

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/41442007>

# Approximation Polynomiale des Problèmes NP-difficiles : Optima Locaux et Rapport Différentiel

Article · January 2002

Source: OAI

CITATIONS

14

READS

50

3 authors:



Jérôme Monnot

French National Centre for Scientific Researc...

151 PUBLICATIONS 1,033 CITATIONS

SEE PROFILE



Vangelis Paschos

Paris Dauphine University

293 PUBLICATIONS 2,150 CITATIONS

SEE PROFILE



Sophie Toulouse

Université Paris 13 Nord

28 PUBLICATIONS 151 CITATIONS

SEE PROFILE

Approximation polynomiale des problèmes  
NP-difficiles :  
optima locaux et rapport différentiel

Jérôme MONNOT et Vangelis Th. PASCHOS et Sophie TOULOUSE

17 décembre 2002

## Remerciements

Un livre, avant d’être édité, a déjà vécu une longue histoire. L’histoire de celui-ci, ce sont des travaux de recherche qui ont inspiré le travail de thèse de Sophie Toulouse ; c’est l’encouragement à faire de ce travail un ouvrage à part entière, la finalisation d’un manuscrit en vue de son édition. Pour toutes ces étapes, nous tenons à remercier celles et ceux qui nous ont permis d’avancer.

Nous pensons tout d’abord à Lalo Fernandez de la Vega qui est à l’initiative de cet ouvrage : il nous a donné l’envie, le souffle et l’enthousiasme de le faire. Nous pensons aussi à Giorgio Ausiello dont les recherches et les réflexions ont nourri nos propres recherches. Nous pensons également à la participation de Cristina Bazgan, à celle de Jean-Xavier Rampon et, bien évidemment, à l’accompagnement de tous les jours de Dominique Champ-Brunet pour la documentation, mais aussi le sourire et la décontraction. Enfin, merci aux maîtres du  $\LaTeX$  Stratos Paschos et Denis Bouyssou pour leur disponibilité et le précieux secours qu’ils nous ont porté. Enfin l’essentiel : la discipline et tous ceux qui ont concouru et encouragent encore à la présenter et l’enrichir.

Un livre, après son édition, commence sa véritable vie ; nous remercions les lecteurs, qui, nous l’espérons, trouveront intérêt à sa lecture : c’est à eux qu’il revient de donner une âme à cet ouvrage.

## Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	11
<b>Chapitre 1. Introduction</b> . . . . .	19
<b>Chapitre 2. L'approximation polynomiale</b> . . . . .	23
2.1. Les problèmes . . . . .	23
2.1.1. Qu'est-ce qu'un problème de NPO ? . . . . .	23
2.1.2. Définitions indispensables . . . . .	25
2.2. Leur résolution . . . . .	25
2.2.1. La mission de l'approximation polynomiale . . . . .	28
2.2.2. Son arme . . . . .	29
2.3. L'évaluation de leurs algorithmes . . . . .	29
2.3.1. Fer de lance de l'approximation polynomiale : le rapport classique . . . . .	29
2.3.2. Une alternative : le rapport différentiel . . . . .	30
2.3.3. L'erreur . . . . .	31
2.4. Degrés d'approximation . . . . .	32
2.4.1. Approximation à rapport constant $r_0$ . . . . .	32
2.4.2. Approximation à $r$ , $r$ aussi proche de 1 que l'on veut . . . . .	34
2.5. Définition logique . . . . .	37
2.5.1. Les classes MaxNP et MaxSNP . . . . .	38
2.5.2. Logique et approximation . . . . .	40
2.6. Effets de classe . . . . .	43
2.6.1. Le principe de réduction . . . . .	43
2.6.1.1. Réduction polynomiale . . . . .	43
2.6.1.2. Réduction préservant l'optimalité . . . . .	44
2.6.1.3. Réduction préservant l'approximation . . . . .	45
2.6.2. La notion de complétude . . . . .	48
2.6.3. La fermeture . . . . .	49

2.7. Affinité entre problèmes . . . . .	49
2.7.1. Réductions continues . . . . .	49
2.7.2. Réductions affines . . . . .	52
2.8. Voyageur de commerce et affinité . . . . .	56
2.8.1. Le cas métrique . . . . .	57
2.8.2. Ses cousins . . . . .	57
2.8.3. Le cas bivalué . . . . .	58
2.8.4. Le cas général . . . . .	59
2.9. Conclusion . . . . .	60
<b>Chapitre 3. Optimum local garanti . . . . .</b>	<b>63</b>
3.1. Quelques concepts . . . . .	63
3.1.1. Qu'est-ce qu'un algorithme de recherche locale ? . . . . .	63
3.1.1.1. LSA – algorithme de recherche locale . . . . .	64
3.1.1.2. Complexité d'un LSA . . . . .	65
3.1.1.3. Conditions nécessaires et conditions suffisantes de polyno- mialité . . . . .	65
3.1.2. Voisinages $h$ -bornés . . . . .	67
3.2. Les classes GLO[R] . . . . .	70
3.3. Exemples simples pour voisinages 1-bornés . . . . .	71
3.4. Limite des voisinages $h$ -bornés . . . . .	74
3.5. Réductions préservant l'approximation locale . . . . .	75
3.5.1. Préserver le voisinage . . . . .	76
3.5.1.1. La LOC-réduction . . . . .	76
3.5.1.2. La LOC'-réduction . . . . .	79
3.5.2. La réduction dans GLO[R] . . . . .	81
3.5.3. Exemples . . . . .	82
3.6. GLO et associés première partie . . . . .	84
3.6.1. Voisinages miroirs et classe CGLO[R] . . . . .	84
3.6.2. Optima altérés et GGLO[R] . . . . .	86
3.6.3. Mixage ou GCGLO[R] . . . . .	86
<b>Chapitre 4. Problèmes dans GLO et GLO[<math>\delta</math>] . . . . .</b>	<b>87</b>
4.1. Des voisinages 1- et 2-bornés . . . . .	87
4.1.1. Couverture d'ensembles . . . . .	90
4.1.2. Ensemble minimum d'arêtes retour . . . . .	94
4.1.3. Couplage maximum dans un hypergraphe . . . . .	95
4.1.4. Les problèmes d'ordonnancement . . . . .	96
4.1.5. Le problème de sous-graphe partiel maximum libre de $H_0$ . . . . .	97
4.1.6. Ensemble minimum de sommets retour . . . . .	100
4.2. Exemples pour les voisinages 3-bornés et plus . . . . .	101
4.2.1. Retour sur le problème de sous-graphe partiel maximum libre de $H_0$ . . . . .	101

4.2.2. Le voyageur de commerce et le voisinage 2-opt . . . . .	106
4.3. Résultats négatifs . . . . .	109
4.3.1. Satisfaisabilité maximum . . . . .	109
4.3.2. Le sac-à-dos . . . . .	110
4.4. Où les classes GLO[R] se situent-elles ? . . . . .	112
4.4.1. GLO[R] et les classes d'approximation . . . . .	112
4.4.2. GLO[R] et les classes logiques . . . . .	117
4.4.3. Quelle unité dans tout ça ? . . . . .	119
4.5. Conclusion . . . . .	119
<b>Chapitre 5. Les problèmes de satisfaisabilité . . . . .</b>	<b>123</b>
5.1. Les problèmes de satisfaisabilité entre eux . . . . .	123
5.1.1. Présentation . . . . .	123
5.1.2. Tous pour un . . . . .	126
5.2. GLO et associés deuxième partie . . . . .	128
5.3. Déclinaison des problèmes de satisfaisabilité maximum en GLO . . . .	130
5.3.1. Une opposition de plus entre rapports classique et différentiel . .	130
5.3.2. MaxSat et CGLO . . . . .	131
5.3.3. Max $k$ -Sat et GLO . . . . .	131
5.3.4. Max $k$ -Sat et CGLO . . . . .	133
5.3.5. MaxNAE $k$ -Sat et GLO . . . . .	134
5.3.6. Max $k$ -Sat et GCGLO . . . . .	135
5.4. Les problèmes de satisfaction de contraintes conjonctives . . . . .	136
5.4.1. Un problème difficile . . . . .	136
5.4.2. Vers le 1/4 différentiel . . . . .	140
5.4.3. Approximation à 1/3 . . . . .	143
5.5. Limites de l'approche GLO . . . . .	144
5.5.1. 1/3, le meilleur de CGLO pour Max2-CCSP . . . . .	144
5.5.2. 1/5, le meilleur espoir de CGLO[ $\delta$ ] pour Max2-CCSP . . . . .	147
5.5.3. 1/2, le meilleur de GLO pour MaxNAE2-Sat . . . . .	148
5.5.4. 1/3, le meilleur espoir de GLO[ $\delta$ ] pour MaxNAE2-Sat . . . . .	149
5.6. Conclusion . . . . .	150
<b>Chapitre 6. Réductions . . . . .</b>	<b>151</b>
6.1. Dans les graphes et les hypergraphes (systèmes d'ensembles) . . . .	151
6.1.1. Régularisation pour la couverture d'ensembles . . . . .	152
6.1.2. Dépondération pour la couverture d'ensembles . . . . .	153
6.1.3. Dépondération pour la couverture de sommets . . . . .	156
6.1.4. Autres problèmes simples dans les graphes . . . . .	158
6.2. Les problèmes de logique . . . . .	159
6.2.1. Autour de MinEQ . . . . .	159
6.2.2. Autour de MaxNAESat . . . . .	163
6.2.3. Dense ou pas dense ? . . . . .	166

6.3. Conclusion . . . . .	172
6.3.1. Un certain goût d'inachevé . . . . .	172
6.3.2. Synthèse . . . . .	172
<b>Chapitre 7. En-deçà de GLO . . . . .</b>	<b>175</b>
7.1. La classe PLS des problèmes de recherche locale . . . . .	175
7.1.1. De la difficulté de détermination des optima locaux . . . . .	176
7.1.1.1. Quelques notions indispensables . . . . .	176
7.1.1.2. Le graphe de transition . . . . .	177
7.1.2. Approximation des optima locaux . . . . .	179
7.2. Les problèmes radiaux . . . . .	180
7.2.1. Qu'est-ce que radial ? . . . . .	181
7.2.2. Les problèmes $\tau$ -radiaux . . . . .	184
7.2.2.1. Définition et exemples . . . . .	185
7.2.2.2. Problèmes $\tau$ -radiaux et optima locaux . . . . .	187
7.2.3. Une sous-famille remarquable . . . . .	188
7.2.3.1. Les problèmes réguliers . . . . .	188
7.2.3.2. Les problèmes héréditaires et anti-héréditaires . . . . .	190
7.2.3.3. Les problèmes de partitionnement héréditaire . . . . .	192
7.3. Conclusion . . . . .	192
<b>Annexes . . . . .</b>	<b>193</b>
A. Problèmes rencontrés . . . . .	193
A.1. Problèmes dans les graphes . . . . .	194
A.2. Problèmes de programmation linéaire . . . . .	199
A.3. Problèmes de logique . . . . .	200
A.4. Autres problèmes . . . . .	203
B. Définitions . . . . .	205
B.1. Les fondements . . . . .	205
B.2. Les classes . . . . .	207
B.2.1. Classes d'approximation . . . . .	207
B.2.2. Classes définies par la logique . . . . .	207
B.2.3. Classes d'approximation locale . . . . .	208
B.3. Réductions . . . . .	209
B.3.1. Propriétés remarquables . . . . .	209
B.3.2. Réductions remarquables . . . . .	210
B.4. Localité . . . . .	212
B.5. Problèmes particuliers . . . . .	212
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>215</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>221</b>

## Avant-propos

La résolution des problèmes difficiles d'optimisation combinatoire repose très souvent sur des méthodes dites « approchées ». Elles visent non pas à résoudre un problème de façon optimale, une telle tentative sur un problème de taille même modeste pouvant mettre des heures, des mois, des années voire des siècles<sup>1</sup>, mais de telle façon qu'une solution réalisable du problème en question soit calculée en temps polynomial, c'est-à-dire en un temps majoré par un polynôme en la taille de l'instance que l'on a à résoudre. La plupart des problèmes réels sont tels : leurs meilleurs (plus rapides) algorithmes connus sont de complexité exponentielle. Dans leur grande majorité ces problèmes sont formellement classés comme « intrinsèquement difficiles » (problèmes *NP-difficiles* — *NP-hard*). C'est notamment le cas de la plupart des problèmes non triviaux d'ordonnancement, des problèmes de routage (exemple notoire et paradigmatique pour la recherche opérationnelle et l'informatique fondamentale : le voyageur de commerce) ou encore des problèmes de couverture et de partitionnement. La recherche d'algorithmes approchés est une démarche principalement adressée à cette classe de problèmes. Pour les problèmes NP-difficiles, même si un tel fait n'est pas formellement démontré (et peut ne jamais l'être), il y a de très fortes présomptions de penser qu'ils ne seront jamais solubles par des algorithmes polynomiaux : ceci est la fameuse, et fondamentale pour l'informatique, conjecture  $P \neq NP$ ). Les algorithmes approchés pour la résolution de problèmes d'optimisation combinatoire ont été très souvent utilisés dans l'histoire de l'informatique et surtout dès le début du développement de la recherche opérationnelle. Dans ce livre, nous nous sommes intéressés à une classe bien particulière de méthodes approchées, *celles qui garantissent la qualité de leurs solutions*, c'est-à-dire capables de calculer des solutions dont la distance en valeur à la solution optimale est « petite » ou dont le positionnement en

---

1. Considérons un algorithme de complexité exponentielle, par exemple d'ordre  $2^n$  ( $n$  étant la taille du problème) ; pour  $n = 100$  (une taille bien modeste pour un problème industriel), le nombre  $2^{100}$  est plus grand que le nombre de milliardièmes de secondes qui se sont écoulées depuis le *big-bang* jusqu'à aujourd'hui [PAP 00].



termes de valeur objective dans le rang des valeurs objectives réalisables possibles est « assez proche » de la valeur optimale et « assez loin » de la pire valeur réalisable. Ces deux critères de qualité des solutions approchées désignent deux théories de la mesure de la qualité d'un algorithme approché, théories qui seront appelées, respectivement, *approximation standard* ou *classique* et *approximation différentielle*<sup>2</sup>. Dorénavant, quand nous parlerons d'algorithmes approchés, nous entendrons *algorithmes approchés avec garantie de performance*.

Aussi nous adoptons le cadre d'évaluation appelé « au pire des cas » : quand on mesure la performance (soit en complexité, soit en la qualité des solutions approchées qu'il fournit) d'un algorithme, on l'évalue par rapport à la « pire instance », c'est-à-dire par rapport à l'instance pour laquelle ses performances sont les plus mauvaises, soit où le coût de son application est le plus élevé (si l'on mesure sa complexité), où la mesure d'approximation des solutions qu'il calcule est la plus mauvaise (si l'on évalue sa capacité à trouver des bonnes solutions approchées).

La conception d'algorithmes approchés peut être envisagée sous deux angles :

- 1) soit l'on conçoit un algorithme approché particulier pour un problème particulier,
- 2) soit l'on essaie de concevoir des algorithmes ou des classes d'algorithmes qui s'adressent à une classe entière de problèmes.

Dans le second cas, il faut d'abord comprendre les caractéristiques structurelles des instances des problèmes de la classe qui nous concerne, puis essayer de dégager des techniques et des mécanismes généraux sur lesquels notre conception s'appuiera.

Nous nous sommes orientés dans ce livre vers ce dernier angle (point (ii)) et plus particulièrement vers les méthodes de recherche et d'amélioration locale. Le concept d'amélioration locale est assez simple et surtout très intuitif. Une caractéristique de base des problèmes NP-difficiles est qu'*une solution réalisable pour chacun de ces problèmes peut être calculée en temps polynomial*. L'amélioration locale est donc basée sur l'idée suivante :

- on calcule en temps polynomial une solution réalisable initiale ;
- partant de cette solution, on essaie de l'améliorer, tant que faire se peut, par des transformations locales, c'est-à-dire en remplaçant quelques éléments de la solution

---

2. Pourquoi cette désignation évocatrice pour la première ? Tout simplement par respect vis-à-vis de l'évolution historique de la théorie de l'approximation polynomiale à garantie de performance : cette évolution s'est construite sur la théorie appelée ici « classique », théorie qui a donc été plus souvent exploitée (à tort pensons-nous) que la théorie différentielle ; cette dernière, bien qu'ayant donné lieu à quelques résultats ponctuels depuis la fin des années 1970 (voir par exemple [AUS 80, HSU 79], etc.), n'a été réellement formalisée et systématiquement utilisée que depuis 1993 [DEM 93, DEM 96].

courante par d'autres, de telle façon que la nouvelle solution obtenue reste réalisable et ait une valeur objective meilleure que la solution précédente ;

- dès lors qu'une telle amélioration n'est plus possible (on a atteint un optimum local), l'algorithme s'arrête et renvoie la dernière solution construite (qui est la meilleure, au sens de l'objectif, de toutes celles considérées).

Cette technique d'amélioration locale peut avoir des variantes polynomiales ou exponentielles. Si, par exemple, nous choisissons de changer peu d'éléments (un nombre constant) lors du passage d'une solution à une autre, la convergence vers un optimum local peut se faire en temps polynomial. Si en revanche on décide de changer beaucoup d'éléments lors de ce passage (par exemple un nombre fonction croissante de la taille de l'instance du problème), alors le nombre d'étapes à parcourir avant d'atteindre un optimum local sera, au pire des cas, exponentiel.

L'amélioration locale est historiquement parmi les premières méthodes utilisées pour la résolution des problèmes combinatoires (voir, par exemple, ses diverses applications à la résolution du problème du voyageur de commerce) et reste toujours d'actualité (la plupart des métaheuristiques – recuit simulé, tabou, etc. – sont des implémentations particulières de cette méthode). Exception faite des métaheuristiques qui ne nous concernent pas dans ce livre, l'utilisation de la recherche locale et surtout de sa variante polynomiale fut jusqu'ici ponctuelle et surtout liée à l'angle (i), c'est-à-dire à la conception d'une telle méthode pour un problème particulier pour lequel les présomptions sont fortes de penser que la méthode marcherait. Ici, nous adoptons une démarche compatible avec l'angle (ii) : nous considérons des algorithmes approchés s'adressant à des classes de problèmes et essayons de désigner des caractéristiques plus ou moins globales pour la conception de tels algorithmes. Nous traitons la recherche locale de cette façon et même, nous exigeons d'elle quelque chose de plus strict encore : que tout optimum local respecte une certaine garantie de performance (que ce soit la garantie classique ou différentielle).

Donc, le but de cet ouvrage n'est pas de parler de l'approximation polynomiale en général (quoiqu'un tel ouvrage manque à la littérature scientifique francophone). Pour ceci, le lecteur intéressé est invité à se référer à [AUS 99, HOC 97], mais aussi à [[GAR 79] chapitre 6], ou encore à [[PAP 81] chapitre 17] pour ce qui concerne l'approximation classique. Notre objectif est ici de lier l'approximation polynomiale à l'amélioration locale qui garantit les performances de ses optima locaux ; cette garantie étant indifféremment la garantie classique ou la garantie différentielle, avec tout de même une orientation plus marquée vers la seconde. Par la même occasion, nous faisons une présentation rapide mais assez formelle de ces deux théories d'approximation polynomiale, de leurs fondements et de leur complémentarité. Nous mettons en évidence le fait que l'utilisation conjointe des deux théories peut contribuer formidablement à une meilleure compréhension de la difficulté intrinsèque des problèmes

NP-difficiles et notamment des mécanismes de leur résolution approchée par des méthodes de recherche locale.

Dans ce livre, nous présentons à la fois des résultats *positifs* (affirmant qu'un tel problème ou que telle classe de problèmes sont solubles par des algorithmes d'amélioration locale garantissant la qualité de tous les optima locaux) et *négatifs* (affirmant que pour tel ou tel problème, aucun algorithme d'amélioration locale ne peut garantir des optima locaux vérifiant un tel critère de qualité d'approximation). Nous pensons que les deux types de résultats sont indispensables et ont beaucoup à nous apprendre. Une grande ironie de l'histoire de la théorie de la complexité est que très souvent, on enrichit plus la connaissance par des preuves d'impossibilité que par des preuves de possibilité, même si ces premières induisent un certain degré de pessimisme.

