Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра «Информационная безопасность»

М.А. Басараб, С.В. Вельц

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Методические указания к лабораторным работам
по дисциплине «Методы оптимизации и исследование операций»
для студентов направления 0903010065 – Компьютерная безопасность

Москва

УДК 519.8

Рецензент: доц., к.т.н. Юрий Тихонович Каганов

Басараб М.А., Вельц С.В.

Методы оптимизации и исследование операций в информационной безопасности. М.: МГТУ имени Н.Э. Баумана, 2013. 46 с.

Методические указания являются руководством для выполнения лабораторных работ по дисциплине «Методы оптимизации и исследование операций». Они охватывают такие разделы теории оптимизации и исследования операций как линейное программирование и элементы теории игр.

Пособие предназначено для студентов МГТУ имени Н.Э. Баумана, обучающихся по специальности 0903010065 «Компьютерная безопасность». Может быть также полезна студентам и аспирантам других специальностей, интересующимся современными методами решения задач теории оптимизации и исследования операций.

Рекомендовано НМС МГТУ им. Н.Э. Баумана

Басараб Михаил Алексеевич

Вельц Сергей Владимирович

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ В ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Оглавление

Введение

При решении производственных, управленческих, организационно-технических и др. задач в области информационной безопасности часто приходится иметь дело с проблемой выбора одного варианта (оптимального или квазиоптимального) среди множества альтернативных решений [1-3].

В зависимости от целевой функции и характера ограничений такого рода задачи можно условно разбить на два типа:

1. *Задачи оптимизации*. Предполагается, что ограничения известны, и необходимо найти экстремальное решение, доставляющее минимум либо максимум функционалу того или иного вида. Задачи конечномерной оптимизации с одной целевой функцией называются также задачами *математического программирования*.

2. Принятие решений в условиях неопределенности (задачи *теории игр*). Поиск оптимального решения (стратегии) осуществляется при априори неизвестных действиях другого игрока (игроков), имеющего собственные интересы, либо состояниях внешней среды («игра с природой»).

Лабораторный практикум включает в себя работы по решению задач линейного программирования, принятия решений в условиях неопределённости, теории матричных игр. Значительный объем занимает изложение симплекс-метода решения задач линейного программирования, так как к этим задачам сводятся решения ряда других проблем (целочисленное программирование, матричные игры в смешанных стратегиях).

Ряд работ имеет содержательную интерпретацию в области информационной безопасности [3], как, например, выбор оптимального набора средств безопасности (задача о покрытии), моделирование действии инсайдера (матричная игра).

При выполнении лабораторных работ целесообразно воспользоваться либо готовыми программными пакетами математического моделирования (Matlab, MathCAD), электронными таблицами (MS Excel) либо собственными программами, написанными на языке программирования высокого уровня. В последнем случае программа может реализовать не полное решение задачи, а какой-либо вспомогательный шаг всей процедуры (один шаг жордановых исключений в симплекс-методе).

При подготовке отчета по каждой лабораторной работе необходимо последовательно и полно представить все основные шаги метода (алгоритма) с выводом промежуточных результатов и необходимыми комментариями, демонстрирующими понимание сути процедуры. Студент должен быть знаком с таким понятием, как вычислительная сложность метода, уметь провести качественный анализ его с другими методами, быть способным лаконично ответить на предложенные ему контрольные вопросы.

1 Лабораторная работа № 1

Линейное программирование. Симплекс-метод

Цель работы

Изучение симплекс-метода решения задачи линейного программирования (ЛП).

Постановка задачи и методические указания

Постановка задачи ЛП. Требуется найти решение следующей задачи:

$$F = \mathrm{cx} \rightarrow \min, \quad \mathrm{Ax} \le \mathrm{b}, \quad \mathrm{x} \ge 0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathrm{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^{\mathrm{T}}$ – искомый вектор решения;

$\mathrm{c} = [c_1, c_2, ..., c_n]$ – вектор коэффициентов *целевой функции* (ЦФ) *F*;

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ – матрица системы ограничений;

$\mathrm{b} = [b_1, b_2, ..., b_m]^{\mathrm{T}}$ – вектор правой части системы ограничений.

В развернутой форме задача (1.1) имеет вид (1.2) – (1.4)

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \min, \tag{1.2}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{1.3}$$

$$(x_i \ge 0, \ i = 1, ..., n). \tag{1.4}$$

Каноническая форма задачи ЛП. Систему неравенств (1.3) можно преобразовать в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) посредством прибавления к левой части каждого неравенства неотрицательных *дополнительных переменных* $x_{n+i} \ge 0$ ($i = 1, ..., m$):

$$F = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \to \min, \qquad (1.5)$$

$$\sum_{j=1}^{n+m} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, ..., m, \qquad (1.6)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n+m. \qquad (1.7)$$

При записи задачи ЛП в *канонической форме* (1.5) – (1.7) возможны следующие варианты:

1. Число линейно независимых уравнений больше числа переменных. Такая СЛАУ несовместна.
2. Число независимых уравнений равно числу переменных. СЛАУ имеет единственное решение (это решение будет либо недопустимым, если хотя бы одна из его компонент отрицательна, либо искомым оптимальным).
3. Число линейно независимых уравнений равно m, а число переменных равно $n+m$. При совместимости системы у нее существует бесконечное множество решений. В этих решениях n переменных могут принимать произвольные значения (*свободные переменные*), а остальные m переменных (*базисные переменные*) выражаются через свободные.

Коэффициенты линейной ЦФ определяют семейство параллельных гиперплоскостей в гиперпространстве и направление, в котором уменьшается значение ЦФ. Для задачи минимизации, гиперплоскость ЦФ надо перемещать параллельно самой себе в сторону уменьшения ее значений до тех пор, пока она еще будет содержать точки выпуклого многогранника ограничений.

<u>Симплекс-метод решения задачи ЛП.</u> *Решение* – любой набор переменных $x_1, x_2, ..., x_{n+m}$, удовлетворяющий СЛАУ (1.6). *Допустимое решение* – решение с неотрицательными переменными (1.7). *Базис* – набор таких переменных, для которых матрица, составленная из коэффициентов этих переменных в уравнениях, будет невырожденной, т.е. ее определитель отличен от нуля. *Базисное решение* – решение, которое получится, если положить все небазисные (свободные) переменные равными нулю и решить уравнения относительно базисных переменных.

Пусть ЦФ (1.5) и уравнения (1.6) разрешены относительно базисных переменных x_i, $i = 1, ..., m$ (выражены через свободные переменные y_j, $j = 1, ..., n$):

$$\begin{cases} x_1 = s_{10} - (s_{11}y_1 + s_{12}y_2 + \ldots + s_{1k}y_k + \ldots + s_{1,n}y_n) \\ \ldots \\ x_r = s_{r0} - (s_{r1}y_1 + s_{r2}y_2 + \ldots + s_{rk}y_k + \ldots + s_{r,n}y_n) \\ \ldots \\ x_m = s_{m0} - (s_{m1}y_1 + s_{m2}y_2 + \ldots + s_{mk}y_k + \ldots + s_{m,n}y_n) \\ F = s_{m+1,0} - (s_{m+1,1}y_1 + s_{m+1,2}y_2 + \ldots + s_{m+1,k}y_k + \ldots + s_{m+1,n}y_{n.}) \end{cases} \quad (1.8)$$

Значения коэффициентов s_{ij} можно записать в *симплекс-таблицу*, содержащую $m+1$ строку и $n+1$ столбец:

$$\begin{bmatrix} s_{10} & -s_{11} & -s_{12} & \ldots & -s_{1k} & \ldots & -s_{1,n} \\ & & & \ldots & & & \\ s_{r0} & -s_{r1} & -s_{r2} & \ldots & -s_{rk} & \ldots & -s_{r,n} \\ & & & \ldots & & & \\ s_{m0} & -s_{m1} & -s_{m2} & \ldots & -s_{mk} & \ldots & -s_{m,n} \\ \hline s_{m+1,0} & -s_{m+1,1} & -s_{m+1,2} & \ldots & -s_{m+1,k} & \ldots & -s_{m+1,n} \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

<u>Алгоритм преобразования симплекс-таблицы (жордановы исключения).</u> Принцип нахождения оптимального решения в симплекс-методе состоит в следующем. Задачу линейного программирования записывают в канонической форме. Определяют допустимое базисное решение и проверяют его оптимальность. Если решение не оптимальное, то из базиса вычеркивают определенную переменную и вместо нее вводят другую. В результате многократного повторения описанного процесса либо будет получено оптимальное решение, либо будет выявлена противоречивость ограничений, либо станет видно, что при допустимых базисных решениях линейная функция является неограниченной.

