Решение матричных игр с нулевой суммой аналитическим (матричным) и численным (Брауна–Робинсона) методами

Цель работы

Изучить аналитический (метод обратной матрицы) и численный (метод Брауна–Робинсона) подходы [1] к нахождению смешанных стратегий в антагонистической игре двух лиц в нормальной форме.

Сведения из теории

Аналитический метод. Пусть задана $(m \times n)$-игра Г двух игроков, А и В, с матрицей стратегий **C**.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in S_m$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n) \in S_n$ – смешанные стратегии игроков А и В соответственно. Тогда множества индексов $A_\mathbf{x} = \{i \mid i \in A, x_i > 0\}$, $B_\mathbf{y} = \{j \mid j \in B, y_j > 0\}$, где $A = \{1, 2, ..., m\}$, $B = \{1, 2, ..., n\}$, называются *спектрами стратегий* **x** и **y** соответственно. Таким образом, в спектр включаются только стратегии, реализуемые с ненулевыми вероятностями.

Чистая стратегия $i \in A$ $(j \in B)$ игрока А (В) называется *существенной*, если существует оптимальная стратегия $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*) \in S_m$ $(\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in S_n)$ этого игрока, для которой $x_i^* > 0$ $(y_j^* > 0)$.

Спектр A^* (B^*) любой оптимальной стратегии $\mathbf{x}^*$ $(\mathbf{y}^*)$ может состоять лишь из существенных стратегий.

Стратегия $\mathbf{x}$ $(\mathbf{y})$ игрока А (В) называется *вполне смешанной*, если ее спектр состоит из множества всех чистых стратегий игрока, т.е. $A_\mathbf{x} = A$ $(B_\mathbf{y} = B)$.

Ситуация равновесия в игре $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ называется *вполне смешанной*, если стратегии $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ – вполне смешанные.

Игра Г называется *вполне смешанной*, если каждая ситуация равновесия в ней является вполне смешанной.

Теорема 1. *Вполне смешанная игра* $(m \times n)$*-игра* Г *имеет единственную ситуацию равновесия* $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ *и квадратную матрицу* $(m = n)$*; если цена игры* $\upsilon \neq 0$*, то матрица* **C** *невырожденная и*

$$\mathbf{x}^* = \frac{\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}},\ \mathbf{y}^* = \frac{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}},\ \upsilon = \frac{1}{\mathbf{u}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}}, \tag{1}$$

где вектор $\mathbf{u} = (1,1,...,1) \in \mathbb{R}^m$.

Итерационный метод Брауна – Робинсона. В общем случае, для решения произвольной $(m \times n)$-игры Г можно применить приближенные методы, простейшим из которых является метод Брауна–Робинсона.

Пусть в первой партии оба игрока произвольно выбирают некоторые чистые стратегии. Тогда в партии с номером k каждый игрок должен выбирать чистую стратегию, максимизирующую его ожидаемый выигрыш относительно наблюдаемой эмпирической смешанной стратегии противника, рассчитанную за предыдущие (k–1) партий.

Пусть в течение первых k шагов первый игрок использовал каждую i-ю стратегию $\tilde{x}_i[k]$ раз, а второй использовал каждую j-ю стратегию $\tilde{y}_j[k]$ раз. Тогда в следующей, (k+1)-й партии игроки будут использовать свои стратегии с номерами $i[k]$ $j[k]$, исходя из оптимизации оценок верхней и нижней цен игры:

$$\overline{\upsilon}[k] = \max_{i \in A} \sum_{j \in B} c_{ij} \tilde{y}_j[k] = \sum_{j \in B} c_{i[k+1]j} \tilde{y}_j[k],$$

$$\underline{\upsilon}[k] = \min_{j \in B} \sum_{i \in A} c_{ij} \tilde{x}_i[k] = \sum_{i \in A} c_{ij[k+1]} \tilde{x}_i[k].$$

Усредним эти оценки по k шагам алгоритма:

$$\frac{1}{k}\overline{\upsilon}[k] = \frac{1}{k}\max_{i \in A} \sum_{j \in B} c_{ij} \tilde{y}_j[k] = \frac{1}{k}\sum_{j \in B} c_{i[k+1]j} \tilde{y}_j[k],$$

$$\frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k] = \frac{1}{k}\min_{j \in B} \sum_{i \in A} c_{ij} \tilde{x}_i[k] = \frac{1}{k}\sum_{i \in A} c_{ij[k+1]} \tilde{x}_i[k].$$

Тогда оценки смешанных стратегий игроков A и B определяются соответственно векторами

$$\tilde{\mathbf{x}}[k] = \left(\frac{\tilde{x}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{x}_2[k]}{k}, ..., \frac{\tilde{x}_m[k]}{k}\right), \qquad \tilde{\mathbf{y}}[k] = \left(\frac{\tilde{y}_1[k]}{k}, \frac{\tilde{y}_2[k]}{k}, ..., \frac{\tilde{y}_n[k]}{k}\right).$$

Для оценки цены игры имеем

$$\max_k \frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k] \le \upsilon \le \min_k \frac{1}{k}\overline{\upsilon}[k].$$

Величина

$$\varepsilon[k] = \min_k \frac{1}{k}\overline{\upsilon}[k] - \max_k \frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k] \tag{2}$$

Может выступать в качестве оценки погрешности итерационного алгоритма. Верна также

Теорема 2.

$$\lim_{k\to\infty}\min_k \frac{1}{k}\overline{\upsilon}[k] = \lim_{k\to\infty}\max_k \frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k] = \upsilon .$$

Пример.

