

Pontificia Universidad Católica de Chile

ASTROFISICA EXTRAGALACTICA
FIA 2500

Leopoldo Infante Lira
Felipe Barrientos

2005

Índice general

1. Principios Básicos de Cosmología	1
1.1. Suposiciones Cosmológicas	1
1.2. Universo Newtoniano	2
1.3. Parámetro de desaceleración, $q(t)$	3
1.4. Parámetro de densidad, $\Omega(t)$	4
1.5. La Edad del Universo	4
1.6. Redshift Cosmológico	6
1.7. Universo de Einstein	6
1.7.1. Métrica	7
1.8. Soluciones para un Universo de Friedmann con $\Lambda = 0$	12
1.9. Distancia Propia Cosmológica	13
1.10. Distancia Luminosa Cosmológica, d_L	15
1.11. Distancia a partir del Diámetro Angular, d_A	17
1.12. Elemento de Volumen Cosmológico	19
1.13. Cosmología con Constante Cosmológica	20
1.14. Aplicaciones: <i>Lookback Time</i> con Λ	21
1.15. Aplicaciones: Distancias Cosmológicas con Λ	22
1.16. Bibliografía	23
1.17. Problemas y Ejercicios	23
2. Escala de Distancias	27
2.1. Estimadores absolutos de distancia	28
2.1.1. Paralaje trigonométrico	28
2.1.2. Movimiento de cúmulo	29
2.1.3. Baade-Wesselink	30
2.1.4. Retardo temporal	33
2.1.5. Efecto Sunyaev-Zel'dovic	34
2.2. Estimadores relativos de distancia	36
2.2.1. Estrellas variables	37
2.2.2. Cinemática de galaxias	39
2.2.3. Fluctuaciones de brillo superficial	41
2.3. Resultados	44
2.4. Problemas y Ejercicios	45
2.5. Referencias	46

3. Galaxias	47
3.1. Clasificación de galaxias	47
3.1.1. Sistema de Hubble	47
3.1.2. Sistema DDO (David-Dunlop Observatory)	47
3.1.3. Sistema de De Vaucoulers	48
3.1.4. Sistema de Galaxias Anémicas de van den Bergh	48
3.1.5. Sistema de Morgan	49
3.1.6. Referencias Importantes	53
3.2. Galaxias Elípticas	53
3.2.1. Propiedades	54
3.2.2. Plano Fundamental	55
3.2.3. Perfiles de Luz	58
3.3. Galaxias Espirales	60
3.3.1. Propiedades	60
3.3.2. Contenido de gas	63
3.3.3. Distribución espectral en Espirales.	64
3.3.4. Resumen	64
3.4. Galaxias Enanas, de Bajo Brillo Superficial e Irregulares	67
3.4.1. Propiedades de Galaxias Enanas	68
3.5. Características Globales de Galaxias	70
3.5.1. Función de Luminosidad	73
3.5.2. Parámetros globales de Galaxias	75
3.5.3. Frecuencia Específica	76
3.5.4. Relación densidad-morfología	76
3.6. Evolución de Galaxias	78
3.6.1. Evolución Morfológica	78
3.6.2. Evolución Dinámica	79
3.6.3. Evolución Luminosa o Pasiva	80
3.6.4. Evolución Química	88
3.6.5. Midiendo evolución: Cuentas de galaxias y distribuciones en corrimiento al rojo	94
3.7. Problemas y Ejercicios	94
3.8. Lecturas y Referencias	97

Índice de figuras

1.1. Universo Newtoniano	2
1.2. Métrica 2D en el plano.	8
1.3. Sistema de coordenadas polares.	8
1.4. Métrica 2D sobre una esfera.	9
1.5. Métrica 2D sobre una montura.	10
1.6. Distancia de diámetro angular.	17
2.1. Paralaje trigonométrico	28
2.2. Método de movimiento de cúmulo	29
2.3. Método de movimiento de cúmulo aplicado a las Hyades	31
2.4. SN1987A y su anillo	33
2.5. Geometría de un anillo en torno a una supernova	34
2.6. Efecto Sunyaev=Zeldovich	35
2.7. Curva de luz de una estrella Cefeida	37
2.8. Relación período-luminosidad para estrellas Cefeidas	38
2.9. Resumen de rangos en distancia para los distintos métodos	43
3.1. Hubble Tuning fork	48
3.2. Clasificación de Hubble	49
3.3. Ejemplos Galaxias Elípticas y S0	50
3.4. Ejemplos Galaxias Espirales	51
3.5. Nube Grande de Magallanes	51
3.6. Volumen de Clasificación	52
3.7. Clasificación de Van den Bergh	52
3.8. Galaxia Elíptica en el centro de un cúmulo	53
3.9. Espectro óptico típico de una Elíptica	55
3.10. Plano Fundamental $\sigma - M_B$	56
3.11. Plano Fundamental $\mu_{ave} - M_B$	57
3.12. Plano Fundamental $r_e - M_B$	57
3.13. Plano Fundamental $r_e - M_B$	58
3.14. N3379: Ley dV	59
3.15. Espirales Ejemplos	60
3.16. Perfil de una galaxia Sb	61
3.17. Metales en Elípticas, Espirales e Irregulares	62
3.18. Curvas de Rotación	63
3.19. Relación Tully-Fisher	64

3.20. Espectros S0, Sb, Sc y Starburst	65
3.21. Evolución espectral en espirales	65
3.22. Galaxias enanas del Grupo Local	66
3.23. Galaxias de Bajo Brillo Superficial	67
3.24. μ_0 vs. M para Enanas	69
3.25. Cúmulo de Fornax	70
3.26. Galaxias Enanas en Fornax; diagrama μ_0 vs. M_V	71
3.27. Índice de Sersic n vs. M_V	71
3.28. Cúmulo de Doradus	72
3.29. Selección de galaxias del HDF	73
3.30. Selección por tipo de galaxias del HDF	74
3.31. Función de Lumínosidad	75
3.32. Parámetros globales 1	77
3.33. Parámetros globales 2	77
3.34. Parámetros globales 3	78
3.35. Fusión de Galaxias	79
3.36. Frecuencia Específica	79
3.37. Relación densidad morfología	80
3.38. Cúmulo Globular M55	81
3.39. Diagrama de Hubble	85

Agradecimientos

Por su contribución a los apuntes, agradecemos a las siguientes personas:

Sergio Flores Ejercicios y problemas

Eduardo Befermann Ejercicios y problemas.

Joyce Pullen Ursua Figuras y diagramas

Capítulo 1

Principios Básicos de Cosmología

1.1. Suposiciones Cosmológicas

1. El Universo es homogéneo; todo observador ve lo mismo.
2. El Universo es isotrópico; no hay dirección privilegiada en el Universo.

Estas suposiciones implican que el Universo debe ser estático, o que tenga sólo movimientos radiales. Por ejemplo, si el Universo rotara, entonces habría un eje de rotación preferido lo que violaría la suposición de isotropía.

Supongamos un Universo dinámico, y definamos
 \vec{u} = coordenadas co-móviles de un objeto;
 $R(t)$ = movimiento (expansión o contracción) del Universo;
 l = distancia medida al objeto, donde

$$l = R(t)u \quad (1.1)$$

La velocidad observada de una galaxia será:

$$v = \frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}(Ru) = \dot{R}u \quad (1.2)$$

$R(t)$ y u no son observables, pero l si lo es, entonces,

$$v = \dot{R}\frac{l}{R} = \frac{\dot{R}}{R}l \quad (1.3)$$

Definamos el parámetro de Hubble:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{R}}{R} \quad (1.4)$$

Notar que la unidad del parámetro de Hubble es tiempo inverso. La Constante de Hubble es el parámetro de Hubble medido hoy, $H_0 = \dot{R}_0/R_0$

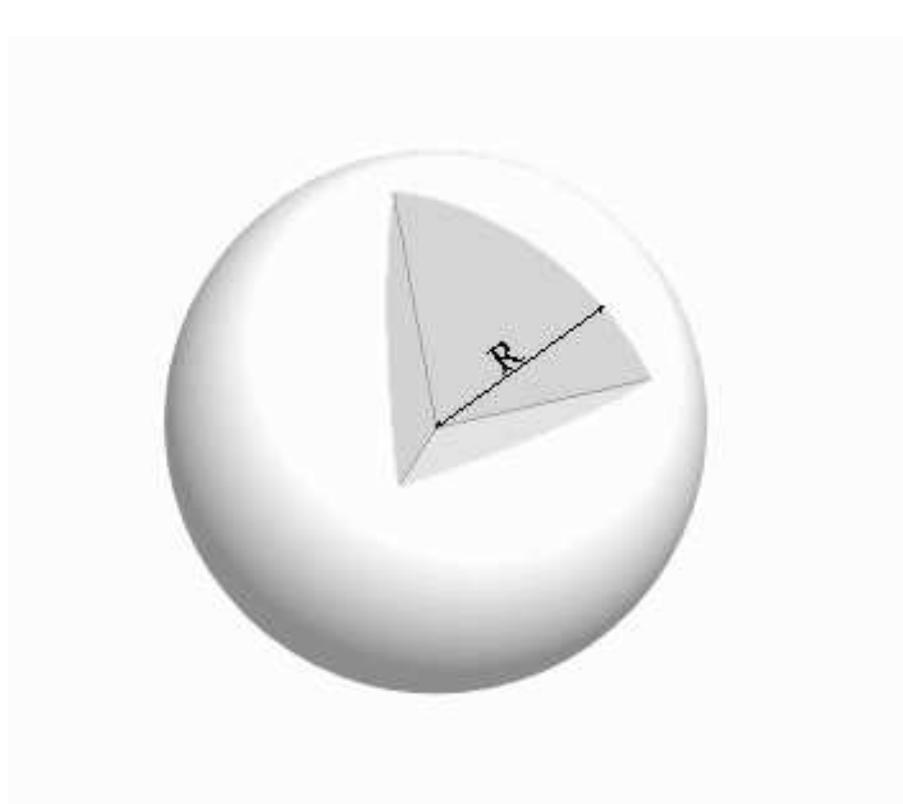


Figura 1.1: Esfera que representa un universo newtoniano.

1.2. Universo Newtoniano

Consideremos un Universo Newtoniano, donde las leyes de la gravedad de Newton valen. Elijamos un centro y estudiemos el movimiento de una cáscara de material a distancia R del centro.

Recordemos que si el universo es homogéneo e isotrópico, la materia fuera de la cáscara no tendrá ningún efecto en su movimiento; la dinámica de la cáscara sólo depende del material al interior a ella.

La desaceleración de la cáscara será,

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} \quad (1.5)$$

donde la masa $M(< R)$ es la masa interior al radio R . Si multiplicamos cada lado por \dot{R} , e integramos,

$$\int \dot{R} \ddot{R} dt = - \int \frac{GM}{R^2} \dot{R} dt \quad (1.6)$$

como $\ddot{R} = \frac{d\dot{R}}{dt}$ y $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$, la integral es sencilla,

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = E \quad (1.7)$$

E es la energía total. Si la energía potencial del universo es mayor que la energía cinética, $E < 0$, eventualmente el universo lolapsará. Si la energía cinética es mayor que la energía potencial, $E > 0$.

1.3. Parámetro de desaceleración, $q(t)$

Multipliquemos la ecuación de energía 1.7 por 2 y dividamos por R^2 .

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{2GM}{R^3} = \frac{2E}{R^2} \quad (1.8)$$

o, ya que $\ddot{R} = -GM/R^2$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{2\ddot{R}}{R} = \frac{2E}{R^2} \quad (1.9)$$

si multiplicamos y dividimos el segundo término por R/\dot{R}

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + \frac{2\ddot{R}}{R} \left(\frac{R}{\dot{R}}\right)^2 \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 &= \frac{2E}{R^2} \\ \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 + 2 \left(\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2}\right) \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 &= \frac{2E}{R^2} \end{aligned}$$

Definimos el parámetro de desaceleración

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} \quad (1.10)$$

- Si $q < 1/2$, $E > 0$, Universo desligado
- Si $q > 1/2$, $E < 0$, Universo ligado
- Si $q = 1/2$, $E = 0$, Universo crítico

Introduciendo el parámetro de Hubble, la ecuación queda

$$H^2 - 2H^2q = \frac{2E}{R^2} \quad o \quad (1 - 2q) = \frac{2E}{H^2R^2} \quad (1.11)$$

1.4. Parámetro de densidad, $\Omega(t)$

Dada la aceleración 1.5,

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}$$

sustituyendo la masa por la densidad,

$$\rho(t) = \frac{M}{4/3\pi R^3} \quad (1.12)$$

queda que,

$$q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = \frac{GM}{R^2} \frac{R}{\dot{R}} = \frac{4}{3}\pi G\rho \left(\frac{R}{\dot{R}}\right)^2 \quad (1.13)$$

lo que implica,

$$\rho = \frac{3}{4\pi G} H^2 q \quad (1.14)$$

Para un Universo crítico, $E = 0$, $q = 1/2$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2$$

sea $h \equiv H_0/100$, entonces para hoy,

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 = 1,9 \times 10^{-29} h^2 g \text{ cm}^{-3} \quad (1.15)$$

Parametricemos el universo a partir de la densidad. Si ρ_c es la densidad crítica, definimos el parámetro de densidad cosmológica como,

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_0} \quad (1.16)$$

Esta definición implica que si,

- $\Omega > 1$, Universo cerrado
- $\Omega < 1$, Universo abierto
- $\Omega = 1$, Universo cílico, $\Omega = 2q$

1.5. La Edad del Universo

¿Cuál es la edad del Universo en función de H_0 y q_0 ? Partamos con la Ecuación de energía 1.7.

$$\frac{1}{2}\dot{R}^2 - \frac{GM}{R} = E$$

multipliquemos por $2/R^2$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{2GM}{R^3} = \frac{2E}{R^2} \quad (1.17)$$

la masa del Universo es,

$$M = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_0 \quad (1.18)$$

entonces,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = \frac{2E}{R^2} \quad (1.19)$$

Consideremos un Universo vacío (Milne), $\rho_0 = 0$, la ecuación 1.19 queda

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{2E}{R^2} \quad o \quad \dot{R} = \sqrt{2E} \quad (1.20)$$

Dadas las condiciones iniciales, $R = 0$ en $t = 0$, esto ecuación se integra fácilmente,

$$R(t) = \sqrt{2E} t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{R}{\sqrt{2E}} \quad (1.21)$$

Reemplazemos $\dot{R} = \sqrt{2E}$

$$t = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{H} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{H_0} \quad \text{hoy} \quad (1.22)$$

Consideremos un Universo Einstein-de Sitter, $E = 0$ (crítico). En este caso la ecuación 1.19 queda,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = 0 \quad (1.23)$$

multipliquemos por R^2

$$\dot{R}^2 - \frac{8}{3}\pi G \rho_0 \frac{R_0^3}{R} = 0 \quad o \quad \dot{R} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi G \rho_0 \frac{R_0^3}{R}} \quad (1.24)$$

la solución a esta ecuación diferencial es de la forma,

$$R = at^{2/3} \quad \text{donde} \quad a \equiv (6\pi G \rho_0 R_0^3)^{1/3} \quad (1.25)$$

Usando $R = at^{2/3}$ y $\dot{R} = (2/3)at^{1/3}$, obtenemos la edad en función de observables,

$$t = (2/3)\frac{R}{\dot{R}} = \frac{2}{3}\frac{1}{H} \quad (1.26)$$

y, en el presente,

$$t_0 = \frac{2}{3}\frac{1}{H_0}$$

1.6. Redshift Cosmológico

¿Qué efecto tiene la expansión en la luz? Consideremos una partícula que viaja con velocidad v y que se cruza con un observador en el punto 1, en su camino a otro observador en el punto 2. Al momento en que llega a 2, el Universo se ha expandido; específicamente, si la partícula ha viajado $v(t)dt$, en ese intervalo la velocidad de expansión del Universo es $H(t)v(t)dt$. Si al pasar la partícula por 2 restamos la velocidad adquirida por la expansión del universo, la velocidad de la partícula medida por el observador en 2 es,

$$v(t + dt) = v(dt) - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) v(t)dt \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{v(t + dt) - v(t)}{v(t)} &= - \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) dt \\ \frac{dv}{v} &= - \frac{dR}{R} \end{aligned}$$

integrando,

$$v(t) = \frac{1}{R} \quad (1.28)$$

Los mismos argumentos se aplican a la frecuencia de un fotón,

$$\nu(t) = \frac{1}{R} \quad (1.29)$$

Si definimos redshift, z , como,

$$(1 + z) = \frac{\nu_{em}}{\nu_{obs}} = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} \quad (1.30)$$

entonces,

$$(1 + z) = \frac{R_0}{R(t)} \quad (1.31)$$

1.7. Universo de Einstein

La energía en el campo de gravedad de Newton está dada por la ecuación 1.19,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = \frac{2E}{R^2}$$

En el caso relativista, la ecuación es,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^3 = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1.32)$$

Aquí, k es la constante que determina la curvatura del Universo. Notar que k sólo aparece en el término dividido por R , que no es un observable. Por lo tanto, elegimos las unidades de R tal que $k = 1, 0, -1$. k significa lo siguiente,

- $k = 1 \Rightarrow$ curvatura positiva
- $k = 0 \Rightarrow$ universo plano
- $k = -1 \Rightarrow$ curvatura negativa

La otra variable nueva es Λ , la Constante Cosmológica. Es como un término de presión que provee una nueva fuerza repulsiva (o atractiva) que es directamente proporcional a la distancia,

$$\ddot{R} = \Lambda R \quad (1.33)$$

1.7.1. Métrica

La métrica en geometría plana euclíadiana en tres dimensiones es,

$$ds^2 = du^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.34)$$

donde (x, y, z) son coordenadas cartesianas. La distancia entre dos puntos co-móviles, s , se obtiene integrando a lo largo del camino. En el universo relativista la distancia entre dos puntos co-móviles no es simplemente du .

Análogo en dos dimensiones (2-D)

En geometría euclíadiana plana (figura 1.2) una geodésica es una recta en el plano, donde se cumple que

$$\alpha + \delta + \gamma = \pi \quad (1.35)$$

Si en el plano definimos un sistema cartesiano, la distancia entre un punto (x, y) y otro $(x + dx, y + dy)$ es,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (1.36)$$

En coordenadas polares, definidas por un ángulo y una distancia al origen del sistema de coordenadas,

la distancia entre dos puntos, (r, θ) y $(r + dr, \theta + d\theta)$, es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 \quad (1.37)$$

Consideremos una geometría curva, por ejemplo en la superficie de una esfera. Aquí una geodésica es un arco de un círculo mayor,

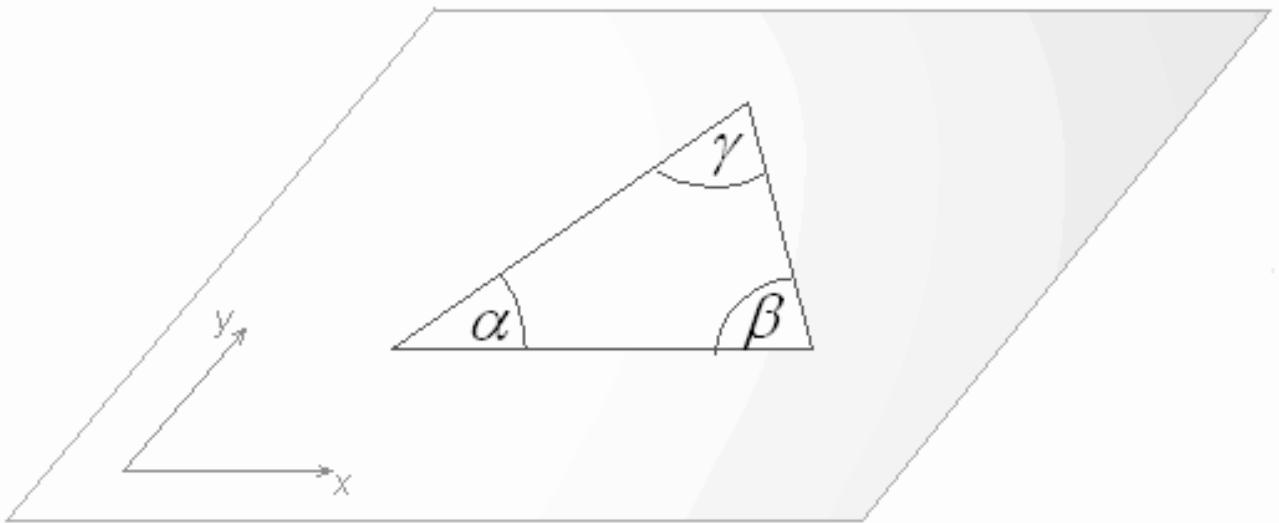


Figura 1.2: En geometría euclidiana plana una geodésica es una recta en el plano.

Figura 1.3: Sistema de coordenadas polares.

donde se cumple que,

$$\alpha + \delta + \gamma = \pi + \frac{A}{R^2} \quad (1.38)$$

donde A es el área del triángulo esférico y R es el radio de la esfera. Si $\alpha + \delta + \gamma > \pi$ la curvatura es positiva y la distancia entre dos puntos, (r, θ) y $(r + dr, \theta + d\theta)$, es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(r/R) d\theta^2 \quad (1.39)$$

Consideremos, ahora, otra geometría curva, la superficie de una montaña,

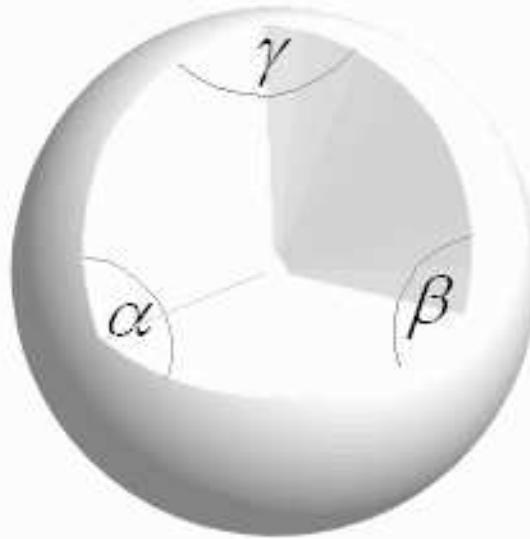


Figura 1.4: En geometría esférica los lados del triángulos son arcos de círculos mayores.

En este caso se cumple que,

$$\alpha + \delta + \gamma = \pi - \frac{A}{R^2} \quad (1.40)$$

donde A es el área del triángulo curvo y R es el radio de curvatura. En este caso $\alpha + \delta + \gamma < \pi$, esto implica que la curvatura es negativa y la distancia entre dos puntos, (r, θ) y $(r + dr, \theta + d\theta)$, es

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \operatorname{senh}^2(r/R) d\theta^2 \quad (1.41)$$

La curvatura se puede parametrizar en dos cantidades k y R , tal que $k = 1, 0, -1$ si la curvatura es *positiva*, *plana* o *negativa*, respectivamente y R es el radio de curvatura.

Tres dimensiones, (3-D)

Análogamente, en tres dimensiones, la métrica es

Para curvatura plana

$$ds^2 = du^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (1.42)$$

$$ds^2 = du^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (1.43)$$

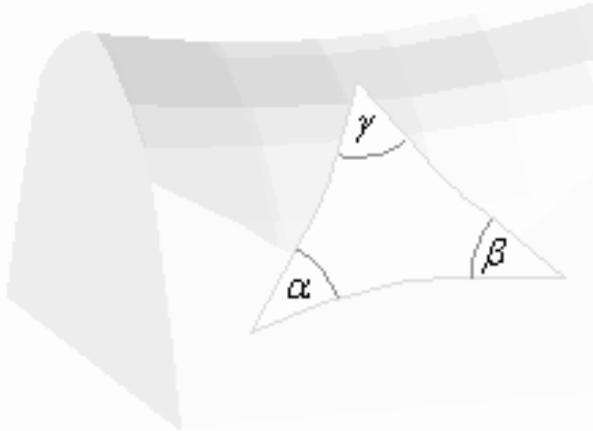


Figura 1.5: Triángulo sobre una montura.

Para curvatura positiva

$$ds^2 = du^2 = dr^2 + R^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{r}{R}\right) (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (1.44)$$

Para curvatura negativa

$$ds^2 = du^2 = dr^2 + R^2 \operatorname{senh}^2\left(\frac{r}{R}\right) (d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (1.45)$$

ó, métrica en general,

$$ds^2 = du^2 = dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2 \quad (1.46)$$

donde Ω es el ángulo sólido,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (1.47)$$

y

$$S_k(r) = R \operatorname{sen}\left(\frac{r}{R}\right), \quad \text{positiva} \quad (1.48)$$

$$= r, \quad \text{plana} \quad (1.49)$$

$$= R \operatorname{senh}\left(\frac{r}{R}\right), \quad \text{negativa} \quad (1.50)$$

Si cambiamos r por $x = S_k(r)$, la métrica para un espacio homogéneo e isotrópico en 3-D es

$$ds^2 = du^2 = \frac{dx^2}{1 - \frac{kx^2}{R^2}} + x^2 d\Omega^2 \quad (1.51)$$

Cuatro dimensiones (4-D)

En relatividad tenemos que considerar el espacio-tiempo en cuatro dimensiones (4-D). Un evento en el espacio-tiempo en coordenadas cartesianas se describe como (t, x, y, z) , y en coordenadas polares como (t, r, θ, ϕ) . Consideremos dos eventos (t, r, θ, ϕ) y $(t + dt, r + dr, \theta + d\theta, \phi + d\phi)$, de acuerdo a la relatividad especial, la separación espacio-temporal es la **Métrica de Minkowski** dada por,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - du^2 \quad (1.52)$$

Ahora, el camino debe ser integrado en ambos, espacio y tiempo.

En un espacio en expansión la distancia espacial entre dos puntos es Rdu , donde R es la escala del tamaño del Universo en el momento de la medida. De tal forma que la distancia entre dos puntos es,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2 \quad (1.53)$$

Notar que para la luz $ds = 0$.

El Universo puede no ser plano. En tal caso debemos modificar la métrica. Si el espacio es curvo, homogéneo e isotrópico entonces esto es la **Métrica de Robertson-Walker**.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (1.54)$$

- $k = +1 \Rightarrow$ curvatura positiva, espacio elíptico, $E < 0$, $q > 1/2$
- $k = 0 \Rightarrow$ curvatura plana, coordenadas esféricas normales $E = 0$, $q = 1/2$
- $k = -1 \Rightarrow$ curvatura negativa, espacio hiperbólico, $E > 0$, $q < 1/2$

Camino de un fotón

Los fotones se mueven en el universo por geodésicas nulas, $ds^2 = 0$. Por lo tanto, la trayectoria de un fotón en espacio tiempo de Minkowski, cumple con,

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &= c^2 dt^2 - du^2 \\ &= c^2 dt^2 - (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \end{aligned}$$

El camino es radial con θ y ϕ constantes, i.e. $d\theta = d\phi = 0$,

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - dr^2 \quad (1.55)$$

$$c^2 dt^2 = dr^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dr}{dt} = \pm c \quad (1.56)$$

1.8. Soluciones para un Universo de Friedmann con $\Lambda = 0$

La primera ecuación de Einstein de Campo es 1.32,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Consideremos $\Lambda = 0$. Si $k = 0$, el espacio es Euclídeo, la ecuación 1.32 queda,

$$\dot{R} = \sqrt{\frac{\frac{8}{3}\pi G\rho_0 R_0^3}{R}} \quad (1.57)$$

$$R = \sqrt[3]{6\pi G\rho_0 R_0^3 t^2} = \sqrt[3]{6\pi G\rho_0 R_0^3} \cdot t^{2/3} \quad (1.58)$$

Si $k \neq 0$, la solución de 1.32,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^3 = -\frac{kc^2}{R^2} \quad (1.59)$$

hay que escribirla paramétricamente. Si definimos a como

$$a \equiv \frac{4\pi G\rho_0}{3c^2} R_0^3 \quad (1.60)$$

y definimos una variable intermedia θ ,

<u>$k = 1$ (ligado)</u>	<u>$k = -1$ (desligado)</u>
$R = a(1 - \cos\theta)$	$R = a(\cosh\theta - 1)$
$dR = a\sin\theta d\theta$	$dR = a\sinh\theta d\theta$
$t = \frac{a}{c}(\theta - \sin\theta)$	$t = \frac{a}{c}(\sinh\theta - \theta)$
$dt = \frac{a}{c}(1 - \cos\theta)d\theta$	$dt = \frac{a}{c}(\cosh\theta - 1)d\theta$
$H = \frac{a}{c} \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2}$	$H = \frac{a}{c} \frac{\sinh\theta}{(\cosh\theta - 1)^2}$
$q = \frac{1 - \cos\theta}{\sin^2\theta}$	$q = \frac{\cosh\theta - 1}{\sinh^2\theta}$
$\cos\theta = \frac{1 - q}{q}$	$\cosh\theta = \frac{1 - q}{q}$
$(1 + z) = \frac{1 - \cos\theta_0}{1 - \cos\theta}$	$(1 + z) = \frac{\cosh\theta_0 - 1}{\cosh\theta - 1}$
$\cos\theta = \frac{z + \cos\theta_0}{(1 + z)}$	$\cosh\theta = \frac{z + \cosh\theta_0}{(1 + z)}$

Se deja como tarea demostrar que con esta parametrización el parámetro de Hubble es,

$$H = \frac{c}{a} \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2}$$

1.9. Distancia Propia Cosmológica

Hay varias formas de medir distancias en astronomía:

Distancia Movimiento Propio: Si conocemos la velocidad del objeto, podemos medir su distancia observando su movimiento en el cielo.

Distancia Paralajes: Midiendo el paralaje de un objeto, por trigonometría obtenemos su distancia.

Distancia Luminosa: Comparando flujo observado con el emitido y usando la ley $1/\text{distancia}^2$

Distancia Angular: Se mide el tamaño angular del objeto y se compara con el tamaño físico real.

En cosmología, en el caso de las dos últimas, las distancias tienen una dependencia diferente con H_0 , q_0 , y z .