Посмотрим, как меняется система уравнений (1.8) при выводе переменной y_k из числа свободных и введении на ее место переменной x_r. Разрешив r-е уравнение системы (1.8) относительно y_k, получим

$$y_k = \frac{s_{r0}}{s_{rk}} - \left(\frac{s_{r1}}{s_{rk}} y_1 + \frac{s_{r2}}{s_{rk}} y_2 + \ldots + \frac{1}{s_{rk}} x_r + \ldots + \frac{s_{r,n}}{s_{rk}} y_n \right).$$

Подставив это значение y_k в остальные соотношения (1.9), получим

$$\begin{cases} x_1 = \left(s_{10} - \dfrac{s_{1k} s_{r0}}{s_{rk}} \right) - \left[\left(s_{11} - \dfrac{s_{1k} s_{r1}}{s_{rk}} \right) y_1 + \left(s_{12} - \dfrac{s_{1k} s_{r2}}{s_{rk}} \right) y_2 + \ldots + \dfrac{-s_{1k}}{s_{rk}} x_r + \ldots \right] \\ \ldots \\ x_m = \left(s_{m0} - \dfrac{s_{mk} s_{r0}}{s_{rk}} \right) - \left[\left(s_{m1} - \dfrac{s_{mk} s_{r1}}{s_{rk}} \right) y_1 + \left(s_{m2} - \dfrac{s_{mk} s_{r2}}{s_{rk}} \right) y_2 + \ldots + \dfrac{-s_{mk}}{s_{rk}} x_r + \ldots \right] \\ F = \left(s_{m+1,0} - \dfrac{s_{m+1,k} s_{r0}}{s_{rk}} \right) - \left[\left(s_{m+1,1} - \dfrac{s_{m+1,k} s_{r1}}{s_{rk}} \right) y_1 + \ldots + \dfrac{-s_{m+1,k}}{s_{rk}} x_r + \ldots \right] \end{cases} \quad (1.10)$$

Соотношения, согласно которым следует преобразовать коэффициенты в симплексной таблице при выводе переменной y_k из числа свободных, а переменной x_r – из числа базисных (замена базиса), называются *жордановыми исключениями*:

$$\begin{gathered} s_{rk}^* = 1 / s_{rk}, \\ s_{rj}^* = s_{rj} / s_{rk},\ j = 0,\ldots,n,\ j \neq k, \\ s_{jk}^* = -s_{ik} / s_{rk},\ i = 1,\ldots,m+1,\ i \neq r, \\ s_{ij}^* = s_{ij} - s_{ik} s_{rj} / s_{rk},\ i = 1,\ldots,m+1,\ i \neq r,\ j = 0,\ldots,n,\ j \neq k. \end{gathered} \quad (1.11)$$

Столбец с номером k в таблице называется *разрешающим столбцом*, строка с номером r – *разрешающей строкой*, элемент s_{rk} – *разрешающим элементом*.

Процесс решения задачи симплексным методом состоит из двух этапов:

1) отыскание опорного решения;

2) отыскание оптимального решения.

<u>Этап 1. Поиск опорного решения.</u> С помощью процедуры Гаусса матрицу СЛАУ (1.7) приводят к треугольному виду (прямой ход). По этой матрице определяют свободные переменные, которые выводятся в правую часть. С помощью второй части процедуры (обратный ход) оставшиеся базисные переменные выражаются через свободные. Положив свободные переменные равными нулю и вычислив базисные, находят некоторое решение системы. Если среди базисных переменных есть отрицательные, решение недопустимо. Допустимое решение получаем, шаг за шагом обменивая базисные и свободные переменные до тех пор, пока или не придем к допустимому решению, или не убедимся, что оно не существует.

Для замены переменных используются жордановы исключения и формулы (1.11). Рассмотрим правило выбора разрешающей строки и разрешающего столбца.

Проводим анализ столбца свободных членов. Пусть есть строка i_0 таблицы s_{ij} $(1 \le i_0 \le m)$ такая, что $s_{i0,0} < 0$ (решение недопустимо). Начиная с первого столбца ищем в строке i_0 отрицательный элемент. Пусть это элемент $s_{i0,k}$. Тогда столбец номер

k, в котором он находится, берется в качестве разрешающего. Если же все элементы строки i_0 неотрицательны, то задача не имеет допустимых решений. Для нахождения разрешающей строки рассматриваются отношения s_{i0} / s_{ik}, $i = 1,...,m$. Среди этих отношений выбирается минимальное положительное, которое и соответствует разрешающей строке.

Когда ограничения в исходной задаче ЛП заданы в виде неравенств, в качестве базисных удобно брать дополнительные переменные и разрешить относительно них все уравнения.

<u>Этап 2. Поиск оптимального решения.</u> Оптимальное решение ищется последовательным преобразованием симплексной таблицы с помощью жордановых исключений. В качестве исходной берется таблица, соответствующая опорному решению, полученному на первом этапе (в такой таблице $s_{i0} \geq 0,\ i = 1,...,m$). Для отыскания разрешающей строки и разрешающего столбца проводится анализ строки таблицы, соответствующей ЦФ F (строка номер m+1). Если в этой строке есть положительные элементы, то решение может быть улучшено (значение F может быть уменьшено), если сделать положительной (ввести в число базисных) ту переменную, у которой отрицательный элемент в строке. Вместо нее следует ввести в число свободных ту переменную, которая первой обратится в нуль при увеличении новой базисной переменной.

Если в строке m+1 таблицы, соответствующей целевой функции F, нет ни одного положительного элемента (не считая свободного члена), т.е. $s_{m+1},\ j \leq 0,\ j = 1,...,n$, то решение, получаемое из этой таблицы, оптимально. Если в строке m+1 есть положительный элемент $s_{m+1,k} > 0$, а в столбце k нет ни одного положительного элемента ($s_{ik} \leq 0,\ i = 1,...,m$), то ЦФ F не ограничена снизу и оптимального решения не существует. Если, наконец, в столбце k, определяемом условием $s_{m+1,k} > 0$, есть положительные элементы, то этот столбец берут в качестве разрешающего столбца, а в качестве разрешающего элемента надо взять положительный элемент s_{rk} столбца k, для которого минимально отношение s_{i0} / s_{ik}, *т.е.* $0 \leq s_{r0} / s_{rk} \leq s_{i0} / s_{ik}$, $i = \overline{1,m},\ s_{ik} > 0$.

Переменная, соответствующая строке r, переводится из базисных в свободные, а переменная, соответствующая столбцу k, из свободных – в базисные. После преобразования симплексной таблицы анализ строки F повторяется.

Для контроля правильности вычисления решение, получаемое из таблицы (свободные переменные, соответствующие столбцам таблицы, равны нулю, а базисные, соответствующие строкам – свободным членам, т.е. элементам нулевого столбца s_{i0}, $i=1,...,m$), подставляется в исходные уравнения задачи ЛП. Кроме того, после каждого преобразования симплексной таблицы значение ЦФ не должно возрастать, а базисные переменные должны оставаться неотрицательными.

Задачи, в которых в некоторых соотношениях (1.3) стоит знак равенства или нестрогого неравенства, либо требуется отыскание не минимума, а максимума ЦФ (1.2), легко допускают запись в приведенном виде. При этом соотношение

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + a_{jn}x_n = b_j$$

эквивалентно совокупности неравенств

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \le b_j,$$

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \ge b_j;$$

соотношение

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n \ge b_j$$

– неравенству

$$-a_{j1}x_1 - a_{j2}x_2 - ... - a_{jn}x_n \le -b_j,$$

а

$$\max F(x) = -\min_x \{-F(x)\}.$$

Пример выполнения работы

Решим следующую задачу ЛП:

$$F = x_2 - x_1 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Введением фиктивных переменных x_4, x_5 приведем исходную задачу к каноническому виду:

$$F = -x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 5 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0.$$

Пусть

x_3, x_4, x_5 – базисные переменные,

x_1, x_2 – свободные переменные.

Тогда имеем

$$F = -(x_1 - x_2) \to \min,$$

$$\begin{cases} x_3 = 2 - (x_1 - 2x_2) \\ x_4 = -2 - (-2x_1 + x_2) \\ x_5 = 5 - (x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

Исходная симплекс-таблица записывается в виде

	s_{i0}	x_1	x_2
x_3	2	1	–2
x_4	–2	–2	1
x_5	5	1	1
F	0	1	–1

В столбце свободных членов есть отрицательный (–2), указывающий на недопустимое решение:

$$x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = \mathbf{-2},\ x_5 = 5.$$

В строке x_4 ищем первый отрицательный элемент (**–2** в столбце x_1). Разрешающий столбец найден: x_1.

Найдем теперь минимальное положительное отношение элемента свободных членов s_{i0} к соответствующем элементу в разрешающем столбце. Так как

$$\frac{-2}{-2} < \frac{2}{1} < \frac{5}{1},$$

то x_4 – разрешающая строка.

Заменим базис, поменяв местами переменные x_4 и x_1 и используя один шаг жордановых исключений (1.11). Получим преобразованную симплекс-таблицу:

	s_{i0}	x_4	x_2
x_3	1	1/2	–3/2
x_1	1	–1/2	–1/2
x_5	4	1/2	3/2
F	–1	1/2	–1/2

Так как все элементы столбца s_{i0}, кроме коэффициента целевой функции, неотрицательны, имеем опорное решение:

$$x_4 = x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_1 = 1,\ x_5 = 4.$$

Целевая функция

$$F = -1.$$

Анализируем последнюю строку симплекс-таблицы и ищем первый положительный элемент: **1/2** в столбце x_4 (разрешающий столбец).

Найдем минимальное положительное отношение элемента свободных членов s_{i0} к соответствующем элементу в разрешающем столбце:

$$\frac{1}{1/2} < \frac{4}{1/2}.$$

Следовательно, x_3 – разрешающая строка.

