CAPÍTULO 1: EXPERIMENTO ALEATORIO

Experimento aleatorio. Espacio muestral. Técnicas de conteo de puntos muestrales.

Objetivos:

El alumno debe ser capaz de:

- Encontrar el espacio muestral asociado a un experimento aleatorio dado.
- Aplicar fórmulas de conteo para determinar el número de elementos de algunos espacios muestrales.
- Reconocer bajo qué condiciones un experimento es aleatorio.

Resumen

D1. *Experimento Aleatorio*: Es un proceso que repetido bajo un mismo conjunto de condiciones controladas no conduce siempre a un mismo resultado.

D2. *Espacio Muestral* (S): Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

D3. *Acontecimiento, evento o suceso:* Es un subconjunto del espacio muestral.

D4. *Acontecimiento o suceso elemental:* Se denomina así al conjunto formado por un único elemento del espacio muestral.

<u>*Conteo*</u>

T1. *Principio de la multiplicación*: En un experimento aleatorio que se realiza en dos partes o etapas, donde la primera parte tiene n_1 resultados posibles, y por cada resultado posible de la primera parte, la segunda parte tiene n_2 resultados posibles, el espacio muestral tendrá exactamente $n_1 \times n_2$ resultados.

T2. *Principio de la adición*: En un experimento aleatorio que se puede realizar de dos maneras mutuamente excluyente, donde la primera manera tiene n_1 resultados posibles, la segunda tiene n_2 resultados posibles, el espacio muestral tendrá exactamente $n_1 + n_2$ resultados posibles.

D5. *Combinación*: Se denomina combinación a una colección o grupo de elementos (el orden no es importante).

D6. *Variación o permutación*: Se denomina variación o permutación a cada secuencia u ordenación de elementos (el orden es importante).

Obs: Dos combinaciones son diferentes si difieren en el número de elementos o en al menos un elemento. Dos variaciones son diferentes si difieren en el número de elementos, en algún elemento, o en el orden de presentación de al menos un elemento.

T3. El número de variaciones posibles con *n* objetos distintos es $\boldsymbol{P_n = n!}$.

T4. El número de variaciones posibles de *n* objetos distintos tomados de *r* a la vez es

$$V_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

T5. El número de variaciones posibles con *n* objetos distintos ubicados en un círculo es $(n-1)!$.

T6. El número de variaciones posibles con *n* objetos no todos distintos, de los cuales $\boldsymbol{n_1}$ son de un tipo, $\boldsymbol{n_2}$ son de un segundo tipo,…, $\boldsymbol{n_k}$ son de un *k*-ésimo tipo es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}.$$

T7. El número de formas posibles de partir un conjunto de *n* objetos en *r* celdas con n_1 elementos en la primera celda, n_2 en la segunda,…, n_r elementos en la *r*-ésima celda es

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}.$$

T8. El número de combinaciones posibles de *n* objetos distintos tomados de *r* a la vez es

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Indicar el espacio muestral más apropiado para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios.

a) Se arroja un dado y una moneda y se observa el número de la cara superior del dado y la cara de la moneda que se obtienen.
b) Se observa el tiempo que demora el sistema informático de un banco en registrar el depósito realizado en efectivo en un cajero automático del interior del país y transferirlo a una cuenta corriente de una sucursal del Gran Bs. As.
c) Se observa la cantidad de consultas médicas en la guardia del Hospital de Niños, en una semana del año elegida al azar, hasta que se detecta un caso con meningitis.
d) Un supermercado de la ciudad de Yerba Buena ha inaugurado una nueva modalidad de compra por Internet que permite el pago con tarjeta de crédito. Cuando las facturas se realizan con errores se producen quejas de los clientes que demoran el pago por parte de la entidad que emitió la tarjeta de crédito. Se eligen diez facturas al azar y se registran los montos de los errores de facturación.

Resolución:

a) Si se acuerda en observar primero el resultado del dado y luego el de la moneda, el resultado de dicha observación será un par ordenado, y el espacio muestral de todos los posibles pares ordenados será

$$\mathcal{S} = \{(x, y)/x = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\ y = \text{cara, sello}\}.$$

b) Al observar el tiempo que demora un sistema informático en registrar el depósito realizado en efectivo en un cajero automático del interior del país y transferirlo a una cuenta corriente de una sucursal del Gran Buenos Aires, podría ocurrir que por una falla del sistema el depósito y transferencia demoraran un plazo mayor al habitual. Por tal motivo se puede considerar no acotado el conjunto de resultados posibles.

El tiempo es continuo y puede ser igual a cualquier valor real positivo.

$$\mathcal{S} = \{x/x \in \mathbb{R}^+\} = (0, +\infty).$$

c) Cuando se observa la cantidad de niños que realizan consultas en la guardia del Hospital de Niños, durante una semana, hasta que se detecta el primer caso de meningitis, puede suceder que el primero que concurra sea por meningitis, o el segundo, o el tercero, etc.

Al ser observaciones resultantes de una enumeración los resultados posibles son los números naturales.

$$\mathcal{S} = \{x/x \in \mathbb{N}\}.$$

d) Al estudiar los montos de los errores de facturación de 10 facturas elegidas al azar se observa una 10-upla ordenada.
Cualquier factura seleccionada al azar puede no presentar ningún error o presentar algún error por exceso o por defecto, consecuentemente al observar los montos de los errores ellos pueden ser positivos, negativos o nulos.
Si se consideran errores de hasta centavos de peso, el espacio muestral no son todos los números reales, sino sólo aquellos que admiten una representación decimal con un máximo de dos decimales.

$$\mathcal{S} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10}: x_i \text{ tiene una representacion decimal con hasta dos decimales}\}.$$

Ejemplo 2: A un grupo de 200 estudiantes que comienzan a cursar una materia *Inferencia Estadística* se les pregunta si ya han aprobado *Estadística Descriptiva*, *Matemática I* y *Matemática II*. Los resultados fueron los siguientes: 150 ya aprobaron *Matemática I*, 130 *Estadística Descriptiva* y 80 *Matemática II*, 60 aprobaron las tres materias, 120 *Matemática I* y *Estadística Descriptiva*, 70 *Matemática I* y *Matemática II* y 65 *Estadística Descriptiva* y *Matemática II*. Representar en un diagrama de Venn la situación anteriormente descripta y responder cuántos de los alumnos que comenzaron a cursar Estadística I:

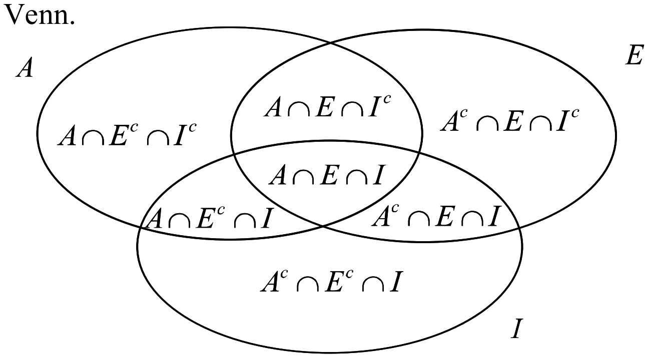
a) Aprobaron al menos una de las tres materias.
b) Aprobaron las materias *Estadística Descriptiva* y *Matemática I* pero no *Matemática II*.
c) Aprobaron sólo la materia *Estadística Descriptiva*.
d) No aprobaron ninguna de las tres materias.

Resolución:

Sean los conjuntos

$U = \{x/x \text{ es alumno que comienza a cursar Inferencia Estadística}\}$,
$A = \{x/x \text{ alumno de } U \text{ que aprobó Matemática II}\}$,
$E = \{x/x \text{ alumno de } U \text{ que aprobó Estadística Descriptiva}\}$, e
$I = \{x/x \text{ alumno de } U \text{ que aprobó Matemática I}\}$.

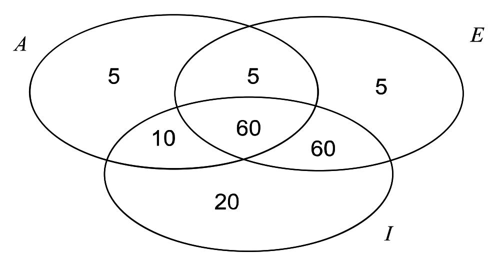
Para poder organizar la información suministrada en este ejercicio, se determinan los cardinales (número de elementos si el conjunto es finito) de cada conjunto, desde el conjunto más restrictivo hasta el menos restrictivo; para finalmente escribirlos en el diagrama de Venn.



Se denota con $|A|$ al cardinal del conjunto A.

- 60 estudiantes aprobaron las tres materias, consecuentemente $|A \cap E \cap I| = 60$
- Se sabe que $A \cap E = (A \cap E \cap I) \cup (A \cap E \cap I^c)$, por lo tanto $|A \cap E| = |A \cap E \cap I| + |A \cap E \cap I^c|$ debido a que los conjuntos $A \cap E \cap I$ y $A \cap E \cap I^c$ son mutuamente excluyentes. Consecuentemente
  $|A \cap E \cap I^c| = |A \cap E| - |A \cap E \cap I| = 65 - 60 = 5$, ya que 65 alumnos aprobaron *Estadística Descriptiva* y *Matemática II* y 60 aprobaron las tres materias.
- De manera análoga:
  $|A \cap E^c \cap I| = |A \cap I| - |A \cap E \cap I| = 70 - 60 = 10$, pues 70 aprobaron *Matemática I* y *Matemática II*, y
  $|A^c \cap E \cap I| = |E \cap I| - |A \cap E \cap I| = 120 - 60 = 60$ pues 120 aprobaron *Matemática I* y *Estadística Descriptiva*.
- $A = (A \cap E^c \cap I^c) \cup (A \cap E \cap I^c) \cup (A \cap E^c \cap I) \cup (A \cap E \cap I)$
  $|A| = |A \cap E^c \cap I^c| + |A \cap E \cap I^c| + |A \cap E^c \cap I| + |A \cap E \cap I|$ por ser los conjuntos $A \cap E^c \cap I^c$, $A \cap E \cap I^c$, $A \cap E^c \cap I$ y $A \cap E \cap I$ mutuamente excluyentes, consecuentemente,
  $|A \cap E^c \cap I^c| = |A| - |A \cap E \cap I^c| - |A \cap E^c \cap I| - |A \cap E \cap I| = 80 - 5 - 10 - 60 = 5$ pues 80 aprobaron *Matemática II*.
- De manera análoga:
  $|A^c \cap E \cap I^c| = |E| - |A \cap E \cap I^c| - |A^c \cap E \cap I| - |A \cap E \cap I| = 130 - 5 - 60 - 60 = 5$ y
  $|A^c \cap E^c \cap I| = |I| - |A \cap E^c \cap I| - |A^c \cap E \cap I| - |A \cap E \cap I| = 150 - 10 - 60 - 60 = 20$, teniendo en cuenta que 130 ya aprobaron *Estadística Descriptiva* y 150 *Matemática I*.

Si se escribe en cada conjunto su cardinal se obtiene:



a) $A \cup E \cup I = \{x \,/\, x$ aprobó al menos una asignatura$\}$
$|A \cup E \cup I| = 5 + 5 + 5 + 10 + 60 + 60 + 20 = 165$

b) $A^c \cap E \cap I = \{x \,/\, x$ aprobó *Matemática I* y *Estadística Descriptiva* pero no *Matemática II*$\}$
$|A^c \cap E \cap I| = 60$

c) $A^c \cap E \cap I^c = \{x \,/\, x$ aprobó sólo Estadística$\}$ $|A^c \cap E \cap I^c| = 5$

d) $(A \cup E \cup I)^c = \{x \,/\, x$ no aprobó ninguna de las tres materias$\}$
$|(A \cup E \cup I)^c| = |U| - |A \cup E \cup I| = 200 - 165 = 35$

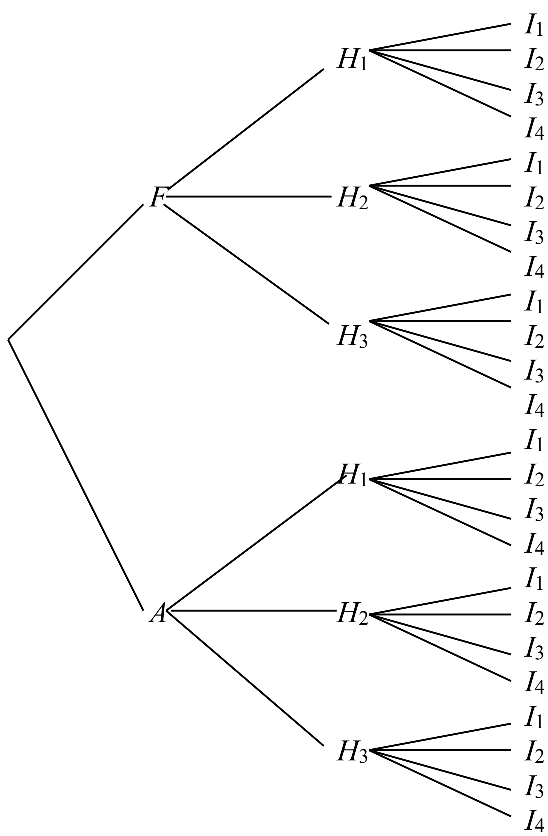
Ejemplo 3: Un empleado tiene facultad para escoger un curso de capacitación en finanzas o en administración de riesgos, cada uno de los cuales se ofrecen en tres horarios y con cuatro diferentes instructores. ¿Cuántas opciones se ofrecen al empleado?

Resolución:

Elegir un curso de capacitación, un horario y un instructor, sin tener a priori ninguna preferencia, puede pensarse como un experimento aleatorio que consta de tres etapas: la elección del curso, la elección del horario y la elección del instructor.
La elección del curso se puede hacer de $n_1 = 2$ maneras posibles, de Finanzas o de Administración de riesgos.
Por cada selección del curso, se pueden hacer $n_2 = 3$ elecciones posibles de horarios.
Por cada selección del curso y del horario, se pueden hacer $n_3 = 4$ elecciones posibles de instructores.
Entonces, por el Principio de la Multiplicación, el empleado tiene $n_1.n_2.n_3 = 2.3.4 = 24$ opciones distintas.

También se podrían contar las opciones enumerándolas en un diagrama de árbol.

Si se designa con F al curso de Finanzas, con A al curso de Administración de riesgos, con H_1, H_2 y H_3 los tres horarios y con I_1, I_2, I_3, I_4 los cuatro instructores.



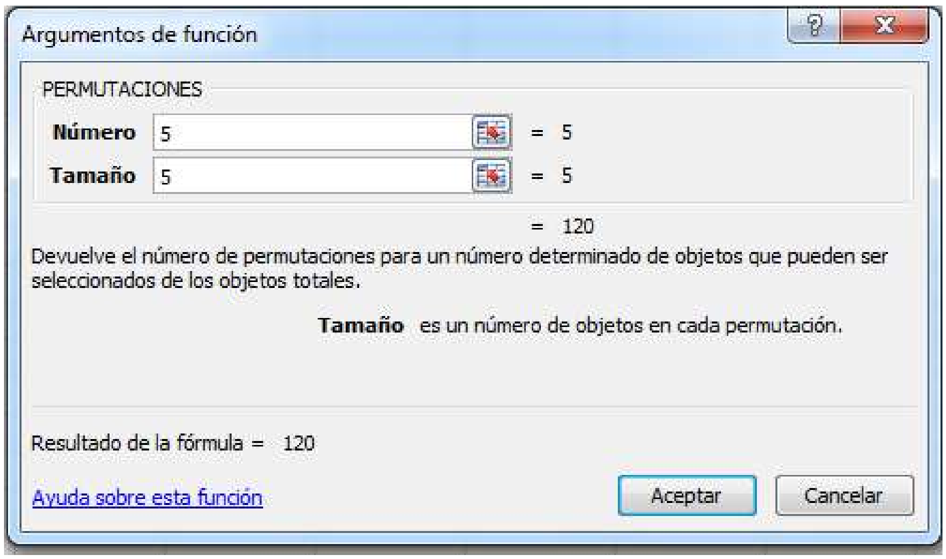
(F,H_1,I_1)
(F,H_1,I_2)
(F,H_1,I_3)
(F,H_1,I_4)
(F,H_2,I_1)
(F,H_2,I_2)
(F,H_2,I_3)
(F,H_2,I_4)
(F,H_3,I_1)
(F,H_3,I_2)
(F,H_3,I_3)
(F,H_3,I_4)
(A,H_1,I_1)
(A,H_1,I_2)
(A,H_1,I_3)
(A,H_1,I_4)
(A,H_2,I_1)
(A,H_2,I_2)
(A,H_2,I_3)
(A,H_2,I_4)
(A,H_3,I_1)
(A,H_3,I_2)
(A,H_3,I_3)
(A,H_3,I_4)

Ejemplo 4: Un viajante debe visitar cinco ciudades en un día para entregar mercadería. De acuerdo al orden en que visite las ciudades será el costo del viaje, pues los precios de los hoteles, restaurantes y la distancia a recorrer serán distintos en cada caso. ¿Los costos de cuántos viajes diferentes debe evaluar?

Resolución:

El orden en que se realizan las visitas a las ciudades es importante porque determina el costo del viaje. Entonces, la cantidad de recorridos por las cinco ciudades se puede contar con la cantidad de variaciones de las 5 ciudades, es decir, $P_5 = 5! = 120$ formas distintas

Nota: Este ejercicio se puede resolver con Microsoft Excel empleando el Menú Fórmulas, Insertar Función, PERMUTACIONES y, como se quiere saber los costos de cuántos viajes se deben calcular, se puede contar con la cantidad de variaciones de las 5 ciudades:



Ejemplo 5: Un inversionista desea integrar un portafolio con cinco acciones. Si hay 30 acciones en el mercado, ¿de cuántas maneras lo puede formar?