Calculemos la distancia que un haz de luz cubre en su camino de un punto en coordenadas co-móviles u emitido en t_1 a otro punto en $u = 0$ en t_0 . Partamos de la métrica de Robertson-Walker, 1.54.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \right\}$$

Para el viaje de la luz, $ds = 0$, y, ya que la luz viaja radialmente, o sea por una geodésica, $d\theta = d\phi = 0$. Entonces de la métrica anterior,

$$c^2 dt^2 = R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right\} \quad (1.61)$$

$$\frac{c}{R} dt = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.62)$$

La distancia entre (u, t_1) y $(0, t_0)$ es dada por (Notar límites),

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{R} dt = \int_u^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.63)$$

Si $k = 0$ (Einstein-deSitter, plano), y si usamos $R = at^{2/3}$

$$\frac{3c}{a} t_0^{1/3} - \frac{3c}{a} t_1^{1/3} = u \quad (1.64)$$

Recordemos la definición de redshift

$$(1 + z) = \frac{R_0}{R_1} = \frac{at_0^{2/3}}{at_1^{2/3}} = \left(\frac{t_0}{t_1} \right)^{2/3}$$

Con esto la solución toma la forma,

$$u = \frac{3c}{a} t_0^{1/3} \left\{ 1 - 1/\sqrt{1+z} \right\} \quad (1.65)$$

Si notamos que $\dot{R} = \frac{2}{3}at^{-1/3}$

$$u = \frac{2c}{\dot{R}_0} \left\{ 1 - 1/\sqrt{1+z} \right\} \quad (1.66)$$

usando la definición $H_0 = \frac{\dot{R}_0}{R_0}$, para $k = 0$,

$$d_p = R_0 u = \frac{2c}{H_0} \left\{ 1 - 1/\sqrt{1+z} \right\} \quad (1.67)$$

Para el caso general, con $\Lambda = 0$

$$d_p = \frac{c}{H_0 q_0^2 (1+z)} \left\{ q_0 z + (q_0 - 1) \left[\sqrt{2q_0 z + 1} - 1 \right] \right\} \quad (1.68)$$

donde d_p es la **distancia propia** un haz de luz cubre desde un punto 1 al punto en 0.

Otra forma de calcular **distancia propia**.

La distancia propia entre dos puntos es igual a la longitud de la geodesia entre ellos cuando el factor de escala $R(t)$ es fijo, es decir $dt = 0$. Partamos de la métrica de RW, 1.54,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}$$

A lo largo de una geodesia el camino es radial tal que los ángulos (θ, ϕ) son constantes, es decir $d\theta = d\phi = 0$.

$$ds = -R(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.69)$$

integrandos,

$$-\int_0^{d_p} ds = R(t) \int_u^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.70)$$

queda,

$$\begin{aligned} d_p &= R(t) \arcsin(u\sqrt{k}), & k > 0 \\ &= R(t)u, & k = 0 \\ &= R(t) \arcsin h(u\sqrt{|k|}), & k < 0 \end{aligned}$$

El cambio de d_p con el tiempo es,

$$\dot{d}_p = \dot{R}u = \frac{\dot{R}}{R}Ru = Hu \quad (1.71)$$

en $t = t_0$, $v_p(t_0) = H_0 d_p(t_0)$

1.10. Distancia Luminosa Cosmológica, d_L

Para calcular distancia se usa el hecho de que el flujo observado de fotones por unidad de tiempo de una fuente disminuye como el cuadrado de la distancia. Si f es el flujo observado y L es la luminosidad emitida por la fuente, entonces para un espacio plano que no se expande,

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (1.72)$$

Para distancias cosmológicas, hay otras consideraciones. La luminosidad de n fotones por unidad de tiempo emitidos por una fuente a redshift z es,

$$L = \frac{nh\nu_e}{dt_e} \quad (1.73)$$

El flujo observado es,

$$f = \frac{nh\nu_o}{dt_o} \cdot \frac{1}{d_p^2} \quad (1.74)$$

Sabemos que,

$$\begin{aligned} \frac{\nu_e}{\nu_o} &= 1 + z \\ \nu_0 &= \frac{\nu_e}{1 + z} \end{aligned} \quad (1.75)$$

Notamos que $dt_0 \neq dt_e$ ya que la fuente se mueve. Ocurre delación del tiempo por relatividad; los observadores miden que el tiempo en la fuente es más lento.

$$dt_0 = dt_e(1 + z) \quad (1.76)$$

Demostración:

Consideremos un haz de luz que viaje desde la fuente (e) hasta el observador (o). Sea t_e el tiempo en que se emite un primer máximo y $t_e + \Delta t_e$ el tiempo en que se emite el máximo siguiente. Equivalentemente, sea t_o el tiempo en que se observa el primer máximo y $t_o + \Delta t_o$ el tiempo en que se observa el máximo siguiente. Dada la métrica de Robertson-Walker, 1.54, para un haz de luz, se cumple para el primer máximo que,

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c} \int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.77)$$

Igualmente, para el segundo máximo,

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} = \frac{1}{c} \int_0^u \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad (1.78)$$

Restando, nos queda,

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} = 0 \quad (1.79)$$

pero,

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{R(t)}$$

Reemplazando en la ecuación 1.79,

$$\int_{t_o}^{t_o + \Delta t_o} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{R(t)}$$

La integral de $\frac{dt}{R(t)}$ entre dos máximos al momento de ser emitidos es igual en el momento en que fueron observados. Sin embargo, el intervalo entre máximos, tanto en la emisión como en la observación, es pequeño comparado con los tiempos cosmológicos; por lo tanto $R(t)$ cambia muy poco y lo podemos considerar constante y sale fuera de la integral.

$$\frac{1}{R(t_o)} \int_{t_o}^{t_o + \Delta t_o} dt = \frac{1}{R(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} dt$$

Lo anterior resulta en

$$\frac{\Delta t_o}{R(t_o)} = \frac{\Delta t_e}{R(t_e)} \quad (1.80)$$

Entonces, tenemos la relación 1.76

$$dt_o = (1 + z)dt_e \quad (1.81)$$

Volvamos al flujo observado, 1.74,

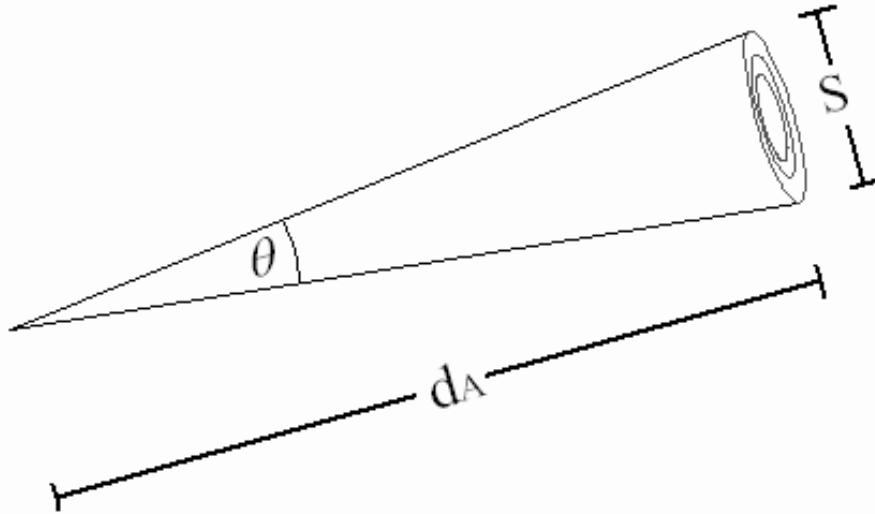


Figura 1.6: Distancia a partir del Diámetro Angular, d_A

$$f = \frac{nh\nu_o}{dt_o} \cdot \frac{1}{d_p^2} = \frac{nh\nu_e}{dt_e} \cdot \frac{1}{(1+z)^2} \cdot \frac{1}{d_p^2} = \frac{L}{(1+Z)^2 d_p^2}$$

Entonces la distancia luminosa se relaciona con la distancia propia por

$$d_L = d_p(1+z) \quad (1.82)$$

1.11. Distancia a partir del Diámetro Angular, d_A

Consideremos una galaxia con un tamaño angular D a redshift z . En geometría eucliana normal distancia $\propto \theta$. Sin embargo, en un universo en expansión esto es distinto.

$$\theta = \frac{D}{d_A}$$

Consideremos la figura 1.6 y partamos de la métrica R-W (1.54).

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2 = c^2 dt^2 - R^2 \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}$$

Si la galaxia está en el plano del cielo, la distancia radial en ambos lados es la misma. Por lo tanto, $dr = 0$. De la misma forma, ya que ambos lados de la galaxia se observan al mismo tiempo, $dt = 0$, y la separación de ambos lados es $s = \int ds$. Elegimos nuestro sistema de coordenadas, tal que el ángulo que subtende la galaxia es todo en θ , tal que $\phi = 0$. Entonces,

$$ds^2 = -R^2 du^2 = -R^2 r^2 d\theta^2 \quad (1.83)$$

o, si elegimos las coordenadas de tal forma que θ es positiva,

$$\theta = \frac{D}{Rr}$$

eliminando R y sustituyendo por R_0 de

$$(1+z) = R_0/R$$

entonces,

$$\theta = \frac{D}{Rr} = \frac{D(1+z)}{R_0 r} \quad (1.84)$$

Recordemos distancia propia,

$$d_p = R_0 r = R_0 u$$

$$\theta = \frac{D(1+z)}{d_p}$$

En otras palabras,

$$d_A = d_p(1+z)^{-1} = d_L(1+z)^{-2} \quad (1.85)$$

¿Cómo varía el brillo superficial de una galaxia en función del redshift? Partamos de un análisis dimensional. El brillo superficial, flujo observado por unidad de superficie angular, es

$$\sum = \frac{f}{\theta^2} \quad (1.86)$$

donde f es el flujo observado, y θ el tamaño angular. Como f se relaciona a la luminosidad intrínseca, L , a través de d_L , y θ por d_A al tamaño real, D , entonces,

$$\sum = \frac{L}{d_L^2} \cdot \frac{d_A^2}{D^2} = \frac{L}{D^2}(1+z)^{-4} \quad (1.87)$$

Es decir, el brillo superficial disminuye rápidamente con redshift.

1.12. Elemento de Volumen Cosmológico

Consideremos la figura. En coordenadas polares, el volumen elemental es,

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \quad (1.88)$$

Las variables θ y ϕ son independientes de la cosmología. Ya que la cáscara de volumen es concéntrica con la Tierra, el radio vector, r , es la distancia de diámetro angular. Además, escribamos el elemento de volumen con z ,

$$dV = r_A^2 \sin\theta \frac{dr}{dz} dz d\theta d\phi \quad (1.89)$$

Notamos aquí que dr cambia con z . Ya que dr es pequeño usamos distancia propia y no la distancia de diámetro angular. Usamos Rdu , para calcular el elemento de volumen. Partimos de la métrica R-W, 1.54,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2 du^2$$

lo que para la luz es, $cdt = Rdu$. Buscamos la relación entre Rdu y z ,

$$dt = \left(\frac{dt}{dR} \right) \left(\frac{R}{R} \right) dR = \left(\frac{R}{\dot{R}} \right) \left(\frac{1}{R} \right) dR = \frac{1}{HR} dR$$

además,

$$\frac{R_0}{R} = (1 + z) \quad \Rightarrow \quad dR = -\frac{R_0}{(1 + z)^2} dz = -\frac{R}{(1 + z)} dz$$

Esto nos queda,

$$Rdu = cdt = \frac{c}{HR} dR = -\frac{c}{HR} \frac{R_0}{(1 + z)^2} dz = -\frac{c}{H} \frac{1}{(1 + z)} dz$$

Relacionemos H a H_0 . Como ejemplo, consideremos un universo cerrado. Recordemos que,

$$H = \frac{c}{a} \frac{\sin\theta}{(1 - \cos\theta)^2} \Rightarrow \frac{H}{H_0} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} \frac{(1 - \cos\theta_0)^2}{(1 - \cos\theta)^2}$$

Y, la relación,

$$(1 + z) = \frac{1 - \cos\theta_0}{1 - \cos\theta}$$

tenemos que,

$$\frac{H}{H_0} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} (1 + z)^2$$

además,

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta_0} = \frac{\sqrt{2q_0 z + 1}}{(1 + z)}$$

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{2q_0z + 1} \cdot (1 + z)$$

entonces,

$$\begin{aligned} Rdu &= -\frac{c}{H(1+z)} dz = \frac{cdz}{H_0\sqrt{2q_0z + 1} \cdot (1+z)^2} \\ dV &= r_A^2 \frac{c}{H_0\sqrt{2q_0z + 1} \cdot (1+z)^2} \sin\theta dz d\theta d\phi \end{aligned} \quad (1.90)$$

1.13. Cosmología con Constante Cosmológica

Los modelos de universo inflacionario explican, entre otras cosas, muy elegantemente, la homogeneidad del fondo de micro-ondas. Este modelo implica un Universo plano, i.e. $k = 0$. Sin embargo, la mayor parte de las observaciones indican $\Omega < 1$. Más aún, si $H_0 \approx 75 \text{ km/s/Mpc}$, $\Omega = 1$ implica una edad del universo de $t \approx 9 \text{ Gyr}$, lo que es bastante menor de lo que otras mediciones (*e.g.* nucleosíntesis, estrellas antiguas, *etc.*) indican. Estos dos argumentos, además de las observaciones de Super Novas Ia, sugieren la existencia de una constante cosmológica.

Si hay una constante cosmológica (*e.g.* energía del vacío), las ecuaciones básicas para distancia y tiempo cambian un poco. Consideremos las ecuaciones de campo de Einstein, ??,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho = -\frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Para tener un Universo plano, sin constante cosmológica, la densidad crítica de materia debe ser,

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2$$

Si Λ es distinta a cero, la densidad para un Universo plano es menor,

$$\rho = \frac{3H^2 - \Lambda c^2}{8\pi G} \quad (1.91)$$

Ya que la densidad crítica es una cantidad no muy clara, lo que comúnmente se hace es definir tres nuevas variables.

$$\Omega_M = \rho_0/\rho_c = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 \quad (1.92)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2} \quad (1.93)$$

$$\Omega_k = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} \quad (1.94)$$

con

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (1.95)$$

Notar que Ω_M , Ω_Λ y Ω_k son a-dimensionales. Veamos el significado de cada término:

- Ω_M es la densidad de energía de la materia.
- Ω_Λ es la densidad de energía de la constante cosmológica.
- Ω_k densidad falsa que describe cuán distinto es el Universo de plano.

Para un universo inflacionario $\Omega_k = 0$, y $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$

Volviendo a la ecuación de conservación de la energí, 1.32

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Multiplicando por $1/H_0$

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8}{3H_0}\pi G\rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 - \left(\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}\right) \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 + \frac{\Lambda c^2}{3H_0}$$

O, después de dividir por $(R_0/R)^2$,

$$\left(\frac{\dot{R}}{R_0}\right)^2 = \Omega_M \left(\frac{R_0}{R}\right) + \Omega_k + \Omega_\Lambda \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \quad (1.96)$$

Finalmente, si sustituimos por Ω_k , y hacemos que $x = R/R_0$, obtenemos,

$$\left(\frac{1}{H_0}\right)^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 1 + \Omega_M \left(\frac{1}{x} - 1\right) + \Omega_\Lambda(x^2 - 1) \quad (1.97)$$

Esta ecuación describe al Universo en función de tres constantes, H_0 , Ω_M y Ω_Λ . De esto (con un poco de álgebra), se deduce q_0 .

$$q_0 = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda \quad (1.98)$$

1.14. Aplicaciones: *Lookback Time* con Λ

Usando 1.97, se puede calcular en forma bastante exacta el “lookback time”, o tiempo transcurrido entre el presente y el tiempo en el que un fotón fue emitido, con Λ . Ya que $x = R/R_0 = (1+z)^{-1}$, 1.97 se puede reescribir como

$$\left(\frac{d(1+z)^{-1}}{dt}\right)^2 = H_0^2 \left\{ 1 + \Omega_M z - \Omega_\Lambda \frac{z^2 + 2z}{(z+1)^2} \right\} \quad (1.99)$$

$$(1+z)^{-2} \frac{dz}{dt} = H_0(1+z)^{-1} \{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\}^{1/2} \quad (1.100)$$

Esto da,

$$\Delta t = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{(1+z)\sqrt{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)}} \quad (1.101)$$

Desafortunadamente, a menos que $\Omega_\Lambda = 0$ o $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, esta integral se debe evaluar en forma numérica. Sin embargo, note que a medida que Ω_Λ crece, el denominador de 1.101 decrece y el “**lookback time**” crece. El tiempo adicional puede conciliar el período de expansión del universo con la edad de sus estrellas.

Con un pequeño porcentaje, la edad total del universo con Λ se puede aproximar por

$$t_0 \approx \frac{2}{3} H_0^{-1} \frac{\sinh^{-1} \sqrt{1 - \Omega_a / \Omega_0}}{\sqrt{1 - \Omega_a}} \quad (1.102)$$

donde

$$\Omega_a = \Omega_M - 0,3\Omega_\Lambda + 0,3 \quad (1.103)$$

(Note que si $\Omega_a > 1$, usted debe reemplazar \sinh por \sin y cambiar los signos. Note, además, que si $\Omega_{a0} = 1$, la ecuación es exacta).

1.15. Aplicaciones: Distancias Cosmológicas con Λ

La evaluación de distancias cosmológicas en un universo con Λ no cero, sigue de cerca a la del caso de Friedmann. Para que la luz siga una trayectoria radial, la métrica de Robertson-Walker (1.54) da

$$\frac{c}{R} dt = \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} \quad (1.104)$$

Si usamos 1.100 y manipulamos el lado izquierdo de esta ecuación, obtenemos,

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{R} dt &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{c}{R} \frac{R_0}{R} \frac{dt}{dz} dz \\ &= \int_0^z \frac{c}{R_0} \frac{R_0}{R} \frac{dt}{dz} dz \\ &= \int_0^z \frac{c}{H_0 R_0} \{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\}^{1/2} dz \\ &= |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z \{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\}^{1/2} dz \end{aligned} \quad (3.34)$$

Entretanto, el lado derecho de 1.104 da

$$\int_0^u \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} = \sinh^{-1} u$$

para $\Omega_k < 1$ (y $\sinh^{-1} u$ para $\Omega_k > 1$). Entonces,

$$d_v = R_0 u$$

$$= R_0 \sinh \left\{ |\Omega_k|^{1/2} \int_0^2 \{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\}^{1/2} dz \right\}$$

lo que resulta

$$d_p = |\Omega_k|^{-1/2} \sinh \left\{ |\Omega_k|^{\frac{1}{2}} \int_0^z \{(1+z)^2(1+\Omega_M z) - \Omega_\Lambda z(2+z)\}^{\frac{1}{2}} dz \right\} \quad (1.105)$$

(o con un *sen* si $\Omega_k > 0$. Una vez más, esta ecuación no tiene solución analítica si $\Omega_\Lambda \neq 0$ o $\Omega_M + \Omega_\Lambda \neq 1$.

1.16. Bibliografía

1.17. Problemas y Ejercicios

1. **Problema 1.1:** Supongamos que vivimos en un universo Einstein-de Sitter, es decir un universo plano ($k = 0$) y dominado por la materia ($\Lambda = 0$):

- a) Resuelva la ecuación de Friedmann y demuestre que $R(t) \propto t^{2/3}$
- b) Determine la edad del universo t_0
- c) Calcule el parámetro q
- d) Si observa un quasar en $z = 5$ ¿Cuán lejos en el tiempo se está observando?
- e) ¿A qué redshift se observaría que una galaxia estándar en tamaño aparecería angularmente más grande?

2. **Problema 1.2:** Muestre que la solución de la ecuación de Friedmann para un universo ligado y dominado por materia ($k = 1$ y $\Lambda = 0$), tiene la siguiente forma paramétrica:

$$R(\theta) = a(1 - \cos \theta)$$

$$t(\theta) = \frac{a}{c}(\theta - \sin \theta)$$

donde θ es el parámetro y a una constante que usted tiene que determinar. Encuentre el parámetro de Hubble $H(\theta)$

3. **Problema 1.3:** En un universo con constante cosmológica (dominado por Λ) con un valor de $\Omega_\Lambda = 0,7$

- a) Demuestre, a partir de la ecuación de Friedmann, que $R(t) \propto e^{t/t_c}$, donde t_c es una constante de tiempo característico.
- b) Halle la expresión analítica para t_c y encuentre su valor numérico. Compare t_c con la estimación actual de la edad del universo ($\sim 13 \text{ Gyr}$). ¿Cuál es el significado físico de t_c ?

4. **Problema 1.4:** Muestre que la fórmula para el corrimiento Doppler en relatividad especial,

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} ,$$

se reduce a $z \simeq v/c$ en el límite de velocidades pequeñas. Invierta la fórmula para dar v/c en términos de z . Calcule la velocidad de recesión de una galaxia en $z = 5$ usando la fórmula de relatividad especial.

5. **Problema 1.5:** Un universo plano, dominado por materia, es poblado por galaxias en distintas distancias propias l desde un observador en el origen. La distancia de estas galaxias se incrementa con el tiempo propio cosmológico en una manera descripta por la ley de Hubble. Si las galaxias emiten luz en distintos tiempos t_e , calcule la ubicación de puntos en el plano $l - t_e$ que está sobre el cono de luz del observador (es decir, aquellos puntos que emiten luz en t_e que pueden ser detectados en $t = t_0$ por el observador). Muestre que la distancia propia máxima de una galaxia sobre esta ubicación es $l_{max} = \frac{4}{9}c t_0$.
6. **Problema 1.6:** Supongamos que vivimos en universo plano, dominado por materia sin constante cosmológica.
- a) Muestre que $R \propto t^{2/3}$, resolviendo explícitamente la ecuación de Friedmann.
 - b) Determine t_0 , la edad el Universo.
 - c) Compare t_0 con la edad de Hubble para un Universo vacío, o sea, $\rho = 0$ (universo de Milne). Explique cuál es el origen de la diferencia entre ambos tiempos.
7. **Problema 1.7:** Resuelva la ecuación de Friedman y halle $t(z)$, el tiempo en función del redshift, para la era dominada por la radiación en un Universo de Einstein-de Sitter (Hint: use la ley de Stefan-Boltzmann). Verifique que para $z = 7,4 \cdot 10^9$, $t \sim 180$ seg. después del Big Bang.
8. **Problema 1.8:** Considere la distancia propia entre nosotros y una galaxia distante, que sería la distancia que usted mediría con una huincha extendida por la geodésica entre nosotros y la galaxia en un instante dado. Para la métrica de Robertson-Walker en el presente, muestre que la distancia propia a una galaxia es menor que la coordenada co-móvil radial r en un universo con curvatura negativa (no es necesario resolver completamente la integral). La métrica de Robertson-Walker está dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1.106)$$

9. **Problema 1.9:**

- a) Un objeto tiene una distancia luminosa d_L y una distancia diámetro angular d_A . Muestre que la razón:

$$\frac{d_A}{d_L} = \frac{1}{(1 + z)^2}$$

es independiente de la cosmología.

- b) Demuestre y explique por qué el brillo superficial bolométrico de una galaxia Σ disminuye con la cuarta potencia de $(1 + z)$:

$$\Sigma \propto \frac{1}{(1 + z)^4}$$

Capítulo 2

Escala de Distancias

Las imágenes del cielo nos muestran que existe una gran variedad de objetos y estructuras en el universo, así es como encontramos asteroides, planetas, estrellas, galaxias, cúmulos de galaxias, etc. Estas mismas imágenes, sin embargo, nos entregan solamente información proyectada en el plano del cielo, con lo cual la gran riqueza de formas que observamos no la podemos traducir en un entendimiento más profundo de dichos objetos. Por ejemplo, sin información adicional no podemos saber cuánto más grande es el sol en comparación con la luna¹, y sin esta información no podríamos saber el rol que cumple sol en nuestro sistema solar. Por lo tanto, si queremos comprender el funcionamiento de los diferentes cuerpos en el universo, como así también el universo mismo, debemos agregar una dimensión espacial extra, es decir debemos incluir la distancia.

En nuestro entorno local la medición de distancias es un proceso relativamente simple. Contamos con un instrumento de medición (e.g., una regla) el cual está dimensionado de acuerdo a un patrón de longitud, en nuestro caso el metro. Entonces, el proceso de medición consiste en comparar nuestro patrón al objeto que queremos medir. En astronomía, dadas las grandes distancias asociadas, este proceso no es posible ya que no podemos ir y comparar nuestro patrón físicamente con el objeto que deseamos estudiar. Debemos por lo tanto, encontrar otras formas o métodos que nos permitan inferir las distancias o tamaños de los objetos en cuestión. Estos métodos los podemos clasificar en dos grupos, **métodos absolutos y métodos relativos**, de acuerdo a si nos permiten conocer las distancias en forma absoluta o en forma relativa, respectivamente.

Antes de discutir los métodos de determinación de distancias es importante notar que las distancias en astronomía son bastante mayores que las distancias en nuestro entorno local. Como consecuencia, las unidades naturales que utilizamos en la tierra (i.e. metros o kilómetros) no son prácticas para las dimensiones astronómicas. Es así como para medidas relacionadas con nuestro sistema solar utilizamos la **unidad astronómica (UA)** que corresponde a la distancia media entre la tierra y el sol, siendo ésta igual a $1,496 \times 10^8$ km. Para medir las distancias entre estrellas o galaxias, la unidad astronómica es aún muy pequeña, y para esto utilizamos una unidad mayor que denominadmos **parsec (pc)**. Esta unidad corresponde a la distancia a la que debe situarse un observador tal que vea a la distancia tierra-sol (una unidad astronómica) con un tamaño angular de 1 segundo de arco.

¹Sí podemos afirmar que la luna está más cercana a la tierra que el sol, utilizando nuestro conocimiento de los eclipses. Dado que los dos cuerpos subtienden un tamaño angular similar en el cielo, el sol debe ser de mayor tamaño que la luna.

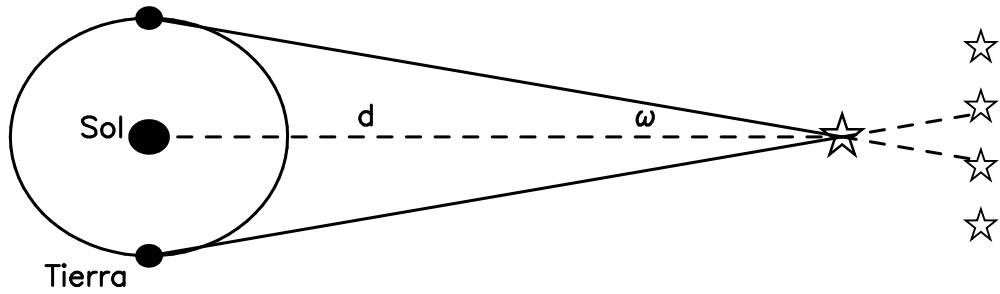


Figura 2.1: Esquema del paralaje trigonométrico. La órbita de la Tierra define la línea máxima de base. Esta geometría nos muestra que la estrella a una distancia d , subtende un arco ω con respecto a las estrellas de fondo en un período de seis meses.

Esta distancia corresponde a 206265 UA y a $3,086 \times 10^{13}$ km.

2.1. Estimadores absolutos de distancia

Los estimadores absolutos nos permiten determinar las distancias en unidades fundamentales, es decir nos permiten decir que un objeto se encuentra a una determinada distancia, medida en UA o pc, sin hacer referencia a alguna otra cantidad. Estos métodos son los fundamentales ya que sobre estos se apoyan los otros métodos que nos permiten ampliar el rango de distancias medibles. Los métodos absolutos de determinación de distancias en astronomía más comunes se presentan a continuación.

2.1.1. Paralaje trigonométrico

Este método se basa en la observación que objetos a diferentes distancias aparecen en distintos lugares cuando se observan desde dos posiciones ligeramente diferentes. Un caso particular de este método es el que utilizamos a diario al observar con nuestros dos ojos distintos objetos. Al cerrar y abrir los ojos en forma alternada podemos ver como los objetos más cercanos parecen moverse más que los objetos más lejanos. En este caso en particular, la distancia entre los ojos (que llamamos línea de base) nos entrega la unidad natural de medida de distancias. En astronomía la línea de base más grande que podemos utilizar, en una escala de tiempo razonable, es la dada por la órbita de la tierra alrededor del sol.

Con la geometría de la Figura 2.1 podemos ver que

$$d = \frac{1 \text{ UA}}{\tan \omega} \simeq \frac{1}{\omega} \text{ UA} \quad (2.1)$$

donde hemos supuesto que el ángulo ω es pequeño. Si medimos el ángulo ω en segundos de arco, entonces podemos escribir

$$d = \frac{206265}{\omega''} \text{ UA}, \quad (2.2)$$

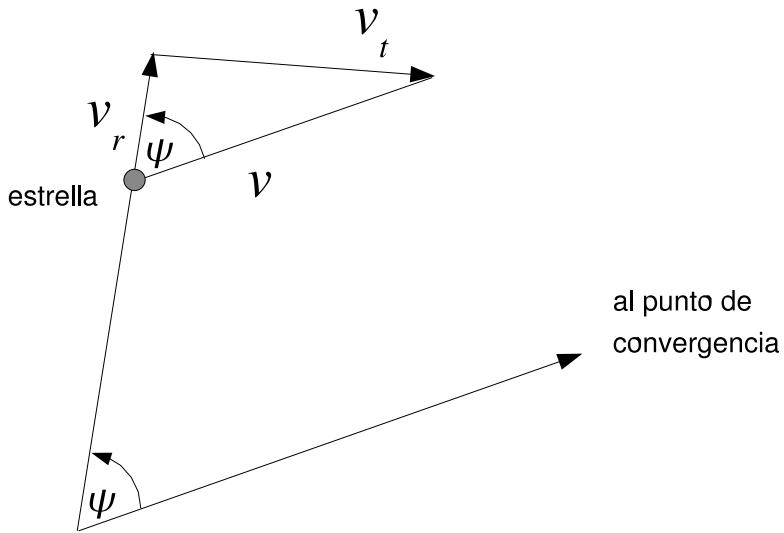


Figura 2.2: Geometría del método de movimiento de cúmulo para determinación de distancias.

o bien directamente en parsecs,

$$d = \frac{1}{\omega''} \text{ pc} \quad (2.3)$$

El ángulo de paralaje, o simplemente paralaje, más grande medido es $0.75''$ que corresponde a una distancia de 4.3 pc para Alfa Centauri. Lo pequeño de este ángulo nos indica que aunque el método es impecable, en la práctica es difícil de medir. Las mejores mediciones se han hecho utilizando el satélite Hipparcos, que estuvo en operación entre los años 1989 y 1993. Hipparcos logró medir posiciones estelares con una precisión de 1 m.a.s. (1 milí segundo de arco), que corresponde a un error de un 20 % para una estrella que tiene un paralaje de 5 m.a.s. o está a una distancia de 200 pc. Hipparcos midió la distancia a unas 120.000 estrellas cercanas.