Заменим базисную переменную x_3 на свободную x_4. Получим преобразованную симплекс-таблицу:

	s_{i0}	x_3	x_2
x_4	2	2	–3
x_1	2	1	–2
x_5	3	–1	3
F	–2	–1	1

Новое решение имеет вид:

$$x_3 = x_2 = 0,\ x_4 = 2,\ x_1 = 1,\ x_5 = 3.$$

Целевая функция

$$F = -2.$$

Снова анализируем строку F симплекс-таблицы и ищем первый положительный элемент (кроме столбца свободных членов): 1 в столбце x_2 (разрешающий столбец).

Найдем минимальное положительное отношение элемента свободных членов s_{i0} к соответствующем элементу в разрешающем столбце (оно единственно):

$$\frac{3}{3} = 1.$$

Следовательно, x_5 – разрешающая строка.

Заменив базис (поменяв местами переменные x_5 и x_2), придем к симплекс-таблице:

	s_{i0}	x_3	x_5
x_4	5	1	1
x_1	4	1/3	2/3
x_2	1	–1/3	1/3
F	–3	–2/3	–1/3

Так как в последней строке больше нет положительных коэффициентов кроме свободного члена, имеем оптимальное решение

$$x_3 = x_5 = 0,\ x_4 = 5,\ x_1 = 4,\ x_2 = 1.$$

Целевая функция

$$F = -3.$$

Варианты работы

1.	c: [5 6 4] A: [[1. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [7 8 6]	2.	c: [2 5 3] A: [[2. 1. 2.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [6 6 2]	3.	c: [2 8 3] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 6 2]
4.	c: [3 1 4] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [6 4 1]	5.	c: [3 3 7] A: [[1. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 5 7]	6.	c: [2 6 7] A: [[3. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 8 1]
7.	c: [6 6 6] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 3 8]	8.	c: [1 5 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [6 5 5]	9.	c: [5 6 1] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [5 3 8]
10.	c: [7 5 3] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 2]	11.	c: [7 3 4] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 1]	12.	c: [7 4 4] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 3 5]
13.	c: [8 6 2] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 6]	14.	c: [1 3 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 2 4]	15.	c: [6 8 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 4 5]

16.	c: [5 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 3]	17.	c: [7 4 3] A: [[3. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 2 6]	18.	c: [7 7 6] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [8 2 6]
19.	c: [7 8 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 6 2]	20.	c: [7 8 3] A: [[3. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [4 7 8]	21.	c: [4 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [8 4 3]
22.	c: [1 5 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 7 6]	23.	c: [6 1 1] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [6 2 1]	24.	c: [5 3 6] A: [[1. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 3 3]
25.	c: [2 2 1] A: [[4. 2. 1.] [2. 5. 1.] [2. 2. 1.]] b: [2 3 2]	26.	c: [5 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 3]	27.	c: [6 8 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 4 5]
28.	c: [1 3 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 2 4]	29.	c: [8 6 2] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 6]	30.	c: [7 4 4] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 3 5]

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; запись задачи ЛП в канонической форме; исходную симплекс-таблицу; промежуточные симплекс-таблицы; опорное решение; оптимальное решение; проверку решения на допустимость.

Контрольные вопросы

1. Формулировка прямой задачи ЛП. Виды ограничений.
2. Каноническая форма задачи ЛП.
3. Основные этапы симплекс-метода.

2 Лабораторная работа № 2

Двойственность в линейном программировании

Цель работы: научиться по прямой задаче (ПЗ) ЛП формулировать и решать соответствующую двойственную задачу (ДЗ).

Постановка задачи и методические указания

Формулировка двойственной задачи. Пусть исходная ПЗ ЛП имеет вид

$$\begin{gathered} F = \mathrm{cx} \rightarrow \min, \\ \mathrm{Ax} \le \mathrm{b}, \\ \mathrm{x} \ge 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $\mathrm{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^{\mathrm{T}}$ –вектор решения;

$\mathrm{c} = [c_1, c_2, ..., c_n]$ – вектор коэффициентов ЦФ *F*;

$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ – матрица системы ограничений;

$\mathrm{b} = [b_1, b_2, ..., b_m]^{\mathrm{T}}$ – вектор правой части системы ограничений.

В развернутой форме задача (2.1) имеет вид (2.2) – (2.4)

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \rightarrow \min, \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{2.3}$$

$$(x_i \ge 0,\ i = 1, ..., n). \tag{2.4}$$

Двойственная задача ЛП формулируется согласно следующим правилам:

- количество неизвестных (y_i) ДЗ равно количеству ограничений ПЗ;
- количество ограничений ДЗ равно количеству неизвестных (x_j) ПЗ;
- минимизация ЦФ *F* ПЗ соответствует максимизации ЦФ *Ф* ДЗ и наоборот;
- коэффициенты при ЦФ *F* ДЗ равны свободным членам ограничений ПЗ;
- свободные члены ограничений ДЗ равны коэффициентам при ЦФ *F* ПЗ;

- коэффициенты любого ограничения ДЗ равны коэффициентам при одной переменной из всех ограничений ПЗ;

- ограничения вида (≤) ПЗ переходят в ограничения вида (≥) ДЗ;

- все неизвестные (y_i) ДЗ неотрицательны.

Таким образом, вместо (2.1) имеем

$$\begin{gathered} \Phi = \mathrm{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} \rightarrow \max, \\ \mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{y} \geq \mathrm{c}^{\mathrm{T}}, \\ \mathrm{y} \geq 0, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где $\mathrm{y} = [y_1, y_2, ..., y_m]^{\mathrm{T}}$ – искомое решение.

В развернутом виде:

$$\Phi = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j \rightarrow \max, \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \quad ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases} \tag{2.7}$$

$$(\, y_j \geq 0\,, \;\; j = 1, ..., m\,). \tag{2.8}$$

<u>Принцип двойственности.</u> Двойственность в ЛП заключается в следующих правилах:

- *если прямая (двойственная) задача ЛП имеет оптимальное решение, то двойственная (либо, соответственно) прямая задача ЛП имеет то же оптимальное решение;*

- *если прямая (двойственная) задача ЛП не имеет оптимального решения, то двойственная (либо, соответственно) прямая задача ЛП также не имеет оптимального решения.*

Пример выполнения работы

Пусть исходная ПЗ ЛП имеет вид

$$F = -4x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -3 \\ -2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 \leq -3 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Здесь, соответственно,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -4 & -1\\ -2 & -4 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-3\\ -3\end{pmatrix},$$
$$C=\begin{pmatrix}-4 & -18 & -30 & -5\end{pmatrix},$$
$$X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Находим решение ПЗ симплекс-методом:

$$x_1=x_4=0,\quad x_2=\frac{9}{17},\quad x_3=\frac{15}{17};$$
$$\max F=\max(-4x_1-18x_2-30x_3-5x_4)=-36.$$

Согласно указанным правилам формулируем ДЗ ЛП как

$$\Phi=-3y_1-3y_2\to\min,$$
$$\begin{cases}3y_1-2y_2\ge -4\\ y_1-4y_2\ge -18\\ -4y_1-y_2\ge -30\\ -y_1+y_2\ge -5\end{cases}$$
$$y_1,y_2\ge 0.$$

Каноническая форма ДЗ имеет вид

$$\Phi=-3y_1-3y_2\to\min,$$
$$\begin{cases}3y_1-2y_2\ge -4\\ y_1-4y_2\ge -18\\ -4y_1-y_2\ge -30\\ -y_1+y_2\ge -5\end{cases}$$
$$y_1,y_2\ge 0.$$

Решение ДЗ также находим симплекс методом:

$$y_1=y_2=6;$$
$$\min\Phi=\min(-3y_1-3y_2)=-36.$$

Таким образом, решения прямой и двойственной задач совпадают.

Варианты работы

1.	c: [5 6 4] A: [[1. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [7 8 6]	2.	c: [2 5 3] A: [[2. 1. 2.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [6 6 2]	3.	c: [2 8 3] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 6 2]

4.	c: [3 1 4] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [6 4 1]	5.	c: [3 3 7] A: [[1. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 5 7]	6.	c: [2 6 7] A: [[3. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 8 1]
7.	c: [6 6 6] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 3 8]	8.	c: [1 5 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [6 5 5]	9.	c: [5 6 1] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [5 3 8]
10.	c: [7 5 3] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 2]	11.	c: [7 3 4] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 1]	12.	c: [7 4 4] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 3 5]
13.	c: [8 6 2] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 6]	14.	c: [1 3 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 2 4]	15.	c: [6 8 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 4 5]
16.	c: [5 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 3]	17.	c: [7 4 3] A: [[3. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 2 6]	18.	c: [7 7 6] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [8 2 6]
19.	c: [7 8 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 6 2]	20.	c: [7 8 3] A: [[3. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [4 7 8]	21.	c: [4 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [8 4 3]
22.	c: [1 5 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 7 6]	23.	c: [6 1 1] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [6 2 1]	24.	c: [5 3 6] A: [[1. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 3 3]

25.	c: [2 2 1] A: [[4. 2. 1.] [2. 5. 1.] [2. 2. 1.]] b: [2 3 2]	26.	c: [5 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 3]	27.	c: [6 8 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 4 5]
28.	c: [1 3 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 2 4]	29.	c: [8 6 2] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 6]	30.	c: [7 4 4] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 3 5]

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение исходной ПЗ ЛП симплекс-методом; запись ДЗ ЛП; запись ДЗ в канонической форме; исходную симплекс-таблицу; оптимальное решение; сравнение решений ПЗ и ДЗ.