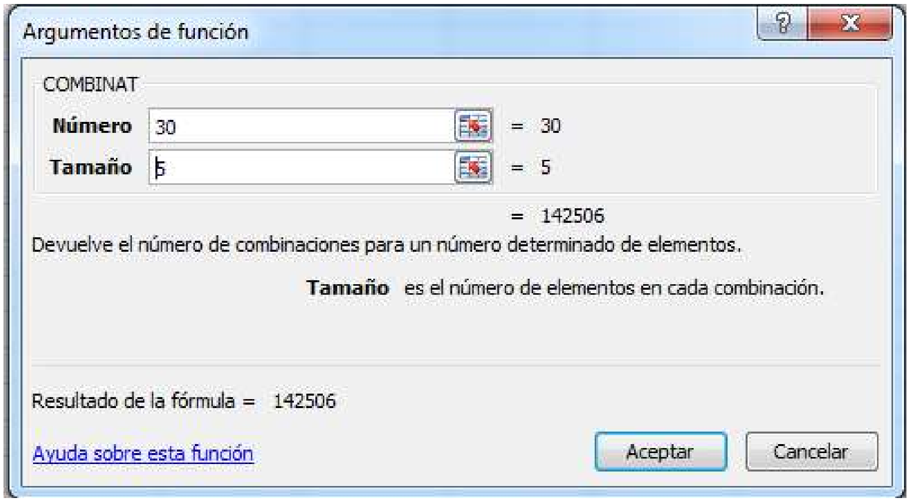
Resolución:

Al elegir un portafolio con 5 acciones no es importante el orden en la selección porque, por ejemplo, {acción 1, acción 3, acción 7, acción 10, acción 30} es el mismo portafolio que {acción 3, acción 10, acción 1, acción 30, acción 7}.

Al no importar el orden, se cuenta la cantidad de portafolios posibles con el número de combinaciones.

Esto es $\binom{30}{5} = \frac{30!}{5!(30-5)!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 25!} = 142.506$ elecciones posibles de portafolios.

Nota: En Microsoft Excel este ejercicio se resuelve con la fórmula COMBINAT que se encuentra en el Menú Fórmulas, Insertar Función, Todas y COMBINAT. Se cuenta la cantidad de portafolios posibles con el número de combinaciones:



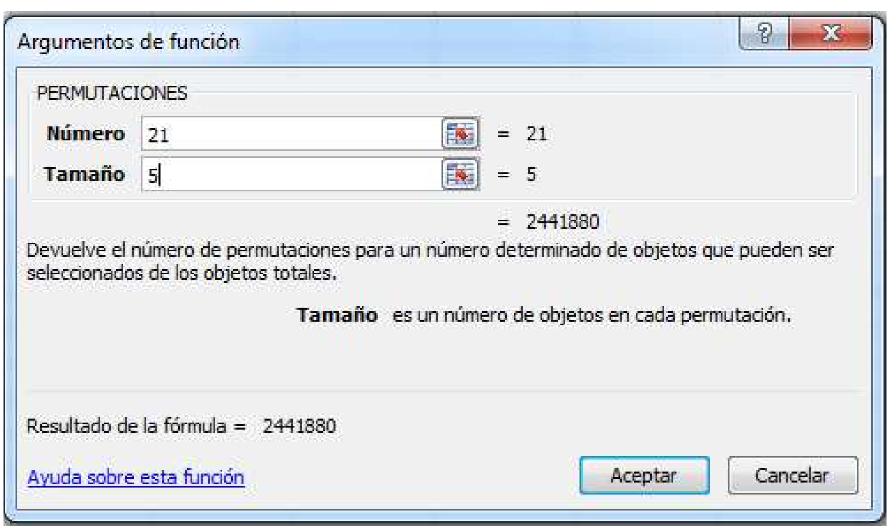
Ejemplo 6: El director técnico de la selección nacional viaja a un torneo de básquet con 21 jugadores. Suponiendo que todos los jugadores pueden jugar en cualquier posición, ¿cuántos equipos diferentes puede formar? (Nota: se considera que ordenamientos distintos de los mismos jugadores constituyen equipos diferentes)

Resolución:

Los ordenamientos distintos de los 5 jugadores seleccionados constituyen equipos diferentes, entonces es importante tener en cuenta el orden. Consecuentemente, el número de equipos que se pueden formar se cuenta con el número de variaciones de 21 jugadores tomados de 5 a la vez.

Son $V_{21,5} = \frac{21!}{(21-5)!} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16!}{16!} = 2.441.880$equipos diferentes.

Nota: En Microsoft Excel este ejercicio se resuelve con la fórmula PERMUTACIONES que se encuentra en el Menú Fórmulas, Insertar Función, Todas y PERMUTACIONES. Por lo tanto, el número de equipos que se pueden formar con 21 jugadores tomados de 5 a la vez es:



TRABAJO PRÁCTICO Nº 1

1) Responda brevemente, pero con precisión:
   a) ¿Qué condiciones debe reunir un experimento para que se lo pueda considerar aleatorio?
   b) ¿Cuáles son las condiciones que distinguen un experimento determinístico de un experimento aleatorio?
   c) ¿A qué conjunto se llama espacio muestral asociado a un experimento aleatorio?

2) El departamento de comercialización de una empresa analiza estrategias para aumentar las ventas de un nuevo producto que acaba de lanzar al mercado: jabón líquido de lavarropas para diluir. Para apoyar el lanzamiento se proponen tres "combos" diferentes para su venta: jabón+suavizante (C1), jabón+detergente lavavajilla(C2) o jabón+botella reutilizable de 3 litros (C3). A fin de determinar cuál es la opción más atractiva para los clientes se seleccionan aleatoriamente 15 supermercados para realizar la experiencia. Los quince supermercados seleccionados se dividen en tres grupos iguales, y para cada grupo se asigna uno de los combos para la venta.

   Se registra la cantidad de combos vendidos en cada uno de los grupos durante un determinado mes.
   a) ¿El experimento descripto es aleatorio? Justifique discutiendo las condiciones enumeradas en el ejercicio anterior.
   b) ¿Cuál es el conjunto de posibles resultados del experimento?
   c) ¿De cuántas maneras se puede asignar los supermercados a los grupos?

3) Indique el espacio muestral apropiado para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios:
   a) Un supermercado está interesado en saber cuál es la marca más seleccionada por sus clientes en dos productos: azúcar y harina. Este supermercado comercializa tres marcas de azúcar (a_1, a_2, a_3) y dos de harina (b_1, b_2). Se registra como variable dicotómica si sus clientes adquieren (1) o no (0) cada una de estas marcas.
   b) Se registra el ingreso por ventas mensual, durante el año 2024, de un emprendimiento familiar de ventas de tortas.
   c) Se observa la calificación (en escala de 1 a 5, donde 5 indica mayor calidad) que los próximos 6 clientes asignan al servicio de atención al cliente de una empresa de venta de telefonía celular.
   d) Se registra la cantidad de ventas (número de transacciones) diarias de una nueva sucursal de venta de hidrocarburos, hasta que se alcanza el objetivo de ganancias fijado.

4) En una habitación se encuentran 5 hombres y 3 mujeres mayores de 21 años, y también 4 hombres y 3 mujeres con una edad menor o igual a 21 años. Se definen los siguientes eventos: A={mayores de 21 años}; B={con a lo sumo 21 años}; C={hombres}; D={mujeres}, determine el número de personas en:

   a) $B \cup D$
   b) $A^c \cap C^c$
   c) Defina por comprensión los conjuntos dados en a) y b).

5) Ud. va a una librería a comprar novelas y tienen para ofrecerle solamente 5 novelas policiales, 4 novelas ciencia ficción y 3 novelas de espionaje y suspenso.

a) Si el experimento consiste en elegir una novela de cada género, indique el espacio muestral asociado a este experimento, ¿cuántos elementos tiene?
b) Si el experimento consiste en elegir una novela cualquiera sea su género, indique el espacio muestral asociado a este experimento, ¿cuántos elementos tiene?

6) Un nuevo cliente de un banco debe elegir un usuario y un PIN. El usuario es un código de 8 caracteres combinados entre números y letras minúsculas. Mientras que el PIN es un código de 4 dígitos.

El cliente decide formar un usuario de la siguiente manera: 3 letras minúsculas seguidas de 5 números.

a) Defina por comprensión el conjunto de usuarios que pueden crearse con las características mencionadas.
b) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto definido en a)?
c) ¿Cuántos pines pueden formarse con 4 dígitos diferentes?
d) Si el cliente elige el usuario y el PIN entre los considerados en a) y c), respectivamente, ¿cuántas combinaciones de usuario y pin podría proponer?

7) En una empresa ingresaron cuatro técnicos. Se desea elegir al azar dos para el área operaciones, uno para control de calidad y el restante para control de stock. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer la asignación?

8) Para la ceremonia de inauguración de una competencia deportiva se quiere sentar en una banca a cuatro competidores, tres competidoras y dos entrenadores. Determine cuántas maneras de sentarse encontrarían estas personas si se sientan:

a) sin restricción.
b) competidores a la izquierda, competidoras a la derecha y entrenadores al centro.
c) sentados por categorías (competidores y entrenadores).

9) Un banco ha solicitado a una empresa que selecciona personal la búsqueda de tres contadores junior. La empresa ha publicado un aviso clasificado y han respondido 9 contadores, cuatro hombres y cinco mujeres. Si todos los candidatos están igualmente capacitados para cubrir las vacantes:

a) ¿Cuántas propuestas diferentes se pueden ofrecer al gerente del banco?
b) ¿Cuántas de estas propuestas tienen un hombre y dos mujeres?
c) Si el gerente del banco desea contratar a un candidato varón en particular, ¿en cuántas de las propuestas del punto (a) está incluido este “recomendado”?

10) El plantel de un equipo de basquetbol está formado por 12 jugadores, de los cuales 3 son base, 2 escolta, 2 alero, 2 pivot, 3 ala pivot

a) Un equipo titular está formado por 5 jugadores, 1 base, 1 escolta, 1 alero, 1 pivot y 1 ala pivot. ¿Cuántos equipos titulares diferentes pueden formarse?
b) ¿Cuántos equipos de basquetbol de 5 personas se podrían formar si no se tienen en cuenta las posiciones del juego?

11) a) Entre los 25 padres de alumnos que desean integrar la cooperadora de una escuela, se necesita elegir un presidente, un tesorero y un secretario, ¿de cuántas formas se puede realizar la elección? Indique con claridad la definición utilizada para realizar el cálculo.

c) Una vez elegidos los tres cargos mencionados en el apartado anterior, entre los 22 padres restantes, se deben conformar 3 comisiones (de finanzas, de asuntos legales y académica) de 5 personas cada una, ¿de cuantas formas es esto posible?

12) Sean A, B y C tres acontecimientos de un experimento aleatorio. Indique si las siguientes relaciones son verdaderas o falsas. Justifique en cada caso su respuesta.

a) $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$
b) $(A \cup B)^c \cap C = A^c \cap B^c \cap C^c$

13) Sean A, B y C tres acontecimientos de un experimento aleatorio. Identifique cada una de las siguientes igualdades de conjuntos (a), (b), (c) y (d) con alguna de las frases (i), (ii), (iii) y (iv).

(a) $\boldsymbol{A \cap B \cap C = A \cup B \cup C}$

(b) $\boldsymbol{A \cap B \cap C = A}$

(c) $\boldsymbol{A \cup B \cup C = A}$

(d) $\boldsymbol{(A \cup B \cup C) - (B \cup C) = A}$

(i) A y "B o C" son eventos mutuamente excluyentes.
(ii) Los tres eventos coinciden
(iii) La ocurrencia de A implica la ocurrencia de "B y C"
(iv) La ocurrencia de B o C implica la ocurrencia de A.

Ejercicios Adicionales

1) La ficha de empleado de Pemex tiene un número de identificación que consta de 6 dígitos. Sin embargo, se espera que para el año próximo sean más de 50 millones de empleados los que se hayan registrado desde su fundación. Dado que se está efectuando la migración a un nuevo sistema informático, se desea saber si los 6 dígitos serán suficientes o cuál es la cantidad mínima de dígitos que debería agregarse en el número de identificaciones. (Nota: el primer dígito debe ser diferente de cero).

2) En la gerencia de un banco se quiere formar un comité integrado por cinco personas para evaluar proyectos de inversión. Además del gerente, hay 11 empleados aptos para formar parte de la comisión. ¿Cuántos comités diferentes es posible armar con el gerente incluido en el comité?

3) En una encuesta realizada entre 200 inversionistas activos se halló que 120 utilizan corredores por comisión, 126 corredores de tiempo completo y 64 ambos tipos de corredores. Determine el número de inversionistas que usan:

a) al menos un tipo de corredor.
b) exactamente un tipo de corredor.
c) sólo corredores por comisión.
d) ningún corredor.

4) En una solicitud de empleo hay 11 preguntas que se deben contestar por sí o no. ¿De cuántas formas distintas se puede contestar la solicitud? (Considere que no se deja ninguna pregunta sin responder).

5) En la Cámara Alta hay 20 senadores oficialistas y 10 opositores, se necesita elegir una comisión de 5 senadores para tratar un proyecto de ley particular. a) ¿Cuántas comisiones diferentes se podrían elegir? b) De todas estas posibles comisiones, ¿en cuántas habría 3

oficialistas y 2 opositores? c) ¿En cuántas habría más oficialistas que opositores? d) ¿Cuántas de ellas estarían constituidas por miembros del mismo partido?

6) Encontrar los números que pueden formarse con los cuatro dígitos 1, 2, 3 y 4 sin repetir ningún dígito.

7) Una decoradora de interiores necesita ordenar en una línea 12 banderines de tres empresas auspiciantes de un evento, cuenta con 6 banderines de la empresa *A*, 4 de la empresa *B* y 2 de la empresa *C*.
   a) Si los banderines de cada empresa son idénticos ¿en cuántas formas puede ordenar los 12 banderines?
   b) Si los banderines de cada empresa son diferentes entre ellos en cuantas formas puede ordenar los 12 banderines.

8) Seis personas entran a un cuarto en el que hay diez sillas. ¿De cuántas formas distintas pueden ocupar las diez sillas?

9) ¿Cuál es el espacio muestral apropiado para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios?
   a) Se observa el número de clientes esperando en cada una de cuatro cajas de supermercado los días sábado a las 20 horas.
   b) Se observa la elección de la marca de café que realizan los próximos cinco clientes en la góndola del supermercado, entre cuatro marcas ofrecidas.
   c) Se observa el monto en la caja de ahorro de un cliente seleccionado aleatoriamente de una sucursal bancaria en un determinado momento.

10) Para tener acceso a las inversiones de plazo fijo realizadas por los clientes de un banco hay que introducir una clave de cinco dígitos. ¿Cuántos intentos, a lo sumo, deberá realizar una persona no habilitada para conocer esta información?

11) El director de una revista ha recibido doce contribuciones de artículos para publicar en el próximo número, pero solamente puede publicar cinco de ellos.
   a) Si no tiene preferencia por ningún artículo en particular, ¿cuántos grupos diferentes de cinco artículos podría seleccionar entre los doce que dispone?
   b) Una vez que eligió los cinco artículos ¿en cuántas formas distintas los puede ordenar en la revista?
   c) ¿Cuántas variaciones existen de doce objetos que se toman de a cinco a la vez? Indique cómo esta respuesta se relaciona con los puntos a y b.

12) Un inspector de una fábrica realiza controles a los operarios de 6 máquinas diferentes en el día. A fin de impedir que los operarios sepan cuándo serán inspeccionados varía el orden de las visitas. ¿De cuántas maneras puede organizar su rutina?

13) El Señor Fernández piensa presentarse en las próximas elecciones presidenciales del Club "Andino Tenis". Para ello necesita formar una lista de cuatro candidatos a vocales que lo acompañen en la elección. Ha recibido la sugerencia de considerar los nombres de diez socios para estos cargos.
   a) Si no tiene preferencia por ninguno de los miembros postulados, ¿cuántos grupos diferentes de cuatro personas podría seleccionar entre los diez que se postulan?
   b) Una vez que eligió las cuatro personas, ¿en cuántas formas distintas los puede ordenar en la boleta?
   c) ¿Cuántas variaciones existen de diez objetos que se toman de a cuatro a la vez? Indique cómo se relaciona esta respuesta con los puntos a y b.

14) La agencia de automóviles VW ofrece a sus clientes el modelo Gol en las siguientes versiones: base, base con aire acondicionado o full, dando la opción en cada caso de que tengan incorporados o no el equipo de GNC. Encuentre el espacio muestral para un experimento donde se selecciona aleatoriamente un automóvil Gol de la agencia y se registra sus características.

15) Para seleccionar una clave fiscal en AFIP, un monotributista desea conformar una clave alfanumérica que conste de 4 letras seguidas de 2 dígitos:
   a) ¿De cuántas maneras puede una persona elegir una clave fiscal? Considere que puede usar 26 letras distintas.
   b) ¿Cuántas claves comienzan con A?
   c) ¿Cuántas terminan con 2?
   d) ¿Cuántas comienzan con A y terminan con 2?
   e) ¿Cuántas comienzan con A o terminan con 2?

16) A una fiesta asisten 10 hombres y 12 mujeres, ¿cuántas parejas de baile distintas se pueden formar con un hombre y una mujer?, ¿y con dos mujeres? Indique con claridad la definición utilizada para realizar el cálculo.

17) Una escuela secundaria ofrece a sus alumnos tres orientaciones: científica, económica y humanística, cualquiera de ellas puede cursarse en inglés o en francés. Encuentre el espacio muestral para el experimento que selecciona un egresado al azar de la escuela y registra el título secundario alcanzado.

18) En un hospital se utilizan cinco símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes, de manera que los dos primeros son letras y los tres últimos son dígitos. Suponiendo que hay 25 letras, cuántas historias clínicas pueden hacerse si:
   a) No hay restricciones sobre letras y números;
   b) Las dos letras no pueden ser iguales.

