать, что он скорее является аналогом проектирования на основе типовых технологий и их элементов.

В последнее время в зарубежной практике наблюдается тенденция развития генеративного подхода [46, 55]. В этом типе САРР синтезируются различные данные процесса, такие как знание геометрии компонента, материал компонента, спецификации станков, режущие инструменты и устройства для удержания, последовательность операций и производственные затраты для создания плана процесса [56]. Однако несмотря на это, вариантный подход продолжают использовать некоторые компании-производители [42].

При проектировании технологических процессов изготовления деталей любых конструкций машин и механизмов решаются два комплекса технологических задач, один из которых связан с поиском и подбором технологий обеспечения свойств материала детали, а другой – с формированием реальной геометрической конфигурации, обеспечивающей окончательную форму каждой поверхности детали и их взаимное (относительное) расположение [41, 57].

Взаимное расположение поверхностей, иными словами, геометрическая структура детали определяется линейными и угловыми размерными связями между ними [41]. Влияние структуры размерных связей на формирование общей технологии, и в частности последовательности обработки поверхностей детали, показано в работах [41, 57]. Учитывая существование взаимосвязи между геометрической структурой и технологией ее получения, можно

сформулировать набор правил формального синтеза полного набора (множества) вариантов последовательности обработки поверхностей.

Для формализации решения ряда технологических задач с учетом состава поверхностей и структуры их взаимосвязей в работах авторов данной статьи предлагается использовать отображение положения каждой поверхности обрабатываемой детали в трехмерном пространстве в виде шестимерного вектора с указанием фиксируемых степеней свободы $\{X_l, Y_l, Z_l, X_a, Y_a, Z_a\}$ [41, 57]. Для этого размерные связи между поверхностями представляются в виде графов, где вершинами являются поверхности, а ребра соответствуют размерным связям одновременно для всех шести степеней свободы [41, 57, 58]. При этом количество возможных вариантов расстановки размеров определяется с помощью формулы А. Кэли, в соответствии с которой количество остовных деревьев в полном графе на n вершинах равно n^{n-2} [58]. Следует отметить, что задача поиска решений относится к классу NP-сложных, поскольку количество рассматриваемых вариантов чрезвычайно велико даже в пределах одной степени свободы и резко возрастает с увеличением числа поверхностей [49, 59, 60]. Например, для детали, имеющей 10 поверхностей, число возможных сочетаний размерных связей составляет 100000000, а для детали с числом поверхностей 20 количество вариантов исчисляется 26214410^{18} .

4.1. Содержательная постановка задачи

Геометрическая конфигурация детали определяется набором бесконечно протяженных поверхностей и конечным набором заданных отношений их взаимной ориентации. Таким образом, геометрическая конфигурация детали является областью определения технологии формирования геометрии детали. Множество вариантов расстановки размерных связей между поверхностями детали для каждой степени свободы определяется как количество остовных деревьев в графе, где вершинами обозначены поверхности, а ребрами размерные связи [41, 57].

Для изложения сути задачи используется некоторое упрощение, заключающееся в первоначальном рассмотрении примера в виде плоской детали в 2-мерном пространстве. Для двумерного пространства

общее количество степеней свободы равно 3, из них 2 – количество линейных движений, а вращательных равно 1. Таким образом, в рассматриваемом случае имеется три степени свободы, из которых две представляют собой линейные перемещения и третья – поворот.

Деталь рассматривается как плоское замкнутое полупространство, ограниченное определенным образом расположенными линиями (сторонами). В начальном состоянии (перед началом обработки) деталь представляется в виде заготовки, ограниченной только реально существующими необработанными (черновыми) сторонами.

Задача заключается в формальном описании для моделирования процесса обработки с помощью алгоритма направленного поиска поверхностей, реально имеющих в текущий момент на детали, которые могут быть использованы в качестве баз для ее ориентации при обработке заданных поверхностей относительно формообразующих движений инструмента.

Условиями поиска решений в примененном алгоритме являются: 1) наличие реально существующих поверхностей для использования в качестве баз; 2) наличие еще не обработанных поверхностей; 3) наличие размерных связей между реально существующими и обрабатываемыми поверхностями, необходимых и достаточных для ориентации обрабатываемых поверхностей; 4) одноступенчатая (однопереходная) обработка любой поверхности детали.

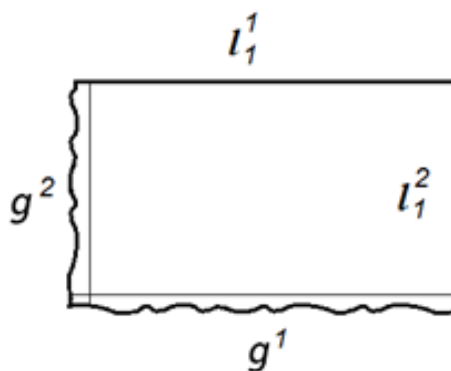


Рис. 4.1. Чертеж детали $G^{1,2}$

На рис. 4.1 изображен чертеж плоской детали, имеющей форму многоугольника G с множеством сторон $P = \bigcup_{k=1}^m P_k$. Каждое подмножество $P_k = \{l_1^k, \dots, l_{n_k}^k\}$ состоит из параллельных сторон,

$n_k \geq 1, 1 \leq k \leq m$. Стороны, входящие в различные подмножества, не являются параллельными. Каждой стороне l_1^k сопоставляется черная сторона g^k исходной детали.

Алгоритм последовательного выбора сторон для обработки основан на следующем предположении. Пусть многоугольник G является пересечением многоугольников $G^{1,2} \supseteq G^{1,2,3} \supseteq \dots \supseteq G^{1,2,\dots,m} = G$. Многоугольник $G^{1,2}$ состоит из сторон, входящих в множество $P^1 \cup P^2$, многоугольник $G^{1,2,3}$ состоит из сторон, входящих в множество $P^1 \cup P^2 \cup P^3$ и т.д. Сначала обрабатываются все стороны множества P^1 , затем обрабатываются все стороны множества P^2 , все стороны множества P^3 и т.д.

Множеству сторон P^k сопоставляются два идентичных взвешенных дерева Γ^k, Γ_k , вершинами которых являются стороны из множества P^k . Вес ребер дерева Γ^k определяют расстояния между сторонами, а вес ребер дерева Γ_k – углы между ними (в нашем случае это нулевые углы). Если сторона l_1^k обработана, то тогда с помощью взвешенных деревьев Γ^k, Γ_k , фиксируя уже обработанную сторону, можно обработать связанную с ней ребром ранее необработанную сторону. В этом случае обработанная сторона фиксируется специальным устройством, позволяющим выдерживать расстояние и угол между обработанной и необработанной сторонами. Таким образом основным моментом в алгоритме обработки сторон многоугольника является последовательная обработка сторон $l_1^1, l_1^2, \dots, l_1^m$.

4.2. Алгоритм обработки сторон детали

При $m = 2$ данная задача решена в работе [59]. Ее решение основано на следующем построении графов $\Gamma^{1,2}, \Gamma_{1,2}$. Граф $\Gamma^{1,2}$ состоит из несвязанных между собой дерева Γ^1 , к которому присоединено ребро (l_1^1, g^1) , и дерева Γ^2 с присоединенным к нему ребром (l_1^2, g^2) , как показано на рис. 4.2.

Граф $\Gamma_{1,2}$ состоит из дерева Γ_1 с присоединенным к нему ребром g^1 и дерева Γ_2 . Эти два дерева связаны ребром, начинающимся

вершине в некоторой вершине дерева Γ_1) и оканчивающимся в вершине l_1^2 (рис. 4.3).

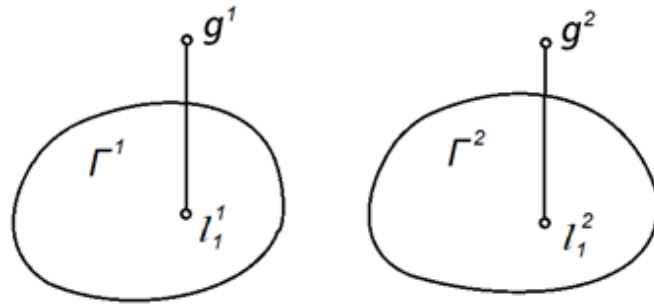


Рис. 4.2. Граф $\Gamma^{1,2}$

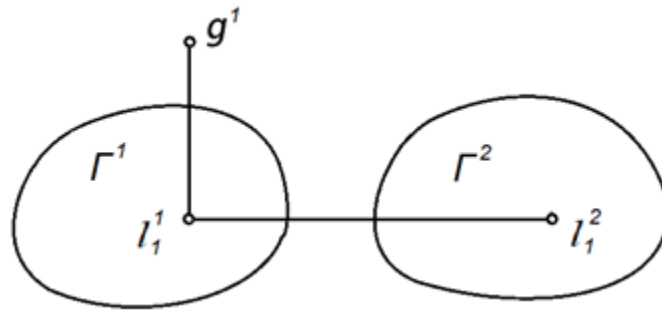


Рис. 4.3. Граф $\Gamma_{1,2}$

Для обработки вершины l_1^1 достаточно фиксации черной поверхности g^1 с выдерживанием расстояния и угла между сторонами l_1^1, g^1 . Для обработки вершины l_1^2 следует зафиксировать сторону g^2 и выдержать расстояние между сторонами l_1^2, g^2 . В свою очередь, угловое расположение стороны l_1^2 определяется фиксацией стороны l_1^1 и выдерживанием угла между ней и стороной l_1^2 . Таким образом, графы $\Gamma^{1,2}, \Gamma_{1,2}$ позволяют определить обработку сторон l_1^1, l_1^2 .

Алгоритм последовательной обработки сторон многоугольника $G = G^{1,2}$ выглядит следующим образом $R = g^1 \rightarrow l_1^1 \rightarrow \dots \rightarrow l_{n_1}^1 \rightarrow l_1^2 \rightarrow \dots \rightarrow l_{n_2}^2$. В упрощенном виде последовательность R можно представить в виде $R = g^1 \Rightarrow T^1 \Rightarrow T^2$, где $T^1 = l_1^1 \rightarrow \dots \rightarrow l_{n_1}^1$, $T^2 = l_1^2 \rightarrow \dots \rightarrow l_{n_2}^2$.

Перейдем теперь к случаю $m = 3$ и предположим, что исходный многоугольник удовлетворяет соотношению $G = G^{1,2,3} \subseteq G^{1,2}$ и

определены графы $\Gamma^{1,2}$, $\Gamma_{1,2}$, характеризующие многоугольник $G^{1,2}$ (рис. 4.4).

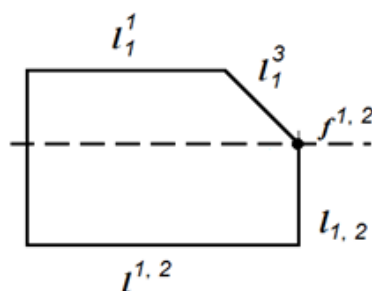


Рис. 4.4. Чертеж детали $G^{1,2,3}$

Чтобы перейти к обработке стороны l_1^3 , необходимо на чертеже указать сторону $l_{1,2} \in P^1 \cup P^2$ и пересекающую ее пунктирную прямую $f^{1,2}$, параллельную одной из сторон $l^{1,2} \in P^1 \cup P^2$. Для этого построим граф $\Gamma^{1,2,3}$ (рис. 4.5), характеризующий линейные размеры многоугольника $G^{1,2,3}$, путем присоединения к графу $\Gamma^{1,2}$ несвязанного с ним подграфа Γ^3 и пунктирного ребра $(l^{1,2}, f^{1,2})$. Пунктирная вершина $f^{1,2}$ изображена на чертеже детали пунктирной прямой. Она пересекает на чертеже сторону $l_{1,2}$, определяя тем самым точку пересечения, вокруг которой поворачивается сторона $l_{1,2}$, чтобы построить сторону l_1^3 .

В свою очередь, угловые размеры многоугольника G характеризуются графом $\Gamma_{1,2,3}$ (рис. 4.6), определяемым присоединением к графу $\Gamma_{1,2}$ дерева Γ^3 ребром (l_1^1, l_1^3) . Это ребро определяет угол между сторонами l_1^1, l_1^3 , начинающейся в точке пересечения пунктирной прямой $f^{1,2}$ с прямой $l^{1,2}$.

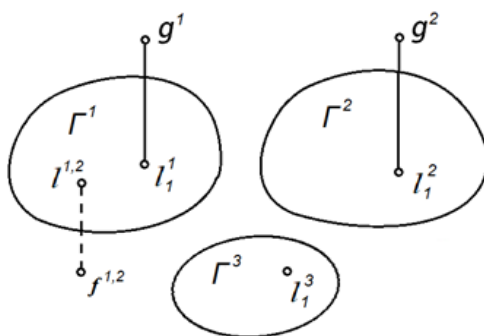


Рис. 4.5. Граф $\Gamma^{1,2,3}$

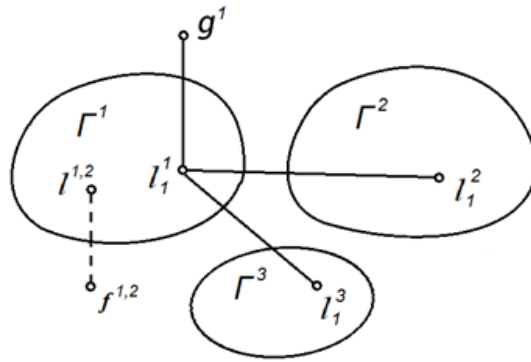


Рис. 4.6. Граф $\Gamma_{1,2,3}$

Таким способом, определяются в графах $\Gamma^{1,2,3}$, $\Gamma_{1,2,3}$ вершины, соединенные с вершиной l_1^3 (стороной многоугольника $G^{1,2,3}$). Тогда последовательность обработки сторон многоугольника G определяется как $R \Rightarrow T^3$, где $T^3 = l_1^3 \rightarrow \dots \rightarrow l_{n_3}^3$.

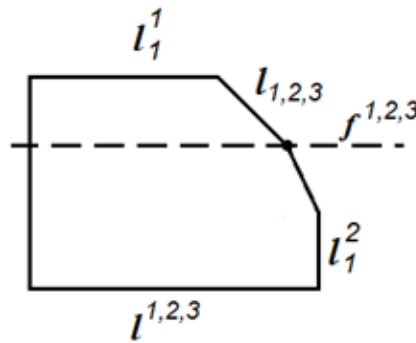


Рис. 4.7. Чертеж детали $G^{1,2,3,4}$

Методом индукции перейдем теперь к случаю $m > 3$, иллюстрируя его на рисунках 4.8-4.9 при $m = 4$. Предположим, что многоугольник $G = G^{1,\dots,m+1} \subseteq G^{1,\dots,m} \subseteq \dots \subseteq G^{1,2}$, определены графы $\Gamma^{1,\dots,m}$, $\Gamma_{1,\dots,m}$ и задана последовательность обработки сторон $G^{1,\dots,m}$. Чтобы перейти к обработке стороны l_1^{m+1} , необходимо на чертеже детали указать сторону $l_{1,\dots,m} \in P^1 \cup \dots \cup P^m$ и пересекающую ее пунктирную прямую $f^{1,\dots,m}$, параллельную стороне $l^{1,\dots,m} \in P^1 \cup \dots \cup P^m$.