2.1.2. Movimiento de cúmulo

Este método de determinación de distancias se basa en el efecto geométrico de disminución del tamaño angular de un objeto a medida que éste se aleja del observador. El tamaño angular de un objeto de tamaño fijo d a una distancia D es

$$\theta = \frac{d}{D}, \quad (2.4)$$

diferenciando esta expresión con respecto a tiempo se obtiene

$$D = -\frac{\theta}{\dot{\theta}} v_r \quad (2.5)$$

donde v_r corresponde a la velocidad radial del objeto. En general, un cúmulo estelar no estará viajando en la línea de visión del observador sino que tendrá un vector velocidad apuntando en cualquier dirección, donde habrá una componente radial. En este caso, todas las estrellas aparecerán viajando hacia un punto en cielo denominado **punto de convergencia**, tal como se muestra en la Figura 2.2.

El punto de convergencia es fundamental en el sentido que nos permite conocer el ángulo ψ y con él la velocidad del cúmulo estelar. Por otro lado, la Figura 2.2 también muestra la relación entre la velocidad radial y tangencial del cúmulo, siendo:

$$v_t = v_r \tan \psi, \quad (2.6)$$

donde v_t es la velocidad tangencial del cúmulo, que además se puede expresar en términos de su movimiento propio (μ) y la distancia al cúmulo (D), $v_t = \mu D$. Lo que nos conduce a $D = \frac{v_r \tan \psi}{\mu}$, que expresada términos de paralaje y en las unidades observadas es

$$\frac{\omega}{\text{mas}} = \frac{4,74}{\tan \psi} \left(\frac{v_r}{\text{km s}^{-1}} \right)^{-1} \frac{\mu}{\text{mas ano}^{-1}} \quad (2.7)$$

Este procedimiento permite determinar la distancia a cada una de las estrellas del cúmulo estelar, y con ellas la distancia al cúmulo.

Este método ha sido aplicado a varios cúmulos abiertos cercanos con bastante éxito, particularmente con datos obtenidos por Hipparcos. Unos de los cúmulos fundamentales al que se le ha aplicado este método es el de las Hyades. Perryman *et al.* (1998) obtuvieron una distancia de $46,34 \pm 0,27$ pc. La determinación del punto de convergencia en este trabajo se muestra en la Figura 2.3.

Claramente este método no se puede aplicar a objetos muy distantes ya que la medición de movimientos propios se hace progresivamente más difícil, con lo cual el conjunto de cúmulos útiles para este método contiene un número relativamente reducido. Sin embargo, la importancia de este método reside principalmente en que podemos calibrar la propiedades físicas de algunas estrellas para posteriormente utilizarlas como base para métodos secundarios de determinación de distancias. Algunos de los cuales se discuten en la sección siguiente.

2.1.3. Baade-Wesselink

Si conocemos el radio de una estrella entonces es posible determinar su luminosidad simplemente utilizando:

$$L_{bol} = 4\pi R_s^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (2.8)$$

en donde la temperatura efectiva de la estrella la podemos determinar a través de sus colores, tal como se vio en el curso Astrofísica General.

Es posible expresar la luminosidad bolométrica de una estrella en términos de su magnitud absoluta, siendo ésta:

$$M_{bol} = -2,5 \log L_{bol} = -10 \log T_{eff} - 5 \log R_s + C \quad (2.9)$$

en donde C es una constante que incorpora varios términos geométricos y que podremos eliminar fácilmente. La distancia a una estrella la podríamos obtener fácilmente si determinamos con precisión su magnitud aparente y utilizamos:

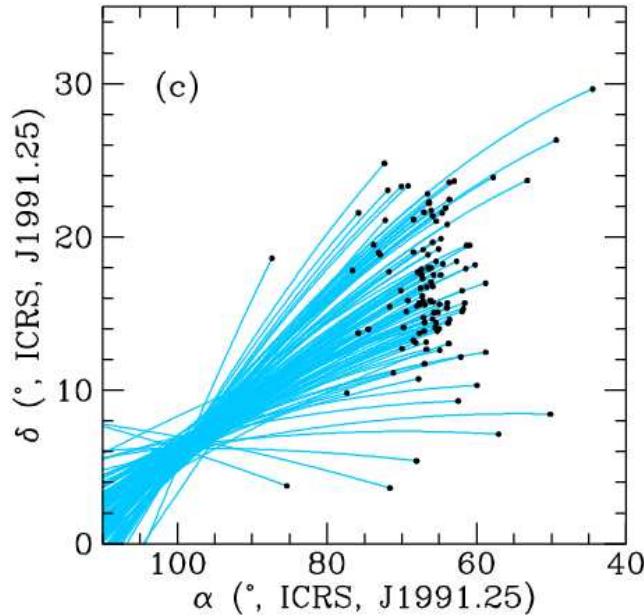


Figura 2.3: Posiciones y movimientos proyectados para estrellas en el cúmulo de la Hyades. La selección de las estrellas se realizó utilizando los datos del satélite Hipparcos. Este gráfico muestra claramente el punto de convergencia para los movimientos de las estrellas. Figura tomada de Perryman *et al.* (1998).

$$m - M = 5 \log d - 5 \quad (2.10)$$

donde d es la distancia medida en parsecs.

Sin embargo, determinar el radio de una estrella no es tarea simple, y sólo se ha podido lograr para un número menor de estrellas de gran tamaño cercanas. Por lo tanto, debemos limitar un poco más nuestros sistemas, como es por ejemplo utilizar estrellas variables, i.e. estrellas que cambian su tamaño como función del tiempo. En estos casos podemos determinar el cambio de tamaño de una estrella variable integrando el corrimiento doppler observado en algún intervalo temporal. Así es como la variación del tamaño se puede expresar como:

$$\Delta r_1 = -p \int_{t_0}^{t_1} v_{los}(t) dt \quad (2.11)$$

Si ahora suponemos que observamos las variaciones de la estrella a través de todo un período, incluyendo particularmente los tiempos t_0 y t_1 , y llamamos r_0 al tamaño desconocido de la estrella en t_0 , entonces podemos escribir:

$$m_1 - m_0 = M_1 - M_0 \quad (2.12)$$

$$= -10 \log T_{eff1} - 5 \log(r_0 + \Delta r_1) + 10 \log T_{eff0} + 5 \log r_0 \quad (2.13)$$

$$= 5 \log \left(\frac{r_0}{r_0 + \Delta r_1} \right) + 10(\log T_{eff0} - \log T_{eff1}) \quad (2.14)$$

Si escogemos un intervalo en el cual la estrella tenga la misma temperatura efectiva al comienzo y al final de la expansión, entonces el segundo término la ecuación anterior se anula, simplificándose significativamente. En este caso particular podemos determinar el radio de la estrella como:

$$r_0 = \frac{H \Delta r_1}{1 - H}, \quad (2.15)$$

donde $H = 10^{(m_1 - m_0)/5}$, completamente determinable.

Una vez que el radio de la estrella es conocido podemos volver a las ecuaciones originales para determinar la magnitud absoluta, y de ahí la distancia a la estrella. Como vemos el método es bastante sencillo y se basa principalmente en asignarle una escala física al sistema a través de incorporar la determinación de las velocidades radiales.

Este método se ha utilizado sistemáticamente en estrellas variables, aunque tiene algunos problemas prácticos que describimos a continuación:

- Hemos supuesto que podemos describir el movimiento de la atmósfera solo por el análisis doppler de alguna línea en la atmósfera de la estrella, sin embargo líneas de diferentes especies se pueden formar a diferentes profundidades y por lo tanto el radio de la estrella depende críticamente de ésta elección.
- Similarmente, hemos supuesto que todo el movimiento es radial, pero éste puede tener componentes azimutales que modificarían nuestra medición de la expansión de la estrella.
- Finalmente, hemos supuesto que existe una relación única entre el color de una estrella y su temperatura efectiva, lo cual no es necesariamente cierto ya que diferentes colores varían en distinta forma a través de un período de una estrella variable. Entonces, no es claro cual color mejor representa la variación de la temperatura efectiva.

Una aplicación de este método es el que se ha hecho a supernovas, particularmente en la observada en la nube grande de Magallanes. En el caso de una supernova no tenemos un movimiento oscilatorio que podamos seguir a través de varios períodos, pero si es posible utilizar un modelo sencillo que nos permita relacionar el color con la temperatura de la cáscara en expansión. Modelando la atmósfera de la SN1987A por un cuerpo negro, Branch (1987) determinó una distancia de 55 ± 5 pc para la nube grande Magallanes. Este resultado es consistente con otros obtenidos utilizando otras técnicas.



Figura 2.4: Observación del telescopio espacial Hubble del anillo en torno a la supernova SN1987A. El anillo es producido por material altamente ionizado en torno a la supernova, el cual es *iluminado* (ver texto) por la explosión.

2.1.4. Retardo temporal

Si una fuente luminosa varía en el tiempo, entonces es posible que podamos estimar su distancia utilizando el retardo en el tiempo de llegada de la señal. Obviamente, el método estará basado en las razones físicas causantes del retardo en la llegada de la señal. Sin embargo, el principio a utilizar es similar estos estos métodos. Por ejemplo, si el flujo de una fuente varía en una escala de tiempo Δt , y la señal viaja a una velocidad c , la escala física de la zona de la variación será aproximadamente $d \sim c\Delta t$. Si además, podemos medir en el cielo el tamaño angular de la fuente, entonces su distancia será simplemente $D \sim c\Delta t/\theta$, donde θ es el tamaño angular de la fuente expresada en radianes.

Geometría de supernovas

Una aplicación de este método es el utilizado en supernovas que se puedan resolver en el cielo. Uno de los casos mas espectaculares es el de la supernova 1987A, la cual explotó en la nube grande de Magallanes y fue descubierta en Chile en el año 1987. Para esta supernova se observó un anillo de material altamente ionizado 90 días después del momento de la explosión inicial (ver Figura 2.4), alcanzando un máximo en su intensidad 400 días después de la explosión, antes de decaer a niveles muy bajos. La explicación más simple para estos anillos, o ecos de luz, es que la luz de la supernova es reprocesada en material que se encuentra a cierta distancia de la supernova, y que el retardo se debe al camino extra que debe seguir la luz hasta llegar a nosotros. El hecho que el anillo se vea como una elipse se interpreta como un anillo circular que presenta un ángulo de inclinación con la línea de visión.

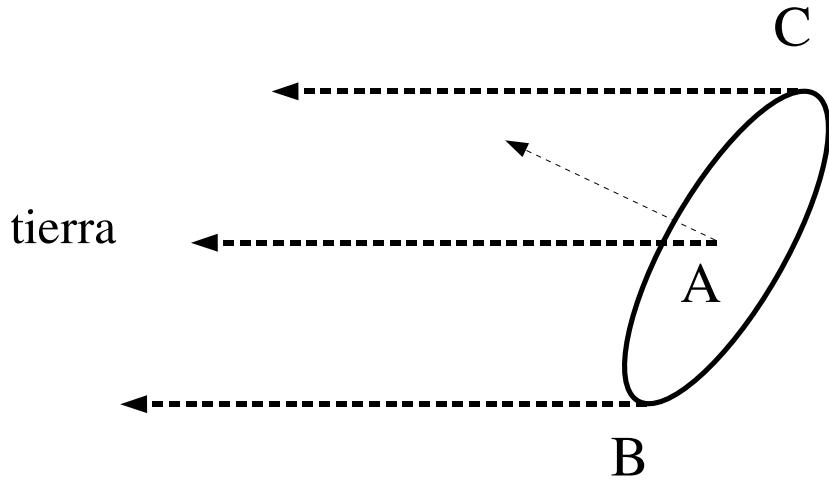


Figura 2.5: Geometría en torno a un anillo de una supernova. La información nos llegará primero desde la sección B del anillo, y al final desde la sección C.

La geometría del sistema se muestra en la Figura 2.5. En donde se ve que la luz que nos llegaría primero sería la proveniente de la sección del anillo denotada como B. La diferencia temporal de la llegada de la señal desde B, comparada con el tiempo de llegada de la señal desde A es:

$$t_0 = \frac{r_{anillo}}{c} (1 - \sin i). \quad (2.16)$$

Después de esto el anillo comienza a aumentar su brillo hasta llegar a un máximo. Finalmente, recibiremos la luz del segmento C. El retardo temporal para esta sección del anillo (comparado con el segmento A) será:

$$t_C = \frac{r_{anillo}}{c} (1 + \sin i) \quad (2.17)$$

Combinando estas dos ecuaciones podemos resolver el tamaño del anillo (r_{anillo}) y $\sin i$. Para el caso específico de la sn1987A se encuentra que $i = (42 \pm 5)^\circ$, y que $r_{anillo} = (0,42 \pm 0,03) \text{ pc}$. Utilizando este resultado, y el hecho que desde la tierra el anillo subtien un ángulo $\theta = 1,66 \pm 0,03$, encontramos que la distancia a la supernova sn1987A, y por lo tanto a la nube grande de Magallanes, es $D = 52 \pm 3 \text{ kpc}$, en perfecto acuerdo con otros métodos de medición de distancias.

2.1.5. Efecto Sunyaev-Zel'dovic

El efecto Sunyaev-Zel'dovic se discutirá en detalle más adelante en estos apuntes, particularmente en el capítulo destinado a cúmulos de galaxias, sin embargo es interesante discutir

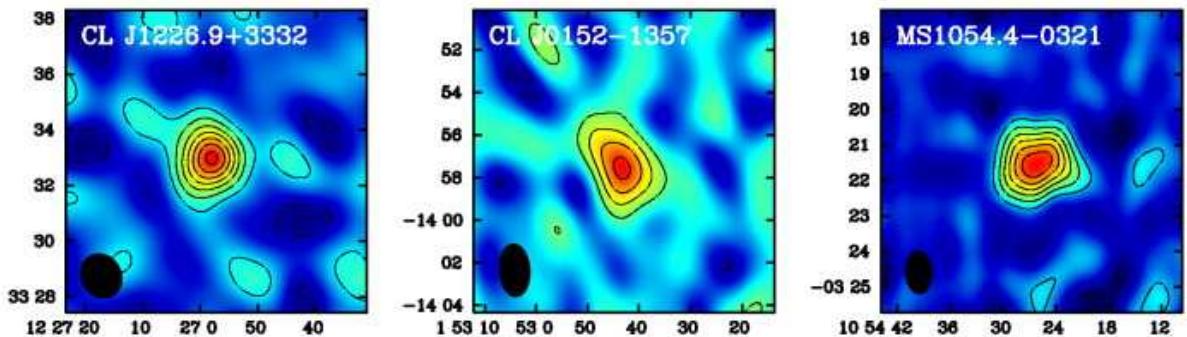


Figura 2.6: Imágenes de tres cúmulos de galaxias observados en ondas submilimétricas. En la zona central de los cúmulos se observa un aumento de la temperatura de la radiación del fondo de microondas debido a la presencia del gas intracúmulo.

este efecto en el marco de los indicadores de distancias, ya que es uno de los pocos métodos que nos permiten medir distancias absolutas en escalas cosmológicas.

El fondo de radiación cósmica, que localmente se observa el máximo en la región de microondas, llena todo el espacio en nuestro entorno. Esta radiación, muy bien descrita por un cuerpo negro de una temperatura aproximada de 2.7 K, es altamente isotrópica².

Los cúmulos de galaxias están compuestos por galaxias, gas y materia oscura. La mayor parte de la masa bariónica que está presente en un cúmulo está en forma de gas muy caliente o plasma ($T \sim 10^8$ K). Este gas emite radiación Bremsstrahlung, la cual podemos observar en forma extendida en rayos x.

El efecto Sunyaev-Zel'dovic consiste en la deformación espectral del fondo de radiación cósmica producto de la interacción de los electrones de alta energía en los cúmulos de galaxias con los fotones de baja energía del fondo de radiación. Estos fotones en su viaje hasta nosotros sufren *scattering* de Compton con los electrones presentes en un cúmulo, con lo cual aumentan su energía. El espectro se deforma de tal manera que hay un aumento de fotones de frecuencias mayores que la frecuencia donde se produce el máximo de la curva de Planck, y una disminución a frecuencias menores. Tres ejemplos de este fenómeno se pueden ver en la Figura 2.6.

La magnitud del efecto es proporcional a la probabilidad de *scattering*³ de Compton, que es:

$$P_{SZ} = (1 - e^{-\tau_{SZ}}), \quad (2.18)$$

donde

$$\tau_{SZ} = \sigma_T \int_s n_e(s') ds', \quad (2.19)$$

²Las principales fuentes de anisotropía se discuten en los apuntes de Astrofísica General y en más detalle en el capítulo 7 de estos apuntes.

³En castellano se puede utilizar la palabra dispersión como sinónimo de *scattering*, sin embargo aquí preferimos el término en inglés por ser más preciso

siendo σ_T la sección eficaz de *scattering* de Thompson, n_e la densidad electrónica, y s el camino que recorre el fotón.

Como se puede ver en la ecuación anterior este efecto es independiente de la distancia al cúmulo de galaxias, con lo cual podemos determinar la densidad electrónica del medio intracúmulo. Si ahora utilizamos esta medida en conjunto con una que si dependa de la distancia, entonces podemos determinar la distancia al cúmulo. El flujo en rayos x proveniente de un cúmulo de galaxias depende de la temperatura del gas, la densidad electrónica, la distancia y del tamaño angular del cúmulo. La emisividad está dada por:

$$\epsilon(\nu) = A n_e^2 T_x^{-1/2} e^{-h\nu/kT_x}, \quad (2.20)$$

y el flujo en rayos x observado corresponde a $f_x(D) = \frac{4}{3}\pi r_C^3 \epsilon(\nu)/(4\pi D^2)$, si suponemos un cúmulo homogéneo con simetría esférica. Por otro lado, el tamaño angular del cúmulo (en rayos x) es $\delta\theta_x = 2r_c/D$, con lo cual podemos despejar la distancia como:

$$D = \frac{A}{24\sigma_T^2} T_x^{-1/2} e^{-h\nu/kT_x} \tau_{SZ}^2 \frac{\delta\theta_x}{f_x(\nu)} (1+z)^{-2} \quad (2.21)$$

Por lo tanto, al combinar una medida de la densidad electrónica del cúmulo independiente y otra dependiente de la distancia, podemos resolver nuestro sistema y determinar la distancia al cúmulo. En este tratamiento hemos hecho varias suposiciones como son la homogeneidad del cúmulo y su esfericidad. La primera es fácil de superar, basta con incluir un modelo más realista del sistema, pero la segunda es bastante más difícil de evaluar. Sabemos que los cúmulos de galaxias no son esféricos, y que es muy difícil conocer su verdadera forma. Para superar este problema se puede utilizar un gran número de cúmulos cuyo eje principal de simetría esté orientado al aleatoriamente, con ello no conoceríamos precisamente la distancia a ninguno de los cúmulos, pero si en promedio. Sin embargo, conseguir una muestra de cúmulos cuyas orientaciones sean aleatorias es prácticamente imposible ya que la detección de estos objetos siempre dependerá de la orientación con que lo vemos.

2.2. Estimadores relativos de distancia

Hemos visto en la sección anterior que existen variados métodos para determinar distancias en forma absoluta en astronomía, que consideran objetos específicos. Esto es posible debido a que la interpretación física de estos objetos es en general muy simple y se puede hacer con física desde primeros principios. Desafortunadamente, esta interpretación simple no está disponible para la gran mayoría de los objetos que observamos en el cielo. Sin embargo, aunque no se entienda el detalle de los procesos físicos actuando en algún objeto en particular, aún es posible utilizarlos para estimar distancias, ya que algunos de estos sistemas complicados siguen leyes empíricas simples.

Utilizar relaciones empíricas simples tiene el gran problema de que no entender la física del proceso actuando en la relación no nos permite evaluar en forma absoluta el sistema, y por ende no poder determinar su distancia. Sin embargo, una vez que la relación empírica ha sido calibrada por algún método absoluto, se puede utilizar para toda la familia de estos objetos.

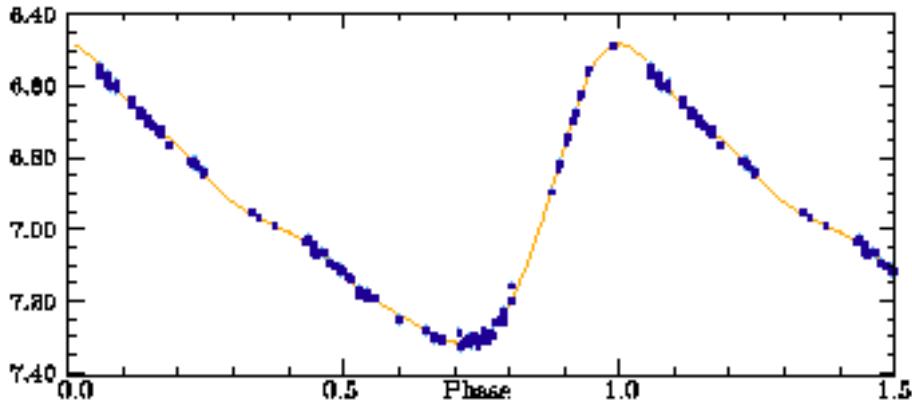


Figura 2.7: Curva de luz de una estrella Cefeida. La variación en el brillo es evidente y en este caso su amplitud es de aproximadamente una magnitud.

2.2.1. Estrellas variables

Una de las familias de objetos más importantes en astronomía para la determinación de distancias es de las estrellas variables. Esta familia está constituida por varios miembros con distintas propiedades como: luminosidad, temperatura, metalicidad, etc. Hoy se conocen varias decenas de miles de estrellas variables, entre las que destacan: las estrellas de período largo, Cefeidas clásicas, estrellas W Virginis, RR Lyrae, δ Scuti, β Cefeidas y ZZ Ceti.

Herietta Lewitt, trabajando para Charles Pickering, a comienzos del siglo XX descubrió más de 2.000 de estas estrellas. Estudiando las estrellas cefeidas en la nube pequeña de Magallanes notó que las estrellas más luminosas tenían períodos de pulsación más largos. Ella encontró una relación entre el logaritmo del período de pulsación y el brillo medio de las estrellas en la nube pequeña de Magallanes, con sólo 0.5 magnitudes de error. Dado que todas las estrellas en la nube pequeña de Magallanes se encuentran aproximadamente a la misma distancia, diferencias en sus magnitudes aparentes se traducen en diferencias en sus magnitudes absolutas o luminosidades. Una versión un poco más actualizada del diagrama período-luminosidad encontrado por Lewitt se muestra en la Figura 2.8. Esta relación abrió la posibilidad de determinar distancias en astronomía, simplemente vía la determinación de la luminosidad de una estrella a través de su período y la posterior comparación con la magnitud aparente de ésta. La relación período-luminosidad se puede expresar como:

$$M_{<V>} = -2,80 \log_{10} \Pi - 1,43, \quad (2.22)$$

donde Π es el período y se mide en días.

Se estima que nuestra galaxia debe contener varios millones de estrellas variables, de una población total de varios miles de millones de estrellas. Esto sugiere que el fenómeno de pulsación puede ser un fenómeno transiente. Esta idea toma mayor peso al observar la posición de estas estrellas en un diagrama H-R. Todas ellas se sitúan en regiones muy definidas en el diagrama H-R, lejos de la secuencia principal, donde las estrellas pasan la mayor parte del tiempo. Una región en particular es la denominada *banda de inestabilidad*

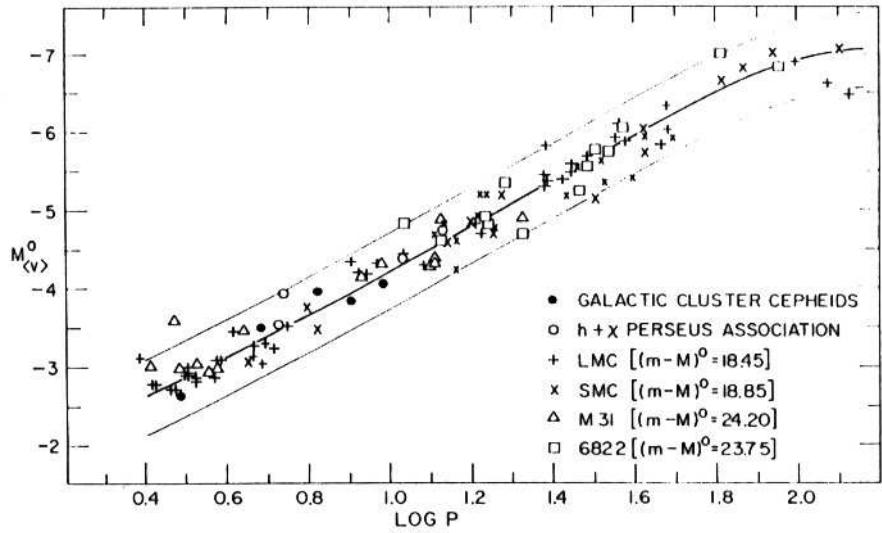


Figura 2.8: Relación período-luminosidad para estrellas Cefeidas.

(*instability strip* en inglés), que divide el diagrama H-R en dos, con un ancho de tan sólo ~ 800 K). Durante su evolución, algunas estrellas cruzan la banda de inestabilidad, presentando pulsaciones, que terminan una vez que las estrellas dejan esa zona. Algunas estrellas, como Polaris, han sido detectadas saliendo de la zona de inestabilidad, y por lo tanto en las etapas finales de su historia de pulsadores.

Una de las características más interesantes del este nuevo método de determinación de distancias es el hecho que las variables Cefeidas son estrellas supergigantes, siendo varias decenas de veces más luminosas que el sol, con lo cual se pueden observar a distancias intergalácticas. Estas estrellas fueron fundamentales en establecer la existencia de otras galaxias como la nuestra en el universo.

Mecanismo de pulsación

El período de pulsación de una estrella variable se puede estimar en forma simple, suponiendo que las pulsaciones son el producto de ondas de sonido viajando al interior de la estrella. Entonces, el período será simplemente el tiempo que demora en viajar dicha onda una distancia igual al diámetro de la estrella (con densidad constante). La velocidad del sonido para un fluido adiabático es:

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}. \quad (2.23)$$

Por otro lado, la presión se puede obtener de la expresión para equilibrio hidrostático,

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4}{3}\pi G\rho^2 r. \quad (2.24)$$

Que puede ser integrada imponiendo $P = 0$ en $r = R$. Con esto,

$$P(r) = \frac{2}{3}\pi G\rho^2(R^2 - r^2). \quad (2.25)$$

El período de pulsación será entonces,

$$\Pi = 2 \int_0^R \frac{dr}{v_s} \simeq 2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{3}\gamma\pi G\rho(R^2 - r^2)}}, \quad (2.26)$$

o bien,

$$\Pi = \sqrt{\frac{3\pi}{2\gamma G\rho}}. \quad (2.27)$$

Esto significa que el período de pulsación de una estrella es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su densidad. Esta relación se conoce como *la relación período-densidad media*, y explica lo que se observa en la región de inestabilidad, donde estrellas más densas como las enanas blancas presentan períodos mucho más cortos.

Esta estimación del período de pulsación es bastante simple e ignora varios otros procesos, pero aún así nos entrega una rango aproximado para varios tipos de estrellas. Por ejemplo, para una Cefeida típica de masa $M = 5M_\odot$ y $R = R_\odot$, se obtiene un período de aproximadamente 10 días, el cual cae dentro de los períodos observados para estas estrellas.

El primero en explicar satisfactoriamente el mecanismo de pulsación de una estrella variable fue Eddington. Quién se dio cuenta que una estrella pulsante se podía comparar con un motor a combustión, y que la válvula del mecanismo debía ser una opacidad variable en la atmósfera de la estrella. En condiciones normales, la opacidad de una estrella disminuye con la compresión⁴, sin embargo en algunos casos particulares el proceso puede ser el opuesto.

Las condiciones especiales que mantienen las pulsaciones en una de estas estrellas son las de una *zona de ionización parcial* en la atmósfera de la estrella. Bajo estas condiciones, el trabajo realizado durante la compresión se utiliza en aumentar la opacidad en vez de en un aumento de la temperatura como en una estrella normal. Durante la expansión, los iones se recombinan con los electrones disminuyendo así la opacidad y además liberando la energía acumulada durante la etapa de compresión. Así entonces, la atmósfera de la estrella está en continuo movimiento, absorbiendo o liberando energía a través de ir modificando el estado de ionización de los átomos que la componen.

2.2.2. Cinemática de galaxias

Saliendo del entorno de nuestra galaxia las siguientes estructuras que vemos son galaxias tales como la nuestra. De ahí que es razonable intentar relacionar las propiedades intrínsecas de dichas galaxias a observables que podamos medir y por ende inferir sus distancias. Sin embargo, esto no es fácil de hacer como es claro, ya que las galaxias tienen un rango muy grande de propiedades como su masa, colores, poblaciones estelares, etc.

Una de las posibles líneas a explorar es la entregada por la cinemática de las galaxias y su relación con la luminosidad total de la galaxia. Por ejemplo, el suponer que la velocidad

⁴En la opacidad de Kramers la opacidad va como $\kappa \propto \rho/T^{3,5}$, y con compresión la temperatura domina, disminuyendo la opacidad.

promedio en un sistema estelar depende de la masa global de éste es razonable (esto se puede deducir con argumentos que utilicen el teorema del virial). Por otro lado, que la luminosidad total de una galaxia dependa de la masa total de ésta también es razonable, claro que no esta probado. Con estos dos argumentos se espera entonces que exista alguna relación entre las propiedades cinemáticas de las galaxias y su luminosidad. Encontramos que las galaxias espirales y las galaxias elípticas siguen dos relaciones que podemos utilizar para determinar sus distancias.

Galaxias Espirales

La primera aplicación exitosa de este método fue desarrollada por Tully & Fisher (1977). Ellos mostraron que sus mediciones de la velocidad de rotación de la muestra de 10 galaxias que tenían correlacionaba muy bien con la luminosidad de cada una de las galaxias. Esto se conoce hoy como la relación Tully-Fisher. Ellos midieron la velocidad de rotación de las galaxias utilizando el hecho que estas galaxias espirales contenían cantidades importantes de hidrógeno neutro, el que produce espontáneamente la línea en 21 cm (en el régimen de radio).