Контрольные вопросы

1. Постановка двойственной задачи ЛП.
2. Формулировка принципа двойственности в ЛП.

3 Лабораторная работа № 3

Целочисленное линейное программирование. Метод ветвей и границ

Цель работы

Изучить постановку задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП); получить решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ (МВГ).

Постановка задачи и методические указания

Исходная постановка задачи. Требуется выбрать среди всех *n*-мерных векторов $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, ($x_i \in Z_+^0, \quad x_i \geq 0$ для $i=1,...,n$), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

такой, для которого достигается минимум ЦФ

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + ... + c_nx_n. \tag{3.2}$$

Универсальным методом решения задач ЦЛП является метод полного перебора всех вариантов. Поскольку, при больших значениях *m* и *n*, такой подход экономически неэффективен, на практике используются методы улучшенного перебора:

- метод отсекающих плоскостей (сечений) Гомори;
- метод ветвей и границ;
- стохастические алгоритмы и методы искусственного интеллекта.

Метод ветвей и границ. Основные положения МВГ следующие. Сначала решается задача ЛП, связанная с данной задачей ЦЛП. При этом возможны следующие варианты:

- если решение задачи ЛП не имеет решения, то и решение задачи ЦЛП не имеет решения;
- если решение задачи ЛП имеет целочисленное решение X^*, то оно будет и решением задачи ЦЛП.
- если решение задачи ЛП X^* дробное, то оно объявляется *узлом ожидания*, а X^* – *переменной ветвления*.

Узел ожидания определяет два направления ветвления:

$$X \le \lfloor X^* \rfloor \text{ и } X \ge \lfloor X^* \rfloor + 1,$$

соответствующие двум новым задачам ЦЛП, решение которых осуществляется аналогично.

Таким образом, строится двоичное дерево решений. В конце процесса сравниваются между собой все найденные целочисленные решения, соответствующие терминальным вершинам дерева, и выявляется оптимальное решение исходной задачи ЦЛП (3.1), (3.2).

Пример выполнения работы

Рассмотрим задачу ЦЛП

$$F = 12x_1 - x_2 \to \max,$$
$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \le 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \le 20 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \in Z_+^0.$$

Оптимальное решение задачи ЛП имеет вид:

$$X^* = (2{,}5,\ 3),$$
$$F(X^*) = 12x_1^* - x_2^* = 27.$$

Всего имеется 13 допустимых целочисленных решений:

$$\begin{array}{lll} (0,4) & & \\ (0,3) & (1,3) & (2,3) \\ (0,2) & (1,2) & (2,2) \\ (0,1) & (1,1) & (2,1) \\ (0,0) & (1,0) & (2,0) \end{array}$$

Полный перебор всех вариантов дает решение как крайнюю в направлении вектора (12, –1) точку:

$$X^{**} = (2,\ 0),$$
$$F(X^{**}) = 24.$$

Решим исходную задачу ЛП. Сменим знак ЦФ, введем фиктивные переменные x_3, x_4:

$$F = -12x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} x_3 = 12 - (6x_1 - x_2) \\ x_4 = 20 - (2x_1 + 5x_2) \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in Z_+^0.$$

Пусть x_3, x_4 – базисные переменные, а x_1, x_2 – свободные переменные.

Исходная симплекс-таблица имеет вид

$$\begin{bmatrix} & & x_1 & x_2 \\ x_3 & 12 & 6 & -1 \\ x_4 & 20 & 2 & 5 \\ F & 0 & -12 & 1 \end{bmatrix}$$

Конечная симплекс-таблица

$$\begin{bmatrix} & & x_3 & x_4 \\ x_1 & 2\frac{1}{2} & \frac{15}{96} & \frac{1}{32} \\ x_2 & 3 & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ F & 27 & 1\frac{15}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

Решение задачи ЛП симплекс-методом:

$$x_1 = 2{,}5, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = x_4 = 0,$$
$$F = 27.$$

Осуществим ветвление по переменной x_1:

$x_1 \le 2$;

$x_1 \ge 3$.

1. Введем новое ограничение, $x_1 \le 2$, и получим задачу ЦЛП:

$$F = -12x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 20 \\ x_1 + x_5 = 2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in Z_+^0.$$

Соответствующая симплекс-таблица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} & & x_3 & x_4 \\ x_1 & 2\frac{1}{2} & \frac{15}{96} & \frac{1}{32} \\ x_2 & 3 & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ x_5 & -\frac{1}{2} & -\frac{15}{96} & -\frac{1}{32} \\ F & 27 & 1\frac{15}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}.$$

После применения симплекс-метода конечная симплекс-таблица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} & & x_3 & x_5 \\ x_1 & 2 & \dots & \dots \\ x_2 & 0 & \dots & \dots \\ x_4 & 16 & \dots & \dots \\ F & 24 & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Получили целочисленное решение:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0,$$
$$F(x_1, x_2) = 24.$$

2) Введем новое ограничение $x_1 \geq 3$ и получим задачу ЦЛП:

$$F = -12x_1 + x_2 \to \min,$$
$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 20 \\ x_1 - x_5 = 3 \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in Z_+^0.$$

Исходная симплекс-таблица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} & & x_3 & x_4 \\ x_1 & 2\frac{1}{2} & \frac{15}{96} & \frac{1}{32} \\ x_2 & 3 & -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \\ x_5 & -\frac{1}{2} & \frac{15}{96} & \frac{1}{32} \\ F & 27 & 1\frac{15}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}.$$

Поскольку в строке x_5 свободный член отрицателен, а остальные элементы положительные, то решения не существует.

Оптимальное решение

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 0,$$
$$F(x_1, x_2) = 24.$$

нельзя получить округлением компонент исходного решения задачи ЛП до ближайших целых, т.к.

$\lceil x_1^* \rceil = 3 \Rightarrow \tilde{X}^* = (3,3)$ – недопустимое решение;

$\lfloor x_1^* \rfloor = 2 \Rightarrow \tilde{X}^* = (2,3)$ – неоптимальное решение ($F(\tilde{X}^*) = 21$).

Варианты работы

1.	c: [5 6 4] A: [[1. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [7 8 6]	2.	c: [2 5 3] A: [[2. 1. 2.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [6 6 2]	3.	c: [2 8 3] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 6 2]
4.	c: [3 1 4] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [6 4 1]	5.	c: [3 3 7] A: [[1. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 5 7]	6.	c: [2 6 7] A: [[3. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 8 1]
7.	c: [6 6 6] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 3 8]	8.	c: [1 5 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [6 5 5]	9.	c: [5 6 1] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [5 3 8]
10.	c: [7 5 3] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 2]	11.	c: [7 3 4] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 1]	12.	c: [7 4 4] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 3 5]
13.	c: [8 6 2] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 6]	14.	c: [1 3 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 2 4]	15.	c: [6 8 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 4 5]
16.	c: [5 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 3]	17.	c: [7 4 3] A: [[3. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 2 6]	18.	c: [7 7 6] A: [[2. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [8 2 6]
19.	c: [7 8 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 6 2]	20.	c: [7 8 3] A: [[3. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [4 7 8]	21.	c: [4 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [8 4 3]

22.	c: [1 5 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 4.]] b: [5 7 6]	23.	c: [6 1 1] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [6 2 1]	24.	c: [5 3 6] A: [[1. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 3 3]
25.	c: [2 2 1] A: [[4. 2. 1.] [2. 5. 1.] [2. 2. 1.]] b: [2 3 2]	26.	c: [5 3 8] A: [[2. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [3 6 3]	27.	c: [6 8 5] A: [[4. 1. 1.] [1. 3. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 4 5]
28.	c: [1 3 8] A: [[1. 1. 1.] [1. 1. 0.] [0. 0.5 2.]] b: [7 2 4]	29.	c: [8 6 2] A: [[2. 1. 1.] [1. 4. 0.] [0. 0.5 1.]] b: [4 3 6]	30.	c: [7 4 4] A: [[4. 1. 1.] [1. 2. 0.] [0. 0.5 3.]] b: [3 3 5]

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение задачи ЦЛП методом полного перебора; решение исходной задачи ЛП симплекс-методом; канонические формы и исходные симплекс-таблицы для каждого шага ветвления; найденное целочисленное решение; сравнение полученного решения с решением задачи ЛП, округленным по каждой нецелочисленной переменной в большую или меньшую стороны.

Контрольные вопросы

1. Постановка задач ЦЛП.
2. Интерпретации задач ЦЛП.
3. Методы решения задач ЦЛП.
4. Основная схема метода ветвей и границ.

4 Лабораторная работа № 4

Булево программирование. Метод Балаша

Цель работы

Изучить постановку задач булева программирования (БП); научиться применять метод Балаша для поиска оптимального решения.

Постановка задачи и методические указания

Постановка задачи. Найти среди n-мерных булевых векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, ($x_i \in \{0,1\}$ для $i = 1,...,n$), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases} \tag{4.1}$$

такой, для которого достигается минимум ЦФ

$$\min F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n . \tag{4.2}$$

Задача БП (4.1) – (4.2) может быть сформулирована, как «задача о рюкзаке», а также как *задача о покрытии*.