Построим теперь граф $\Gamma^{1,\dots,m+1}$, характеризующий линейные размеры многоугольника $G^{1,\dots,m+1}$, путем присоединения к графу $\Gamma^{1,\dots,m}$ несвязанного с ним подграфа Γ^{m+1} и пунктирного ребра

$(l^{1,...,m}, f^{1,...,m})$. На чертеже пунктирная сторона $f^{1,...,m}$ пересекается с ребром $l_{1,...,m}$. В точке этого пересечения на чертеже начинается сторона l_1^{m+1} .

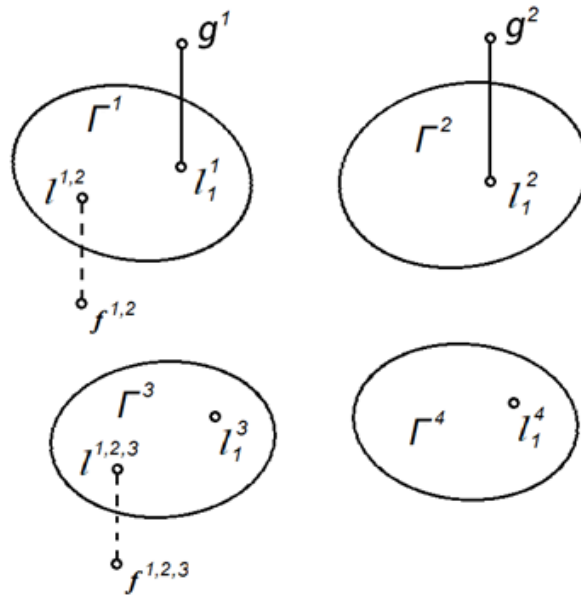


Рис. 4.8. Граф $\Gamma^{1,2,3,4}$

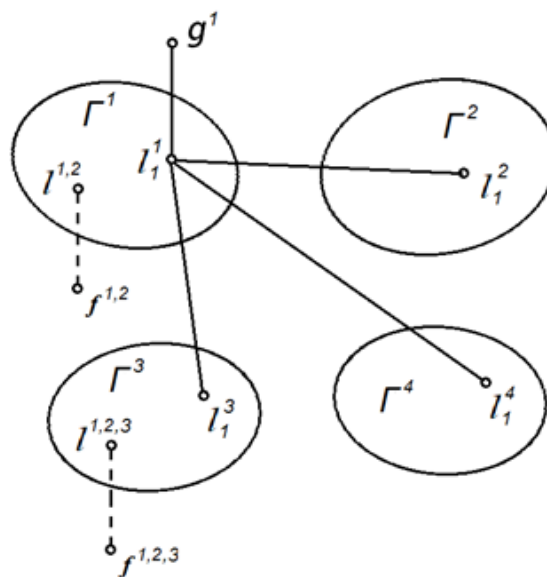


Рис. 4.9. Граф $\Gamma_{1,2,3,4}$.

В свою очередь, угловые размеры многоугольника G характеризуются графом $\Gamma_{1,...,m+1}$, определяемым присоединением к графу $\Gamma_{1,...,m}$ графа Γ^{m+1} ребром (l_1^1, l_1^{m+1}) и пунктирного ребра $(l^{1,...,m}, f^{1,...,m})$.

Таким образом, данное изложение позволяет для однозначно представляемых геометрических фигур со сколь угодно многочисленными множествами параллельных сторон определить последовательность их обработки.

В этой главе рассмотрено формальное представление алгоритма, реализующего цепочку операций последовательной обработки сторон многоугольника в двумерном пространстве с тремя степенями свободы. Иными словами, моделируется ситуация, когда на каждой операции обрабатывается только одна сторона и единожды используется сформированный комплект баз. Такой алгоритм применим для всех случаев расстановки размерных связей на де-тали для последовательной, параллельной и последовательно-параллельной схем расстановки структур. Схемы формирования комплектов баз и определения последовательности обработки для случаев параллельной расстановки координирующих размеров остались за рамками настоящей главы.

Приведенная формальная интерпретация задачи поиска технологических баз и синтеза последовательности обработки поверхностей детали на плоскости может служить основой для синтеза схем базирования в трехмерном пространстве с шестью степенями свободы, при проектировании технологий изготовления изделий и ремонта.

Представленные материалы могут быть положены в основу создания систем автоматизации и проектирования технологий судостроения и судоремонта.

5. Синергетические эффекты в сложных стохастических системах

Вопросы композиции и декомпозиции в многоэлементных стохастических системах актуальны для решения ряда задач. К ним относятся распараллеливание алгоритмов и программ, моделирование суперкомпьютеров, Интернета, компьютерных сетей, систем мобильной телефонной связи, разработка программных пакетов для моделирования катастрофических событий в сложных системах, проектирование и совершенствование технологических и экономических процессов и так далее.

Термин «синергия» (результат взаимодействия многих элементов системы) зародился в статистической физике, но в последнее время его используют специалисты из других областей: экономики, биологии, инженерии и т.д. Кроме того, исследования в этих областях больше не проводятся приводит к микроскопическим, но феноменологическим соображениям. Вот несколько примеров, взятых из истории науки и посвященных выявлению синергетических эффектов в сложных системах, которые были получены известными исследователями в их объективных областях, используя наблюдения и математическую интуицию.

Экономист А. Смит исследовал переход от цехового к мануфактурному производству на примере производства английских булавок. В цеховом производстве английская булавка изготавливалась полностью одним мастером, выполняющим все операции последовательно. На мануфактурном производстве каждая операция выполнялась отдельным мастером, что значительно повышало производительность труда.

Физиолог И.П. Павлов открыл условный рефлекс, обнаружив обратную связь в нервной системе организма. Теория стохастической обратной связи была разработана Н.Винером. Детальное изучение условного рефлекса привело П.К. Анохина к созданию концепции функциональной системы, которая срочно формируется в организме, когда необходимо достичь желаемого результата, и быстро

распадается после его достижения. Н. Винер и П.К. Анохин сотрудничали в развитии этого научного направления, активно обсуждая возможности математических методов в данной области.

Физик Э. Резерфорд открыл атомное ядро и предложил П.Л. Капице создать установку для воздействия сильного магнитного поля на атомное ядро. Длительно работающие установки расплавлялись под воздействием сильного магнитного поля. П.Л. Капица сконструировал установку, создающую сильное магнитное поле в течение короткого времени, которое оказалось достаточно большим для процессов, происходящих в атомном ядре.

Синергетические эффекты являются источником явных зависимостей между характеристиками системы на фоне достаточно больших случайных возмущений. Для их изучения необходимо было разработать специальные методики, основанные на структурном анализе многоэлементных стохастических моделей в сочетании с мажорантными асимптотическими оценками их показателей эффективности. Это, в свою очередь, потребовало новых методов работы со статистическими данными, а также навыков использования предельных теорем теории вероятностей и сопутствующих асимптотических разложений и оценок.

По нашему мнению многие работы по анализу сложных многоэлементных систем требуют на начальном этапе построения более простых моделей, позволяющих определить основные показатели эффективности и основные параметры, с помощью которых можно влиять на эти показатели. Для этой цели очень удобно строить процедуры сравнения систем с различными (альтернативными) структурами для изучения их эффективности при большом количестве элементов, при большой нагрузке и т.д. Для этой цели разработаны схемы и/или в качестве объектов сравнения могут быть использованы режимы сложных систем, вычислительные алгоритмы и т.д. В то же время на начальном этапе исследования следует соблюдать разумную пропорцию между точностью расчетов, которая может быть относительно небольшой; сложность расчетов, которая также не должна быть большой; и значимость полученных результатов, которая должна

быть достаточно большой. Сравнение систем с альтернативными структурами позволяет нам учитывать эти требования, так как с увеличением по количеству элементов различия между системами с альтернативной структурой довольно велики.

Первые работы, посвященные изучению синергетических эффектов, являются аналитическими обобщениями результатов численных и полевых экспериментов, проведенных при моделировании телекоммуникационных систем, контейнерных терминалов и др. В этой связи следует помнить, что в гидродинамике нелинейные солитонные волны также были впервые обнаружены в ходе численных экспериментов, а затем была построена их аналитическая теория. Использование вычислительных экспериментов позволяет получить более точные оценки синергетических эффектов. Это может быть использовано при работе с моделями, используемыми в программах «цифровая экономика», «умный город», при моделировании ставших популярными удаленных режимов работы, онлайн-конференциях, при использовании смартфонов и т.д. В настоящее время новые информационные технологии стремительно входят в нашу жизнь, и их исследования помогают нам адаптироваться к ним и самим адаптировать эти технологии к потребностям потенциальных пользователей (например, использование смартфонов пожилыми пользователями). Тем не менее, аналитические исследования помогают определить направление таких исследований и провести их. В некотором смысле это позволяет избежать очень сложных задач структурной оптимизации, значительной частью которых являются проблемы NP. Наряду с этим становится возможным использовать наблюдения за сложными системами, что также способствует изучению синергетических эффектов в них.

В данном разделе под синергетическим эффектом понимается существенное изменение показателей эффективности сложной системы при изменении ее структуры, т.е. связей между ее элементами. Проблемы сложности играют важную роль в современном системном анализе [61,62]. Для снижения сложности используются различные методы, среди которых важную роль играет

структурная трансформация системы [63,64]. Этот методологический прием тесно связан с вопросами устойчивости сложной системы [65].

Такой постановкой задачи может быть сравнение надежности раздельного и блочного резервирования двухполюсника с ненадежными ребрами [66]. Этот результат является классическим в математической теории надежности, и его уточнение или усиление может быть значительным само по себе. Отметим, что изучение надежности двухполюсников широко используется в различных теоретических и прикладных исследованиях (см., например, в [67-70] и др. Однако полученные в монографии [66] Барлоу и Прошана по сравнительному анализу различных схем резервирования, не получили развития в последующих работах, в то время как синергетические эффекты, выявленные в настоящей главе, оказались весьма значительными.

Особенностью этой задачи является использование вероятностной модели, которая, на первый взгляд, усложняют задачу. Этот переход требует выбора нового показателя эффективности – необходимого объема резерва, отражающего содержание процедуры резервирования и новизну предлагаемого подхода. С другой стороны, также необходимо построить достаточно слабые (логарифмические) зависимости так называемого показателя от числа элементов последовательного соединения. При выборе нового показателя эффективности схемы резервирования используется его аналогия с вероятностной метрикой [71]. Поэтому результаты, полученные в этом разделе, являются новыми, оригинальными и значимыми. Развитием этой тематики в данном разделе является исследование надежности двухполюсников, организованных по модульному принципу и широко применяемых в различных приложениях.

Наряду с этим в данном разделе исследуются многоканальные системы массового обслуживания с отказами. Такие системы возникают при моделировании современных сетей передачи данных (пятого поколения), сформулированных ведущими российскими специалистами в области математической теории связи Самуйловым К.Е. и Гайдамака Ю.В. [72]. Решение этой задачи основано на установлении синергетического эффекта в многоканальной системе с

отказами, когда стационарная вероятность отказа стремится к нулю, при устремлении к бесконечности количества каналов и пропорциональной ему интенсивности входного потока.

Аналогичные результаты получены в статистических задачах оценки числа редких животных в определенной области, в оценке большой интенсивности пуассоновского потока и т.д.

5.1. Применение систем массового обслуживания к конструированию телекоммуникационных сетей

Теория массового обслуживания, как современная область прикладной теории вероятностей, разработана в рамках исследования операций и является одним из основных инструментов математической теории телетрафика [72]. Особую роль в анализе производительности телекоммуникационных систем играют модели массового обслуживания будущих поколений этих систем. В частности, при конструировании современных телекоммуникационных сетей пятого поколения, несмотря на их высокую пропускную способность, появляется необходимость разделить конечное количество ресурсов между различными приложениями и пользователями.

В этой части работы разрабатываются асимптотические методы анализа телекоммуникационных сетей, наиболее важными характеристиками которых являются вероятность блокировки и величина нагрузки. Асимптотическое поведение вероятности блокировки впервые было проанализировано в [73] для случая, когда количество серверов и нагрузка велики. Был обнаружен синергетический эффект (устремление к нулю вероятности отказа), к которому, однако в дальнейшем на практике не возвращались. Этот эффект более детально исследован в связи с появлением новых задач по разделению конечного количества ресурсов в сетях пятого поколения между различными пользователями.

По аналогии с [73] в работе рассматривается n -канальная система массового обслуживания с отказами (блокировкой), при этом предполагается, что интенсивность входного потока пропорциональна n . Исследуется сходимость к нулю вероятности отказа при $n \rightarrow \infty$.

Конструируется совокупность многоканальных систем с отказами и одинаковой (или близкой) асимптотикой сходимости к нулю вероятностей отказа.

Рассмотрим n -канальную систему массового обслуживания $M|M|n|0$ с пуассоновским входным потоком интенсивностью $n\lambda$ и экспоненциально распределенными выремениами обслуживания интенсивностью μ на всех n каналах, $\rho = \lambda/\mu$. Эта система может быть рассмотрена как объединение n одноканальных систем с интенсивностями входных потоков λ .

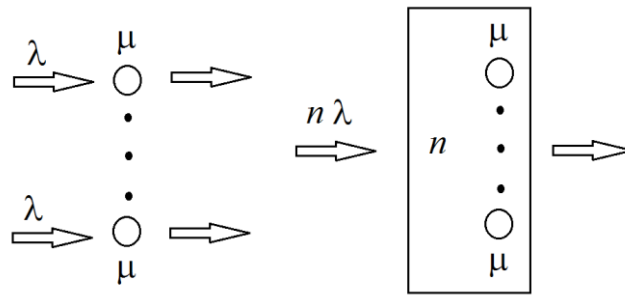


Рис 5.1. n изолированных систем $M|M|1|0$ (слева), объединенная система $M|M|n|0$ (справа)

Число заявок в системе $M|M|n|0$ описывается процессом гибели и рождения с интенсивностями рождения и гибели $\lambda_n(k) = n\lambda$, $0 \leq k < n$, $\mu_n(k) = k\mu$, $0 < k \leq n$, соответственно.