19) Indique si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justifique en cada caso su respuesta.
   a) El número de combinaciones de n elementos tomados de a k es mayor que el número de variaciones de n elementos tomados de a k.
   b) El número de permutaciones de n elementos es mayor que el número de variaciones de esos n elementos tomados de a k.

20) En una biblioteca tienen diez libros para ser ordenados en un estante, tres son libros iguales de física, dos de matemáticas iguales y otros cinco de otras diferentes áreas de la ciencia. ¿Cuántas formas diferentes de ordenar los libros existen?

21) En una fiesta infantil hay 5 hombres, 10 mujeres, 15 niños y 20 niñas, ¿de cuántas maneras se pueden elegir:
   a) 3 hombres y 2 mujeres?
   b) 5 personas que no sean niñas?
   c) 2 personas de cada grupo?

22) Dé un ejemplo de un experimento determinístico y de uno aleatorio, justificando el cumplimiento de las condiciones enumeradas en el apartado anterior.

23) ¿Cuál es el espacio muestral apropiado para cada uno de los siguientes experimentos aleatorios?
   a) Se registra la cantidad de entrevistas a postulantes a un cargo de secretaria, hasta que se encuentra una persona que habla correctamente inglés.

b) Se observa el número de entradas vendidas en un cine cada uno de los cinco primeros días de mes dado.
c) Se observa la cantidad de productos distintos que compran los tres próximos clientes de un supermercado, entre los diez que se encuentran en oferta.
d) Se observa el monto de la factura de teléfono, en el mes de agosto de 2022, de un cliente seleccionado aleatoriamente.

24) Cuando fue a introducir su clave de cuatro dígitos en el cajero automático, una persona se dio cuenta de que no la recordaba. Suponiendo que el cajero le deje probar todas las claves distintas:

a) ¿A lo sumo, cuántas claves debería probar?
b) ¿Cuántas claves, a lo sumo, tendrá que probar si recuerda que todos los dígitos son impares?
c) ¿Y si recuerda que el número es capicúa?
d) ¿Y si recuerda que la clave es un anagrama de 1991?

EJERCICIOS SUGERIDOS DEL LIBRO "PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS" de WALPOLE, MYERS y MYERS. (9º Ed.)

Capítulo 2:

Sección 2.2, página 44: ejercicios 19 y 20.
Sección 2.3, página 51: ejercicios 22, 32, 36, 38, 28, 41 y 46.

CAPÍTULO 2: PROBABILIDAD

Definición de probabilidad. Asignación de probabilidad a un evento. Reglas aditivas. Probabilidad condicional. Independencia de sucesos. Reglas multiplicativas. Probabilidad total. Regla de Bayes.

Objetivos:

El alumno debe ser capaz de:

- Reconocer cuándo una función es una función de probabilidad.
- Comprender la relación entre los axiomas de probabilidad y las características de la frecuencia relativa.
- Identificar en qué situaciones es factible usar la definición clásica de probabilidad.
- Calcular probabilidades condicionales utilizando probabilidades no condicionales.
- Determinar si dos sucesos son independientes analizando si la ocurrencia de uno influye en la probabilidad de ocurrencia del otro.
- Calcular la probabilidad de que una "causa" haya originado una consecuencia cuando se conoce que ésta efectivamente ocurrió, usando el Teorema de Bayes.

Resumen

D1. *Definición de Probabilidad de Laplace*: Sea un espacio muestral $\mathcal{S}$y acéptese "a priori" que, por la simetría del experimento aleatorio, una persona razonable se sentiría indiferente con respecto a la preferencia de uno cualquiera de los acontecimientos elementales. Entonces la probabilidad de un acontecimiento es proporcional al número de acontecimientos elementales que lo forman.

D2. *Definición Frecuentista de Probabilidad*: Si cada vez que se realiza una serie suficientemente grande de repeticiones de un fenómeno aleatorio la razón (frecuencia relativa) del número de veces que un suceso A ocurre al número total de repeticiones, $f_n(A)$, es aproximadamente p, y si la frecuencia relativa $f_n(A)$ es habitualmente más próxima a p cuando mayor es el número de repeticiones, entonces se acepta de antemano en definir $P(A) = p$.

D3. *Definición Axiomática de Probabilidad:* Sea $\mathcal{S}$ el espacio muestral de un experimento aleatorio. Una probabilidad P es una función que asigna a cada acontecimiento A de $\mathcal{S}$ un número $P(A)$, llamado la probabilidad de A, que satisface los siguientes axiomas: (i) $P(A) \geq 0$, para todo acontecimiento A, (ii) $P(\mathcal{S}) = 1$, y (iii) para cualquier sucesión de acontecimientos mutuamente excluyentes $A_1, A_2, \ldots P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Obs: Las definiciones **D1** y **D2** pueden considerarse definiciones operacionales, pues indican la manera de calcular la probabilidad, en algunas situaciones particulares. La definición **D3** es conceptual, indica los axiomas que debe cumplir cualquier probabilidad, más no especifica cómo calcularlas.

<u>*Propiedades:*</u> Denotando por A el conjunto de todos los acontecimientos de $\mathcal{S}$, se tiene que:

$1) P(\emptyset) = 0$ $\qquad$ $4) AyB \in A, A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$2) A \in A, P(A^c) = 1 - P(A)$ $\qquad$ $5) AyB \in A, P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

$3) A \in A, P(A) \leq 1$ $\qquad$ $6) AyB \in A, P(B \cup A) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Obs: Cuando $\mathcal{S}$ es un conjunto finito, se puede considerar que A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\mathcal{S}$. Ese conjunto se denomina **conjunto partes de** $\mathcal{S}$y se denota con $\boldsymbol{\mathcal{P}(\mathcal{S})}$.

D4. *Probabilidad Condicional*: Sean $AyB \in A$, con $P(B) \neq 0$, la probabilidad condicional de A dado B, que se indica por $\boldsymbol{P(A|B)}$, se define como

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}.$$

D5. *Eventos independientes*: A y B son independientes sii $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)P(B)}$.
T1. Sean $AyB\in A$, con $P(B)\neq 0$, entonces $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A|B)P(B)}$.
T2. Sean $AyB\in A$, con $P(B)\neq 0$, entonces A y B son independientes sii $\boldsymbol{P(A|B)=P(A)}$.
D6. *Partición del Espacio Muestral*: Los eventos $\boldsymbol{C_1,C_2,\dots,C_k}$ constituyen una partición del espacio muestral $\mathcal{S}$ sii (i) $\forall \boldsymbol{i,j\ con\ i\neq j, C_i}\cap \boldsymbol{C_j}=\emptyset$ y (ii) $\bigcup_{i=1}^{k} C_i=\mathcal{S}$.
T3. *Teorema de la Probabilidad Total*: Si $\boldsymbol{C_1,C_2,\dots,C_k}$ constituye una partición del espacio muestral $\mathcal{S}$, con $\boldsymbol{P(C_i)\neq 0}$ para todo $i=1,\dots,k$, entonces para cualquier evento $A\in A$

$$\boldsymbol{P(A)=\sum_{i=1}^{k}P(C_i)P(A|C_i)}.$$

T4. *Teorema de Bayes*: Si $\boldsymbol{C_1,C_2,\dots,C_k}$ constituye una partición del espacio muestral $\mathcal{S}$, con $\boldsymbol{P(C_i)\neq 0}$ para todo $i=1,\dots,k$, entonces para cualquier evento $A\in A$, con $P(A)\neq 0$

$$P(C_r|A)=\frac{P(C_r)P(A|C_r)}{\sum_{i=1}^{k}P(C_i)P(A|C_i)}, parar=1,\dots,k.$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Identificar qué definición de probabilidad se aplicaría para calcular la probabilidad de que al arrojar dos dados la suma de los resultados dé 7. Calcular dicha probabilidad.

Resolución:

Si se lanzan dos dados, se observa un par ordenado, entonces el conjunto de resultados posibles del experimento es $\boldsymbol{S}=\{(\boldsymbol{x,y})\ /\ \boldsymbol{x,y}=\mathbf{1,2,3,4,5,6}\}$.
El suceso de interés es $A=\{(x,y)/x+y=7\}=$
$\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.
Si el dado no está cargado todas las caras del dado tienen la misma posibilidad de ocurrir, por lo que es posible aplicar la definición de probabilidad de Laplace (**D1**) para calcular la probabilidad del suceso A. De esta manera:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\mathcal{S}|}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}.$$

Ejemplo 2: Dado $\boldsymbol{S}=\{\mathbf{1,2,3}\}$, probar que la función P: $\boldsymbol{\mathcal{P}(S)}\to\mathbb{R}$ definida a continuación representa una función de probabilidad.

$$\boldsymbol{P(S)=1; P(\emptyset)=0; P(\{1\})=0,3;\ P(\{2\})=0,5;\ P(\{3\})=0,2;}$$
$$\boldsymbol{P(\{1,2\})=0,8; P(\{1,3\})=0,5; P(\{2,3\})=0,7}$$

Resolución:

Una función es una función de probabilidad cuando cumple con los axiomas (i), (ii) y (iii) de la definición **D3**.
El conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ en este caso es el siguiente

$$\mathcal{P}(\mathcal{S})=\{\mathcal{S},\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$$

- Por la forma en que se definió P, se tiene que $P(A)\geq 0$, para todo acontecimiento $A\in P(\mathcal{S})$, y por tanto se satisface el axioma (i)
- Por definición de P, $P(\mathcal{S})=1$ y consecuentemente el axioma (ii) se satisface.
- Por tratarse de un espacio muestral finito, el conjunto de acontecimientos es finito y consecuentemente cualquier sucesión de acontecimientos disjuntos se reduce a una unión finita de acontecimientos no vacíos en $P(S)$. Las posibles uniones finitas de acontecimientos disjuntos no vacíos son las siguientes:

$$\{\mathbf{1}\}\cup\{\mathbf{2}\}=\{\mathbf{1,2}\}, \boldsymbol{P}(\{\mathbf{1}\})+\boldsymbol{P}(\{\mathbf{2}\})\mathbf{=0,3+0,5=0,8=}\boldsymbol{P}(\{\mathbf{1,2}\})$$
$$\{\mathbf{1}\}\cup\{\mathbf{3}\}=\{\mathbf{1,3}\}, \boldsymbol{P}(\{\mathbf{1}\})+\boldsymbol{P}(\{\mathbf{3}\})\mathbf{=0,3+0,2=0,5=}\boldsymbol{P}(\{\mathbf{1,3}\})$$

$\{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\}, \boldsymbol{P}(\{2\}) + \boldsymbol{P}(\{3\})$=0,5+0,2=0,7=$\boldsymbol{P}(\{2, 3\})$
$\{1\} \cup \{2, 3\} = \mathcal{S}, \boldsymbol{P}(\{1\}) + \boldsymbol{P}(\{2, 3\})$=0,3+0,7=1=$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$
$\{2\} \cup \{1, 3\} = \mathcal{S}, \boldsymbol{P}(\{2\}) + \boldsymbol{P}(\{1, 3\})$=0,5+0,5=1=$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$
$\{3\} \cup \{1, 2\} = \mathcal{S}, \boldsymbol{P}(\{3\}) + \boldsymbol{P}(\{1, 2\})$=0,2+0,8=1=$\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$

Se puede observar que todas cumplen con el axioma (iii)
Consecuentemente, la función P define una función de probabilidad en $\mathcal{P}(\mathcal{S})$.

Ejemplo 3: Dado $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$, indicar por qué las siguientes funciones $\boldsymbol{P}: \mathcal{P}(\mathcal{S}) \to \mathbb{R}$ no pueden definir una función de probabilidad.

a) $P(\{1\}) = 0{,}3, P(\{2\}) = 0{,}4, P(\{3\}) = P(\{4\}) = 0{,}25$
b) $P(\{1\}) = 0{,}3, P(\{2\}) = 0{,}2, P(\{3\}) = P(\{4\}) = 0{,}25, P(\{1, 2\}) = 0{,}6$

Resolución:

Una función es una función de probabilidad cuando cumple con los axiomas i), ii) y iii) de la definición **D3**.

a) Razonando por el absurdo, si se tratara de una probabilidad, por el tercer axioma se tendría que

$$\boldsymbol{P}(\mathcal{S}) = \boldsymbol{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \cup \{4\}) = \boldsymbol{P}(\{1\}) + \boldsymbol{P}(\{2\}) + \boldsymbol{P}(\{3\}) + \boldsymbol{P}(\{4\}) = 1{,}2$$

resultado inconsistente con el axioma 2 que dice $\boldsymbol{P}(\mathcal{S}) = 1$. Consecuentemente P no es una probabilidad.

b) Razonando por el absurdo, si se tratara de una probabilidad, por el tercer axioma se tendría que

$$P(\{1, 2\}) = P(\{1\}) + P(\{2\}) = 0{,}5 \neq 0{,}6.$$

Consecuentemente P no es una probabilidad.

Ejemplo 4:

Si $\boldsymbol{P(A)} = \frac{1}{7}$, $\boldsymbol{P(B)} = \frac{1}{5}$ y $\boldsymbol{P(A \cap B)} = \frac{1}{8}$, calcule: a) $\boldsymbol{P(A^c)}$; b)$P(A^c \cap B^c)$; c)$P(A^c \cap B)$ y d)$P(A^c \cup B^c)$.

Resolución:

a) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$, por propiedad 2 de probabilidad.

b) $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ por ley de De Morgan (el complemento de la unión es la intersección de los complementos). Luego

$$P(A^c \cap B^c) = P[(A \cup B)^c] = 1 - P(A \cup B)$$

Por propiedad 6, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{61}{280}$.

Entonces, $P(A^c \cap B^c) = 1 - \frac{61}{280} = \frac{219}{280}$

c) $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{3}{40}$.

d) $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ por ley de De Morgan (el complemento de la intersección es la unión de los complementos). Luego

$$P(A^c \cup B^c) = P[(A \cap B)^c] = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Ejemplo 5: El gerente de una fábrica de focos desea determinar cuál es la probabilidad de producir un foco defectuoso. Indicar cómo podría ser determinada esta probabilidad y qué definición se utilizaría.

Resolución:

Para conocer la probabilidad de producir un foco defectuoso, el gerente de la fábrica puede observar la condición de defectuoso o no defectuoso de una **gran cantidad** de focos producidos y calcular la razón (frecuencia relativa) del número de veces que observa un foco defectuoso entre la cantidad de focos observados. Si al aumentar el número de focos que se observan, esa razón se mantiene estable alrededor de un valor P, entonces se acepta en definir $P(A) = p$.
En este caso se está usando la definición frecuentista de probabilidad.

Ejemplo 6: Un experimento consiste en lanzar una moneda no convencional, para la cual la probabilidad de obtener una cara es 2 veces la de obtener sello. Escribir el espacio muestral asociado a este experimento y calcular la probabilidad de cada suceso elemental.

Resolución:

El espacio muestral asociado al experimento es: $\boldsymbol{S} = \{\text{cara, sello}\}$.

No es posible asignar probabilidad a cada suceso usando la definición clásica o de Laplace porque las probabilidades de los sucesos elementales no son iguales.

Se usará la definición axiomática que establece que la probabilidad del espacio muestral es igual a uno y que la probabilidad de la unión de sucesos elementales es igual a la suma de las probabilidades.

$$\boldsymbol{S} = \{\text{cara}\} \cup \{\text{sello}\} \Rightarrow P(\mathcal{S}) = P(\{\text{cara}\}) + P(\{\text{sello}\})$$
$$1 = 2P(\{\text{sello}\}) + P(\{\text{sello}\})$$
$$1 = 3P(\{\text{sello}\})$$
$$\frac{1}{3} = P(\{\text{sello}\})$$

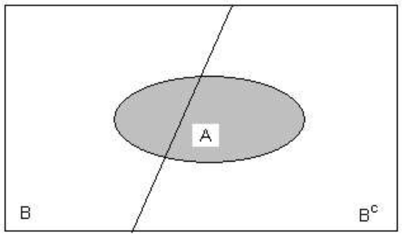
y consecuentemente la $P(\{\text{cara}\}) = \frac{2}{3}$.

Ejemplo 7: El gobierno de la provincia de Tucumán invitó a las empresas constructoras registradas para presentarse a la licitación para la construcción de una nueva escuela pública. La empresa constructora A está considerando presentarse. En los últimos años su principal competidor B se ha presentado en el 70% de las licitaciones de edificios escolares. Si B no se presenta en la licitación, la probabilidad de que A obtenga el trabajo es de 0,5 y si B se presenta a la licitación, la probabilidad de que A gane la licitación es 0,25.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que A obtenga el trabajo?
b) Si A no obtiene el trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que B se haya presentado a la licitación?

Resolución:

Sean los sucesos:
B: La empresa B se presenta a la licitación.
A: La empresa A consigue el trabajo.
Se sabe que $P(B) = 0{,}70$, luego $P(B^c) = 1 - P(B) = 0{,}3$. También se tiene que $P(A|B^c) = 0{,}5$ y $P(A|B) = 0{,}25$.
Se puede considerar que B y B^c determinan una partición del espacio muestral, y consecuentemente la situación presentada en este caso se puede visualizar gráficamente de la siguiente manera:



a) Por Teorema de Probabilidad Total:

$$P(A) = P(A|B)P(B) + P(A|B^c)P(B^c)$$
$$= 0{,}25 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 = 0{,}325$$

b) $P(A^c|B) = 1 - P(A|B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}325 = 0{,}675$

$P(B|A^c) = \frac{P(B) \times P(A^c|B)}{P(A^c)} = \frac{0{,}7 \times 0{,}75}{0{,}675} = 0{,}78$ por Teorema de Bayes.