« Quand on voit les choses de façon exclusivement positive, très souvent on laisse nous échapper des approches fines et efficaces, on ignore et l'on ne voit pas des avenues entières qui mènent à de nouveaux champs et qui ouvrent de nombreuses possibilités nouvelles. Quand on essaie de prouver l'impossible, il faut d'abord appréhender le spectre complet du possible » (une leçon du programme TURING ; [PAP 00]).

Ici, même si nous sommes résolument tournés vers l'optimisme (en tentant de prouver de bons comportements pour les algorithmes, de bonnes propriétés d'approximabilité pour les problèmes), nous essayons de ne pas perdre de vue les limites de ce que nous faisons, et de comprendre pourquoi de telles limites existent.

Le contenu de ce livre est organisé de la façon suivante. Dans le chapitre 2 nous présentons les fondements de la théorie de l'approximation polynomiale qui vont de la définition de critères d'évaluation de la performance des algorithmes approchés à celle des classes d'approximabilité des problèmes (nous pouvons voir ces classes comme des couches successives qui affinent la simple dichotomie P/NP-difficiles de la classe NP), en passant (obligatoirement puisque l'on parle de classes de complexité) par des notions de réductions conservant l'approximabilité.

Dans le chapitre 3, nous présentons la recherche locale et précisons nos exigences de garantie quant à la qualité des optima locaux. Nous définissons ainsi la classe GLO des problèmes dont la qualité de tout optimum local est garantie pour des types particuliers de voisinages<sup>3</sup>. Ayant défini la classe GLO (qui deviendra alors notre classe de référence), nous définirons des réductions préservant l'approximation par recherche locale.

---

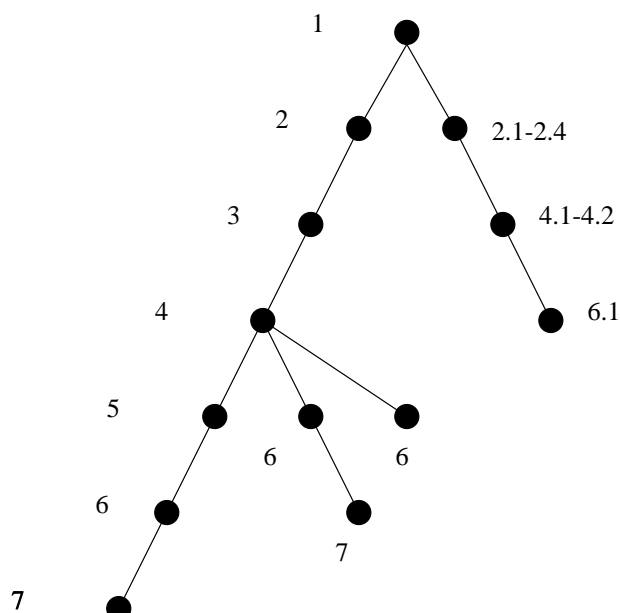
3. Le voisinage est un ensemble de solutions qui peuvent être obtenues par un type de transformation opérée sur une solution donnée ; il dépend donc de celle-ci. C'est dans le voisinage d'une solution que l'on cherche notre prochaine (meilleure) solution.

Dans le chapitre 4, nous présentons des résultats (positifs et négatifs) d'appartenance de problèmes à GLO. Ces résultats, leurs liens avec l'amélioration locale mis à part, sont intéressants par eux-mêmes puisque plusieurs d'entre eux sont des nouveaux résultats d'approximation. Ils ont aussi une importance supplémentaire : ils mettent en évidence des problèmes dont le comportement en approximation change radicalement (dans le bon ou dans le mauvais sens) d'une théorie d'approximation à l'autre. Enfin, nous positionnons la classe GLO dans le paysage des classes d'approximabilité présentées au chapitre 2.

Le chapitre 5 est dédié à l'étude de la qualité des optima locaux pour la classe des problèmes de satisfaisabilité. Encore une fois, les résultats présentés concernent les deux cadres classique et différentiel. Le choix de la satisfaisabilité comme application principale de notre étude n'est nullement aléatoire : la satisfaisabilité est un problème-paradigme. Il est le premier problème NP-complet démontré comme tel par une réduction directe à partir du concept de machine de Turing (voir [LEW 81] pour plus d'information sur ce formidable outil que sont ces machines). De plus, diverses variantes de la satisfaisabilité sont les premiers problèmes démontrés complets pour les diverses classes d'approximabilité (en classique) présentées au chapitre 2. Aussi, les problèmes de satisfaisabilité étudiés au chapitre 5 se comportent-ils très différemment eu égard aux deux théories d'approximation. *Last but not least*, quelques-uns de ces problèmes ont, comme nous allons le voir, un statut tout particulier pour l'approximation différentielle : *le rapport différentiel de tout algorithme approché est ici égal à zéro*. Ceci représente le pire des résultats négatifs en approximation. Les problèmes pour lesquels un tel résultat est vrai sont, en quelque sorte, intrinsèquement les plus difficiles pour l'approximation considérée.

Ayant défini au chapitre 2 des réductions préservant l'approximation par amélioration locale, nous donnons au chapitre 6 de telles réductions. Comme nous allons le voir, plusieurs réductions conçues dans des contextes différents possèdent des propriétés (éventuellement non remarquées par leurs auteurs) qui font d'elles des réductions préservant l'approximation par amélioration locale. Ceci, à notre avis, montre une fois encore que la recherche locale est une idée très adaptée à l'optimisation combinatoire.

Au chapitre 7 nous regardons au-delà de GLO. On ne s'intéresse plus à la qualité des optima locaux mais à la détermination même de telles solutions. La question que nous nous posons ici est : « sur quel problème et pour quel type de voisinage, un algorithme d'amélioration locale pourra-t-il déterminer un optimum local relativement à ce voisinage en temps polynomial » ? Ceci nous amène à nous intéresser à la classe PLS et aux *problèmes radiaux*. Notre motivation est ici de mieux cerner (sans prétendre à l'exhaustivité) le champ de recherches et de difficultés posées par les optima locaux en approximation polynomiale.



**Figure 1.** *Les lectures alternatives de ce livre*

Notre souci à la rédaction de ce livre fut qu'il soit lisible de façon autonome. Pour ceci, figurent dans l'annexe A tous les problèmes dont il aura été question aux chapitres précédents ; pour chacun de ces problèmes nous avons noté toutes les informations pertinentes au sujet de leur approximabilité. Par ailleurs nous avons en annexe B repris les définitions utilisées au long de cet ouvrage.

Cette monographie suppose que les notions de base en (i) algorithmique et analyse des algorithmes, (ii) théorie des graphes et des hypergraphes et (iii) programmation linéaire sont familières au lecteur. Si ce n'est pas le cas, il peut se référer par exemple à [AHO 75, PAP 81] pour le point (i), à [CHV 83, MIN 83] pour le point (ii) et à [BER 73] pour le point (iii). Au-delà de ces notions, la présentation des bases de la théorie de l'approximation polynomiale faite au chapitre 2 est suffisante pour appréhender ce document.

La lecture de cet ouvrage peut se faire, selon les goûts et les intérêts particuliers du lecteur, de quatre façons différentes, la première étant naturellement sa lecture complète et linéaire. Cependant, celui qui s'intéresse plus particulièrement au cadre général de l'approximation par amélioration locale à optimum local garanti, mais qui recherche avant tout des exemples concrets, pourra omettre le chapitre 5. Ce procédé a d'ailleurs une alternative simplifiée par l'omission du chapitre (plus conceptuel) 7.

Finalement, il existe une lecture encore plus réaliste, dans le sens orientée vers les résultats positifs, qui comprend les chapitres 1, 2 (à la rigueur les sections 2.1 à 2.4), le chapitre 3, le chapitre 4 (à la rigueur la section 4.1 et le paragraphe 4.2.2), le chapitre 6 (à la rigueur, si le lecteur n'est pas intéressé par les problèmes de logique et/ou d'arithmétique, la section 6.1). Ces quatre schémas de lecture sont illustrés par la figure 1.

## Chapitre 1

# Introduction

L'objet de ce travail est l'étude des problèmes de NPO, ou plutôt une tentative de résolution approchée de certains de ces problèmes. Ce sont des problèmes d'optimisation combinatoire difficiles que l'on ne sait résoudre efficacement en un temps raisonnable.

Ils nous entourent pourtant, provenant de domaines fort divers : des problèmes tels le voyageur de commerce, la conception d'emplois du temps, l'ordonnancement de tâches etc., peuvent se poser sur la route de quiconque mène une activité, quelle qu'en soit la nature.

Dans le domaine de la recherche opérationnelle, certains cherchent à résoudre, malgré leur résistance, ces problèmes de façon exacte (*méthodes arborescentes*), ou approchée (*métaheuristiques* de type tabou, recuit simulé, algorithmes génétiques). L'approximation polynomiale se donne pour objectif de trouver des algorithmes pour ces problèmes en s'imposant la double contrainte d'une exécution rapide et de l'assurance d'un seuil de qualité qui devra être vérifié par toute solution donnée par l'algorithme.

Nous axons cet ouvrage autour de deux thèmes. Le premier, l'optimalité locale, concerne le type de solutions que nous allons considérer ; le second, le rapport différentiel, se rapporte à l'évaluation des solutions proposées. Bien que ces deux thèmes soient les essentiels points d'ancrage des réflexions menées ici, ce travail s'inscrit dans le cadre plus général de l'approximation polynomiale. L'intérêt essentiel de l'approche locale se situe du point de vue méthodologique, puisqu'il s'agit d'étudier la diversité de comportement des problèmes de NPO vis-à-vis d'un même type de résolution. La notion d'optimalité locale, tout à la fois conceptuellement simple, d'une mise en œuvre aisée et d'utilisation rapide, a été longuement étudiée et exploitée tant

	<i>Problème de maximisation</i>	<i>Problème de minimisation</i>
En classique	$\lambda \geq r\beta$	$\lambda \leq \frac{1}{r}\beta$
En différentiel	$\lambda \geq (1-r)\omega + r\beta$	$\lambda \leq (1-r)\omega + r\beta$

**Tableau 1.1.** *Mesure d'approximation  $R_\lambda \geq r$ ,  $r \in [0, 1]$* 

par les chercheurs que par les opérationnels. Citons pour illustration une fameuse sous-famille d'optima locaux formée des solutions maximales et minimales : une solution maximale (resp., minimale) est un plus grand (resp., plus petit) ensemble vis-à-vis de l'inclusion respectant une certaine propriété. Cependant, la notion de recherche locale est plus riche qu'il n'y paraît, puisqu'elle a donné lieu à différents types de résolutions (*métaheuristiques*, *algorithmes polynomiaux d'approximation*) ainsi qu'à différentes définitions de ce que sont, d'une part, un voisinage sur un ensemble de solutions (notion de *localité*), d'autre part, la méthode d'évaluation de ces solutions (notion d'*optimalité*).

*Nos travaux sur les optima locaux s'intéressent autant à la compréhension de problèmes de NPO qu'à leur résolution puisque nous cherchons à déceler des situations dans lesquelles le moins bon des optima locaux serait déjà une bonne solution au sens de l'approximation. Il s'agit donc d'une approche structurelle dans le sens où il est dans la nature d'un problème de garantir ou non la qualité de ses optima locaux, indépendamment du comportement d'optima locaux remarquables : nous n'utilisons pas l'optimalité locale pour la construction de bons algorithmes approchés mais comme outil de caractérisation des problèmes de NPO.* Pour évaluer la qualité des solutions déterminées par les algorithmes mis au point, la communauté scientifique s'est unanimement ralliée autour du rapport classique, mesure simple qui consiste à comparer la valeur de la solution approchée à celle de l'optimum. Ce rapport, à l'origine de l'approximation polynomiale, est l'outil qui a permis de construire la riche typologie de NPO que l'on connaît aujourd'hui.

Parallèlement, certains chercheurs se sont intéressés, dans les années 1980 puis plus récemment, à un autre rapport, tout aussi simple mais parfois plus cohérent, qui prend en compte comme référence supplémentaire la valeur de la pire solution. Ce rapport traduit la volonté de savoir où l'on se trouve sur l'amplitude des valeurs possibles : *en différentiel, on ne cherche pas seulement à approcher la meilleure solution, mais aussi à s'éloigner de la pire solution.* Le rapport classique situe la valeur  $\lambda$  d'une solution relativement à la valeur  $\beta$  d'une solution optimale, le rapport différentiel situe la valeur  $\lambda$  d'une solution sur l'intervalle  $[\omega, \beta]$  où  $\omega$  est la valeur d'une pire solution et  $\beta$  celle d'une solution optimale (voir tableau 1.1).



Il est certains problèmes pour lesquels la pertinence de ce rapport s'impose naturellement. Citons pour exemple le problème de couverture de sommets, MinVC, qui consiste dans un graphe simple à déterminer un sous-ensemble de sommets adjacent à toute arête du graphe qui soit de taille minimum. Le premier (et le plus connu) algorithme approché à rapport constant pour ce problème, en proposant comme couverture les sommets extrémités des arêtes d'un couplage maximal, assure de donner une solution au plus deux fois plus grande que l'optimum. Or, Bollobás montre que *presque tout* graphe, même « relativement creux », admet un couplage parfait, c'est-à-dire que la probabilité qu'un graphe à  $n$  sommets contienne un couplage de taille  $\lfloor n/2 \rfloor$  tend presque sûrement vers 1 (un couplage parfait étant un ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes qui recouvre tous les sommets du graphe). En ce cas, prendre les sommets d'un couplage maximal, c'est, au pire, prendre un couplage maximum soit *presque sûrement* prendre une pire solution : ainsi pour la mesure classique, *même une pire solution* peut être considérée comme *une bonne solution*. Cet exemple illustre comment la précision supplémentaire intégrée dans le rapport différentiel peut, pour certains problèmes, rendre celui-ci plus sélectif dans le sens où l'approximation différentielle sera plus difficile à obtenir que l'approximation classique : le problème de couverture de sommets n'est pas même approximable à  $|V|^{-1/2+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon$  strictement positif pour le rapport différentiel, à moins que P ne coïncide avec NP. Mais ce n'est pas une règle puisqu'à l'inverse, des problèmes qui sont non approximables en classique peuvent le devenir en différentiel, toujours du fait de la référence à la pire solution : le problème de *coloration minimum* (MinC) fait partie de ceux-ci. Il s'agit de trouver une partition de taille minimum des sommets  $V$  d'un graphe  $G(V, E)$ , de sorte que les sommets de chacun des sous-ensembles de la partition soient deux-à-deux non adjacents : on dit qu'ils forment une *stable*. En différentiel, MinC est approximable à 360/289, quand il n'est, en classique, pas approximable à mieux de  $|V|^{\varepsilon-1/7}$  pour tout  $\varepsilon > 0$  ; il existe même un algorithme de coloration de rapport différentiel asymptotique 1 dans les graphes 3-colorables quand la meilleure approximation classique connue à ce jour est un polynôme en le nombre  $|V|$  des sommets du graphe  $O(1/(|V|^{3/14} \log^{O(1)} |V|))$ . Cette apparente facilité relative provient du fait qu'en différentiel, il est tout aussi important de s'éloigner de la valeur  $\omega$  d'une pire solution que de s'approcher de la valeur  $\beta$  d'une solution optimale ; ainsi, dans le cadre particulier d'un problème de *minimisation*, on obtient un résultat d'approximation différentielle dès lors qu'il est possible de s'*éloigner* de la valeur  $\omega$  d'une pire solution par un facteur constant  $r \leq 1$ , la valeur optimale étant toujours minorée par 0 :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \leq r\omega \\ \beta \geq 0 \end{array} \right\} \implies \lambda \leq r\omega + (1-r)\beta$$

En somme, la non-référence à la pire solution avantage le résultat classique pour un problème de maximisation, le résultat différentiel pour un problème de minimisation.

Toujours sur l'exemple du problème de coloration, MinC en différentiel est équivalent, du point de vue de l'approximation, au problème MaxUC (*Max Unused Coloring problem*) en classique dont l'objectif est de déterminer une coloration qui *maximise* le nombre de couleurs inutilisées ; cette version *maximisation* du problème de coloration est de fait approximable à rapport classique constant. L'apport de la mesure différentielle, c'est la disparition de l'asymétrie quelque peu artificielle souvent introduite en classique lors du passage d'un problème de maximisation à sa version minimisation, ou plus généralement entre deux versions fortement semblables d'un même problème. L'origine de ce rapport a justement été motivée par la stabilité sous transformation affine de la fonction à optimiser : en classique, une simple translation de la fonction objectif suffit parfois à transformer un problème approximable à rapport constant en un problème dont l'approximation elle-même est NP-difficile ! Citons pour exemple le problème de voyageur de commerce, MinTSP, dont le cas métrique (distances vérifiant l'inégalité triangulaire) admet un algorithme approché à  $2/3$  alors que le cas général n'est pas approximable à  $1/2^{p(n)}$  pour tout polynôme  $p$  si  $P \neq NP$ . Citons encore les problèmes MinVC de couverture de sommets de taille minimum et MaxIS d'ensemble stable de taille maximum, qui, bien que liés entre eux par une transformation affine de leur fonction objectif (le complémentaire de tout *stable* est une *couverture* et *vice versa*), ont un comportement antagoniste vis-à-vis de l'approximation puisque MaxIS n'est pas approximable à  $|V|^{-1/2+\varepsilon}$  pour tout  $\varepsilon$  strictement positif sous l'hypothèse  $P \neq NP$ . La mesure différentielle n'est cependant pas toujours pertinente et la coexistence des deux rapports est une source supplémentaire de richesse par la possibilité qu'elle offre d'observer la classe NPO sous deux angles différents.

Même si nous travaillons essentiellement avec la mesure différentielle, ce document expose alternativement des résultats relatifs à l'un et à l'autre rapport ; aussi attirons-nous l'attention du lecteur sur ce point, car il devra se montrer prudent quant à l'interprétation des résultats en fonction qu'ils soient énoncés pour une mesure ou pour l'autre.

## Chapitre 2

# L'approximation polynomiale en quelques pages

### 2.1. Les problèmes

#### 2.1.1. Qu'est-ce qu'un problème de NPO ?

Les problèmes d'optimisation que l'on s'attache à résoudre sont le pendant *optimisation* des problèmes de décision de NP. Un problème  $\Pi$  est caractérisé par l'ensemble  $I_\Pi$  de ses instances, l'union  $\text{Sol}_\Pi = \cup_{I \in I_\Pi} \text{Sol}_\Pi(I)$  des ensembles des solutions réalisables associés aux instances  $I$ , de la fonction à optimiser  $m_\Pi$  sur ces ensembles et du sens  $\text{opt}_\Pi$  de l'optimisation (*maximisation* ou *minimisation*). Par la suite, on notera  $|I|$  la taille de l'instance  $I$ .

DÉFINITION 2.1.— *Un problème  $\Pi$  appartenant à la classe NPO est un quadruplet  $(I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi, \text{opt}_\Pi)$  qui vérifie :*

- 1)  $I_\Pi$  est reconnaissable en temps polynomial en  $|I|$  ;
- 2)  $\exists p_\Pi$  polynôme t.q.  $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), |s| \leq p_\Pi(|I|)$  ;
- 3)  $\forall I, \forall s$ , on sait décider en temps polynomial en  $|I|$  si  $s$  est réalisable pour  $I$  ;
- 4)  $m_\Pi : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi \rightarrow \mathbb{N}$  est calculable en temps polynomial en  $|I|$  ;
- 5)  $\text{opt}_\Pi \in \{\min, \max\}$ .

Une instance d'un problème est caractérisée par des objets d'une certaine structure en relation entre eux et des valeurs numériques ; on notera  $X$  l'ensemble des objets,  $\mathcal{R}(X)$  l'ensemble des relations sur ces objets et  $D$  l'ensemble des valeurs numériques. Prenons pour exemple le problème de stable maximum pondéré, MaxWIS.