Обозначим $P_n(\rho)$ стационарную вероятность отказа в системе A_n при заданном ρ . Несложно установить, что $P_1(1) = 1/2$. Но объединенная система A_n удовлетворяет иному соотношению, характеризующему синергетический эффект такого объединения.

Теорема 5.1. При $n \rightarrow \infty$ справедливо следующее предельное соотношение:

$$P_n(1) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. При $\delta > 0$ рассмотрим функцию

$$f(x) = 1 - x - \exp(-(1 + \delta)x).$$

Функция $f(x)$ удовлетворяет условию: $f(0) = 0$, $f(1) < 0$ и, следовательно, неравенствам

$$f'(x) > 0, \quad 0 < x < \frac{\ln(1+\delta)}{1+\delta}, \quad f'(x) < 0, \quad \frac{\ln(1+\delta)}{1+\delta} < x \leq 1.$$

Таким образом, на полуинтервале $[0,1)$ существует единственное $x(\delta)$, удовлетворяющее условию $f(x(\delta)) = 0$ и, следовательно, неравенствам $1 - x \geq \exp(-(1+\delta)x)$, $0 \leq x \leq x(\delta) < 1$. Пусть $p_n(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(x_n(t) = k)$, $0 \leq k \leq n$, тогда

$$p_n(n-1) = p_n(n) \frac{\mu}{\lambda} \frac{n}{n}, \quad p_n(n-2) = p_n(n) \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 \frac{n(n-1)}{n^2}, \dots$$

Таким образом, стационарная вероятность отказа в силу интегральной теоремы восстановления и закона больших чисел для процесса восстановления [72, Chapter 9, § 4, 5] удовлетворяет равенству

$$P_n(\rho) = p_n(n) = \left(\sum_{k=0}^n \rho^{-k} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \right)^{-1}, \quad (5.1)$$

где $\prod_{j=0}^{-1}$ равно 1. Из формулы (5.1) получаем неравенство

$$\begin{aligned} P_n^{-1}(1) &\geq \sum_{0 \leq k \leq nx(\delta)} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \geq \sum_{0 \leq k \leq nx(\delta)} \prod_{j=0}^{k-1} \exp(-(1+\delta)j/n) \geq \\ &\geq \sum_{1 \leq k \leq nx(\delta)} \exp(-(1+\delta)k^2/2n). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$P_n^{-1}(1) \geq \int_1^{nx(\delta)} e^{-(1+\delta)x^2/2n} dx = \sqrt{\frac{n}{1+\delta}} \int_{\sqrt{\frac{1+\delta}{n}}}^{x(\delta)\sqrt{n(1+\delta)}} e^{-y^2/2} dy,$$

и значит

$$P_n(1)\sqrt{n} \leq (1+\delta) \left(\int_{\sqrt{\frac{1+\delta}{n}}}^{x(\delta)\sqrt{n(1+\delta)}} e^{-y^2/2} dy \right)^{-1} \rightarrow (1+\delta)\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\limsup_{n \rightarrow \infty} P_n(1)\sqrt{\frac{\pi n}{2}} \leq 1 + \delta$.

Используя формулу (5.1) и неравенство $1 - x \leq \exp(-x)$, $0 \leq x \leq 1$, получаем:

$$P_n^{-1}(1) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} e^{-k(k-1)/2n} \leq \sum_{1 \leq k \leq n} e^{-(k-1)^2/2n} \leq \int_0^\infty e^{-x^2/2n} dx,$$

откуда следует, что $1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} P_n(1) \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$. Полученные выше неравенства для для верхнего и нижнего пределов приводят к утверждению теоремы 5.1.

Замечание 5.1. Аналогичные результаты в системе $M|M|n|0$ получены для Эрланговской функции потерь в [74], [75], но существенно более сложными методами. Упрощение этих методов, приведенное в доказательстве теоремы 5.1 позволило существенно расширить полученные результаты. Так, в агрегированной системе $M|M|n|0$ при $\rho < 1$ справедливы следующие соотношения [76]:

$$e^{-n \ln^2 \rho / 2} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sqrt{\frac{\rho}{8}} \leq P_n(\rho) \leq (e^{-n \ln^2 \rho / 2})^{(\rho-1)/\ln \rho} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sqrt{\frac{\ln \rho}{\rho-1}}. \quad (5.2)$$

И, если $\rho = \rho(n) = 1 - n^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi n}} &\leq P_n(\rho) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \quad \gamma \geq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi n}} &\leq P_n(\rho) \exp\left(\frac{n^{1-2\gamma}}{2}\right) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi n}}, \quad \gamma < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Замечание 5.2. В агрегированной системе $M|M|n|\infty$ справедливы следующие соотношения [77] при A_n – стационарном среднем времени ожидания и B_n – стационарной средней длине очереди:

- 1) Если $\rho < 1$, то при некоторых $c < \infty$, $q < 1$ справедливы соотношения $A_n \leq cq^n$, $n \geq 1$.
- 2) Если $\rho = 1 - n^{-\alpha}$, $0 < \alpha < \infty$, тогда при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} A_n & \qquad \qquad \qquad B_n \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} 0, & \alpha < 1, \\ 1/\mu, & \alpha = 1, \\ \infty, & \alpha > 1. \end{cases} & \begin{cases} 0, & \alpha < 1/2, \\ \infty, & \alpha \geq 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

Предположим, что имеется m независимо функционирующих n_k -канальных систем массового обслуживания с пуассоновскими входными потоками интенсивностью λ_k , $k = 1, \dots, m$. В k -й системе заявка входного потока обслуживается случайное время с экспоненциальным распределением одновременно c_k каналами с интенсивностью μ_k . Пусть $l_k = n_k/c_k$ является натуральным числом и выполняется равенство $\rho_k = \lambda_k/(l_k \mu_k) = 1$.

Мы объединяем n копий каждой из рассматриваемых n_k -канальных систем, обозначая P_n^k стационарную вероятность отказа в каждой из объединенных систем, $k = 1, \dots, m$. Используя теорему 1, нетрудно получить следующие предельные соотношения

$$P_n^1 \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n l_1}}, \dots, P_n^m \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n l_m}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Это решение позволяет нам распределить общее количество каналов $n(n_1 + \dots + n_m)$ между потоками так, чтобы вероятности отказов заявкам разных потоков стремились к нулю с ростом большого параметра n . Для решения этой задачи можно было бы использовать точную мультипликативную формулу, полученную в [72], но это привело бы к более сложным вычислениям.

5.2. Нестационарная пуассоновская модель непрерывно функционирующей системы массового обслуживания

Исследование нестационарных систем массового обслуживания связано с их важными применениями в вычислительных системах (см., например, [78]). Алгоритмы расчета нестационарных систем обслуживания являются достаточно сложными (см., например, [79], [80]). Тем не менее развитие моделирования производственных процессов и связи, процессов торговли и бытового обслуживания (см., например [81] – [83]) требует развития методов расчета подобных систем массового обслуживания. В этой связи следует упомянуть активно развивающиеся сейчас государственные программы «Умный город», «Цифровизация экономики» (см., например, [84] – [86]), требующие развития и конкретизации методов расчета нестационарных систем массового обслуживания. Поэтому необходимо так строить нестационарные модели обслуживания, чтобы их расчет был бы достаточно простым и удобным для вычислений.

В данном разделе это удастся достичь предположениями детерминированности времени обслуживания, пуассоновости входного нестационарного потока заявок и наличием бесконечного

числа приборов, исключая пребывание заявки в очереди. Рассмотрим пуассоновскую модель системы обслуживания, в которой заявки образуют следующую модель пуассоновского потока. Такие системы можно назвать системами непрерывного действия и в них пользователь в течение фиксированного времени получает требуемую услугу сразу после своего прихода. Подобный способ обслуживания очень удобен потребителю, т.к. не привязывает его к графику работы системы обслуживания. Поэтому подобные системы обслуживания вполне вписываются, например, в программу «Умный город».

Наряду с описанными выше однофазными системами обслуживания непрерывного действия возможны различные конвейерные системы обслуживания непрерывного действия. К ним можно отнести непрерывные транспортные линии, включенные в процесс маркировки и упаковки продукции; сортировочные линии, предназначенные для перемещения грузов в процессе сортировки в логистических системах; линии вторичной упаковки, обеспечивающие хранение, защиту, маркировку и транспортировку к местам складирования; производственные логистические системы – объединение оборудования и непрерывных транспортных средств (конвейеров) для участия в процессе производства, сортировки и маркировки промышленной продукции.

В этом разделе такие системы представляются как сети обслуживания непрерывного действия с детерминированными временами обслуживания и отсутствием очередей в узлах. Для них в настоящей работе разрабатывается специальная математическая техника, основанная наряду с вероятностными расчетами на теории графов.

5.2.1. Модель одноканальной системы

Математической моделью системы обслуживания непрерывного действия может служить нестационарный пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$, $t \geq 0$, моментов прихода пользователей, стационарное время a обслуживания и значит пребывания пользователя в системе, а также количество пользователей $n(t)$ в системе в момент $t \geq 0$. На первом этапе полагаем, что интенсивность пуассоновского потока $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$ является

непрерывной функцией времени t . Однако для удобства вычислений следует предположить, что при $t \leq 0$ и при $t \geq T$ функция $\lambda(t) = 0$. В этом случае число пользователей $n(t)$ имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda(t) = \int_{t-a}^t \lambda(\tau) d\tau. \quad (5.3)$$

В качестве примера пользователями считать рассматривать посетителей плавательного бассейна, посещающих его в режиме свободного плавания. Однако возможна ситуация, когда наряду со свободным плаванием в бассейн в моменты t_k , $k = 1, \dots, n$ приходят группы пользователей в режиме плавания под руководством тренера. Обслуживание каждой такой группы работа строго регламентируется моментами начала t_k начала и $t_k + a$ окончания обслуживания. Если число пользователей в такой группе имеет пуассоновское распределение с параметром λ_k и независит от пуассоновского потока с интенсивностью $\lambda(t)$, а моменты t_k заранее оговариваются и значит являются детерминированными, то тогда в момент времени t число пользователей в системе имеет упассоновское распределение с параметром $\Lambda(t)$, удовлетворяющим равенству

$$\Lambda(t) = \int_{t-a}^t \lambda(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi(T_k \leq t \leq T_k + a), \quad (5.4)$$

где $\chi(A)$ – индикаторная функция события A .

Формулу (5.4) можно переписать с помощью конструкции дельта-функции, полагая $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \delta(t - T_k)$, в виде

$$\Lambda(t) = \int_{t-a}^t \tilde{\lambda}(\tau) d\tau. \quad (5.5)$$

В этом случае интенсивность входного потока $\tilde{\lambda}(t)$ является обобщенной функцией [87, глава II]. Если моменты T_k являются независимыми случайными величинами с плотностями распределения $\rho_k(u)$, $k = 1, \dots, n$, то тогда в формуле (5.5)

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t) + \sum_{k=1}^n \lambda_k \rho_k(t).$$

Следовательно, если функции $\lambda(t)$, $\rho_k(t)$, $k = 1, \dots, n$, непрерывны, то функция $\Lambda(t)$ непрерывно дифференцируема. Для сравнения заметим, что при жестком допуске посетителей в фиксированные моменты времени функция $\Lambda(t)$ кусочно постоянна и

значит, как правило, разрывна. В свою очередь нетрудно сосчитать время ожидания посетителей в очереди в случае, когда посетители допускаются строго по графику. В то же время посетители, которые сразу проходят без ожидания такого времени не имеют.

Предположим теперь, что имеется r независимых пуассоновских потоков с интенсивностями $\lambda_1(t), \dots, \lambda_r(t)$, а детерминированное время обслуживания заявки j -го потока равно β_j , $j = 1, \dots, r$. Тогда число пользователей в системе в момент t имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda(t) = \sum_{j=1}^r \int_{t-\beta_j}^t \lambda_j(\tau) d\tau.$$

Предложенная в этом разделе математическая модель системы обслуживания непрерывного действия основана на наблюдениях за реально функционирующим спорткомплексом. Предложенный менеджерами этого комплекса переход к системе обслуживания непрерывного действия существенно улучшил качество обслуживания, сгладил нагрузку на систему в реальном времени и позволил пользователям не зависеть от переменной транспортной ситуации в городе.

5.2.2. Модель ациклической сети

В настоящем разделе рассматриваются различные сети обслуживания непрерывного действия: многофазная система, сеть с древовидной структурой, сеть с ациклической структурой. Такие сети могут возникнуть не только при обслуживании пользователей, но и в конвейерных системах обработки различных деталей.

Многофазные системы обслуживания непрерывного действия. Рассмотрим m -фазную систему обслуживания с детерминированными временами a_i обслуживания на i -й фазе, $i = 1, \dots, m$. Пусть пуассоновский входной поток имеет непрерывную интенсивность $\lambda(t)$, $0 \leq t \leq T$, причем $\lambda(t) = 0$ при $t \leq 0$ и при $t \geq T$. Тогда число пользователей $n_i(t)$ на i -й фазе в момент времени t имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_i(t) = \int_{t-a_i-a_{i-1}-\dots-a_1}^{t-a_{i-1}-\dots-a_1} \lambda(\tau) d\tau, \quad 1 < i \leq m, \quad \Lambda_1(t) = \int_{t-a_1}^t \lambda(\tau) d\tau. \quad (5.6)$$

Сети обслуживания непрерывного действия с древовидной структурой. Предположим, что в корень 0 ориентированного дерева D поступает входной пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$. Множество вершин K дерева D состоит из непересекающихся подмножеств K_l , $l = 0, \dots, L$, $K_0 = \{0\}$. Заявка, окончив обслуживаться в узле $k \in K_l$ детерминированное время a_k , с положительной вероятностью $p_{k,t}$ перемещается в один из узлов множества K_{l+1} . Обозначим $K_{l,k} \subseteq K_{l+1}$ совокупность узлов множества K_{l+1} , куда могут переходить заявки из узла $k \in K_l$ с положительной вероятностью, тогда $\sum_{t \in K_{l,k}} p_{k,t} = 1$, причем $K_{k,l+1} \cap K_{k^*,l+1} = \emptyset$, $k, k^* \in K_l$, $k \neq k^*$, следовательно, узел $t \in K_{k,l+1}$ могут переходить только заявки из узла $k \in K_l$.