Las observaciones en 21cm de que ellos disponían no tenían la resolución angular como para distinguir nubes individuales en cada una de las galaxias, pero si era posible distinguir el ensanchamiento doppler de la línea producida por el movimiento de rotación global de la galaxia. Tal como en nuestra galaxia, en las galaxias espirales el hidrógeno neutro se encuentra en el disco de la galaxia moviéndose en órbitas circulares. Como diferentes regiones de la galaxia se mueven con distantes velocidades relativas, el ensanchamiento doppler es una consecuencia natural de esta configuración. Debemos además considerar que las galaxias presentan un ángulo de inclinación que es aleatorio, con lo cual el ensanchamiento de la línea de 21 cm será mayor o menor dependiendo de la geometría. Una galaxia que sea observada de frente no tendrá componentes radiales de la velocidad de rotación que podamos medir, por otro lado una galaxia completamente de canto tendrá el máximo de velocidad muy claramente definido. Corrigiendo⁵ por dicho efecto tendremos que el ancho W es:

$$W_R = W_o / \sin i, \quad (2.28)$$

donde i es el ángulo de inclinación de la galaxia y W_o el ancho del perfil de la línea de 21 cm observado.

No sólo es necesario corregir nuestras medidas de la velocidad de rotación del disco de la galaxia, sino también su medida de la luminosidad. La luz proveniente de las estrellas en las galaxias espirales sufre de varios efectos, que debemos corregir, antes de llegar a nosotros. Sin duda el más importante de todos es el de la extinción ya que estamos considerando galaxias espirales. Por lo tanto antes de inferir la distancia a una galaxia utilizando el método Tully-Fisher y comparando su magnitud absoluta y magnitud estandar debemos descontar el efecto de la extinción. Esto es en general difícil de hacer con alta precisión, pero es posible utilizar bandas en las cuales dicho efecto sea mínimo. Es por esto que recientes estudios que incluyen la relación Tully-Fisher utilizan bandas infrarrojas. Algunas determinaciones de la relación en distintas bandas se muestran a continuación:

⁵También se debe corregir el hecho que estas nubes de HI tienen velocidades aleatorias intrínsecas que pueden ser del orden de 10 km/s y que actúan modificando el perfil producido por la rotación.

$$M_B = -7,48(\log W_R - 2,50) - 19,55 + \Delta_B \pm 0,14 \quad (2.29)$$

$$M_R = -8,23(\log W_R - 2,50) - 20,46 + \Delta_R \pm 0,10 \quad (2.30)$$

$$M_I = -8,72(\log W_R - 2,50) - 20,94 \pm 0,10 \quad (2.31)$$

$$M_H = -9,50(\log W_R - 2,50) - 21,67 \pm 0,08 \quad (2.32)$$

$$(2.33)$$

Los factores Δ_B y Δ_R son factores que debieron ser introducidos arbitrariamente para corregir la diferencia entre galaxias de campo y galaxias de cúmulos, siendo estas en promedio más rojas que las anteriores. Ciertamente, la determinación de la relación utilizando bandas infrarrojas es más robusta y la dispersión es también menor.

Galaxias Elípticas

Dado que existe una relación entre una cantidad cinemática y la luminosidad de una galaxia espiral es natural preguntarse si existe una relación similar para galaxias elípticas. Si una relación equivalente a la relación Tully-Fisher existiera para galaxias elípticas, ésta sería de tremenda importancia ya que las galaxias elípticas habitan principalmente en cúmulos y están casi completamente libres de los efectos del polvo. Las galaxias elípticas sin embargo, tienen sólo una componente pequeña de velocidad de rotación y su forma proviene principalmente de la velocidad aleatoria de las estrellas que la conforman.

La relación entre la luminosidad encerrada en el radio efectivo de una galaxia elíptica correlaciona muy bien con la dispersión de velocidad central de la galaxia (σ_0). Esta relación se conoce como relación Faber-Jackson, por los astrónomos que la descubrieron. Con esto es posible predecir la luminosidad de una galaxia elíptica y compararla con la magnitud observada y de ahí deducir su distancia, al igual que en la relación Tully-Fisher.

La relación Faber-Jackson, sin embargo, presenta una dispersión considerable y por lo tanto la determinación de distancias a galaxias individuales utilizando este método es bastante pobre. Gran parte de la dispersión observada proviene del hecho de que muchas de las propiedades de una galaxia elíptica dependen del radio efectivo de la galaxia. Es así como se puede construir una relación con mucho menor dispersión que incluya la dispersión de velocidad central, la luminosidad y el radio efectivo. A esta relación se la conoce como *plano fundamental*.

Es importante notar que estas relaciones tienen una precisión bastante baja y por lo tanto la determinación de distancias a galaxias individuales por este método es mala, pero dado que estamos considerando galaxias elípticas que se encuentran mayoritariamente en cúmulos, es posible entonces utilizar el método para determinar distancias a cúmulos de galaxias. Por ejemplo, si cada galaxia tiene típicamente un error de 15 % en su distancia, la distancia a N galaxias que están en un cúmulo tendrá un error de solamente $\frac{15}{\sqrt{N}}\%$, con lo cual sólo debemos incluir un gran número de ellas para disminuir el error hasta la precisión requerida.

2.2.3. Fluctuaciones de brillo superficial

Si una galaxia está lo suficientemente cerca como para poder distinguir las estrellas individuales que la componen, entonces podemos utilizar los métodos que se basan en la

información estelar para determinar su distancia. Por otro lado, para galaxias en la cuales no es posible distinguir estrellas individuales aún es posible determinar su distancia utilizando el hecho que la luz proviene de fuentes discretas, a pesar que no las podamos resolver.

Supongamos que observamos una galaxia que se encuentra a una distancia D , la cual está compuesta solamente de estrellas de luminosidad L , teniendo una densidad superficial n . Si observamos esta galaxia con una resolución angular $\delta\theta$, entonces el número de estrellas contenidas en este elemento de resolución es $N = n(D\delta\theta)^2$, y el flujo proveniente de esta región es $F = Nf = nL\theta^2/(4\pi)$. El flujo de esta región es independiente de la distancia, y por lo tanto no se puede utilizar para determinarla. Por otro lado, distintas regiones tendrán distinto número de estrellas, distribuidas de acuerdo a una distribución de Poisson. La dispersión del número de estrellas en regiones similares es $\sigma = N^{1/2}$, con lo cual la dispersión en el flujo observado en distintos elementos de resolución es:

$$\sigma_F = N^{1/2}f = \frac{n^{1/2}\delta\theta L}{4\pi}D^{-1} \quad (2.34)$$

Si ahora se compara la varianza del flujo observado con el flujo promedio proveniente de los distintos elementos de resolución obtenemos,

$$\frac{\sigma_F^2}{F} = f = \frac{L}{4\pi D^2}. \quad (2.35)$$

Es decir, mediante este método se puede determinar el flujo observado de las estrellas individuales que componen la galaxia. Si ahora suponemos que dos galaxias están compuestas por las mismas estrellas entonces la razón de sus flujos depende del cuadrado de la razón de sus distancias. Con esto podemos determinar distancias relativas entre las dos galaxias.

El suponer que las galaxias están formadas por estrellas de la misma luminosidad es claramente erróneo. Un modelo más realista es el que incluye una variedad de especies para la población de estrellas de las galaxias, cuyas luminosidades son L_i . En este caso el flujo de cada una de estas estrellas es f_i , y el método se generaliza a:

$$\frac{\sigma_F^2}{F} = \frac{\sum_i N_i f_i^2}{\sum_i N_i f_i} = \frac{\langle L \rangle}{4\pi D^2}, \quad (2.36)$$

donde

$$\langle L \rangle = \frac{\sum_i N_i L_i^2}{\sum_i N_i L_i} \quad (2.37)$$

que corresponde a la luminosidad estelar media. En este caso las fluctuaciones r.m.s. serían las mismas que observaríamos para una galaxia poblada solamente por estrellas de luminosidad L . Ahora bien, si dos galaxias contienen la misma mezcla de poblaciones estelares, entonces la distancia relativa estará dada por la ecuación anterior.

Distancias a través de este método han sido obtenidas para muchas galaxias, claro que como este solo produce distancias relativas es necesario determinar la distancia a algunas de ellas a través de otros métodos (como los mencionados anteriormente) para fijar la escala del sistema.

Para aplicar este método también es importante notar que la razón de las distancias depende de L_i^2 , con lo cual es sumamente sensible a la población estelar más luminosa en la

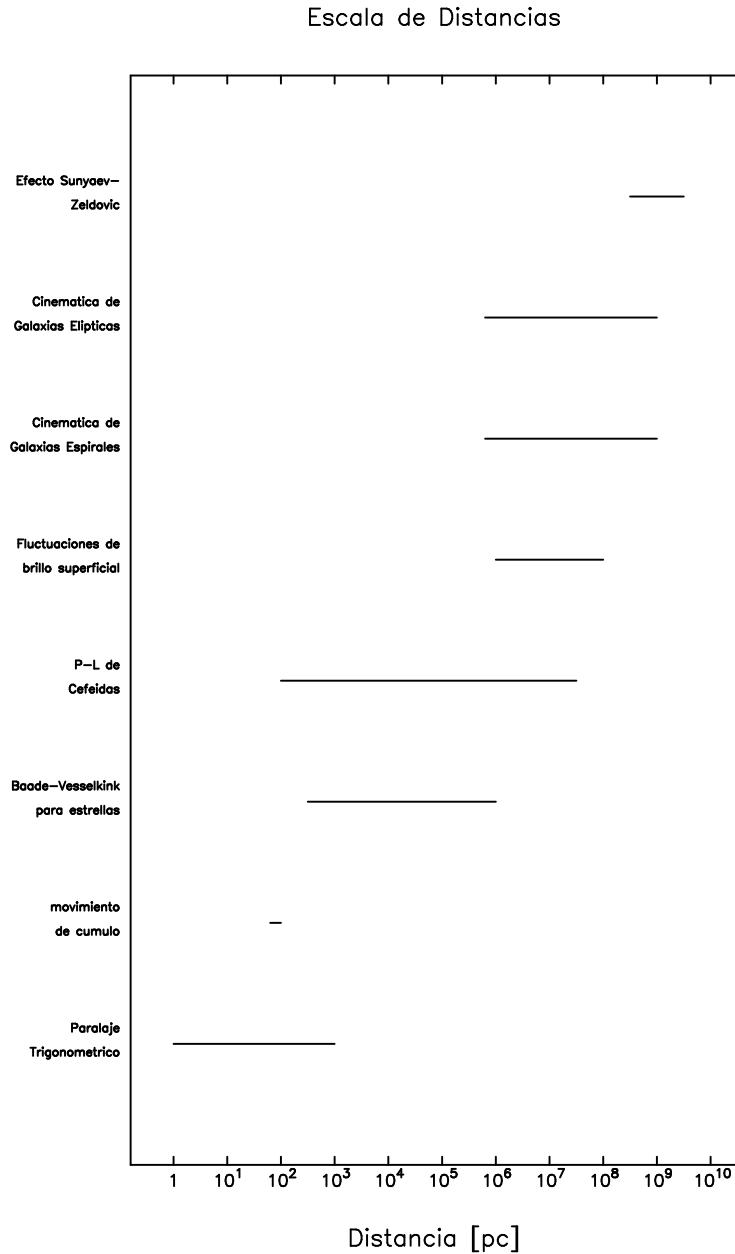


Figura 2.9: Resumen de rangos de distancia para los distintos métodos discutidos en este trabajo.

galaxia. Este número depende por lo general de la población de gigantes rojas presentes, con lo cual conviene utilizar la bandas rojas (i.e. I) para aumentar el contraste del efecto. Por otro lado, también conviene realizar las observaciones en las regiones más alejadas del centro de la galaxia ya que ahí el número de estrellas es menor y sus fluctuaciones estadísticas mayores. Sin embargo, la observación de estas regiones es muy complicada del punto de vista de las observaciones, teniéndose que buscar una zona de compromiso donde la señal observacional sea más sensible al efecto que queremos medir.

2.3. Resultados

La Figura 2.9 resume claramente el rango en el cual se pueden utilizar los métodos descritos en las secciones anteriores para la determinación de distancias. Lo que queda claro viendo la figura es que para medir distancias en escalas cosmológicas es necesario utilizar varios pasos previos que incluyen la calibración de distintos indicadores. Todos estos indicadores incluyen sus propios efectos sistemáticos y correcciones. A este proceso de determinación progresiva de distancias se denomina *escala de distancias*.

Algunas de las distancias más relevantes se muestran a continuación:

Objeto	distancia
Centro galactico	$7,9 \pm 0,4$ kpc
Nube grande de Magallanes	50 ± 2 kpc
M31	740 ± 40 kpc
Cumulo de Virgo	16 ± 1 Mpc

2.4. Problemas y Ejercicios

1. **Problema 2.1:** Las supernovas tipo Ia son candelas estándar de $M_B \simeq -19,6 \pm 0,2$. Calcule la distancia a la supernova SN1963p (tipo Ia) en la galaxia NGC 1084. La supernova tiene una magnitud $B = 14,0$ en el peak de brillo. La extinción es de $A = 0,49$ mag para NGC 1084.
2. **Problema 2.2: Cúmulo de Virgo:** El cúmulo de galaxias de Virgo es el cluster masivo más cercano, se extiende 10 grados sobre el cielo y contiene un número apreciable de galaxias brillantes.
 - a) Encuentre la distancia a Virgo basándose en la siguiente tabla de indicadores de distancias con sus respectivos resultados e incertezas $d_i \pm s_i$ (media y desviación estándar) para Virgo (Jacoby *et al.* 1992). Además halle la incerteza del estimador estadístico que Ud. usó.
 - b) Espectros de galaxias que pertenecen a Virgo indican una velocidad de recesión promedio de 1136 km/s para el cúmulo. Combinando con el resultado obtenido en el ítem 2a, encuentre la constante de Hubble H_0 .
 - c) Debido a que Virgo representa una masa apreciable en nuestras cercanías, debe corregir la velocidad de Virgo por nuestro movimiento hacia él, estimado en 168 km/s . ¿Cuál es la corrección que dará en su valor de H_0 ?
 - d) Paralajes recientes determinadas por el satélite Hipparcos indican que nuestras escalas de distancias son demasiado cortas, y que deberían ser incrementadas en un 10 %. Si usted hace esta corrección en la distancia a Virgo, ¿qué nuevo valor de H_0 obtiene?
 - e) Calcule el tiempo de Hubble.
 - f) El cúmulo de Virgo contiene miles de galaxias moviéndose bajo la influencia de su potencial gravitacional. La dispersión de velocidad radial de las galaxias de Virgo es $\sigma_r = 666 \text{ km/s}$. Use el teorema del virial para hallar la masa del cúmulo.
 - g) ¿Cuánto tiempo le tomaría a una galaxia cruzar el cúmulo de Virgo?. Asuma la velocidad rms σ_r . Compare con el tiempo de Hubble.
 - h) ¿Cuál es la diferencia de velocidad de Hubble entre puntos, diametralmente opuestos, del cúmulo. ¿Cómo se relaciona este tiempo (velocidad de Hubble/distancia) con la escala de temporal que calculó antes?

Método	Distancia a Virgo (Mpc)
1. Cefeidas	$14,9 \pm 1,2$
2. Novas	$21,1 \pm 3,9$
3. Función de luminosidad de Nebulosas planetarias	$15,4 \pm 1,1$
4. Función de luminosidad de cúmulos globulares	$18,8 \pm 3,8$
5. Fluctuaciones de brillo superficial	$15,9 \pm 0,9$
6. Relación Tully-Fisher (espirales)	$15,8 \pm 1,5$
7. Relación Faber-Jackson / D-sigma (elípticas)	$16,8 \pm 2,4$
8. Supernovas tipo Ia	$19,4 \pm 5,0$

3. **Problema 2.3:** Los *Gamma Ray Burst* (GRB), al parecer son tremendas explosiones que ocurren asociadas con supernovas y/o agujeros negros. Estos objetos son muy luminosos en todas las longitudes de onda. Sin embargo la luz decae en algunos minutos. Se observa que este decaimiento es más lento para GRB a más alto redshift. ¿Por qué?. Cuantifique la relación esperada entre tasa de decaimiento y redshift.
4. **Problema 2.4:** Describa cuál es el mecanismo físico de pulsación de una estrella pulsante tipo cefeida. Centre la discusión en el efecto que tiene la zona de helio parcialmente ionizado. ¿Por qué no todas las estrellas pulsan?
5. **Problema 2.5:** El período de pulsación de una RR-Lyrae es $\simeq 18$ Hs., la temperatura efectiva es del orden de 7200 K, la luminosidad $\simeq 40 L_\odot$, y la masa $\simeq 0,6 M_\odot$. ¿Cuál es el período de pulsación fundamental del sol?

Datos:

$$\begin{aligned}M_\odot &= 2 \times 10^{33} \text{ g}, \\L_\odot &= 3,8 \times 10^{33} \text{ erg/s}, \\T_\odot &= 6000 \text{ K}\end{aligned}$$

2.5. Referencias

Binney, J. & Tremaine, S., Galactic Astronomy, Princeton, Series in Astrophysics, 1998.

Capítulo 3

Galaxias

3.1. Clasificación de galaxias

Primeras galaxias aparecen en 1923. Hubble desarrolló el primer esquema de clasificación de galaxias. Este esquema de clasificación no sigue evolución temporal. Se distinguen, al menos, tres tipos de galaxias: Elípticas, Espirales e Irregulares.

3.1.1. Sistema de Hubble

- Elípticas, E_n : E_0 circulares, E_7 alargadas, $n = 10(1 - b/a)$, donde b/a es la razón axial.
Estas galaxias son, en general, triaxiales con $a \geq b \geq c$
 - $a = b = c$ galaxia esférica
 - $a = b$ oblata
 - $a = c$ prolata
- Lenticulares, SO : SO_1 (sin estructura), SO_2 , SO_3 (con envolvente)
- Espirales, Sa, Sb y Sc y barreadas SBa, SBb y SBc.
 - Sandage, más tarde, subdividió en Sc, Scd, Sd, Sdm, Sm y Im.
 - Además, Sandage agregó varios símbolos:
 - r : presencia de un anillo interno
 - R : presencia de un anillo externo
 - S : brazo espiral que se inicial al final de la barra, o continúan al centro de la galaxia.
- Irregulares: El resto.

En general, este es un sistema no muy elegante. **Hubble Tuning fork**

3.1.2. Sistema DDO (David-Dunlop Observatory)

Sistema complementario al anterior, desarrollado por van den Berg. Agrega una Clasificación Luminaria. Trata de hacer un paralelo con el sistema de evolución estelar; es decir, las galaxias super gigantes, con barras y brazos bien desarrollados tienen una I; las galaxias pequeñas, de bajo

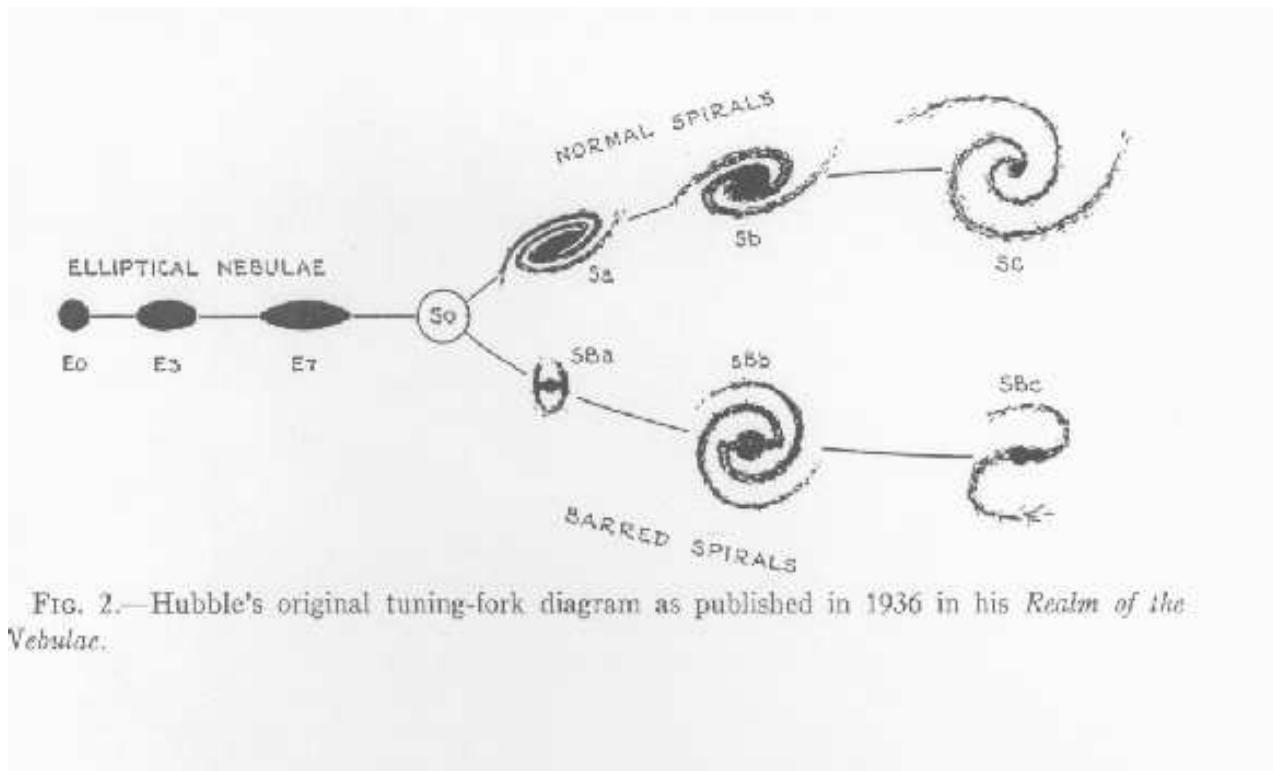


FIG. 2.—Hubble's original tuning-fork diagram as published in 1936 in his *Realm of the Nebulae*.

Figura 3.1: Diagrama original de Hubble, tal como fue publicado en 1936 en *Realm of the Nebulae*

brillo superficial, irregulares tienen una V. El sistema supone que las galaxias con brazos bien desarrollados son también las más luminosas. El Catálogo Shapley-Ames contiene clasificación para 1300 galaxias brillantes. Un ejemplo, la galaxia NGC 1097 se clasifica como RSBbc(rs)I-II (Galaxia espiral barrreada, muy grande con anillo externo o interno, y brazos espirales que se inician al final de la barra.)

3.1.3. Sistema de De Vaucoulers

Se puede encontrar esta clasificación en el *Second Reference Catalog of Bright Galaxies*. La clasificación está basada en cuán compacta son las galaxias T . Las galaxias más compactas, $T = -6$. Galaxias normales, $T = -5$. Galaxias Lenticulares, $T \sim 0$. Espirales desde $T = 1$, para Sa, hasta $T = 11$, para irregulares azules (Regiones HII). En este sistema no hay diferencia entre una barrreada y normal.

3.1.4. Sistema de Galaxias Anémicas de van den Bergh

En los años 70 van den Bergh notó que galaxias en cúmulos se veían diferentes a las galaxias de campo. Al parecer, estas galaxias tienen menos gas y menos formación de estrellas que sus contrapartidas en ambientes menos densos. Se proponen las galaxias tipo Espirales

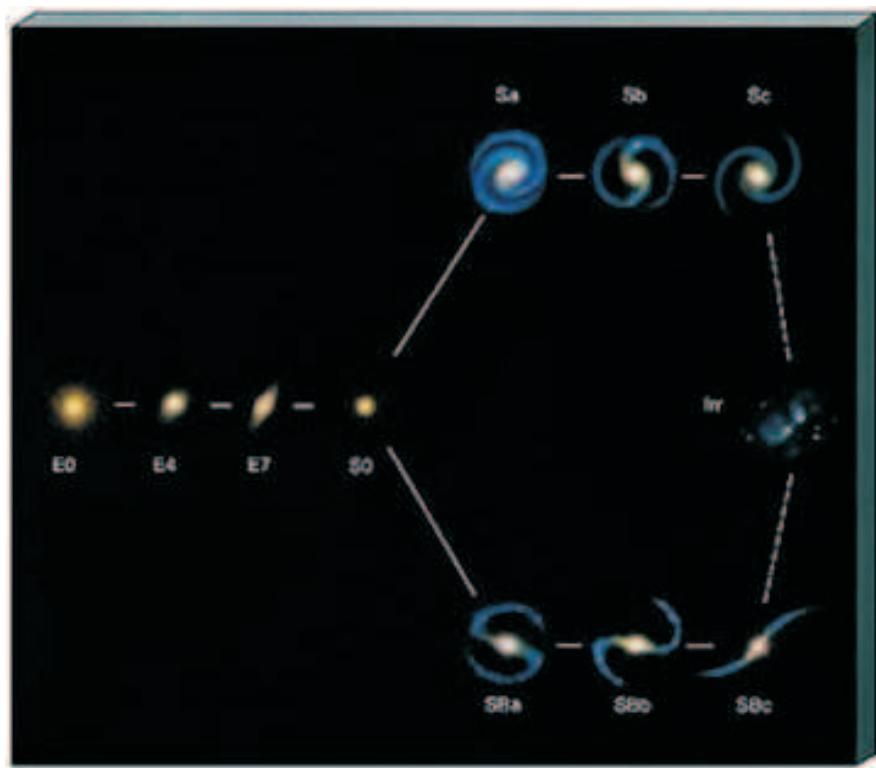


Figura 3.2: Clasificación de Hubble. Las imágenes son fotografías de galaxias reales.

Anémicas como una transición entre espirales regulares y lenticulares.

$$\begin{array}{l} \text{Sa} \rightarrow \text{Aa} \rightarrow \text{SOa} \\ \text{Sb} \rightarrow \text{Ab} \rightarrow \text{SOb} \end{array}$$

3.1.5. Sistema de Morgan

Este sistema tiene dos componentes básicas:

- Concentración (a-f-g-k):

Correlación entre el tipo de estrellas en la galaxia y cuán compacta es. Ejemplos, Elípticas, hechas principalmente de estrellas tipo K super gigantes y altamente concentradas; Irregulares, no son concentradas y tienen una población de estrellas jóvenes y tipo espectral tempranos.

- Forma: (S-B-E-I-E_p-D-L-N). Ej., kS4, fS1, fgB1, o kgS7.

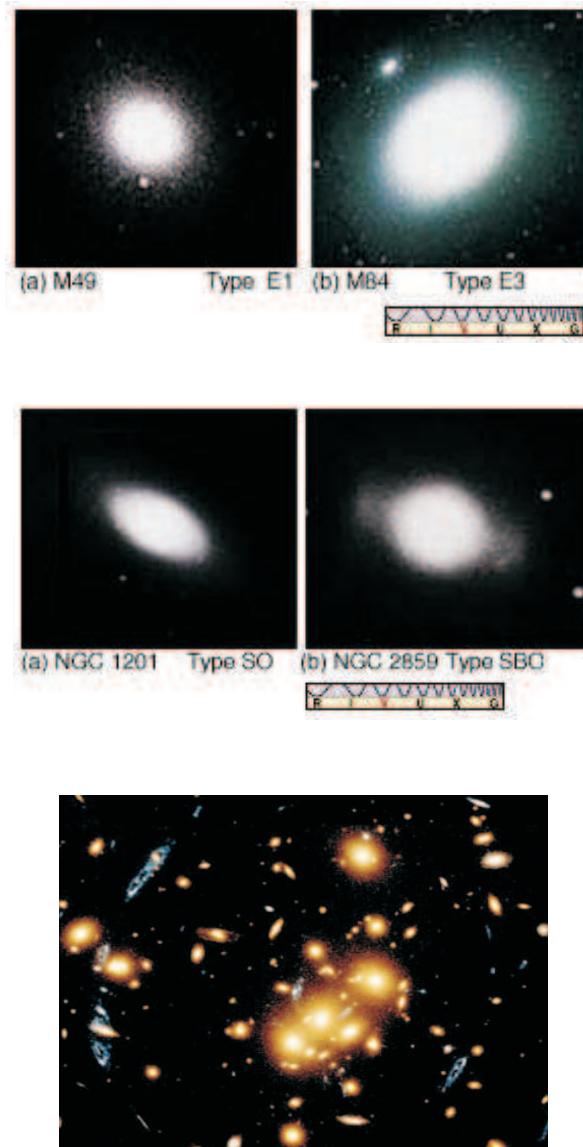


Figura 3.3: Ejemplos de galaxias Elípticas y S0. En el panel inferior hay un cúmulo de galaxias rico en galaxies tipo E.

Tipo	Característica
S	Espiral
B	Barreada
E	Elíptica
I	Irregular
E_p	Elíptica peculiar (con polvo)
D	Simetría rotacional, sin estructura elíptica (i.e. Sistema difuso)
L	Bajo brillo superficial
N	Sistema compacto



Figura 3.4: Ejemplos de galaxias Espirales.