Возможная интерпретация задачи БП в области информационной безопасности (ИБ) следующая. Пусть $M = \{1,...,m\}$ – множество угроз ИБ; $N = \{1,...,n\}$ – множество контрмер; $(c_1,...,c_n)$ – стоимость реализации контрмер. Требуется минимизировать суммарную стоимость выбранных контрмер (4.2) при соблюдении условий покрытия угроз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge 1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge 1 \\ \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge 1 \end{cases}$$

где a_{ij} – *коэффициенты покрытия*, такие что

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \text{ - я контрмера покрывает } i \text{ - ю угрозу,} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Распространенные методы решения задачи БП следующие:

- полный перебор;
- «жадные» алгоритмы;
- улучшенный перебор (метод Фора–Мальгранжа, метод Балаша);
- эвристические методы (генетические алгоритмы, нейронные сети и др.).

Метод Балаша. Будем считать, что коэффициенты ЦФ неотрицательные:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$
$$c_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n.$$

Область ограничений:

$$\Omega: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad (i = 1,\dots,m),$$
$$x_j \in \{0,1\} \quad (j = 1,2,\dots,n).$$

Введем перестановку индексов, так, что

$$c_n \ge c_{n-1} \ge \dots \ge c_2 \ge c_1 \ge 0$$

Решение – это множество

$$\{x_j: \quad x_j = 1, \quad j = J_1, \quad x_j = 0, \quad j = J_0 = J \setminus J_1\},$$

где $J = \{1,\dots,n\}$.

Допустимое решение – это решение, удовлетворяющее ограничениям Ω.

Допустимое решение *X доминирует* допустимое решение *Y*, если

$$F(X) < F(Y).$$

Для недопустимого решения полагается

$$F(X) = +\infty$$

или

$$F(X) = M >> 1.$$

Рекорд – лучшее найденное допустимое решение.

Количество всех возможных решений задачи БП:

$$N = 2^n.$$

Разобьем множество всех решений на $(n+1)$ подмножество решений с номерами

$$k = 0,\dots,n.$$

Каждое k-е подмножество содержит все решения, в которых k переменных равны 1, а остальные $(n-k)$ переменных равны 0.

Количество решений уровня k:

$$N^{(k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Удобно все решения представлять в виде дерева, каждый уровень которого соответствует *k*-му подмножеству (рис. 1).

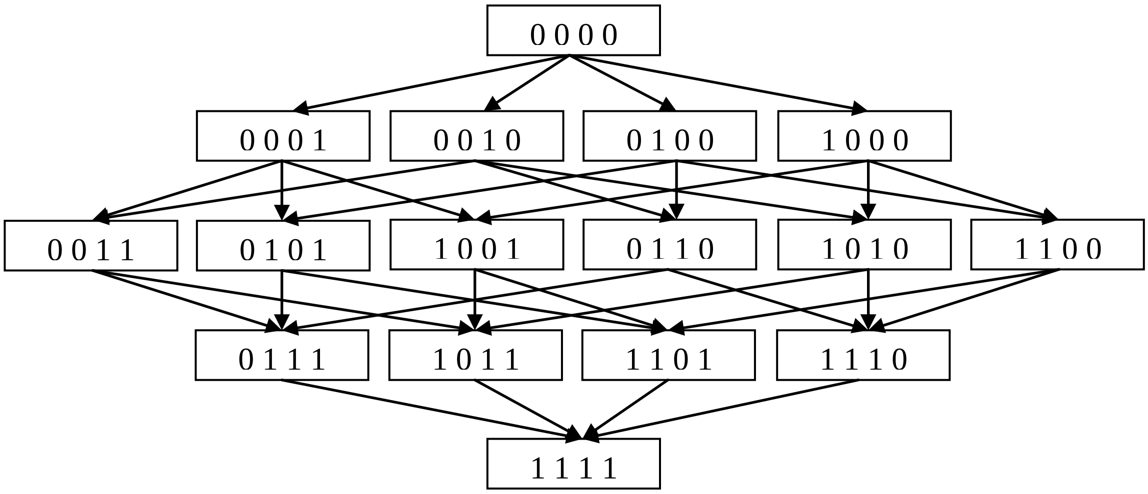

Рис. 1. Дерево решений (при n = 4)

Если на дереве существует *путь* из вершины *U* в вершину *V*, то говорят ,что *U* *предшествует* *V* (или *V следует за U*).

Схема алгоритма. Работы начинается с вершины 0. Затем осуществляется перебор вершин (спуск по дереву) на основе следующих правил (I) – (IV).

Правило I. Так как $c_n \ge c_{n-1} \ge ... \ge c_2 \ge c_1 \ge 0$, то ЦФ растет при переходе к следующим решениям. Следовательно, если некоторое решение *допустимое*, то следующие за ним ветви дерева отбрасываются.

Правило II. Пусть F^* – текущий рекорд. F_U – значение ЦФ в вершине U , где

$$x_j = \begin{cases} 1, & j \in J_1 \\ 0, & j \in J_0 \end{cases}$$

Если $\exists\, r \in J_0 : \ F_U + c_r > F^*$, то проверять нужно только следующие за *U* вершины *V*, в которых

$$x_j = 0 \quad \forall\, j \in J_0 \quad и \quad j \ge r$$
$$(в\ силу\ c_n \ge ... \ge c_1 \ge 0).$$

Правило III. Пусть в вершине *U*

$$x_j = \begin{cases} 1, & j \in J_1 \\ 0, & j \in J_0 \end{cases}$$

Значит, все следующие за U вершины должны иметь *фиксированные* переменные $x_j = 1, \quad j \in J_1$; остальные переменные – *свободные*.

Вершины V могут быть исключены из-за недопустимости решения. Например, если

Например,

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \le -1,$$
$$J_1 = \{1, 2\}.$$

Очевидно, что все вершины за (0011) могут быть исключены.

Правило VI. Если для вершины U

$$\exists\, i: \quad \sum_{j \in J_1} a_{i,j} + \sum_{j \in J} \min\{a_{i,j}, 0\} > b_i ,$$

то вершину исключаем.

<u>Видоизмененная постановка задачи БП.</u> Если задана задача максимизации:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \quad c_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

то с помощью замены переменных, $x'_j = 1 - x_j$, ее можно преобразовать к задаче на минимум ЦФ:

$$-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min .$$

Итоговая задача БП примет вид:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x'_j \to \min \\ \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}\, x'_j \le b'_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{cases}$$

где

$$a'_{ij} = -a_{ij},$$
$$b'_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Пример выполнения работы

Рассмотрим реализации различных стратегий решения на примере следующей задачи БП с одним ограничением:

$$\sum_{i=1}^{5} c_i x_i = 80x_1 + 250x_2 + 70x_3 + 100x_4 + 150x_5 \to \max$$

$$\sum_{i=1}^{5} a_i x_i = 800x_1 + 1100x_2 + 400x_3 + 500x_4 + 600x_5 \le 2500,$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \ldots, 5.$$

Согласно «жадному» алгоритму, будем последовательно включать в план переменные в порядке убывания значений коэффициентов c_i до тех пор, пока удовлетворяется ограничение. В итоге получим «жадное» решение:

$$x_1 = x_3 = 0, \quad x_2 = x_4 = x_5 = 1;$$
$$F = 500.$$

В данном случае, это же решение будет и оптимальным, в чем нетрудно убедиться с помощью полного перебора вариантов.

Если же попытаться реализовать жадный алгоритм исходя из максимально возможного количества переменных, равных 1 (включенных в план), то решение окажется хуже:

$$x_2 = 0, \quad x_1 = x_3 = x_4 = x_5 = 1;$$
$$F = 400.$$

Приведем теперь схему Балаша (без предварительной сортировки коэффициентов) для решения указанной задачи, видоизменив ее исходя из условия максимизации ЦФ. Сначала возьмем «корневую» вершину уровня 0: (11111). Легко убедиться, что такое решение недопустимо.

Из вершин уровня 1 допустимым будет только решение (10111) с ЦФ $F = 400$ (текущий рекорд). Следующие за ней вершины вида (*0***) можно отбросить.

Значения ЦФ для рассматриваемых вершин уровня 2 приведены в таблице.

Решение	**Значение ЦФ**
(11100)	400
(11010)*	430*
(10110)	250
(01110)	420
(11001)*	480*
(10101)	300
(01101)	470
(10011)	330
(01011)*	**500***

Символом (*) обозначены последовательные рекорды. Поскольку все решения второго уровня допустимы, следующие за ними ветви дерева решений можно не рассматривать.

