

УДК 519.233.2

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ

Г. Ш. Цициашвили, М. А. Осипова

*Институт прикладной математики ДВО РАН, Радио, 7, 690041,
Владивосток, Российская Федерация
Дальневосточный федеральный университет, о. Русский, п. Аякс, 10, 690922,
Владивосток, Российская Федерация*

Поступила в редакцию 20 июля 2021 г.

Аннотация. В настоящей работе построены оценки параметров нелинейных рекуррентных последовательностей по неточным наблюдениям. Речь идет о модели логистического роста, модели Рикера и дискретизированной модели Лоренца. В модели Лоренца дифференциальная задача была сведена к конечно-разностной схеме. Рассмотрены аддитивная и мультипликативная модели внесения ошибок в наблюдения, при этом распределения ошибок имеют не всегда нормальный закон распределения. Основная идея работы состоит в представлении параметров моделей через временные средние определенных функций и оценки этих средних по наблюдениям. Вопросы существования временных средних некоторых функций от модельных переменных являются предметом теории динамических систем. Они определяются наличием предельных циклов или предельных распределений динамической системы. Так как динамические системы наблюдаются на фоне случайных ошибок, то оцениваемые параметры выражаются через средние по траектории и через дисперсии ошибок наблюдений. Важным этапом в настоящей работе стало доказательство сходимости по вероятности оцениваемых параметров детерминированной системы к точным значениям. Эта процедура основана на классических вероятностных неравенствах типа неравенства Чебышева. Полученные результаты проверены в ходе вычислительных экспериментов, в которых строятся полигоны частот оцениваемых параметров и сравниваются с их точными значениями. Рассмотренные в работе модели динамических систем являются нелинейными, что затрудняет использование метода наименьших квадратов для оценки их параметров. Известные авторам результаты численного эксперимента по такой оценке параметров содержат достаточно большие ошибки. Тогда как предложенный в работе метод оценивания параметров нелинейных динамических систем является аналитически строгим.

Ключевые слова: нелинейные рекуррентные последовательности, оценки параметров, сходимость по вероятности, предельные циклы и распределения.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе построены алгоритмы оценивания параметров в нелинейных рекуррентных моделях динамических систем по неточным наблюдениям, что имеет важное теоретическое и практическое значение. Речь идет о модели логистического роста, модели Рикера и дискретизированной моде-

ли Лоренца. Рассматриваемые модели привлекают к себе повышенное внимание со стороны биологов, физиков и метеорологов (см. обзоры литературы [1], [2]). Они описывают динамику численности популяции, динамику изменения метеорологических параметров и т.д.

Основная идея работы состоит в представлении параметров моделей через вре-

менные средние определенных функций и оценки этих средних по наблюдениям. Это связано с тем, что различные процессы, описываемые перечисленными моделями, наблюдаются на фоне случайных ошибок. Вопросы существования временных средних от модельных переменных являются предметом теории динамических систем [3–7]. Они определяются наличием предельных циклов или предельных распределений в динамической системе выделением притягивающего множества — аттрактора, все траектории из некоторой окрестности которого стремятся к нему при (времени) стремящемся к бесконечности.

Временные средние для оценки параметров нелинейных рекуррентных последовательностей впервые были использованы в работе [8] применительно к модели Рикера с мультипликативной моделью внесения ошибок наблюдений и в работе [9]. Однако в этих работах не исследовалась аналитически сходимость построенных оценок к их точным значениям. Авторам не удалось найти информацию об оценке параметров через средние по траектории и об их сходимости к точным значениям в модели Лоренца и в модели логистического роста.

Рассмотренные в работе модели динамических систем являются нелинейными, что затрудняет использование метода наименьших квадратов для оценки их параметров. Известные авторам результаты численного эксперимента по такой оценке параметров в модели логистического роста содержат относительные ошибки порядка нескольких десятков процентов. Тогда как предложенный в работе метод оценивания параметров нелинейных динамических систем является аналитически строгим. Другое дело, если динамическая модель описывается дифференциальными уравнениями, то ее линеаризация в малой окрестности точки преобразует ее в линейную, параметры которой можно оценить методом наименьших квадратов [10]. Однако в этом случае требуется оценка получающейся погрешности при определенных значениях параметров, что является недостатком работы.

В настоящей работе, используя такие

качественные свойства нелинейных рекуррентных моделей, как существование у них предельного цикла или распределения в зависимости от значения параметров, были построены оценки параметров в трех перечисленных моделях по неточным наблюдениям. Оцениваемые параметры выражаются через средние по траектории и дисперсии ошибок наблюдений. Рассматривались аддитивная и мультипликативная модели внесения ошибок в наблюдения, при этом распределения ошибок имеют не всегда нормальный закон. Важным результатом работы является доказательство для рассмотренных моделей сходимости по вероятности построенных оценок параметров к их точным значениям, что было получено методами теории вероятностей. Проведены вычислительные эксперименты для оценки скорости этой сходимости во всех рассматриваемых моделях.

1. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Основная идея работы состоит в представлении параметров моделей через временные средние определенных функций и оценки этих средних по наблюдениям в обход метода наименьших квадратов. Важным этапом является доказательство сходимости по вероятности оцениваемых параметров к точным значениям. Эта процедура основана на классических вероятностных неравенствах типа неравенства Чебышева.