Обозначим p_k вероятность поступления заявки входного потока в вершину $k \in K_l$ и положим T_k суммарное время пребывания заявки в сети до момента ее выхода из вершины k . Из определения сети с древовидной структурой следует, что из вершины 0 в вершину $k \in K_l$ существует единственный путь

$$\gamma_k = \{0, s(1), s(2), \dots, s(l-1), s(l) = k\},$$

$$s(1) \in K_1, \dots, s(l-1) \in K_{l-1}, \quad k \in K_l$$

и значит выполняются равенства

$$p_k = p_{0,s(1)} \cdot p_{s(1),s(2)} \cdot \dots \cdot p_{s(l-1),k}, \quad T_k = a_0 + a_{s(1)} + \dots + a_{s(l-1)} + a_k. \quad (5.7)$$

Используя формулу (5.6), получаем, что в момент времени t случайное число заявок в вершине k имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_k(t) = \int_{t-T_{s_{l-1}}}^{t-T_k} P_k \lambda(\tau) d\tau.$$

Заметим, что пуассоновские случайные потоки, поступающие в вершины $k \in K_l$, и значит, пуассоновски распределенные случайные величины, характеризующие число заявок в вершинах $k \in K_l$ в момент $t \geq 0$, также независимы. Следовательно, если $K_l^* \subseteq K_l$, то число заявок, находящихся в момент времени t в множестве вершин K_l^* имеет пуассоновское распределение с параметром

$$\Lambda_{K_l^*}(t) = \sum_{k \in K_l^*} \Lambda_k(t).$$

5.2.3. Сети обслуживания со сборкой и разборкой заявок

Рассмотрим ациклический ориентированный граф (орграф) Γ с конечным множеством вершин U и множеством ребер V . Предполагаем, что в орграфе Γ существует единственная (входная) вершина u_0 , из которой в любую вершину можно провести путь. Обозначим $S(u)$ множество всех путей s из вершины u_0 в вершину u в орграфе Γ . Положим $l(u)$ максимальное число ребер в путях $s \in S(u)$, пусть $L = \max_{u \in U} l(u)$.

Множество вершин U разобьем на подмножества U_k , $0 \leq k \leq L$ вида

$$U(k) = \{u \in U: l(u) = k\}, \quad k = 0, \dots, L.$$

Доказано, что в орграфе Γ любое ребро (u', u'') , $u' \in U(k')$, $u'' \in U(k'')$ удовлетворяет неравенству $k' < k''$. Полагаем, что во входную вершину u_0 поступает нестационарный пуассоновский поток интенсивности $\lambda(t)$. Пусть $R(u) = \{u': ((u', u) \in V\}$ и значит $l(u') < l(u)$, $u' \in R(u)$.

Если в вершину $u \in U$ входит несколько ребер, то обслуживание заявки в ней начинается, когда все входные заявки соберутся в этой вершине, образуя единую заявку. Если из вершины $u \in U$ выходит несколько ребер, то это означает, что происходит разборка заявки, поступившей в эту вершину.

Сопоставим каждой вершине $u \in U$ время $t(u) \geq 0$ обслуживания заявки в вершине u . Построим рекуррентный по значению $l(u)$ алгоритм определения времени $T(u)$ выхода из вершины u заявки, поступившей в нулевой момент времени в вершину u_0 . Очевидно, что выполняется равенство

$$T(u) = \max_{s \in S(u)} \sum_{u' \in s} t(u').$$

Очевидно, что выполняется равенство

$$T(u) = \underline{T}(u) + t(u), \quad \underline{T}(u) = \max_{u' \in R(u)} T(u').$$

Используя это построение, можно вычислить параметр $\lambda(t, u)$ пуассоновского распределения числа заявок, находящихся в момент времени t в вершине u

$$\lambda(t, u) = \int_{t-T(u)}^{t-\underline{T}(u)} \lambda(\tau) d\tau.$$

В свою очередь параметр $\lambda(t, (u', u))$ пуассоновского распределения числа заявок, находящихся в ребре (u', u) , $u' \in R(u)$ удовлетворяет равенству

$$\lambda(t, (u', u)) = \int_{t-T(u)}^{t-T(u')} \lambda(\tau) d\tau.$$

5.3. Эргодичность статистических оценок интенсивности пуассоновского потока

При статистической обработке данных возникают задачи о замене длинного ряда наблюдений на несколько более коротких и несколько коротких рядов наблюдений на один более длинный. Задача замены длинного ряда наблюдений на короткие носит во многом технический характер, поскольку проведение длительных наблюдений затруднительно по техническим причинам. Такие задачи появляются, например, в оптоэлектронике [89], при статистической оценке времени наработки на отказ у технических систем [90] и т.д.

Задача замены нескольких коротких рядов наблюдений на один более длинный ряд тесно связана с задачей о малых выборках. Эта задача возникает при обработке наблюдений за поведением экологических, социологических, биоценотических, технических систем, наблюдений за потоками в системах массового обслуживания [91] – [93]. Трудности появляются при получении статистически достоверных оценок: несмещенных, состоятельных, эффективных и асимптотически нормальных. Переход к более длинному ряду наблюдений позволяет в некоторых случаях преодолеть эти трудности.

В этом разделе ставится вопрос, можно ли заменить длинный ряд наблюдений на несколько более коротких и, наоборот, несколько коротких рядов на один более длинный. Важно знать, как такие замены отразятся на качестве получаемых статистических оценок.

Оказывается, что этот вопрос упирается в понятие эргодичности процесса наблюдений: «среднее по ансамблю совпадает со средним по траектории». Эргодической теории динамических систем посвящено большое количество как теоретических, так и прикладных работ, см., например, [94] – [96].

Однако, чтобы использовать понятие эргодичности для решения задач о малых выборках и о длинных рядах наблюдений, необходимо подобрать удобную вероятностную модель наблюдений. В данном разделе для этой цели выбраны модель стационарного пуассоновского потока и модель последовательности времен наработки технических систем на отказ с показательным распределением, имеющим большое среднее значение. Построены статистические оценки интенсивности пуассоновского потока и параметра показательного распределения, для получения которых на основе свойства эргодичности выбраны удобные способы проведения наблюдений.

5.3.1. Оценка интенсивности пуассоновского потока

Рассмотрим стационарный пуассоновский поток Λ с интенсивностью θ . Пусть $A = [a, b)$, $a < b$, $B = [b, c)$, $b < c$, – непересекающиеся полуинтервалы на вещественной оси, $C = A \cup B$. Известно, что случайные величины $n(A)$, $n(B)$, определяющие число точек стационарного пуассоновского потока на непересекающихся полуинтервалах A , B , независимы [97]. Тогда случайные величины $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ имеют пуассоновское распределение с параметрами $\theta\alpha$, $\theta\beta$, $\theta\gamma$, $\gamma = \alpha + \beta$, $\alpha = b - a$, $\beta = c - b$. Из центральной предельной теоремы (см., например, [93, глава 7, теорема 2]) следует равномерная по t , $-\infty < t < \infty$, сходимость

$$P\left(\frac{n(C)/\gamma - \theta}{\sqrt{\theta/\gamma}} < t\right) = P\left(\frac{n(C) - \theta\gamma}{\sqrt{\theta\gamma}} < t\right) \rightarrow \Phi(t), \quad \gamma \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

где $\Phi(t)$ – стандартное нормальное распределение (с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией).

В качестве оценки параметра θ возьмем $\hat{\theta} = \frac{n(C)}{\gamma}$. Среднее и дисперсия этой оценки удовлетворяют равенствам

$$M\hat{\theta} = \theta, D\hat{\theta} = \theta\gamma. \quad (5.9)$$

Первое равенство в (5.9) означает несмещенность, соотношения (5.8), (5.9) влекут за собой состоятельность и асимптотическую нормальность оценки $\hat{\theta}$ при $\gamma \rightarrow \infty$.

Пусть полуинтервалы C_1, \dots, C_m попарно не пересекаются, имеют длину $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ и пусть выполняется равенство $\gamma = \sum_{k=1}^m \gamma_k$. Положим $n(C_1), \dots, n(C_m)$ – число точек пуассоновского потока Λ на этих полуинтервалах и построим статистическую оценку $\hat{\theta}'$ параметра θ :

$$\hat{\theta}' = \frac{\sum_{k=1}^m n(C_k)}{\sum_{k=1}^m \gamma_k}. \quad (5.10)$$

Т.к. $n(C)$ совпадает по распределению с $\sum_{k=1}^m n(C_k)$, то статистика $\hat{\theta}'$, определяемая равенством (5.10), совпадает по распределению со статистикой $\hat{\theta}$.

Таким образом, параметр θ можно оценивать как по наблюдениям за числом точек потока Λ на объединении непересекающихся полуинтервалов C_1, \dots, C_m , так и по наблюдениям за числом точек потока Λ на полуинтервале C длиной $\gamma \gg 1$. Причем число m может быть небольшим. Из формулы (5.10) следует, что оценку $\hat{\theta}'$ параметра θ можно рассматривать как медианту [99, с. 23], [100, с. 631], введенную для пары дробей, но допускающую обобщение для конечного числа дробей.

Эти свойства оценки $\hat{\theta}'$ интенсивности θ пуассоновского потока Λ близки к понятию эргодичности, что позволяет найти решение задачи о малых выборках, состоящих из числа точек пуассоновского потока на непересекающихся полуинтервалах с большой суммарной длиной.

5.3.2. Оценка большого параметра показательного распределения

Предположим, что имеется n технических систем, времена наработки на отказ которых y_1, \dots, y_n являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с показательным распределением $P(y_1 > t) = \exp(-t/T)$, $t \geq 0$. Пусть параметр $T = My_1$ является большим: $T \gg 1$. Нашей задачей является построение такого способа организации испытаний и процедуры оценивания параметра T , при которых увеличение числа испытываемых систем в m раз приводит к уменьшению среднего времени проведения испытаний в $m - 1$ раз.

Обозначим $\hat{T}_n = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$. При построении оценки \hat{T}_n суммарное время испытаний U_n с вероятностью единица удовлетворяет неравенству $U_n \geq \max(y_1, \dots, y_n)$. Следовательно, выполняются следующие соотношения

$$M\hat{T}_n = T, D\hat{T}_n = T^2/n, MU_n \geq M\max(y_1, \dots, y_n) \geq My_1 = T \gg 1. \quad (5.11)$$

Чтобы сократить суммарное время проведения испытаний, сконструируем следующую процедуру. Пусть nm систем начинают работу в момент времени 0. Испытания заканчиваются, когда откажут первые n систем. Предположим, что моменты отказа этих систем удовлетворяют соотношениям $0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_n$. Тогда независимые случайные величины $z_1 = T_1$, $z_2 = T_2 - T_1, \dots, z_n = T_n - T_{n-1}$ имеют показательные распределения с параметрами nmT , $(nm - 1)T, \dots, (nm - n + 1)T$. Следовательно, независимые случайные величины nmz_1 , $(nm - 1)z_2, \dots, (nm - n + 1)z_n$ имеют показательное распределение с параметром T . Используя наблюдения z_1, \dots, z_n , построим оценку \bar{T}_n параметра T :

$$\bar{T}_n = \frac{nmz_1 + (nm-1)z_2 + \dots + (nm-n+1)z_n}{n}.$$

Таким образом, случайная величина \bar{T}_n совпадает по распределению со случайной величиной \hat{T}_n и, значит, выполняются соотношения

$$M\bar{T}_n = T, D\bar{T}_n = T^2/n. \quad (5.12)$$

В свою очередь, полное время проведения испытаний $V_n = z_1 + \dots + z_n$ состоит из слагаемых z_k таких, что $Mz_k = \frac{T}{mn-k+1}$, $k = 1, \dots, n$, удовлетворяет соотношениям

$$T/m < MV_n = \sum_{k=1}^n T/(mn - k + 1) < T/(m - n).$$

И значит, для величины $S(m, n) = MV_n$ справедливы неравенства

$$T/m < S(m, n) < T/(m - 1). \quad (5.13)$$

Сравнение формулы (5.11) с формулами (5.12), (5.13) показывает, что увеличение числа испытываемых систем в m раз позволяет путем построения статистической оценки \bar{T}_n сократить среднее время проведения испытаний с MU_n до $MV_n = S(m, n)$ примерно в $m - 1$ раз. Такой способ организации испытаний и обработки их результатов может оказаться полезным при оценке параметра $T \gg 1$, характеризующего большое среднее время наработки на отказ. Этот прием близок к применению эргодичности при оценке интенсивности пуассоновского потока.

5.3.3. Ошибка в оценке среднего числа точек пуассоновского потока

Перед специалистами в области наук о земле стоит задача оценить погрешность среднего числа точек потока Пуассона по наблюдениям в разных ячейках квадратной сетки. Пусть область исследования разделена на m ячеек, а количество точек в них в ячейке k равно n_k , $k = 1, \dots, m$. Естественно предположить, что случайные величины n_1, \dots, n_m независимы и имеют распределения Пуассона с параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Используя свойства распределения Пуассона, легко установить, что случайная сумма $N = \sum_{k=1}^m n_k$ имеет распределение Пуассона с параметром $\Lambda = \sum_{k=1}^m \lambda_k$ и, следовательно, $EN = \Lambda$, $VarN = \Lambda$.

Используя известные свойства математического ожидания и дисперсии распределения Пуассона, мы переходим к оценке относительной погрешности. Для этого рассмотрим случайную переменную $N/EN = N/\Lambda$. Дисперсия этой случайной переменной

$Var \frac{N}{\Lambda} = \frac{1}{\Lambda}$ и поэтому относительная погрешность такой оценки удовлетворяет соотношению $\sqrt{Var \frac{N}{\Lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}$. Следовательно, относительная ошибка уменьшается с ростом Λ . Действительно, с помощью неравенства Чебышева из последнего равенства можно получить оценку

$$P(|N/\Lambda - 1| > \Lambda^{-1/3}) \leq \Lambda^{-1/3} \rightarrow 0, \Lambda \rightarrow \infty.$$

Этот результат не зависит от неравномерности плотности распределения пуассоновского потока точек, а следовательно, не зависит от параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Его можно учесть, выбрав показатель эффективности сложной системы, такой как относительная ошибка. Этот результат основан на хорошо известных моделях точечных потоков Пуассона в теории случайных множеств, которые используются в науках о земле [101].

5.4. Логико-вероятностное моделирование по модульному принципу

В работе [102] излагаются основы логико-вероятностного моделирования сложных систем, используемые в задачах надежности. В последнее время появляется все больше технических конструкций, основанных на модульном принципе. Модульный принцип применяется при проектировании вычислительной техники [103], станков с программным управлением и промышленных роботов [104], при моделировании процессов промышленного производства, в частности, в нефтехимии [105] и т.д. Однако математического эквивалента понятию модульного принципа в этих задачах нет.

В этой части работы дается определение системы, построенной по модульному принципу. Для этой цели система описывается с помощью монотонной булевой функции, характеризующей ее работоспособность. Булевой функции (характеризующей работоспособность) сопоставляется ориентированное дерево. От любого листа этого дерева существует (единственный) путь к его корню. Полагаем, что все ребра этого пути направлены в сторону корня. Строится рекурсивный алгоритм

вычисления булевой функции и надежности системы, описываемой этой функцией. Доказывается, что число арифметических операций для вычисления булевой функции, построенной по модульному принципу, и надежности системы зависит линейно от числа листьев в дереве. Тогда как для систем общего вида эта зависимость является экспоненциальной.