Варианты работы
(нечетные варианты – задача максимизации / четные варианты – задача минимизации)

№ пп.	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	b
1	8	3	2	4	4	9	6	8	5	6	6	-5	8	-5	2	-7	-1
2	10	2	6	9	9	4	7	3	3	-3	1	10	3	-5	5	1	-8
3	8	8	1	9	4	5	2	10	10	4	-1	2	4	10	-9	-2	-5
4	1	2	10	4	4	3	2	1	-5	-2	1	8	7	-9	2	2	-15
5	3	2	9	3	6	5	9	3	10	9	-1	10	7	6	-7	-5	-5
6	10	6	1	4	8	6	6	3	-4	-3	9	5	10	-6	6	9	-12
7	10	2	6	9	9	4	7	3	3	-3	1	10	3	-5	5	1	-4
8	3	2	9	3	6	5	9	3	10	9	-1	10	7	6	-7	-5	-13
9	1	2	10	4	4	3	2	1	-5	-2	1	8	7	-9	2	2	-7
10	8	8	1	9	4	5	2	10	10	4	-1	2	4	10	-9	-2	-12
11	10	6	1	4	8	6	6	3	-4	-3	9	5	10	-6	6	9	-5
12	8	3	2	4	4	9	6	8	5	6	6	-5	8	-5	2	-7	-3
13	7	4	10	9	10	2	6	9	4	3	10	-3	-8	10	6	6	-5
14	6	9	5	8	5	8	6	8	-5	-1	9	-5	5	9	6	-6	-16
15	10	1	2	4	1	8	8	7	-9	8	3	9	10	-3	9	1	-5
16	6	9	5	8	5	8	6	8	-5	-1	9	-5	5	9	6	-6	-17
17	7	7	9	8	10	2	10	3	4	7	-2	-6	5	2	4	-3	-5
18	10	1	2	4	1	8	8	7	-4	5	8	3	4	-5	3	-1	-10
19	6	9	5	8	5	8	6	8	-5	-1	9	-5	5	9	6	-6	-5
20	7	7	9	8	10	2	10	3	4	7	-2	-6	5	2	4	-3	-10
21	2	1	6	6	4	9	3	9	3	-2	-1	-2	2	10	2	10	-4
22	10	1	2	4	1	8	8	7	-9	8	3	9	10	-3	9	1	-10
23	2	4	4	9	6	8	2	5	-5	-1	9	-5	5	9	6	-6	-5
24	7	4	10	9	10	2	6	9	4	3	10	-3	-8	10	6	6	-10
25	10	1	2	4	1	8	8	7	-4	5	8	3	4	-5	3	-1	-5
26	8	3	2	4	4	9	6	8	5	6	6	-5	8	-5	2	-7	-3
27	7	4	10	9	10	2	6	9	4	3	10	-3	-8	10	6	6	-5
28	6	9	5	8	5	8	6	8	-5	-1	9	-5	5	9	6	-6	-16
29	10	1	2	4	1	8	8	7	-9	8	3	9	10	-3	9	1	-5
30	6	9	5	8	5	8	6	8	-5	-1	9	-5	5	9	6	-6	-17

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение задачи БП методом Балаша с разъяснением правил выбора вариантов; сравнение полученного решения с решением по методу полного перебора и/или жадным алгоритмом.

Контрольные вопросы

1. Формулировка задачи БП.
2. Комбинаторная сложность задачи БП.
3. Идея «жадного» алгоритма.
4. Схема метода Балаша.

5 Лабораторная работа № 5

Матричные игры с нулевой суммой. Смешанные стратегии

Цель работы

Изучить постановку задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП); получить решение задачи ЦЛП методом ветвей и границ.

Постановка задачи и методические указания

Формулировка матричной игры. В общем случае игра двух игроков, *A* и *B*, с нулевой суммой записывается в виде *матрицы стратегий*:

Стратегии	b_1	b_2	...	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	...	...	...	...
a_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}

Здесь c_{ij} – выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока) при реализации ими своих стратегий $a_i \quad (i=1,\ldots,m), \quad b_j \quad (j=1,\ldots,n)$ соответственно.

Минимальный гарантированный выигрыш игрока *A* называется *нижней ценой игры*. Он равен $\max_i \min_j c_{ij}$. При плохой игре игрока *B* выигрыш может быть и большим. Минимально возможный проигрыш игрока *B* равен $\min_j \max_i c_{ij}$ и называется *верхней ценой игры*.

Теорема о минимаксе. *Пусть* (c_{ij}) *– произвольная матрица* $m \times n$*, тогда*

$$\max_{i\in A} \min_{j\in B} c_{ij} \le \min_{j\in B} \max_{i\in A} c_{ij} ,$$

где

$$A = 1,\ldots,m, \quad B = 1,\ldots,n .$$

Если нижняя и верхняя цены игры равны, их значение называется *ценой игры.*

Теорема о седловой точке. *Пусть* (c_{ij}) *– произвольная матрица* $m \times n$*, тогда*

$$\max_{i\in A}\min_{j\in B} c_{ij} = \min_{j\in B}\max_{i\in A} c_{ij},$$

где $A=\overline{1,m}$, $B=\overline{1,n}$, *тогда и только тогда, когда* (c_{ij}) *имеет седловую точку* (i_0, j_0), *для которой* $c_{i_0 j_0}$ *является одновременно минимальным элементом строки и максимальным элементом столбца, и* $\max_{i\in A}\min_{j\in B} c_{ij} = \min_{j\in B}\max_{i\in A} c_{ij} = c_{i_0 j_0}$ *– цена игры.*

Стратегии обоих противников в задачах с седловой точкой называются *оптимальными* и не зависят от дополнительно полученной информации.

Смешанные стратегии. Если игровая задача не имеет седловой точки, то на практике конкурирующие игроки используют *смешанные* стратегии, т.е. попеременно используют две или более стратегий.

По определению,

x^* – оптимальная частота выбора стратегии для игрока *A*,

y^* – оптимальная частота выбора стратегии для игрока *B*,

если

$$E(x, y^*) \le E(x^*, y^*) \le E(x^*, y),$$

где *E* обозначает математическое ожидание выигрыша.

Рассмотрим произвольную игру с матрицей стратегий

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Смешанная стратегия игрока *A* – это упорядоченная система *m* действительных неотрицательных чисел x_i ($i=1,\dots,m$), такая что

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

S_m – множество всех смешанных стратегий игрока *A*.

Аналогично определяется смешанная стратегия игрока *B*:
y_j ($j=1,\dots,n$):

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

S_n – множество всех смешанных стратегий игрока *B*.

Стратегия игрока *A*, когда

$$x_1 = x_2 = ... = x_{i-1} = x_{i+1} = x_{i+2} = ... = x_m = 0,$$

а

$$x_i = 1,$$

называется *i-й чистой стратегией*. Аналогично определяется *j*-я чистая стратегия игрока *B*.

Если смешанная стратегия игрока *A*

$$X = (x_1, ..., x_m),$$

а смешанная стратегия игрока *B*

$$Y = (y_1, ..., y_m),$$

то математическое ожидание выигрыша игрока *A* равно

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j .$$

Если существуют стратегии

$$X^* \in S_m, \ Y^* \in S_n$$

такие, что для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$ выполняется

$$E\left(X, Y^*\right) \le E\left(X^*, Y^*\right) \le E\left(X^*, Y\right),$$

то X^*, Y^* называются *оптимальными смешанными стратегиями* игроков *A*, *B*; $E\left(X^*, Y^*\right)$ – *цена игры* для игрока *A*; X^*, Y^* – решение игры или *стратегическая седловая точка*.

<u>Основная теорема прямоугольных игр (теорема Неймана или теорема о минимаксе).</u> *Пусть задана матрица стратегий (6.1) и выбраны стратегии* $X = (x_1, ..., x_m) \in S_m$, $Y = (y_1, ..., y_m) \in S_n$*; математическое ожидание выигрыша игрока A имеет вид*

$$E(X, Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j ;$$

тогда существуют и равны между собой

$$\max_{X \in S_m} \min_{Y \in S_n} E(X, Y) = \min_{Y \in S_n} \max_{X \in S_m} E(X, Y) = E(X^*, Y^*),$$

где (X^*, Y^*) *– стратегическая седловая точка.*

Сведение матричной игры к задаче ЛП. Рассмотрим прямоугольную игру с нулевой суммой и матрицей стратегий (6.1). Пусть

$$\min_{Y \in S_n} E(X,Y) = g(X),$$

тогда для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$ имеем

$$E(X,Y) \geq g(X).$$

В частности, для любой чистой стратегии Y_j и любых $X \in S_m$ имеем

$$\begin{cases} E(X,Y_j) = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \geq g(X), \quad j = 1,\dots,n, \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1. \end{cases}$$

Пусть $g(X) > 0$. Разделим почленно обе части неравенства на $g(X)$ и положим

$$u_i = \frac{x_i}{g(X)}, \quad i = 1,\dots,m.$$

Тогда имеем

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i \geq 1, \quad j = 1,\dots,n, \\ u_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,m, \quad \sum_{i=1}^{m} u_i = \dfrac{1}{g(X)} \end{cases}.$$

Задача игрока *A* заключается в том, чтобы

$$g(X) \to \max,$$

т.е.

$$\begin{cases} W(U) = \sum_{i=1}^{m} u_i \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i \geq 1, \quad j = 1,\dots,n, \\ u_i \geq 0, \quad i = 1,\dots,m. \end{cases} \tag{5.2}$$

Для игрока *B* поступаем аналогично. Пусть

$$\max_{X \in S_m} E(X,Y) = h(Y),$$

тогда для любых $X \in S_m$, $Y \in S_n$

$$E(X,Y) \leq h(Y).$$

В частности, для любой чистой стратегии X_i и любых $Y \in S_n$ имеем

$$\begin{cases} E(X_i, Y) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \le h(Y), \quad i = 1, \dots, m, \\ y_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1. \end{cases}$$

Пусть $h(Y) > 0$. Разделим почленно обе части неравенства на $h(Y)$ и положим

$$v_j = \frac{y_j}{h(Y)}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \ge 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ v_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \sum_{j=1}^{n} v_j = \frac{1}{h(Y)}. \end{cases}$$

Задача игрока *B*:

$$h(Y) \to \min,$$

т.е.

$$\begin{cases} Z(V) = \sum_{j=1}^{n} v_j \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j \le 1, \quad i = 1, \dots, m, \\ v_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{5.3}$$

Задачи (6.2) и (6.3) – прямая и двойственная задачи ЛП:

$$\min W(U) = W(U^*) = \max Z(V) = Z(V^*).$$

Оптимальные стратегии определяются как

$$X^* = (x_1^*, \dots, x_m^*), \quad Y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*),$$

где

$$x_i^* = \frac{u_i^*}{W(U^*)}, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y_j^* = \frac{v_j^*}{Z(V^*)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

так как

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{ij} u_i^*}{W(U^*)} \ge \frac{1}{W(U^*)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i^* = \frac{\sum_{j=1}^{n} c_{ij} v_j^*}{Z(V^*)} \le \frac{1}{Z(V^*)}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Цена игры

$$E(X^*, Y^*) = \frac{1}{W(U^*)} = \frac{1}{Z(V^*)}.$$

Верно и обратное: если X^*, Y^* – оптимальные стратегии A и B, то

$$u_i^* = \frac{x_i^*}{g(X^*)}, \quad v_j^* = \frac{y_j^*}{h(Y^*)} -$$

оптимальные решения прямой и двойственной задач ЛП (6.2) и (6.3).