1.1. Средние по траектории

Рассмотрим детерминированную рекуррентную последовательность

$$x_0 = a, \quad x_{i+1} = F(x_i), \quad i = 0, 1, \dots,$$

у которой $-\infty < A_- \leq x_n \leq A_+ < \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Пусть $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $[A_-, A_+]$, обозначим

$$\overline{f(x)}|_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad \overline{f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f(x)}|_n.$$

Скажем, что у последовательности $\{x_i\}$ существует предельный цикл X^1, \dots, X^q длины q , если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kq+j} = X^j, \quad j=1, \dots, q.$$

Скажем, что у последовательности $\{x_i\}$ существует предельное распределение $p(dx)$, $x \in [A_-, A_+]$, где $p(dx)$ вероятностная мера на σ -алгебре измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[A_-, A_+]$, если для любого измеримого по Лебегу множества $C \subseteq [A_-, A_+]$ справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(C, n)}{n} = \int_C p(dx) = p(C),$$

где $k(C, n)$ число x_i , удовлетворяющих включению $x_i \in C$, $i=1, \dots, n$.

Теорема 1. Если на отрезке $[A_-, A_+]$ функция $f(x)$ возрастает, то при наличии у последовательности $\{x_i\}$ предельного цикла имеет место равенство

$$\overline{f(x)} = \sum_{j=1}^q \frac{f(X^j)}{q},$$

а при наличии предельного распределения имеет место равенство

$$\overline{f(x)} = \int_{A_-}^{A_+} f(x) p(dx).$$

Доказательство. При наличии у последовательности $\{x_i\}$ предельного цикла утверждение очевидно. Докажем его в случае, когда у последовательности $\{x_i\}$ имеется предельное распределение. Возьмем произвольное $\delta > 0$ и положим

$$m = [2/\delta] + 1, \quad \gamma = \delta(2 + [2/\delta])^{-1}$$

(здесь $[a]$ — целая часть действительного числа a). Разобьем отрезок $[A_-, A_+]$ на непересекающиеся подмножества

$$C_j = f^{-1} \left(\left[\frac{(j-1)\Delta}{m} + f(A_-), \frac{j\Delta}{m} + f(A_-) \right) \right),$$

$$\Delta = f(A_+) - f(A_-), \quad 1 \leq j \leq m-1,$$

$$C_m = f^{-1} \left(\left[\frac{(m-1)\Delta}{m} + f(A_-), f(A_+) \right] \right).$$

Выберем $N(\delta)$ так, чтобы для $\forall n > N(\delta)$ выполнялось неравенство

$$\left| \frac{k(C_j, n)}{n} - p(C_j) \right| \leq \gamma, \quad j=1, \dots, m.$$

Обозначим $g(x) = \frac{f(x) - f(A_-)}{\Delta}$, несложно доказать для $\forall n > N(\delta)$ следующие неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{x_i \in C_j, i=1, \dots, n} g(x_i)}{n} &\leq \frac{j}{m} \cdot \frac{k(C_j, n)}{n} \leq \frac{j}{m} (p(C_j) + \gamma) \leq \\ &\leq \frac{\gamma j}{m} + \int_{C_j} \left(g(x) + \frac{1}{m} \right) p(dx) = \\ &= \frac{\gamma j}{m} + \frac{p(C_j)}{m} + \int_{C_j} g(x) p(dx), \end{aligned}$$

в свою очередь,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{x_i \in C_j, i=1, \dots, n} g(x_i)}{n} &\geq \frac{j-1}{m} \cdot \frac{k(C_j, n)}{n} \geq \\ &\geq \frac{j-1}{m} (p(C_j) - \gamma) \geq \int_{C_j} \left(g(x) - \frac{1}{m} \right) p(dx) - \\ &- \frac{\gamma(j-1)}{m} = \int_{C_j} g(x) p(dx) - \frac{p(C_j)}{m} - \frac{\gamma(j-1)}{m}. \end{aligned}$$

Суммируя эти неравенства по $j=1, \dots, m$, и используя определение m , получаем для $\forall n > N(\delta)$ неравенство

$$\begin{aligned} \overline{g(x)} - \delta &\leq \overline{g(x)} - \frac{1}{m} - \frac{\gamma(m-1)}{2} \leq \\ &\leq \overline{g(x)}|_n \leq \frac{(m+1)\gamma}{2} + \frac{1}{m} + \overline{g(x)} = \overline{g(x)} + \delta. \end{aligned}$$

Следовательно, $\overline{g(x)}|_n \rightarrow \overline{g(x)}$ и тогда

$$\overline{f(x)}|_n \rightarrow \overline{f(x)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

Замечание. Утверждение теоремы 1 несложно распространить на случай, когда функция $f(x)$ имеет конечное число точек экстремума на отрезке $[A_-, A_+]$.

1.2. Модель логистического роста

Рассмотрим модель логистического роста

$$\begin{aligned} x_0 = a, \quad x_{i+1} &= bx_i(1-x_i), \quad i=0, 1, \dots, \\ 0 < a < 1, \quad 1 < b < 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Заметим, что $0 = A_- < x_n < A_+ = 1$, $n = 0, 1, \dots$. В работе [3] доказано, что у последовательности (1) существует или предельный цикл, или предельное распределение и дана подробная классификация. Тогда последовательность $\{x_i\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и, следовательно, у нее существуют средние по траектории \bar{x} , \bar{x}^2 и выполняются соотношения

$$0 < \bar{x}^2 < \bar{x}, \quad b = \frac{\bar{x}}{\bar{x} - \bar{x}^2}.$$

Теорема 2. Для последовательности (3) и аддитивной модели внесения ошибок $y_i = x_i + \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i, i = 0, 1, \dots$, — п.н.о.р.с.в. с $M\varepsilon_n = 0, D\varepsilon_n = c$, имеет место при $n \rightarrow \infty$ сходимость по вероятности

$$\hat{b}_n = \frac{\bar{y}|_n}{\bar{y}|_n - (\bar{y}^2|_n - c)} \rightarrow b.$$