Une instance  $I = (G(V, E), d)$  de MaxWIS a pour ensemble d'objets l'ensemble des sommets  $X = V$ , comme relation sur ces objets l'ensemble des arêtes  $\mathcal{R}(X) = \{E\}$  et comme ensemble de valeurs numériques le vecteur  $d$  des valuations des sommets  $D = \{d_u\}_{u \in V}$ .

A la définition précédente nous apportons deux modifications couramment faites dans la littérature. D'une part, il est toujours possible de supposer qu'il existe un codage binaire des données du problème qui soit raisonnable et de fait, que les variables du problème soient à valeur dans  $\{0, 1\}$ ; c'est ce que nous ferons, pour une plus grande clarté des concepts manipulés. La taille  $|I|$  d'une instance  $I$ , qui n'est autre que l'espace mémoire nécessaire au stockage des données avec un ordinateur usuel, est ainsi donnée, à un coefficient constant près, par  $|X| + \log(d_{\max})$  où  $d_{\max} = \max_{d \in D} \{|d|\}$ . Le codage de  $I$  nécessite effectivement  $O(|X|)$  espaces élémentaires pour les objets (toute structure est de taille finie) et  $O(\log(|d|))$  espaces pour chaque donnée numérique  $d$  en codage binaire par exemple. Toutefois, on omet souvent, et nous le ferons également dans ce document, de mentionner  $d_{\max}$  lorsque l'on évoque la taille de l'instance; c'est que l'on fait alors l'hypothèse implicite que la complexité est donnée par le nombre d'objets, soit que le nombre d'objets est d'ordre supérieur au logarithme de la plus grande constante :  $d_{\max} = O(\exp^{p(|X|)})$  où  $p$  est un polynôme.

D'autre part, on s'attache à résoudre des problèmes certes difficiles mais on se limitera tout de même aux problèmes pour lesquels on sait au moins déterminer une solution réalisable en temps polynomial ! Cette solution sera appelée solution triviale et notée  $\text{triv}_{\Pi}(I)$  pour toute instance  $I$  d'un problème  $\Pi$ .

Cela nous amène à la définition alternative suivante de NPO [GAR 79], qui aura cours dorénavant dans ce livre.

**DÉFINITION 2.2.**— *Un problème  $\Pi$  de NPO est un quadruplet  $(I_{\Pi}, \text{Sol}_{\Pi}, m_{\Pi}, \text{opt}_{\Pi})$  qui vérifie :*

- 1) *les conditions (1), (3), (4) et (5) de la définition 2.1 ;*
- 2)  *$\exists p_{\Pi}$  polynôme t.q.  $\forall I \in I_{\Pi}, \text{Sol}_{\Pi}(I) \subseteq \{0, 1\}^{p_{\Pi}(|I|)}$  ;*
- 3)  *$\forall I \in I_{\Pi}$ , on sait déterminer une solution  $\text{triv}_{\Pi}(I)$  en temps polynomial en  $|I|$ .*

La condition (2), par la spécification qu'elle propose de la forme des solutions, permet une expression à la fois simple et claire des concepts à définir, des propriétés à mettre en évidence. L'exigence d'une solution en temps polynomial se justifie par le fait que l'on s'intéresse à des problèmes potentiellement approximables, c'est-à-dire dont on ne peut affirmer *a priori* qu'ils ne le soient pas !

Reprenant l'exemple précédent et conformément à la définition 2.2, le problème MaxWIS revient à indiquer pour chaque sommet par un opérateur binaire s'il est ou non intégré à la solution ( $\text{Sol}_{\text{WIS}}(I) = \{0, 1\}^{|V|}$ ) et une affection  $s$  est réalisable si

deux sommets pris dans la solution ne sont pas adjacents, soit si le vecteur  $s$  vérifie «  $s_i \cdot s_j = 1 \Rightarrow s_i s_j \notin E$  », ce qui peut se vérifier en temps  $|V|^2$ . Quant à la valeur d'une solution, donnée par  $m_{\text{WIS}}(I, s) = d \cdot s$ , elle se calcule en un temps au plus  $|V| \times \log d_{\text{max}}$ . Enfin, l'ensemble vide constitue une solution triviale pour toute instance du problème.

### 2.1.2. Définitions indispensables

Nous l'avons évoqué en introduction, étant donnée une instance  $I$  d'un problème, deux valeurs particulières nous intéressent pour la résolution de  $I$  : les valeurs de la meilleure et de la pire solution.

**DÉFINITION 2.3.**— Soient  $\Pi$  un problème de NPO et  $I$  une instance de  $\Pi$ , on définit les valeurs  $\beta_{\Pi}(I)$  et  $\omega_{\Pi}(I)$  par  $\beta_{\Pi}(I) = \text{opt}_{\Pi}\{m_{\Pi}(I, s) : s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)\}$  et  $\omega_{\Pi}(I) = \overline{\text{opt}_{\Pi}\{m_{\Pi}(I, s) : s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)\}}$ , où  $\forall \Pi \in \text{NPO}$ ,  $\text{opt}_{\Pi} = \max \Rightarrow \overline{\text{opt}_{\Pi}} = \min$  et  $\text{opt}_{\Pi} = \min \Rightarrow \overline{\text{opt}_{\Pi}} = \max$ .

Définissons encore deux notions fort utiles dans le cadre de l'approximation, celles de support et de diamètre sur une instance d'un problème.

**DÉFINITION 2.4.**— Soit  $\Pi$  un problème de NPO. Le support  $\text{supp}_{\Pi}(I)$  d'une instance  $I$  de  $\Pi$  mesure le nombre de valeurs que peuvent prendre les solutions de  $I$  :  $\text{supp}_{\Pi}(I) = |\{m_{\Pi}(I, s) : s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)\}|$ . Le diamètre  $\text{diam}_{\Pi}(I)$  d'une instance  $I$  de  $\Pi$  mesure l'amplitude des valeurs possibles :  $\text{diam}_{\Pi}(I) = |\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|$ .

Enfin, nous introduisons la classe NPO-PB des problèmes polynomialement bornés de NP, famille à laquelle il est fréquent de se restreindre : c'est notamment le cas des classes GLO (voir section 3.2) et  $\text{MaxNP}_0$  (voir section 2.5) dans lesquelles ce travail puise nombre des problèmes qu'il traite. La définition suivante généralise celle de [KAN 94] en prenant en compte des bornes sur la valeur de la pire solution.

**DÉFINITION 2.5.**—  $\forall \Pi \in \text{NPO}$ ,  $\Pi \in \text{NPO-PB}$  si et seulement si  $\exists q_{\Pi}$  polynôme tel que  $\forall I \in I_{\Pi}$ ,  $\max\{\omega_{\Pi}(I), \beta_{\Pi}(I)\} \leq q_{\Pi}(|I|)$ .

## 2.2. Leur résolution

L'idéal serait de savoir résoudre les problèmes de NPO en temps polynomial ; malheureusement, la présomption est forte de penser que  $P \neq NP$  ou encore  $PO \neq NPO$  où  $PO$ , version optimisation de la classe  $P$ , désigne l'ensemble des problèmes de NPO que l'on sait résoudre en temps polynomial. C'est pourquoi on essaie d'approcher seulement, mais au mieux, ces problèmes difficiles.

**EXEMPLE 2.1.**— Nous allons présenter un algorithme exacte pour le problème du sac-à-dos, connu comme étant NP-difficile [GAR 79] ; aussi l'algorithme proposé ne

peut-il être, sous notre hypothèse de travail  $P \neq NP$ , de complexité polynomiale. Il est en fait de complexité dite *pseudo-polynomiale*, c'est-à-dire qu'il se déroule en un temps qui est polynomial en la taille des objets à stocker et en la valeur du plus grand entier issu des données. Cet algorithme eût été polynomial si la place nécessaire au codage des données avaient elle-même été polynomiale en la taille des objets et en le logarithme du plus grand nombre (on rappelle en effet que le codage d'un nombre  $A$  nécessite un nombre de bits de l'ordre de  $\lceil \log A \rceil$ ); son déroulement devient par exemple polynomial lorsque l'on se limite à des données numériques n'excédant pas  $n^k$  si  $n$  désigne l'ordre des vecteurs considérés, et ce pour toute constante universelle  $k$ .

Le problème qui nous intéresse est celui du sac-à-dos, noté MaxKS. Il est décrit de la manière suivante : étant donnés un coût maximum  $b$  et  $n$  objets  $\{1, \dots, n\}$  d'utilité et de coût respectivement  $a_i$  et  $c_i$ , on souhaite trouver un sous-ensemble d'objets qui maximise la somme de ces utilités, sans toutefois que la somme de ces coûts n'excède  $b$ . En d'autres termes,  $I = ((a_i, c_i)_{i=1, \dots, n}, b) \in I_{\text{MaxKS}}$  où les nombres sont tous des entiers strictement positifs et vérifient :  $c_i \leq b$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $\text{Sol}_{\text{MaxKS}}(I) = \{J \subseteq \{1, \dots, n\} : \sum_{i \in J} c_i \leq b\}$ ,  $m_{\text{MaxKS}}(I, J) = \sum_{i \in J} a_i$ .

Ce problème est bien dans NPO et l'on voit facilement :  $\text{triv}(I) = \omega(I) = 0$ . En revanche, ce problème n'est pas dans la classe NPO-PB (les valeurs numériques pouvant être rendues arbitrairement grandes : considérer par exemple le cas où l'on multiplie toutes les valeurs  $a_i$  par  $2^n$ ).

L'algorithme que nous proposons s'appuie sur la *programmation dynamique*. Cette méthode est assez simple et repose essentiellement sur le principe de *sous-optimalité* qui fut mis pour la première fois en évidence par R. Bellman dans le cadre de la recherche de plus courts chemins dans les graphes. Ce principe peut s'exprimer de la manière suivante : « Dans une séquence optimale de décisions, quelle que soit la première décision prise, les décisions subséquentes forment une sous-séquence optimale, compte tenu des résultats de la première décision ». Pour l'exploiter, il s'agit de décomposer le problème considéré en une famille de sous-problèmes emboîtés qui seront résolus étape par étape, de manière récursive. Cet exemple offre une illustration de ce principe par la résolution du problème du sac-à-dos.

Nous allons construire deux tableaux de  $n$  lignes et  $\sum_{i=1}^n a_i + 1$  colonnes :

- le premier, noté Bool, est à valeurs booléennes et la case  $\text{Bool}[i, j]$  est vraie si et seulement s'il existe un sous-ensemble  $J \subseteq \{1, \dots, i\}$  tel que  $\sum_{l \in J} a_l = j$  ;
- le second, noté Cout, est à valeurs entières et la case  $\text{Cout}[i, j]$  vaut le coût minimum d'un sous-ensemble vérifiant la condition  $\text{Bool}[i, j]$  avec la convention que cette valeur vaut l'infini lorsque  $\text{Bool}[i, j]$  est faux.

Ces tableaux se remplissent itérativement ligne par ligne (par famille  $\{1, \dots, i\}$  des  $i$  premiers éléments autorisés à participer à une solution).

Pour le tableau Bool, l'initialisation se fait de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{Bool}[1, j] &= \begin{cases} 1 & j = 0 \text{ ou } j = a_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \text{Bool}[i, j] &= (\text{Bool}[i-1, j] \vee \text{Bool}[i-1, j-a_i]) \end{aligned}$$

Cette procédure répond clairement à la question posée : il existe  $J \subseteq \{1, \dots, i\}$  tel que  $\sum_{l \in J} a_l = j$  ssi, soit  $i \notin J$  et dans ce cas  $J \subseteq \{1, \dots, i-1\}$ , soit  $i \in J$  et alors  $J' = J \setminus \{i\}$  vérifie  $J' \subseteq \{1, \dots, i-1\}$  et  $\sum_{l \in J'} a_l = j - a_i$ . De plus, cette construction se fait en un temps  $O(n \sum_{i=1}^n a_i) = O(n^2 a_{\max})$  où  $a_{\max} = \max_{i \leq n} \{a_i\}$ .

On procède de façon similaire pour la construction du tableau Cout :

$$\begin{aligned} \text{Cout}[1, j] &= \begin{cases} 0 & j = 0 \\ c_1 & j = a_1 \end{cases} \\ \text{Cout}[i, j] &= +\infty \end{aligned}$$

Ensuite, pour  $i > 1$ , on pose :  $\text{Cout}[i, j] = +\infty$  si  $\text{Bool}[i, j] = 0$  et :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \text{Bool}[i-1, j] &= 1 \\ \text{Bool}[i-1, j-a_i] &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \text{Cout}[i, j] = \text{Cout}[i-1, j] \\ \left. \begin{aligned} \text{Bool}[i-1, j-a_i] &= 1 \\ \text{Bool}[i-1, j] &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \text{Cout}[i, j] = \text{Cout}[i-1, j-a_i] + c_i \end{aligned}$$

Pour tous les autres cas on pose :  $\text{Cout}[i, j] = \min\{\text{Cout}[i-1, j-a_i] + c_i, \text{Cout}[i-1, j]\}$ .

On démontre que  $\text{Cout}[i, j] = \min\{\sum_{l \in J} c_l : \sum_{l \in J} a_l = j\}$  en suivant une démarche identique à celle de la preuve précédente (aussi la preuve est-elle laissée au lecteur). Finalement, la complexité en temps pour construire ce tableau est sensiblement la même que précédemment, à savoir  $O(n^2 a_{\max} \log c_{\max})$  où  $c_{\max} = \max_{i \leq n} \{c_i\}$ .

Ces deux tableaux remplis, l'obtention de la valeur optimale est immédiate : il suffit de parcourir simultanément la dernière ligne des deux tableaux à la recherche du plus grand  $j$  tel que  $\text{Bool}[n, j] = \text{vrai}$  et  $\text{Cout}[n, j] \leq b$ . Cette valeur  $j_0$  permet ensuite, par une méthode de retours en arrière successifs, de reconstituer la solution optimale qui a permis d'avérer  $\text{Bool}[n, j_0]$ . Soit  $S^*$  une solution optimale ayant la valeur  $\sum_{i \in S^*} c_i$  la plus petite possible parmi les solutions optimales, elle vérifie donc  $\beta_{\text{MaxKS}}(I) = \sum_{i \in S^*} a_i = j_0$  et  $\text{Cout}[n, j_0] = \sum_{i \in S^*} c_i$ . On va décider si l'objet  $n$  est dans la solution  $S^*$  par l'application des règles suivantes :

- si  $\text{Bool}[n-1, j_0] = 0$ , alors  $n \in S^*$  (toute solution de valeur  $j_0$  comporte l'objet  $n$ );
- si  $\text{Bool}[n-1, j_0 - a_n] = 0$  alors  $n \notin S^*$  (aucune solution de valeur  $j_0$  ne contient  $n$ );

- sinon, si  $\text{Cout}[n, j_0] \neq \text{Cout}[n-1, j_0]$ , alors  $n \in S^*$  ( $\text{Cout}[n, j_0]$  étant le minimum des valeurs  $\text{Cout}[n-1, j_0]$  et  $\text{Cout}[n-1, j_0 - a_n] + c_n$ , si les deux valeurs diffèrent, c'est que toute solution de valeur  $j_0$  de même poids que  $S^*$  contient  $n$ );
- finalement, si  $\text{Cout}[n, j_0] = \text{Cout}[n-1, j_0]$ , alors  $n \notin S^*$ .

Plus généralement, supposons que l'on sache parmi les  $k$  derniers objets lesquels sont dans  $S^*$ ; l'ensemble  $S_k^* = S^* \cap \{n-k+1, \dots, n\}$  étant supposé connu, on va décider de placer ou non l'objet  $n-k$  dans  $S^*$  (pour peu que  $j_0 - \sum_{i \in S_k^*} a_i > 0$ ) de la manière suivante :

- si  $\text{Bool}[n-k-1, j_0 - \sum_{i \in S_k^*} a_i] = 0$ , alors  $n-k \in S^*$ ;
- si  $\text{Bool}[n-k-1, j_0 - \sum_{i \in S_k^*} a_i - a_{n-k}] = 0$ , alors  $n-k \notin S^*$ ;
- sinon,  $n-k \in S^*$  lorsque  $\text{Cout}[n-k, j_0 - \sum_{i \in S_k^*} a_i] \neq \text{Cout}[n-k-1, j_0 - \sum_{i \in S_k^*} a_i]$ .

Cette dernière procédure de reconstitution d'une solution optimale se déroule en un temps  $O(n)$ ; ainsi, en une complexité d'ordre  $O(n^2 a_{\max} \log c_{\max})$ , cet algorithme permet de déterminer une solution optimale pour le problème du sac-à-dos.

Cet exemple introduit la problématique posée par la résolution des problèmes de NP. On est en mesure de les résoudre tous : il suffit pour cela de parcourir l'ensemble de solutions et de conserver la meilleure. On conçoit cependant des algorithmes plus raffinés qui, du moins l'espère-t-on, permettent de converger plus vite vers la solution (et cela est peut-être vrai en moyenne); le problème est que, au pire des cas, ces algorithmes raffinés ne nous garantissent absolument pas d'aller plus vite que l'exploration exhaustive de l'ensemble des solutions. Or, le temps est un luxe que l'on ne peut pas toujours s'offrir, il est de nombreux problèmes qu'il faut résoudre en temps réel (ajustement des feux pour le trafic routier, routage sur les lignes téléphoniques... ). Cette difficulté incontournable à offrir l'optimum en temps raisonnable a donné naissance à des stratégies de résolution alternatives, dont fait partie l'approximation polynomiale.

### 2.2.1. La mission de l'approximation polynomiale

L'approximation polynomiale a pour mission de résoudre les problèmes selon les deux exigences :

- en termes de temps, de garantie d'une exécution rapide (complexité polynomiale des algorithmes);
- en termes de performance, de garantie d'un certain niveau d'approximation.

Car si l'on s'affranchit de la contrainte d'optimalité, on veut tout de même être certain de la qualité des solutions offertes. Pour répondre à ces exigences, deux types d'actions sont menés :



- la conception d’algorithmes pertinents vis-à-vis de la mesure d’approximation pour obtenir de bonnes solutions approchées ;
- l’analyse de tels algorithmes approchés.

Le travail se situe effectivement tant au niveau de la construction qu’à celui de l’analyse de ce que l’on construit et cette analyse réside essentiellement en l’étude des propriétés structurelles des problèmes que l’on traite : c’est là le cœur de notre discipline.

### 2.2.2. Son arme

Un algorithme approché n’est ni plus ni moins qu’un algorithme qui donne une solution réalisable au problème posé. Un tel algorithme est polynomial s’il se déroule pour toute instance en un temps polynomial en la taille de l’instance.

**DÉFINITION 2.6.** – *Un algorithme  $\mathcal{A}$  est polynomial approché pour le problème  $\Pi$  s’il existe un polynôme  $p_{\mathcal{A}}$  tel que  $\mathcal{A}$  produit pour toute instance  $I$  de  $\Pi$  une solution  $\mathcal{A}(I)$  en un temps au plus  $p_{\mathcal{A}}(|I|)$ .*

## 2.3. L’évaluation de leurs algorithmes

### 2.3.1. Fer de lance de l’approximation polynomiale : le rapport classique

L’estimation de la qualité d’un algorithme est faite à l’aide de rapports d’approximation. Le rapport classique, qui est celui sur lequel se fonde l’essentiel de la théorie de l’approximation polynomiale, est assez intuitif : il consiste à comparer la valeur de la solution donnée par l’algorithme à la valeur de l’optimum. Il s’agit bien d’une estimation de ce rapport, puisque l’optimum n’est pas connu *a priori*. Conformément à la philosophie de l’approximation polynomiale *au pire des cas*, qui se donne pour mission d’établir des *garanties absolues* sur la qualité des solutions fournies, l’algorithme sera jugé sur sa plus mauvaise performance.