Ejemplo 8: El 70% del personal del departamento de contabilidad de una empresa son graduados y 30% son pasantes. El 30% de los empleados elabora pólizas de nóminas. Si el hecho de ser o no graduado y el elaborar pólizas son independientes, calcule la probabilidad de que un empleado cualquiera sea pasante y elabore pólizas.

Resolución:

Sean los sucesos:

G: el trabajador es graduado $P(G) = 0{,}7$

P: el trabajador es pasante $P(P) = 0{,}3$

E: el trabajador elabora pólizas $P(E) = 0{,}3$

$P(P \cap E) = P(P) \times P(E) = 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$ por ser independientes los sucesos P y E.

TRABAJO PRÁCTICO Nº 2

1) Indique la definición de probabilidad (D1 o D2) más apropiada para asignar probabilidad a un suceso de los siguientes experimentos:

   a) Un café establecido hace seis meses decide realizar un sorteo entre sus clientes habituales. El listado de los clientes se realiza considerando a todas las personas que utilizan su red de wifi para lo cual deben identificarse. El suceso de interés es que una determinada clienta sea la ganadora del sorteo.

   b) Para determinar la probabilidad de incumplimiento de sus clientes que tomaron préstamos personales, un banco decide analizar la información histórica de sus clientes. Usando datos de los últimos 20 años, se selecciona aleatoriamente una muestra de 100 clientes en cada mes y se registra cuántos de ellos incumplieron un pago.

2) Dado $S = \{0, 1\}$, escribir por extensión el conjunto de partes de $\mathcal{S}$ ($\boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{S})$).

   a) Dé un ejemplo de una función $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{S}) \to \mathbb{R}$, que sea una función de probabilidad.

   b) Dé un ejemplo de una función $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{\mathcal{P}}(\boldsymbol{S}) \to \mathbb{R}$ que sea no negativa pero que no sea una función de probabilidad.

3) Un dado está cargado de tal manera que la probabilidad de obtener un cierto número es proporcional al mismo. Calcular la probabilidad de los sucesos A y B cuando se arroja el dado, si A: se obtiene número par y B: se obtiene un número mayor que 4.

4) Se registraron las suscripciones a tres plataformas de streaming (A, D, y N) en los 50.000 hogares de una ciudad. Se recabó la siguiente información: 31570 hogares están suscriptos a N, 16555 están suscriptos a D y 15015 están suscriptos a A. Sin embargo, algunos hogares cuentan con suscripción a más de una plataforma: 11795 tienen A y D, 7945 tienen A y N, 7560 tienen N y D, y 3850 se encuentran suscriptos a las tres plataformas. Si se selecciona aleatoriamente uno de estos hogares:
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que no esté suscripto a ninguna de las tres plataformas?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga al menos una suscripción?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que esté suscripto solo a la plataforma N?

5) Previo a los partidos de cuartos de final de la Copa América, un grupo de amigos decide hacer una apuesta sobre los ganadores de los siguientes partidos. Cada uno debe realizar un ranking indicando los países que quedarían en los 4 primeros puestos, en orden correcto, de entre los 8 que llegaron a cuartos de final. Uno de los amigos no sabe demasiado sobre fútbol y planea elegir el ranking al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte?

6) Los empleados de la empresa Compañía S.A. se encuentran separados en tres divisiones: *Administrativa*, *Operaciones de planta* y *Ventas.* La siguiente tabla indica la cantidad de empleados por división clasificados por sexo:

División	**Mujeres**	**Hombres**	**Total**
Administración	20	30	50
Operaciones de Planta	60	140	200
Ventas	100	50	150
Total	180	220	400

Si se selecciona un trabajador al azar, cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
a) El trabajador corresponde al área operativa.
b) El empleado es hombre y trabaja en el área operativa.
c) Si el trabajador es hombre, cuál es la probabilidad que trabaje en el área operativa.
d) Si trabaja en el área operativa, cuál es la probabilidad que el empleado sea hombre.
e) ¿Son independientes los sucesos ser hombre y trabajar en el área operativa? Justifique claramente.

7) La probabilidad de que un doctor diagnostique de manera correcta una enfermedad específica es 0,7. Dado que el doctor hace un diagnóstico incorrecto, la probabilidad de que el paciente entable una demanda legal es 0,9. ¿Cuál es la probabilidad de que el doctor haga un diagnóstico incorrecto y el paciente lo demande?

8) Una cerrajería anuncia que las copias de las llaves ahí realizadas tienen una probabilidad $\pi = 0,90$ de funcionar bien. Si usted copió 3 llaves diferentes en esa cerrajería, ¿cuál es la probabilidad de que solo 1 de las llaves no sirva? Si necesitó hacer un supuesto indíquelo.

9) En una caja hay 10 monedas de \$0,25 y 20 de \$0,50. Sin que puedas ver las monedas, te permiten sacar tres de ellas sin reposición. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a) las tres sean de \$0,50? ¿Hay diferencia en el resultado si las sacas de a una o todas a la vez?
b) la primera seleccionada sea de \$0,25?
c) al menos una sea de \$0,50?
d) a lo sumo dos sean de \$0,50?
e) la segunda sea de \$0,25 si la primera también lo fue?
f) Calcula nuevamente las probabilidades de a, b, c, d y e, si la extracción es con reposición.

10) Un estudio contable ha contratado a tres personas para brindar los servicios de auditorías externas a sus clientes. La primera de ellas se encarga de auditar el 30 %; la segunda el 45 %; y la tercera el 25 % restante. Se ha comprobado que el 1 % de las inspecciones que realiza la primera persona tienen errores, la segunda persona comete un 3 % de errores, y la tercera, un 2 %.
a) Hallar la probabilidad de que el estudio contable realice una auditoria correctamente.
b) Se selecciona una inspección correcta al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la haya realizado la segunda persona?

11) El ente de control estatal desea controlar la sanidad de los cultivos de frutas de carozo de una provincia. En esta provincia, se combaten las plagas con la ayuda de dos tipos de pesticidas: A y B. El pesticida A se emplea en el 60% de las plantaciones y tiene una efectividad de 56%. El pesticida B, en el 40% restante, y tiene una efectividad de 47%.
a) Si se extrae al azar una muestra dentro de la provincia, ¿cuál es la probabilidad de que no se encuentren plagas?

b) Si la muestra extraída contiene plaga, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la plantación con pesticida B?

Ejercicios Adicionales

1) Indique si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando convenientemente su elección:
a) Un agente de bolsa dice que la probabilidad de que suba el precio de ciertas acciones es 0,38, de que no cambie de valor es 0,52 y de que baje 0,12.
b) La probabilidad de que no haya ningún o haya uno, dos o tres días de lluvia la semana que viene son 0,54, 0,28, 0,14 y 0,04 respectivamente.
c) Sean A y B dos sucesos cualesquiera, entonces$P(A \cap B) \leq P(A)$
d) El espacio muestral asociado a cada experimento aleatorio es único.
e) Si al menos un hijo de una familia con dos hijos es varón, la probabilidad de que ambos sean varones es 0,5.
f) La probabilidad de que una industria se ubique en Catamarca es de 0,7; de que se ubique en La Rioja es 0,4 y que se instale en ambas provincias es 0,2. Luego la probabilidad que la empresa no se instale en ninguna de las dos provincias es 0,10.
g) Si A y B son sucesos disjuntos, y ambos tienen probabilidad positiva, entonces A y B son sucesos independientes.

2) Si $\boldsymbol{P(A)=\frac{1}{2} y P(B)=\frac{2}{3}}$, ¿son A y B mutuamente excluyentes?

3) Si se lanzan dos dados, ¿qué valor de la suma de los números obtenidos tiene la máxima probabilidad de ocurrir?

4) El editor de una importante compañía editora de libros de texto está analizando si conviene editar un nuevo libro sobre Estadística de Negocios que le han propuesto. Los libros publicados con anterioridad señalan que el 10% son grandes éxitos, el 20% son éxitos moderados, el 40% alcanzan el punto de equilibrio y el 30% produce pérdidas. Sin embargo antes que se tome una decisión para la publicación, se revisará el libro. En el pasado recibieron revisión favorable el 90% de los grandes éxitos, el 70% de los éxitos moderados, el 40% de los libros que llegaron al punto de equilibrio y el 20% de los que produjeron perdidas.
   a) ¿Qué proporción de los libros propuestos reciben revisiones favorables?
   b) Si el libro propuesto recibe una revisión favorable ¿qué probabilidad tiene de no producir pérdidas?

5) De 30 acciones en la bolsa de Nueva York, 15 tuvieron ganancias, 12 pérdidas y 3 quedaron igual. Si un corredor de bolsa vendió 3, ¿qué probabilidad hay de que 2 tuvieran ganancia y una quedara igual?

6) Dos sucesos A y B son tales que $P(A) = 0{,}2, P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}4.$ Determina las siguientes probabilidades
   a)$P(A \cap B)$ b)$P(A^c \cap B)$ c)$P(A^c \cup B)$ d)$P(A^c|B)$

7) Una compañía fabrica cierto artículo en tres sitios distintos de una ciudad, S1, S2 y S3, los cuales producen, respectivamente, 45, 30 y 25% del total de la producción. Se estima que el porcentaje de artículos defectuosos en cada localización es el siguiente: 8% en S1 6% en S2 y 3% en S3. Los artículos fabricados en los tres sitios se concentran luego en un almacén.
   a) Si un inspector de control de calidad toma un artículo al azar, calcule la probabilidad de que un artículo sea defectuoso.
   b) Si el artículo que selecciona el inspector resulta defectuoso, calcule la probabilidad de que provenga de S1.

8) Un video club registró las preferencias de hombres y mujeres por los distintos géneros de películas, con los siguientes resultados:

	Comedia	Romance	Policiales
Hombres	136	92	248
Mujeres	102	195	62

   De acuerdo a los resultados obtenidos, cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes eventos:
   a) Sea mujer y alquile una película policial.
   b) Se alquile una comedia.
   c) Si un hombre alquila una película, ésta sea un romance.
   d) Si se alquila un film policial éste sea alquilado por un hombre.

9) En una caja hay 2 focos defectuosos y 5 no defectuosos. Se seleccionan de la caja 2 focos sin reposición
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que los dos focos sean defectuosos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer foco seleccionado sea defectuoso?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo un foco sea defectuoso?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer foco seleccionado sea defectuoso y el segundo no defectuoso?

e) Calcule nuevamente las probabilidades pedidas en los puntos a, b, c y d en el caso que el muestreo sea con reemplazo.

10) En una biblioteca se tiene los siguientes datos sobre la edad y el estado civil de sus 140 socios:

	Soltero	Casado
Menor de 30	77	14
30 o más	28	21

a) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un socio que sea soltero y menor de 30 años?
b) Si un socio tiene menos de 30 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea soltero?
c) El estado civil de los socios, ¿es independiente de su edad? Explique por qué, empleando conceptos de probabilidad.

11) El gerente de un banco cuenta con 4 ayudantes: José, Luis, Mario y Raúl, a cada uno de los cuales debe asignar una de cuatro tareas: A, B, C, D. ¿Cuál es la probabilidad de que a Raúl le asigne la tarea A?

12) Un cargamento de 50 lavarropas contiene 10 defectuosos y 40 no defectuosos. Si se eligen al azar 5 lavarropas (sin reposición):
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se seleccionen 3 artículos defectuosos?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el primer lavarropas seleccionado sea defectuoso?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que sólo un lavarropas sea defectuoso?
d) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 1 lavarropas sea defectuoso?
e) Calcule nuevamente las probabilidades pedidas en los puntos a, b, c y d para el caso en que el muestreo sea con reposición.

13) Si $P(A^c) = \frac{1}{4} y P(B|A) = \frac{1}{2}$, calcule $P(A \cap B)$.

14) Un juego consiste en arrojar cuatro veces una moneda perfecta, el participante ganará $100 si el número de caras es igual al número de cruces. ¿Qué probabilidad hay de que el participante reciba los $100? Si el participante pudiese elegir si la moneda se tirará cuatro o seis veces, ¿qué le convendría elegir?

15) La fuerza policial de una ciudad del interior está compuesta por 1.200 oficiales, 960 hombres y 240 mujeres. En los últimos dos años fueron ascendidos 324 oficiales. La siguiente tabla muestra las promociones en la fuerza discriminadas por sexo.

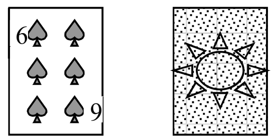
	Hombres	Mujeres	Total
Ascendido	288	36	324
No ascendido	672	204	876
Total	960	240	1.200

De acuerdo a los resultados obtenidos, cuál es la probabilidad de los siguientes eventos:
a) Sea mujer y sea ascendido.
b) Sea mujer.
c) Si un policía es ascendido, ¿qué probabilidad hay de que sea mujer?
d) Si un policía no es ascendido, ¿qué probabilidad hay de que sea mujer?
e) Después de revisar el registro de promociones, la asociación femenina de oficiales presentó una demanda por discriminación, alegando que el número de ascendidas mujeres era inferior al de hombres. ¿Cree usted que las oficiales mujeres tienen razón para presentar esa demanda?

16) El 42% de la población activa de cierto país está formada por mujeres. Se sabe que el 24% de las mujeres y el 16% de los hombres están desocupados.
a) Calcule la probabilidad de que una persona elegida al azar esté desocupada.

b) Si una persona en particular está desempleada, ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre? ¿cuál es la probabilidad que sea mujer?

17) Una persona extrae una carta de una baraja francesa, que consta de 52 cartas, 4 palos (corazón, trébol, diamante y pica), y 13 cartas de cada palo (A,2,3,4,5,6,7,8,9,10,J,Q,K). El orden de cartas dado es ascendente, se considerará A sólo como la menor de todas.
   a) Si se consideran los sucesos *L*:"sale una letra" y *B*:"sale una carta mayor que 9", ¿son independientes estos sucesos?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que salga una letra o una carta mayor que 9?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída no sea una letra ni mayor que 9?
   d) ¿Cuál es la probabilidad de que sea una letra si es mayor que 9?
   e) Una persona extrae una carta de esta baraja y la muestra. Luego se debe adivinar si otra carta situada al lado de esta, con el reverso hacia arriba, es mayor o igual, o es menor que la que se mostró. Supongamos que siempre se contesta lo que más probablemente ocurrirá. ¿Qué probabilidad se tiene de ganar, si la carta que se muestra es un 6 de pica?



   f) ¿Qué probabilidad se tiene de ganar antes de ver la primera carta si se conoce que ésta será un 6, 7 o un 8?

18) En la sala de pediatría de un hospital, el 60% de los pacientes son niñas. Tienen menos de 24 meses el 35% de los niños y el 20% de las niñas. Un pediatra que ingresa a la sala selecciona un infante al azar.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea menor de 24 meses?
   b) Si el infante resulta ser menor de 24 meses. Determine la probabilidad que sea una niña.

19) Una empresa de consultoría internacional se ha presentado a un concurso para un gran proyecto de reordenamiento del tránsito en una ciudad de 700.000 habitantes. Inicialmente la dirección de la empresa pensó que tenía una oportunidad de 50% de ganar el concurso. Sin embargo, el Ministerio de Obras Públicas, dependencia en la que fue presentada la propuesta, ha solicitado información adicional sobre el proyecto. Por experiencia los miembros de la consultora saben que el Ministerio solicitó información adicional en el 75% de las propuestas aceptadas y en 40% de las propuestas rechazadas.
   a) ¿Cuál es la probabilidad a priori de tener éxito? (antes de que le solicitaran información adicional).
   b) ¿Cuál es la probabilidad condicional de tener una solicitud de informes adicionales, dado que al final la oferta será seleccionada?
   c) Calcule la probabilidad de que la oferta tenga éxito, dado que se le solicitó información adicional.

20) El 20% de los empleados de una empresa son ingenieros y otro 20% son economistas. El 75% de los ingenieros ocupan un puesto directivo y el 50% de los economistas también, mientras que entre los demás empleados solamente el 20% ocupa un puesto directivo.
   a) Al seleccionar un empleado al azar, calcule la probabilidad de que ocupe un puesto directivo.
   b) Si se selecciona al azar un empleado entre los que ocupan cargos directivos ¿cuál es la probabilidad de que sea ingeniero?, ¿y la probabilidad que no sea ingeniero?.

21) En cierto país aquejado por una fuerte inflación los economistas esbozan tres teorías, a saber, I: la inflación desaparecerá antes del cambio de gobierno, II: ocurrirá una depresión y III: llegará una recesión. Estiman que las probabilidades de que se materialice cada teoría son, respectivamente, 0,40, 0,35 y 0,25. Asimismo, consideran que las probabilidades de que ese país salga del subdesarrollo, si ocurre cada uno de esos tres eventos son de: 0,90, 0,60 y 0,20, en ese orden. De acuerdo a la opinión de los economistas:
   a) Calcule la probabilidad de que el país no salga del subdesarrollo.
   b) Si el país sale del subdesarrollo, ¿cuál es la probabilidad de que la inflación haya desaparecido antes del cambio de gobierno?
   c) Si el país no sale del subdesarrollo, ¿cuál es la probabilidad de que la inflación haya desaparecido antes del cambio de gobierno?

22) Un agente de compras realizó pedidos urgentes de determinada materia prima a dos proveedores distintos A y B. Si ningún pedido llega en los próximos cuatro días, debe parar su proceso de producción hasta que llegue, al menos, uno de ellos. La probabilidad de que el proveedor A pueda entregar el material en los próximos cuatro días es de 0,55 y, de que el proveedor B pueda entregarlo en igual plazo es de 0,35.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambos proveedores surtan su material en cuatro días? (Como se trata de dos proveedores diferentes, se puede suponer que son independientes entre sí).
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un proveedor entregue el material en cuatro días?
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que se detenga el proceso de producción dentro de cuatro días por falta de materia prima? (esto es que ambos pedidos se entreguen tarde).