Пусть (3×3)-игра Г задана матрицей

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Расчет по формулам (1) дает следующее аналитическое решение задачи:

$$\mathbf{x}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right),\ \mathbf{y}^* = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right),\ \upsilon = 1{,}5 .$$

Реализуем теперь алгоритм Брауна–Робинсона. Пусть на первом шаге игроки выбрали стратегии x_1, y_1. Учитывая, что игрок А выбрал x_1, игрок В мог получить один из выигрышей $(2, 1, 3)$. А если игрок В выбрал y_1, то возможные выигрыши игрока А были $(2, 3, 1)$. Следовательно, на втором этапе игрокам следует выбрать стратегии x_2 и y_2 соответственно.

Результаты расчетов для первых 12 шагов приведены в таблице 1.

Таким образом, за 12 шагов получены следующие приближенные смешанные стратегии:

$$\tilde{\mathbf{x}}[12] = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{7}{12}\right), \quad \tilde{\mathbf{y}}[12] = \left(\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}\right),$$

а погрешность согласно (2) равна

$$\varepsilon[12] = \frac{1}{3}.$$

Таблица 1. Первые шаги алгоритма Брауна–Робинсона

№пп	Выбор А	Выбор В	Выигрыш А			Проигрыш В			$\frac{1}{k}\overline{\upsilon}[k]$	$\frac{1}{k}\underline{\upsilon}[k]$
			x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3		
1	x_1	y_1	2	3	1	2	1	3	3	1
2	x_2	y_2	3	3	3	5	1	4	3/2	1/2
3	x_2	y_2	4	3	5	8	1	5	5/3	1/3

4	x_3	y_2	5	3	7	9	3	6	7/4	3/4
5	x_3	y_2	6	3	9	10	5	7	9/5	5/5
6	x_3	y_2	7	3	11	11	7	8	11/6	7/6
7	x_3	y_2	8	3	13	12	9	9	13/7	9/7
8	x_3	y_3	11	4	14	13	11	10	14/8	10/8
9	x_3	y_3	14	5	15	14	13	11	15/9	11/9
10	x_3	y_3	17	6	16	15	15	12	17/10	12/10
11	x_1	y_3	20	7	17	17	16	15	20/11	15/11
12	x_1	y_2	21	7	19	19	17	18	21/12	17/12

Варианты работы

В нижеприведенных вариантах (таблица 2) строки соответствуют стратегиям игрока A, столбцы – стратегиям игрока B. Необходимо выполнить N итераций численного метода.

Таблица 2. Матрицы стратегий игры (3×3)

№	Матрица стратегий	№	матрица стратегий	№	матрица стратегий	№	матрица стратегий
1	$\begin{pmatrix} 1 & 11 & 11 \\ 7 & 5 & 8 \\ 16 & 6 & 2 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 10 \\ 1 & 6 & 19 \\ 17 & 11 & 11 \end{pmatrix}$	9	$\begin{pmatrix} 19 & 7 & 3 \\ 6 & 9 & 9 \\ 8 & 2 & 11 \end{pmatrix}$	13	$\begin{pmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 1 & 18 & 11 \\ 17 & 4 & 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 17 & 18 \\ 14 & 6 & 16 \\ 14 & 14 & 13 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 6 & 18 & 6 \\ 17 & 8 & 18 \\ 16 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 16 & 19 \\ 5 & 19 & 12 \\ 16 & 12 & 7 \end{pmatrix}$	14	$\begin{pmatrix} 12 & 9 & 18 \\ 15 & 22 & 5 \\ 16 & 3 & 12 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 6 & 15 & 16 \\ 15 & 10 & 0 \\ 10 & 7 & 10 \end{pmatrix}$	7	$\begin{pmatrix} 6 & 18 & 5 \\ 17 & 13 & 15 \\ 9 & 13 & 19 \end{pmatrix}$	11	$\begin{pmatrix} 13 & 3 & 14 \\ 15 & 5 & 0 \\ 7 & 19 & 13 \end{pmatrix}$	15	$\begin{pmatrix} 18 & 13 & 15 \\ 0 & 13 & 16 \\ 1 & 17 & 9 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 17 & 4 & 9 \\ 0 & 16 & 9 \\ 12 & 2 & 19 \end{pmatrix}$	8	$\begin{pmatrix} 12 & 5 & 4 \\ 12 & 0 & 12 \\ 5 & 13 & 6 \end{pmatrix}$	12	$\begin{pmatrix} 11 & 10 & 15 \\ 16 & 5 & 13 \\ 15 & 20 & 10 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 10 \\ 8 & 14 & 6 \end{pmatrix}$

Требования к отчету

Отчет должен содержать: титульный лист; цель работы; постановку задачи; решение матричной игры аналитически; этапы решения матричной игры в смешанных стратегиях численным методом Брауна–Робинсона за обоих игроков (в виде таблицы и графиков) до уровня погрешности $\varepsilon \le 0,1$; оценить погрешность между аналитическим и приближенным решениями.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение смешанной стратегии.

2. Что такое существенная матричная игра?

3. В каком случае применим аналитический метод нахождения смешанных стратегий?

4. Какая основная идея итерационного метода нахождения смешанных стратегий?

Литература

1. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория игр: учебник. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. - 432 с.