Пусть работоспособность системы определяется булевой функцией $A(x_1, \dots, x_n)$, где x_1, \dots, x_n – булевы переменные, характеризующие работоспособность отдельных элементов системы: если $x_k = 1$, то элемент k находится в рабочем состоянии, иначе элемент k отказывает, $k = 1, \dots, n$. Предположим, что булевы переменные x_1, \dots, x_n являются независимыми случайными величинами, $P(x_1 = 1) = p_1, \dots, P(x_n = 1) = p_n$.

Естественно предположить, что булева функция A , описывающая состояние системы, является монотонной. Иными словами, для любых наборов булевых переменных (x_1, \dots, x_n) , (x_1^*, \dots, x_n^*) из соотношений $x_1^* \leq x_1, \dots, x_n^* \leq x_n$ следует неравенство $A(x_1^*, \dots, x_n^*) \leq A(x_1, \dots, x_n)$. Известно, что любая монотонная булева функция $A(x_1, \dots, x_n)$ может быть определена с помощью суперпозиции операций конъюнкции и дизъюнкции [106].

Скажем, что монотонная булева функция $A(x_1, \dots, x_n)$, представляемая в виде суперпозиции операций конъюнкции и дизъюнкции, подчиняется модульному принципу, если она определяется дизъюнкцией или конъюнкцией булевых функций только от непересекающихся наборов булевых переменных

$$A_1(x_k: k \in K_1), A_2(x_k: k \in K_2), K_1, K_2 \subseteq \{1, \dots, n\}, K_1 \cap K_2 = \emptyset. \quad (5.14)$$

Для этого монотонную булеву функцию $A(x_1, \dots, x_n)$ представим с помощью ориентированного дерева D с n листьями, в которых находятся булевы переменные x_1, \dots, x_n . Ребра дерева D направлены от листьев к корню дерева. В каждой вершине дерева D , не являющейся листом, помещен значок конъюнкции или дизъюнкции. В каждую такую вершину входит два ребра, и из нее выходит одно ребро. Методом математической индукции несложно доказать, что в дереве D число вершин, не являющихся листьями, равно $n - 1$.

На каждом шаге алгоритма определения булевой функции $A(x_1, \dots, x_n)$ выделяются два листа, от которых ребра направлены непосредственно к одной вершине, содержащей операцию конъюнкции или дизъюнкции. После вычисления этой булевой операции над переменными, находящимися в листьях, образуется новый лист и в результате общее число листьев уменьшается на единицу. Алгоритм состоит из $n - 1$ шагов и продолжается пока у дерева не останется одна вершина. Один шаг вычисления $A(x_1, \dots, x_n)$ см. на рис. 5.2. Индукцией по n можно доказать, что такое определение булевой функции $A(x_1, \dots, x_n)$ является корректным, т.е. не зависит от порядка выделения пар листов, операция конъюнкции или дизъюнкции которых приводит к образованию нового листа.

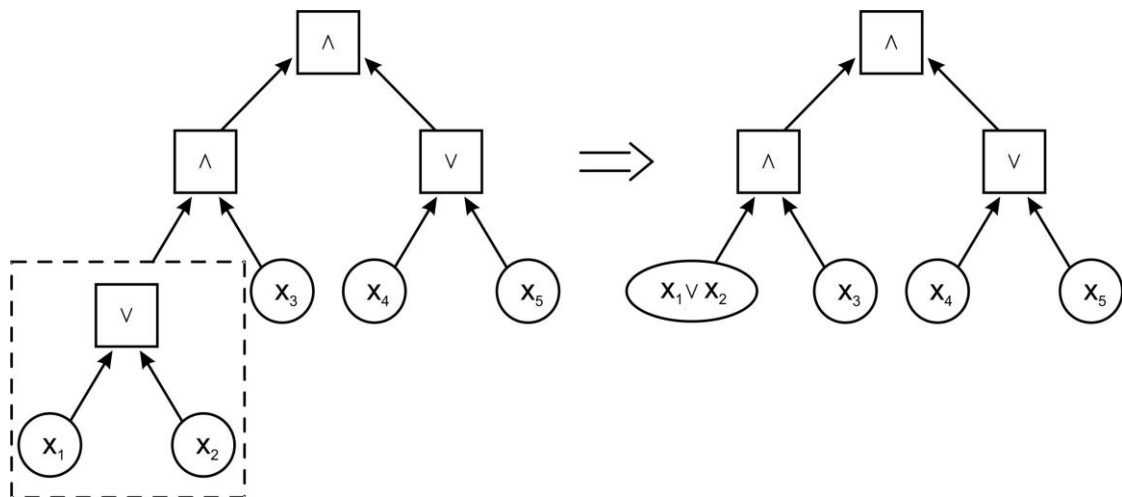


Рис. 5.2. Орграф, изображающий построение $A(x_1, \dots, x_n)$

Перейдем теперь к описанию алгоритма последовательного вычисления вероятности $P(A(x_1, \dots, x_n) = 1)$. Для этого в листьях дерева D заменим булевы переменные x_1, \dots, x_n на вероятности p_1, \dots, p_n . В свою очередь, операцию конъюнкции $x_1 \wedge x_2$ заменим на операцию $p_1 \otimes p_2 = p_1 \cdot p_2$, а операцию дизъюнкции $x_1 \vee x_2$ — на операцию $p_1 \oplus p_2 = p_1 + p_2 - p_1 p_2$. В результате такой замены (см. рис. 5.3) алгоритм вычисления булевой функции $A(x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в алгоритм вычисления функции надежности $P(A(x_1, \dots, x_n) = 1)$.

Следует отметить, что количество арифметических операций N_1 для вычисления вероятности $P(A(x_1, \dots, x_n) = 1)$ в случае, когда система подчиняется модульному принципу, определяется равенством $N_1 = 3n_{\oplus} + n_{\otimes} = O(n)$, где n_{\oplus} – число вершин вида \oplus , n_{\otimes} – число вершин вида \otimes в дереве D , $n_{\oplus} + n_{\otimes} = n - 1$. Для сравнения заметим, что в общем случае, когда булева функция $A(x_1, \dots, x_n)$ не подчиняется модульному принципу, вероятность $P(A(x_1, \dots, x_n) = 1)$ определяется равенством

$$P(A(x_1, \dots, x_n) = 1) = \sum_{x_1, \dots, x_n=0}^1 A(x_1, \dots, x_n) \prod_{k=1}^n p_k^{x_k}. \quad (5.15)$$

В формуле (5.15) величина p^x , $0 \leq p \leq 1$, $x = 0, 1$, определяется соотношениями: если $x = 1$, то $p^x = p$, если $x = 0$, то $p^x = 1 - p$. В правой части формулы (5.15) содержится 2^n слагаемых, поэтому количество N_2 арифметических операций для вычисления вероятности $P(A(x_1, \dots, x_n) = 1)$ удовлетворяет неравенству $N_2 \geq 2^n$.

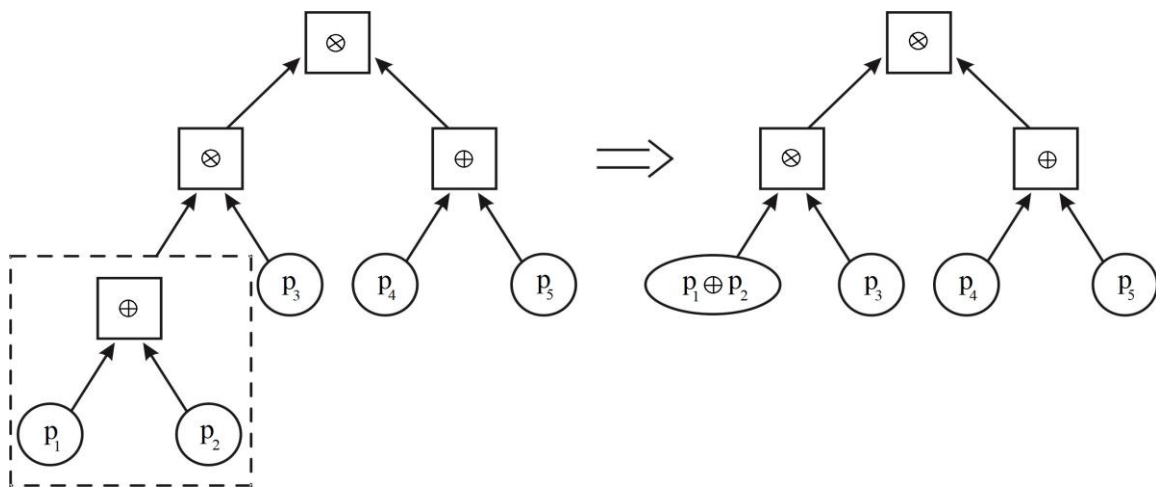


Рис. 5.3. Орграф, изображающий последовательность операций вычисления надежности $P(A(x_1, \dots, x_n) = 1)$

Булеву функцию $A(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющую модульному принципу, можно представить как индикатор соединения начальной и конечной вершин двухполюсника с n ребрами. Для этого листья дерева D заменяются на двухполюсники, изображающие отдельные элементы системы.

Далее заменяем два листа, соединенных в дереве D булевой операцией конъюнкции или дизъюнкции (см. рис. 5.2), на последовательное или параллельное соединение двухполюсников (см. рис. 5.4), помещенных вместо этих листов. Данная процедура рекурсивно продолжается до построения двухполюсника, соответствующего логической функции A .

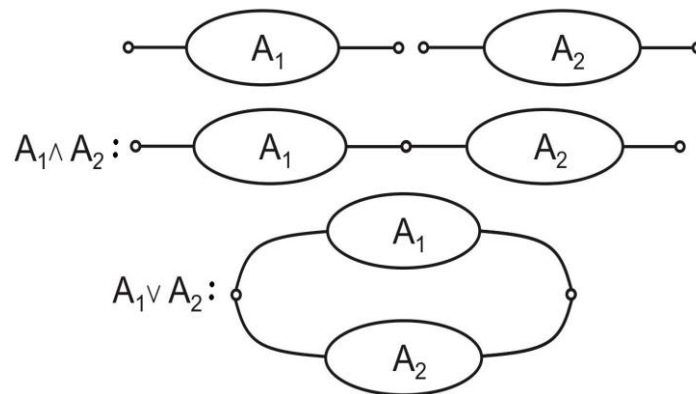


Рис. 5.4. Двухполюсники, изображающие A_1 , A_2 , $A_1 \wedge A_2$, $A_1 \vee A_2$

Следовательно, если известны вероятности p_k , $k = 1, \dots, n$, работоспособности отдельных элементов, то можно вычислить вероятность работоспособности всей системы с помощью рекурсивных формул для вероятности работы последовательных и параллельных соединений отдельных элементов.

5.5. Раздельное резервирование элементов двухполюсника

Рассмотрим m последовательно соединенных и независимо функционирующих элементов с вероятностью работы p , $0 < p < 1$. Вероятность работы такой цепи равна p^m . Сравним два альтернативных способа резервирования этой цепи. В первом способе n независимо функционирующих дубликатов соединяются параллельно (рис. 5.5).

Надежность такой сети равна $H^n(m) = 1 - (1 - p^m)^n$. Во втором способе каждый элемент цепи n – кратно резервируется отдельно (рис. 1). Надежность построенной таким образом сети равна $H_n(m) = (1 - q^n)^m$, $q = 1 - p$.

Из результатов монографии [66] следует, что $H_n(m) \geq H^n(m)$ (это неравенство выполняется для любого двухполюсника). Следует отметить, что подобные логико-вероятностные модели теории надежности получили дальнейшее развитие в работах [67], [68], [69], [70]. Однако приведенное выше неравенство дает только качественную оценку раздельного резервирования. Чтобы дать количественную оценку, удобно перейти от показателя надежности к необходимому объему резерва.

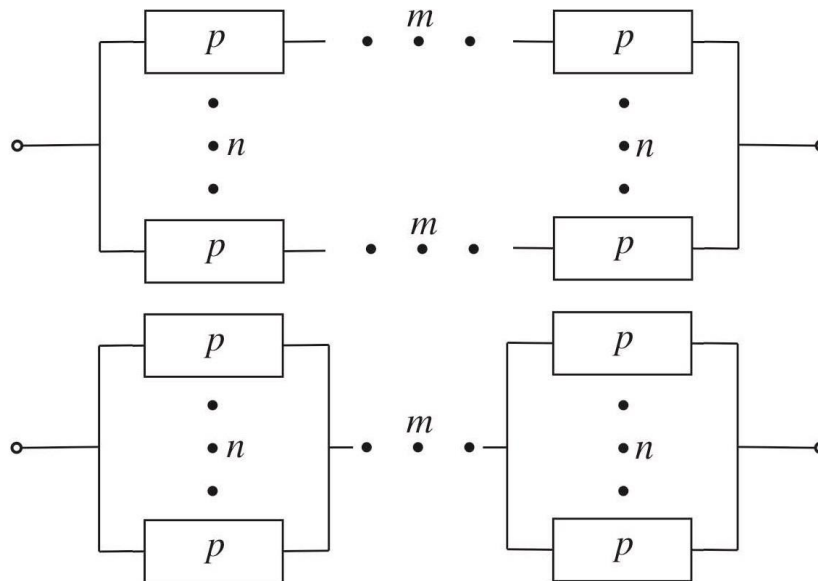


Рис. 5.5. n – кратное блочное резервирование (сверху), раздельное резервирование (снизу) цепи длины m

Для $\delta > 0$ положим $n^*(m, \delta) = \min(n: H^n(m) \geq 1 - \delta)$, $n_*(m, \delta) = \min(n: H_n(m) \geq 1 - \delta)$ необходимый объем резерва, при котором надежность больше или равна $1 - \delta$. Чтобы вычислить надежность произвольного двухполюсника, необходимо решить NP-сложную задачу. Но чтобы сравнить различные способы резервирования цепочки длиной m , необходимо всего лишь решить несколько простых неравенств. Более того, результаты этого сравнения очень контрастны, и наиболее интересные результаты, относящиеся к раздельному резервированию могут быть применены также к двухполюснику общего вида. Обозначим $[a]$ целую часть вещественного числа a .