Soit  $\Pi$  un problème de NPO et  $\mathcal{A}$  un algorithme approché pour  $\Pi$ , on notera respectivement pour une instance  $I$  de ce problème  $\lambda_{\mathcal{A}}(I)$ ,  $\beta_{\Pi}(I)$  et  $\omega_{\Pi}(I)$  les valeurs de la solution donnée par l’algorithme  $\mathcal{A}$ , de l’optimum et de la pire solution sur  $I$ . La qualité d’une solution approchée, en approximation classique, serait donc donnée par l’estimation du rapport  $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \lambda_{\mathcal{A}}(I)/\beta_{\Pi}(I)$ . Pour un problème de minimisation, on a  $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) \in [1, +\infty[$  ( $\lambda_{\mathcal{A}}(I) \geq \beta_{\Pi}(I)$ ), tandis que pour un problème de maximisation,  $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)$  est à valeur dans l’intervalle  $[0, 1]$  ( $\lambda_{\mathcal{A}}(I) \leq \beta_{\Pi}(I)$ ). Dans tous les cas, plus on se rapproche de l’optimum et plus le rapport se rapproche de 1. Il est cependant préférable par soucis d’homogénéité de ramener tous les rapports dans un

intervalle  $[0, 1]$  : on prendra ainsi pour les problèmes de minimisation l'inverse de ce rapport.

DÉFINITION 2.7.— *Cf* Soient  $\Pi$  un problème de NPO et  $\mathcal{A}$  un algorithme approché pour  $\Pi$ . La performance de  $\mathcal{A}$  sur une instance  $I$  est donnée par :

$$\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \begin{cases} \frac{\lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} & \text{si } \Pi \text{ est un problème de maximisation,} \\ \frac{\beta_{\Pi}(I)}{\lambda_{\mathcal{A}}(I)} & \text{si } \Pi \text{ est un problème de minimisation,} \end{cases}$$

et la performance de  $\mathcal{A}$  pour  $\Pi$  par :  $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} = \inf_{I \in I_{\Pi}} \{\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)\}$ . Le rapport asymptotique classique de  $\mathcal{A}$  est donné par :  $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}, \infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{I, \beta_{\Pi}(I) \geq k} \{\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I)\}$ .

Si  $\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq r$ , on dira que l'algorithme  $\mathcal{A}$  est  $r$ -approché pour  $\Pi$  au sens de la mesure classique. La difficulté est de trouver, pour un algorithme donné, un majorant  $r$  le plus fin possible du rapport d'approximation : c'est le travail d'analyse des algorithmes proposés.

Le rapport asymptotique ne s'intéresse qu'aux instances dont la valeur optimale est (arbitrairement) grande ; l'idée sous-jacente à cette nouvelle démarche pour l'estimation des algorithmes approchés est d'identifier comme « difficiles » ces seules instances. Mais considérer comme seules pertinentes les instances vérifiant  $\beta_{\Pi}(I) \geq k$  suppose que les autres instances (celles qui vérifient  $\beta_{\Pi}(I) \leq k$ ) soient solubles en temps polynomial. Or, il se trouve effectivement que la majeure partie des problèmes vérifie cette propriété : ce sont les problèmes *simples* [PAZ 81]. Certains problèmes néanmoins violent cette propriété. L'exemple du *bin-packing*, notamment, est pour le moins éloquent : déterminer l'optimum quand  $\beta_{\Pi}(I) \leq 2$  reste un problème NP-difficile tandis que l'on peut obtenir polynomialement une valeur aussi proche que l'on souhaite de  $\beta_{\Pi}(I)$  lorsque cette quantité est arbitrairement grande [KAR 82]. Cette exception pose de nouveau, non plus du point de vue de sa valeur mais de celui de son ordre, la question de la pertinence de la simple prise en compte de l'optimum.

### 2.3.2. Une alternative : le rapport différentiel

Le rapport différentiel, moins communément usité mais qui a déjà donné lieu à des résultats convaincants, se réfère à deux points de repère : l'optimum, mais aussi la pire des solutions. La valeur  $\lambda$  de toute solution, comprise sur l'intervalle  $[\beta_{\Pi}(I), \omega_{\Pi}(I)]$ , est la combinaison convexe des deux valeurs  $\omega_{\Pi}(I)$  et  $\beta_{\Pi}(I)$  : il y a toujours un réel  $\delta \in [0, 1]$  tel que  $\lambda = \delta\beta_{\Pi}(I) + (1 - \delta)\omega_{\Pi}(I)$ . Le but de l'approximation différentielle, c'est naturellement de se rapprocher au maximum de  $\beta_{\Pi}(I)$  ou de s'éloigner au maximum de  $\omega_{\Pi}(I)$ , avec un coefficient  $\delta$  le plus proche de 1 possible. Ainsi, on ne compare pas la valeur de la solution à celle de l'optimum, mais le chemin déjà parcouru depuis la pire solution à l'étendue des valeurs possibles, donnée

par le diamètre  $\text{diam}_\Pi(I) = |\beta_\Pi(I) - \omega_\Pi(I)|$ . La qualité d'une solution approchée  $\mathcal{A}(I)$ , en approximation différentielle, serait donc donnée par l'estimation du rapport  $\delta_\Pi^{\mathcal{A}}(I) = (\omega_\Pi(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)) / (\omega_\Pi(I) - \beta_\Pi(I))$ . Du point de vue méthodologique, ce rapport se justifie de lui-même : c'est, comme pour le rapport classique, une mesure assez intuitive. L'intérêt que les chercheurs ont porté à ce rapport n'est cependant pas innocent mais motivé puisqu'il répond, comme nous l'avons annoncé en introduction, à certaines exigences de stabilité du rapport de performance sous transformation affine de la fonction objectif : c'est ce que nous présentons à la section 2.7.

**DÉFINITION 2.8.**— *Soit  $\Pi$  un problème de NPO et  $\mathcal{A}$  un algorithme approché pour  $\Pi$ . La performance de  $\mathcal{A}$  sur une instance  $I$  est donnée par le rapport :*

$$\delta_\Pi^{\mathcal{A}}(I) = \frac{|\omega_\Pi(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)|}{|\omega_\Pi(I) - \beta_\Pi(I)|}$$

*et la performance de  $\mathcal{A}$  pour  $\Pi$  par :  $\delta_\Pi^{\mathcal{A}} = \inf_{I \in I_\Pi} \{\delta_\Pi^{\mathcal{A}}(I)\}$ . Le rapport asymptotique différentiel de  $\mathcal{A}$  est donné par :  $\delta_\Pi^{\mathcal{A},\infty} = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{I, \text{supp}_\Pi(I) \geq k} \{\delta_\Pi^{\mathcal{A}}(I)\}$ .*

Si  $\delta_\Pi^{\mathcal{A}} \geq r$ , on dira que l'algorithme  $\mathcal{A}$  est  $r$ -approché pour  $\Pi$  au sens de la mesure différentielle.

Répondant aux mêmes motivations que dans le cadre classique, un rapport asymptotique différentiel est défini dans [DEM 99b] ; ici encore on cherchera à se concentrer sur les instances « difficiles », qui renferment réellement la combinatoire du problème. Dans le cadre différentiel, le critère de difficulté des instances ne porte plus sur l'ordre de grandeur des solutions mais sur le nombre de valeurs prises par les solutions de l'instance. On s'intéresse donc aux instances de support arbitrairement grand ( $\text{supp}_\Pi(I) \geq k$ ), c'est-à-dire dont les solutions offrent un large éventail de valeurs possibles. De même que pour les problèmes simples, le cas d'instances qui ont une faible amplitude de valeurs est, en général, bien résolu ; de tels problèmes sont qualifiés de  $\delta$ -simples. Attention cependant, si une instance de grand support induit un fort diamètre, un petit support n'induit en revanche pas nécessairement un petit diamètre. En édulcorant les instances de petit support, on restreint donc plus que dans le cadre classique l'ensemble des instances sur lesquelles portera l'estimation du rapport asymptotique.

### 2.3.3. L'erreur

Plutôt que les rapports d'approximation dont on vient de discuter, il peut parfois être intéressant de considérer l'erreur relative, qui rapporte la distance à l'optimum à la valeur optimale en théorie classique, la distance à l'optimum au diamètre dans le cadre différentiel : en classique comme en différentiel, le rapport et l'erreur sont deux façons différentes de mesurer la même chose. Le rapport traduit la volonté de

maximiser le gain (*valeur de la solution ou distance à la pire solution*) tandis que l'erreur fait référence à la minimisation de la perte (*distance à l'optimum*). Le but est donc de trouver des algorithmes garantissant un rapport le plus proche de 1, une erreur la plus proche de 0 possible.

**DÉFINITION 2.9.**— Soient  $\Pi$  un problème de NPO et  $\mathcal{A}$  un algorithme approché pour  $\Pi$ . Alors, l'erreur relative de  $\mathcal{A}$  sur une instance  $I$ , respectivement pour la mesure classique et la mesure différentielle, est donnée par les rapports :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) &= 1 - \rho_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \begin{cases} \frac{\beta_{\Pi}(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} & \text{opt}_{\Pi} = \max \\ \frac{\lambda_{\mathcal{A}}(I) - \beta_{\Pi}(I)}{\lambda_{\mathcal{A}}(I)} & \text{opt}_{\Pi} = \min \end{cases} \\ \eta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) &= 1 - \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}}(I) = \frac{|\lambda_{\mathcal{A}}(I) - \beta_{\Pi}(I)|}{|\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|} \end{aligned}$$

Pour les deux rapports, l'erreur est toujours à valeur dans l'intervalle  $[0, 1]$ .

Avec ces algorithmes approchés et l'évaluation de leur comportement sur différents problèmes, ont naturellement émergé des classes d'approximation qui regroupent les problèmes de NPO selon leur degré d'approximabilité : c'est ce que nous proposons d'évoquer à présent.

## 2.4. Degrés d'approximation

Par la suite,  $R$  désignera un rapport d'approximation, classique ou différentiel. Notons cependant que la hiérarchie et le sens des classes définies ci-après sont indépendants de l'évaluation choisie, rapport ou toute autre mesure de la performance des algorithmes.

### 2.4.1. Approximation à rapport constant $r_0$

Un problème  $\Pi$  est dans  $\text{APX}[R]$  (la classe des problèmes approximables à rapport constant) s'il existe un algorithme polynomial approché  $\mathcal{A}$  pour  $\Pi$  et une constante  $r_0$  dans  $]0, 1]$  tels que  $R_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq r_0$ . Par convention, on note  $\text{APX}$  l'ensemble des problèmes approximables à rapport constant pour le rapport classique et  $\text{APX}[\delta]$  l'ensemble des problèmes approximables à rapport constant pour le rapport différentiel. C'est à l'intérieur de ces deux classes que se situera l'essentiel de notre travail.

**EXEMPLE 2.2.**— Nous présentons un algorithme qui fait la preuve de l'appartenance du problème de *plus petit majorant*, noté  $\text{MinSubsetSum}$ , à la classe  $\text{APX}$ ; ce problème, est défini pour un nombre  $n$  d'entiers  $a_i$  et un entier  $b$  donnés tels que

$$\sum_{i=1}^n a_i \geq b$$

par :  $I = ((a_i)_{i=1,\dots,n}, b)$ ,  $\text{Sol}(I) = \{J \subseteq \{1, \dots, n\} : \sum_{i \in J} a_i \geq b\}$ ,

$$m(I, J) = \sum_{i \in J} a_i$$

Le but est de minimiser la somme des éléments  $a_i$  pour que celle-ci soit au moins égale à  $b$ .

De manière évidente, la pire solution consiste à choisir tout l'ensemble et est de valeur  $\omega_{\text{MinSubsetSum}}(I) = \sum_{i=1}^n a_i$ . Ce problème est très proche du problème de sac-à-dos traité dans l'exemple 2.1 : il en est en quelque sorte le « dual » (pour autant que l'on puisse parler de dualité dans un monde discret), dans le cas particulier où les vecteurs  $a_i$  et  $c_i$  coïncident. Il s'agit toujours d'un problème de NPO, toujours pas cependant d'un problème de NPO-PB (les données numériques pouvant de nouveau être rendues arbitrairement grandes).

On peut, sans perte de généralité, toujours supposer que  $a_i < b$  pour tout  $i \leq n$ . Effectivement, supposons que ce ne soit pas le cas et considérons l'ensemble  $J_0 = \{i : a_i \geq b\}$  des majorants de  $b$ , ainsi que l'instance  $I'$  déduite de  $I$  en omettant les éléments de  $J_0$ , soit  $I' = ((a_i)_{i \notin J_0}, b)$  ; si  $I'$  est vide, ou si  $\sum_{i \notin J_0} a_i < b$ , alors  $I$  est polynomiale (il n'y a qu'à choisir le plus petit  $a_i$  pour avoir l'optimum) et sinon, on peut se limiter aux solutions réalisables  $J' = \text{argmin}\{m(I', J) : \min\{a_i : i \in J_0\}\}$  où  $J$  est une solution réalisable quelconque de  $I'$ , et donc à l'instance  $I'$ . Or, celle-ci vérifie bien cette fois  $a_i < b$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

DÉBUT

```

J ← {1, ..., n};
TANT QUE ∃ j ∈ J : ∑_{i ∈ J} a_i - a_j ≥ b FAIRE
    J ← J \ {j};
FIN TANT QUE

```

FIN

**Figure 2.1.** L'algorithme *SOLMIN*

L'algorithme *SOLMIN* est de complexité  $O(n^2)$  ; nous allons montrer qu'il garantit un rapport d'approximation classique constant de 2, c.-à-d., que toute solution donnée par l'algorithme sur toute instance de *MinSubsetSum* ne sera jamais plus que deux fois plus grand que la valeur de l'optimum. Nous allons maintenant démontrer que l'algorithme *SOLMIN* est une 2-approximation classique pour *MinSubsetSum*. Notons  $J$  la solution proposée par l'algorithme ; d'après la remarque précédente, on a  $|J| \geq 2$ . Par ailleurs, on a par construction, pour tout  $j \in J$ , l'inégalité :

$$\sum_{i \in J} a_i < b + a_j \tag{2.1}$$

Qui donne en sommant les inégalités [2.1] pour tout  $j \in J$  :

$$|J| \sum_{i \in J} a_i - \sum_{i \in J} a_i < |J|b \quad [2.2]$$

Sachant que  $J$  contient au moins deux éléments, nous déduisons de l'inégalité [2.2] le résultat :  $\lambda_{\text{SOLMIN}}(I) = \sum_{i \in J} a_i \leq (|J|/|J| - 1)b \leq (|J|/|J| - 1)\beta \leq 2\beta$ , c'est-à-dire  $\lambda/\beta \leq 2$ , où  $\beta$  est la valeur de la solution optimale pour MinSubsetSum.

#### 2.4.2. Approximation à $r$ , $r$ aussi proche de 1 que l'on veut

Un *schéma d'approximation* pour un problème  $\Pi$  est une famille d'algorithmes polynomiaux d'approximation  $\mathcal{S}_r = (\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$  qui vérifie  $\forall r \in [0, 1[, R_{\Pi}^{\mathcal{A}_r} \geq r$ . Un problème  $\Pi$  est dans la classe PTAS[R] s'il admet un schéma d'approximation  $\mathcal{S}_r$  dont la complexité  $C$  vérifie  $\forall I, \forall r, C(\mathcal{A}_r(I)) = p_r(|I|)$  (le degré de  $p_r$  dépend de  $r$ ). La famille  $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$  constitue alors un *schéma d'approximation polynomial*. Les classes PTAS et PTAS[ $\delta$ ] regroupent respectivement les problèmes qui admettent un schéma d'approximation polynomial pour les rapports classique et différentiel. Par ailleurs, un problème  $\Pi$  est dans la classe FPTAS[R] s'il admet un schéma d'approximation polynomial  $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$  de complexité  $C$  vérifiant  $\forall I$  et  $\forall r, C(\mathcal{A}_r(I)) = p(|I|, 1/(1-r))$  ( $p$  est polynomial en  $|I|$  et en  $1/(1-r)$ ). La famille  $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$  constitue alors un *schéma d'approximation complètement polynomial*. Les classes FPTAS et FPTAS[ $\delta$ ] désignent respectivement les classes des problèmes qui admettent un schéma d'approximation complètement polynomial pour les rapports classique et différentiel.

EXEMPLE 2.3.— Nous allons présenter ici un résultat issu des travaux de [SAH 75] concernant le problème du *sac-à-dos*. Toutefois, afin de faciliter la compréhension de la preuve, nous ne l'appliquerons non pas au sac-à-dos mais au MinSubsetSum déjà abordé lors de l'exemple précédent. Nous allons mettre en évidence pour ce problème un schéma d'approximation polynomial classique : cela signifie que le problème pourra être approché aussi bien que l'on veut, mais au dépend de la complexité puisque pour approcher l'optimum à  $\epsilon$  près, l'algorithme aura un déroulement d'une complexité de l'ordre de  $n^{1/\epsilon}$ .

L'algorithme SCHEMA renvoie bien une solution réalisable : pour le cas particulier  $J' = \emptyset$ , il ajoutera un objet parmi la famille complète d'objets  $\{1, \dots, n\}$  jusqu'à obtention d'une solution réalisable (au pire  $J' = \{1, \dots, n\}$ ), sinon l'instance n'est pas réalisable ! De plus, sa complexité en temps est d'ordre  $O(n^{1/\epsilon})$  (nombre de sous-ensembles de taille au plus  $\lceil 1/\epsilon \rceil$ ) puisque la boucle « pour tout » est prédominante ; notons que cette complexité « explose » lorsque  $\epsilon$  tend arbitrairement vers zéro, ce qui rend cette résolution non utilisable en pratique.

Nous montrons maintenant que l'algorithme SCHEMA est une  $1 + \epsilon$ -approximation classique pour MinSubsetSum. Soit  $J^*$  une solution optimale pour une instance  $I =$

```

DÉBUT
  trier les indices  $\{1, \dots, n\}$  par poids décroissants ;
  POUR TOUT  $J' \subseteq \{1, \dots, n\}$  tel que  $|J'| \leq \lceil 1/\epsilon \rceil$  FAIRE
    SI  $J' \neq \emptyset$  ALORS  $i_{\max} \leftarrow \max\{i : i \in J'\}$ 
    SINON  $i_{\max} \leftarrow 0$  ;
    TANT QUE  $\exists j \in \{i_{\max} + 1, \dots, n\} : \sum_{i \in J'} a_i < b - a_j$  FAIRE
       $J' \leftarrow J' \cup \{j\}$  ;
    FIN TANT QUE
  FIN POUR TOUT
   $J \leftarrow \operatorname{argmin}\{m(I, J') : \sum_{i \in J'} a_i \geq b\}$  ;
FIN

```

**Figure 2.2.** L'algorithme *SCHEMA*

$((a_i)_{i=1, \dots, n}, b)$  ; si  $|J^*| \leq \lceil 1/\epsilon \rceil$  alors l'algorithme *SCHEMA* calcule une solution optimale : puisqu'il teste, notamment, la solution  $J^*$ , la valeur de la solution renvoyée vérifiera  $\lambda(I) \leq \sum_{i \in J^*} a_i = \beta(I)$  ! Aussi supposons-nous dorénavant  $|J^*| > \lceil 1/\epsilon \rceil$  ; trions alors les indices de  $J^*$  par poids décroissants et notons par  $J_0$  les  $p = \lceil 1/\epsilon \rceil$  premiers indices. Focalisons-nous maintenant sur l'itération où l'algorithme teste  $J_0$  et retourne la solution  $J'$  ; puisque par construction  $J_0 \subset J^*$ , l'algorithme retournera une solution réalisable ; par ailleurs, il existe  $j \in J \setminus J_0$  (le dernier élément pris) tel que :

$$\sum_{i \in J} a_i < b - a_j \quad [2.3]$$

D'un autre côté, puisque  $j > p$ , on a également  $a_j \leq a_i$  pour  $i \in J_0$  et :

$$pa_j \leq \sum_{i \in J_0} a_i \leq \sum_{i \in J^*} a_i = \beta(I) \quad [2.4]$$

Finalement, grace aux inégalités [2.3] et [2.4], nous déduisons :

$$\begin{aligned} \lambda(I) &\leq \sum_{i \in J'} a_i \leq b + a_j \\ &\leq \beta(I) + a_j \leq \beta(I) \left(1 + \frac{1}{p}\right) \\ &\leq (1 + \epsilon)\beta(I) \end{aligned}$$

En réalité, ces problèmes de *sac-à-dos* et de *plus petit minorant* s'approchent encore mieux que cela puisqu'ils admettent un schéma complètement polynomial, c'est-à-dire qu'il existe une famille d'algorithmes qui non seulement permet d'approcher

l'optimum à  $\epsilon$  près, mais de surcroît permet de le faire en temps polynomial en  $(1/\epsilon)$ ; c'est ce que propose de montrer l'exemple suivant pour le problème de sac-à-dos.