Доказательство. Среднеквадратичную метрику на множестве случайных величин обозначим $\rho = \rho(x, y) = \sqrt{M(x - y)^2}$. Найдем пределы при $n \rightarrow \infty$ математических ожиданий и дисперсий случайных величин $\bar{y}|_n, \bar{y}^2|_n$:

$$\begin{aligned} M\bar{y}|_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i + \varepsilon_i) = \bar{x}|_n \rightarrow \bar{x}, \\ D\bar{y}|_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i + \varepsilon_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D\varepsilon_i = \frac{c}{n} \rightarrow 0, \\ M\bar{y}^2|_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(x_i + \varepsilon_i)^2 = \bar{x}^2|_n + c \rightarrow \bar{x}^2 + c, \\ D\bar{y}^2|_n &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(x_i + \varepsilon_i)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(2x_i\varepsilon_i + \varepsilon_i^2) = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n M(2x_i\varepsilon_i + \varepsilon_i^2 - c)^2 \leq \frac{2(4c\bar{x}^2|_n + d)}{n} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений в силу неравенства треугольника имеем при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \rho(\bar{y}|_n, \bar{x}) &\leq \rho(\bar{y}|_n, M\bar{y}|_n) + \rho(M\bar{y}|_n, \bar{x}) = \\ &= \sqrt{\frac{c}{n}} + |\bar{x}_n - \bar{x}| \rightarrow 0, \\ \rho(\bar{y}^2|_n, \bar{x}^2 + c) &\leq \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\leq \rho(\bar{y}^2|_n, M\bar{y}^2|_n) + \rho(M\bar{y}^2|_n, \bar{x}^2 + c) = \\ &= \rho(\bar{y}^2|_n, \bar{x}^2|_n + c) + |\bar{x}^2|_n - \bar{x}^2| \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2}{n}(4c\bar{x}^2|_n + d)} + |\bar{x}^2|_n - \bar{x}^2| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из формул (4)–(5) с помощью неравенства Чебышева получаем сходимость по вероятности

$$\bar{y}|_n \rightarrow \bar{x}, \quad \bar{y}^2|_n \rightarrow \bar{x}^2 + c, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует сходимость по вероятности $\hat{b}_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Наряду с аддитивной моделью внесения ошибок для последовательности (1) можно рассмотреть и мультипликативную.

1.3. Модель Рикера

Перейдем теперь к модели Рикера

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= ax_i e^{-bx_i}, \quad i = 0, 1, \dots, \\ a &> 1, \quad b > 0, \quad x_0 > e^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

В работах [4–7], [11] доказано, что у последовательности (4) существует или предельный цикл, или предельное распределение. Заметим, что максимум функции axe^{-bx} достигается в точке b^{-1} и справедливо неравенство $x_n \leq \frac{a}{be}, n = 1, 2, \dots$

Логарифмируя соотношение (4), получим

$$\ln x_{i+1} = \ln x_i + \ln a - bx_i. \quad (5)$$

Если $\frac{\ln a}{b} \leq x_i \leq \frac{a}{be}$, то $x_{i+1} \leq x_i$, а если $x_i \leq \frac{\ln a}{b}$, то $x_{i+1} \geq x_i$. Тогда в модели (4) при любых $a > 1, b > 0, x_0 > 0$ и $i = 1, 2, \dots$ справедливы соотношения

$$0 < \min(x_0, C) = A_- \leq x_i \leq A_+ = \frac{a}{be}, \quad (6)$$

где $C = \min \left\{ axe^{-bx} : \frac{\ln a}{b} \leq x \leq \frac{a}{be} \right\}$.

Из соотношения (6), утверждения теоремы 1 и замечания следует, что существуют средние по траектории $\bar{x}, \bar{x}^2, \ln \bar{x}, \bar{x} \ln \bar{x}$. Поэтому, используя равенство квадратов левой и правой части в

формуле (5), нетрудно получить соотношения

$$b = 2 \frac{\overline{x \ln x} - \overline{x} \overline{\ln x}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad \ln a = b \overline{x}.$$

Введем обозначения

$$\hat{b}_n = 2e^{c/2} \frac{\overline{y \ln y} |_n - c \overline{y} |_n \overline{\ln y} |_n}{\overline{y^2} |_n e^{-c/2} - (\overline{y} |_n)^2},$$

$$\hat{a}_n = \exp(\hat{b}_n \overline{y} |_n e^{-c/2}).$$

Теорема 3. Для модели Рикера (6) и мультипликативной модели внесения ошибок $y_i = x_i \exp(\varepsilon_i)$, где $\varepsilon_i, i = 0, 1, \dots$, — п.н.о.р.с.в., имеющих нормальное распределение с $M\varepsilon_n = 0, D\varepsilon_n = c$, справедлива при $n \rightarrow \infty$ сходимость по вероятности