Теорема 5.2. *Справедливы следующие неравенства*

$$n^*(m, \delta) \geq \left\lceil \frac{1-\delta}{p^m} \right\rceil + 1, \quad n_*(m, \delta) \leq \left\lceil \frac{\ln(\delta/m)}{\ln q} \right\rceil + 1. \quad (5.16)$$

Доказательство. Действительно, для любого a , $0 < a < 1$, справедливо неравенство

$$(1 - a)^m \geq 1 - ma, \quad m = 1, 2, \dots, \Rightarrow H^n(m) = 1 - (1 - p^m)^n \leq np^m,$$

$$\Rightarrow n^*(m, \delta) \geq \min(n: np^m \geq 1 - \delta) = \min\left(n: n \geq \frac{1-\delta}{p^m}\right) \geq \left[\frac{1-\delta}{p^m}\right] + 1,$$

Следовательно, первое соотношение в формуле (5.16) верно В свою очередь

$$H_n(m, \delta) \geq (1 - q^n)^m \geq 1 - mq^n,$$

$$\Rightarrow n_*(m, \delta) \leq \min(n: mq^n \leq \delta) \Rightarrow$$

$$n_*(m, \delta) \leq \min(n: \ln m + n \ln q \leq \ln \delta) \leq \left[\frac{\ln(\delta/m)}{\ln q}\right] + 1.$$

Таким образом, доказано и второе неравенство в формуле (5.16). Теорема доказана.

Таблица 5.1 демонстрирует насколько $n^*(m, \delta)$ больше $n_*(m, \delta)$. Сравнение этих соотношений показывает, что для цепочки большой длины m схема раздельного резервирования обеспечивает особые преимущества, поскольку нижняя граница, которая растет в геометрической прогрессии, заменяется верхней логарифмической границей. Следует отметить, что верхняя оценка необходимого резерва в схеме раздельного резервирования последовательной цепочки является логарифмической по m и может быть легко распространена на случай случай двухполюсника общего вида.

Таблица 5.1

Значения $n^*(m, \delta)$, $n_*(m, \delta)$ при $p = 0,7$, $\delta = 0,1$

m	1	2	3	4	53	6	7	8	9	10	11	12
$n^*(m, \delta)$	2	4	6	9	13	19	27	39	56	81	116	166
$n_*(m, \delta)$	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Действительно, рассмотрим двухполюсник, состоящий из m независимо работающих ребер с вероятностями работы $p_1, \dots, p_m \geq 1 - q$, $0 < q < 1$. Построим двухполюсник, в котором каждое ребро исходного двухполюсника является резервом из n идентичных элементов и обозначим $H_n(p_1, \dots, p_m)$ вероятность существования

рабочего пути от начальной до конечной вершины в этом двухполюснике.

Теорема 5.3. Для $n_*(p_1, \dots, p_m, \delta)$ справедливо следующее соотношение

$$n_*(p_1, \dots, p_m, \delta) \leq \left\lceil \frac{\ln(\delta/m)}{\ln q} \right\rceil + 1.$$

Доказательство этого соотношения основано на неравенстве

$$H_n(p_1, \dots, p_n) \geq (1 - (1 - p_1)^n) \cdot \dots \cdot (1 - (1 - p_m)^n) \geq (1 - q^n)^m \geq 1 - mq^n.$$

Это неравенство следует из того факта, что надежность произвольного двухполюсника с m независимо функционирующими элементами не меньше, чем надежность цепочки из m последовательно соединенных элементов. И поэтому второе неравенство в формуле (24) также верно. Для произвольного двухполюсника справедлива логарифмическая по m верхняя оценка величины необходимого резерва в схеме раздельного резервирования. Обратите внимание, что этот результат получен с использованием тривиальных неравенств и не требует вычисления надежности $H_n(p_1, \dots, p_m)$, что в общем случае является NP-проблемой.

Действительно, если $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ являются независимыми булевыми случайными величинами, которые описывают состояния элементов двухполюсника, а булева функция $A(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ описывает работоспособность двухполюсника в зависимости от состояний его элементов, то его надежность

$$H_A(p_1, \dots, p_m) = \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_m=0}^1 A(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \prod_{j=1}^m p_j^{\alpha_j},$$

с $p_j^1 = p_j$, $p_j^0 = 1 - p_j$, $j = 1, \dots, m$. Расчет надежности $H(p_1, \dots, p_m)$ формально требует выполнения 2^m арифметических операций.

Таким образом, удобный выбор показателя эффективности схемы резервирования в виде необходимого объема резерва решает две проблемы. Он позволяет получить сильную (логарифмическую) зависимость выбранного показателя эффективности от числа ребер двухполюсника m и позволяет отказаться от решения NP-задачи расчета надежности двухполюсника.

5.6. Цифровизация информации, заданной в узлах решетки

В настоящее время широко развивается программа цифровизации информации. Цифровизация в широком смысле – это процесс внедрения цифровых систем передачи на уровне первичных сетей, средств коммутации и управления, обеспечивающих передачу и распределение потоков информации в цифровом виде на уровне вторичных сетей, что делает производство более гибким, конкурентноспособным, а значит, более прибыльным. Эта тенденция позволяет по новому взглянуть на уже устоявшиеся способы в обработке информации и требует оценить точность преобразования информации в различных аспектах и обеспечить дальнейшее развитие информационных технологий.

Такая постановка вопроса приводит в том числе к оценкам точности при замене исходной информации ее цифровым выражением. В свою очередь оценки точности существенно влияют на правильность действий технических систем при получении внешней информации, а значит, на надежность их работы. Это требует необходимости построения математических эквивалентов понятиям, используемым в процессе цифровизации. В частности, появляется необходимость по новому взглянуть на понятие пикселя, используемого при замене исходной информации ее ступенчатой аппроксимацией. В результате появляется необходимость исследовать переход от исходных сигналов к сигналам, заданным на некоторой решетке. В свою очередь, обращение к сигналам, заданным на решетке, ставит новые вопросы к тем задачам, где подобная информация используется.

Здесь эта задача исследуется для некоторых вопросов метеорологии. Оказывается, что в этих задачах метеорологии важным аспектом анализа подобной информации является исследование особых точек на решетке. Детальное исследование особых точек (точек экстремума или седловых точек) позволяет по новому ставить и решать задачи прогнозирования метеорологических систем.

Эти вопросы являются предметом исследования в настоящей работе. Особое внимание здесь обращено на точность

воспроизводства информации по ее дискретным изображениям и на возможность сжатия информации для ее дальнейшего использования. Для этой цели существует возможность использования таких классических математических конструкций, как многомерные ряды Тейлора, положительно определенные квадратичные формы и т.д.

5.6.1. Математический эквивалент термина «пиксель»

В информатике термин «пиксель» (англ. pixel – сокращение от pictures element) [107] – наименьший логический двумерный элемент цифрового изображения в растровой графике, или физический элемент матрицы дисплеев, формирующих изображение. Он представляет собой неделимый объект прямоугольной (или круглой формы), характеризуемый определённым цветом.

Сигналы, передающие звук или меняющееся во времени изображение, в настоящее время цифровизируются, чтобы их удобно было передавать с одной точки в другую. В то же время для определения и оценки качества передаваемой информации желательно построить математический эквивалент понятия «пиксель».

Для этой цели естественно использовать ступенчатую аппроксимацию функций, представляющих передаваемые сигналы. Качество такой аппроксимации с уменьшением шага дискретизации (по времени и/или по координате) повышается. Учитывая значимость такой зависимости качества аппроксимации от шага дискретизации, естественно выразить эту зависимость математически.

Начнем решение задачи с анализа ступенчатой аппроксимации функции $f(t)$, заданной на полуинтервале $[0,1)$. Предположим, что эта функция является непрерывно дифференцируемой и при некотором положительном F выполняется равенство

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} |f'(t)| = F.$$

Разобьем полуинтервал $[0,1)$ на n частей точками $\frac{i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$. На полуинтервале $S_i = \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ аппроксимируем функцию $f(t)$ константой $f\left(\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}\right)$, построив таким способом

ступенчатую аппроксимацию $\hat{f}(t)$. Используя разложение функции $f(t)$ в ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа в окрестности радиуса $1/2n$ точки $\frac{i}{n} + \frac{1}{2n}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, получим следующее неравенство

$$\sup_{0 \leq t < 1} |f(t) - \hat{f}(t)| \leq \frac{F}{2n}.$$

Рассмотрим теперь непрерывно дифференцируемую функцию m – мерного аргумента $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$, $(t_1, \dots, t_m) \in [0, 1]^m$. Предположим, что существуют такие положительные числа F_1, F_2, \dots, F_m , что выполняются соотношения

$$\sup_{0 \leq t_k < 1} \left| \frac{\partial f(t_1, t_2, \dots, t_m)}{\partial t_k} \right| = F_k, \quad (t_1, t_2, \dots, t_m) \in [0, 1]^m, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Разобьем прямое произведение $[0, 1]^m$ – мерных полуинтервалов на прямые произведения полуинтервалов вида $S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_m}$, $i_1, \dots, i_m = 0, 1, \dots, n-1$. Построим ступенчатую аппроксимацию $\hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_m)$ функции $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$, полагая ее равной $f\left(\frac{i_1}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{i_2}{n} + \frac{1}{2n}, \dots, \frac{i_m}{n} + \frac{1}{2n}\right)$ в прямом произведении $S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_m}$, $i_1, i_2, \dots, i_m = 0, 1, \dots, n-1$.

Используя разложение функции $f(t_1, t_2, \dots, t_m)$ в m – мерный ряд Тейлора (см., например, [108]) с остаточным членом в форме Лагранжа в множестве $S_{i_1} \times S_{i_2} \times \dots \times S_{i_m}$, $i_1, i_2, \dots, i_m = 0, 1, \dots, n-1$ получим неравенство

$$\sup_{0 \leq t_1, t_2, \dots, t_m < 1} |f(t_1, t_2, \dots, t_m) - \hat{f}(t_1, t_2, \dots, t_m)| \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^m F_k. \quad (5.17)$$

Каждую ступеньку в аппроксимации \hat{f} функции f можно назвать пикселем. Причем с уменьшением линейного размера пикселя $1/n$ точность такой аппроксимации возрастает в соответствии с формулой (5.17). Заметим, что оценки точности ступенчатой аппроксимации в зависимости от линейных размеров пикселя выражены в равномерной метрике.

5.6.2. Геометрическая интерпретация информации в узлах квадратной решетки

Важнейшим элементом структуры поля давлений на высоте 5 км над Дальним Востоком является устойчивая и обширная ложбина. Интенсивность и географическая локализация ее в значительной мере определяет характер атмосферной циркуляции и погоды [109], [110]. При исследовании этой ложбины выделяют в узлах квадратной решетки на карте, тот узел, в котором поле давлений принимает минимальное значение и строят изолинии уровня давления.

Однако алгоритмизовать и аналитически исследовать такое построение достаточно сложно. Поэтому в этой части работы предпринимается попытка исследовать функцию, заданную в узлах решетки, в малой окрестности точки минимума, предполагая, что шаг квадратной решетки достаточно мал. Предполагая, что гладкая функция, заданная в узлах решетки достигает минимума в точке узла решетки, можно вычислить коэффициенты ряда Тейлора.

Коэффициенты первого порядка равны нулю, а коэффициенты второго порядка задают положительно определенную квадратичную форму, линии уровня которой являются эллипсами. Вычисления показывают, что ориентация большой и малой осей такого эллипса и их отношение во многом определяют характер атмосферной циркуляции. Но поскольку вторые коэффициенты ряда Тейлора определяются по значениям функции в узлах квадратной решетки, то необходимо исследовать алгоритм их определения и его точность в зависимости от длины шага решетки.

Пусть трижды непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ определена на прямоугольнике $D = \{0 \leq x \leq Nh, 0 \leq y \leq Mh\}$ и измерена в точках (ih, jh) , $i = 0, \dots, N$, $j = 0, \dots, M$. Всюду далее полагаем, что величина шага решетки h является достаточно малой. Известно, что в точке (kh, lh) функция f достигает глобального минимума. Причем точка (kh, lh) является внутренней в дискретном множестве $\{(ih, jh), i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, M\}$, т.е. $0 < k < N$, $0 < l <$

М. Представим разложение функции $f(x, y)$ в ряд Тейлора при условии $|x - kh| \leq h$, $|y - lh| \leq h$:

$$f(x, y) = f(kh, lh) + 12[A(x - kh)^2 + B(y - lh)^2 + 2C(x - kh)(y - lh)] + o(h^2),$$

$$A = f_{x,x}(kh, lh), \quad B = f_{y,y}(kh, lh), \quad C = f_{x,y}(kh, lh).$$

Поскольку точка (kh, lh) является точкой глобального минимума функции $f(x, y)$, то квадратичная форма $A(x - kh)^2 + B(y - lh)^2 + 2C(x - kh)(y - lh)$ является положительно определенной и значит выполняются неравенства $A + B > 0$, $AB > C^2$.

Построим конечно-разностные оценки частных производных A, B, C :

$$a = \frac{f((k+1)h, lh) - 2f(kh, lh) + f((k-1)h, lh)}{h^2} = A + O(h),$$

$$b = \frac{f(kh, (l+1)h) - 2f(kh, lh) + f(kh, (l-1)h)}{h^2} = B + O(h),$$

$$c = \frac{f((k+1)h, (l+1)h) - f((k+1)h, lh) - f(kh, (l+1)h) + f(kh, lh)}{h^2} = C + O(h).$$

Тогда функцию f можно аппроксимировать функцией \hat{f} с точностью $o(h^2)$ в переменных $X = \frac{x - kh}{h}$, $Y = \frac{y - lh}{h}$:

$$\hat{f}(x, y) = f(kh, lh) + \frac{1}{2}(aX^2 + bY^2 + 2cXY), \quad a + b > 0, \quad ab > c^2$$

и значит квадратичная форма $aX^2 + bY^2 + 2cXY$ также является положительно определенной.

Приведем эту квадратичную форму к диагональному виду (см., например, [111]), для чего построим ее матрицу $D = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ и выпишем характеристическое уравнение $(a - \lambda)(b - \lambda) - c^2 = 0$. Корнями этого уравнения являются

$$\lambda_{\pm} = \frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab + c^2} > 0, \quad - \text{собственные числа матрицы } D,$$

а ее ортонормированные собственные вектора \vec{n}_{\pm} удовлетворяют линейным уравнениям $D\vec{n}_{\pm} = \lambda_{\pm}\vec{n}_{\pm}$.

Перейдем в систему координат (u_+, u_-) с ортонормированным базисом \vec{n}_+ , \vec{n}_- . В этой системе координат квадратичная форма

$aX^2 + bY^2 + 2cXY$ представима суммой квадратов $\lambda_+ u_+^2 + \lambda_- u_-^2$. Линии уровня этой квадратичной формы являются эллипсами вида $\lambda_+ u_+^2 + \lambda_- u_-^2 = \text{const} > 0$. Обозначим $k = \sqrt{\lambda_+/\lambda_-}$, тогда для построения указанных эллипсов окружности, задаваемые уравнением $u_+^2 + u_-^2 = \text{const}$ следует сжать по оси u_+ в k раз. Коэффициент k можно интерпретировать, как отношение большой и малой осей эллипса, линии уровня которого определяются квадратичной формой $aX^2 + bY^2 + 2cXY$.