Figura 3.5: La Nube Grande de Magallanes; galaxia irregular

Lo que sobrevive del sistema Morgan es la designación de las galaxias,

- Tipo N: galaxias pequeñas con núcleos activos

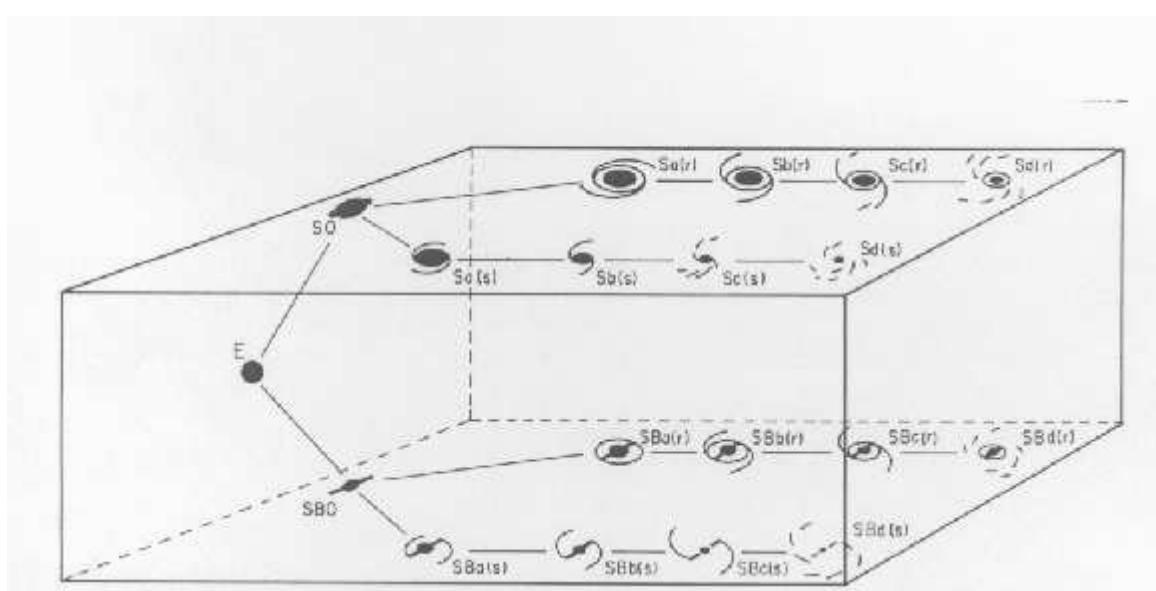


Figura 3.6: Concepto del Volumen de Clasificación. En esta caja las galaxias ordinaria y barreadas están separadas en caras opuestas. Para cada familia, se hace una separación entre r y s, dependiendo si los brazos se inician del anillo o del núcleo. (Diagrama publicado por Hodge en 1966)

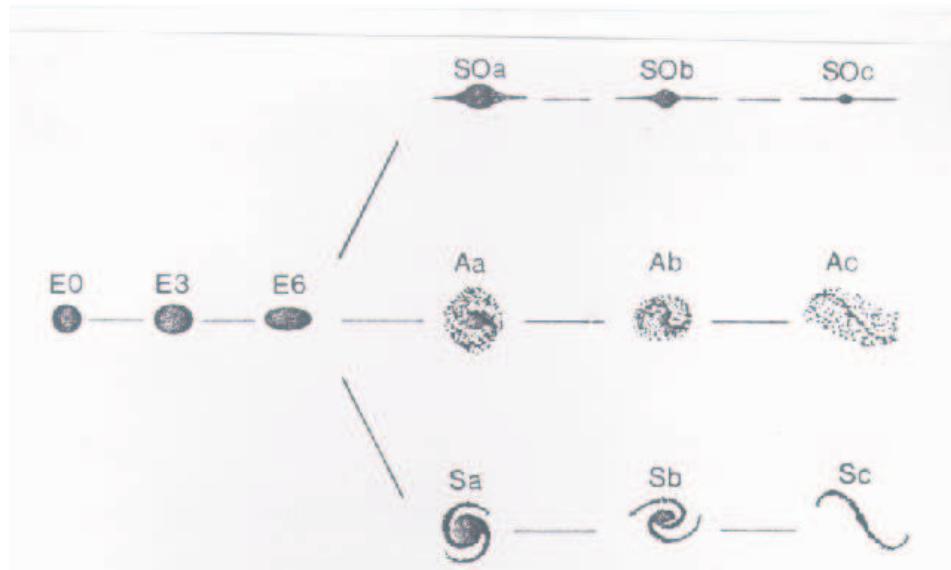


Figura 3.7: Clasificación de van den Bergh. Se agregan las galaxias anémicas.

- Tipo cD: galaxias en los centros de cúmulos, con núcleos tipo elípticas, envueltas en un halo gigante de estrellas. Estos sistemas son, probablemente, las colecciones de

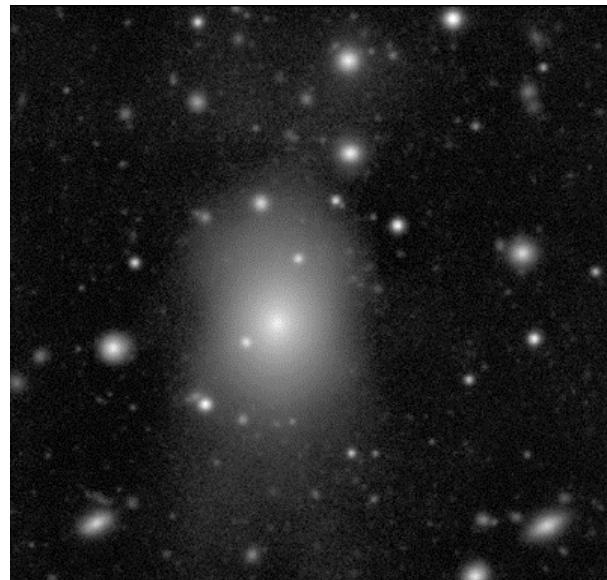


Figura 3.8: Galaxia Elíptica en el centro de un cúmulo

estrellas más grandes en el Universo. A veces tienen núcleos múltiples que han crecido por canibalismo astrofísico.

3.1.6. Referencias Importantes

- Original Hubble Classification: Hubble 1926, *Ap. J.*, **64**, 321.
- Revised Hubble Classification: Hubble 1936, *Realm of the Nebula*.
- Current Hubble Classification: Sandage 1961, *The Hubble Atlas of Galaxies*.
- Refinements to the Hubble Classification: Sandage 1975, *Stars and Stellar Systems Vol. 9, Galaxies and the Universe*.
- DDO Luminosity Classification: van den Bergh 1960, *Ap. J.*, **131**, 215 and van den Bergh 1960, *Ap. J.*, **131**, 558.
- de Vaucouleurs Classification: de Vaucouleurs, de Vaucouleurs, & Corwin 1976, *2nd Reference Catalog of Bright Galaxies*. - Anemic Spiral Classification: van den Berg 1976, *Ap. J.*, **206**, 883.
- Morgan Classification: Morgan 1958, *Pub. A.S.P.*, **70**, 364 and Morgan 1959, *Pub. A.S.P.*, **71**, 394.
- cD galaxies: Morgan, Matthews & Schmidt 1964, *Ap. J.*, **142**, 1364.

3.2. Galaxias Elípticas

El primer paso para investigar la evolución de galaxias es comprender las propiedades de esas galaxias.

Las elípticas son una familia que agrupa varias clases de galaxias. En la figura 3.8 hay una fotografía de un cúmulo de galaxias que muestra en su centro una galaxia de esta familia.

Los distintos tipos de elípticas son:

- cD: masivas y luminosas, pueden llegar a medir 1Mpc. Se encuentran en las regiones centrales de los cúmulos de galaxias.
 - $-22 > M_B > -25$ y $10^{13} < M/M < 10^{14}$
 - $S_N \sim 15$
- Elípticas normales, con tamaños de hasta 200 kpc.
 - $-15 < N_B > -23$ y $10^8 < M/M < 10^{13}$
 - $S_N \sim 7$
- Enanas (dE): bajo brillo superficial, con tamaños de 1 - 10 kpc
 - $-13 > M_B > -19$ y $10^7 < M/M < 10^9$
 - $S_N \sim 5$
- Enanas esferoidales (dSph): brillo superficial extremadamente bajo, detectable sólo localmente
 - $-8 > M_B > -15$ y $10^{17} < M/M_{sol} < 10^8$
- Compactas azules (BCD): galaxias pequeñas con formación estelar activa
 - $-14 > M_B > -17$ y $M/M_{sol} \sim 10^9$

3.2.1. Propiedades

1. Las elípticas proyectadas en el cielo tienen simetría bidimensional. Estas galaxias son, en general, triaxiales con $a \leq b \leq c$.
 - $a = b = c \rightarrow$ galaxia esférica
 - $a = b \rightarrow$ oblata
 - $b = c \rightarrow$ prolata
 Algunas elípticas tienen estructura fina, e.g. cáscaras, anillos, arrugas, isofótas tipo caja, etc. En general, estas elípticas son levemente más azules.
2. E_n : E_0 circulares, E_7 alargadas, $n = 10(1 - b/a)$, donde b/a es la razón axial.
3. Rotación no es importante en la mayoría de las elípticas. Es decir, su grado de elipticidad no se debe a rotación.
4. Hay poca (o nada) formación de estrellas en elípticas. Sin embargo, en algunas elípticas la distribución espectral aumenta en el UV.
 - Ya que las elípticas son de estrellas viejas, uno esperaría que su espectro sea similar al de estrellas K, $T \sim 4000^\circ K$.
 - Sin embargo, algunas elípticas son más brillantes en 1500 Å, que en 2000 Å.
5. Hay poco material en el medio interestelar en elípticas. Sin embargo, hay emisión de rayos X de gas a temperaturas $T \sim 10^6 K$.

Veamos de dónde viene:

 - Las estrellas en elípticas pierden masa durante su evolución.

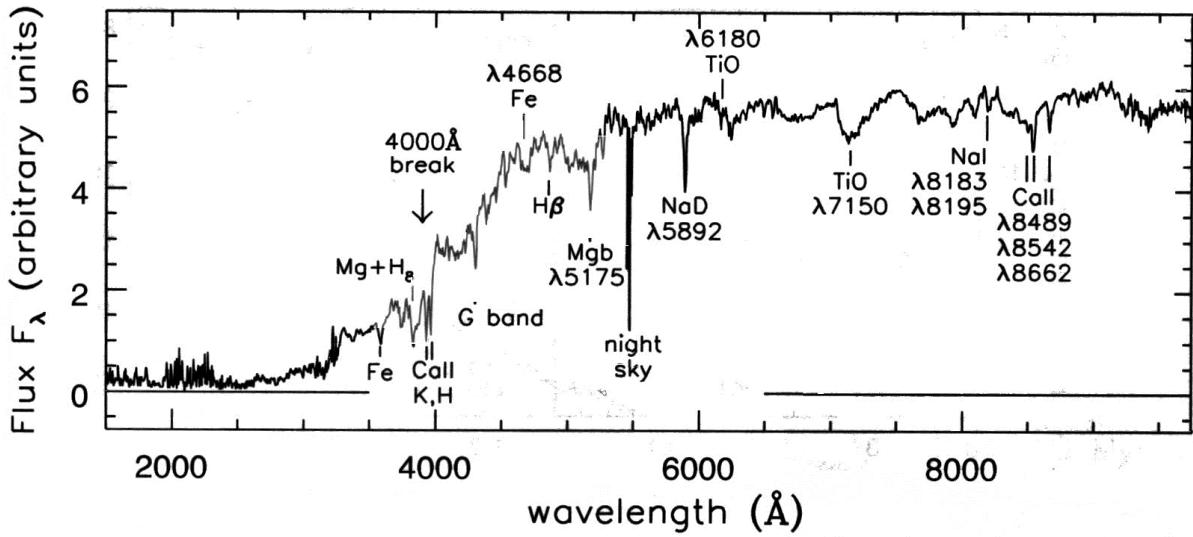


Figura 3.9: Este es un Espectro óptico típico de una Elíptica. Notar el salto de balmer y la ausencia de líneas de emisión.

- Las estrellas se mueven isotrópicamente con una dispersión de velocidad $\sigma \sim 200 \text{ km s}^{-1}$, los átomos del material perdido, en equilibrio térmico, tendrán una temperatura,

$$\frac{1}{2}m_H\sigma^2 \sim \frac{3}{2}kT \Rightarrow T \sim 10^6 \text{ }^{\circ}\text{K}$$

6. Casi siempre las elípticas se encuentran en ambientes densos. Es posible que las pocas elípticas aisladas se hayan comido a sus vecinos.
7. La mayoría de las elípticas tienen gradientes de color: son más rojas en su interior que en el exterior. Esto puede deberse a:
 - Efectos de edad; estrellas más viejas tienen quiebres más rojos de la secuencia principal.
 - Metalicidad; estrellas ricas en metales son intrínsecamente más rojas que sus contrapartidas pobres, debido a la opacidad de los metales.

3.2.2. Plano Fundamental

Las galaxias elípticas pueblan un plano en luminosidad, brillo superficial y dispersión de velocidad. La física detrás de esto es la siguiente,

Supongamos que las estrellas están en equilibrio virial, entonces,

$$-2\langle K \rangle = \langle U \rangle \Rightarrow v^2 \propto \frac{M}{R} \quad (3.1)$$

Supongamos que las elípticas tienen la misma razón ($L \propto M$) y da el mismo brillo superficial ($I \propto L/R^2$). Entonces,

$$L \propto v^4 \quad (3.2)$$

donde v es el movimiento de las estrellas en la galaxia. En el caso de espirales, la relación anterior se llama **relación Tully-Fisher**. En este caso, v es la velocidad de rotación del gas en el disco. En el caso de elípticas, la relación se llama **Faber-Jackson**, y v es, en realidad, σ , la dispersión de velocidades de las estrellas cercanas al núcleo.

Evidentemente, no todas las galaxias tienen el mismo brillo superficial, de tal manera que si tomamos $I = L/R^2$ y lo sustituimos en el teorema del virial (manteniendo la suposición de M/L constante), tenemos una relación

$$L \propto \sigma^4 I^{-1} \quad (3.3)$$

Observaciones indican que si L es la luminosidad total en banda B σ es la dispersión de velocidad central, e I es el Brillo superficial medido en el radio, tal que contiene la mitad de la luz total de la galaxia la relación resulta,

$$L \propto \sigma^{2,7} I^{-0,7} \quad (3.4)$$

Hay varias proyecciones de este plano fundamental:

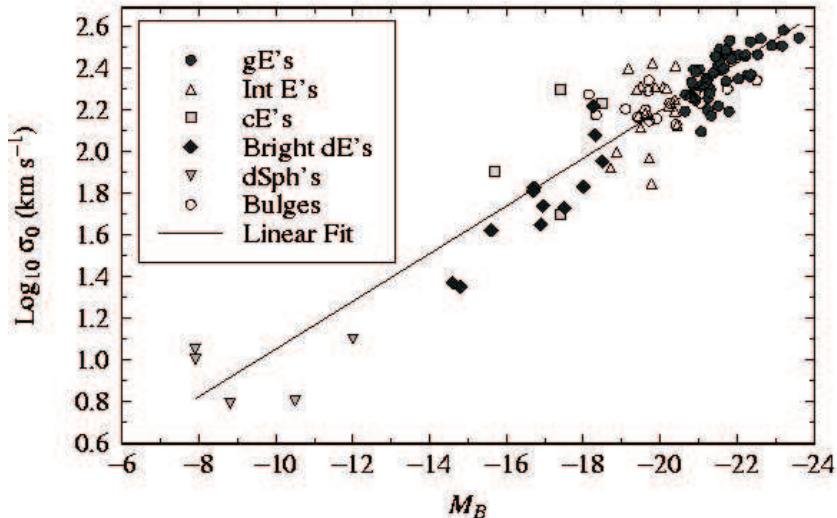


Figura 3.10: Plano Fundamental: Proyección 1. Relación σ - M_B para galaxias tempranas. σ es la dispersión de velocidades y M_B es la magnitud absoluta en la banda B.

Hay varias reflexiones de este plano fundamental:

- Luminosidad está correlacionada con color; elípticas grandes son más rojas que las pequeñas.

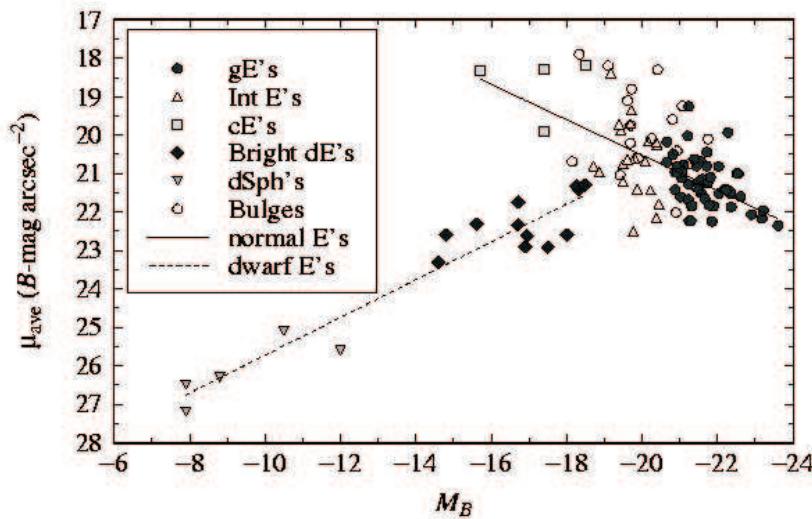


Figura 3.11: Plano Fundamental: Proyección 2. Relación μ_{ave} - M_B para galaxias tempranas. μ_{ave} es el brillo superficial promedio en banda B de la galaxia y M_B es la magnitud absoluta en la banda B .

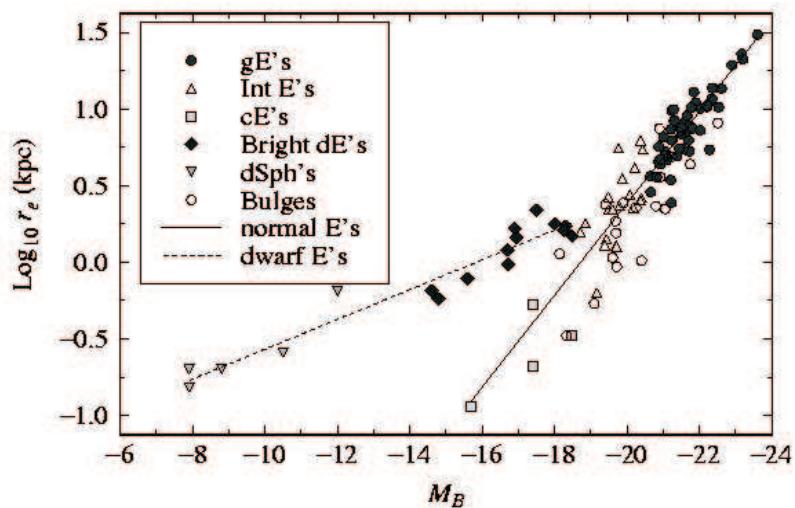


Figura 3.12: Plano Fundamental: Proyección 3. Relación r_e - M_B para galaxias tempranas. r_e es el radio efectivo de la galaxia y M_B es la magnitud absoluta en la banda B . Relación de Kormendy.

- Color en elípticas se relaciona con intensidad de las líneas de absorción; las elípticas más rojas tienen líneas más intensas.
- Intensidad de las líneas de absorción correlacionan con exceso del flujo UV; galaxias con líneas de absorción más fuertes tienen un exceso UV mayor.
- Exceso UV se relaciona con el número de nebulosas planetarias. Galaxias con mayor UV tienen menos nebulosas planetarias.

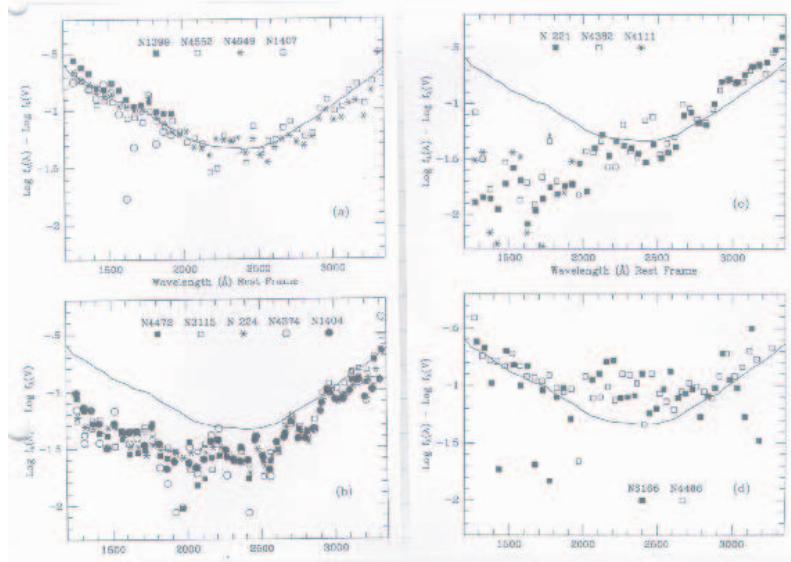


Figura 3.13: Plano Fundamental: Reflexiones. Espectros UV de baja resolución de galaxias elípticas. NGC 221, 4382 y 4111 energía decrece hacia longitudes de onda más cortas. Debido a que las estrellas observadas tienen curvas de Planck cuyo máximo es en el rojo o IR. NGC 1399, 4552, 4649 y 1407 tienen UV exceso. Muchas de las estrellas son muy calientes, las que pueden ser Estrellas post asintóticas gigantes Estrella azules de la rama horizontal.

3.2.3. Perfiles de Luz

La ley que mejor reproduce el perfil de luz de una galaxia elíptica es la llamada ley $R^{-1/4}$ de de Vaucouleur (de Vaucoulers 1959, *Handbuch der Physik*; Young 1976, *A.J.* 81, 807).

Si I es el brillo superficial [$\text{ergs}\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{arcsec}^{-2}$] y R es la distancia proyectada desde el centro,

$$\log \left(\frac{I}{I_e} \right) = -3,33071 \left\{ \left(\frac{R}{R_e} \right)^{1/4} - 1 \right\} \quad (3.5)$$

donde R_e es el Radio efectivo; radio que encierra la mitad de la luz de la galaxia. I_e : Brillo superficial en el radio efectivo. Con un poco de álgebra, la expresión anterior queda,

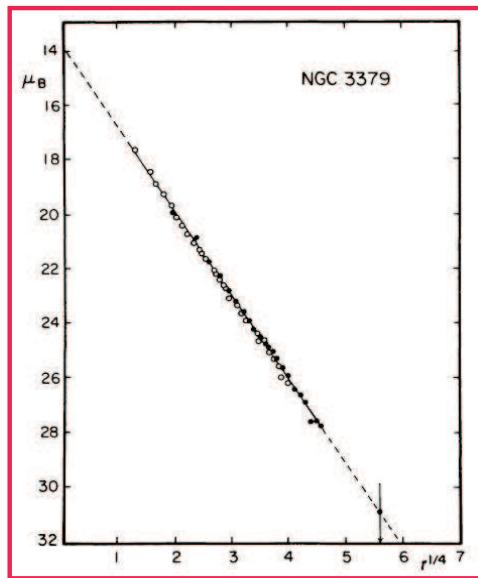


Figura 3.14: Ajuste del perfil de la galaxia N3379 a una curva de deVaucouleurs

$$\mu = a + bR^{1/4} \quad (3.6)$$

Donde μ es el brillo superficial en magnitudes por segundo de arco cuadrado, y a es el brillo superficial central.

Otras leyes que reproducen los perfiles de elípticas:

Ley de Hubble (1930, ApJ, 71, 231)

$$I(R) = \frac{I_0}{(R/a + 1)^2} \quad (3.7)$$

Ley de Jaffe (1983, MNRAS, 202, 995)

$$j(r) = \frac{La}{4\pi r^2(r + a)^2} \quad (3.8)$$

Ley de Hernquist (1990, ApJ, 356, 359)

$$j(r) = \frac{La}{2\pi r^2(r + a)^3} \quad (3.9)$$

En estas ecuaciones, R es radio proyectado, r es el radio real en (3 dimensiones) desde el centro, I es el brillo superficial (energía por unidad de área), j es la densidad luminosa (energía por unidad de volumen), y a es un parámetro libre.



Figura 3.15: Galaxias espirales M81 (Sa), M51 (Sb) y NGC2997 (Sc).

3.3. Galaxias Espirales

Secuencia de acuerdo a la presencia de barra, la importancia del bulbo y el desarrollo de brazos espirales. El rango de masas y luminosidades es, $-16 < M_B < -23$ (luminosidad) y $10^9 < M/M_{sol} < 10^{12}$, respectivamente.

3.3.1. Propiedades

1. La gran mayoría de las espirales se pueden descomponer en un bulbo tipo elíptico, y una componente tipo disco exponencial. En ausencia de bulbo, el brillo superficial es,

$$\left(\frac{I}{I_0} \right) = e^{-4/4_d} \quad (3.10)$$

donde I_0 es el brillo superficial central [$\text{ergs cm}^{-2}\text{s}^{-1}\text{arcsec}^{-2}$] y r_d es la longitud de escala de la exponencial.

No todas las espirales tienen bulbo, y es difícil distinguirlo en algunos casos. La figura 3.16 muestra el perfil en banda I de una galaxia tipo Sb.

2. La densidad estelar perpendicular al disco también puede parametrizarse como una exponencial, con diferentes escalas para distintas poblaciones estelares.
3. Por mucho tiempo se pensó que el brillo superficial central de discos en espirales era aproximadamente constante en espirales ($\mu_B \sim 21,5\text{mag.arcsec}^{-2}$). Hoy se sabe que esto es un efecto de selección. (Es más fácil ver galaxias con brillo superficial altos

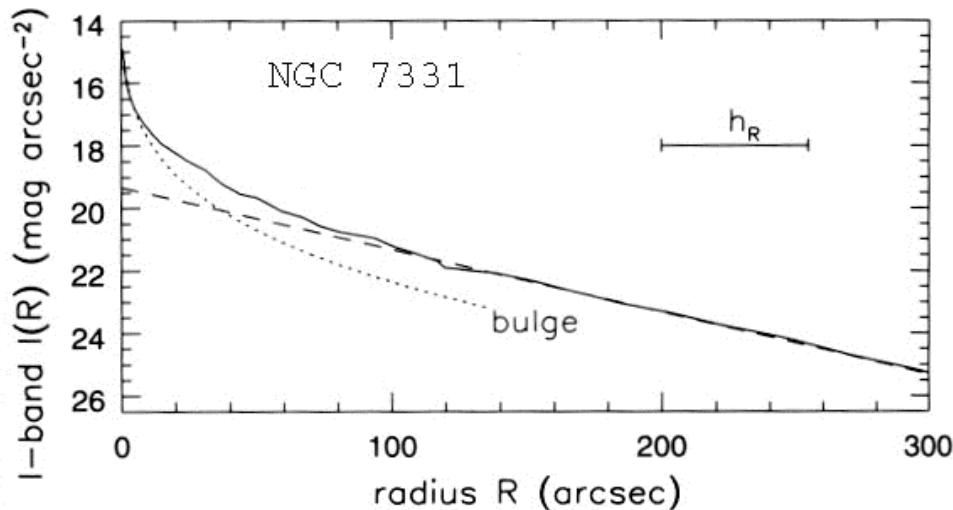


Figura 3.16: Brillo superficial en la banda I en función del radio R de una galaxia tipo Sb, NGC7331.

que bajos). Mientras que el brillo superficial central, sólo en contadas ocasiones, es mayor que $\mu_B \sim 21,5$, la distribución de brillo superficiales más débiles que esto es prácticamente constante.

Ley de Freeman (1970) para discos:

- brillo superficial central de discos es aproximadamente constante, para un gran rango de luminosidades
- $\mu_0 = 21,52 \pm 0,39 B \text{mag} \text{arcsec}^{-2}$ (Sc o más tempranas)
- $\mu_0 = 22,61 \pm 0,47 B \text{mag} \text{arcsec}^{-2}$ (Sd o más tardías)

4. Espirales más brillantes son más ricas en metales que las más débiles. De la misma forma, espirales tempranas (Sa, Sb) son, en general, más ricas en metales que sus equivalentes tipos tardíos (Sc, Sd). Ver figura 3.17
5. La mayoría de las espirales tienen gradientes de metalicidad, de manera que sus regiones centrales son más ricas en metales que el disco externo. Estos gradientes son más pronunciados en espirales tardías.
6. Las curvas de rotación de la mayoría de las espirales son planas con el radio. (Es decir, la velocidad de rotación se mantiene constante.) Espirales en cúmulos muestran curvas de rotación truncadas en el gas y en el perfil de masa. En la figura 3.18 se muestra la velocidad de rotación en galaxias espirales de tipo Sa, Sb y Sc. El radio está normalizado a la fracción del radio isofotal. Las curvas representan galaxias de distinta magnitud absoluta en banda B .

Objetos	Longitud de Escala (pc)
Estrellas O	50
Cepheidas	50
Estrellas B	60
Cúmulos Abiertos	80
Medio Interestelar	120
Estrellas A	120
Estrellas F	190
Nebulosas Planetarias	260
Estrellas G de la Secuencia Principal	340
Estrellas K de la Secuencia Principal	350
Enanas Blancas	400
Estrellas RR Lyr	2000

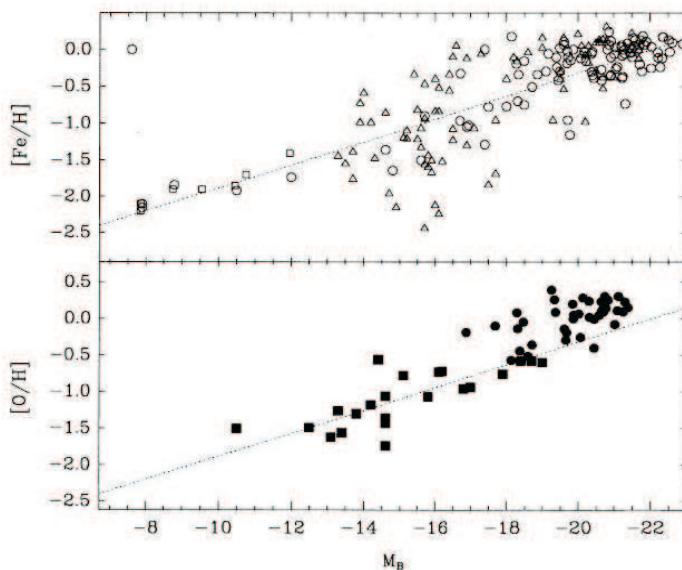


Figura 3.17: Relación entre el contenido de Oxígeno y Fierro en función de la magnitud absoluta en banda B en galaxias Elípticas, Espirales e Irregulares.

Dado que galaxias con diferentes razones(Bulbo/Disco) tienen curvas de rotación similar, indica que existe un potencial dominado por materia oscura y que no sigue la distribución de luz.

7. En la mayoría de las espirales la luminosidad absoluta total es proporcional a la velocidad de rotación a la cuarta (como ha sido medida con la línea de emisión 21 cm). Esta relación entre luminosidad y ancho de líneas, conocida como la relación Tully-Fisher, es a espirales como el plano fundamental (Faber-Jackson) es a las elípticas. Notar, sin embargo, que mientras en elípticas la luminosidad depende de dos variables - brillo super-

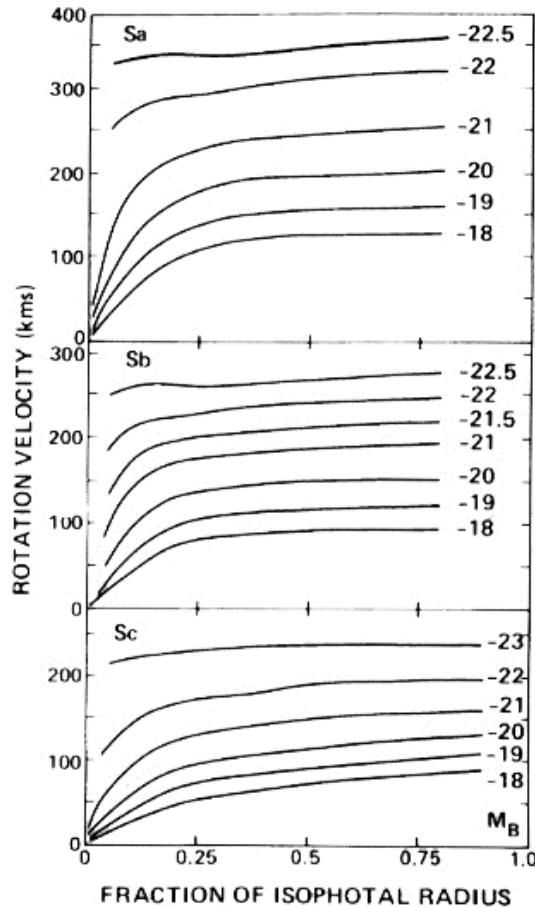


Figura 3.18: Velocidad de rotación en galaxias espirales de tipo Sa, Sb y Sc. El radio está normalizado a la fracción del radio isofotal. Las curvas representan galaxias de distinta magnitud absoluta en banda *B*.

ficial y dispersión de velocidad - la relación Tully-Fisher depende sólo de la velocidad de rotación. Implica que la razón masa-luminosidad (M/L) es igual en todas las espirales, y que el brillo superficial no influye.