$$\hat{a}_n \rightarrow a, \quad \hat{b}_n \rightarrow b.$$

Доказательство. Вычислим средние и дисперсии

$$\begin{aligned} M \overline{y} |_n &= \overline{x} |_n M e^{\varepsilon_1}, \quad M \overline{y^2} |_n = \overline{x^2} |_n M e^{2\varepsilon_1}, \\ M \overline{y \ln y} |_n &= \overline{x \ln x} |_n M e^{\varepsilon_1} + \overline{x} |_n M e^{\varepsilon_1} \varepsilon_1, \\ M \overline{\ln y} |_n &= \overline{\ln x} |_n, \quad D \overline{\ln y} |_n = \frac{D\varepsilon_1}{n}, \\ M e^{\varepsilon_1} \varepsilon_1 &= c e^{c/2}, \quad M e^{\varepsilon_1} = e^{c/2}, \quad M e^{2\varepsilon_1} = e^{2c}, \\ D \overline{y} |_n &= \frac{D e^{\varepsilon_1}}{n} \overline{x^2} |_n, \quad D \overline{y^2} |_n = \frac{D e^{2\varepsilon_1}}{n} \overline{x^4} |_n, \\ D \overline{y \ln y} |_n &= \frac{D e^{\varepsilon_1}}{n} \overline{(x \ln x)^2} |_n + \frac{D e^{\varepsilon_1} \varepsilon_1}{n} \overline{x^2} |_n, \\ D e^{\varepsilon_1} &= e^{2c} - e^c, \quad D e^{2\varepsilon_1} = e^{8c} - e^{4c}, \\ D e^{\varepsilon_1} \varepsilon_1 &= c^2 (e^{2c} - e^c) + c e^{2c}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует сходимость по вероятности при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \overline{y} |_n &\rightarrow \overline{x} e^{c/2}, \quad \overline{y^2} |_n \rightarrow \overline{x^2} e^{2c}, \quad \overline{\ln y} |_n \rightarrow \overline{\ln x}, \\ \overline{y \ln y} |_n &\rightarrow \overline{x \ln x} e^{c/2} + c e^{c/2} \overline{x}. \end{aligned}$$

Отсюда следует сходимость по вероятности $\hat{a}_n \rightarrow a, \hat{b}_n \rightarrow b, n \rightarrow \infty$. Теорема 3 доказана.

1.4. Модель Лоренца

Остановимся теперь на модели Лоренца [12], представимой системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx^{(1)}}{dt} = \sigma(x^{(2)} - x^{(1)}), \\ \frac{dx^{(2)}}{dt} = x^{(1)}(r - x^{(3)}) - x^{(2)}, \\ \frac{dx^{(3)}}{dt} = x^{(1)}x^{(2)} - bx^{(3)}. \end{cases} \quad (7)$$

Обозначим $x^{(k)}(ih) = x_i^{(k)}, k = 1, 2, 3, i = 0, 1, \dots$, и выпишем для системы дифференциальных уравнений (11) систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{i+1}^{(1)} = x_i^{(1)} + \sigma h(x_i^{(2)} - x_i^{(1)}), \\ x_{i+1}^{(2)} = x_i^{(2)} + (x_i^{(1)}(r - x_i^{(3)}) - x_i^{(2)})h, \\ x_{i+1}^{(3)} = x_i^{(3)} + (x_i^{(1)}x_i^{(2)} - bx_i^{(3)})h. \end{cases} \quad (8)$$

Приведенный в [12], [13] анализ последовательности $(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, x_i^{(3)}), i = 0, 1, \dots$, позволяет установить существование средних по траектории $\overline{x^{(k)}}, (\overline{x^{(k)}})^2, \overline{x^{(k)}x^{(j)}}, k \neq j$.

Из квадрата первого равенства, а также второго и третьего равенств в формуле (8) получим

$$\begin{aligned} \sigma h &= 2 \frac{\overline{(x^{(1)})^2} - \overline{x^{(1)}x^{(2)}}}{(\overline{x^{(1)}})^2 + (\overline{x^{(2)}})^2 - 2\overline{x^{(1)}x^{(2)}}}, \\ r &= \frac{\overline{x^{(2)} + x^{(1)}x^{(3)}}}{\overline{x^{(1)}}}, \quad b = \frac{\overline{x^{(1)}x^{(2)}}}{\overline{x^{(3)}}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Пусть наблюдения $y_i^{(k)} = x_i^{(k)} + \varepsilon_i^{(k)}, k = 1, 2, 3, i = 0, 1, \dots$, где $\varepsilon_i^{(k)}$ — п.н.о.р.с.в., имеющих нулевые средние и дисперсии $c^{(k)} < \infty$. Обозначим

$$\begin{aligned} (\hat{\sigma}h)_n &= \frac{2 \left(\overline{(y^{(1)})^2} |_n - c^{(1)} - \overline{y^{(1)}y^{(2)}} |_n \right)}{(\overline{y^{(1)}})^2 |_n - c^{(1)} + (\overline{y^{(2)}})^2 |_n - c^{(2)} - 2\overline{y^{(1)}y^{(2)}} |_n}, \\ \hat{b}_n &= \frac{\overline{y^{(1)}y^{(2)}} |_n}{\overline{y^{(3)}} |_n}, \quad \hat{r}_n = \frac{\overline{y^{(2)}} |_n - c^{(2)} + \overline{y^{(1)}y^{(3)}} |_n}{\overline{y^{(1)}} |_n}. \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 4. Справедлива при $n \rightarrow \infty$ сходимость по вероятности

$$(\hat{\sigma}h) \rightarrow \sigma h, \quad \hat{b}_n \rightarrow b, \quad \hat{r}_n \rightarrow r.$$

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 2 нетрудно установить сходимость по вероятности при $n \rightarrow \infty$

$$\overline{y^{(k)}}|_n \rightarrow \overline{x^{(k)}}, k=1,2,3,$$

$$\overline{(y^{(j)})^2}|_n \rightarrow \overline{(x^{(j)})^2} + c^{(j)}, j=1,2.$$