EXEMPLE 2.4.— Nous allons présenter un schéma d'approximation complètement polynomial pour le problème de sac-à-dos pour lequel nous avons, dans l'exemple 2.1, proposé une résolution en temps pseudo-polynomial. Cet exemple provient des travaux de [IBA 75]. Le procédé utilisé est dicté par la technique *d'échelonnage et d'arrondi*<sup>1</sup> qui consiste à ramener les poids des éléments d'une instance à des grandeurs d'ordre polynomial : l'application de seuils sur les données numériques permet ainsi de ramener la complexité d'un algorithme d'un temps pseudo-polynomial à un temps polynomial.

Partant d'une instance  $I = ((a_i, c_i)_{i=1, \dots, n}, b)$  de sac-à-dos, on construit l'instance  $I' = ((a'_i, c_i)_{i=1, \dots, n}, b)$  en opérant sur les poids la transformation suivante :  $a'_i = \lfloor a_i n / (a_{\max} \epsilon) \rfloor$ . Une solution optimale  $S'^*$  de  $I'$  obtenue par le biais de l'algorithme de l'exemple 2.1 se construit en  $O(n^2 a'_{\max} \log c_{\max}) = O((n^3 \log c_{\max})/\epsilon)$ ; or, ce temps est polynomial relativement aux données de  $I$  et à la quantité  $1/\epsilon$ .

Considérons alors cette solution  $J'^*$  optimale pour  $I'$  comme solution approchée de l'instance  $I$ ; puisque les deux instances ont mêmes contraintes,  $J'^*$  est réalisable pour les deux instances. Formellement, notre démarche revient à dérouler l'algorithme 2.4.

DÉBUT

construire  $I' = ((a'_i, c_i)_{i=1, \dots, n}, b)$  avec  $a'_i = \lfloor a_i n / (a_{\max} \epsilon) \rfloor$ ;  
 $J \leftarrow$  la solution retournée par l'algorithme  
de l'exemple 2.1 sur l'instance  $I'$ ;

FIN

Figure 2.3. L'algorithme SCHEMACOMPLET

Nous démontrons que l'algorithme SCHEMACOMPLET est une  $1 + \epsilon$ -approximation classique pour MaxKS. Soit  $J^*$  une solution optimale pour une instance  $I$  de MaxKS; cette solution est réalisable pour l'instance  $I'$  et en posant  $t = a_{\max} \epsilon / n$ , on a :

$$\beta(I') \geq \sum_{i \in J^*} a'_i \geq \sum_{i \in J^*} \left( \frac{a_i}{t} - 1 \right) \geq \frac{\beta(I)}{t} - |J^*|$$

Inégalité d'où découle, puisque  $|J^*| \leq n$  :

$$t\beta(I') \geq \beta(I) - nt \tag{2.5}$$

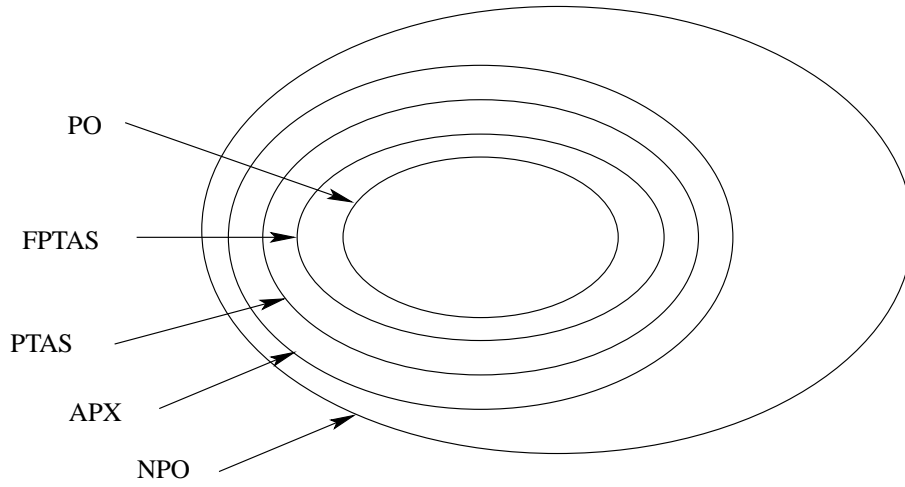
1. Traduction des termes *rounding and scaling technics* voir [GAR 79].



Par ailleurs, l'objet  $i_0$  de valeur  $a_{\max}$  est réalisable ; ainsi  $\beta(I) = \sum_{i \in S^*} a_i \geq a_{\max}$ , autrement dit (en multipliant les membres de l'inégalité par  $\epsilon$ ) :

$$nt = a_{\max}\epsilon \leq \epsilon\beta(I) \quad [2.6]$$

Finalement, en regroupant les inégalités [2.5] et [2.6], on obtient le résultat :  $\lambda(I) = \sum_{i \in J'^*} a_i \geq t\beta(I') \geq \beta(I) - nt \geq (1 - \epsilon)\beta(I)$ .



**Figure 2.4.** Classes d'approximabilité (sous l'hypothèse  $P \neq NP$ )

La figure 2.4 illustre les différentes classes vues jusqu'ici et leurs inclusions mutuelles (sous l'hypothèse  $P \neq NP$ ). La classe  $NPO \setminus APX$  contient des problèmes qui sont approximables à rapport dépendant d'un ou plusieurs paramètres de leurs instances (par exemple, le degré du graphe ou son ordre<sup>2</sup> s'il s'agit de problèmes définis dans les graphes, etc.).

## 2.5. Définition logique

Un nouvel angle est choisi par [PAP 91], celui du formalisme logique, pour étudier les qualités d'approximation des problèmes de NPO : c'est la naissance des classes MaxNP et MaxSNP. Ce formalisme s'appuie sur la définition syntaxique de NP proposée par [FAG 74]. Nous donnons ici la définition de ces classes, sans vraiment approfondir les aspects logiques ; aussi conseillons-nous vivement au lecteur de se référer aux ouvrages précités.

<sup>2</sup>. Le nombre de ses sommets.

### 2.5.1. Les classes MaxNP et MaxSNP

Un type similaire fini  $\mathcal{T}$  est la donnée d'un  $k$ -uplet  $(n_1, \dots, n_i, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$  pour  $k$  fini. Une structure finie  $S = (U; R)$  sur un type similaire fini  $\mathcal{S} = (n_1, \dots, n_k)$  est la donnée d'un ensemble fini  $U$  appelé univers et d'un ensemble  $R = (r_1, \dots, r_k)$  de  $k$  relations sur  $U$  vérifiant pour tout  $i$  :  $r_i \subseteq U^{n_i}$ .  $S$  est qualifiée de  $\mathcal{S}$ -structure finie.

EXEMPLE 2.5.– Un graphe  $G(V, E)$  est une structure finie sur le type similaire fini  $\mathcal{S} = (2)$ , ayant pour univers l'ensemble  $V$  et pour seule relation l'ensemble  $E$  sur  $V^2$ .

Un problème  $\Pi$  de maximisation de NP est dans la classe  $\text{MaxNP}_0$  s'il existe deux types similaires finis  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$ , une formule  $\phi$  du premier ordre sans quantificateur et deux constantes  $k$  et  $\ell$ , tels que les optima de  $\Pi$  peuvent être exprimés sous la forme :  $\beta_\Pi(I) = \max_S |\{x \in U^k : \exists y \in U^\ell, \phi(I, S, x, y)\}|$  où  $I$  est une  $\mathcal{I}$ -structure finie d'univers  $U$  et  $S$  une  $\mathcal{S}$ -structure finie de même univers  $U$ . La structure  $I$  décrit les instances du problème  $\Pi$ , la structure  $S$  les solutions sur  $I$ , la formule  $\phi$  les conditions de réalisabilité des solutions du problème.

EXEMPLE 2.6.– Une instance  $I = (X, C)$  du problème de satisfaisabilité maximum, MaxSat est la donnée d'un ensemble  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  de variables binaires et d'un ensemble  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  de clauses disjonctives construites sur l'ensemble  $L = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$  des littéraux. Une solution est une affectation  $T$  des variables  $x_i$  à 0 ou à 1 et le problème consiste à déterminer une telle affectation qui satisfasse un nombre maximum de clauses :  $\beta_\Pi(I) = \max_{T \in \{0,1\}^n} |\{i = 1, \dots, m : T \text{ valide } c_i\}|$ . Associons aux ensembles  $X$  et  $C$  les ensembles de variables  $U_X$  et  $U_C$  et considérons l'univers fini  $U = U_X \cup U_C$ . Toute instance  $I$  peut être décrite de façon synthétique par les relations binaires  $p$  et  $n$  sur  $U_X \times U_C$  définies par «  $p(x, c) \Leftrightarrow x \in c$  » et «  $n(x, c) \Leftrightarrow \bar{x} \in c$  » qui traduisent la présence des littéraux dans les clauses ; quant aux solutions  $T$ , elle ne sont rien de plus qu'une relation unaire sur  $U_X$ . Ainsi, pour les types similaires finis  $\mathcal{I} = (2, 2)$  et  $\mathcal{S} = (1)$ , tout optimum de MaxSat peut s'écrire de la façon suivante :

$$\beta(U; p, n) = \max_T |\{c \in U : \exists x \in U, (p(x, c) \wedge T(x)) \vee (n(x, c) \wedge \neg T(x))\}|$$

REMARQUE.– Telle qu'elle est définie, la classe  $\text{MaxNP}_0$  regroupe naturellement des problèmes polynomialement bornés de NPO :  $\text{MaxNP}_0 \subseteq \text{NPO-PB}$ .

Un problème  $\Pi$  de maximisation de NPO est dans la classe  $\text{MaxSNP}_0$  s'il existe deux types similaires finis  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$ , une formule  $\phi$  du premier ordre sans quantificateur et une constante  $k$ , tels que les optima de  $\Pi$  peuvent être exprimés sous la forme :  $\beta_\Pi(I) = \max_S |\{x \in U^k : \phi(I, S, x)\}|$  où  $I$  et  $S$  sont respectivement une  $\mathcal{I}$  et une  $\mathcal{S}$ -structures finies d'univers  $U$ .

EXEMPLE 2.7.— Le problème  $\text{MaxIS-}B$  est la restriction du problème de stable maximum à des graphes de degré borné par  $B$ , c'est-à-dire que tout sommet aura au plus  $B$  voisins. Dans le cas général, décrivant un graphe  $G$  par son ensemble d'arêtes, la problème de stabilité maximum peut s'écrire :

$$\beta(V; E) = \max_{W \subseteq V} |\{w \in V : W(w) \wedge (\forall v \in V, E(v, w) \Rightarrow \neg W(v))\}|$$

où  $V$  désigne l'ensemble des sommets de  $G$ . Cette formulation faisant intervenir un quantificateur dans le prédicat, elle ne permet pas d'établir l'appartenance de  $\text{MaxIS}$  à  $\text{MaxSNP}$ , et d'ailleurs le problème de stabilité maximum n'appartient même pas à la classe  $\text{MaxNP}$ . En revanche, dans le cas de degrés bornés par  $B$ , il devient possible d'observer  $G$  non plus par son ensemble d'arêtes, mais par l'ensemble des listes d'adjacence de ses sommets : soit le type similaire fini  $\mathcal{I} = (B + 1)$ , un graphe  $G$  n'est autre que la donnée d'un ensemble  $V$  de sommets (l'univers) et d'une relation  $\Gamma : V^{B+1} \rightarrow \{0, 1\}$  (structure finie d'univers  $V$  sur  $\mathcal{I}$ ) définie par  $\Gamma(w, v_1, \dots, v_B) = 1$  si et seulement si  $\{v_1, \dots, v_B\}$  est bien l'ensemble des sommets adjacents au sommet  $w$  (si  $v$  a moins de  $B$  sommets, on duplique l'un de ses voisins). Alors le problème s'écrit :

$$\beta(V; \Gamma) = \max_W \left| \left\{ (w, v_1, \dots, v_B) \in V^{B+1} : W(w) \wedge (\neg W(v_1) \wedge \dots \wedge \neg W(v_B)) \right\} \right|$$

où  $W$  est un sous-ensemble de sommets ( $\mathcal{S}$ -structure finie d'univers  $V$  pour le type fini  $\mathcal{S}=(1)$ ). De toute solution  $W$  on déduit le sous-ensemble stable  $W' \subseteq W$  des sommets  $w$  de  $W$  qui vérifient avec leur liste d'adjacence la formule  $\phi$  associée  $W(w) \wedge (\neg W(v_1) \wedge \dots \wedge \neg W(v_B))$ , à tout stable correspond l'affectation qui met à 1 les sommets du stable, à 0 tout autre sommet : il y a bien coïncidence entre les valeurs de la cardinalité d'un ensemble stable et de son évaluation logique.

EXEMPLE 2.8.— Si le problème  $\text{MaxSat}$  est dans  $\text{MaxNP}$ , sa restriction  $\text{MaxEk-Sat}$  à des clauses de taille précisément  $k$  est dans la classe  $\text{MaxSNP}$  : la constance de la taille des clauses permet effectivement de décrire de façon exhaustive les formes des clauses selon l'alternance de littéraux positifs ( $x_i$ ) et négatifs ( $\bar{x}_i$ ) qu'elles contiennent, ainsi que les cas de satisfaction de chacune de ces formes. Parce que l'on est en mesure d'explicitier chaque forme de clause par une relation particulière, le quantificateur existentiel disparaît. Nous faisons la preuve pour  $k = 2$ , mais celle-ci est naturellement généralisable à toute constante  $k$ . Soit  $X$  un ensemble de  $n$  variables booléennes, une clause de  $\text{MaxE2-Sat}$  sur  $X$  peut être,  $\forall (i < j) \in \{1, \dots, n\}$ , de l'une des quatre formes suivantes :  $(x_i, x_j)$ ,  $(x_i, \bar{x}_j)$ ,  $(\bar{x}_i, x_j)$  ou  $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$ .

Nous proposons alors la formulation logique suivante d'une instance  $I = (X, C)$  du problème : sur l'univers  $U = X \cup \{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}\}$ , l'ensemble  $C$  des clauses de  $I$  est décrit à l'aide de quatre relations ternaires  $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$ . Ces

relations sont définies par :

$$\begin{aligned}
C_1(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 1) \wedge ((x_i, x_j) \in C) \\
C_2(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 2) \wedge ((x_i, \bar{x}_j) \in C) \\
C_3(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 3) \wedge ((\bar{x}_i, x_j) \in C) \\
C_4(x_i, x_j, x_h) &\Leftrightarrow (i < j) \wedge (h = n + 4) \wedge ((\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in C)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour les types similaires finis  $\mathcal{I} = (3, 3, 3, 3)$  et  $\mathcal{S} = (1)$ , tout optimum d'une instance de MaxE2-Sat peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\beta(U; C_1, C_2, C_3, C_4) = \max_T \{ & | \{ (x_i, x_j, x_h) \in U^3 : \\
& (C_1(x_i, x_j, x_h) \wedge [T(x_i) \vee T(x_j)]) \\
& \vee (C_2(x_i, x_j, x_h) \wedge [\neg T(x_i) \vee T(x_j)]) \\
& \vee (C_2(x_i, x_j, x_h) \wedge [\neg T(x_i) \vee T(x_j)]) \\
& \vee (C_3(x_i, x_j, x_h) \wedge [T(x_i) \vee \neg T(x_j)]) \\
& \vee (C_4(x_i, x_j, x_h) \wedge [\neg T(x_i) \vee \neg T(x_j)]) \} \}
\end{aligned}$$

Il est aisé de voir que chaque clause sera considérée une et une seule fois. Pour un entier  $k \geq 3$  quelconque, l'instance sera de façon similaire décrite par  $\sum_{p=0}^k C_k^p = 2^k$  relations  $C_j$  où  $C_k^p$  compte pour  $p$  de 0 à  $k$  le nombre de choix possibles de  $p$  variables parmi  $k$  à mettre sous forme négative.

Les classes que nous venons d'évoquer sont exclusivement dédiées aux problèmes de maximisation, mais les définitions équivalentes existent naturellement pour les problèmes de minimisation, et même plus : il existe toute une hiérarchie de classes logiques en fonction du nombre de quantificateurs devant la formule du premier ordre  $\phi$  et l'alternance de ceux-ci ; ces différentes classes, leurs liens et leur approximation sont notamment étudiées dans [KOL 94, KOL 95].

### 2.5.2. Logique et approximation

Ce ne sont pas exactement les classes  $\text{MaxSNP}_0$  et  $\text{MaxNP}_0$  qui sont étudiées en approximation mais des classes un peu plus grandes,  $\text{MaxSNP}$  et  $\text{MaxNP}$ , qui contiennent les problèmes de  $\text{MaxSNP}_0$  et  $\text{MaxNP}_0$  mais aussi les problèmes de NPO qui se réduisent à un problème de la classe considérée par une certaine transformation qui préserve l'approximation, la L-réduction ; ainsi,  $\text{MaxSNP}$  et  $\text{MaxNP}$  sont des classes conjointement définies par la logique et le degré d'approximation. La L-réduction est une façon de transformer un problème  $\Pi$  en un problème  $\Pi'$  qui préserve les schémas d'approximation dont la définition est donnée au paragraphe 2.6.1.3.

Notons que l'élargissement par réduction de la classe  $\text{MaxSNP}_0$  (resp.,  $\text{MaxNP}_0$ ) à la classe  $\text{MaxSNP}$  (resp.,  $\text{MaxNP}$ ) a notamment pour conséquence l'intégration de problèmes de minimisation.

DÉFINITION 2.10. –  $\forall \Pi \in \text{NPO}$ ,

- $\Pi \in \text{MaxNP}$  si et seulement si  $\Pi \in \text{MaxNP}_0$  et  $\exists \Pi' \in \text{MaxNP}_0 : \Pi \overset{L}{\propto} \Pi'$  ;
- $\Pi \in \text{MaxSNP}$  ssi  $\Pi \in \text{MaxSNP}_0$  et  $\exists \Pi' \in \text{MaxSNP}_0 : \Pi \overset{L}{\propto} \Pi'$ .