23) Describa algún experimento donde no sea posible asignar probabilidad a un suceso aplicando las definiciones **D1** y **D2** de probabilidad.

24) En una localidad de 20.000 viviendas existen tres empresas de TV por cable. La empresa TA tiene 2.100 clientes, TB tiene 1.850 y la empresa TC tiene 2.600. Algunas viviendas, especialmente en los condominios, se suscriben a más de una empresa. En esta localidad existen 420 residencias que son clientes de TA y TB, 120 de TA y TC, 180 de TB y TC y 30 que son clientes de las tres empresas. Si se selecciona una vivienda aleatoriamente de esta localidad, cuál es la probabilidad de:
   a) Sea cliente solo de la empresa TA.
   b) Sea cliente por lo menos de una de las empresas.
   c) No tenga TV por cable.

25) Un analista de valores asegura que de una lista de seis títulos es posible predecir, en el orden correcto, los tres que tendrán un mejor comportamiento el siguiente año. ¿Qué probabilidad hay de acertar por casualidad? Indique qué definición de probabilidad usó para responder la pregunta.

26) En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40% de la producción total, respectivamente. De lo que producen, 5, 4 y 2% respectivamente, son pernos defectuosos. Las piezas producidas por las tres máquinas se colocan en orden aleatorio en un depósito.
   a) ¿Cuál es la probailidad de que al tomar un perno al azar este sea defectuoso?
   b) Se escoge un perno al azar y resulta ser defectuoso. ¿cuáles son las probabilidades respectivas de que el perno provenga de la máquina A, B o C? ¿qué máquina tiene la probabilidad de haber producido la pieza defectuosa?

EJERCICIOS SUGERIDOS DEL LIBRO "PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS" de WALPOLE, MYERS y MYERS. (9º Ed.)

Capítulo 2:

Sección 2.5, página 59: ejercicios 2.54, 2.64 y 2.65.
Sección 2.6, página 69: ejercicios 2.75, 2.78.
Sección 2.7, página 76: ejercicios 2.96, 2.98 y 2.101

CAPÍTULO 3: VARIABLES ALEATORIAS

Variables aleatorias discretas y continuas. Función de masa y función de densidad de probabilidad. Función de distribución. Distribuciones marginales, conjuntas y condicionales. Variables aleatorias independientes.

Objetivos:
El alumno debe ser capaz de:

- Definir variable aleatoria.
- Definir variables aleatorias asociadas a un experimento aleatorio dado.
- Distinguir cuando una variable aleatoria es discreta o continua.
- Definir función de masa, función de densidad de probabilidad y función de distribución acumulada para variables aleatorias unidimensionales.
- Calcular valores de probabilidad para variables aleatorias unidimensionales utilizando la información de la función de masa, la función de densidad de probabilidad y la función de distribución acumulada.
- Definir función de masa, función de densidad de probabilidad y función de distribución acumulada para variables aleatorias bidimensionales.
- Calcular valores de probabilidad para variables aleatorias bidimensionales utilizando la información de la función de masa o la función de densidad de probabilidad.

Resumen

D1. *Variable Aleatoria*: Sea un espacio muestral $\mathcal{S}$ de un experimento aleatorio. Una variable aleatoria X es una función cuyo dominio es $\mathcal{S}$ y cuyo recorrido es un conjunto de números reales, es decir:

$$\boldsymbol{X}: \boldsymbol{\mathcal{S}} \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{s} \mapsto \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s})$$

Obs: Las probabilidades estaban definidas en subconjuntos de $\mathcal{S}$. Una variable aleatoria induce ahora probabilidades en $\mathbb{R}$ de manera tal que $P(A) = P(\{s \in \mathcal{S}: X(s) \in A\})$, donde A es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

D2. *Función de Distribución Acumulada (fda)*: Sea X una variable aleatoria. La función de distribución acumulada F_X es la función definida para todo número real x por $\boldsymbol{F_X(x)} = \boldsymbol{P(X \leq x)}$, es decir

$$\boldsymbol{F_x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}(\{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{S}: \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) \leq \boldsymbol{x}\})$$

Obs: Las variables aleatorias se denotan con letras de molde mayúsculas (X), y las letras de molde minúsculas (x) denotan valores de su recorrido.

<u>*Propiedades de la función de distribución acumulada:*</u>

(1) F_X es una función no decreciente
(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$
(3) $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
(4) $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$,cuando$b \geq a$

D3. *Variable Aleatoria Discreta*: Se dice que una variable aleatoria X es discreta cuando el conjunto de valores posibles (Rec(X)) es numerable (finito o infinito semejante a los números naturales).

D4. *Distribución de Probabilidad (para una variable aleatoria discreta)*: Sea X una variable aleatoria discreta con $\text{Rec}(\boldsymbol{X}) = \{\boldsymbol{x_i}: \boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I} \subset \mathbb{N}\}$, entonces la función de probabilidad o función de masa se denota por p_X y es tal que

$$\boldsymbol{p_X}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{p_X}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}) \boldsymbol{si x} \in \text{Rec}(\boldsymbol{X}) \\ \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{si x} \notin \text{Rec}(\boldsymbol{X}). \end{cases}$$

<u>*Propiedades de la función de masa:*</u>

(1) $p_X(x) \geq 0$ (2) $\sum_{i \in I} p_X(x_i) = 1$

D5. *Variable Aleatoria Continua*: Se dice que una variable aleatoria X es continua cuando el conjunto de valores posibles (Rec(X)) es no-numerable (semejantes a un intervalo en $\mathbb{R}$).

D6. *Distribución de Probabilidad (para una variable aleatoria continua)*: Sea X una variable aleatoria continua. Si existe f_X tal que:

(1) $f_X(x) \geq 0$, para todo x real,
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$ y
(3) $P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)dx$,

entonces se dice que f_X es la función de probabilidad o función de densidad de X.

D7. *Distribución de Probabilidad Conjunta (para variables aleatorias discretas)*: Sean X e Y variables aleatorias discretas, la función $f(x, y)$ es una función de distribución de probabilidad conjunta o función de masa de probabilidad de las variables aleatorias X e Y, si:

(1) $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y),
(2) $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$,
(3) $P(X = x, Y = y) = f(x, y)$.

Obs: Para cualquier región A del plano, se tiene que

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y) \in A} \sum f(x, y)$$

D8. *Distribución de Probabilidad Conjunta (para variables aleatorias continuas)*: Sean X e Y variables aleatorias continuas, la función $f(x, y)$ es una función de distribución de probabilidad conjunta o función de densidad conjunta de las variables aleatorias X e Y, si:

(1) $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y),
(2) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dxdy = 1$,
(3) $P((X, Y) \in A) = \iint_A f(x, y)dxdy$ para cualquier región A del plano.

D9. *Distribuciones Marginales*: Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. Las distribuciones marginales de X e Y están dadas respectivamente por:

$$g(x)=\sum_y f(x,y) \text{ y } \boldsymbol{h}(y)=\sum_x f(x,y) \text{ para el caso discreto, y}$$

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \ \ldots \text{y} \quad \boldsymbol{h}(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \text{ para el caso continuo.}$$

D10. *Distribuciones Condicionales*: Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución de probabilidad conjunta $f(x,y)$. La distribución condicional de Y dado $X=x$ está dada por:

$$f(y|x)=\frac{f(x,y)}{g(x)}, g(x)>0.$$

Similarmente, la distribución condicional de X dado $Y=y$ está dada por:

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{\boldsymbol{h}(y)}, \boldsymbol{h}(y)>0.$$

Donde $g(x)$ y $\boldsymbol{h}(y)$ son las distribuciones marginales de X e Y respectivamente.

D11. *Independencia Estadística*: Sean X e Y variables aleatorias con función de distribución de probabilidad $f(x,y)$ y distribuciones marginales $g(x)$ y $\boldsymbol{h}(y)$, respectivamente. Las variables X e Y se dicen estadísticamente independientes si y solo si

$$f(x,y)=g(x)h(y) \text{ para todo par } (x,y).$$

Ejemplos

Ejemplo 1: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por la siguiente tabla:

x	-5	-2	0	1	3	8
$p(x)$	0,1	0,2	0,1	0,2	a	0,1

a) Determinar a.
b) Encontrar la función de distribución acumulada de X.
c) Usando la función de masa y la función de distribución acumulada, calcular las siguientes probabilidades:
   i) $P(X\leq 1)$ ii) $P(X>-2)$ iii) $P(-2<X\leq 3)$

Resolución:

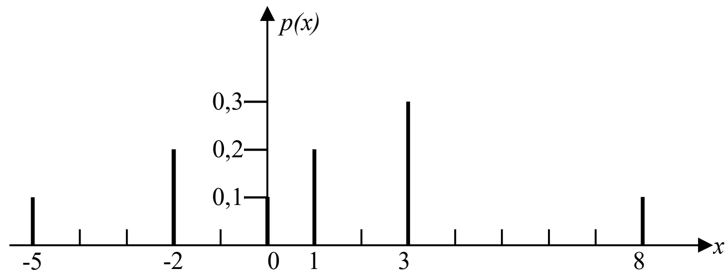
a) Para que p sea una función de probabilidad, debe satisfacer las propiedades de este tipo de funciones. Una de ellas es que las imágenes por p de todos los valores posibles de x sumen 1.

$$\sum_{i\in I} p(x_i)=1$$

Consecuentemente,

$$0{,}1+0{,}2+0{,}1+0{,}2+a+0{,}1=1$$
$$0{,}7+a=1$$
$$a=0{,}3.$$

La representación gráfica de $p(x)$ es la siguiente:



b)La función de distribución acumulada está definida por $F(x) = P(X \leq x)$. Es decir, F asigna a cada valor de x, la probabilidad que se ha acumulado desde -∞ hasta el valor x inclusive.

- Si se toma x, tal que $x < -5$, desde -∞ hasta el valor de x ningún punto tiene probabilidad positiva. Por lo tanto, $F(x) = 0$.
- Si se considera x, tal que $-5 \leq x < -2$, desde -∞ hasta el valor de x el único punto que tiene probabilidad no nula es –5. Por lo tanto, la única probabilidad acumulada hasta ese x es $P(X = -5)$. Entonces, $F(x) = 0{,}1$.
- Si se selecciona x, tal que $-2 \leq x < 0$, desde -∞ hasta el valor de x los únicos puntos que tienen probabilidad no nula son –5 y -2. En consecuencia, la probabilidad acumulada hasta ese x es $P(X = -5) + P(X = -2)$. Entonces, $F(x) = 0{,}3$.
- Si se selecciona x, tal que $0 \leq x < 1$, desde -∞ hasta el valor de x, los únicos puntos que tienen probabilidad no nula son –5, -2 y 0. Por lo tanto, la probabilidad acumulada hasta ese x es $P(X = -5) + P(X = -2) + P(X = 0)$. Entonces, $F(x) = 0{,}4$.
- Si se selecciona x, tal que $1 \leq x < 3$, desde -∞ hasta el valor de x los únicos puntos que tienen probabilidad no nula son –5, -2, 0 y 1. En consecuencia, la probabilidad acumulada hasta ese x es

  $P(X = -5) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 1)$. Entonces, $F(x) = 0{,}6$.
- Si se selecciona x, tal que $3 \leq x < 8$, desde -∞ hasta el valor de x los únicos puntos que tienen probabilidad no nula son –5, -2, 0, 1 y 3. Por lo tanto, la probabilidad acumulada hasta ese x es

  $$P(X = -5) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3).$$

  Entonces, $F(x) = 0{,}9$.
- Si se selecciona x, tal que $x \geq 8$, desde -∞ hasta el valor de x los puntos que tienen probabilidad no nula son –5, -2, 0, 1, 3 y 8. Por lo tanto, la probabilidad acumulada hasta ese x es

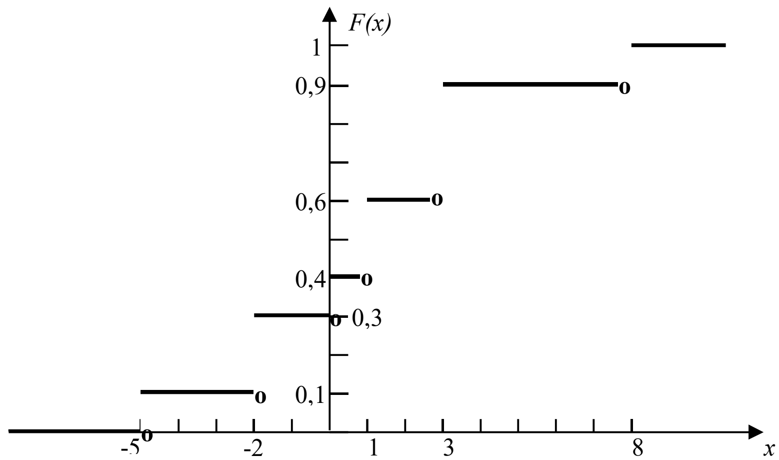
  $$P(X = -5) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 8).$$

  Entonces, $F(x) = 1$.

Consecuentemente, la función de distribución acumulada viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } \quad x < -5 \\ 0{,}1 \text{ si } -5 \le x < -2 \\ 0{,}3 \text{ si } -2 \le x < 0 \\ 0{,}4 \text{ si } 0 \le x < 1 \\ 0{,}6 \text{ si } 1 \le x < 3 \\ 0{,}9 \text{ si } 3 \le x < 8 \\ 1 \text{ si } x \ge 8 \end{cases}$$

La representación gráfica de la función *F* es la siguiente:



c) *Cálculo de probabilidades usando la función de masa*:

Para calcular probabilidades de eventos con un número finito de elementos, se suman las probabilidades sobre los valores de *x* que cumplen la condición dada por el evento.

i)
$$P(X \le 1) = P(X = -5) + P(X = -2) + P(X = 0) + P(X = 1)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}6$$

ii)
$$P(X > -2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 8)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}7$$

iii)
$$P(-2 < X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3)$$
$$= 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6$$

Cálculo de probabilidades usando la función de distribución acumulada:

Para calcular probabilidades de un evento a partir de la función de distribución acumulada se intenta escribir el evento como la intersección, unión o complemento de intervalos del tipo $(-\infty, b]$ ó $(a, b]$, y luego se usa la definición de *F*, o bien la propiedad $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$ para el cálculo de las respectivas probabilidades.

i) $P(X \le 1) = F(1) = 0{,}6$ valor que se obtiene directamente de la expresión de $F(x)$ al mirar cuál es la imagen de 1.

ii) $P(X > -2) = 1 - P(X \le -2) = 1 - F(-2) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

iii) $P(-2 < X \le 3) = F(3) - F(-2) = 0{,}9 - 0{,}3 = 0{,}6$.

Ejemplo 2: Una compañía tiene cinco solicitantes para dos puestos de trabajo: dos mujeres y tres hombres. Suponga que los cinco candidatos están igualmente calificados y que no existe preferencia por ningún género al escoger. Se define la variable aleatoria X que cuenta el número de mujeres elegidas para cubrir los dos puestos.

a) Determinar p_X.
b) Representar gráficamente la función de masa de X.

Resolución:

a) El experimento aleatorio es

ε: se eligen al azar dos solicitantes para ocupar los dos puestos de trabajo.

Si se denominan M_1 y M_2 a las dos mujeres solicitantes y H_1, H_2 y H_3 a los tres hombres solicitantes, y si se considera que no hay diferencia entre los dos puestos de trabajo, el espacio muestral del experimento sería

$\mathcal{S} = \{\{M_1, M_2\}, \{M_1, H_1\}, \{M_1, H_2\}, \{M_1, H_3\}, \{M_2, H_1\},$
$\{M_2,H_2\}, \{M_2,H_3\}, \{H_1,H_2\}, \{H_1,H_3\}, \{H_2,H_3\}\}$.

Al definir la variable aleatoria

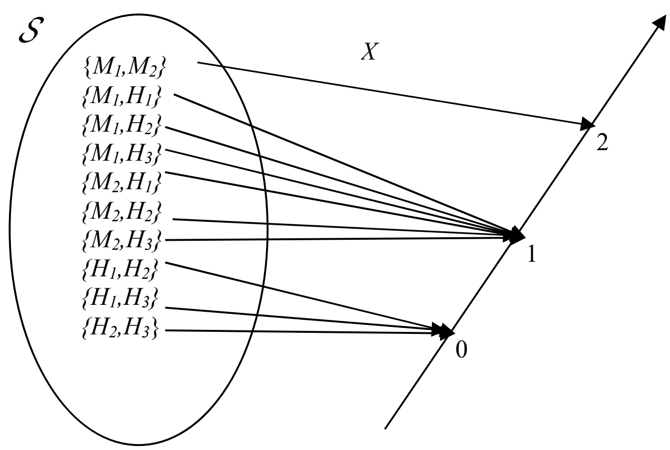
$$X: \mathcal{S} \to \mathbb{R}$$
$$s \mapsto \text{n}^{\text{o}}\text{de mujeres elegidas para cubrir los dos puestos}$$

el recorrido de X resulta

$$\text{Rec}(X) = \{0, 1, 2\},$$

por lo tanto una variable discreta, ya que su recorrido es un conjunto finito.

La representación gráfica de la variable aleatoria X, como función de $\mathcal{S}$en [0,1], es la siguiente:



La función de masa de la variable X es una función

$$p_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto p_X(x) = \begin{cases} P(X = x) \text{ si } x \in \text{Rec}(X) \\ 0 \text{ si } x \notin \text{Rec}(X) \end{cases}$$

Para determinar $p_X(x) = P(X = x)$, es necesario identificar el suceso correspondiente a $\{X = x\}$ en el espacio muestral; es decir,

$\{\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}: \boldsymbol{X}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{x}\}$, en cada x del recorrido.

- El suceso correspondiente a $\{X = 2\}$ en el espacio muestral es $\{M_1, M_2\}$.