La figura 3.19 muestra la correlación entre magnitud absoluta en banda *B* y la velocidad de rotación para galaxias tipo Sa, Sb y Sc. Esta relación, que es una proyección del Plano Fundamental, es la llamada Tully-Fisher. Ver ecuación 3.2.

3.3.2. Contenido de gas

El contenido de gas es función del tipo de Hubble aumentando esta fracción hacia tipos tardíos, desde 0.04 para galaxias tipo Sa a 0.25 para galaxias tipo Sc. Con $\langle M_{H_2}/M_H \rangle$ mayor en tipos tempranos (~ 2.2 para Sa, ~ 1.8 para Sb, ~ 0.7 para Sc y ~ 0.3 para Scd)

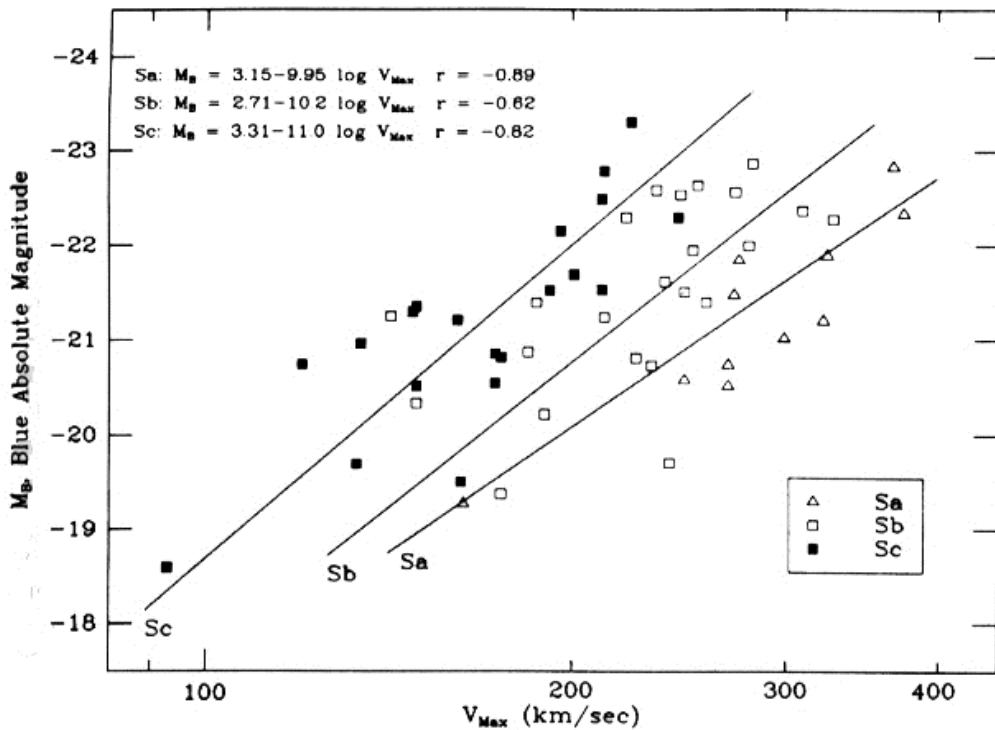


Figura 3.19: Relación Tully-Fisher para galaxias espirales tipo Sa, Sb y Sc. Se muestra la magnitud absoluta en B en función de la velocidad de rotación en km./seg.

tipos tempranos más concentrados.

(recordar que estrellas más masivas son, en general, más azules y tiene menor M/L).

3.3.3. Distribuciónpectral en Espirales.

La figura 3.20 muestra espectros de galaxias espirales tipo S0, Sb, Sc y Starburst. Las líneas de emisión intensas (gran formación de estrellas) en los starburst y como disminuye la intensidad en galaxias más tempranas, Sc - Sb - S0. La figura 3.21 muestra una representación simulada de la evolución de una galaxia espiral que se inicio en un gran *burst* de formación de estrella, mostrando líneas de emisión muy intensas, para después decaer en luminosidad y hacerse más roja debido a la evolución estelar. Sus líneas de emisión desaparecen.

3.3.4. Resumen

- Masa: son similares para los tipos tempranos hasta Sc, después decrece monotónicamente.
- Hidrógeno neutro: tiene un máximo en tipos Sb-Sbc, pero la fracción es aproximadamente independiente del tipo morfológico en las espirales.

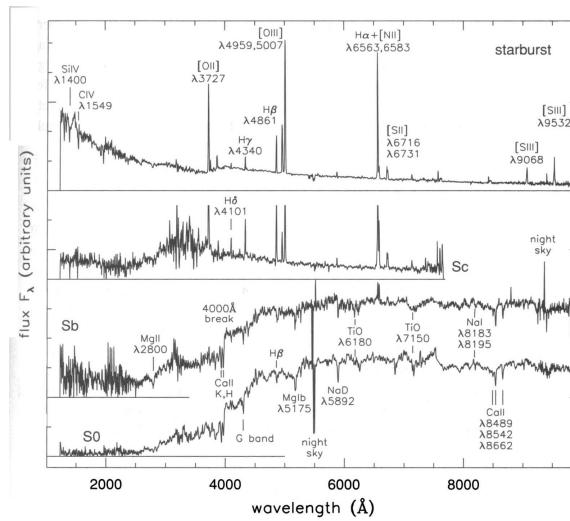


Figura 3.20: Distribución espectral óptica de galaxias S0, Sb, Sc y Starburst. Notar las líneas de emisión intensas (gran formación de estrellas) en los starburst y como disminuye la intensidad en galaxias más tempranas, Sc - Sb - S0.

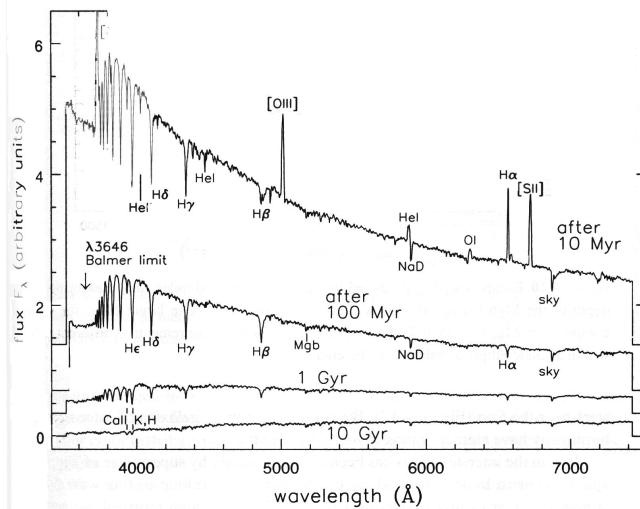


Figura 3.21: Espectro de una galaxia que genera estrellas en un burst the 10^8 años, graficadas en la misma escala vertical. Las líneas de emisión del gas ionizado son muy fuertes 10 millones de años mas tarde. Después de 100 millones de años la galaxia se ha hecho más débil y más roja. Aparecen fuertes líneas de absorción provenientes de estrellas tipo A. La evolución posterior es mucho más lenta, las galaxia se hace más débil y un poco más roja.

¿Qué tipo de objetos?

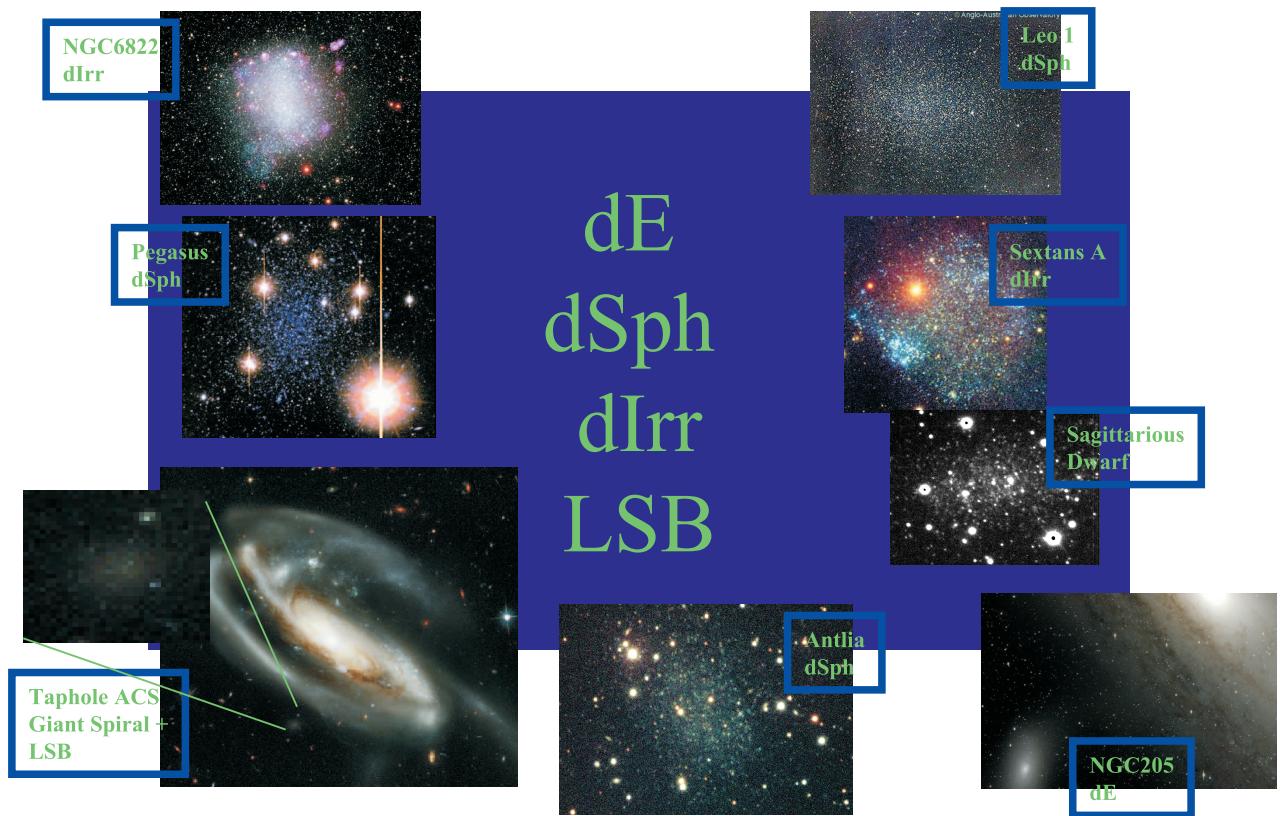
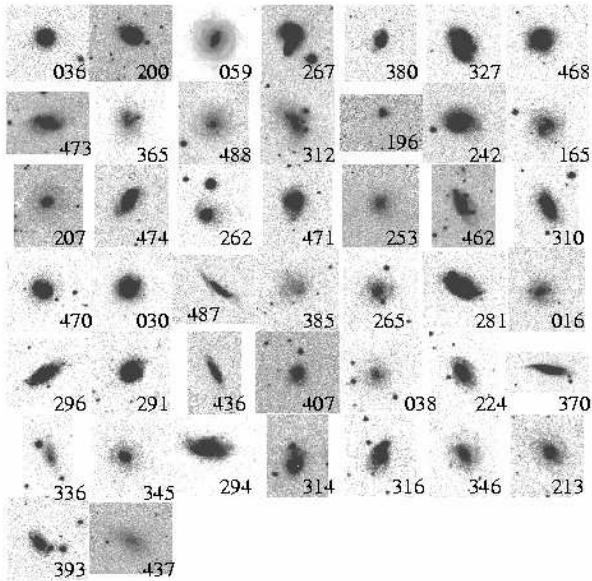


Figura 3.22: Galaxias enanas del Grupo Local.

- Densidad superficial, dentro de un radio característico, disminuye con el tipo de Hubble, en cambio la densidad superficial de HI aumenta.
- Color integrado depende del tipo de Hubble.

LSBGs de Galaz et al. 2002



Sorted by gas fraction
 $M_{\text{HI}}/L_K = 0.028 \rightarrow 1.475$

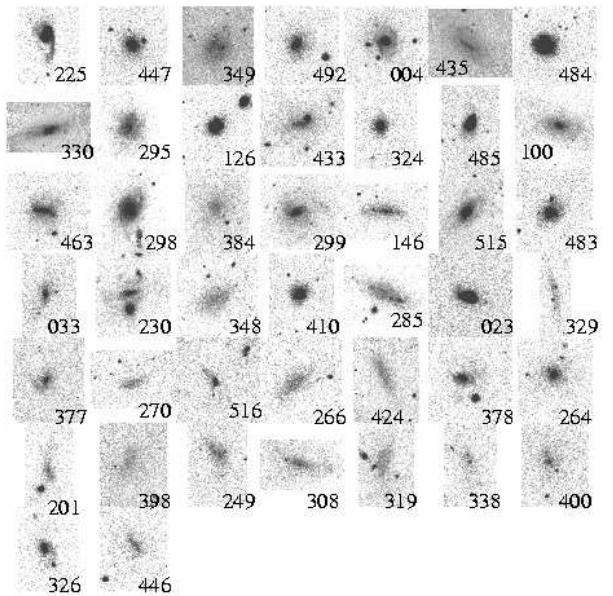


Figura 3.23: Galaxias de Bajo Brillo Superficial. Galaz *et.al.*, 2002.

3.4. Galaxias Enanas, de Bajo Brillo Superficial e Irregulares

¿Cómo las encontramos?

dE	$M_V \geq -17$, perfil exponencial uniforme SB, isofotas elípticas
dE,N	como dE, pero con significante exceso de luminosidad compacta - núcleo en (o cerca de) su centro
dIrr	$M_V \geq -17$, isofotas irregulares, formación de estrellas locales
dSph	Grupo Local dEs débil, o más generalmente: las dEs más débiles, también fuera del Grupo Local
LSB	$\mu_0 \geq 22.5 \text{mag./arcsec}^2$ en B; sin definición morfológica! (que es 2.5σ de lo que SB significa para la ley de Freeman)

- **dE**, extensión de baja luminosidad de elípticas normales; obedecen las mismas relaciones. Ej. M32.
- **dSph**, pobre en gas, sistemas difusos y siguen la ley $r^{1/4}$. No están en el mismo plano fundamental que las elípticas. Ej. NGC 147 y Leo I.
- **dIrr**, extensión de baja luminosidad de espirales normales. Son, en general, más brillantes que dSph, ya que tienen formación de estrellas activas. Pueden ser precursoras de dSph. Ej. SMC

3.4.1. Propiedades de Galaxias Enanas

1. Típicamente pobres en metales. No tanto como Población II.
2. Muestran evidencia demás de un episodio de formación de estrellas.
3. Pueden ser nucleadas. Sus núcleos son como pequeños bulbos.
4. Razón masa-luminosidad M/L muy grande. Masas medidas a partir del movimiento virial de estrellas.

¿Cómo las clasificamos?

La distinción entre galaxias enanas y otras galaxias tempranas, en general, se hace usando diagramas como el de la figura 3.24 entre μ_0 , brillo superficial central, vs. M , magnitud absoluta. Claramente se distingue la secuencia de las enanas.

El Cúmulo de Fornax

Un ejemplo es el caso del cúmulo de Fornax. En la figura 3.26, la relación μ_0 vs. M_V muestra como se separan las enanas de las gigantes.

Otra forma de distinguir galaxias enanas es usar el llamado índice de Sersic n vs. M_V , ecuación 3.11. La figura 3.27 muestra un diagrama entre n vs. M_V para galaxias en Fornax.

$$I(r) = I(o)e^{-\left(\frac{r}{h}\right)^n} \quad (3.11)$$

Distancia (Mpc)	20	FE
Velocidad de Dispersión ($km s^{-1}$)	3.74	DW
Radio del Núcleo (Mpc)	0.31	F90
Número de Gigantes (E/SO/Sab/Sb/Irr)	40	F88
Enanas/Gigantes	7.92	H03
$N(dE)/N(dE+dIrr)$	0.93	F88
LF, inclinación final débil	1.38	H03

H0e: Hilker et al. 2003, en preparación. FE: Ferrarese et al. 2000. DW: Drinkwater et al. 2001. F90: Ferguson and Sandage, 1990. F88: Ferguson and Sandage, 1988.

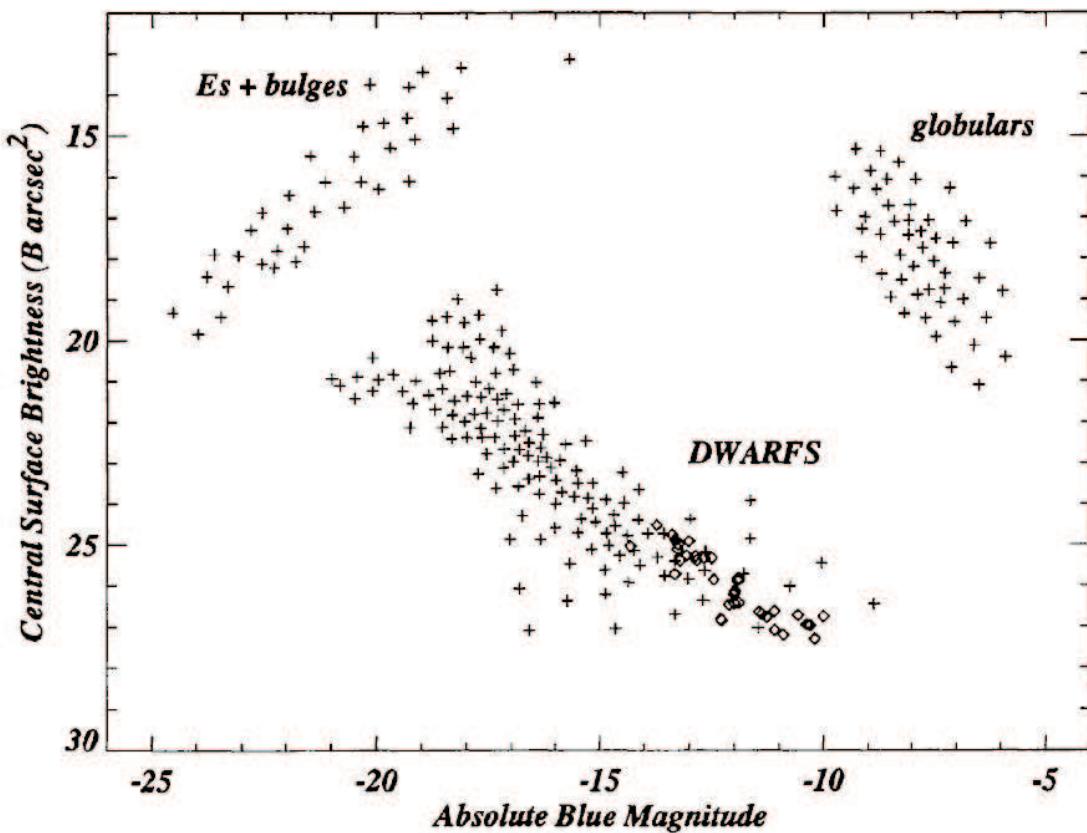


Figura 3.24: Diagrama de clasificación esquemático para galaxias enanas. Brillo superficial central versus magnitud absoluta

Doradus

Distancia (Mpc)	17.2	C00
Velocidad de Dispersión (km s^{-1})	250	F90
Radio del Núcleo (Mpc)	0.29	F90
Número de Gigantes (E/SO/Sab/Sb/Irr)	33	F90 F90
Enanas/Gigantes	1.3	
N(dE)/N(dE+dIrr)	0.78 0.67	C00 F90
LF, inclinación final débil	1.9?	C03

C00: Carrasco et al. 2000. C03: Carrasco et al. 2003. F90: Ferguson and Sandage, 1990



Figura 3.25: Cúmulo de Fornax. La imagen inferior muestra la región central de Fornax.

3.5. Características Globales de Galaxias

Una vez conocidas las características individuales de las galaxias, el estudio de las sus propiedades y evolución se realiza estadísticamente. Es decir, nos interesa conocer propiedades

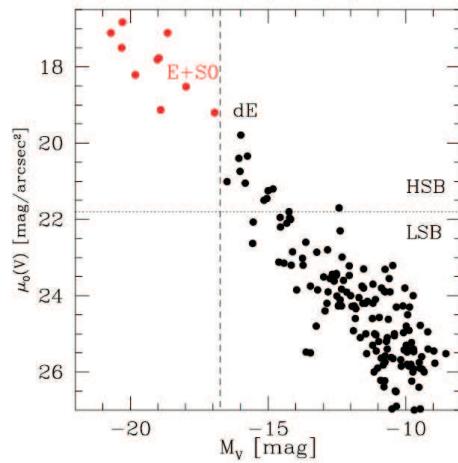


Figura 3.26: Diagrama μ_0 vs. M_V para galaxias en el cúmulo de Fornax. HSB, significa galaxias con brillo superficial alto y LSB, significa galaxias con brillo superficial bajo.

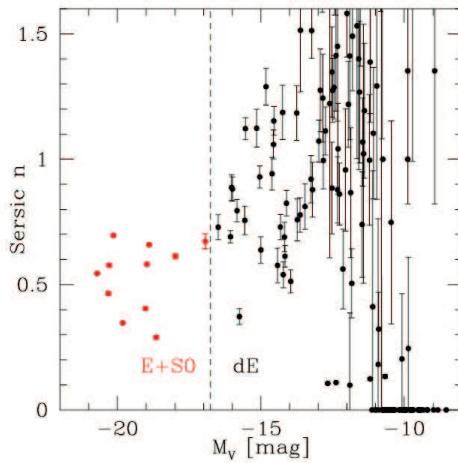


Figura 3.27: Diagrama n (índice de Sersic) vs. M_V para galaxias en el cúmulo de Fornax.

tales como la función de luminosidad, radios, luminosidades, masa, colores, densidades superficiales, contenido de hidrógeno, contenido en metales, frecuencia específica, relación morfología-densidad y fracción de tipos vs. Redshift.

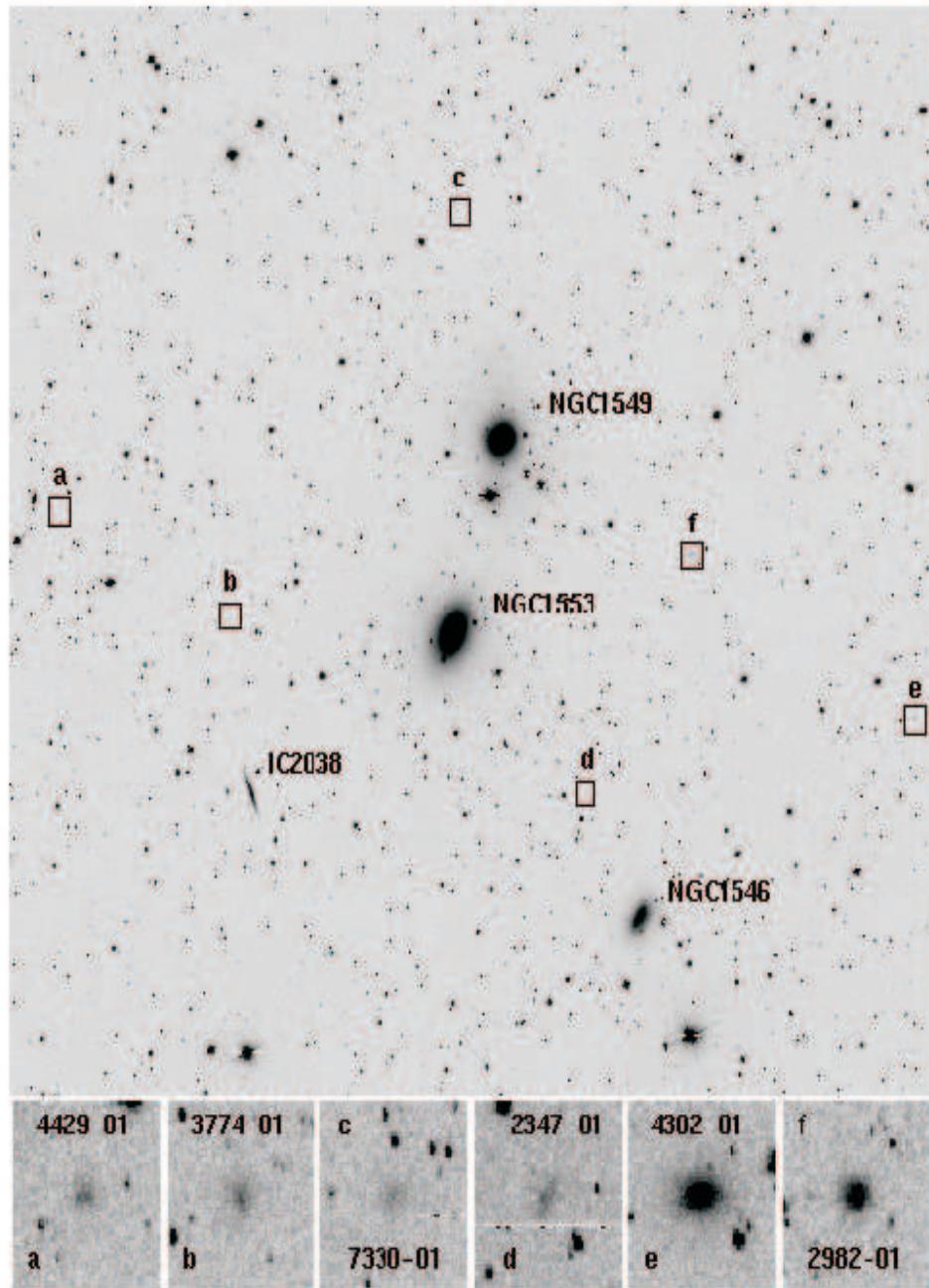


Figura 3.28: Cúmulo de Doradus. Las imágenes inferiores muestran varias galaxias enanas en Doradus.

La figura 3.29 muestra una selección de galaxias. Estas son imágenes del Hubble Space Telescope y refleja la enorme diversidad que existe de galaxias. En el eje vertical están ordenadas por redshift y el eje horizontal por magnitud aparente. A un mismo redshift las galaxias más brillantes (mayor masa) se ubican a la izquierda, mientras las galaxias enanas,

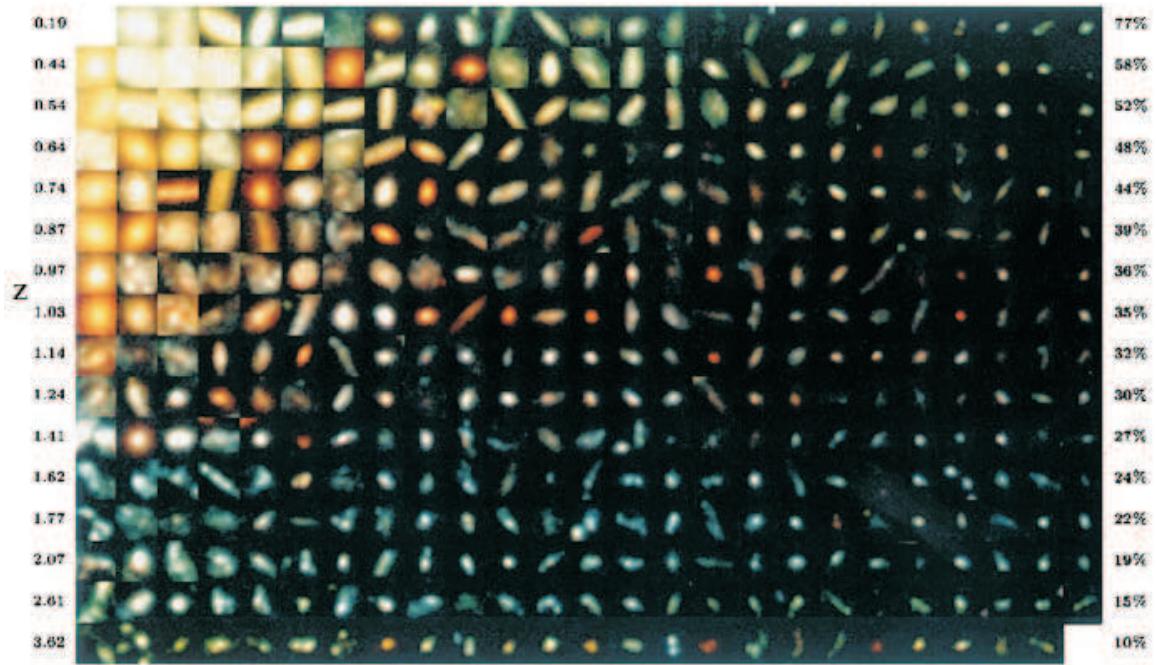


Figura 3.29: Selección de galaxias del Hubble Deep Field. Las galaxias están ordenadas por redshift y subdivididas en 16 paquetes, cada uno conteniendo 25 galaxias. Para cada intervalo de redshift las galaxias están ordenadas en términos de magnitud aparente. La progresión vertical refleja el proceso de evolución galáctica.

de menor luminosidad, están hacia la derecha.