Докажем теперь сходимость по вероятности при $n \rightarrow \infty$

$$\overline{y^{(1)}y^{(2)}}|_n \rightarrow \overline{x^{(1)}x^{(2)}}|_n, \overline{y^{(1)}y^{(3)}}|_n \rightarrow \overline{x^{(1)}x^{(3)}}|_n.$$

Остановимся на первом соотношении, т.к. второе доказывается аналогично, и для этого вычислим среднее и дисперсию

$$M \overline{y^{(1)}y^{(2)}}|_n = \overline{x^{(1)}x^{(2)}}|_n,$$

$$D \overline{y^{(1)}y^{(2)}}|_n = \frac{1}{n} \left[c^{(2)} \overline{(x^{(1)})^2}|_n + c^{(1)} \overline{(x^{(2)})^2}|_n \right].$$

Из полученных соотношений и из формул (10) следует справедливость утверждения теоремы 4. Теорема доказана.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

В предыдущем разделе для модели логистического роста, модели Рикера и дискретизированной модели Лоренца доказаны сходимости по вероятности построенных оценок параметров к их точным значениям. В этом разделе проведены вычислительные эксперименты для оценки скорости этой сходимости. Оценки всех параметров были вычислены 100 раз и построены гистограммы частот полученных значений с 5 интервалами.

Модель логистического роста.

Расчеты велись для случая $a = 0,5, b = 3$ при $n = 1000$. Рассматривалась аддитивная модель внесения ошибок в предположении, что $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$, имеют равномерное распределение на отрезке $[-1/4, 1/4]$. Результаты вычислений приведены в табл. 1 и на рис. 1.

Таблица 1

Интервальное распределение \hat{b}_n

интервалы изменения \hat{b}_n	частота интервала
2.89963–2.94201	7
2.94201–2.98438	25
2.98438–3.02676	43
3.02676–3.06914	21
3.06914–3.11151	3

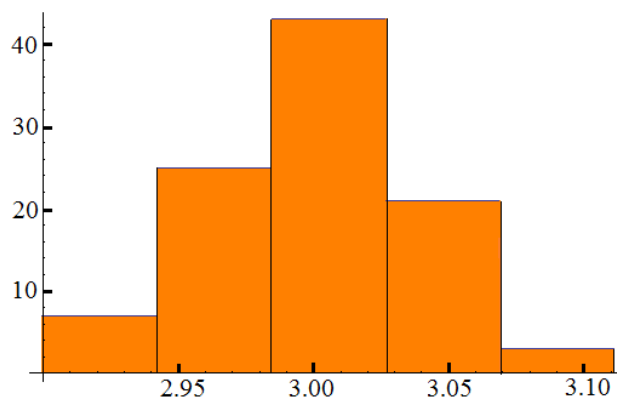


Рис. 1. Гистограмма частот для \hat{b}_n .

Модель Рикера.

Расчеты велись для случая $x_0 = 1,01, a = 300, b = 1$ при $n = 1000$. Рассматривалась мультипликативная модель внесения ошибок в предположении, что $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$, имеют нормальный закон распределения со средним ноль и дисперсией $c = 1/48$. Результаты вычислений в модели Рикера приведены в табл. 2 и на рис. 2.

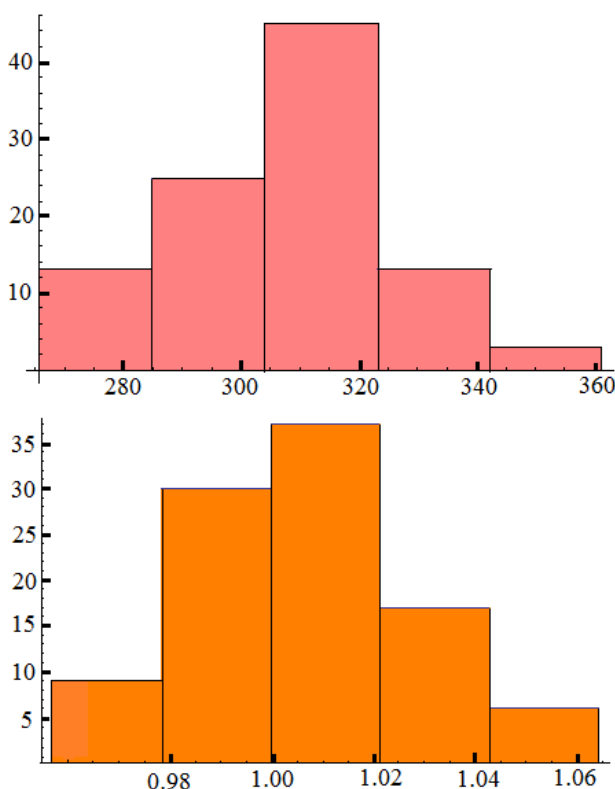


Рис. 2. Гистограммы частот для \hat{a}_n (верхняя) и \hat{b}_n (нижняя).

Таблица 2

Интервальные распределения \hat{a}_n, \hat{b}_n

интервалы изменения \hat{a}_n	частота интервала
265.562–284.761	13
284.761–303.96	25
303.96–323.159	45
323.159–342.358	13
342.358–361.556	3
интервалы изменения \hat{b}_n	частота интервала
0.956914–0.9784	9
0.9784–0.999885	30
0.999885–1.02137	37
1.02137–1.04286	17
1.04286–1.06434	6