Интересно отметить, что если $f_x = f_y = 0$ и выполняется условие $ab < c^2$, тогда нетрудно установить, что $\lambda_+ > 0$, $\lambda_- < 0$ и значит квадратичная форма $aX^2 + bY^2 + 2cXY$ в переменных u_+, u_- имеет вид $\lambda_+ u_+^2 + \lambda_- u_-^2$ и является знакопеременной, а ее линии уровня являются гиперболами.

5.7. Разрешающая способность наиболее мощного решающего правила в задаче «свой-чужой»

В работах [112, 113, 114, 115] на основе электроэнцефалограммы строится нейросетевой преобразователь «Биометрия код доступа». Основным показателем эффективности этого преобразователя являются вероятность ошибок первого α_1 рода при выбранной экспертами вероятности ошибок α_2 второго рода по различению простых гипотез «свой – чужой». Это различение гипотез производится с помощью наиболее мощного решающего правила. Особую роль здесь играет совокупность характеристик выборки, с помощью которых производится различение этих гипотез.

В этой части работы вводится характеристика A разрешающей способности наиболее мощного решающего правила. Величина A определяется вероятностью α_2 , размером выборки n из независимых и одинаково нормально распределенных случайных величин с дисперсией σ^2 и разностью средних $a_1 - a_2$ этих случайных величин при выполнении альтернативных гипотез. Установлено, что вероятность ошибок первого рода сильно (приблизительно как

$\exp(-A^2)/\sqrt{2\pi}A$) зависит от разрешающей способности A наиболее мощного решающего правила.

Эта часть монографии основана на классификации статистических задач, предложенной в монографиях [116, 117], лемме Неймана – Пирсона и известном правиле нахождения по байесовскому решающему правилу наиболее мощного решающего правила. Важную роль здесь играет идея проверки статистических гипотез при обработке физических и физико-технических наблюдений [118, 119]. Основной характеристикой определяющей различающую способность A в данной статистической задаче является разность средних $a_1 - a_2$. Эта разность параметров, отвечающих гипотезам «свой – чужой» играет важную роль при конструировании технической системы, задающей код доступа, таким образом $A = A(a_1 - a_2, \alpha_2, n, \sigma)$.

Рассмотрим выборку x_1, \dots, x_n , состоящую из независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение со средним a и известной дисперсией σ^2 . Из двух гипотез $H_1 = (a = a_1)$, $H_2 = (a = a_2)$, $a_1 > a_2$ выбирается наиболее вероятная гипотеза. Этот выбор осуществляется в предположении, что вероятность ошибки второго рода $P(H_1/H_2) = \alpha_2$, где величина α_2 определяется экспертами (и в соответствии с требованиями ГОСТа). В этом предположении ищется решающее правило, минимизирующее вероятность ошибки первого рода $P(H_2/H_1)$. Поиск наиболее мощного решающего правила основан на лемме Неймана-Пирсона [116] и ищется в виде

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i > C \Rightarrow H_1, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq C \Rightarrow H_2. \quad (5.18)$$

Константа C определяется вероятностью ошибки второго рода α_2 из соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i > C/H_2\right) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a_2) + a_2 > C/H_2\right) \\ &= P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_2)}{\sigma} + \frac{a_2}{\sigma} > \frac{C}{\sigma}/H_2\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{n}(x_i - a_2)}{\sigma} > \frac{\sqrt{n}(C - a_2)}{\sigma}/H_2\right). \end{aligned}$$

Обозначим X случайную величину с нормальным распределением, имеющим нулевое среднее и единичную дисперсию. Тогда из приведенных равенств получаем

$$\alpha_2 = P\left(X > \frac{\sqrt{n}(C-a_2)}{\sigma}\right) = \int_{t(\alpha_2)}^{\infty} \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}} du, \quad t(\alpha_2) = \frac{\sqrt{n}(C-a_2)}{\sigma}. \quad (5.19)$$

Из формулы (5.18) следует, что константа C , определяющая решающее правило (5.18), удовлетворяет равенству

$$C = a_2 + t(\alpha_2) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.20)$$

Перейдем теперь к вычислению минимальной вероятности ошибки первого рода, используя соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \leq C/H_1\right) = P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - a_1) + a_1 \leq C/H_1\right) \\ &= P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - a_1)}{\sigma} + \frac{a_1}{\sigma} \leq \frac{C}{\sigma H_1}\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{n}(x_i - a_1)}{\sigma} \leq \frac{\sqrt{n}(C - a_1)}{\sigma H_1}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= P\left(X \leq \frac{\sqrt{n}(C-a_1)}{\sigma}\right) = P\left(X \geq \frac{\sqrt{n}(a_1-C)}{\sigma}\right) = \\ &= \int_{t(\alpha_1)}^{\infty} \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}} du, \quad t(\alpha_1) = \frac{\sqrt{n}(a_1-C)}{\sigma}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Подставляя формулу (5.20) в формулу (5.21), получаем

$$t(\alpha_1) = A(a_1 - a_2, \alpha_2, n, \sigma),$$

где величина

$$A(a_1 - a_2, \alpha_2, n, \sigma) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (a_1 - a_2) - t(\alpha_2) \quad (5.20)$$

определяет разрешающую способность наиболее мощного решающего правила (5.18).

Рассмотрим теперь, насколько сильна зависимость вероятности ошибок первого рода α_1 от этой величины. Для этого вычислим при $t > 0$

$$J(t) = \int_t^{\infty} \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}} du = \int_t^{\infty} \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}u} d\frac{u^2}{2} \leq \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}},$$

отсюда получим

$$J(t) = \int_t^{\infty} \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}u} d\frac{u^2}{2} = - \int_t^{\infty} \frac{d\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}u} = - \frac{\exp(-u^2/2)}{u\sqrt{2\pi}} \Big|_t^{\infty} +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_t^\infty \frac{\exp(-u^2/2)}{\sqrt{2\pi}} d\frac{1}{u} = \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}} - \int_t^\infty \frac{\exp(-u^2/2)}{u^2\sqrt{2\pi}} du = \\
& = \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}} - \int_t^\infty \frac{\exp(-u^2/2)}{u^3\sqrt{2\pi}} du^2 \geq \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}} - \\
& - \int_t^\infty \frac{\exp(-u^2/2)}{t^3\sqrt{2\pi}} du^2 = \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{t^2}\right).
\end{aligned}$$

Объединяя полученные неравенства, находим

$$\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}} \leq J(t) \leq \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}}, \quad t > 0.$$

Отсюда следует, что функция $J(t)$, определяющая вероятности ошибок первого и второго рода очень быстро убывает с ростом t .

Возьмем в качестве численного примера $\alpha_2 = 10^{-9}$, $\alpha_1 = 7 \cdot 10^{-4}$ (эти значения взяты из [115]), тогда можно построить аппроксимацию $J(t) \approx \frac{\exp(-t^2/2)}{t\sqrt{2\pi}}$ и с точностью 10^{-2} получить значения $t(\alpha_1) = 5.99781$, $t(\alpha_2) = 3.19465$. В результате приходим к равенству

$$A(a_1 - a_2, \alpha_2, n, \sigma) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} (a_1 - a_2) - t(\alpha_2) = 9.19246.$$

Поскольку $\alpha_1 = 7 \cdot 10^{-4}$, то в сочетании с формулой (30) из неравенства

$$\alpha_1 \leq \frac{\exp(-A^2(a_1, a_2, \alpha_2, n, \sigma)/2)}{\sqrt{A(a_1, a_2, \alpha_2, n, \sigma)}}$$

видно, насколько сильно разрешающая способность $A(a_1 - a_2, \alpha_2, n, \sigma)$ влияет на вероятность ошибки первого рода α_1 , являющейся основным показателем в данной статистической задаче.

Формула (5.20), определяющая разрешающую способность $A(a_1 - a_2, \alpha_2, n, \sigma)$, задающую вероятность ошибки первого рода, несмотря на свою простоту, содержит целую серию характеристик: разность средних $a_1 - a_2$, дисперсию σ^2 , размер выборки n и вероятность ошибки второго рода α_2 . Поэтому выбор характеристик $a_1 - a_2$, σ^2 , n становится достаточно сложной задачей конструирования технической системы, описанной в работе [114]. Причем особую роль здесь играет разность $a_1 - a_2 > 0$ средних a_1 , a_2 , характеризующих распределения выборок, описывающих разделяемые технической системой состояния «свой – чужой».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Список литературы

1. Chung T. H., Hollinger G. A., Isler V. Search and pursuit-evasion in mobile robotics. *Autonomous Robots*, 2011. Vol. 31, no. 4. P. 299-316.
2. Galceran E., Carreras M. A survey on coverage path planning for robotics? *Robotics and Autonomous Systems*, 2013. Vol. 61, no. 12. P. 1258-1276.
3. Alspach B. Searching and sweeping graphs: a brief survey. *Le Matematiche*. 2006. Vol. 59, no. 1, 2. P. 5-37.
4. Kafka P., Faigl J., Vana P. Random Inspection Tree Algorithm in visual inspection with a realistic sensing model and differential constraints. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2016. P. 2782–2787.
5. Kendall M.G., Moran P.A.P. Geometrical probabilities. London: Griffin and Co, 1963.
6. Ambartzumian R.V. Combinatorial integral geometry. Chichester: J. Wiley and Sons, 1982.
7. Monasterio C.M., Oshanin G., Schehr G. First passages for a search by a swarm of independent random searchers. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2011. Vol. 2011, issue 6. P. 6-22.
8. Кожемякин И.В., Никущенко Д.В., Рыжов В.А., Семенов Н.Н., Чемоданов М.Н. Развитие системы автономного группового управления разнородными надводными и подводными необитаемыми аппаратами. Материалы седьмой Всероссийской научно-технической конференции «Технические проблемы освоения мирового океана». 2017. С. 48-57.
9. Maggio M., Bini E., Georgios C. et al. A Game-Theoretic Resource Manager for RT Application. *Proceedings of the 25-th Euromicro Conference on Real-Time Systems*. Paris, France, 2013.
10. Corte A.C., Battista A., dell'Isola F. Referential description of the evolution of swarm of robots interacting with the closer neighbours: Perspectives of continuum modelling via higher gradient continua. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2016. Vol. 80. P. 209–220.

11. Brambilla M., Ferrante E., Birattari M., Dorigo M. Swarm robotics: a review from the swarm engineering perspective. *Swarm Intell*, 2013. Vol. 7, issue 1. P. 1–41.
12. Adamatzky A., Jones J. Towards Physarum robots: computing and manipulating on water surface. *J. Bionic Eng.*, 2008. Vol. 5, issue 4. P. 348–357.
13. Bellomo N., Brezzi F. Mathematics, complexity and multi scale features of large systems of self-propelled particles. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2016. Vol. 25. P. 207–214.
14. Herrero M.A., Soler J. Cooperation, competition, organization: The dynamics of interacting living populations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2015. Vol. 25. P. 2407–2415.
15. Kardar M. *Statistical Physics of Particles*. Cambridge University Press, 2007.
16. Zaslavsky G.M. *The Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*. Second edition. Imperial College Press, 2007.
17. Maslov V.P. Nonlinear Averages in Economics. *Mathematical Notes*. 2005. Vol. 78, issue 3-4. P. 347–363.
18. Alspach B. Searching and sweeping graphs: a brief survey. *Le Matematiche*. 2006. Vol. 59, issues 1,2. P. 5–37.
19. Kafka P., Faigl J., Vana P. Random Inspection Tree Algorithm in visual inspection with a realistic sensing model and differential constraints. *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2016. P. 2782–2787.
20. Monasterio C.M., Oshanin G., Schehr G. First passages for a search by a swarm of independent random searchers// *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2011. Vol. 2011, issue 6. P. 6–22.
21. Galceran E., Carreras M. A survey on coverage path planning for robotics?. *Robotics and Autonomous Systems*. 2013. Vol. 61, issue 12. P. 1258–1276.
22. Chung T. H., Hollinger G. A., Isler V. Search and pursuit-evasion in mobile robotics. *Autonomous Robots*. 2011. Vol. 31, issue 4. P. 299–316.
23. Гузев М.А., Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Вероятность обнаружения постороннего мобильного объекта необитаемыми

подводными аппаратами. Материалы седьмой всероссийской научно-технической конференции «Технические проблемы освоения мирового океана». 2017. Р. 426–433.

24. Гузев М.А., Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А., Спорышев М.С. Вероятность обнаружения постороннего мобильного объекта необитаемыми подводными аппаратами как решение задачи Бюффона. Дальневосточный математический журнал, 2017. Vol. 2. Р. 191–200.

25. Guzev M.A., Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A., Sporyshev M.S. Probability of detection of an extraneous mobile object by autonomous unmanned underwater vehicles as a solution of the Buffon problem. ArXiv: 1801.10318 [cs.RO]. 2018.

26. Вавилов В., Устинов А.. Окружности на решетках. Квант, 2006. Вып. 6.

27. Hardy G.H. On the Expression of a Number as the Sum of Two Squares. Quart. J. Math., 1915. Vol. 46. P. 263–283.

28. Hardy G.H., Ramanujan S. Twelve Lectures on Subjects Suggested by His Life and Work. New York. Chelsea, 1999.

29. Huxley M.N. Integer points, exponential sums and the Riemann zeta function. Number theory for the millennium, 2002. Vol. II. P. 275–290.

30. Рассказов И.Ю. Контроль и управление горным давлением на рудниках Дальневосточного региона. М.: Издательство «Горная книга», 2008. 329 с.

31. Рассказов И.Ю., Гладырь А.В., Аникин П.А., Святецкий В.С., Просекин Б.А.. Развитие и модернизация системы контроля динамических проявлений горного давления на рудниках ОАО «ППГХО». Горный журнал, 2013. Вып. 8 (2). С. 9-14.

32. Рассказов И.Ю., Аникин П.А. Цициашвили Г.Ш. Прогноз динамических проявлений горного давления на месторождении «Антей» по данным геоакустического мониторинга. ГИАБ. 2013. Вып. 10. С. 162-169.

33. Рассказов И.Ю., Гладырь А.В., Макаров В.В., Цициашвили Г.Ш., Аникин П.А., Желнин Д.О., Мирошников В.И. Алгоритм выделения потенциально удароопасных зон в разрабатываемом

массиве горных пород по результатам сейсмоакустического мониторинга. ГИАБ, 2014. Вып. S4-20. С. 31-39.

34. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ. М.: Лаборатория базовых знаний, 2004. 955 с.

35. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах: Пер с англ. СПб: ООО «ДиаСофтЮП», 2002. 496 с.

36. Оре О. Теория графов. 2-ое изд. М.: Наука, 1980. 336 с.

37. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физматлит, 1962. 431 с.

38. Рассказов И.Ю., Саксин Б.Г., Петров В.А., Просекин Б.А. Геомеханические условия и особенности динамических проявлений горного давления на месторождении Антей. Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых, 2012. Вып. 3. С. 3-13.

39. Guzev M.A., Rasskazov I.Yu., Tsitsiashvili G.Sh. Algorithm of potentially burst-hazard zones dynamics representation in massif of rocks by results of seismic-acoustic monitoring. Procedia Engineering, 2017. Vol. 191. P. 36–42.

40. Лелюхин В.Е., Колесникова О.В. Цифровое информационное пространство управления производством морской техники. Морские интеллектуальные технологии, 2019. Т. 2, № 44. С. 45-49.

41. Лелюхин В.Е., Игнатьев Ф.Ю., Дренин А.С., Колесникова О.В. Геометрия для описания реальных деталей машин. Современные наукоемкие технологии, 2018. № 8. С. 95-99.

42. Yusri Yusof, Kamran Latif. Survey on computer-aided process planning. London, Springer-Verlag, 2014.

43. Соколовский А.П. Научные основы технологии машиностроения. М.: Машгиз, 1955. 515 с.

44. Соколовский А.П. Основы технологии машиностроения. Т. 1. Л.: Машгиз, 1938. 680 с.

45. Gologlu C. A constraint-based operation sequencing for a knowledge-based process planning. J. Intell Manuf., 2004. Vol. 15, issue 4. P. 463-470.

46. Halevi G. Industrial Management-Control and Profit, Lecture Notes in Management and Industrial Engineering. Springer, 2014.
47. Halevi G. Principles of process planning: a logical approach. Springer Science and Business Media, 2012. 399 p.
48. Wang L., Adamson G., Holm M., Moore P. A review of function blocks for process planning and control of manufacturing equipment. J. of Manufacturing Systems, 2012. Vol. 31, issue 3. P. 269-279.
49. Wang L. Machine availability monitoring and machining process planning towards Cloud manufacturing. CIRP J. of Manufacturing Science and Technology, 2013. Vol. 6, issue 4. P. 263-273.
50. Lian K., Zhang C., Shao X., Gao L. Optimization of process planning with various flexibilities using an imperialist competitive algorithm, Springer-Verlag, Limited, 2011.
51. Lu C., Gao L., Li X., Pan Q., Wang Q. Energy-efficient permutation flow shop scheduling problem using a hybrid multi-objective backtracking search algorithm. J. of Cleaner Production, 2017. Vol. 144. P. 228-238.
52. Mou J., Gao L., Li X., Pan Q., Mu J. Multi-objective inverse scheduling optimization of single-machine shop system with uncertain due-dates and processing times. The J. of Networks, Software Tools and Applications, 2017. Vol. 1.
53. R. Dan Reid, Nada R. Sanders. Operations Management. John Wiley and Sons, 2009, 457 p.
54. Chryssolouris G. Manufacturing systems: theory and practice. Springer, 2006.
55. Koenig D.T. Computer-integrated manufacturing: theory and practice. Taylor and Francis, Boca Raton, 1990.
56. Weatherall A. Computer Integrated Manufacturing. From fundamental to implementation. Butterworths. 2nd ed. 1992.
57. Lelyukhin V.E., Kolesnikova O.V., Kuzminova T.A. Classification of Methods for Forming Surfaces When Machining Parts on Machine Tools. International Science and Technology Conference «EastConf.», 2019.

58. Tsitsiashvili G.Sh., Lelyukhin V.E., Kolesnikova O.V., Osipova M.A. Formal Design of Structure Process in Machining Parts. *Applied Mathematical Sciences*, 2017. Vol. 11, issue 32. P. 1573-1580.
59. Agrawal Manindra, Kayal Neeraj, Saxena Nitin. PRIMES is in P. *Annals of Mathematics*. JSTOR, 2004. Vol. 160, issue 2. P. 781-793.
60. Arvind Vikraman, Kurur Piyush P. Graph isomorphism is in SPP. *Information and Computation*, 2006. Vol. 204, issue 5. P. 835-852.
61. Skrimizea E., Haniotou H., Parra C. On the complexity turn in planning: An adaptive rationale to navigate spaces and times of uncertainty. *Plan. Theory*, 2019. Vol. 18. P. 122-142.
62. Battiston S., Caldarelli G., May R., Roukny T., Stiglitz J. The price of complexity in financial networks. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2016. Vol. 113. P. 10031-10036.
63. Majdandzic A., Braunstein L., Curme C., Vodenska I., Levy-Carciente S., Eugene S., Havlin S. Multiple tipping points and optimal repairing in interacting networks. *Nat. Commun.*, 2016. Vol. 7. P. 1-10.
64. Lever J., Leemput I., Weinans E., Quax R., Dakos V., Nes E., Bascompte J., Scheffer M. Foreseeing the future of mutualistic communities beyond collapse. *Ecol. Lett.*, 2020. Vol. 23. P. 2-15.
65. Limiao Z., Guanwen Z., Daqing L., Hai-Jun H., Eugene S., Shlomo H. Scale-free resilience of real traffic jams. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2019. Vol. 116. P. 8673-8678.
66. Barlow R., Proshan F. *Mathematical Theory of Reliability*. J Wiley and Sons: New York, NY, USA, 1965.
67. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно сложных систем. Изд-во Санкт-Петербургского университета. Санкт-Петербург, 2007.
68. Соложенцев Е.Д. Управление риском и эффективностью в экономике. Логико-вероятностный подход. Изд-во Санкт-Петербургского университета. Санкт-Петербург, 2009.
69. Gertsbakh I. *Statistical Reliability Theory*. Marcel Dekker, New York, 1989.
70. Rocchi P. *Reliability Is A New Science*. Gnedenko Was Right. Springer, 2017.

71. Zolotarev V. Modern Theory of Summation of Random Variables. VSP: Utrecht, the Netherlands, 1997.
72. Башарин Г.П., Гайдамака Ю.В., Самуйлов К.Е. Математическая теория телетрафика и ее приложения к анализу многоканальных сетей связи следующих поколений. Автоматика и вычислительная техника, 2013. Вып. 2. С. 11–21.
73. Наумов В.А. О поведении параметров метода ERT при малой нагрузке. Сб. научных трудов. Численные методы и информатика, 1988. С. 36–40.
74. Jagerman D.L. Some Properties of the Erlang Loss Function. The Bell System Technical Journal, 1974. Vol. 53, issue 3. P. 525-551.
75. Mitra D., Weiss A. The Transient Behavior in Erlang's Model for Large Trunk Groups and Various Traffic Conditions. Proceedings of the 1988 International Teletraffic Congress, 1988.
76. Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A., Samoulov K.E., Gaidamaka Yu.V. Synergetic effects in multiserver loss systems. VIII Moscow international conference on operations research for the centenary of Yu. B. Hermeyer at the Moscow State University and the VC RAS, 2018. Vol. I. P. 350-355.
77. Tsitsiashvili G.Sh., Osipova M.A. Phase Transitions in Multiserver Queuing Systems. Information Technologies and Mathematical Modelling – Queueing Theory and Applications, 2016. Vol. 638. P. 341–353.
78. Горцев А.М. Адаптивное управление потоками задач в вычислительной системе. Автоматика и выч. Техника, 1982. № 6. С. 53-60.
79. Ивницкий В.А. Теория сетей массового обслуживания. Москва: Физматлит, 2004.
80. Катрахов В.В., Рыжков Д.Е. Введение в функционально-аналитический метод в динамической теории массового обслуживания. Владивосток: изд-во ДВГУ, 2004.
81. Догадина Е.П., Холкина Н.Е. Математическая модель функционирования производственных процессов с учетом их особенностей. Системы управления, связи и безопасности, 2016. Вып. 1. С. 1 – 9.

82. Дуплякин В.М., Княжева Ю.Н. Выбор закона распределения входного потока заявок при моделировании системы массового обслуживания торгового предприятия. Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета, 2012. Том 1, № 37. С. 102-111.

83. Поршнев С.В., Корелин И.А. Исследование особенностей нестационарной одноканальной системы массового обслуживания в разрезе числа обслуженных заявок. Cloud of Science, 2017. Vol. 3, № 4. С. 366-374.

84. Greenfield A. Against the Smart City. London: Verso, 2013.

85. Boyle D.E., Yates D.C., Yeatman E.M. Urban Sensor Data Streams: London 2013//IEEE Internet Computing, 2013. Vol. 17, issue: 6. P. 12-20.

86. Намиот Д.Е., Шнепс-Шнеппе М.А. Об отечественных стандартах для Умного города. International Journal of Open Information Technologies, 2016. Vol. 4, No 7. P. 32-36.

87. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1967.

88. Цициашвили Г.Ш., Осипова М.А. Стационарные потоки в ациклических сетях массового обслуживания. ДВМЖ, 2016 Том 16, № 2. С. 223-228.

89. Кульчин Ю.Н. Фотоника самоорганизующихся биоминеральных наноструктур. УФН, 2011. Том 181, № 8. Р. 891-896.

90. Монсик В.Б., Скрынников А.А. Оценивание параметра показательного распределения по усеченной выборке. Научный вестник МГТУ ГА. Серия прикладная математика. Информатика, 2006. Вып. 105. С. 134–139.

91. Ильясов Ф.Н. Обратная задача выборки и мотивация на рынке Форекс. Социологические исследования, 2011. Вып. 3. С. 112-116.

92. Ильясов Ф.Н. Репрезентативность результатов опроса в маркетинговом исследовании. Социальные исследования, 2016. Вып. 2. С. 49–59.

93. Семкин Б.И. Об инвариантности средних отношений величин (на примере некоторых морфологических признаков слоевищ

ламинарии японской (*Laminaria japonica* Aresh.) из сублиторали Северного Приморья. Известия ТИНРО, 2012. Вып. 171. С. 313–320.

94. J. von Neumann. Physical Applications of the Ergodic Hypothesis. Proc Natl Acad Sci USA, 1932. Vol. 18. P. 263-266.

95. Хинчин А.Я. Математические основы статистической механики. Москва: ОГИЗ. Гос. изд-во технико-теорет. лит., 1943.

96. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. Москва: Наука, 1980.

97. Хинчин А.Я. Работы по теории математической теории массового обслуживания. Москва: Физматлит, 1963.

98. Боровков А.А. Курс теории вероятностей. Москва: Наука, 1972.

99. Хинчин А.Я. Цепные дроби. Москва – Ленинград: Физматлит, 1949.

100. Виноградов И.М. Математическая энциклопедия, т. 3. Москва: Советская энциклопедия, 1982.

101. Stoyan D., Kendall W., Mecke J. Stochastic Geometry and Its Applications. J. Wiley and Sons: New York, 1987.

102. Рябинин И.А. Логико-вероятностное исчисление как аппарат исследования надежности и безопасности структурно-сложных систем// Автоматика и телемеханика, 2003. Вып. 7. С.178-186.

103. Малинина Л.А., Лысенко В.В., Беляев М.А. Основы информатики. Ростов н/Д: Феникс, 2006.

104. Локтева С.Е. Станки с программным управлением и промышленные роботы. Москва: Машиностроение, 1986.

105. Ким С.Ф., Ушева Н.В., Самборская М.А., Мойзес О.Е., Кузьменко Е.А. Модульный принцип построения математических моделей аппаратов и технологических схем промысловой подготовки нефти. Нефтепереработка и нефтехимия, 2013. Вып. 10. С. 41-44.

106. Журавлев Ю.И., Флёров Ю.А., Федько О.С. Дискретный анализ. Комбинаторика. Алгебра логики. Теория графов. Учеб. пособие. Москва: МФТИ, 2012.

107. “Pixel.” Merriam-Webster.com Dictionary, Merriam-Webster, <https://www.merriam-webster.com/dictionary/pixel>.

108. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.. Математический анализ, ч. 1, изд. 3, ред. А. Н. Тихонов. М.: Проспект, 2004.
109. Плотников В.В., Мезенцева Л.И., Дубина В.А. Циркуляция атмосферы над Дальним Востоком и ее отражение в ледовых процессах. Монография, Владивосток: Дальнаука, 2015.
110. Шатилина Т.А., Цициашвили Г.Ш., Радченкова Т.В. Изменчивость режима тропосферной ложбины у Восточного побережья Азии и климатические экстремумы в период 1980 -2017 гг. Метеорология и Гидрология, 2019. Вып. 8. С. 102-106.
111. Беклемишев Д.В. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: Высш. шк., 1998.
112. Гончаров С.М., Боршевников А.Е. Построение нейросетевого преобразователя “Биометрия код доступа” на основе параметров визуального вызванного потенциала электроэнцефалограммы. Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники, 2014. Вып. 2 (32). С. 51-55.
113. Гончаров С. М., Боршевников А.Е. Прогнозирование выходных параметров нейросетевого преобразователя “Биометрия-код доступа” на основе электроэнцефалограммы. Информация и безопасность, 2018. Т. 21, № 3. С. 302-307.
114. Боршевников А.Е., Гончаров С.М., Добржинский Ю.В. О требованиях к формированию синтетических образов электроэнцефалограммы для задач высоконадежной биометрической аутентификации. Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки, 2021. Вып. 2. С. 27-29.
115. Боршевников А.Е. Нейросетевая модель системы высоконадежной биометрической аутентификации пользователя по энцефалограмме. Устный доклад на общеинститутском семинаре ИПМ ДВО РАН, 2021.
116. Боровков А.А. Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984.
117. Боровков А.А. Математическая статистика. Дополнительные главы. М.: Наука, 1984.

118. Горцев А.М., Нежелская Л.А., Шевченко Т.И. Оценивание состояний МС-потока событий при наличии ошибок измерений. Изв. вузов. Физика, 1993. Т. 36, № 12. С. 67-85.

119. Горцев А.М., Нежелская Л.А. Оптимизация параметров адаптера при наблюдениях за МС- потоком. В сб. Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1988. С. 20-32.

Научное издание

**Гузов Михаил Александрович,
Цициашвили Гурами Шалвович,
Осипова Марина Анатольевна**

Прикладные задачи системного анализа

Подписано в печать 26.12.2021 г.
Формат 60×84 / 16. Усл. печ. л. 5,23.
Тираж 500 экз. (1-й завод 1–30). Заказ 305.

Дальневосточный федеральный университет
690922, Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.

Отпечатано в Дальневосточном федеральном университете
690922, Приморский край, г. Владивосток, о. Русский, п. Аякс, 10.
(Типография Издательства ДВФУ,
690091, г. Владивосток, ул. Пушкинская, 10)