En este caso, todos los puntos muestrales en $\mathcal{S}$son equiprobables, por lo tanto,

$$p_X(2) = P(X = 2) = P(\{M_1, M_2\}) = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

- El suceso correspondiente a $\{X = 1\}$ en el espacio muestral $\mathcal{S}$es B=$\{\{M_1, H_1\}, \{M_1, H_2\}, \{M_1,H_3\}, \{M_2,H_1\}, \{M_2,H_2\}, \{M_2,H_3\}\}$. Por lo tanto,

$$p_X(1) = P(X = 1) = P(B) = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

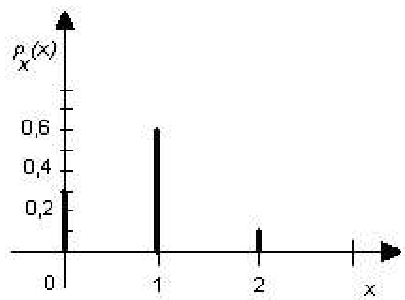
- El suceso relacionado a $\{X = 0\}$ en el espacio muestral es C={{H_1, H_2}, {H_1,H_3}, {H_2,H_3}}. Por lo tanto,

$$p_X(0) = P(X = 0) = P(C) = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Entonces, la función de masa está definida por la siguiente tabla.

x	0	1	2
$p_X(x)$	0,3	0,6	0,1

b) La representación gráfica de la función de masa de X es la siguiente:



Observación: Si en el enunciado de este ejercicio el número de mujeres y varones hubiera sido mayor, la enumeración de los elementos de $\mathcal{S}$ discriminando los posibles pares de mujeres y varones sería más dificultosa e innecesaria. Sin embargo se podría razonar de la siguiente manera.

$$\mathcal{S}\square = \{\{V,V\};\{V,M\};\{M,M\}\}$$

donde V denota un varón y M una mujer. En este espacio muestral no se distingue entre las mujeres o entre los varones, consecuentemente, dependiendo del número de mujeres y del número de varones, los puntos muestrales tendrán probabilidades diferentes.

Si a denota el número de mujeres y b el número de varones, las probabilidades se calculan usando la teoría de conteo, para ello es conveniente observar que en este caso el orden no es importante.

- El número de grupos o combinaciones de dos varones que se pueden formar entre b varones es $\binom{b}{2}$, y el número de grupos de dos personas que se pueden formar entre las a+b personas es $\binom{a+b}{2}$. Por lo tanto

$$P(\{V,V\}) = \frac{\binom{b}{2}}{\binom{a+b}{2}}.$$

- El número de grupos o combinaciones de un varón y una mujer que se pueden formar es $\binom{b}{1} \times \binom{a}{1}$, consecuentemente

$$P(\{V,M\}) = \frac{\binom{b}{1}\binom{a}{1}}{\binom{a+b}{2}}.$$

- El número de grupos o combinaciones de dos mujeres que se pueden formar es $\binom{a}{2}$, consecuentemente

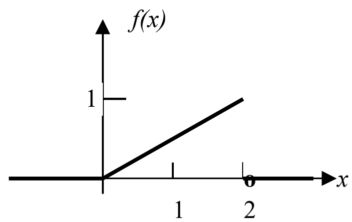
$$P(\{M,M\}) = \frac{\binom{a}{2}}{\binom{a+b}{2}}.$$

Ejemplo 3: Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad de probabilidad dada por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$

a) Determinar la función de distribución acumulada.
b) Determinar, usando la función de densidad y la distribución acumulada, la probabilidad de que X sea mayor que 1 pero menor de 3/2.

Resolución:

El gráfico de la función de densidad f es el siguiente:



a) La definición de la función de distribución acumulada es

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

que representa la probabilidad acumulada desde -∞ hasta el valor x seleccionado.

- Si $x<0$, $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0.$
- Si $0 \le x \le 2$,

$$F(x) = P(X \le x)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{t}{2}dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{x} tdt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^x = \frac{1}{4}(x^2 - 0^2) = \frac{1}{4}x^2.$$

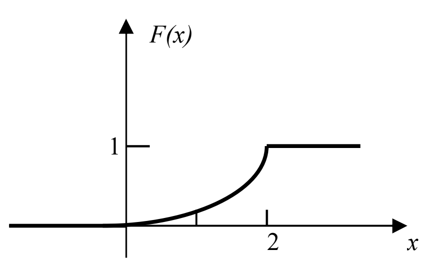
- Si $x> 2$,

$$F(x) = P(X \le x)$$
$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{t}{2}dt + \int_{2}^{x} 0dt = \frac{1}{2}\int_{0}^{2} tdt = \frac{1}{2}\frac{t^2}{2}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(2^2 - 0^2) = 1.$$

Consecuentemente, la función de distribución acumulada viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 \text{ si } 0 \le x \le 2, \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

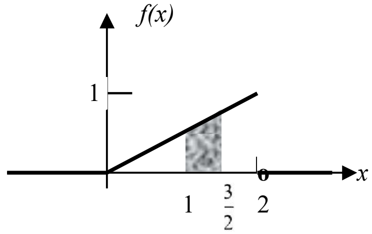
y su representación gráfica es la siguiente:



b) *Cálculo de probabilidades usando la función de densidad*:
Por definición de la función de densidad, la probabilidad de que una variable aleatoria asuma valores en un intervalo se calcula integrando su función de densidad entre los extremos del intervalo. De esta manera

$$P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right) = \int_1^{\frac{3}{2}} f(x)dx = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_1^{\frac{3}{2}} xdx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2\right)$$
$$= \frac{5}{16}.$$

Esta probabilidad se puede interpretar como el área comprendida entre la función de densidad, el eje x, y las rectas verticales $x = 1$y $x = \frac{3}{2}$.



Cálculo de probabilidades usando la función de distribución acumulada:
Consiste en usar la definición de F, o la propiedad $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$. Por tratarse de una **variable aleatoria continua** no tiene importancia que la probabilidad que se quiere calcular sea la de un intervalo semiabierto, cerrado o abierto, puesto que estos intervalos, como conjuntos, difieren ricamente en uno o dos puntos y la probabilidad en un punto es nula en este tipo de variables. Consecuentemente

$$P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b).$$

De esta manera

$$P(1 < X < 3/2) = P(1 < X \leq 3/2) = F(3/2) - F(1)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}1^2 = \frac{5}{16}.$$

Ejemplo 4: Se lanzan 3 monedas equilibradas y se observa si cada una de ellas cae en cara o en sello. Sea *X* la cantidad de caras obtenidas y sea *Y* la cantidad de caras menos la cantidad de sellos obtenidos. Encontrar (a) la distribución conjunta de la variable aleatoria bidimensional (*X*,*Y*), (b) la distribución marginal de *X* y (c) la distribución marginal de *Y*.

Resolución:

El experimento aleatorio es

ε: se lanzan tres monedas equilibradas.

El espacio muestral es

$\mathcal{S}$ = {(c,c,c), (c,c,s), (c,s,c), (s,c,c), (c,s,s), (s,c,s), (s,s,c), (s,s,s)},

donde c denota una cara y s un sello.

El recorrido de la variable *X*: *Cantidad de caras obtenidas* es *Rec*(*X*) = {0,1,2,3}, y por lo tanto *X* es discreta porque tiene un recorrido finito.

El recorrido de la variable *Y*: *Diferencia entre la cantidad de caras y de sellos* es *Rec*(*Y*) = {-3,-1,1,3}, y por lo tanto *Y* es discreta porque tiene un recorrido finito.

En la siguiente tabla se muestra la correspondencia entre los elementos del espacio muestral y sus respectivos valores de *X*, *Y*.

S	$X(s)$	$Y(s)$
(c,c,c)	3	3
(c,c,s),(c,s,c),(s,c,c)	2	1
(c,s,s),(s,c,s),(s,s,c)	1	-1
(s,s,s)	0	-3

Los elementos en Sson equiprobables, con una probabilidad 1/8 de ocurrir cualquiera de ellos al realizar el experimento. La tabla anterior permite determinar los valores del recorrido de (X,Y) y la probabilidad de ocurrencia de cada uno de esos pares ordenados. Por ejemplo: $f(0,-3) = P(X = 0, Y = -3) = P(\{(\text{s,s,s})\}) = 1/18$, por otro lado $f(2,1) = P(X = 2, Y = 1) = P(\{(\text{c,c,s}), (\text{c,s,c}), (\text{s,c,c})\}) = 3/8$.

Razonando de esta manera es posible construir la función de masa conjunta de (X,Y), de la siguiente manera:

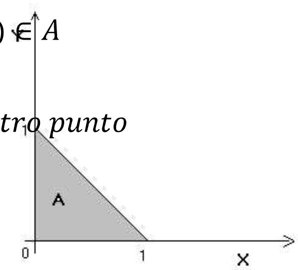
	$f(x,y)$	y: -3	-1	1	3	$g(x)$
x	0	1/8	0	0	0	1/8
	1	0	3/8	0	0	3/8
	2	0	0	3/8	0	3/8
	3	0	0	0	1/8	1/8
	$h(y)$	1/8	3/8	3/8	1/8	1

La función de distribución de probabilidad marginal de X, $g(x)$, se obtiene en cada x, sumando las probabilidades sobre cada fila, es decir $\boldsymbol{g(x)} = \sum_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{f(x,y)}$.

La función de distribución de probabilidad marginal de Y, $h(y)$, se obtiene en cada y, sumando las probabilidades sobre cada columna, es decir $\boldsymbol{h(y)} = \sum_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f(x,y)}$.

Ejemplo 5: Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y) distribuida uniformemente en la región sombreada A, indicada en la figura. Por lo tanto

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{área(A)}, \text{ si}(x,y) \in A \\ 0 \text{ } en \text{ } cualquier \text{ } otro \text{ } punto \end{cases}$$



Encontrar las funciones de densidad marginales de X e Y.

Resolución:

La superficie sombreada es la superficie de un triángulo: $\frac{b \times h}{2} = \frac{1}{2}$.

Para poder escribir los límites de la región, es necesario determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,0) y (0,1). La ecuación de esta recta es $y = 1\text{-}x$.

Como los puntos de la región se encuentran sobre o por debajo de esta recta, cualquier punto de la región A verifica la inecuación $y \leq 1 - x$.

Entonces, la función de densidad conjunta es

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

La función de densidad marginal de X se obtiene integrando sobre y la función de densidad conjunta.

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \begin{cases} \int_0^{1-x} 2dy = 2y|_0^{1-x} = 2(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dy & \text{en cualquier otro } x \end{cases}$$

Es preciso dividir el cálculo de la marginal, debido a la definición por ramas de la función de densidad conjunta de (X,Y).

Se puede observar que la función de densidad conjunta también puede ser escrita de la siguiente manera

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 \text{ si } 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1 - y \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases},$$

consecuentemente, la función de densidad marginal de Y se obtiene integrando sobre x la función de densidad conjunta.

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \begin{cases} \int_0^{1-y} 2dx = 2x\big|_0^{1-y} = 2(1-y) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} 0dx & \text{en cualquier otro } y \end{cases}$$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 3

1) En una lotería se venden 1000 billetes, de los cuales dos serán ganadores de U$S 1000, ocho de U$S 500 y diez de U$S 100. Sea X la variable aleatoria que representa la ganancia de un jugador. El costo del billete es de U$S 20.
   a) Encuentre la distribución de probabilidad de la variable X .
   b) Obtenga la función de distribución acumulada de la variable X.
   c) ¿X es una variable aleatoria discreta o continua? Justifique.

2) En un juego de mesa, un jugador debe arrojar dos dados simultáneamente y obtener el mismo número en ambos (es decir, obtener un doble) para poder iniciar su turno. Tiene la posibilidad de arrojar los dados hasta 3 veces para comenzar su turno.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que obtenga dobles en el primer lanzamiento de los dados?
   b) ¿Cuál es la probabilidad de que pueda iniciar su turno (es decir, que obtenga un doble en alguno de los tres posibles lanzamientos)? Represente este experimento mediante un diagrama de árbol.
   c) ¿Cuál es la probabilidad de que inicie la partida en el tercer lanzamiento?

3) Un centro médico cuenta con un servicio de atención telefónica que se encarga de recibir llamadas para organizar las citas médicas. Cada llamada es automática y aleatoriamente redirigida a una de dos secretarias. Asuma que ingresan 3 llamadas cuando ninguna de las secretarias se encuentra en llamada. Sea Y_1 el número de llamadas que ingresan a la secretaria 1 e Y_2 el número de llamadas que ingresan a la secretaria 2.
   a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento aleatorio?
   b) Encuentre la distribución conjunta de Y_1 e Y_2.
   c) Determine las distribuciones marginales.
   d) Encuentre las distribuciones condicionales de Y_1 dado que Y_2=1 y de Y_2 dado que Y_1=2.
   e) Calcule $P(Y_1 \leq 1, Y_2 > 1)$, $P(Y_1 \leq 1 | \, Y_2 > 1)$.
   f) ¿Son independientes las variables aleatorias?
   g) Se emplea un nuevo sistema más sofisticado, en el que cada llamada ingresa a la secretaria que no se encuentra en llamada y selecciona una secretaria automáticamente si ambas están desocupadas o ambas están en llamada. ¿Cómo cambia su respuesta en b)?

4) Una asociación de empresa industriales está revisando qué proporcion de los presupuestos se asignan a controles ambientales y de contaminación. Un proyecto de recopilación de datos determina que la distribución de tales proporciones está dada por

$$f(y) = \begin{cases} 5(1-y)^4 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Verifique que la función de densidad sea válida
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una empresa elegida al azar gaste menos de 10% de su presupuesto en controles ambientales y de contaminación?
c) Sabiendo que la proporción de presupuesto a controles ambientales y de contaminación es menor a 0,10 ¿cuál es la probabilidad que sea menor a 0,05?
d) Encuentre la función de distribución acumulada de Y.

5) Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de distribución acumulada:

$$F_X(x) = \begin{cases} e^x/2 & si \quad x < 0 \\ k & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 - (e^{1-x}/2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Calcule la función de densidad de la variable.
b) Calcule el valor de k.
c) Calcule la probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre 0,5 y 1,5.
d) Calcule la probabilidad de que X sea mayor que 1,5 sabiendo que X< 1,75.

6) La cantidad de tarjetas de crédito (X) y de cajas de ahorro (Y) que tienen los clientes de un banco tiene distribución de probabilidad conjunta dada por la siguiente tabla:

***f*(*x*,*y*)**		***Y***		
		0	**1**	**2**
x	**0**	0,03	0,07	0,15
	1	0,04	k	0,08
	2	0,02	0,09	0,06
	3	0	0,02	0,14

a) Determine el valor de k y las distribuciones marginales de X e Y.
b) Calcule la función de probabilidad del número de tarjetas que tiene el cliente cuando posee una caja de ahorro.
c) Calcule la probabilidad de que un cliente tenga una caja de ahorro si sabe que posee dos tarjetas de crédito.
d) Calcule la probabilidad de que un cliente tenga menor cantidad de cajas de ahorro que de tarjetas.
e) ¿Son X e Y independientes? Justifique.

7) Una empresa está interesada en contratar a dos alumnos de un posgrado de comercio exterior que tiene 2 años de duración. Si el estudiante cursa el primer año, se le pagará un salario de U$S 1000. Si el estudiante ya tiene aprobado el primer año y cursa el segundo año se le pagará el doble. Suponga que la probabilidad de que la empresa elija un estudiante de 1º año es 0,4 y de 2º año 0,6. Además suponga que cada estudiante se selecciona de manera independiente.
a) Encuentre el espacio muestral del experimento donde se registra la condición de cada persona seleccionada, alumno de 1º o de 2º
b) Indique la distribución de probabilidad de la variable aleatoria: *Gasto mensual de la empresa en el salario de los dos empleados*.

c) Construya la distribución conjunta de las variables *X*: "cantidad de alumnos de primer año contratados" e *Y*: "cantidad de alumnos de segundo año contratados". ¿Son *X* e *Y* independientes? Justifique su respuesta.

8) Una urna contiene 6 monedas de U$S 1, 5 monedas de U$S 0,50 y 10 monedas de U$S 0,25. Se seleccionan 3 monedas al azar, sin reemplazo.
   a) Encuentre la distribución de probabilidad conjunta de la cantidad de monedas de U$S 1 y U$S 0,50 extraídas.
   b) ¿Cuál es la probabilidad de sacar más de 2 monedas de U$S 0,25?
   c) Encuentre la distribución de probabilidad de la cantidad de dinero extraído.

9) Un costurero contiene 2 botones blancos, 1 rojo y 2 dorados. Se extraen al azar 3 botones sin reposición.
   a) Construya la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X: "cantidad de botones dorados entre los 3 seleccionados".
   b) Construya la distribución conjunta de la variable X: "cantidad de botones dorados" e Y: "cantidad de botones rojos" entre las 3 botones seleccionadas. ¿Son independientes X e Y? justifique claramente.
   c) Calcule la probabilidad que se seleccionen más botones dorados que rojos.

Ejercicios Adicionales

1) Clasifique las siguientes variables aleatorias como discretas o continuas.
   a) *X*: Número de días con lluvia en el mes de marzo en S.M. de Tucumán.
   b) *Y*: Volumen de gaseosa que envasa una máquina en una línea de llenado en botellas de 1,5 litros.
   c) *Z*: Número de clientes que entran por día en el Banco Galicia, casa central.

2) Califique con verdadero o falso cada una de las siguientes afirmaciones, justificando brevemente su calificación:
   a) Si el recorrido de una variable aleatoria no es finito, la variable es continua.
   b) Si *X* es una variable aleatoria continua entonces $P(X = x_0) = 0$.
   c) Si X es una variable aleatoria continua entonces$F(x) = P(X < x)$, donde F es la función de distribución acumulada de *X*.
   d) Si X es una variable aleatoria discreta entonces$F(x) = P(X < x)$, donde F es la función de distribución acumulada de *X*.