Пример выполнения работы

Пусть матрица стратегий имеет вид

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	1	3	9	6
a_2	2	6	2	3
a_3	7	2	6	5

Найдем смешанные стратегии для игрока A. Для этого составим систему уравнений:

$$x_1 + 2x_2 + 7x_3 \ge g,$$

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \ge g,$$

$$9x_1 + 2x_2 + 6x_3 \ge g,$$

$$6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge g,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

где g – минимальный выигрыш.

Разделим систему на функцию g:

$$u_1 + 2u_2 + 7u_3 \ge 1,$$

$$3u_1 + 6u_2 + 2u_3 \ge 1,$$

$$9u_1 + 2u_2 + 6u_3 \ge 1,$$

$$6u_1 + 3u_2 + 5u_3 \ge 1,$$

$$u_1 + u_2 + u_3 = 1/g.$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$W = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \min;$$

$$u_1 + 2u_2 + 7u_3 \ge 1,$$

$$3u_1 + 6u_2 + 2u_3 \geq 1,$$

$$9u_1 + 2u_2 + 6u_3 \geq 1,$$

$$6u_1 + 3u_2 + 5u_3 \geq 1,$$

$$u_i \geq 0,\ i = 1,2,3.$$

Находим оптимальное решение:

$$u_1 = 1/57,\ u_2 = 7/57,\ u_3 = 2/19,$$

$$W = 14/57,$$

$$g = 1/W = 57/14.$$

Оптимальные стратегии:

$$x_1 = u_1\mathrm{g} = 1/57 \cdot 57/14 = 1/14,$$

$$x_2 = u_2\mathrm{g} = 7/57 \cdot 57/14 = 1/2,$$

$$x_3 = u_3\mathrm{g} = 2/19 \cdot 57/14 = 3/7.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока A равна

$$(1/14,\ 1/2,\ 3/7).$$

Для нахождения смешанной стратегии игрока B составим систему

$$y_1 + 3y_2 + 9y_3 + 6y_4 \leq h,$$

$$2y_1 + 6y_2 + 2y_3 + 3y_4 \leq h,$$

$$7y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 5y_4 \leq h,$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1.$$

где h – максимальный проигрыш игрока B.

Разделим систему на h:

$$v_1 + 3v_2 + 9v_3 + 6v_4 \leq 1,$$

$$2v_1 + 6v_2 + 2v_3 + 3v_4 \leq 1,$$

$$7v_1 + 2v_2 + 6v_3 + 5v_4 \leq 1,$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 1/h.$$

Сформулируем задачу для решения симплекс-методом:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rightarrow \max;$$

$$v_1 + 3v_2 + 9v_3 + 6v_4 \leq 1,$$

$$2v_1 + 6v_2 + 2v_3 + 3v_4 \leq 1,$$

$$7v_1 + 2v_2 + 6v_3 + 5v_4 \leq 1,$$

$$v_i \geq 0,\ i = 1,2,3,4.$$

Решение имеет вид

$$v_1 = 2/57,\ v_2 = 17/171,\ v_3 = 0,\ v_4 = 1/9,$$

$$Z = 14/57,$$

$$H = 1/Z = 57/14.$$

Частоты выбора стратегий:

$$y_1 = v_1 h = 2/57 \cdot 57/14 = 1/7,$$

$$y_2 = v_2 h = 17/171 \cdot 57/14 = 17/42,$$

$$y_3 = v_3 h = 0,$$

$$y_4 = v_4 h = 1/9 \cdot 57/14 = 19/42.$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия игрока *B* равна

$$(1/7,\ 17/42,\ 0,\ 19/42).$$

Варианты работы

В нижеприведенных вариантах строки соответствуют стратегиям игрока *A*, столбцы – стратегиям игрока *B*.

1
```
[[1 11 12 11] [7 5 7 7] [16 6 13 2] [9 9 16 13] [17 18 15 7]]
```
2
```
[[4 1 17 18] [4 14 6 16] [0 14 14 13] [6 13 4 15] [12 11 3 16]]
```
3
```
[[1 3 4 16] [11 3 7 18] [6 15 16 7] [15 10 0 7] [10 7 10 5]]
```
4
```
[[16 0 10 2] [3 6 3 3] [14 17 4 9] [4 0 16 11] [8 12 2 19]]
```
5
```
[[8 12 4 17] [1 6 19 19] [17 11 11 6] [8 10 15 17] [1 16 2 16]]
```
6
```
[[6 18 6 15] [17 8 13 14] [16 16 18 2] [18 8 4 18] [15 8 3 19]]
```
7
```
[[19 16 11 4] [6 18 1 5] [17 13 5 15] [9 13 3 19] [18 12 12 4]]
```
8
```
[[12 5 4 9] [16 0 12 0] [5 13 6 7] [10 10 3 16] [1 11 19 1]]
```
9
```
[[19 7 3 19] [6 9 18 10] [8 2 11 6] [2 0 9 19] [7 12 10 4]]
```
10
```
[[12 0 16 19] [6 5 19 12] [3 16 12 7] [17 0 18 2] [9 15 11 13]]
```
11
```
[[11 2 5 2] [11 11 3 10] [14 12 16 12] [16 10 19 17] [11 5 5 3]]
```
12
```
[[13 3 14 7] [15 5 0 9] [7 19 13 0] [0 5 19 13] [17 5 0 9]]
```
13
```
[[10 9 3 0] [11 7 0 15] [16 6 19 13] [15 17 15 10] [2 1 4 6]]
```
14
```
[[14 4 2 0] [5 6 5 6] [9 10 13 14] [1 18 11 1] [17 4 0 16]]
```
15
```
[[12 9 11 7] [15 4 18 12] [16 3 17 17] [1 15 0 19] [2 3 14 0]]
```
16
```
[[16 0 13 11] [17 3 19 15] [8 19 7 2] [15 8 15 16] [17 2 9 2]]
```
17
```
[[18 7 15 2] [0 13 16 3] [1 17 9 19] [3 15 17 9] [5 2 11 4]]
```
18
```
[[7 9 15 5] [15 8 6 4] [12 0 11 7] [7 11 10 12] [12 2 0 13]]
```

19
```
[[4 18 5 3] [1 10 5 15] [8 6 15 15] [15 10 8 12] [19 12 1 0]]
```
20
```
[[5 1 13 9] [18 10 9 1] [9 0 14 14] [17 0 10 19] [11 3 11 14]]
```
21
```
[[15 9 3 15] [19 5 1 8] [9 14 5 18] [4 9 9 0] [12 9 14 0]]
```
22
```
[[13 2 4 0] [7 6 10 14] [8 14 6 3] [3 18 18 0] [8 7 11 14]]
```
23
```
[[7 7 15 5] [19 18 3 12] [1 5 16 19] [19 2 19 14] [8 6 4 18]]
```
24
```
[[5 11 12 17] [15 5 16 9] [11 8 0 19] [8 0 16 0] [13 9 7 16]]
```
25
```
[[15 4 16 12] [12 10 13 1] [7 18 19 1] [2 4 3 19] [3 15 19 12]]
```
26
```
[[14 2 19 17] [6 18 7 8] [6 17 14 6] [15 19 15 5] [11 8 12 4]]
```
27
```
[[12 7 18 5] [19 0 7 12] [10 1 3 6] [12 2 8 7] [4 12 14 17]]
```
28
```
[[12 7 16 0] [12 16 11 12] [17 11 1 1] [9 19 0 8] [3 3 12 13]]
```
29
```
[[6 3 18 15] [2 9 19 1] [2 7 13 3] [13 3 7 10] [3 8 0 8]]
```
30
```
[[12 8 13 13] [13 14 16 6] [7 5 11 18] [13 5 5 12] [10 16 14 4]]
```

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение матричной игры в смешанных стратегиях симплекс-методом за обоих игроков (прямая и двойственная задачи ЛП).

Контрольные вопросы

1. Определение матричной игры с нулевой суммой.
2. Верхняя и нижняя цена игры. Теорема о минимаксе.
3. Цена игры. Теорема о седловой точке.
4. Основная теорема прямоугольных игр.
5. Смешанные стратегии.