En réalité, les classes  $\text{MaxSNP}$  et  $\text{MaxNP}$  sont définies comme les fermetures<sup>3</sup>  $\overline{\text{MaxSNP}_0}^L$  et  $\overline{\text{MaxNP}_0}^L$  des classes  $\text{MaxSNP}_0$  et  $\text{MaxNP}_0$  sous la L-réduction. Par exemple, les problèmes  $\text{MinVC-B}$ ,  $\text{MinDS-B}$ , ou encore  $\text{MaxCut}$  sont des problèmes de  $\text{MaxSNP}$  [PAP 91]. Papadimitriou et Yannakakis, avec la classe logique  $\text{MaxSNP}$ , ont en quelque sorte exhibé une classe médiane entre PTAS et APX dans le sens où tout problème de  $\text{MaxSNP}_0$  est approximable à rapport constant et que certains de ses problèmes, s'ils admettent un schéma d'approximation, induisent un schéma d'approximation sur tout problème de la classe. Les auteurs démontrent l'inclusion de  $\text{MaxSNP}_0$  dans APX en proposant un algorithme approché générique pour la classe  $\text{MaxSNP}_0$ , puis la complétude de  $\text{Max3-Sat}$  à l'aide d'une transformation générique d'une instance de tout problème de la classe en une instance de  $\text{Max3-Sat}$ . Ils font également la preuve de la complétude d'autres problèmes tels  $\text{MaxIS-B}$  (problème du stable à degré borné),  $\text{MaxCut}$  (problème de coupe maximum dans un graphe) ou encore  $\text{Max2-Sat}$ , par réduction simple à partir de  $\text{Max3-Sat}$ . Depuis, dans [KHA 98], les égalités ensemblistes ont été établies (utilisant notamment le résultat  $\overline{\text{APX}}\text{-PB}^P = \text{APX}$  de [CRE 94]), qui nous apprennent entre autre qu'il existe une P-réduction de tout problème approximable à rapport constant à un problème de la classe  $\text{MaxSNP}_0$  :

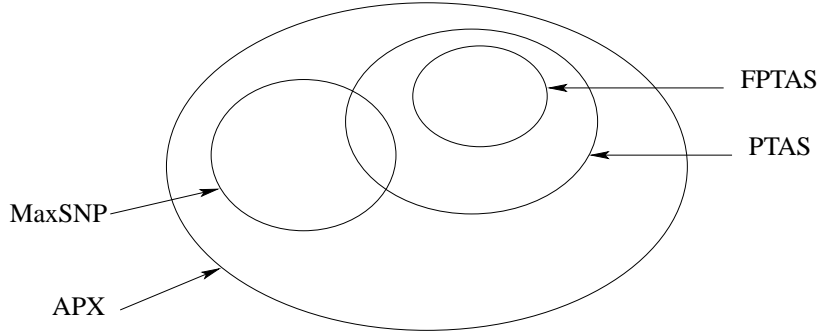
$$\begin{aligned} \overline{\text{MaxSNP}_0}^E &= \text{APX-PB} \\ \overline{\text{MaxSNP}_0}^P &= \text{APX} \end{aligned}$$

Concernant  $\text{MaxNP}$ , on peut citer l'inclusion de  $\text{MaxNP}_0$  dans APX, fait démontré dans [PAP 91] par le biais des mêmes arguments que pour l'inclusion de  $\text{MaxSNP}_0$  dans APX ; du point de vue de la complétude, les auteurs ne parviennent pas à un résultat aussi fort que pour  $\text{MaxSNP}$ , puisqu'ils réduisent la classe par L-réduction à toute une famille de sous-problèmes de satisfaisabilité, mais non pas un seul problème

---

3. Pour une classe d'approximation  $Y$  et une réduction  $X$  on appelle fermeture de  $Y$  pour  $X$  l'ensemble  $\overline{Y}^X$  des problèmes qui se  $X$ -réduisent à un problème de  $Y$ .

de la classe : tout problème de la  $\text{MaxNP}_0$  est L-réductible à un problème  $\text{MaxGSat-}B$  (*Generalized Maximum Satisfiability*) pour une certaine constante  $B$ , malheureusement dépendante du problème considéré ; cela induit cependant la complétude du problème général  $\text{MaxSat}$ . Nous citerons enfin le résultat de classe proposé par [CRE 94] qui stipule que la fermeture de  $\text{MaxNP}_0$  sous P-réduction coïncide également avec  $\text{APX}$  :  $\overline{\text{MaxNP}_0}^P = \text{APX}$ . Cela induit notamment que tout problème de  $\text{MaxNP}_0$  ou s'y réduisant par une P-réduction est approximable à rapport constant. Après les résultats de complétude, d'une incontestable richesse quant à l'approximabilité (ou plutôt la non-approximabilité) des problèmes, les classes  $\text{MaxSNP}$  et  $\text{MaxNP}$  auront donc également apporté une caractérisation syntaxique des classes d'approximation. Pour le lecteur non averti, ces résultats seront à nouveau évoqués à l'occasion du paragraphe suivant où les notions utiles à leur compréhension auront été présentées.



**Figure 2.5.** Les classes  $\text{APX}$ ,  $\text{MaxSNP}$ ,  $\text{PTAS}$  et  $\text{FPTAS}$

La figure 2.5 illustre le positionnement de la classe  $\text{MaxSNP}$  dans la classe  $\text{APX}$ . Les problèmes de  $\text{MaxSNP}$  sont tous des variantes restrictives de problèmes généraux de  $\text{NPO}$  (les restrictions étant imposées sur les degrés quand il s'agit de problèmes dans les graphes, ou sur la taille des ensembles quand il s'agit de problèmes définis sur des systèmes d'ensembles – les problèmes de satisfiabilité étant d'ailleurs ici considérés comme tels – ou, enfin, sur les poids des données). En revanche, on trouve dans  $\text{FPTAS}$  (du moins pour le peu de problèmes que nous y connaissons) leurs versions les plus générales.

Notons pour conclure cet intermède logique la flagrante asymétrie entre les classes de *maximisation* et de *minimisation* : si  $\text{Min}\Sigma_0$  désigne le pendant *minimisation* de  $\text{MaxSNP}_0 = \text{Max}\Sigma_0$ , le problème  $\text{Min3-CCSP}$  qui cherche à satisfaire un nombre maximum de clauses conjonctives de taille au plus 3, c'est-à-dire de la forme  $(\ell_1)$ ,  $(\ell_1 \wedge \ell_2)$  ou  $(\ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \ell_3)$  est clairement élément de la classe, par une représentation similaire à celle proposée pour  $\text{MaxEk-Sat}$ . Or, Kolaitis et thakur [KOL 94]

montrent que Min3-CCSP est  $\text{Min}\Sigma_0$ -complet pour la P-réduction (comme Max3-Sat pour  $\text{Max}\Sigma_0$ ), mais non approximable à rapport constant (tandis que Max3-Sat est à ce jour approximé à  $1/1,249 \geq 0,8$  [TRE 96b]); en montrant dans [KLA 96] la NPO-PB-complétude de Min3-CCSP relativement à la E-réduction, Klauck fait la preuve de l'inclusion de tout NPO-PB dans  $\overline{\text{Min}\Sigma_0}^P$ .

## 2.6. Effets de classe

### 2.6.1. Le principe de réduction

Dans une volonté d'unification des travaux proposés au sujet des réductions et d'homogénéisation des notations, nous utiliserons parfois des sigles non conventionnels pour désigner les réductions; nous n'avons cependant pas l'ambition de présenter quelque chose de nouveau. Le principe de réduction d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  consiste à regarder, modulo une petite transformation, le problème  $\Pi$  comme un cas particulier de  $\Pi'$ . Si la transformation est polynomiale et que l'on sait résoudre ou approximer  $\Pi'$  en temps polynomial, on saura alors résoudre ou approcher  $\Pi$  à son tour, toujours en temps polynomial. La réduction est ainsi un moyen de transporter un résultat d'approximation ou de résolution exacte d'un problème à un autre; elle est de la même façon un outil de classement des problèmes selon le niveau de difficulté de leur résolution. Il y a eu, au cours du développement de la théorie de la complexité, grand nombre de définitions de réductions, selon ce que l'on voulait préserver, transporter, d'un problème à l'autre (décision ou optimisation, construction ou évaluation, rapport d'évaluation, structure du problème...). Mais l'on retrouve, à la base de toute réduction, les mêmes principes fondamentaux. Ce sont ces principes que nous désirons présenter, à travers l'étude des réductions polynomiales constructives.

#### 2.6.1.1. Réduction polynomiale

Une réduction d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  est la donnée d'une fonction  $f$  qui permet de construire à partir d'une instance  $I$  de  $\Pi$  une instance  $f(I)$  de  $\Pi'$  et d'une fonction  $g$  qui détermine à partir d'une solution  $s'$  d'une instance  $f(I)$  une solution  $s = g(s')$  de l'instance initiale  $I$ . Dans le cadre de l'étude des problèmes de NPO, on demandera aux transformations  $f$  et  $g$  d'être de complexité polynomiale en la taille de l'instance.

**DÉFINITION 2.11.**— Une réduction d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  de NPO est la donnée d'un couple  $R = (f, g)$  défini par :

$$\left( \begin{array}{lll} f & : & I_{\Pi} \rightarrow I_{\Pi'}, \\ & & I \mapsto I' \end{array} \quad , \quad \begin{array}{lll} g & : & \text{Sol}_{\Pi'}(f(I_{\Pi})) \rightarrow \text{Sol}_{\Pi}(I_{\Pi}) \\ & & s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) \mapsto s \in \text{Sol}_{\Pi}(I) \end{array} \right)$$

et pour lequel il existe deux polynômes  $p_f$  et  $p_g$  qui vérifient pour toute instance  $I$  de  $I_{\Pi}$  les propriétés :

- 1)  $f(I)$  se construit en temps  $p_f(|I|)$ ,
- 2)  $\forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ ,  $g(s')$  se construit en temps  $p_g(|f(I)|)$ .

Notons par soucis d'exhaustivité que cette définition reste valide pour toute exigence de complexité (langages décidables, algorithmes pseudo-polynomiaux...).

Une réduction permet donc de déterminer à l'aide de la fonction  $g$  des solutions pour  $I$  à partir de solutions sur  $f(I)$ . Selon l'espace de problèmes dans lequel on se situe et les niveaux de résolution que l'on veut pouvoir transporter d'un problème à un autre, certaines propriétés seront réclamées au couple de fonctions  $(f, g)$ . Dans l'espace NPO des problèmes d'optimisation, on doit préserver l'optimalité ou du moins un certain niveau de performance. Pour la résolution exacte, il faut pouvoir transporter une solution optimale de l'instance image à l'instance initiale.

#### 2.6.1.2. Réduction préservant l'optimalité

Afin d'éviter d'avoir à préciser les sens d'optimisation des problèmes manipulés, nous utiliserons par la suite les signes  $\succeq$  (resp.,  $\succ$ ) pour signifier qu'une solution est au moins aussi bonne (resp., strictement meilleure) qu'une autre<sup>4</sup>.

DÉFINITION 2.12.— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se PO-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{\text{PO}}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  de  $\Pi$  à  $\Pi'$  qui vérifie : si  $s'^*$  optimale pour  $f(I)$  alors  $g(s'^*)$  optimale pour  $I$ .

PROPOSITION 2.1.—  $\forall (\Pi, \Pi') \in \text{NPO}$ ,  $(\Pi \overset{\text{PO}}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in \text{PO}) \Rightarrow \Pi \in \text{PO}$ .

Il existe différentes façons de construire une telle réduction et notamment celle consistant à imposer à la réduction  $R$  d'être à la fois monotone et surjective.

DÉFINITION 2.13.— Une réduction  $R = (f, g)$  est monotone si elle vérifie :  $\forall I \in I_{\Pi}$ ,  $\forall (s'_1, s'_2) \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ ,  $v_{\Pi'}(f(I), s'_1) \succeq v_{\Pi'}(f(I), s'_2) \Rightarrow v_{\Pi}(I, g(s'_1)) \succeq v_{\Pi}(I, g(s'_2))$ .

REMARQUE 1.— Si  $R$  est monotone alors, «  $s'^*$  optimum sur  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  » implique «  $g(s'^*)$  optimum sur  $g(\text{Sol}_{\Pi'}(f(I)))$  ».

DÉFINITION 2.14.— Une réduction  $R = (f, g)$  est surjective si elle vérifie :  $\forall I \in I_{\Pi}$ ,  $\text{Sol}_{\Pi}(I) = g(\text{Sol}_{\Pi'}(f(I)))$ .

REMARQUE 2.— Si  $R$  est monotone et surjective alors  $s'^*$  optimum de  $f(I)$  implique  $g(s'^*)$  optimum de  $I$ .

---

4.  $\text{opt}_{\Pi} = \min \Rightarrow \begin{cases} \succeq & = & \leq \\ \succ & = & < \end{cases} \quad \text{opt}_{\Pi} = \max \Rightarrow \begin{cases} \succeq & = & \geq \\ \succ & = & > \end{cases} .$



Ainsi, nous pouvons définir une PO-réduction particulière caractérisée par deux propriétés facilement identifiables.

**DÉFINITION 2.15.**— *Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se MS-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{\text{MS}}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  de  $\Pi$  à  $\Pi'$  qui est à la fois monotone et surjective.*

**PROPOSITION 2.2.**—  $\Pi \overset{\text{MS}}{\propto} \Pi' \Rightarrow \Pi \overset{\text{PO}}{\propto} \Pi'$ .

*Preuve.* Elle découle aisément des remarques 1 et 2. ■

### 2.6.1.3. Réduction préservant l'approximation

Malheureusement, nombreux sont les problèmes qui ont été montrés NP-difficiles (non solubles en temps polynomial à moins que P ne coïncide avec NP) à l'aide de telles réductions ; aussi, à défaut de pouvoir résoudre ces problèmes difficiles à l'optimum, les chercheurs se sont mis plus modestement à les résoudre de façon approchée, donnant du même coup naissance aux classes d'approximation. Comme nous l'avons vu, l'approximation fait intervenir une évaluation de la performance des solutions, généralement par les rapports d'approximation. On introduit alors une fonction  $c$  permettant de transporter l'évaluation de solutions d'un problème à un autre. Nous présentons ainsi la A-réduction définie dans [ORP 87] qui préserve l'appartenance à APX.

**DÉFINITION 2.16.**— *Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se A-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{\text{A}}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  de  $\Pi$  à  $\Pi'$  et une fonction  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui vérifient :*

- 1)  $c(r) = 0 \Rightarrow r = 0$  ;
- 2)  $\forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \rho_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow \rho_{\Pi}(I, g(s')) \geq c(r)$ .

**PROPOSITION 2.3.**—  $\forall (\Pi, \Pi') \in \text{NPO}, (\Pi \overset{\text{A}}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in \text{APX}) \Rightarrow \Pi \in \text{APX}$ .

Notons que d'autres réductions ont été définies qui préservent l'approximation à rapport constant, notamment la réduction continue de [SIM 90]. Si la fonction  $c$  vérifie  $c(1) = 1$ , la A-réduction est un autre cas particulier de PO-réduction. De par le développement de la discipline autour du seul rapport classique, la majeure partie des réductions ont été définies de façon à préserver un niveau d'approximation pour la mesure classique ; or, on l'a notamment vu avec le rapport différentiel, plusieurs estimations de la qualité d'une solution peuvent non seulement exister (*rapport différentiel et définition d'une réduction préservant l'appartenance à  $\text{APX}[\delta]$* ), mais aussi coexister (*transposition de résultats d'une mesure à l'autre*). Pour ces raisons, nous assouplissons les conditions sur la mesure considérée, généralisant ainsi, comme cela est fait dans [MON 98], la notion de A-réduction, et plus tard de P- et F-réductions. Si

les lettres  $\rho$  et  $\delta$  symbolisent les rapports classique et différentiel, il faudra dorénavant prendre en compte pour la A-réduction cette nouvelle définition. \*

**DÉFINITION 2.17.**— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se A-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{A[R1,R2]}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  et une fonction  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui vérifient pour deux mesures d'approximation  $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$  :

- 1)  $c(r) = 0 \Rightarrow r = 0$  ;
- 2)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow R1_\Pi(I, g(s')) \geq c(r)$ .

**PROPOSITION 2.4.**—  $\forall (\Pi, \Pi') \in \text{NPO}, (\Pi \overset{A[R1,R2]}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in \text{APX}[R2]) \Rightarrow \Pi \in \text{APX}[R1]$ .

Le cas  $R1 = R2 = \rho$  revient à la définition précédente, originelle, de la A-réduction. En faisant varier les conditions sur les fonctions  $f, g$  et  $c$ , on parcourt l'essentiel des réductions utilisées en approximation polynomiale. Commençons par la P-réduction, également définie dans [ORP 87], qui préserve les schémas d'approximation.

**DÉFINITION 2.18.**— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se P-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{P[R1,R2]}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  et une fonction  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui vérifient pour deux mesures d'approximation  $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$  :

- 1)  $c(r) = 1 \Rightarrow r = 1$  ;
- 2)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq c(r) \Rightarrow R1_\Pi(I, g(s')) \geq r$ .

**PROPOSITION 2.5.**—  $\forall (\Pi, \Pi') \in \text{NPO}, (\Pi \overset{P[R1,R2]}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in \text{PTAS}[R2]) \Rightarrow \Pi \in \text{PTAS}[R1]$ .

Évoquons à présent la F-réduction, introduite dans [CRE 91] pour préserver l'appartenance à la classe FPTAS.

**DÉFINITION 2.19.**— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se F-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{F[R1,R2]}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  et une fonction  $c : I_\Pi \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui vérifient pour deux mesures d'approximation  $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$  :

- 1)  $\forall I \in I_\Pi, c(I, r) = 1 \Rightarrow r = 1$  ;
- 2)  $\exists p_c$  polynôme tel que  $\forall I \in I_\Pi, \forall r \in [0, 1], c(I, r)$  est calculable en temps  $p_c(|I|, 1/(1-r))$  ;
- 3)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq c(I, r) \Rightarrow R1_\Pi(I, g(s)) \geq r$ .

PROPOSITION 2.6.–  $\forall (\Pi, \Pi') \in \text{NPO}, (\Pi \overset{\text{F}[R1, R2]}{\propto} \Pi') \wedge (\Pi' \in \text{FPTAS}[R2]) \Rightarrow \Pi \in \text{FPTAS}[R1]$ .

Pour toutes ces réductions (A, P et F-réductions), la première condition sur la fonction  $c$  n'apparaît pas dans leur définition originale mais ont été ajoutées dans [MON 98] ; elles traduisent simplement le fait qu'une réduction préservant une performance relative n'est exploitable qu'à condition que cette fonction  $c$  ne soit pas triviale. Pour préserver le rapport constant, il faut que tout rapport *strictement positif* sur l'instance image permette de déduire un rapport *strictement positif* sur l'instance initiale, soit «  $r > 0 \Rightarrow c(r) > 0$  » ; pour préserver les schémas d'approximation, il faut à partir d'un certain rang  $r_0 \geq 0$  être en mesure de déduire *pour toute constante*  $r \in [r_0, 1[$  une solution  $r$ -approchée de l'instance initiale à partir d'une solution  $r'$ -approchée de l'instance image pour une certaine constante  $r' \in [0, 1[$  telle que  $c(r') = r$  (P-réduction) ou  $c(I, r') = r$  (F-réduction), soit «  $r' < 1 \Rightarrow c(r') < 1$  » (P-réduction) ou «  $r' < 1 \Rightarrow c(I, r') < 1$  » (F-réduction). Avant de clore le chapitre des réductions classiques, nous présentons la L-réduction, introduite et exploitée dans le cadre des classes logiques MaxNP et MaxSNP et qui a donné lieu à des résultats essentiels de complétude. Conçue dans le but de pouvoir transporter les schémas d'approximation, la L-réduction, définie dans [PAP 91], préserve l'erreur relative.

DÉFINITION 2.20.– Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO tels que  $\text{opt}_\Pi = \text{opt}_{\Pi'}$ , on dit pour les rapports classique et différentiel que  $\Pi$  se L-réduit (resp., se  $L[\delta]$ -réduit) à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{\text{L}}{\propto} \Pi'$  (resp.,  $\Pi \overset{\text{L}[\delta]}{\propto} \Pi'$ ) s'ils vérifient pour deux constantes  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 > 0$  :

- 1)  $\forall I \in I_\Pi, \beta_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \beta_\Pi(I)$  (resp.,  $\text{diam}_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \text{diam}_\Pi(I)$ ) ;
- 2)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), |m_\Pi(I, g(s')) - \beta_\Pi(I)| \leq \alpha_2 |m_{\Pi'}(f(I), s') - \beta_{\Pi'}(f(I))|$ .