3) La distribución de la cantidad de grava (en toneladas) vendida por una empresa particular proveedora de materiales para construcción en una semana cualquiera es una variable aleatoria *X* continua con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} a(1 - x^2) \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \text{ cualquier otro caso} \end{cases}$$

   a) Determine el valor de a.
   b) Encuentre la función de distribución acumulada.
   c) Calcule la probabilidad de que la empresa venda a lo sumo 500 kg durante una semana.
   d) Calcule $P(X = 0{,}5)$ y $P(X \leq 1/2 \mid 1/4 < X < 3/4)$.

4) Indique si es posible que *f*(*x*) represente una función de densidad, siendo $f(x) = 2x + 1$si $0 < x < 1$y 0 en cualquier otro caso.

5) Sea el experimento de lanzar dos dados no cargados. Se define una variable aleatoria W igual a la suma de los puntajes de ambos dados. Indique los elementos del espacio

muestral s y encuentre las funciones de masa y de distribución acumulada de probabilidad de W.

6) Dada la variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} a & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

determine:

a) El valor de la constante a.
b) La función de distribución acumulada.
c) $P(0{,}5 < X < 0{,}8)$, usando función de densidad y usando función de distribución acumulada.

7) Una urna contiene tres bolas numeradas 1, 2 y 3. Se seleccionan sucesivamente, al azar y sin reposición, dos bolas de la urna. Sea X el número de la primera bola seleccionada e Y el número de la segunda.

a) Encuentre la distribución conjunta de X e Y.
b) Calcule $P(X < Y)$.

8) Suponga que X e Y tienen la siguiente distribución de probabilidad conjunta:

$f(x, y)$		X		
		1	2	3
y	1	0	1/6	1/12
	2	1/5	1/9	0
	3	2/15	1/4	1/18

a) Calcule la distribución marginal de X;
b) Calcule la distribución marginal de Y;
c) Encuentre $P(Y = 3|X = 2)$.

9) Calcular el valor c para que la siguiente función sea una función de masa.

$$f(x) = c\binom{2}{x}\binom{3}{3-x} \text{para } x=0, 1, 2.$$

10) ¿Es posible encontrar un valor c tal que sea una densidad la función f?

$$f(x) = \begin{cases} c(x + 3), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

11) El tiempo, en horas, que requieren los estudiantes para terminar un examen es una variable aleatoria con una función de densidad dada por la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcule c y grafique la función de densidad.
b) Determine la función de distribución acumulada y grafíquela.
c) Calcule $P(0{,}25 < X < 0{,}50)$, usando la función de densidad y utilizando la función de distribución acumulada.
d) Determine la probabilidad de que un alumno demore a lo sumo media hora si se sabe que necesitó al menos un cuarto de hora.
e) Calcule $P(X = 0{,}8)$.

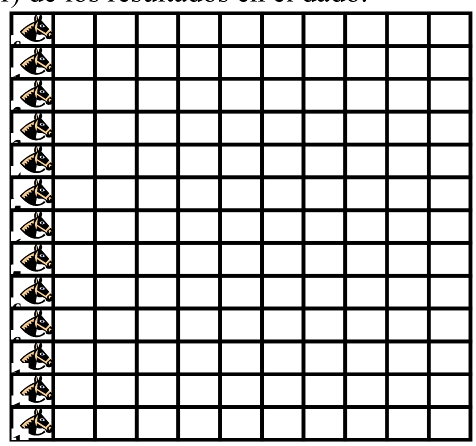
12) El número total de horas (que se mide en unidades de 100 horas) que una empresa usa el teléfono durante un año es una variable aleatoria continua X, que tiene la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x, & \text{si } 1 \leq x < a \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

a) Determine el valor de a.

b) Encuentre la distribución acumulada de *X*.
c) Calcule la probabilidad de que en la empresa se use el teléfono menos de 120 horas en un año.
d) Calcule $P(X = 1{,}5)$ y $P(X \leq 1/2 \mid 1/4 < X < 3/4)$.

13) Dos personas participan en el juego Carrera de Caballos. Los caballos están numerados del 0 al 12 y en el juego se deben avanzar 10 casilleros para llegar a la meta (ver tablero). El juego consiste en lanzar dos dados, y tiene dos variantes:
Variante 1: Con sumas:
1. Cada jugador elige un caballo distinto y allí coloca su ficha.
2. Se lanza por turnos los dados y se suman los resultados obtenidos. El caballo cuyo número coincide con la suma avanza un lugar, aunque no sea el caballo de quien arrojó los dados.
3. Gana el jugador cuyo caballo llega primero a la meta.
Variante 2: Con restas: Ídem al anterior, pero avanza el caballo cuyo número coincide con la diferencia (número mayor menos el menor) de los resultados en el dado.
a) ¿Cuál es el experimento aleatorio que se repite sucesivamente?
b) Escriba el espacio muestral para cada una de las repeticiones del experimento.
c) ¿Cuál es la variable aleatoria que se considera en cada repetición y cada variante? Determine su función de masa y grafíquela.
d) ¿Qué caballo conviene elegir en cada variante? ¿Qué caballo nunca ganará en cada una de las variantes?



14) Al poner en funcionamiento una máquina, existe una probabilidad de que el operario cometa un error. El valor de la misma disminuye a medida que el operario realiza más operaciones con la máquina. Suponga que el operario realiza 3 intentos y que los intentos son estadísticamente independientes. Suponga además que *P*(error en el *i*-ésimo intento)=$\frac{1}{1+i}$, i = 1,2,3. Se define la variable *X* como el número de operaciones hechas sin cometer error. Encuentre la distribución de probabilidad de *X*.

15) La probabilidad de ocurrencia de un accidente industrial en un año en cierta empresa es 0,001 y la probabilidad de tener más de 1 accidente es nula. Una compañía de seguros propone a esta empresa un seguro de accidentes cuyo costo anual es de \$10.000, comprometiéndose a entregar una cantidad de \$5.000.000 en concepto de indemnización en caso de accidente.
a) Encuentre la función de masa de probabilidad de los beneficios de la compañía de seguros en un año, debido a la venta del seguro a esta empresa.
b) Haciendo los supuestos necesarios encuentre la función de masa de los beneficios de la compañía de seguros en tres años.

16) La duración en años de la batería de cierto modelo de teléfono móvil es una variable aleatoria continua *X* con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k(x-2)^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Calcule el valor de k.

b) Calcule la probabilidad de que una batería dure más de 2 años y medio.
c) Sabiendo que una batería tiene más de 30 meses funcionando, calcule la probabilidad de que dure menos de 3 años.
d) Calcule $P(X = 3)$.
e) Encuentre la función de distribución acumulada de *X*.

17) Un lote de 30 objetos contiene un 10% de defectuosos. El procedimiento de control de calidad consiste en examinar cinco objetos del lote y contar la cantidad de defectuosos. Calcule la distribución de probabilidad de la variable que mide la cantidad de objetos defectuosos en la muestra de tamaño cinco.

18) Se tiene una moneda no balanceada de tal manera que la probabilidad de obtener cara es el doble de obtener sello; se lanza la moneda tres veces y se observa si cada una de ellas cae en cara o en sello. Halle la distribución de la variable aleatoria *X* definida como número de sellos en los tres lanzamientos. Indique si tuvo que realizar algún supuesto.

19) En cierto supermercado hay dos cajas registradoras. Tres clientes llegan a ellas, cuando no hay otros clientes. Cada cliente elige independientemente una caja al azar. Sea Y_1 el número de clientes que eligen la caja 1 e Y_2 el número de clientes que escogen la caja 2.
a) Encuentre la distribución conjunta de Y_1 e Y_2 y represéntela gráficamente.
b) Determine las distribuciones marginales.
c) Encuentre las distribuciones condicionales de Y_1 dado que Y_2=1 y de Y_2 dado que Y_1=1
d) Calcule $P(Y_1 \leq 1, Y_2 > 1), P(Y_1 \leq 1 | Y_2 > 1)$.
e) ¿Son independientes las variables aleatorias?

20) Una variable aleatoria *X* tiene función de distribución acumulada

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ k(1 - 1/x) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcule la función de densidad de la variable.
b) Calcule el valor de *k*.
c) Calcule la probabilidad de que la variable tome valores comprendidos entre 0,5 y 1,5.
d) Calcule la probabilidad de que *X* sea mayor que 1,5 sabiendo que *X*< 1,75.

EJERCICIOS SUGERIDOS DEL LIBRO "PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA PARA INGENIERÍA Y CIENCIAS" de WALPOLE, MYERS y MYERS. (9º Ed.)

Capítulo 4:

Secciones 3.1 a 3.3, página 91: ejercicios: 3.1, 3.4, 3.8, 3.12 y 3.17.
Sección 3.4, página 104: ejercicios 3.37, 3.38, 3.40 y 3.52

CAPÍTULO 4: ESPERANZA MATEMÁTICA

Esperanza matemática. Media, varianza y covarianza de variables aleatorias. Media, varianza y covarianza de combinaciones lineales de variables aleatorias. Teorema de Chebyshev.

Objetivos:

El alumno debe ser capaz de:

- Calcular la esperanza y la varianza de una variable aleatoria.
- Dado un par de variables aleatorias calcular la covarianza entre las mismas.
- Calcular la esperanza y la varianza de funciones de variables aleatorias cuya función de probabilidad sea conocida.
- Calcular cotas de probabilidad aplicando el teorema de Chebyshev.

Resumen

D1. *Esperanza Matemática*: Sea X una variable aleatoria con distribución de probabilidad $f_X(x)$, la media (valor esperado o esperanza matemática) de X se denota con μ y es

$\mu = E(X) = \sum_x x f_X(x)$, cuando X es una variable discreta, ó

$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$, cuando X es una variable continua.

T1. Sea X v.a. con distribución de probabilidad $f_X(x)$. El valor esperado de la variable aleatoria $g(X)$ está dada por

$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \sum_x g(x) f_X(x)$, si X es discreta, y

$\mu_{g(X)} = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$, si X es continua.

D2. Sean X e Y vs.as. con distribución de probabilidad conjunta$f(x,y)$. La media de la v.a.$g(X,Y)$ es

$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) f(x,y)$, si X e Y son discretas, y

$\mu_{g(X,Y)} = E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y)dx\,dy$, si X e Y son continuas.

D3. *Varianza:* Sea X una v.a. con media μ. La varianza de X, $V(X)$, es

$$\sigma_X^2 = E[(X-\mu)^2].$$

T2. Sea X v.a. con distribución de probabilidad $f_X(x)$ y media μ. La varianza de X, $V(X)$, está dada por

$\sigma_X^2 = \sum_x (x-\mu)^2 f_X(x)$, si X es discreta, y

$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)dx$, si X es continua.

D4. *Desviación Estándar:* La desviación estándar se denota por σ_X y es la raíz cuadrada positiva de σ_X^2.

T3. Sea X v.a. con media μ, entonces $\boldsymbol{V(X) = E(X^2) - \mu^2}$.

T4. Sea X v.a. con distribución de probabilidad $f_X(x)$. La varianza de la variable aleatoria $g(X)$ está dada por

$V[g(X)] = E\left[\left\{g(X) - \mu_{g(X)}\right\}^2\right] = \sum_x \left\{g(x) - \mu_{g(X)}\right\}^2 f_X(x)$, si X es discreta, y

$V[g(X)] = E\left[\left\{g(X) - \mu_{g(X)}\right\}^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{g(x) - \mu_{g(X)}\right\}^2 f_X(x)dx$, si X es continua.

D5. *Covarianza:* Sean X e Y vs.as. con distribución de probabilidad conjunta$f(x,y)$ y medias μ_X y μ_Y, respectivamente. La covarianza de X e Y, $Cov(X,Y)$ ó σ_{XY}, es

$$\sigma_{XY} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)].$$

T5. $\sigma_{XY} = E(XY) - \mu_X\mu_Y$.

Propiedades de las medias, varianzas y covarianzas de combinaciones lineales de vs.as.:
Sean X e Y vs.as. y sean a, b, c y d constantes

(1) $E(aX+b)=a\,E(X)+b$
(2) $E[g(X)\pm \boldsymbol{h}(X)]=E[g(X)]\pm E[\boldsymbol{h}(X)]$
(3) $E[g(X,Y)\pm \boldsymbol{h}(X,Y)]=E[g(X,Y)]\pm E[\boldsymbol{h}(X,Y)]$
(4) $E\left[g(X)\pm h(Y)\right]=E\left[g(X)\right]\pm E\left[h(Y)\right]$
(5) Si X e Y son independientes entonces $E(X\cdot Y)=E(X)\cdot E(Y)$
(6) $\sigma^2_{aX+b}=a^2\sigma^2_X$
(7) $\sigma^2_{aX+bY}=a^2\sigma^2_X+b^2\sigma^2_Y+2ab\sigma_{XY}$
(8) Si X e Y son independientes entonces $\sigma^2_{aX+bY}=a^2\sigma^2_X+b^2\sigma^2_Y$
(9) $Cov(aX+b,cY+d)=acCov(X,Y)$
(10) $Cov(\sum_{i=1}^{A}a_iX_i\,,\sum_{j=1}^{B}b_jY_j)=\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}a_ib_j\,Cov(X_i,Y_j)$, donde $a_1,\dots,a_A$ y $b_1,\dots,b_B$ son constantes y, $X_1,\dots,X_A$ e$Y_1,\dots,Y_B$ son vs.as.

T6. *Teorema de Chebyshev*: La probabilidad de que cualquier variable aleatoria X asuma un valor dentro de k desviaciones estándares de la media es al menos $1-1/k^2$, es decir

$$\boldsymbol{P(\mu-k\sigma_X<X<\mu+k\sigma_X)\geq\ 1-1/k^2}.$$

Ejemplos

Ejemplo 1: En un concurso de un programa televisivo, un concursante lanza un dado y el anfitrión le paga tantos billetes de \$100 como puntos señale la cara que cae hacia arriba, excepto cuando sale 5 o 6, en cuyo caso es el concursante quien debe pagar al anfitrión tantos billetes de \$100 como puntos muestre la cara superior. ¿Quién de los dos tiene ventaja en el juego, el concursante o el anfitrión?

Resolución:

El experimento aleatorio es

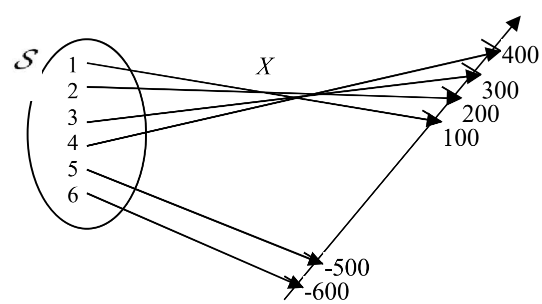
ε: se lanza un dado y se observa el resultado.

El espacio muestral es $\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{1},\boldsymbol{2},\boldsymbol{3},\boldsymbol{4},\boldsymbol{5},\boldsymbol{6}\}$.

La variable aleatoria X que representa la ganancia del concursante, es una función que a cada elemento de $\mathcal{S}$ le asigna un número real de la siguiente forma:

$X: S\to R$

$s\to X(s)=\begin{cases}100s\ si\ s\ <5\\ -100s\ si\ s\ \geq 5\end{cases}$



Para calcular $p(x)=P(X=x)$, se debe determinar el suceso equivalente en el espacio muestral. Por ejemplo, $p(100)=P(X=100)=P(s=1)=\frac{1}{6}$.

$\boldsymbol{x}$	100	200	300	400	-500	-600

$p(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Para determinar quién tiene ventaja en el juego, se calcula el valor esperado, que indica lo que el concursante gana o pierde *en promedio* cada vez que lanza el dado, o lo que se esperaría que sea la ganancia promedio si se jugara un número grande de veces.

$$E(X) = \sum_{x=1}^{6} x.p(x) = \sum_{x=1}^{6} x.\frac{1}{6} = \frac{1}{6}\sum_{x=1}^{6} x$$
$$= \frac{1}{6}(100 + 200 + 300 + 400 - 500 - 600) = -100 \times \frac{1}{6} = -16{,}67$$

La interpretación de este valor esperado es que si el concursante jugara un número infinitamente grande de veces este juego, *en promedio* perdería $16,67 en cada lanzamiento del dado.
Por lo tanto, el juego es favorable al anfitrión.

Ejemplo 2: El consumo de combustible de un cierto automóvil es una variable aleatoria medida en Km por litro. Se supone que la densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es la siguiente

$$f(x) = \begin{cases} x - 10, & \text{si } 10 \leq x \leq 11 \\ 12 - x, & \text{si } 11 < x \leq 12 \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases}$$

a) Determinar la esperanza y varianza del consumo.
b) Si el precio del combustible es $4 por litro ¿Cuál es la esperanza del costo de un viaje de 100 Km en este automóvil?

Resolución:

a) En el caso continuo $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{10} x.0dx + \int_{10}^{11} x(x-10)dx + \int_{11}^{12} x(12-x)dx + \int_{12}^{\infty} x.0dx$$
$$= \int_{10}^{11} (x^2 - 10x)dx + \int_{11}^{12} (12x - x^2)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 5x^2\right)\Bigg|_{10}^{11} + \left(6x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{11}^{12}$$

$$E(X) = \left(\frac{11^3}{3} - 5 \cdot 11^2\right) - \left(\frac{10^3}{3} - 5 \cdot 10^2\right) + \left(6 \cdot 12^2 - \frac{12^3}{3}\right) - \left(6 \cdot 11^2 - \frac{11^3}{3}\right) = 11$$

Para el cálculo de la varianza, se puede usar la expresión

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$
$$E(X^2) = \int_{10}^{11} x^2(x-10)dx + \int_{11}^{12} x^2(12-x)dx = \int_{10}^{11} (x^3 - 10x^2)dx + \int_{11}^{12} (12x^2 - x^3)dx$$
$$= \left(\frac{x^4}{4} - 10\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{10}^{11} + \left(4x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{11}^{12}$$
$$= \left(\frac{11^4}{4} - 10\frac{11^3}{3}\right) - \left(\frac{10^4}{4} - 10\frac{10^3}{3}\right) + \left(4 \cdot 12^3 - \frac{12^4}{4}\right) - \left(4 \cdot 11^3 - \frac{11^4}{4}\right)$$
$$= \frac{727}{6}$$

Por lo tanto,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{727}{6} - 11^2 = \frac{727}{6} - 121 = \frac{1}{6}.$$

b) X es la cantidad de kilómetros recorridos con un litro de combustible. Sea Z la cantidad necesaria de combustible para recorrer 100 km.