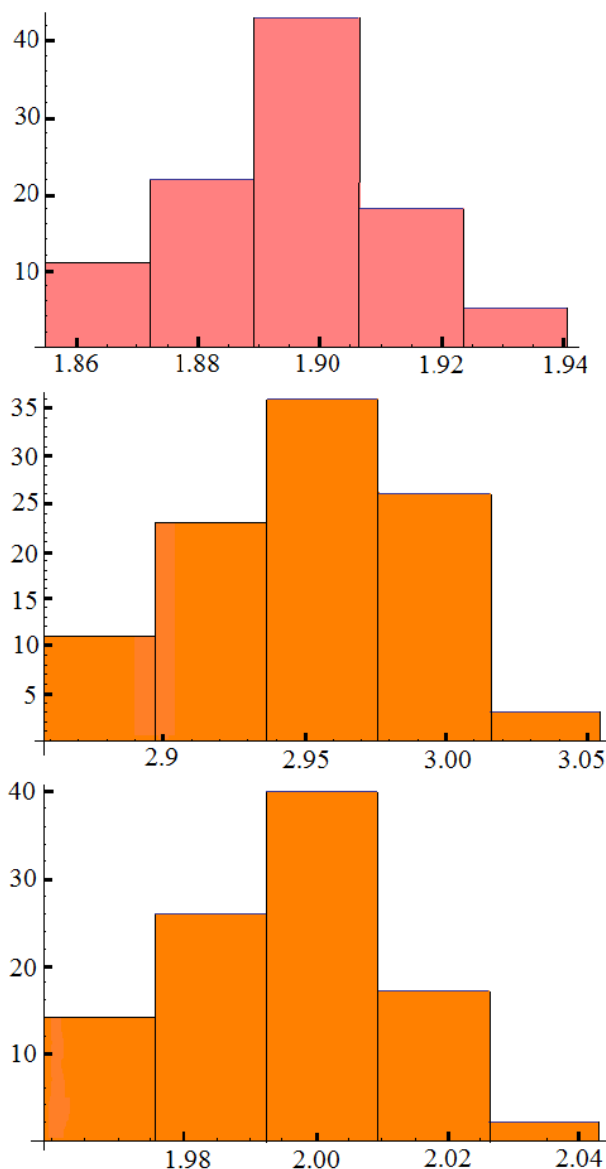
Модель Лоренца.

Расчеты велись для случая $x_0^{(1)} = 1, x_0^{(2)} = 2, x_0^{(3)} = 3, h = 0,1, \sigma = 19, b = 3, r = 2, n = 200$. Рассматривалась аддитивная модель внесения ошибок, полагая, что $\varepsilon_i, i = 1, \dots, n$, имеют нормальный закон со средним ноль и дисперсией $c = 1/48$. Результаты приведены в табл. 3 и на рис. 3.

Таблица 3

Интервальные распределения $(\hat{\sigma}h)_n, \hat{b}_n, \hat{r}_n$

интервалы изменения $(\hat{\sigma}h)_n$	частота интервала
1.85497–1.87214	11
1.87214–1.88931	22
1.88931–1.90648	43
1.90648–1.92366	18
1.92366–1.94083	5
интервалы изменения \hat{b}_n	частота интервала
2.85799–2.89735	11
2.89735–2.93672	23
2.93672–2.97608	36
2.97608–3.01544	26
3.01544–3.05481	3
интервалы изменения \hat{r}_n	частота интервала
1.95884–1.97568	14
1.97568–1.99251	26
1.99251–2.00935	40
2.00935–2.02619	17
2.02619–2.04303	2

Рис. 3. Гистограммы частот для $(\hat{\sigma}h)_n$ (верхняя), \hat{b}_n (в середине), \hat{r}_n (нижняя).**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Результаты вычислительного эксперимента показали достаточно хорошую близость оценок параметров в моделях логистического роста, Рикера и дискретизированной модели Лоренца к оцениваемым параметрам. Следует отметить, что приближение средней по траектории $\overline{f(x)}$ детерминированной функции $f(x)$ с помощью среднего по