PROPOSITION 2.7.–  $\forall (\Pi, \Pi') \in \text{NPO} :$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \Pi \overset{\text{L}}{\propto} \Pi' \right) \wedge (\Pi' \in \text{PTAS}) \Rightarrow \Pi \in \text{PTAS} \\ \left( \Pi \overset{\text{L}[\delta]}{\propto} \Pi' \right) \wedge (\Pi' \in \text{PTAS}[\delta]) \Rightarrow \Pi \in \text{PTAS}[\delta] \end{array} \right.$$

Dans [KHA 98], les auteurs relâchent la constance du facteur  $\alpha_1$  pour le remplacer par un polynôme  $p_1$  : c'est la E-réduction. Ce nouvel outil, qui préserve (notamment) les FPTAS, leur a permis de montrer l'égalité de classes  $\overline{\text{MaxSNP}_0^{\text{E}}} = \text{APX-PB}$  que nous avons déjà évoquée au paragraphe 2.5.2 et que nous commenterons plus en détails au paragraphe 2.6.3.

### 2.6.2. La notion de complétude

La complétude est une notion essentielle en théorie de la complexité ; rappelons-nous le théorème de Cook, central s'il en est, qui pose l'existence du premier problème NP-complet en démontrant à l'aide des machines de Turing que tout problème de NP se réduit par une réduction polynomiale au problème de satisfaisabilité. La *complétude* se réfère toujours à trois éléments : une classe de problèmes  $Y$ , une seconde classe  $X$  « plus facile » que  $Y$  (souvent  $X$  est un sous-ensemble de  $Y$ ) et une *réduction*  $X$  préservant l'appartenance à  $X$ . Un problème  $\Pi$  de  $Y$  est dit  $Y$ -complet si tout problème de  $Y$  se  $X$ -réduit à  $\Pi$  : l'idée est que si l'on prouve pour seulement l'un de ces problèmes complets son appartenance à la classe  $X$ , alors on l'aura prouvé pour tout problème de  $Y$  ; et si  $X$  est un sous-ensemble de  $Y$ , alors  $X$  et  $Y$  coïncident. C'est exactement le cas des classes  $P$  et  $NP$  :  $P$  est contenu dans  $NP$  et si un seul problème  $NP$ -complet est montré soluble en temps polynomial, alors  $P = NP$  !

DÉFINITION 2.21.— Soient  $X$  et  $Y$  deux classes de problèmes de  $NPO$  et  $X$  une réduction préservant l'appartenance à  $X$  :

$$Y\text{-complet} = \left\{ \Pi \in Y : \forall \Pi' \in Y, \Pi' \overset{X}{\leq} \Pi \right\}$$

Parfois (généralement quand  $X \subseteq Y$  et qu'il n'y a dès lors que peu d'ambiguïté), la référence à la réduction ou à l'ensemble  $X$  est omise. On peut également aller chercher les frontières à l'extérieur des classes, c'est la notion de *problèmes difficiles* ; un problème  $\Pi$  est *difficile* pour une classe d'approximation  $Y$  relativement à un certain niveau d'approximation si tout problème de  $Y$  se réduit à  $\Pi$  par une réduction préservant ce niveau d'approximation (mais  $\Pi$  n'est plus tenu d'appartenir à la classe  $Y$ ). Naturellement, tout problème  $Y$ -complet est  $Y$ -difficile.

DÉFINITION 2.22.— Soient  $X$  et  $Y$  deux classes de problèmes de  $NPO$  et  $X$  une réduction préservant l'appartenance à  $X$  :  $Y\text{-h} = \{ \Pi : \forall \Pi' \in Y, \Pi' \overset{X}{\leq} \Pi \}$ .

Par exemple :

- $\text{MinTSP} \in NPO\text{-c}$  [ORP 87]. Le problème *MinTSP* est  $NPO$ -complet pour la  $PO$ -réduction. Le problème de voyageur de commerce de coût minimum est un problème de  $NPO$  et si l'on sait le résoudre à l'optimum en temps polynomial, alors on sait résoudre à l'optimum tout problème d'optimisation de  $NP$  en temps polynomial.

- $\text{Max3-Sat} \in \text{MaxSNP}_0\text{-c}$  [PAP 91]. Le problème *Max3-Sat* est  $\text{MaxSNP}_0$ -complet pour la  $L$ -réduction. Le problème de 3-satisfaisabilité maximum est dans  $\text{MaxSNP}_0$  et s'il existe un schéma d'approximation polynomial pour *Max3-Sat*, alors il en existe pour tout problème de  $\text{MaxSNP}_0$  (ainsi que pour tout problème de  $\text{MaxSNP}$ , de par sa définition).

–  $\text{Min}\Delta\text{TSP} \in \text{APX-c}$  [PAP 93]. *Le cas métrique du problème de voyageur de commerce est APX-complet pour la L-réduction.* Un schéma d'approximation polynomial pour ce problème d'APX pourrait ainsi être transposé par L-réduction à tout autre problème de la classe.

–  $\text{MinDFNS}$  (*Minimum Directed Feedback Node Set*)  $\in \text{APX-h}$  [KAN 92] et  $\text{MinFNS}$  (*Minimum Feedback Node Set*)  $\in \text{APX-c}$  [BAF 99]. *Les cas orientés et non orientés du problème d'ensemble minimum de sommets retour sont APX-difficiles pour la P-réduction, mais le cas non orienté est approximable à rapport constant.* Un schéma d'approximation polynomial pour l'un de ces deux problèmes serait transportable par P-réduction à tout autre problème de la classe APX.

### 2.6.3. La fermeture

Soient  $Y$  une classe d'approximation et  $X$  une réduction quelconque ; on appelle fermeture de  $Y$  pour  $X$  l'ensemble  $\overline{Y}^X$  des problèmes qui se  $X$ -réduisent à un problème de  $Y$ .

DÉFINITION 2.23.– Soient  $Y$  une classe de problèmes de NPO et  $X$  une réduction :  $\overline{Y}^X = \{\Pi \in \text{NPO} : \exists \Pi' \in Y, \Pi \overset{X}{\propto} \Pi'\}$ .

Nous en avons déjà discuté au paragraphe 2.5.2 que les fermetures  $\overline{\text{MaxSNP}_0}^P$  et  $\overline{\text{MaxNP}_0}^P$  des classes syntaxiques  $\text{MaxSNP}_0$  et  $\text{MaxNP}_0$  pour la P-réduction coïncident avec la classe d'approximation APX des problèmes approximables à rapport constant pour le rapport classique. Cette égalité de classes signifie notamment que si un seul problème de NPO qui soit  $\text{MaxSNP}$ -difficile pour la P, la L ou la E-réduction admet un schéma alors tout problème de la classe APX admet également un schéma, autrement dit : *un problème MaxSNP-difficile* pour toute réduction préservant les schéma d'approximation sera *APX-difficile*, toujours relativement à une telle réduction. Or, PTAS est un sous-ensemble propre d'APX, à moins que P n'égal NP : sous l'hypothèse contraire, on pourra dire de tout problème montré  $\text{MaxSNP}$ -difficile qu'il n'est pas schématisable. Ces égalités ensemblistes, en mettant en regard des classes syntaxiques (*dont les problèmes peuvent se formuler sous une certaine expression*) et une classe d'approximation (*dont les problèmes ont été montrés approximables pour un niveau d'approximation donné*), sont d'une richesse incontestable.

## 2.7. Affinité entre problèmes

### 2.7.1. Réductions continues

Nous présentons ici les réductions de Simon conçues pour préserver les rapports asymptotiques d'approximation car, d'une part, c'est un outil précieux qui nous sera

fort utile au chapitre 6, mais surtout parce qu'elles constituent un premier pas vers la relation affine entre problèmes, relation qui nous intéressera tout particulièrement dans le cadre de l'approximation différentielle.

**DÉFINITION 2.24.**— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO tels que  $\text{opt}_\Pi = \text{opt}_{\Pi'}$ , une réduction continue de  $\Pi$  à  $\Pi'$  est la donnée de trois fonctions  $f$  de  $I_\Pi$  dans  $I_{\Pi'}$ ,  $g$  de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I_\Pi))$  dans  $\text{Sol}_\Pi$  et  $g'$  de  $\text{Sol}_\Pi$  dans  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I_\Pi))$ , toutes trois polynomiales en  $|I|$ , et qui vérifient pour quatre constantes  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $a' > 0$  et  $b' \geq 0$  les propriétés suivantes :

1)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I) :$

$$m_{\Pi'}(f(I), g'(s)) \begin{cases} \geq \frac{1}{a} \times m_\Pi(I, s) - b & \text{opt}_\Pi = \max \\ \leq \frac{1}{a} \times m_\Pi(I, s) + b & \text{opt}_\Pi = \min \end{cases}$$

2)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) :$

$$m_\Pi(I, g(s')) \begin{cases} \geq \frac{1}{a'} \times m_{\Pi'}(f(I), s') - b' & \text{opt}_\Pi = \max \\ \leq \frac{1}{a'} \times m_{\Pi'}(f(I), s') + b' & \text{opt}_\Pi = \min \end{cases}$$

Le produit  $a \times a'$  est appelé *expansion* de la réduction ; si  $b = b' = 0$ , la réduction est dite *absolument continue*.

**PROPOSITION 2.8.**— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de maximisation (resp., de minimisation) de NPO, s'il existe un PTAA  $\mathcal{A}_{\Pi'}$   $r$ -approché pour  $\Pi'$  et une réduction continue de  $\Pi$  à  $\Pi'$  d'expansion  $aa'$ , alors il existe un PTAA  $\mathcal{A}_\Pi$  pour  $\Pi$   $r/aa'$ -approché (resp.,  $aa'r$ -approché) asymptotique, pour  $\Pi$ .

*Preuve.* (Pour deux problèmes de maximisation) Soient  $I$  une instance de  $\Pi$  et  $s'$  la solution donnée par  $\mathcal{A}_{\Pi'}$  sur  $f(I)$  ; on a par hypothèse  $m_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \times \beta_{\Pi'}(f(I))$  et l'on note  $s = g'(s')$ . Par C1, on a la relation  $\beta_{\Pi'}(f(I)) \geq (1/a) \times \beta_\Pi(I) - b$  et par C2,  $m_\Pi(I, s) \geq (1/a') \times m_{\Pi'}(f(I), s') - b'$  ; on conclut :

$$m_\Pi(I, s) \geq \frac{1}{a'} r \times \beta_{\Pi'}(f(I)) - b' \geq \frac{r}{aa'} \beta_\Pi(I) - \frac{r}{a'} b - b'$$

Lorsque  $\beta_\Pi(I) \rightarrow \infty$ ,  $\rho_\Pi^\infty \geq r/aa'$ . Remarquons aussi que si la réduction est absolument continue, alors la notion asymptotique disparaît. ■

En différentiel, pour espérer transporter un rapport d'approximation de l'instance image à l'instance initiale, il faut être en mesure de comparer les valeurs des pires solutions sur ces deux instances ; c'est le sens de la propriété 2.1.

**PROPRIÉTÉ 2.1.**—  $\forall I \in I_\Pi, \omega_{\Pi'}(f(I)) \geq (1/a) \times \omega_\Pi(I) - b$  (resp.,  $\leq (1/a) \times \omega_\Pi(I) + b$ ).

Effectivement, définies selon Simon, les fonctions  $g$  et  $g'$  permettent de ne pas trop dégrader la valeur d'une solution lors du passage d'une instance à l'autre (de  $f(I)$  à  $I$  et de  $I$  à  $f(I)$ ), de sorte à pouvoir comparer la valeur d'une solution approchée sur  $I$  à celle d'une solution approchée sur  $f(I)$  ainsi que la valeur optimale sur  $f(I)$  à la valeur optimale sur  $I$ ; en revanche, cela n'offre pas *a priori* la possibilité de comparer les valeurs des pires solutions de  $f(I)$  à  $I$ , manque que pallie la propriété 2.1.

**PROPOSITION 2.9.**— *Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de maximisation (resp., de minimisation) de NPO liés par une réduction continue  $R = (f, g, g')$  de  $\Pi$  à  $\Pi'$ ; si  $R$  est d'expansion 1 et vérifie la propriété 2.1, alors tout PTAA  $\mathcal{A}_{\Pi'}$   $r$ -approché différentiel pour  $\Pi'$  induit un PTAA  $\mathcal{A}_{\Pi}$  pour  $\Pi$   $r$ -approché différentiel asymptotique, pour  $\Pi$ .*

*Preuve.* (Pour deux problèmes de maximisation) Reprenant les notations de la preuve précédente, on a par hypothèse :

$$m_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \times \beta_{\Pi'}(f(I)) + (1 - r) \times \omega_{\Pi'}(f(I)). \quad [2.7]$$

Par ailleurs :

$$\beta_{\Pi'}(f(I)) \geq \frac{1}{a} \beta_{\Pi}(I) - b \quad [2.8]$$

$$m_{\Pi}(I, s) \geq \frac{1}{a'} m_{\Pi'}(f(I), s') - b' \quad [2.9]$$

$$\omega_{\Pi'}(f(I)) \geq \frac{1}{a} \omega_{\Pi}(I) - b \quad [2.10]$$

En utilisant les expressions [2.8], [2.9] et [2.10], l'expression [2.7] devient :

$$\begin{aligned} m_{\Pi}(I, s) &\geq \frac{1}{a'} \left[ r \left( \frac{1}{a} \beta_{\Pi}(I) - b \right) + (1 - r) \left( \frac{1}{a} \omega_{\Pi}(I) - b \right) \right] - b' \\ &\geq r \beta_{\Pi}(I) + (1 - r) \omega_{\Pi}(I) - \frac{b}{a'} - b. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque  $\text{supp}_{\Pi}(I) \leq \text{diam}_{\Pi}(I) + 1$  (les valeurs sont entières), on a  $\delta_{\Pi}^{\infty} \geq r$  lorsque  $\text{supp}_{\Pi}(I) \rightarrow \infty$ .

Remarquons qu'avec une expansion strictement inférieure à 1, on ne pourrait rien conclure *a priori*. Par la suite, on notera  $\Pi \overset{C[\delta]}{\propto} \Pi'$  une réduction continue de  $\Pi$  à  $\Pi'$

d'expansion 1 qui vérifie la propriété 2.1, permettant ainsi de lier le degré d'approximation différentielle des problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$ . ■

Les réductions continues n'apportent pas que la garantie du rapport d'approximation : leur intérêt supplémentaire par rapport aux autres réductions réside en la fonction  $g'$ . Pouvoir revenir du problème initial au problème image s'avérera indispensable pour la préservation des optima locaux, qui nécessite de relier les optima locaux de  $I$  aux optima locaux de  $f(I)$ . Souvent, nous omettrons d'explicitier  $g'$ , les réductions proposées étant présentées comme réductions affines, mais la transformation sous-jacente sera toujours utilisée pour établir la préservation des optima locaux.

### 2.7.2. Réductions affines

Nous l'avons déjà dit, la motivation principale de la définition du rapport différentiel dans [DEM 94a] est la stabilité de la mesure d'approximation sous transformation affine de la fonction objectif : il peut effectivement sembler légitime d'espérer résoudre de façon équivalente, et même considérer comme équivalents, conformément à ce qui est fait en programmation mathématique, les problèmes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.c.} & x \in X \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \min & kf(x) + K \\ \text{s.c.} & x \in X \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{R}^*, \quad K \in \mathbb{R}$$

Aussi définissons-nous un cadre d'équivalence entre problèmes sous le rapport différentiel afin de pouvoir, quand deux problèmes sont identiques à une transformation affine de leur fonction objectif près, déduire des résultats d'approximation de l'un à l'autre. Notons que ce que nous présentons est une restriction de la notion plus générale d'équivalence sous le rapport différentiel définie dans [DEM 96].

**DÉFINITION 2.25.**— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se AF-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{\text{AF}}{\propto} \Pi'$  s'il existe de  $\Pi$  à  $\Pi'$  une réduction  $R = (f, g)$  qui vérifie :

1)  $R$  surjective ;

2)  $\forall I \in I_\Pi, \exists K_I \in \mathbb{R}, \exists k_I \in \mathbb{R}^* (k_I > 0 \text{ si } \text{opt}_\Pi = \text{opt}_{\Pi'}, k_I < 0 \text{ sinon})$  tels que  $\forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), m_{\Pi'}(f(I), s') = k_I m_\Pi(I, g(s')) + K_I$ .

S'il existe une réduction affine de  $\Pi$  à  $\Pi'$  et de  $\Pi'$  à  $\Pi$ , on notera  $\Pi \overset{\text{AF}}{\leftrightarrow} \Pi'$ .

**PROPOSITION 2.10.**— (Stabilité du rapport différentiel sous transformation affine) Si  $\forall \Pi, \Pi' \in \text{NPO}$ ,  $R = (f, g)$  est une AF-réduction de  $\Pi$  à  $\Pi'$ , alors  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \delta_\Pi(I, g(s')) = \delta_{\Pi'}(f(I), s')$ .

*Preuve.* (Pour  $k_I > 0$ ) Par définition, il existe deux réels  $k_I > 0$  et  $K_I$  tels que les évaluations de tout couple de solutions  $(s', g(s'))$  des instances  $f(I)$  et  $I$  sont affinement liées par la relation :  $m_{\Pi'}(f(I), s') = k_I m_\Pi(I, g(s')) + K_I$ .



Par la surjectivité de  $R$ , les pires solutions et les solutions optimales des deux instances coïncident, modulo  $g : \forall t' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), m_{\Pi'}(f(I), s') \geq m_{\Pi'}(f(I), t') \Leftrightarrow m_{\Pi}(I, g(s')) \geq (\text{resp.}, \leq) m_{\Pi}(I, g(t'))$  (resp.,  $m_{\Pi'}(f(I), s') \leq m_{\Pi'}(f(I), t') \Leftrightarrow m_{\Pi}(I, g(s')) \leq m_{\Pi}(I, g(t'))$ ). Par la surjectivité de  $R$ , ceci,  $\forall t \in \text{Sol}_{\Pi}(I)$ , est équivalent à :

$$m_{\Pi}(I, g(s')) \geq (\text{resp.}, \leq) m_{\Pi}(I, t) \Rightarrow \begin{cases} \beta_{\Pi'}(f(I)) &= k_I \beta_{\Pi}(I) + K_I \\ \omega_{\Pi'}(f(I)) &= k_I \omega_{\Pi}(I) + K_I \end{cases}$$

D'où les égalités pour tout couple de solutions  $(s', s = g(s')) \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) \times \text{Sol}_{\Pi}(I)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\Pi'}(f(I)) - m_{\Pi'}(f(I), s')}{\omega_{\Pi'}(f(I)) - \beta_{\Pi'}(f(I))} &= \frac{k_I \omega_{\Pi}(I) + K_I - (k_I m_{\Pi}(I, s) + K_I)}{k_I \omega_{\Pi}(I) + K_I - (k_I \beta_{\Pi}(I) + K_I)} \\ &= \frac{\omega_{\Pi}(I) - m_{\Pi}(I, s)}{\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\delta_{\Pi'}(f(I), s') = \delta_{\Pi}(I, s)$ . ■

**PROPOSITION 2.11.**— *Si deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  vérifient  $\Pi \stackrel{\text{AF}}{\leftrightarrow} \Pi'$ , alors tout algorithme  $r$ -approché pour l'un est  $r$ -approché pour l'autre, au sens de la mesure différentielle.*

*Preuve.* Conséquence directe de la proposition 2.10. ■

Il existe des relations plus intimes encore entre problèmes, qui nous permettrons plus tard de rapprocher, non plus seulement leur degré d'approximation, mais leur structure même ; c'est ce qui motive les dernières définitions.

**DÉFINITION 2.26.**— *Une réduction  $R = (f, g)$  est bijective si et seulement si  $\forall I \in I_{\Pi}$ ,  $g|_{\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))}$  est une bijection de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  sur  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$ .*

**DÉFINITION 2.27.**— *Une réduction fortement affine entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO, notée  $\Pi \stackrel{\text{AF}}{\Rightarrow} \Pi'$ , est une réduction  $R = (f, g)$  affine bijective. S'il existe deux réductions fortement affines, l'une de  $\Pi$  à  $\Pi'$ , l'autre de  $\Pi'$  à  $\Pi$ , on notera  $\Pi \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \Pi'$  et les problèmes  $\Pi$  à  $\Pi'$  seront dits affinement équivalents.*

Lorsque  $\Pi \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \Pi'$ , la résolution des problèmes  $\Pi = (I_{\Pi}, \text{Sol}_{\Pi}, m_{\Pi}, \text{opt}_{\Pi})$  et  $\tilde{\Pi}' = (f(I_{\Pi}), \text{Sol}_{\Pi}(f(I)), m_{\Pi}, \text{opt}_{\Pi})$  devient une et seule, pour tout degré d'approximation différentielle considéré ; de plus, la bijection entre les ensembles de solutions des instances  $I$  et  $f(I)$ , pour peu que leur structure soit semblable (distance constante entre

deux solutions ou densité des espaces de solutions), assure la préservation des optima  $h$ -locaux qui seront le sujet des prochains chapitres.