3.5.1. Función de Luminosidad

Uno de los ingredientes más importantes en el estudio de la formación y evolución de galaxias es la *Función de Luminosidad*. Casi por tradición el número de galaxias, ϕ , versus la luminosidad absoluta, L , se ha descrito por una función de Schechter,

$$\phi(L)dL = \phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha e^{-L/L^*} d\left(\frac{L}{L^*} \right) \quad (3.12)$$

Notar de la forma que:

- Para galaxias débiles con $L \ll L^*$, término exponencial $e^{-L/L^*} \rightarrow 1$ y la función tiende a una ley de potencia con pendiente α .
- En extremo brillante, $L > L^*$, el término exponencial domina, y el número de galaxias rápidamente cae a cero.
- La variable ϕ^* normaliza la función y define la densidad total de galaxias en el universo.

$$\phi(L)dL = \phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha e^{-L/L^*} d\left(\frac{L}{L^*} \right) \quad (3.13)$$

- L^* es la luminosidad absoluta de una galaxia brillante en el punto del quiebre de la exponencial. En magnitudes, M^* . Valores típicos de la función de Schechter son: $\alpha \approx -1$, $M^* \approx -21$, $\phi^* \approx 0,002$ galaxias por Mpc^3 . De acuerdo a esta función, el número de galaxias es infinito, sin embargo, la luminosidad total es finita.

$$\int_0^\infty \phi(L)dL = \int_0^\infty \phi^* \left(\frac{L}{L^*} \right)^\alpha e^{-L/L^*} d\left(\frac{L}{L^*} \right) = \phi^* L^* \Gamma(\alpha + 2) \quad (3.14)$$

La función de Schechter en magnitudes, es

$$\begin{aligned} \phi(M)dm &= 0,921 \phi^* X^{\alpha+1} e^{-X} dM \\ &\text{donde} \\ X &= 10^{0,4(M^*-M)} \end{aligned}$$

El extremo débil de la Función de Lumnniosidad da cuenta del contenido de galaxias de baja luminosidad y/o galaxias enanas. En la figura 3.31 se muestran curvas de Schechter para distintos tipos morfológicos y una caracterización de la posible evolución en la cola débil de la función.

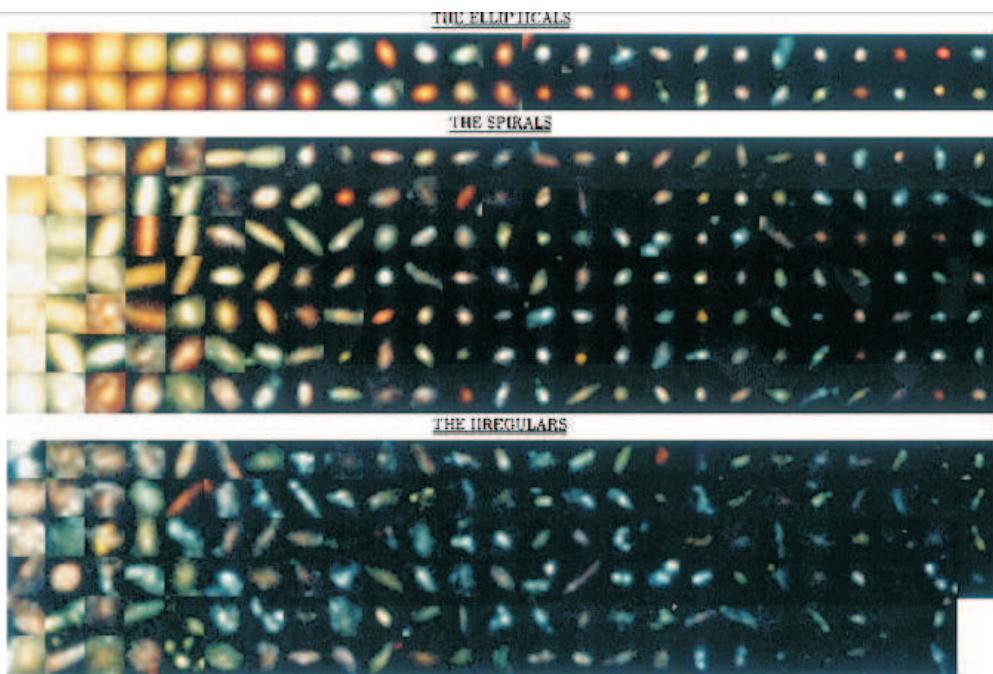


Figura 3.30: Selección de galaxias del Hubble Deep Field, ordenadas por tipo morfológico. Para cada intervalo de redshift las galaxias están ordenadas en términos de magnitud aparente.

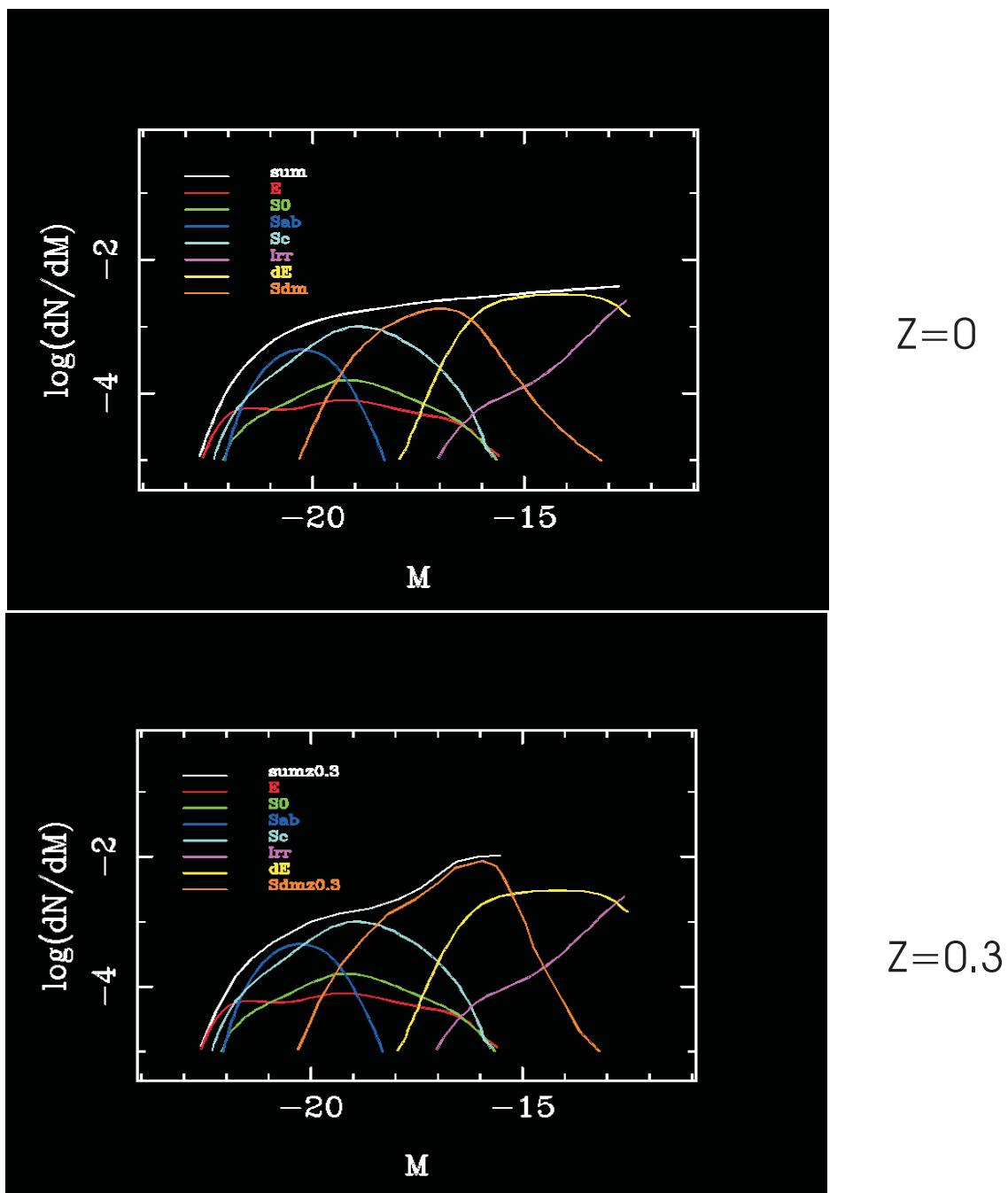


Figura 3.31: Función de Luminosidad. Las curvas son curvas de Schechter para distintos tipos morfológicos. El panel superior es para redshift cero y los dos paneles inferiores son para redshift 0.3, con distinta evolución para poblaciones diferentes de galaxias enanas.

3.5.2. Parámetros globales de Galaxias

En las figuras 3.32, 3.33, 3.34 y ?? se muestra como varían algunos parámetros globales de galaxias en función de tipo morfológicos, E, S0, S0a, Sa, Sab, Sb, Sbc, Sc, Sed, Sd, Sm,

Im. (Roberts and Haynes 1994.) Los índices graficados son:

R_{lin} (kpc): Radio en kpc hasta una isofota correspondiente a 25 $mag./arcsec^2$ en banda B .

L_B : Luminosidad en banda B en unidades solares.

M_T : Masa total en unidades solares.

M_T/L_B : Razón masa-luminosidad en banda B en unidades solares.

Σ_B : Brillo superficial en banda azul

σ_{FIR} : Densidad superficial en bandas del infrarrojo lejano.

Σ_T : Densidad de masa total.

σ_{HI} : Densidad superficial en HI .

$<(B-V)>$: Color medio.

M_{HI} : Masa total en HI .

M_{HI}/L_B : Razón masa-luminosidad masa en HI .

M_{HI}/M_T : Fracción de masa en HI a masa total.

L_{FIR} : Luminosidad en banda infrarrojo lejano.

3.5.3. Frecuencia Específica

Una forma de estudiar evolución en galaxias, particularmente en gigantes, es simplemente contando el número de cúmulos globulares que poseen. Si una galaxia se ha formado por fusión de varias galaxias (figura ??, entonces uno espera que el número de cúmulos globulares sea mayor. Se define la frecuencia específica como el número de cúmulos globulares de una galaxia, normalizado por su luminosidad,

$$S_N = N_t \frac{L_{15}}{L_V} = N_t 10^{0.4(M_V + 15)} \quad (3.15)$$

La figura 3.36 muestra S_N para distintos tipos morfológicos. Como se ve S_N aumenta con tipos tempranos (~ 5 para E y ~ 0.5 para Sa y Sb). Una forma de interpretar este resultado es que cúmulos globulares pueden haberse formado en fusiones, pero quizás no suficientes. S_N en remanentes es baja (2-3) comparada a elípticas (5).

3.5.4. Relación densidad-morfología

Dressler, 1980, descubrió que existe una relación entre la densidad de galaxias y el tipo morfológico de las galaxias que pueblan ese medio. Por ejemplo, galaxias tempranas (tipo E) preferentemente se encuentran en medios más densos. Las galaxias tardías con alto contenido de gas, es decir espirales, pueblan la periferia de cúmulos de galaxias. La figura 3.37 ilustra esta relación.

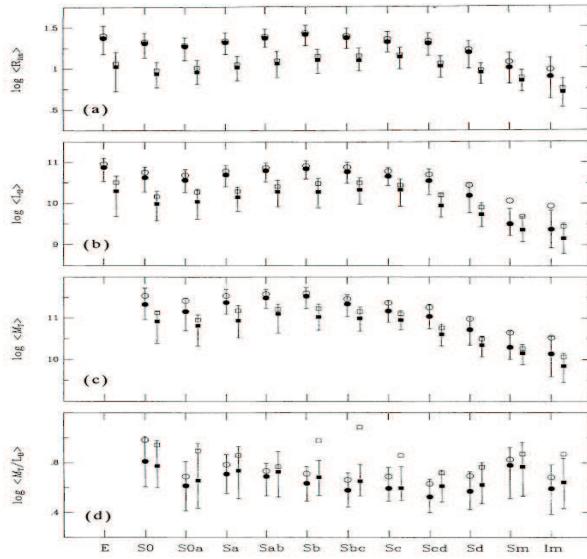


Figura 3.32: Parámetros globales versus tipo morfológico. Cuadrados son galaxias del catálogo RC3-LSc; círculos son galaxias del RC3-UGC; símbolos llenos son medianas mientras que los símbolos vacíos son promedios. La barra inferior es el percentil 25 y la superior es el percentil 75. Ver texto para una definición de los parámetros graficados.

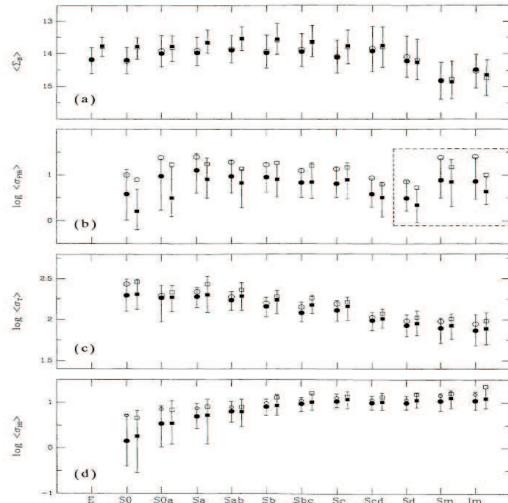


Figure 3 Same as Figure 2, for (a) optical (blue) surface brightness Σ_B , (b) log FIR surface density σ_{FIR} , (c) log total mass surface density Σ_T , (d) log HI surface density σ_{HI} . Dashed lines delineate the types with significantly fewer data.

Figura 3.33: Parámetros globales versus tipo morfológico. Ver texto para una definición de los parámetros graficados.

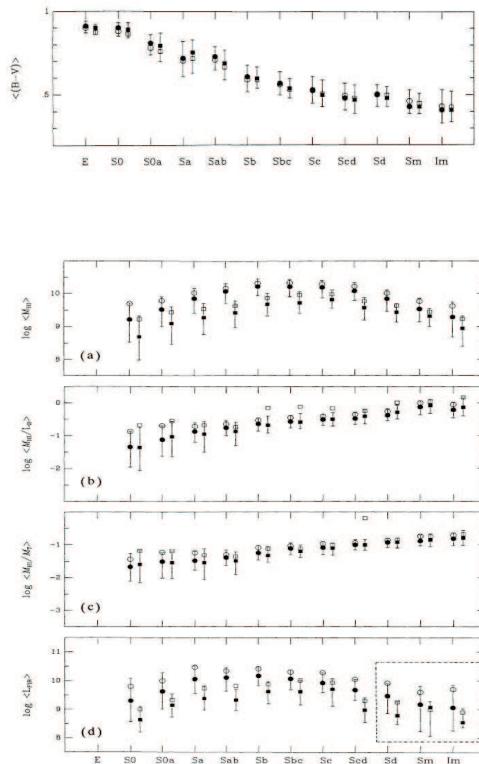


Figura 3.34: Parámetros globales versus tipo morfológico. Ver texto para una definición de los parámetros graficados.

3.6. Evolución de Galaxias

Hay cuatro tipos de evolución en las galaxias: Evolución morfológica, evolución dinámica, evolución luminosa o pasiva, evolución química. En esta sección se describen cualitativamente la evolución morfológica y dinámica y se describe con detalle la luminosa y química.

3.6.1. Evolución Morfológica

La evolución morfológica depende de la tasa de colisiones entre galaxias. Esto hace que su estudio teórico sea difícil. Sin embargo, simulaciones de N cuerpos ha arrojado luces en este tema (Ver animaciones).

Ya que el universo era más denso en el pasado, esperaríamos un mayor número de colisiones y, como consecuencia, mayor evolución morfológica.

Por otro lado, evolución morfológica de espirales a lenticulares puede ocurrir por barrido por presión-ram del medio interestelar por gas caliente.

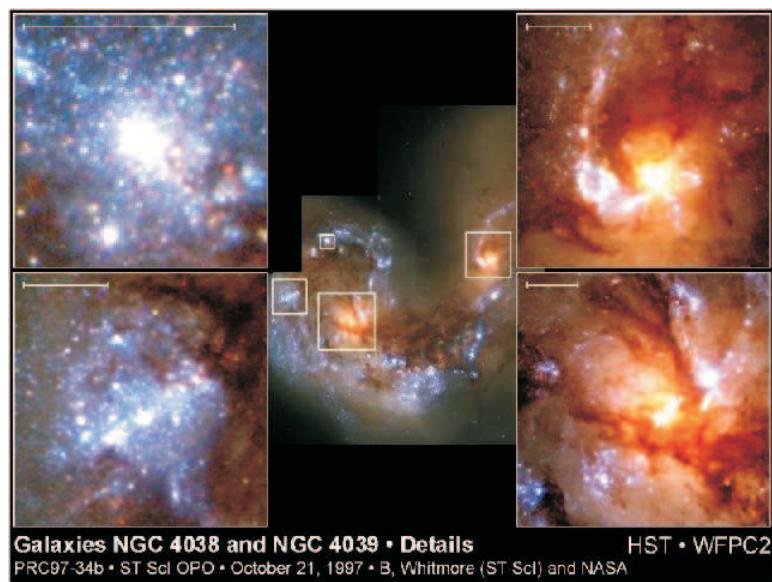


Figura 3.35: Galaxias NGC 4038 y NGC 4039. Imagen tomada con el telescopio de espacio Hubble.

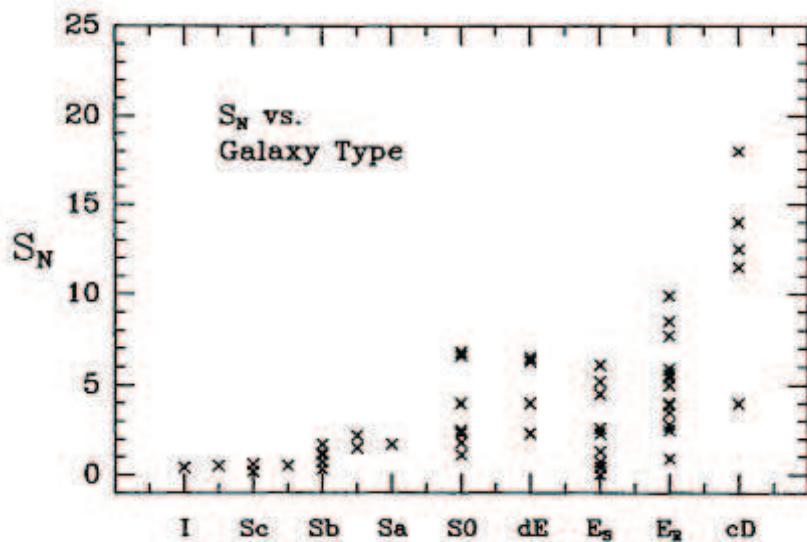


Figura 3.36: Frecuencia Específica en función del tipo morfológico.

3.6.2. Evolución Dinámica

Se refiere al cambio que pueden sufrir las órbitas estelares en las galaxias por evolución morfológica, por interacción con el ambiente, por explosiones de Supernovas y/o por

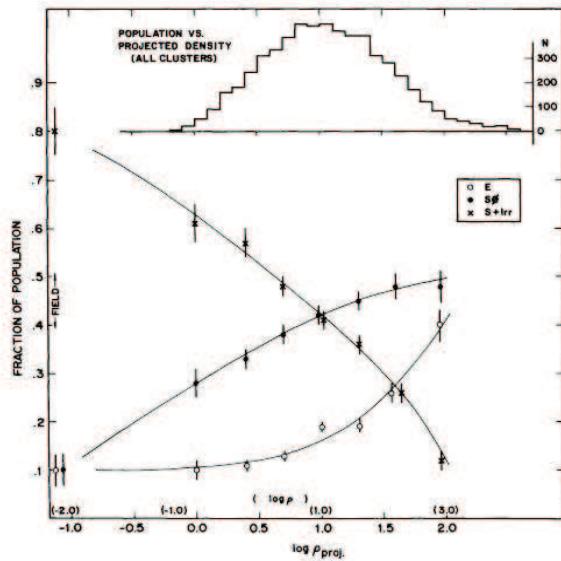


Figura 3.37: Fracción de galaxias E, S0 y S+I en función de la densidad de galaxias proyectada, en unidades de galaxias por Mpc^{-2} . Los datos son de Dressler *et al.*, 1980, y corresponden a un muestreo de cúmulos de galaxias ricos. Se muestra, también, una estimación de la densidad real en galaxias por Mpc^{-3} . El histograma superior muestra el número de galaxias por paquete de superficie proyectada.

formación de estrellas violentas.

Este tipo de evolución es aún más difícil de estudiar teóricamente que la evolución morfológica. Por ejemplo, muy poco se sabe de órbitas estelares en galaxias elípticas. (Ver trabajos de Schwarzschild).

3.6.3. Evolución Luminosa o Pasiva

Evolución de la luz en galaxias debido al envejecimiento de las estrellas. Para el cálculo de la evolución de la luminosidad de estrellas de SP necesitamos tres elementos:

1. Función Inicial de Masa (IMF); función que describe el número de estrellas que nacen con una determinada masa.
2. Relación *masa-luminosidad* para estrellas de la secuencia principal.
3. Tiempo que las estrellas permanecen en la secuencia principal.

Como ejemplo del tipo de evolución que es necesario considerar tomemos el cúmulo globular M55 en la figura 3.38. En el diagrama HR claramente se ven las distintas secuencias de estrellas. Notamos la secuencia principal, la secuencias de las gigantes rojas, la secuencias de la rama horizontal, etc.

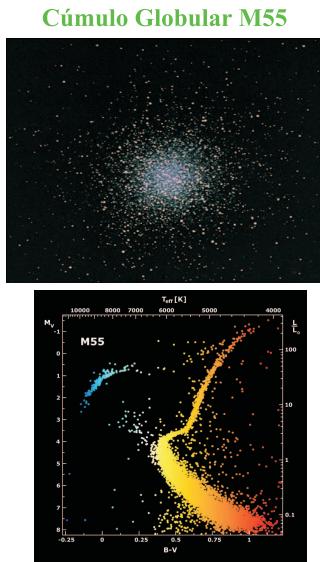


Figura 3.38: Cúmulo Globular M55. El panel superior es un imagen óptica de M55 y el panel inferior es un diagrama colo magnitud.

Para iniciar el cálculo, consideraremos la Función Inicial de Masa (IMF). Esta función que describe el número de estrellas que nacen con una determinada masa.

$$\phi(m)dm \propto m^{-(1+x)}dm = \phi_1 \left(\frac{m}{m_1} \right)^{-(1+x)} d\left(\frac{m}{m_1} \right) \quad (3.16)$$

donde m es la masa estelar, m_1 , escala arbitraria, e.g. m_{sol} ; x , la pendiente de la ley de potencia Salpeter $x = 1,35$; ϕ_1 , para normalizar la función tal que,

$$M_0 = M_0 \int_0^{\infty} m \phi(m/m_1) d\left(\frac{m}{m_1} \right) \quad (3.17)$$

donde M_0 es la masa total de un cúmulo de estrellas. Las unidades de ϕ_1 son $[m_1^{-1}]$.

Necesitamos también la relación *masa-luminosidad* para estrellas de la secuencia principal. Aproximamos esto con una ley de potencia.

$$l_d = l_1 \left(\frac{m}{m_1} \right)^{\alpha} \quad (3.18)$$

donde α es el índice de la ley de potencia; l_1 es la luminosidad de una estrella de la secuencia principal para una estrella de masa m_1 . l_d es la luminosidad de estrellas enanas; es decir, estrellas de la secuencia principal.

Una buena aproximación es, $\alpha \approx 3,5$

El tercer elemento que necesitamos es el tiempo que las estrellas permanecen en la secuencia principal. Este tiempo es proporcional a la energía disponible que, a su vez, es

proporcional a la masa de la estrella que, a su vez, está dado por la luminosidad a través de la relación masa-luminosidad.

$$\tau \propto \frac{m}{l_d} \propto \left(\frac{m}{m^\alpha} \right) \propto m^{1-\alpha} \quad (3.19)$$

Invirtiendo esta relación, después de un tiempo t , la masa del punto de quiebre de una población estelar será,

$$m_{tn} \propto t_{tn}^{1/(1-\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_{tn}}{m_1} = \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{1/(1-\alpha)} \quad (3.20)$$

donde τ_1 es el tiempo de vida de una estrella de masa m_1 en la Secuencia Principal (SP).

Por último, para el cálculo de la contribución de gigantes, necesitamos: τ_g , el tiempo de vida de una estrella típica post secuencia principal (gigante); l_g , la luminosidad promedio de una gigante; y m_w , la masa de una enana blanca típica.

Estas cantidades se pueden calcular en forma aproximada a partir de modelos de evolución estelar.

Evolución Luminosa o Pasiva de un Cúmulo de Estrellas

Calculemos la evolución de un conjunto de estrellas (cúmulo o galaxia) de masa M_0 , todas nacidas simultáneamente.

La luminosidad total de estrellas de la secuencia principal es fácil de calcular. Sumamos la contribución de todas las estrellas de la SP. Hacemos la suma partiendo de un límite inferior, m_L , que corresponde a la masa mínima de una estrella que genera energía, y un límite superior, m_{tn} que corresponde a la masa de una estrella en el punto de quiebre de la SP.

Entonces, calculamos la contribución total a la luminosidad de estrellas enanas (i.e. SP) L_d .

$$\begin{aligned} L_d &= \int_{m_L}^{m_m} M_0 \phi(m/m_1) l_d(m/m_1) d\left(\frac{m}{m_1}\right) \\ &= M_0 \int_{m_L}^{m_m} \phi_1 \left(\frac{m}{m_1}\right)^{-(1+x)} l_1 \left(\frac{m}{m_1}\right)^\alpha d\left(\frac{m}{m_1}\right) \\ &= M_0 \phi_1 l_1 \int_{m_L}^{m_m} \left(\frac{m}{m_1}\right)^{\alpha-1-x} d\left(\frac{m}{m_1}\right) \\ &= \frac{M_0 \phi_1 l_1}{\alpha - x} \left\{ \left(\frac{m_{tn}}{m_1}\right)^{a-x} - \left(\frac{m_L}{m_1}\right)^{a-x} \right\} \\ m_m &= m_1 \left(\frac{l}{\tau_1}\right)^{l/l-\alpha} \\ &= \frac{M_0 \phi_1 l_1}{a - x} \left\{ \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\frac{a-x}{1-\alpha}} - \left(\frac{t_L}{\tau_1}\right)^{\frac{a-x}{1-\alpha}} \right\} \end{aligned}$$

Ya que el exponente es negativo, y estrellas de baja masa viven esencialmente para siempre, el último término de la ecuación es despreciable. La luminosidad total es,

$$\begin{aligned} \alpha &\approx 3,5 & \Rightarrow & \left(\frac{t_L}{\tau_1} \right)^{\frac{\alpha-x}{1-\alpha}} \rightarrow 0 \\ x &\approx 1,35 & & \\ L_d &= \frac{M_0 \phi_1 l_1}{\alpha - x} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\frac{\alpha-x}{1-\alpha}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ahora calculemos la contribución de las gigantes. Notemos que la evolución de estrellas en la rama gigante es mucho más rápida que en la SP. Los ingredientes son :

- Calcular el número de estrellas que se transforman en gigantes, n_g .
- Multiplicar por el tiempo que la estrella permanece como gigante, τ_g .
- Multiplicar por la luminosidad media de la estrella, l_g .

La tasa a la cual las estrellas de SP se transforman en gigantes, se define por el número de estrellas que hay en el punto de quiebre de la SP, y cuántas de ellas se mueven a la rama gigante por unidad de tiempo.

La luminosidad total en gigantes es,

$$L_g = n_g \cdot l_g \cdot \tau_g \quad (3.22)$$

donde el número de estrellas que se transforman en gigantes es,

$$n_g = M_0 \phi (M - m) \frac{dm_m}{dt}$$

entonces,

$$\begin{aligned} L_g &= \phi(m_m) \frac{d(m_m/m_1)}{dt} l_g \tau_g \\ &= M_0 \phi_1 \left(\frac{m}{m_1} \right)^{-(1+z)} \frac{dm_{tn}}{dt} l_g \tau_g \end{aligned}$$

Si sustituimos t por m , usando la relación masa-luminosidad y derivamos, la luminosidad de las gigantes es:

$$L_g = \frac{M_0 \phi_1 l_g \tau_g}{\tau_1(\alpha - 1)} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\frac{\alpha-x-1}{1-\alpha}} \quad (3.23)$$

Por lo tanto, la luminosidad total es:

$$L = L_d + L_g = \frac{M_0 \phi_1 l_1}{\alpha - x} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\frac{\alpha-x}{1-\alpha}} + \frac{M_0 \phi_1 l_g \tau_g}{\tau_1(\alpha - 1)} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\frac{\alpha-x-1}{1-\alpha}} \quad (3.24)$$

Si definimos la función $G(t)$ como la razón entre la luminosidad de las gigantes y la luminosidad de las enanas, entonces,

$$G(t) = \frac{L_g}{L_d} = \frac{(\alpha - x) l_g \tau_g}{(\alpha - 1) l_1 \tau_1} \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{1/\alpha - 1} \quad (3.25)$$

Como $\alpha > 1$, el exponente del tiempo es mucho menor que 1, lo que indica que la función anterior es una función débil del tiempo. Sin embargo,

$$\left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} = \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{-\frac{\alpha-1}{\alpha-1}} = \left(\frac{M}{m_1}\right)^{-\alpha} \left(\frac{\tau_1}{t}\right) = \frac{l_1 \tau_1}{l_{tn} t}$$

Reemplazando obtenemos,

$$\rightarrow \quad G(t) = \frac{L_g}{L_d} = \frac{(\alpha - x)}{(\alpha - 1)} \left\{ \frac{l_g \tau_g}{l_{tn} t} \right\} \quad (3.26)$$

Notar:

- $(\alpha - x)/(\alpha - 1) \approx 1$
- $l_g \tau_g / l_d t$ es la razón entre la energía total emitida por estrellas en la rama gigante y la energía emitida por estrellas en la SP.

Estimación de $G(t)$: Las estrellas de la SP se apagan cuando han consumido cerca de un 10 % de su combustible. Lo que implica que $G(t) \sim 6$. Sin embargo, este valor depende de la longitud de onda. En el azul $G(t) \sim 1$, y en el rojo $G(t) \sim 10$.

Finalmente, usando la notación anterior, la luminosidad de la población estelar, en función del tiempo, es

$$\begin{aligned} L_t &= L_d \{1 + G(t)\} \\ &= \frac{M_0 \phi_1 l_1}{\alpha - x} \{1 + g(t)\} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\frac{\alpha-x}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Aplicaciones

Discutiremos las siguientes aplicaciones:

- ⇒ Evolución pasiva en cúmulos de galaxias y q_0
- ⇒ Razón Masa-Luminosidad Fotométrica
- ⇒ Número de estrellas en distintas fases de evolución
- ⇒ Pérdida de masa de estrellas

Evolución Pasiva en Cúmulos

Un método tradicional para medir q_0 es usar la galaxia elíptica más brillante del cúmulo, como patrón de distancia, y buscar desviaciones del diagrama de Hubble.