$x\ km$ ——— 1 litro
$100\ km$ ——— z litros

La relación entre Z y X viene dada por la expresión

$$Z = \frac{100}{X}\text{litros.}$$

La densidad de X informa los valores de su recorrido, Rec(X)= [10, 12], puesto que la probabilidad de que asuma valores fuera de este intervalo es nula. Para determinar los valores entre los cuales varía Z, se debe tener en cuenta los valores del recorrido de X, y así se puede determinar que Rec(Z)=[8,33; 10].

Si P denota el costo de un viaje de 100 km, se tiene que $P = 4 \cdot Z = \frac{400}{X}$, consecuentemente:

$$E(P) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{400}{x} f(x)dx = 400\left[\int_{10}^{11} \frac{x-10}{x}dx + \int_{11}^{12} \frac{12-x}{x}dx\right]$$
$$= 400\left[\int_{10}^{11}\left(1 - \frac{10}{x}\right)dx + \int_{11}^{12}\left(\frac{12}{x} - 1\right)dx\right]$$
$$= 400[(x - 10\,ln\,x)|_{10}^{11} + (12\,ln\,x - x)|_{11}^{12}] = 36{,}41.$$

El costo esperado de un viaje de 100 Km en este auto es de \$36,41.

Ejemplo 3: La demanda X, por semana, de cierto producto es una variable aleatoria con distribución de probabilidades $f(x) = \frac{1}{5}$, si $x = 1,2,3,4,5$ y cero en cualquier otro caso. Se supone que el costo de fabricación es \$1 por artículo, mientras que el fabricante vende cada artículo por \$9. Cualquier artículo que no se venda al cabo de la semana debe almacenarse con un costo de \$1 por artículo. Si en una semana se fabrican cuatro artículos, ¿cuál es la utilidad esperada en esta semana?

Resolución:

Sea $U(X)$ la utilidad de una semana.
Si la demanda de artículos no supera al número de artículos fabricados, $x \leq 4$

$$U(x) = 9x - 4 - 1(4 - x) = 10x - 8,$$

puesto que, la utilidad es el ingreso por ventas menos el costo de producción de las 4 unidades y menos el costo de almacenamiento de las unidades no vendidas.
Por otro lado, si la demanda es de 5 unidades, y en la semana se produjeron 4 artículos, sólo se venden 4, y así

$$U(x) = 9 \times 4 - 4 = 32 \text{ para } x = 5.$$

De esta manera,

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$U(x)$	2	12	22	32	32
$p(x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Consecuentemente, la utilidad esperada se calcula de la siguiente manera

$$E(U(X)) = \sum_{x=1}^{5} U(x)f(x) = \frac{1}{5}\sum_{x=1}^{5} U(x) = \frac{1}{5}(2 + 12 + 22 + 32 + 32) = 20$$

Por lo tanto se tiene que la utilidad esperada por el fabricante en una semana en que produce 4 artículos es de \$20.

Ejemplo 4: Las variables aleatorias *X* e *Y* tienen la siguiente distribución conjunta:

	$f(x,y)$	x = 1	2	3
y	1	0	1/6	1/12
	2	1/5	1/9	0
	3	2/15	1/4	1/18

a) Calcular $E(X)$, $V(X)$, $E(X\times Y^2)$, $Cov(X,Y)$ y $V(X+Y)$
b) ¿Son independientes las variables dadas?
c) Calcular$P(1 \leq X \leq 2, Y > 1)$ y $P(1 \leq Y \leq 2|X = 2)$.

Resolución:

a) -Cálculo de $E(X)$ y $V(X)$: La distribución marginal de *X* es:

x	1	2	3
$g(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{19}{36}$	$\frac{5}{36}$

Por lo tanto, $E(X) = \sum_{x=1}^{3} xg(x) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{19}{36} + 3 \times \frac{5}{36} = \frac{65}{36}$.

Para el cálculo de la varianza de *X*, se observa que

$$E(X^2) = \sum x^2 g(x) = 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{19}{36} + 3^2 \times \frac{5}{36} = \frac{133}{36}.$$

Por lo tanto,

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{133}{36} - \left(\frac{65}{36}\right)^2 = \frac{563}{1296}.$$

- Cálculo de $E(X\times Y^2)$, $Cov(X,Y)$ y $V(X+Y)$: Se observa que $X \cdot Y^2 = g(X,Y)$, por lo tanto teniendo en cuenta la definición **D2** se tiene que

$$E(X \cdot Y^2) = \sum x \cdot y^2 f(x,y)$$
$$= 1 \times 1^2 \times 0 + 2 \times 1^2 \times \frac{1}{6} + 3 \times 1^2 \times \frac{1}{12} + 1 \times 2^2 \times \frac{1}{5} + 2 \times 2^2 \times \frac{1}{9} + 3 \times 2^2 \times 0 +$$
$$+1 \times 3^2 \times \frac{2}{15} + 2 \times 3^2 \times \frac{1}{4} + 3 \times 3^2 \times \frac{1}{18}$$
$$= \frac{341}{36}.$$

Considerando que $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. Se puede trabajar inicialmente con la distribución marginal de *Y* y después calcular su esperanza.

y	1	2	3
$h(y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{79}{180}$

$$E(Y) = \sum_{y=1}^{3} yh(y) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{14}{45} + 3 \times \frac{79}{180} = \frac{197}{90} E(X.Y) = \sum x.y.f(x,y)$$

$$= 1 \times 1 \times 0 + 2 \times 1 \times \frac{1}{6} + 3 \times 1 \times \frac{1}{12} + 1 \times 2 \times \frac{1}{5} + 2 \times 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times 2 \times 0 + 1 \times 3 \times \frac{2}{15} + 2 \times 3 \times \frac{1}{4} + 3 \times 3 \times \frac{1}{18}$$

$$= \frac{689}{180} Cov(X,Y) = \frac{689}{180} - \frac{65}{36} \times \frac{197}{90} = -\frac{403}{3240}$$

Para el cálculo de la $V(X+Y)$ se observa que $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y)$. Por lo tanto

$$E(Y^2) = \sum_{y=1}^{3} y^2\, h(y) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{14}{45} + 3^2 \times \frac{79}{180} = \frac{980}{180}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{980}{180} - \left(\frac{197}{90}\right)^2 = \frac{5291}{8100}$$

$$V(X+Y) = \frac{563}{1296} + \frac{5291}{8100} - 2 \times \frac{403}{3240} = \frac{27179}{32400}.$$

b) Las variables X e Y no son independientes puesto que no se cumple

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

donde g y h denotan las distribuciones marginales de X e Y respectivamente. En particular se puede observar que, por ejemplo:

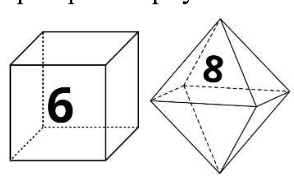
$$0 = f(1,1) \neq g(1)h(1) = 1/3 \times 1/4.$$

c) $P(1 \leq X \leq 2, Y > 1) = \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{2}{15} + \frac{1}{4} = \frac{25}{36}$

$P(1 \leq Y \leq 2 | X=2) = P(1 \leq Y \leq 2 | X = 2) = \frac{P(1 \leq Y \leq 2, X=2)}{P(X=2)} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}}{\frac{19}{36}} = \frac{10}{19}.$

TRABAJO PRÁCTICO Nº 4

1) Se arrojan un dado, con sus caras numeradas del 1 al 6, y un octaedro, con sus caras numeradas del 1 al 8, y se observan los números que aparecen en la cara superior del dado y en la cara del octaedro que queda apoyada en la mesa.



a) Escribe el espacio muestral.

b) Defina la variable X como la "suma de los resultados obtenidos", determine su función de masa y grafíquela. Indique los supuestos que utilizó para elaborar su respuesta.

c) Calcule la esperanza, la varianza y el desvío estándar de X.

d) Se define la función de variable aleatoria $g(X) = 12 - 3X$. Calcule el valor esperado, la varianza y el desvío estándar de $g(X)$.

2) Un analista está atento a las cotizaciones de las acciones de las empresas A y B. La probabilidad de que la cotización de las acciones de la empresa A hayan subido al

finalizar una jornada bursátil es 0,2, y de que esa misma jornada suba tanto la cotización de las acciones de la empresa A como la de B es 0,06. Si las cotizaciones de ambas empresas suben o bajan en forma independiente, considere la variable aleatoria X: "Número de cotizaciones que suben ese día, sólo teniendo en cuenta las acciones de las empresas A y B".

a) Determine la función de probabilidad de X.
b) Calcule el valor esperado y la varianza de X.
c) Un segundo analista le propone una apuesta al primero: si la cotización de las acciones de la empresa A suben un determinado día, él le pagará U$S300 al primero, mientras que si sube la cotización de las acciones de la empresa B, el primero le pagará U$S200 a él. ¿Le conviene al primero aceptar la apuesta? ¿Cuál es la ganancia esperada para el primer analista?

3) Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ independientes, con la misma distribución, con varianza no nula. Indique en cada ítem, justificando convenientemente, si las expresiones presentadas son (i) cero, (ii) una constante no nula, ó (iii) una variable aleatoria:

a) $E(\bar{X} - X_1)$ donde $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
b) $V(X_1 - X_2)$
c) $V(X_1 - V(X_1))$
d) $E(X_1^2) - [E(X_1)]^2$
e) $X_1 - E(X_1)$
f) $V(\bar{X}) - V(X_1 + X_2)$

4) Una fábrica de lácteos produce dulce de leche, del cual exporta una cantidad (X) cada año. Suponga que la función de densidad de X es:

$$f(x) = \begin{cases} x\,(x-1) & si \quad 0 \le x < 3 \\ kx & si \quad 3 \le x < 4 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Donde una unidad es igual a una tonelada.

a. ¿Cuál es la cantidad de dulce de leche que se exporta, en promedio, en un año?
b. Cada tonelada exportada produce un ingreso de U$S 3000, mientras que cada tonelada no exportada durante un año determinado produce una pérdida de U$S 1000. Si en un año determinado se fabrican 4,5 toneladas, ¿cuál es la ganancia esperada?

5) Una variable aleatoria X tiene esperanza μ=10 y varianza σ^2= 4. Encuentre cotas para
a) $P(|X - 10| \ge 3)$
b) $P(|X - 10| < 4)$
c) $P(5 < X < 15)$
d) Encuentre el valor de la constante c tal que $P(\,|X - 10| \ge c) \le 0{,}04$

6) Un inversionista tiene cierta cantidad de dinero disponible para invertir. Existen tres alternativas de elección de inversión. Los rendimientos de cada inversión bajo cada condición económica se indican en la siguiente tabla de resultados:

	Elección de inversión		
Evento	A	B	C
La economía declina	U$S 500	U$S 2000	-U$S 7000
Sin cambios	U$S 1000	U$S 2000	-U$S 1000
Expansión económica	U$S 2000	U$S 5000	U$S 20000

Según su experiencia, el inversionista asigna las siguientes probabilidades a cada condición económica: P(la economía declina)=0,3; P(sin cambios) = 0,5; P(expansión económica) = 0,2.

a) Determine cuál es la mejor elección de inversión para el inversionista, según el criterio del valor esperado (mayor beneficio esperado). Analice.
b) Calcule la desviación estándar (riesgo) de los rendimientos que se obtendrían para cada elección de inversión posible.
c) Con base en los resultados a) y b), ¿cuál de las inversiones elegiría? ¿Por qué?
d) Calcule la covarianza de los rendimientos en las dos primeras inversiones.
e) Se desea formar una cartera con las dos primeras inversiones, que consiste en una inversión igual en cada activo. Calcule el rendimiento esperado de la cartera y el riesgo de cartera. ¿Y si se invierte el 20% del dinero en A y 80% en B?

7) En un centro radiológico, de 14 a 16 horas sólo atiende un técnico en imágenes y únicamente realiza radiografías y ecografías, no pudiendo un mismo paciente hacerse ambas prácticas. Se sabe que el 60% de los pacientes que asisten en ese horario necesitan una radiografía y el resto una ecografía. Se estudian las prácticas realizadas por los primeros dos pacientes que concurren en ese horario, sea X_1 el número de pacientes que necesitan una radiografía y X_2 el número de pacientes que necesitan una ecografía:
a) Determine la función de masa conjunta de X_1 y X_2. Indique si necesitó agregar algún supuesto.
b) ¿Son X_1 y X_2 variables independientes? Justifique.
c) Calcule: $E(X_1), E(X_1.X_2), E(2X_2+5), V(3X_1-4), Cov(X_1,X_2)$
d) El centro radiológico le paga al técnico U$S 0,75 por cada radiografía y US$S 1 por cada ecografía que realiza. ¿Cuál es el valor esperado del monto que cobrará el técnico por atender a estos dos primeros pacientes?

8) En una fábrica de alimentos, una máquina produce 1200 galletas por hora. Se sabe que en promedio un 2% de las galletas pueden dañarse antes de ser envasadas y por lo tanto se consideran defectuosas. Haciendo los supuestos necesarios, responda:
a) Si las galletas son envasadas en paquetes de 14 unidades, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete contenga, como máximo, 1 galleta defectuosa?
b) En los paquetes mini (que incluyen solo 2 unidades), ¿cuál es la probabilidad de que el paquete contenga, como máximo, 1 galleta defectuosa?
c) ¿Cuál es el número esperado de galletas dañadas por paquete? Calcular para ambos tamaños de paquete, clásico y mini.
d) ¿Cuál es el número esperado de galletas dañadas por hora de producción?

8) Indique si las siguientes aseveraciones son ciertas o falsas justificando su respuesta:
a) Si X e Y son independientes, $V(X-Y) = V(X) - V(Y)$.
b) Si $Cov(X,Y) = 0$ entonces X e Y son independientes.
c) Si X es una variable aleatoria y a es una constante, entonces $V(aX) = aV(X)$.

Ejercicios Adicionales

1) Sea Y la variable aleatoria que representa la suma de los números observados al tirar dos dados perfectos. Calcule la esperanza y la varianza de Y.

2) Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% son defectuosos y el 90% no lo son. Si produce un artículo defectuoso el fabricante pierde $1, mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de $5.

a) ¿Cuánto espera ganar el fabricante por artículo?
b) Si produce tres artículos, y la condición de defectuoso o no defectuoso de un artículo es independiente de los demás, ¿cuánto espera ganar?

3) Un empleado en un estadio de fútbol puede elegir entre trabajar detrás del mostrador de ventas de panchos y recibir una suma fija de \$50, o caminar en las gradas del estadio vendiendo gaseosas a comisión. Si elige esto último puede obtener \$150 en una tarde cálida, \$90 en una tarde de clima moderado, \$45 en una tarde fresca y \$30 en una tarde fría. En esa época del año las probabilidades de que las tardes sean cálidas, moderadas, frescas o frías son 0,1; 0,3; 0,4 y 0,2 respectivamente.
   a) Determine el valor esperado del dinero que ganaría el empleado vendiendo gaseosas.
   b) Calcule el desvío estándar.
   c) De acuerdo a esta información, ¿cuál trabajo le aconsejaría elegir al empleado? ¿Por qué?

4) La distribución de probabilidad de los daños pagados por una compañía de seguros del automóvil por siniestros ocasionados por sus asegurados durante el último año es la que se muestra a continuación:

Pago (en pesos)	Probabilidad
0	0,90
1.200	0,04
3.000	0,03
6.000	0,01
12.000	0,01
18.000	0,01

   a) Emplee el pago esperado por choque para determinar la prima de seguro contra terceros que permitiría a la empresa no tener pérdidas.
   b) La aseguradora cobra una tarifa anual de \$780 contra terceros. ¿Cuál es el valor esperado del seguro contra terceros para un asegurado? ¿Por qué el asegurado compra una póliza contra terceros con ese valor esperado?

5) Califique con Verdadero o Falso a cada una de las siguientes aseveraciones, justificando convenientemente su calificación:
   a) La esperanza de una variable aleatoria coincide siempre con un valor del recorrido de la variable.
   b) La esperanza de una variable aleatoria es siempre un valor positivo.
   c) La esperanza de una variable aleatoria es el valor más probable de dicha variable.
   d) $V(X+c)=V(X)$, para cualquier valor c constante.
   e) $V(cX)=cV(X)$
   f) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$
   g) $V(\sum_{i=1}^{n} X_i)=\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$
   h) La varianza de una variable aleatoria siempre es un valor mayor que cero.
   i) $V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$
   j) Para una variable aleatoria cualquiera, la varianza siempre es un valor mayor al de la desviación estándar.

6) Defina la covarianza entre dos variables aleatorias y pruebe que si dos variables aleatorias continuas son independientes entonces su covarianza es cero.

7) Si se define $\bar{X}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ y $\bar{X}_2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i$, diga cuál tiene menor varianza. Suponga que las variables X_i son independientes y tienen la misma distribución.

8) Una compañía tiene una sucursal en la ciudad de San Miguel de Tucumán con ventas diarias X y otra sucursal en la ciudad de Concepción con ventas diarias Y. Las ventas en las diferentes ciudades son independientes. Las varianzas de X y Y son 3400 y 3000,