6 Лабораторная работа № 6

«Игры с природой». Критерии принятия решений

Цель работы

Изучить постановку «игры с природой»; научиться применять различные критерии (Бернулли, Вальда, максимума, Гурвица, Сэвиджа) для выбора стратегии в условиях полной неопределенности.

Постановка задачи и методические указания

В «игре с природой» вторым игроком является природа, которая действует («выбирает» стратегии) случайным образом. То есть она может или улучшать положение первого игрока, или ухудшать. Поэтому существует несколько критериев оценки результатов исследования игровой модели.

<u>Критерий Бернулли (принцип недостаточного основания).</u> Все состояния природы предполагаются равновероятными. Ищется стратегия, реализующая максимум математического ожидания выигрыша.

<u>Критерий Вальда (пессимистический).</u> В соответствии с этим критерием следует применять самую осторожную стратегию, которая сведет к минимуму вероятность (риск) проигрыша и доставит минимальную прибыль. Эта стратегия обеспечивается критерием:

$$\max \min a_{ij}\,.$$

То есть этот критерий совпадает с нижней ценой игры.

<u>Критерий максимума (оптимистический).</u> Этот критерий полагает, что природа будет максимально благосклонна к игроку. Можно выбирать самые авантюристические стратегии и они будут реализовываться:

$$\max \max a_{ij}\,.$$

<u>Критерий Гурвица.</u> Данный критерий занимает промежуточное значение между критерием Вальда и критерием максимума. Сам игрок определяет вероятность своего «везения» с помощью числового параметра $\alpha \in [0,1]$:

$$\max(\alpha \min a_{ij} + (1-\alpha)\max a_{ij}.$$

Ответственное лицо, принимающее решение, определяет значение коэффициента α. Если потери могут быть весьма значительными, то значение коэффициента α приближается к единице.

Критерий Сэвиджа (критерий рисков). Этот критерий анализирует возможные *риски* от применения каждой из стратегий и выбирает такую стратегию, которая обеспечивает приемлемые потери. Риски по каждой стратегии определяются по формуле:

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}.$$

То есть из максимально возможного выигрыша вычитается выигрыш, полученный от использования выбранной стратегии. Смысл каждого элемента матрицы рисков состоит в том, что такие потери понесет фирма (точнее, недополученная прибыль), если для каждого текущего состояния природы будет выбрана неоптимальная стратегия. Оптимальная стратегия может быть определена по формуле:

$$\min(\max(\max a_{ij} - a_{ij})).$$

В качестве эмпирического интегрального критерия можно предложить использование различных рассмотренных выше критериев и выбор той стратегии, которая обеспечивает выигрыш в максимальном числе вариантов.

Пример выполнения работы

Рассмотрим игру с природой, описываемую матрицей стратегий:

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	5	8	7	5	4
a_2	1	10	5	5	6
a_3	2	4	3	6	2
a_4	3	5	4	12	3

Если воспользоваться критерием Бернулли, то следует руководствоваться стратегией a_1. Соответствующее математическое ожидание выигрыша при этом максимально и равно 5,8.

Пессимистическая стратегия (критерий Вальда) определяет выбор a_1 (нижняя цена игры равна 4).

Оптимистическая стратегия соответствует выбору a_4 (максимально возможный выигрыш 12).

Критерий Гурвица определим из условия равновероятной реализации пессимистической и оптимистической гипотез ($\alpha = 0,5$). Наилучшая стратегия: a_4 (ожидаемый выигрыш равен 7,5).

Составим теперь для рассматриваемой игры таблицу рисков следующим образом. Если игрок выберет стратегию a_1, а природа реализует стратегию b_1, то игрок получит максимально возможную прибыль 5 (недополученная прибыль составит 0). Игрок угадал состояние природы. Но если природа реализует стратегию b_4, то игрок вместо максимально возможной прибыли 12 получит прибыль 5, а недополученная прибыль составит 7, так как

$$\min_i \max_j \left(\max_i c_{ij} - c_{ij} \right) = \min \{7, 7, 6, 5\} = 5.$$

Таблица рисков имеет вид

Стратегии	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	0	2	0	7	2
a_2	4	0	2	7	0
a_3	3	6	4	6	4
a_4	2	5	3	0	3

Таким образом, оптимальная «рисковая» стратегия: a_4.

Окончательно, согласно принципу большинства, следует рекомендовать выбор стратегии a_4 – лучшей по трем из пяти рассмотренных критериев. Следующая по значимости стратегия: a_1 (лучшая по двум из пяти критериев).

Варианты работы

В нижеприведенных вариантах строки соответствуют стратегиям игрока, столбцы – состояниям природы. Найти стратегии игрока при реализации гипотез недостаточного основания (Бернулли), пессимизма (Вальда), оптимизма, смешанной (Гурвица) при α=0,5, рисков (Сэвиджа).

1
```
[[1 11 12 11] [7 5 7 7] [16 6 13 2] [9 9 16 13] [17 18 15 7]]
```
2
```
[[4 1 17 18] [4 14 6 16] [0 14 14 13] [6 13 4 15] [12 11 3 16]]
```
3
```
[[1 3 4 16] [11 3 7 18] [6 15 16 7] [15 10 0 7] [10 7 10 5]]
```
4
```
[[16 0 10 2] [3 6 3 3] [14 17 4 9] [4 0 16 11] [8 12 2 19]]
```
5
```
[[8 12 4 17] [1 6 19 19] [17 11 11 6] [8 10 15 17] [1 16 2 16]]
```

6
[[6 18 6 15] [17 8 13 14] [16 16 18 2] [18 8 4 18] [15 8 3 19]]
7
[[19 16 11 4] [6 18 1 5] [17 13 5 15] [9 13 3 19] [18 12 12 4]]
8
[[12 5 4 9] [16 0 12 0] [5 13 6 7] [10 10 3 16] [1 11 19 1]]
9
[[19 7 3 19] [6 9 18 10] [8 2 11 6] [2 0 9 19] [7 12 10 4]]
10
[[12 0 16 19] [6 5 19 12] [3 16 12 7] [17 0 18 2] [9 15 11 13]]
11
[[11 2 5 2] [11 11 3 10] [14 12 16 12] [16 10 19 17] [11 5 5 3]]
12
[[13 3 14 7] [15 5 0 9] [7 19 13 0] [0 5 19 13] [17 5 0 9]]
13
[[10 9 3 0] [11 7 0 15] [16 6 19 13] [15 17 15 10] [2 1 4 6]]
14
[[14 4 2 0] [5 6 5 6] [9 10 13 14] [1 18 11 1] [17 4 0 16]]
15
[[12 9 11 7] [15 4 18 12] [16 3 17 17] [1 15 0 19] [2 3 14 0]]
16
[[16 0 13 11] [17 3 19 15] [8 19 7 2] [15 8 15 16] [17 2 9 2]]
17
[[18 7 15 2] [0 13 16 3] [1 17 9 19] [3 15 17 9] [5 2 11 4]]
18
[[7 9 15 5] [15 8 6 4] [12 0 11 7] [7 11 10 12] [12 2 0 13]]
19
[[4 18 5 3] [1 10 5 15] [8 6 15 15] [15 10 8 12] [19 12 1 0]]
20
[[5 1 13 9] [18 10 9 1] [9 0 14 14] [17 0 10 19] [11 3 11 14]]
21
[[15 9 3 15] [19 5 1 8] [9 14 5 18] [4 9 9 0] [12 9 14 0]]
22
[[13 2 4 0] [7 6 10 14] [8 14 6 3] [3 18 18 0] [8 7 11 14]]
23
[[7 7 15 5] [19 18 3 12] [1 5 16 19] [19 2 19 14] [8 6 4 18]]
24
[[5 11 12 17] [15 5 16 9] [11 8 0 19] [8 0 16 0] [13 9 7 16]]
25
[[15 4 16 12] [12 10 13 1] [7 18 19 1] [2 4 3 19] [3 15 19 12]]
26
[[14 2 19 17] [6 18 7 8] [6 17 14 6] [15 19 15 5] [11 8 12 4]]
27
[[12 7 18 5] [19 0 7 12] [10 1 3 6] [12 2 8 7] [4 12 14 17]]
28
[[12 7 16 0] [12 16 11 12] [17 11 1 1] [9 19 0 8] [3 3 12 13]]
29
[[6 3 18 15] [2 9 19 1] [2 7 13 3] [13 3 7 10] [3 8 0 8]]
30
[[12 8 13 13] [13 14 16 6] [7 5 11 18] [13 5 5 12] [10 16 14 4]]

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; нахождение оптимальной стратегии в соответствии с критериями Вальда, максимума, Гурвица и Сэвиджа; выбор рекомендуемой стратегии по принципу простого большинства «побед».

Контрольные вопросы

1. Постановка «игры с природой».
2. Критерий недостаточного основания (Бернулли).
3. Критерии Вальда, максимума и Гурвица.
4. Критерий Сэвиджа. Риски.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. *Исследование операций: задачи, принципы, методология.* – М.: Высшая школа, 2001. – 208 с.
2. Черноруцкий И.Г. *Методы принятия решений.* – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
3. Басараб М.А. *Методы оптимизации и исследование операций. Учебное пособие [Электронный ресурс].* – М.: Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, 2012. (№ гос. регистрации - 0321203025).