Recordemos que la distancia luminosa se puede escribir, en términos de q_0 , H_0 y z , como,

$$\begin{aligned} d_L &= \sqrt{\frac{L}{4\pi f}} \\ d_L &= \frac{c}{H_0 q_0^2} \left[q_0 z - (1 - q_0) \left(\sqrt{1 + 2q_0 z} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

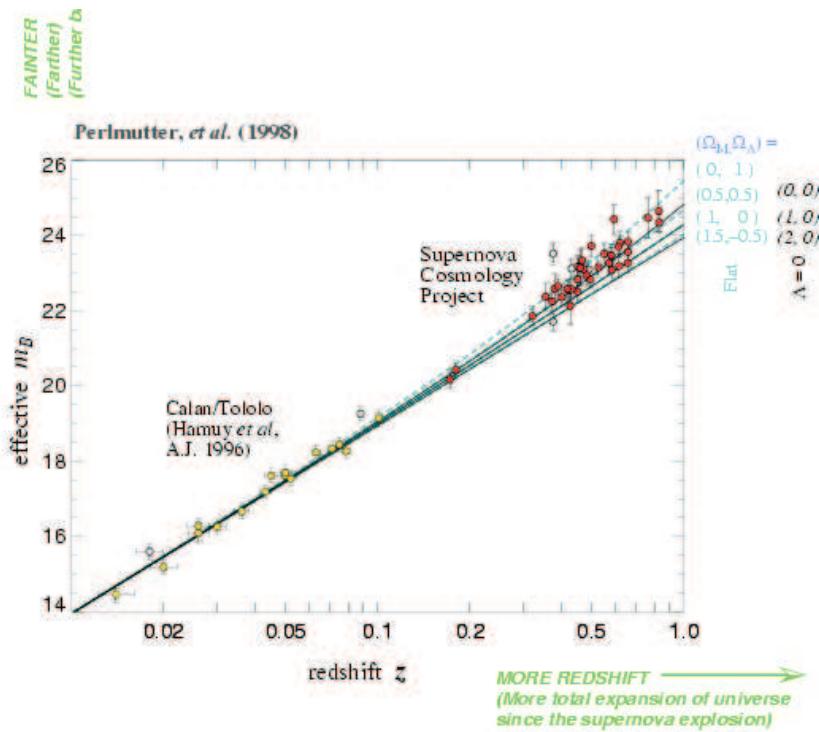


Figura 3.39: Diagrama de Hubble (m vs. z) para Supernovas.

Si expandimos en serie de Taylor alrededor de $z = 0$

$$d_L = \frac{cz}{H_0} \left[1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z + \dots \right]$$

Ahora derivemos la relación redshift-magnitud (diagrama de Hubble)

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \log(d_L/10pc) \\ &= 5 \log \left[\frac{cz}{H_0} \right] = 5 \log \left[1 + \frac{1}{2}(1 - q_0) + \dots \right] \end{aligned}$$

Expandiendo el último término alrededor de $z = 0$, y manteniendo los términos de primer orden,

$$m_{bol} = M_{bol} + 5 \log \left(\frac{cz}{H_0} \right) + 1,086(l - q_0)z$$

Para z altos la relación entre magnitud aparente y $\log(z)$ no es lineal, muestra una curvatura que depende de q_0 : Para z altos las galaxias se verán más débiles por una cantidad pequeña,

$$\Delta m = 1,086(1 - q_0)z$$

Veamos qué hace la evolución pasiva en el diagrama de Hubble para galaxias elípticas. De la ecuación que describe la evolución luminosa de la población estelar,

$$\ln(L_t) = \ln\left(\frac{M_0\phi_1m_1l_1}{\alpha-x}\right) + \ln[1+g(t)] - \frac{\alpha-x}{1-\alpha}\ln\tau_1 + \frac{\alpha-x}{1-\alpha}\ln t$$

tal que,

$$\begin{aligned} \frac{d \ln(L_t)}{d \ln t} &= \frac{\alpha-x}{1-\alpha} + \frac{d}{dt}\{\ln[1+G(t)]\} \frac{dt}{d \ln t} \\ &= \frac{\alpha-x}{1-\alpha} + \frac{t}{1+G(t)} \frac{dG}{dt} \end{aligned}$$

Recordemos que

$$G(t) = \frac{L_g}{L_d} = \frac{(\alpha-x)l_g\tau_g}{(\alpha-1)l_1\tau_1} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{1/\alpha-1}$$

Derivando $G(t)$ y después de un poco de álgebra,

$$E = \frac{d \ln L}{d \ln t} = \frac{1}{\alpha-1} \left\{ x - \alpha + \frac{G}{G+1} \right\}$$

Con Salpeter, $\alpha = 3,5$ y $G = 6$, obtenemos $E = -0,5$. Consideremos una galaxia a redshift z . Para un Universo Einstein de Sitter, el “look back time” es,

$$\Delta t = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \left\{ 1 - (1+z)^{-3/2} \right\}$$

Look back time

$$\approx \frac{2}{3} \frac{1}{H_0} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{3}{2}(1+z)_{z=0}^{5/2} z + \dots \right) \right\} \approx \frac{z}{H_0}$$

La evolución en luminosidad es, por lo tanto,

$$\ln L_z - \ln L_0 = E \left\{ \ln \left(t_0 - \frac{z}{H_0} \right) - \ln t_0 \right\}$$

Convirtiendo esto a magnitudes, y expandiendo en series de Taylor alrededor de $z = 0$,

$$\begin{aligned} \Delta m &= -2,5 \log e \cdot E \ln \left\{ 1 - \frac{z}{H_0 t_0} \right\} \approx 1,086 E \left\{ \frac{1}{1 - (z/H_0 t_0)} \cdot \frac{1}{H_0 t_0} \right\}_{z=0} \cdot z \\ &\approx 1,086 E \left(\frac{z}{H_0 t_0} \right) \approx 1,086 E z \end{aligned}$$

Esto nos dice que para z mayores, las galaxias se verán más brillantes de lo que predice la ley de Hubble. Más aún, si hacemos la equivalencia,

$$\Delta m = 1,0086(1 - q_0 z) = 1,086Ez \Rightarrow q_0 = 1 - E \approx 1,5$$

En otras palabras, si se quiere usar galaxias elípticas como patrones de distancia, hay que corregir por evolución pasiva de sus estrellas. Esta corrección puede ser grande,

$$\Delta m = q_0(\text{observado}) - q_0(\text{real}) = 1,5$$

Razón Masa-Luminosidad Fotométrica

Primero calculamos la luminosidad total de estrellas en la SP de una población estelar y luego la masa total.

La luminosidad es,

$$L_d = \frac{M_0 \phi_1 l_1}{\alpha - x} \left\{ \left(\frac{m_{tn}}{m_1} \right)^{\alpha-x} - \left(\frac{m_L}{m_1} \right)^{\alpha-x} \right\}$$

Si $\alpha - x > 0$ el último término es despreciable. Estrellas de baja masa no contribuyen mucho a la luminosidad.

Ahora, calculemos la masa.

$$\begin{aligned} M_0 &= M_0 \int_{m_L}^{m_U} m \phi(m/m_1) d\left(\frac{m}{m_1}\right) \\ &= M_0 \int_{m_L}^{m_U} m \phi(m/m_1)^{-x} d\left(\frac{m}{m_1}\right) \\ &= \frac{M_0 \phi_0}{1-x} \left\{ \left(\frac{m_U}{m_1} \right)^{1-x} - \left(\frac{m_L}{m_1} \right)^{1-x} \right\} \end{aligned}$$

Donde m_U es la masa mayor considerada (entre 60 y 100 masas solares). Si $x > 1 \Rightarrow 1 - x < 0$, la masa total está dominada por el último término, lo que significa que la mayor parte de la masa total de la población está en estrellas de baja masa.

La conclusión es que estrellas de baja masa contribuyen muy poco a la luminosidad, pero mucho a la masa.

Número de Estrellas en distintas Fases de Evolución

Nos interesa calcular el número de estrellas que pasan por alguna fase de evolución (post SP), en un tiempo dado. Este número se controla por la tasa a la cual las estrellas dejan la SP. (Todas las otras tasas son mucho más rápidas.)

Como vimos anteriormente, la tasa de estrellas dejando la SP es,

$$N_{tn} = M_0 \phi \left(\frac{m_{tn}}{m_1} \right) \frac{dm_{tn}}{dt} = M_0 \phi_1 \left(\frac{m_{tn}}{m_1} \right)^{-(1+x)} \frac{d(m_{tn}/m_1)}{dt}$$

También sabemos que

$$\frac{m_m}{m_1} = \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{1/1-\alpha}$$

derivando

$$\Rightarrow \frac{d(m_m/m_1)}{dt} = \frac{1}{\tau_1(1-\alpha)} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\alpha/1-\alpha}$$

$$\Rightarrow N_{tn} = \frac{M_0\phi_1}{\tau_1(1-\alpha)} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\frac{\alpha-x-1}{1-\alpha}}$$

El número de estrellas dejando la SP en una galaxia es proporcional al número de estrellas en la galaxia. La mejor forma de eliminar esta dependencia es normalizar respecto al tamaño de la galaxia. Como la masa es incierta, usamos la luminosidad total para definir el flujo estelar específico, b .

$$b = \frac{N_{tn}}{L_t} = \frac{\alpha-x}{l_1\tau_1(\alpha-1)(1+G(t))} \left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{1/\alpha-1}$$

Notar que $(1/\alpha - 1) < 1$; b no depende mucho del tiempo y que b tampoco depende mucho de x .

Por ejemplo, Para una población vieja $b \approx 2 \times 10^{11}$ estrellas $yr^{-1} L_{sol}^{-1}$. Con esto podemos predecir el número de estrellas de cualquier población post SP. E.g. Nebulosas Planetarias viven cerca de $\tau \approx 25000$ años. Si la luminosidad de la galaxia es $L \approx 10^{-11} L_{sol}$, entonces $N(PN) \approx b \cdot L \cdot \tau = 50000$.

Pérdida de Masa de Estrellas

Calculemos la pérdida de masa de estrellas en función del tiempo. Casi toda la masa perdida de estrellas ocurre durante las fases post SP. Por lo tanto, la tasa de masa perdida es proporcional al número de estrellas que dejan la SP y la cantidad de masa que cada estrella pierde.

Si m es la masa inicial, y w es la masa del remanente, la tasa de eyeción de masa es,

$$E(t) = N_{tn}(m_{tn} - w) = M_0\phi(m_{tn}) \frac{dm_{tn}}{dt} (m_{tn} - w)$$

Sustituyendo la derivada y normalizando por luminosidad total, encontramos la pérdida de masa específica.

$$\frac{E(t)}{L_t} = \frac{\alpha-x}{l+G(t)} \frac{(m_{tn}-w)}{\alpha-1} \frac{1}{l_{tn}t}$$

Numéricamente, la tasa de pérdida de masa resulta $\approx 0,02 M_{sol}$ por Gyr por unidad de luminosidad solar para una población estelar vieja de 10^{10} años. Integrada sobre la vida de una galaxia, resulta que el 15% de la masa original de las estrellas se pierde en un tiempo de Hubble.

3.6.4. Evolución Química

Variables Globales

Variables globales, función del tiempo.

M_g	Masa total de gas interestelar
M_s	Masa total en estrellas
M_w	Masa total de los remanentes
M	Masa total del sistema
E	La tasa de eyección de masa de estrellas
E_Z	La tasa de eyección de metales de estrellas
W	La tasa de creación de remanentes estelares

Claramente, $M = M_g + M_s + M_w$

Parámetros Globales

Parámetros especificados de antemano. Pueden ser función del tiempo.

Ψ	Tasa de formación de estrellas
f	Tasa de flujo de material saliendo o encontrando al sistema
Z_f	Abundancia metálica del material sale o entra al sistema.
$\phi(m)$	La función inicial de Masa (IMF)

Variables que vienen de Evolución Estelar

w	La masa del remanente estelar
τ	El tiempo de vida de una estrella de ls SP de masa m.
m_{tn}	El punto de quiebre de la SP de una población con $t = \tau$
p_z	La fracción de masa estelar reciclada que se convierte en metales y se pierde en el medio interestelar.

El objetivo es derivar $Z(t)$; la fracción de metales en el material interestelar en función del tiempo.

Ecuaciones de Evolución Química

Hay cinco ecuaciones diferenciales acopladas que describen la evolución química del sistema.

Conservación de masa:

$$\frac{dM}{dt} = f$$

$$\frac{dM_s}{dt} = \Psi - E - W$$

$$\frac{dM_g}{dt} = -\Psi + E + f$$

$$\frac{dM_w}{dt} = W$$

Controlan la cantidad de masa que queda en estrellas o es enviada al medio interestelar.

$$\frac{d(ZM_g)}{dt} = -Z\Psi + E_Z + Z_f f \quad \rightarrow$$

Describe cómo la metalicidad del medio interestelar cambia con el tiempo

$\frac{d(ZM_g)}{dt}$ Metales del medio Interestelar en estrellas	$= -Z\Psi + E_Z + Z_f f$ Metales inyectados o perdidos desde afuera Cantidad de metales liberados por estrellas
------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

No todas las variables son independientes. Consideremos E ; la tasa de eyección de masa de estrellas. Ya que la pérdida de masa sólo ocurre en etapas posteriores a la SP, la tasa de pérdida de masa se relaciona con el número de estrellas que evolucionan de la SP en un tiempo dado. Si la galaxia consiste de estrellas de una sola población, entonces

$$E(t) = N_{tn}(m_{tn} - w) = M_0\phi(m_{tn})\frac{dm_{tn}}{dt}(m_{tn} - w)$$

Sin embargo, para una galaxia con formación de estrellas, el cálculo de la tasa de eyección de masa debe considerar el número de estrellas de la SP en el punto de quiebre de todas las edades. Entonces, el material interestelar devuelto de estrellas en tiempo t_1 ,

$$E = \int_{n_t}^{n_U} (m - w)\Psi(t - \tau_{tn})\phi(m, t - \tau_{tn})dm$$

Donde m_U es el límite superior en la IMF, y m_t es la masa de quiebre de una población de edad t . De igual forma, la ecuación para la masa total de los remanentes que se forman es,

$$W = \int_{n_t}^{n_U} w\Psi(t - \tau_{tn})\phi(m, t - \tau_{tn})dm$$

La ecuación para E_Z es un poco más complicada, ya que tiene dos términos:

$$E_Z = \underbrace{\int_{n_1}^{n_1} m\Psi(t - \tau_{tn})\phi(m, t - \tau_{tn})dm}_{\text{Cantidad de metales nuevos generados por las estrellas}} + \underbrace{\int_{n_1}^{n_1} (m - w - mp_2)Z(t - \tau_{tn})\Psi(m, t - \tau_{tn})\phi(m, t - \tau_{tn})dm}_{\text{Cantidad de metales perdidos del ISM cuando la estrella se formó, pero ahora se re-envía al ISM}}$$

Finalmente tenemos una ecuación para la conservación de metales. Entonces, la cantidad total de metales producidos en una galaxia en un tiempo de Hubble es,

$$\bar{Z}_s(M_s + M_w) + ZM_g = \int_0^1 \int_{n_1}^{n_U} mp_2\Psi(t' - \tau_m)\phi(m, t' - \tau_m)dt'dm$$

Contenido metálico
medio en estrellas.

Aproximación Analítica

La solución a estas ecuaciones acopladas con cuatro variables independientes (Ψ, ϕ, f y Z_f) no es trivial. Consideraremos dos aproximaciones para simplificar el problema,

Aproximación 1: IMF independiente de t

$$\phi(m, t) = \phi(m)$$

Aproximación 2: Reciclado instantáneo

Se consideran sólo dos tipos de estrellas:

- $m < m_1$ estrellas que viven para siempre
- $m > m_1$ estrellas que evolucionan y mueren instantáneamente.

Aproximación buena si consideramos que una estrella de $5M_{sol}$ vive 10^8 años, lo que cosmológicamente hablando es instantáneo, y una de menos de $1M_{sol}$ prácticamente vive para siempre.

Definamos,

Fracción de gas que retorna al ISM

$$\rightarrow R = \int_{n_1}^{\infty} (m - w)\phi(m)dm$$

Fracción de materia oscura bariónica

$$\rightarrow D = \int_{n_1}^{\infty} w\phi(m)dm$$

Producto neto (del elemento i)

$$\rightarrow y_i = \frac{1}{1 - R} \int_{n_1}^{\infty} mp_z \phi(m) dm$$

En palabras,

R	Es la fracción de masa que una generación de estrellas inyecta al medio interestelar.
D	Es la fracción de masa que una generación transforma en remanentes estelares.
y_i	Es la fracción del metal i producido por estrellas por cada $1M_{sol}$ de material en estrellas o en remanentes estelares

La importancia de estas tres cantidades es que dependen solamente del IMF. Si supones una forma universal del IMF, entonces R, D y y_i son constantes que dependen sólo de la evolución estelar. En otras palabras, son cantidades conocidas.

Con estas aproximaciones miremos E, W y E_Z . Si suponemos $\phi(m)$ independiente del tiempo, y usamos la aproximación de reciclamiento instantáneo, entonces

$$\begin{aligned} E &= \int_{m_t}^{m_{tl}} (m - w)\Psi(t - \tau_m)\phi(m, t - \tau_m)dm \\ &= \Psi(t) \int_{m_t}^{m_{tl}} (m - w)\phi(m)dm = R\Psi \end{aligned}$$

De igual manera, la ecuación para remanentes es,

$$\begin{aligned} W &= \int_{m_t}^{m_{t1}} w\Psi(t - \tau_m)\phi(m, t - \tau_m)dm \\ &= \Psi(t) \int_{m_t}^{m_{t1}} w\phi(m)dm = D\Psi \end{aligned}$$

lo que resulta,

$$E_Z = \Psi[ZR + y(1 - R)]$$

Con estas suposiciones, las ecuaciones de evolución química son,

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= f \\ \frac{dM_s}{dt} &= (1 - R - D)\Psi \\ \frac{dM_g}{dt} &= -(1 - R)\Psi + f \\ \frac{dM_w}{dt} &= D\Psi \\ \frac{dZM_g}{dt} &= Z\Psi(1 - R) + y\Psi(1 - R) + Z_f f \end{aligned}$$

Que se puede simplificar diferenciando,

$$\frac{d(ZM_g)}{dt} = Z \frac{dM_g}{dt} + M_g \frac{dZ}{dt}$$

sustituyendo

$$\frac{dM_g}{dt} = -(1 - R)\Psi + f$$

se obtiene,

$$M_g \frac{dZ}{dt} = y\Psi(1 - R) + (Z_f - Z)f$$

Test de Formación de Estrellas

Las ecuaciones anteriores nos permiten estimar la historia de formación de estrellas en la vecindad solar. Si escribimos la ecuación, $\frac{dM_s}{dt} = (1 - R - D)\Psi$ como

$$\Psi = \frac{1}{1 - R - D} \frac{dM_s}{dt} = \frac{1}{1 - R - D} \left(\frac{dM_s}{d \log Z} \right) \left(\frac{d \log Z}{dt} \right)$$

Si medimos la metalicidad de estrellas en la vecindad solar,

Estudiando estrellas tipo F cercanas, y comparando sus luminosidades a las de estrella F

podemos determinar cuánta masa hay en función de la metalicidad.

Haciendo algo parecido, podemos estimar la historia de material que cae.

de la SP, podemos estimar sus edades. Si medimos sus metalicidades tenemos este término.

$$\begin{aligned}\frac{dM_g}{dt} &= -(1-R)\Psi + f \\ f &= \frac{dM_g}{dt} + (1-R)\Psi \\ &= \left\{ \frac{dM_g}{d \log Z} + \frac{1-R}{1-R-D} \frac{dM_g}{d \log Z} \right\} \frac{d \log Z}{dt}\end{aligned}$$

Si medimos las metalicidades de nubes HI y H_2 de masa distintas, entonces todos los términos de esta ecuación son conocidos, y la historia del material que cae es conocida.

Modelo Cerrado de Evolución Química

Como ejemplo de lo que el modelo de evolución química puede hacer, consideraremos un sistema cerrado, donde todo el material para la formación estelar viene de la pérdida de masa de generaciones de estrellas precursoras. En este caso, $f = 0$. Partamos de la ecuación,

$$M_g \frac{dZ}{dt} = y\Psi(1-R) + (Z_f - Z)f = y\Psi(1-R)$$

Considerando también la siguiente ecuación,

$$\frac{dM_g}{dt} = -(1-R)\Psi + f = -(1-R)\Psi$$

Dividiendo una por la otra,

$$M_g \frac{dZ}{dt} / \frac{dM_g}{dt} = M_g \frac{dZ}{dM_g} = -y$$

Ya que y es una constante de evolución estelar,

$$\int_{Z_0}^{Z_1} dZ = -y \int_{M_{g0}}^{M_{g1}} \frac{dM_g}{M_g} \Rightarrow Z_1 - Z_0 = -y \ln \left(\frac{M_{g1}}{M_{g0}} \right)$$

Z_0	Metalicidad inicial del gas
M_{g0}	Masa inicial del gas
Z_1	Metalicidad del gas hoy
M_{g1}	Masa del gas hoy

Si,

$$\mu = \left(\frac{M_g}{M} \right) \quad \sigma \left(\frac{M_s}{M} \right) \quad \delta = \left(\frac{M_D}{M} \right)$$

$$Z_1 - Z_0 = -\ln \left(\frac{\mu_1}{\mu_0} \right)^y$$

$$\mu = \mu_1 \exp \left\{ \frac{Z_1 - Z_2}{y} \right\}$$

Recordando

$$\begin{aligned} \frac{dM_s}{dt} &= (1 - R - D)\Psi \quad \frac{dM_g}{dt} = -(1 - R)\Psi + f \\ \frac{dM_s}{dt} / \frac{dM_g}{dt} &= \frac{d\sigma}{d\mu} = -\frac{1 - R - D}{1 - R} \end{aligned}$$

entonces,

$$\frac{d\sigma}{dZ} = \left(\frac{d\mu}{dZ} \right) \left(\frac{d\sigma}{d\mu} \right) = \left(\frac{\mu}{y} \right) \left(\frac{1 - R - D}{1 - R} \right) \exp \left\{ \frac{Z_1 - Z}{y} \right\}$$

Finalmente, si escribimos esta ecuación en términos de $\log Z$,

$$\frac{d\sigma/\sigma_1}{d\log Z} = \ln 10 \left(\frac{Z}{y} \right) \left(\frac{1 - R - D}{1 - R} \right) \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} \right) \exp \left\{ \frac{Z_1 - Z}{y} \right\}$$

Ya que el número de medidas de metalicidad estelar no es muy abundante, es mejor estudiar la función distribución acumulativa, i.e. El número de estrellas con metalicidades menor que Z . Para esto integramos la ecuación anterior. Juntemos las constantes en

$$G = \left(\frac{1 - R - D}{1 - R} \right) \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1} \right)$$

La función acumulativa será,

$$\frac{\sigma}{\sigma_1} = 1 - G \left\{ \exp \left(\frac{Z_1 - Z}{y} \right) - 1 \right\}$$

Cuando esta función se compara con las observaciones, es claro que las metalicidades de las estrellas en la vecindad solar no se pueden ajustar con un modelo cerrado de evolución galáctica. Algunas razones,

- ó $Z_0 \neq 0$
- ó la población inicial de estrellas no tenían la misma IMF
- ó $f \neq 0$
- ó hay in-homogeneidades químicas severas en el ISM, y la formación de estrellas ocurren preferentemente en regiones de metalicidad más alta.

3.6.5. Midiendo evolución: Cuentas de galaxias y distribuciones en corrimiento al rojo

3.7. Problemas y Ejercicios

1. Problema 3.1:

- a) La ley de *de Vaucouleurs* describe los perfiles de brillo radial de galaxias elípticas y bulges. Se puede escribir

$$\log_{10}[I(r)/I_e(r_e)] = -3,33[(r/r_e)^{1/4} - 1]$$

donde r_e es el “radio efectivo”, y es el radio que contiene la mitad de la luminosidad total, I es el brillo superficial en $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{segarc}^{-2}$ en una distancia r .

- 1) Convierta esta ecuación en magnitudes por segundos de arco, denotado por $\mu(r)$.
- 2) Calcule la razón $I_e(r_e)/I(0)$, donde $I(0)$ es el brillo superficial central, también calcule $\Delta\mu = \mu(r_e) - \mu(0)$.
- 3) Para el bulge de una galaxia Sbc típica, $r_e = 2\text{kpc}$ y $\mu_{bulge}(0) = 20^m$ en la banda B. ¿Cuál es $\mu(r_e)$?
- 4) Compare esto con el brillo del cielo típico de $B = 22^m$. (calcule la razón de I's y las diferencias de μ 's).
- b) La correspondiente ley de brillo superficial radial para galaxias disco es : $I(r) = I(0)e^{-r/r_0}$ (donde r_0 es una escala de longitud característica). Valores típicos son $r_0 = 4\text{kpc}$ y el brillo central en la banda B, $\mu_{disco} = 22^m$.
 - 1) Recientemente *van der Kruit* propuso que los discos, en realidad, terminan abruptamente en $r = 4r_0$. En esta posición, calcule y compare el brillo superficial de: el disco, el fondo de cielo, y el brillo del bulge galáctico asumiendo los valores encontrados en el item a.
 - 2) Compare el brillo del disco, el bulge, y el fondo de cielo en el radio efectivo del bulge r_e .
2. **Problema 3.2:** Suponga que todas las estrellas en una galaxia tienen la misma luminosidad intrínseca L , están distribuidas uniformemente dentro de la galaxia y no hay extinción debido al polvo. Haga un gráfico de número versus magnitud aparente para estrellas. De la expresión para $N(m + dm)$, el número de estrellas de magnitud aparente entre m y $m + dm$, versus m . ¿Cómo podría usted determinar si se encuentra en una galaxia espiral (disco uniforme delgado), o una elíptica (aproximadamente una distribución esférica)?
3. **Problema 3.3:** Considere un sistema gravitacional formado por 5×10^5 estrellas con una dispersión en velocidades de $\sigma = 10 \text{ km/s}$ y un radio de 3 minutos de arco. Usando esta información estime la distancia al sistema.
4. **Problema 3.4:** El bias de *Malmquist*, es una consecuencia natural de usar un método para estimar distancias el cual no es perfectamente preciso. Asuma que las galaxias están distribuidas uniformemente en el espacio, y considere galaxias con una distancia medida desde la Tierra, D . Alguna fracción ϵ de galaxias con $D_{true} = D - \Delta D$ serán medidas en D , una fracción ϵ con $D_{true} = D + \Delta D$ (una fracción $1 - 2\epsilon$ de galaxias con $D_{true} = D$). Estime la distancia verdadera media D_{true} para galaxias con distancia medida D . Note que el estimador de distancia no es sesgado (igual probabilidad de error por arriba que por abajo). ¿La distancia que usted calcula es sesgada?

5. Problema 3.5: Demuestre que para galaxias elípticas se cumple la relación de *Faber-Jackson*, $L \propto \sigma^4$, donde L es la luminosidad y σ la dispersión de velocidades de una galaxia. Use el teorema del virial y suponga que la razón masa-luminosidad es constante. Discuta la validez de suponer que el brillo superficial es el mismo para todas las galaxias elípticas.

6. Problema 3.6:

- A partir de la función de brillo superficial, calcule la luminosidad de una galaxia elíptica. Exprese el resultado en función del radio efectivo r_e y del brillo superficial efectivo I_e (suponga la ley de De Vaucouleurs para el brillo superficial).
- Calcule la luminosidad de una galaxia espiral en función del radio efectivo r_e y del brillo superficial efectivo $I_e = I(r_e)$. El radio efectivo, en este caso, está definido como $r_e = 1.7r_0$, donde r_0 es el radio característico de la ley exponencial para el brillo superficial $I(r)$.
- Compare las luminosidades halladas en los items anteriores. Para un radio efectivo fijo, ¿cuánto más luminosa es una galaxia elíptica en relación a una espiral? ¿Qué diferencias encuantra en los perfiles $I(r)$?

Le serán útiles las siguientes expresiones: Ley De Vaocouleurs:

$$I(r) = I_e 10^{-3,33[(r/r_e)^{1/4} - 1]}$$

Ley Exponencial:

$$I(r) = I_0 e^{-r/r_0}$$

Integrales útiles:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

$$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$$

7. Problema 3.7: En una galaxia elíptica, N_{n-m} es el número de estrellas con masas entre n y m masas solares, y L_{n-m} es el número de estrellas con luminosidades entre n y m luminosidades solares. Compare

$$\frac{N_{2-3}}{N_{10-11}} \quad \text{y} \quad \frac{L_{2-3}}{L_{10-11}}$$

y explique sus resultados.

Suponga una función inicial de masa de la forma:

$$\phi(m) dm \propto m^{-(1+x)} dm$$

y una relación masa-luminosidad para las estrellas de la secuencia principal dada por:

$$\frac{l}{l_\odot} = \left(\frac{m}{m_\odot} \right)^\alpha,$$

considerando $x = 1.35$ y $\alpha = 3.5$

8. **Problema 3.8:** Si las galaxias elípticas se formaron todas al inicio del Universo, ¿cuánto más brillante (en magnitudes) es una galaxia en $z = 0.3$ comparada con una similar formada a $z = 0$?

Para este cálculo considere un universo de Einstein-de Sitter donde $R(t) \propto t^{2/3}$, y calcule la fracción de la edad del Universo que corresponde a $z = 0.3$.

9. **Problema 3.9:** De acuerdo a la relación Tully-Fisher, la magnitud absoluta en la banda B de una galaxia espiral se relaciona con el ancho de sus líneas espectrales (debido a la diferencia de velocidades por rotación) por:

$$M_B = -7,45(\log W - 2,50) - 19,55,$$

donde W es el ancho de la línea (en km/s). Consideremos una espiral con magnitud aparente $B = 10$, una inclinación de 60 deg, un semieje mayor de 8 arcmin y un ancho en la línea de 21 cm (HI) de 400 km/s. Si la magnitud absoluta del Sol es $M_{B\odot} = 5.5$, ¿cuál es la razón masa-luminosidad en unidades solares?

10. **Problema 3.10:** Considere que la masa de la Vía Láctea es de $10^{12} M_\odot$ y que las estrellas más antiguas tienen órbitas muy elípticas con distancias apogalácticas de 50 kpc. Use este tamaño original para estimar un límite superior para el redshift de formación.
11. **Problema 3.11:** La función $G(t) = \frac{L_g}{L_d}$ describe la evolución de la razón entre la luz total emitida por estrellas gigantes y la luz total emitida por estrellas de la secuencia principal en una galaxia elíptica. En clases se estimó que $G \sim 6$ en promedio (banda azul). ¿Cuáles fueron los argumentos dados para llegar a esta estimación?
12. **Problema 3.12:** Describa como esperaría usted que fuese la evolución de un cúmulo de galaxias. Para su respuesta, considere las siguientes propiedades: tipos de galaxias, brillo en rayos X, morfología del cúmulo, riqueza, etc. Sea muy preciso y breve.

3.8. Lecturas y Referencias