конечному отрезку $\overline{f(x)}|_n$ исследуется в теории динамических систем. Тогда как близость среднего $\overline{f(y)}|_n$, вычисленного по неточным наблюдениям с соответствующими добавками к среднему $\overline{f(x)}|_n$ оценивается вероятностными методами. В последнее время появилось большое количество работ по моделированию популяционной динамики на основе нелинейных рекуррентных соотношений [14–18]. Предлагаемые в статье методы могут быть применены к оценкам параметров этих моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dynamics of a discrete-time stage-structured predator–prey system with Holling type II response function / G.P. Neverova [and other] // *Nonlinear Dynamics*. 2019. – V. 98. – P. 427–446. Doi: 10.1007/s11071-019-05202-3.
2. Neverova, G.P., Kulakov, M.P., Frisman, E.Ya. Changes in population dynamics regimes as a result of both multistability and climatic fluctuation / G.P. Neverova, M.P. Kulakov, E.Ya. Frisman // *Nonlinear Dynamics*. – 2019. – V. 97. – P. 107–122. Doi: 10.1007/s11071-019-04957-z.
3. Шарковский, А.Н. Разностные уравнения и динамика численности популяций / А.Н. Шарковский. – Препринт 82.18. – Киев: Институт математики АН УССР, 1982. – 22 с.
4. Complex patterns in a space-and time discrete predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response / T. Huang [and other] // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2017. – V. 43. – P. 182–199. Doi: 10.1016/j.cnsns.2016.07.004.
5. Шапиро, А.П., Луппов, С.П. Рекуррентные уравнения в теории популяционной биологии / А.П. Шапиро, С.П. Луппов. – Москва: Наука, 1983. – 136 с.
6. Пых, Ю.А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики / Ю.А. Пых. – Москва: Наука, 1983. – 184 с.
7. Kundu, S., Maitra S. Dynamics of a delayed predator-prey system with stage structure and cooperation for preys / S. Kundu, S. Maitra // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2018. – V. 114. – P. 453–460. Doi: 10.1016/j.chaos.2018.07.013
8. Талалаева, А.Б., Цициашвили, Г.Ш. Оценка параметров модели Рикера по неточным наблюдениям/ А.Б. Талалаева, Г.Ш. Цициашвили // *Сибирский экологический журнал*. – 1999. – Т. 4. – С. 377–379.
9. Герасин, С.Н., Козлов, М.А. Оценка параметров численности популяции в дискретной модели Рикера / С.Н. Герасин, М.А. Козлов // *Бионика интеллекта*. – 2008. – № 2 (69). – С. 159–163.
10. Буляница, А.Л. Методы оценивания параметров кривой логистического роста. Ч. 1. Оптимизация условий оценивания при наличии аддитивной случайной помехи / А.Л. Буляница // *Научное приборостроение*. – 2009. – Т. 19, № 3. – С. 3–11.
11. Huang, T., Zhang, H. Bifurcation, chaos and pattern formation in a space-and time discrete predator-prey system / T. Huang, H. Zhang // *Chaos, Solitons & Fractals*. – 2016. – V. 91. – P. 92–107. Doi: 10.1016/j.chaos.2016.05.009.
12. The Lyapunov dimension formula for the global attractor of the Lorenz system/ G. A. Leonov [and other] // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2016. – V. 41. – P. 84–103. Doi: 10.1016/j.cnsns.2016.04.032.
13. Lorenz, E. N. Deterministic non-periodic flow / E. N. Lorenz // *Journal of the Atmospheric Sciences*. – 1963. – V. 20. – P. 131–141.
14. Density feedbacks mediate effects of environmental change on population dynamics of a semidesert rodent / C.R. Nater [and other] // *Journal of Animal Ecology*. – 2018. – V. 87, № 6. – P. 1534–1546. Doi: 10.1111/1365-2656.12888.
15. Neverova, G.P., Frisman, E.Ya. Dynamic models of population size and its genetic structure for species with nonoverlapping generations and stage development / G.P. Neverova, E.Ya. Frisman // *Communications in Nonlinear Science and*

Numerical Simulation. – 2021. – V. 94. – № 105554. Doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105554.

16. Математическое моделирование популяционной динамики на основе рекуррентных уравнений: результаты и перспективы. Ч. I. / Е.Я. Фрисман // Известия РАН. Серия биологическая. – 2021. – № 1. – С. 3-18. Doi: 10.31857/s0002332921010069.

17. Фрисман, Е.Я., Шлюфман, К.В., Неверова, Г.П. Модельные динамические популяционные режимы в сообществах с циклирующими видами: синхронизация, параметрический резонанс и мультистабильность на примере популяций, динамика которых описывается моделью

Рикера / Е.А. Фрисман, К.В. Шлюфман, Г.П. Неверова Г.П. // Известия РАН. Серия биологическая. – 2019. – № 4. – С. 341-352. Doi: 10.1134/s0002332919040052.

18. Шлюфман, К.В., Неверова, Г.П., Фрисман, Е.Я. Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром / К.В. Шлюфман, Г.П. Неверова, Е.Я. Фрисман // Нелинейная динамика. – 2017. – Т. 13, № 3. – С. 363–380. Doi: 10.20537/nd1703005.

Цициашвили Гурами Шалвович – д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН.

E-mail: guram@iam.dvo.ru

Осипова Марина Анатольевна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры, геометрии и анализа Дальневосточного федерального университета, научный сотрудник Института прикладной математики ДВО РАН.

E-mail: mao1975@list.ru

ESTIMATION OF PARAMETERS OF NONLINEAR RECURRENT RELATIONS

G.Sh. Tsitsiashvili, M.A. Osipova

Institute of Applied Mathematics FEB RAS, Radio, 7, 690041,

Vladivostok, Russian Federation

Far Eastern Federal University, Russian Island, Ajax, 10, 690922,

Vladivostok, Russian Federation

Annotation. Abstract. In this paper, estimates of the parameters of nonlinear recurrent sequences are constructed from inaccurate observations. We are talking about the logistic growth model, the Rikker model and the discretized Lorentz model. In the Lorentz model, the differential problem was reduced to a finite-difference scheme. Additive and multiplicative models of introducing errors into observations are considered, while the error distributions do not always have a normal distribution law. The main idea of the work is to represent the parameters of models through the time averages of certain functions and to estimate these averages from observations. The questions of the existence of time averages of some functions of model variables are the subject of the theory of dynamical systems. They are determined by the presence of limit cycles or limit distributions of a dynamical system. Since dynamic systems are observed against the background of random errors, the estimated parameters are expressed in terms of the trajectory averages and in terms of the variance of the observation errors. An important step in this work was the proof of the convergence in probability of the estimated parameters of a deterministic system to exact values. This procedure is based on classical probabilistic inequalities of the Chebyshev inequality type. The obtained results are verified in the course of computational experiments, in which polygons of the frequencies of the estimated parameters are constructed and compared with their exact values. The models of dynamical systems considered in this paper are nonlinear, which makes it difficult to use the least squares method to estimate their parameters. The results of a numerical experiment known to the authors for such an estimation of parameters contain rather large errors. Whereas the method proposed in this paper for estimating the parameters of nonlinear dynamical systems is analytically rigorous.

Keywords: nonlinear recurrent sequences, parameter estimates, probability convergence, limit cycles and distributions.

REFERENCES

1. Bulyanica, A.L. (2009) Metody ocenivaniya parametrov krivoj logisticheskogo rosta. CH. 1. Optimizatsiya uslovij ocenivaniya pri nalichii additivnoj sluchajnoj pomekhi []/ А.Л. Буляница. *Nauchnoe priborostroenie*. 19 (3), 3-11. (in Russian)
2. Frisman, E. YA., Shlyufman, K. V., Neverova, G. P. (2019) Model'nye dinamicheskie populyacionnye rezhimy v soobshchestvah s cikliruyushchimi vidami: sinhronizatsiya, parametricheskij rezonans i mul'tistabil'nost' na primere populyacij, dinamika kotoryh opisyyaetsya model'yu Rikera [Model dynamic population regimes in communities with cycling species: synchronization, parametric resonance and multistability on the example of populations whose dynam-

- ics is described by the Riker model]. *Izvestiya RAN. Seriya biologicheskaya*. 4, 341–352. Doi: 10.1134/s0002332919040052. (in Russian)
3. Frisman, E. YA., Zhdanova, O. L., Kulakov, M. P., Neverova, G. P., Revuckaya, O. L. (2021) Matematicheskoe modelirovanie populyacionnoj dinamiki na osnove rekurrentnykh uravnenij: rezul'taty i perspektivy. Ch. I. [Mathematical modeling of population dynamics based on recurrent equations: results and prospects. Ch. I.]. *Izvestiya RAN. Seriya biologicheskaya*. 1, 3–18. Doi: 10.31857/s0002332921010069. (in Russian)
4. Gerasin, S. N., Kozlov, M. A. (2008) Ocenka parametrov chislennosti populyacii v diskretnoj modeli Rikera [Estimation of population size parameters in a discrete Riker model]. *Bionika intellekta*. 2 (69), 159–163. (in Russian)
5. Huang, T., Zhang, H. (2016) Bifurcation, chaos and pattern formation in a space-and time discrete predator-prey system. *Chaos, Solitons & Fractals*. 91, 92–107. Doi: 10.1016/j.chaos.2016.05.009.
6. Huang, T., Zhang, H., Yang, H., Wang, N., Zhang, F. (2017) Complex patterns in a space-and time discrete predator-prey model with Beddington-DeAngelis functional response. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 43, 182–199. Doi: 10.1016/j.cnsns.2016.07.004.
7. Kundu, S., Maitra S. (2018) Dynamics of a delayed predator-prey system with stage structure and cooperation for preys. *Chaos, Solitons & Fractals*. 114, 453–460. Doi: 10.1016/j.chaos.2018.07.013
8. Leonov, G., Kuznetsov, N., Korzhemanova, N. A., Kusakin, D. V. (2016) The Lyapunov dimension formula for the global attractor of the Lorenz system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 41, 84–103. Doi: 10.1016/j.cnsns.2016.04.032.
9. Lorenz, E. N. (1963) Deterministic non-periodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 20, 131–141.
10. Nater, C. R., Benthem, K. J., Canale, C. I., Schradin, C., Ozgul, A. (2018) Density feedbacks mediate effects of environmental change on population dynamics of a semidesert. *Journal of Animal Ecology*. 87 (6), 1534–1546. Doi: 10.1111/1365-2656.12888.
11. Neverova, G. P., Zhdanova, O. L., Frisman, E. Ya., Ghosh, B. (2019) Dynamics of a discrete-time stage-structured predator–prey system with Holling type II response function. *Nonlinear Dynamics*. 98, 427–446. Doi: 10.1007/s11071-019-05202-3.
12. Neverova, G. P., Kulakov, M. P., Frisman, E. Ya. (2019) Changes in population dynamics regimes as a result of both multistability and climatic fluctuation. *Nonlinear Dynamics*. 97, 107–122. Doi: 10.1007/s11071-019-04957-z.
13. Neverova, G. P., Frisman, E. Ya. (2021) Dynamic models of population size and its genetic structure for species with nonoverlapping generations and stage development. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 94, № 105554. Doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105554.
14. Pyh, Yu. A. (1983) *Ravnovesie i ustojchivost' v modelyah populyacionnoj dinamiki* [Equilibrium and stability in models of population dynamics]. Moskva, Nauka. (in Russian)
15. Shapiro, A. P., Luppov, S. P. (1983) *Rekurrentnye uravneniya v teorii populyacionnoj biologii* [Recompetitive equations in the theory of population biology]. Moskva, Nauka. (in Russian)
16. Sharkovskij, A. N. (1982) *Raznostnye uravneniya i dinamika chislennosti populyacij* [Differential equations and population dynamics]. Preprint 82.18. Kiev, Institut matematiki AN USSR. (in Russian)
17. Shlyufman, K. V., Neverova, G. P., Frisman, E. YA. (2017) Dinamicheskie rezhimy modeli Rikera s periodicheski izmenyayushchimsya mal'tuzianskim parametrom [Dynamic modes of the Riker model with a periodically changing Malthusian parameter]. *Nelinejnaya dinamika*. 13 (3), 363–380. Doi: 10.20537/nd1703005. (in Russian)

18. Talalaeva, A. B., Ciciashvili, G. Sh. (1999) Ocenka parametrov modeli Rikera po netochnym nablyudeniyam [Estimation of the parameters of the Riker model based on inaccurate observations]. *Sibirskij ekologicheskij zhurnal*. 4, 377–379. (in Russian)

Tsitsiashvili Gurami Sh. – Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, Main Scientific Researcher, Institute for Applied Mathematics FEB RAS.

E-mail: guram@iam.dvo.ru

Osipova Marina A. – Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor, Far Eastern Federal University, Main Scientific Researcher, Institute for Applied Mathematics FEB RAS.

E-mail: mao1975@list.ru