EXEMPLE 2.9.– Il existe des réductions fortement affines du problème MinTSP à Min $\Delta$ TSP, de MinSC à MinRSSC, de Max $k$ -Sat à MaxEk-Sat ; comme il s'agit toujours de réductions d'un problème à sa restriction, ces couples de problèmes sont tous affinement équivalents. Pour illustration, nous montrons ici que les problèmes de *minimisation* et de *maximisation de programmes linéaires en variables bivalentes*, notés MaxPL $\{0, 1\}$  et MinPL $\{0, 1\}$ , sont liés par une relation fortement affine. Une instance  $I$  de tels problèmes est la donnée, sur un ensemble  $X$  de  $n$  variables à valeur dans  $\{0, 1\}$ , d'un vecteur objectif  $c$  à coefficients dans  $\mathbb{N}$ , de  $m$  vecteurs de contraintes  $a_i$  de  $\mathbb{Z}^n$ , et d'un membre droit  $b$  vecteur de  $\mathbb{N}^m$  ; le but est naturellement d'optimiser le programme suivant :

$$(I) \quad \beta_{\text{MaxPL}}(I) = \max_x c \cdot x$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} a_i \cdot x \leq b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

pour un problème de maximisation, et :

$$(I') \quad \beta_{\text{MinPL}}(I) = \min_x c \cdot x$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} a_i \cdot x \geq b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

pour un problème de minimisation.

Soit maintenant  $I$  une instance du problème MaxPL $\{0, 1\}$  ; on lui associe l'instance  $I' = f(I)$  de MaxPL $\{0, 1\}$  de paramètres  $c' = c$ ,  $a'_i = a_i$  pour tout  $i = 1, \dots, m$  et  $b'_i = \vec{1} \cdot a_i - b_i$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ , où  $\vec{1} = (1, \dots, 1)$  désigne le vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$  :

$$(I) \quad \beta_{\text{MaxPL}}(I) = \max_x c \cdot x$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} a_i \cdot x \leq b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

$$(I') = f(I) \quad \beta_{\text{MinPL}}(I') = \min_x c \cdot x$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} a_i \cdot x \geq \vec{1} \cdot a_i - b_i & \forall i = 1, \dots, m \\ x_j \in \{0, 1\} & \forall j = 1, \dots, n \end{cases}$$

La construction se fait évidemment en temps polynomial en la taille de l'instance initiale, taille qui est donnée par la plus grande des quantités  $n$ ,  $m$  et  $\log(d_{\max})$  où  $d_{\max}$  désigne, en valeur absolue, la plus grande donnée numérique de  $I$ . Considérons à présent les ensembles de solutions des instances  $I$  et  $I'$  : ils sont tous deux constitués de vecteurs de  $\{0, 1\}^n$ , et l'on remarque que  $I'$  est construite de telle sorte qu'un tel vecteur  $x$  est solution réalisable de  $I'$  si et seulement si  $\vec{1} - x$  est solution réalisable

de  $I$ . Effectivement, la  $i$ ème contrainte  $a_i \cdot x \leq \vec{1} \cdot a_i - b_i$  équivaut à la relation  $b_i \geq \vec{1} \cdot a_i - a_i \cdot x$ , or  $\vec{1} \cdot a_i - a_i \cdot x = a_i \cdot (\vec{1} - x)$ . Ainsi, la transformation  $g$  qui associe à tout vecteur  $x$  de  $\{0, 1\}^n$  son opposé  $\vec{1} - x$  transforme bien une solution de  $\text{Sol}_{\text{PL}}(I')$  en une solution de  $\text{Sol}_{\text{PL}}(I)$  et qui plus est, l'équivalence précédente nous assure que  $g$  est une bijection de  $\text{Sol}_{\text{PL}}(I')$  sur  $\text{Sol}_{\text{PL}}(I)$  : nous avons bien exhibé une réduction  $(f, g)$  fortement affine de  $\text{MaxPL}\{0, 1\}$  à  $\text{MinPL}\{0, 1\}$ .

**DÉFINITION 2.28.**— On dit que deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO sont affinement identiques et l'on note  $\Pi \stackrel{\text{AF}}{=} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  fortement affine de  $\Pi$  à  $\Pi'$  telle que la fonction  $f$  est surjective, c'est-à-dire  $f(I_\Pi) = I_{\Pi'}$ .

**EXEMPLE 2.10.**— Les problèmes MaxIS, MaxSP, MaxCI et MinVC d'une part, Max-Sat et MinCCSP d'autre part, sont autant de cas de problèmes affinement identiques. Pour MaxIS et MaxSP par exemple, le programme linéaire à résoudre est le même :

$$\begin{cases} \max \vec{1} \cdot x \\ A \cdot x \leq \vec{1} \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

La seule différence réside en l'interprétation que l'on en fait : la relation binaire représentée par  $A$  désigne-t-elle les arêtes d'un graphe ou l'intersection non vide de deux sous-ensembles ? Ces deux problèmes sont également équivalents du point de vue de l'approximation classique ; pourtant, la même relation qui existe entre MaxIS et MinVC (prendre  $f = \text{Id}_{I_{\text{IS}}=I_{\text{VC}}}$  et  $g : s \mapsto \bar{s}$  de MaxIS à MinVC comme de MinVC à MaxIS) n'a plus alors, en classique, les mêmes conséquences (MaxIS  $\notin$  APX quand MinVC  $\in$  APX).

Avec le rapport classique, une simple translation de la fonction objectif peut suffire à transformer un problème de la classe APX en un problème non approximable à rapport constant à moins que  $P = NP$ , comme en témoigne le passage du TSP métrique au TSP général [MON 01d]. En différentiel, l'équivalence min/max fait parfois prendre le meilleur (MaxTSP et MinTSP sont APX $[\delta]$ ), et parfois le pire (MaxIS et MinVC ont les mêmes seuils d'inapproximation que MaxIS en classique). Un résultat négatif (resp., positif) sur un problème de *maximisation* se transporte du classique au différentiel (resp., du différentiel au classique), mais il n'est pas de telle règle pour les problèmes de *minimisation* (considérer justement MinTSP qui est APX $[\delta]$  mais non APX, MinVC qui est APX mais non APX $[\delta]$ , si  $P \neq NP$ ). La transposition d'un résultat différentiel vers un résultat classique est évoquée dans [DEM 01] ; l'essentiel est de retenir qu'il n'y a rien d'évident, et heureusement : après tout, il s'agit de rapports différents et l'évaluation conjointe des problèmes de NPO par ces deux mesures n'a d'intérêt que pour la diversité, voire la divergence des conclusions produites quant au degré d'approximation de ces problèmes. Remarquons avant de conclure que la possibilité de déduire un résultat différentiel d'un résultat classique est bien moins probable que son inverse. Une condition nécessaire à l'établissement d'une telle implication serait en effet que toute solution, même une pire solution, réalise un rapport

contant, soit que toute solution puisse être déjà considérée comme une *bonne solution* au sens du rapport classique :  $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I) \geq \varepsilon$  ( $\varepsilon \leq 1$ ) pour un problème de *maximisation*,  $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I) \leq \varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 1$ ) pour un problème de *minimisation* ; et quand bien même une telle relation aurait lieu, on ne pourrait en déduire une approximation différentielle qu'à la condition  $r > \varepsilon$  pour un problème de *maximisation*,  $r < \varepsilon$  pour un problème de *minimisation* où  $r$  est le rapport garanti par l'algorithme. Le rapport différentiel ainsi obtenu serait alors de  $|r - \varepsilon|/|1 - \varepsilon|$ .

## 2.8. Voyageur de commerce et affinité

Une instance  $I$  du problème de voyageur de commerce (noté MinTSP ou MaxTSP) est la donnée d'un graphe complet  $G(V, E)$  à  $n$  sommets et d'une fonction  $d : E \rightarrow \mathbb{N}$  de coût sur  $E$ . Le but est de trouver sur  $G$  un tour de valeur minimum ou maximum, le coût d'un tour étant donné par la somme du coût des arêtes qu'il traverse. Nous mettons en évidence certaines équivalences entre différentes versions du problème de voyageur de commerce basées sur des réductions affines particulières qui, d'une instance initiale à l'instance image, ne transforment que le coût des arêtes. Soit  $\mathcal{K}$  une fonction qui, à une instance  $I$  du voyageur de commerce, associe le couple de réels  $(k_I, K_I) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$  ; on considère alors la réduction  $R_{\mathcal{K}} = (f_{\mathcal{K}}, Id_{\text{Sol}_{\text{TSP}}})$  définie,  $\forall I = (G, d) \in I_{\text{TSP}}$ , par :

$$\begin{cases} f_{\mathcal{K}}(I) = (G, d_{\mathcal{K}}) \text{ avec } d_{\mathcal{K}} = k_I d + K_I \\ Id_{\text{Sol}_{\text{TSP}}} \text{ fonction identité sur } \text{Sol}_{\text{TSP}} \end{cases}$$

Si une réduction  $R_{\mathcal{K}}$  entre deux versions  $\Pi$  et  $\Pi'$  du problème du voyageur de commerce vérifie (i)  $\forall I \in I_{\text{TSP}}, k_I > 0$  et  $\text{opt}_{\Pi'} = \text{opt}_{\Pi}$ , ou (ii)  $\forall I \in I_{\text{TSP}}, k_I < 0$  et  $\text{opt}_{\Pi'} = \overline{\text{opt}}_{\Pi}$ , alors elle est une réduction affine de  $\Pi$  à  $\Pi'$ . Effectivement, soit  $I = (G, d)$  une instance de  $\Pi$ , tout tour  $s$  sur  $G$  vérifie :

$$m_{\text{TSP}}(f_{\mathcal{K}}(I), s) = \sum_{e \in s} d_{\mathcal{K}}(e) = \sum_{e \in s} (k_I d(e) + K_I) = k_I m_{\text{TSP}}(I, s) + n \times K_I$$

Ainsi, nous montrons l'équivalence de différentes versions du problème de voyageur de commerce en explicitant simplement la fonction  $\mathcal{K}$  qui permet de passer d'une version à l'autre. Notons que ce cas particulier d'équivalence affine entre deux instances d'un problème valué qui ne se distinguent que par une transformation affine de leur fonction de valuation reste vraie de tout problème valué dont les solutions sont de taille constante. Tels, par exemple, sont les problèmes de *chaîne Hamiltonienne* (HPP, Hamiltonian Path Problem) et d'*arbre couvrant contraints* (qui comprend notamment le problème  $k$ -depthSTP,  $k$ -depth spanning tree problem, problème de l'arbre couvrant de profondeur au plus  $k$ ), dont les solutions sur un graphe à  $n$  sommets sont de taille  $n - 1$  (voir par exemple [MON 01c, MON 01a, MON 02]).

### 2.8.1. Le cas métrique

Une instance  $(G, d)$  du problème de voyageur de commerce est une instance du cas métrique (TSP métrique, noté  $\Delta$ TSP dans ce qui suit) si les distances sur les arêtes vérifient l'inégalité triangulaire :  $\forall (x, y, z) \in V, d(xy) + d(yz) \geq d(xz)$ .

LEMME 2.1.–  $MinTSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Min\Delta TSP$  et  $MaxTSP \stackrel{AF}{\Leftrightarrow} Max\Delta TSP$ .

*Preuve.* Considérons la fonction  $\mathcal{K}_1 : (G, d) \mapsto (1, d_{\max})$ ,  $d_{\max} = \max_{e \in E} \{d(e)\}$ ; la réduction  $R_{\mathcal{K}_1}$  est une réduction du TSP général au  $\Delta$ TSP puisque les instances construites vérifient bien  $\forall i, j, k \in V$  l'inégalité triangulaire :  $d_{\mathcal{K}}(ij) + d_{\mathcal{K}}(jk) = 2d_{\max} + d(ij) + d(jk) \geq d_{\mathcal{K}}(ik)$ . ■

### 2.8.2. Ses cousins

Si le TSP métrique vérifie l'inégalité triangulaire, deux nouvelles versions du problème de voyageur de commerce issues de  $\Delta$ TSP la vérifient *presque* ou la vérifient *trop* : certains chercheurs ont introduit ces problèmes appelés *métrique strict* et *métrique relaxé* en paramétrant simplement l'exigence d'inégalité triangulaire. Soit  $\alpha > 0$  un rationnel, on ne demande plus au système  $d$  de distances de vérifier pour trois sommets  $x, y$  et  $z$  du graphe considéré la relation  $d(xz) \leq d(xy) + d(yz)$  mais  $d(xz) \leq \alpha(d(xy) + d(yz))$ . Si  $\alpha$  est strictement inférieur à 1 (on le prendra alors dans l'intervalle  $]1/2, 1[$ <sup>5</sup>), la relation est plus exigeante puisque l'inégalité devient stricte, et l'on note  $\Delta$ STSP ( $S$  pour *Strict*) l'ensemble des instances dont les distances vérifient cette relation ; si en revanche  $\alpha$  est strictement plus grand que 1, c'est que l'on relâche quelque peu la contrainte et l'on note alors  $\Delta$ RTSP ( $R$  pour *Relaxé*) l'ensemble des instances qui vérifient l'inégalité paramétrée.  $\Delta$ STSP étant le plus exigeant et  $\Delta$ RTSP le moins exigeant, on remarque que les instances des trois familles de problèmes  $\Delta$ TSP,  $\Delta$ STSP et  $\Delta$ RTSP sont liées par la relation :

$$I_{\Delta STSP} \subseteq I_{\Delta TSP} \subseteq I_{\Delta RTSP}$$

Aussi, tout résultat d'approximation pour le TSP *métrique relaxé* peut être transporté aux TSP *métrique strict* et *métrique*, tout résultat d'approximation pour le TSP *métrique* peut être transporté au TSP *métrique strict*, et ce quel que soit le type d'approximation considéré. Les versions *minimisation* de ces problèmes ont été étudiées et naturellement, le meilleur résultat classique d'approximation de la famille vaut pour la version stricte, avec un rapport de  $1 - (2\alpha - 1)/(2 - \alpha)$  pour  $\alpha \in [1/2, 2/3]$  et de  $1 - 2\alpha/(3\alpha^2 + 1)$  pour  $\alpha > 2/3$  [BÖC 00] ; le deuxième rapport est, nous l'avons

5. Pour  $\alpha = 1/2$ , la seule valuation possible consiste à mettre la même distance sur toutes les arêtes.

déjà évoqué, de  $2/3$  [CHR 76] pour la version classique, tandis que la version relaxée a été montrée approximable à  $2/(3\alpha^2)$  [BÖC 02]. Or, nous allons voir qu'une fois de plus, le rapport différentiel lisse les problèmes, faisant taire leurs divergences.

**LEMME 2.2.**— *Les problèmes  $\text{Min}\Delta_\alpha\text{RTSP}$ ,  $\text{Min}\Delta\text{TSP}$  et  $\text{Min}\Delta_\alpha\text{RTSP}$  d'une part et les problèmes  $\text{Max}\Delta_\alpha\text{RTSP}$ ,  $\text{Max}\Delta\text{TSP}$  et  $\text{Max}\Delta_\alpha\text{RTSP}$  d'autre part, sont équivalents du point de vue de leur approximation différentielle.*

*Preuve.* Nous montrons les deux séries de réductions affines :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Min}\Delta_\alpha\text{RTSP} & \overset{\text{AF}}{\propto} & \text{Min}\Delta\text{TSP} & \overset{\text{AF}}{\propto} & \text{Min}\Delta_\alpha\text{STSP} \\ \text{Max}\Delta_\alpha\text{RTSP} & \overset{\text{AF}}{\propto} & \text{Max}\Delta\text{TSP} & \overset{\text{AF}}{\propto} & \text{Max}\Delta_\alpha\text{STSP} \end{array}$$

Le principe reste le même, il consiste à transformer le jeu de distances  $d$  en un jeu  $d'$  par une transformation affine. De  $\Delta\text{RTSP}$  à  $\Delta\text{TSP}$  pour commencer, il s'agit de trouver une transformation telle que les distances  $d$  et  $d'$  vérifient :  $d(xz) \leq \alpha(d(xy) + d(yz)) \Rightarrow d'(xz) \leq d'(xy) + d'(yz)$ . Tentons l'expérience avec  $d'$  défini comme étant, sur chaque arête  $e$ , la somme de la distance initiale  $d(e)$  et d'une constante  $k$ , à déterminer ; ainsi  $d'(xz) \leq d'(xy) + d'(yz) \Leftrightarrow d(xz) + k \leq d(xy) + d(yz) + 2k$ . Nous voulons donc pouvoir déduire de la relation  $d(x, z) \leq \alpha(d(xy) + d(yz))$  l'inégalité  $d(xz) \leq d(xy) + d(yz) + k$ , ce qui nous permettrait d'établir la relation  $\alpha(d(xy) + d(yz)) \leq d(xy) + d(yz) + k$ . Ainsi  $k$  doit vérifier pour tout triplet  $\{x, y, z\}$  :  $k \geq (\alpha - 1)(d(xy) + d(yz))$ . En posant  $k = 2(\alpha - 1)d_{\max}$ , on est assuré du résultat.

De  $\Delta\text{TSP}$  à  $\Delta\text{STSP}$  à présent : selon le même principe, nous cherchons une constante  $h$  telle que la relation  $d(x, z) \leq d(xy) + d(yz)$  induise l'inégalité :  $d'(xz) \leq \alpha(d'(xy) + d'(yz)) \Leftrightarrow d(xz) + h \leq \alpha(d(xy) + d(yz) + 2h)$ . Cela revient à demander  $d(xy) + d(yz) \leq \alpha(d(xy) + d(yz)) + 2h\alpha - h \Leftrightarrow d(xy) + d(yz)(1 - \alpha) \leq h(2\alpha - 1)$ .

En posant  $h = 2d_{\max}(1 - \alpha)/(2\alpha - 1)$ , on obtient bien ce que l'on cherchait et la preuve du lemme est complète. ■

### 2.8.3. Le cas bivalué

Pour les problèmes de type  $(\text{TSP}ab, a < b)$ , les arêtes du graphes ne peuvent prendre que la valeur  $a$  ou  $b$ . Dans le cadre du rapport différentiel, tous les problèmes de voyageur de commerce bivalués se ramènent au cas  $\text{TSP}12$  pour lequel le parcours d'une arête coûte soit 1, soit 2.

Ce cas ultime du cas métrique a fait, en classique, l'objet de nombreuses études. [PAP 93] nous apprend notamment qu'il est APX-complet, approximable à  $7/6$  ; en

revanche, on sait aussi qu'on ne peut l'approcher à mieux de 5381/5380 [ENG 99]. Si les distances sont asymétriques (c'est-à-dire que les distances de deux arêtes  $(a, b)$  et  $(b, a)$  peuvent différer), MinTSP12 est approximable à 17/12 [VIS 92], mais on ne peut atteindre  $2805/2804 - \varepsilon$  pour aucun  $\varepsilon$  strictement positif [ENG 99]. Enfin, même en le réduisant à des graphes denses, MinTSP12 n'admet pas de PTAS [FER 99].

LEMME 2.3.—  $\text{MinTSPab} \stackrel{\text{AF}}{\leftrightarrow} \text{MinTSP12}$  et  $\text{MaxTSPab} \stackrel{\text{AF}}{\leftrightarrow} \text{MaxTSP12}$ .

*Preuve.* Utiliser la transformation  $(G, d) \mapsto (1/(b-a), (b-2a)/(5b-a))$ . ■

#### 2.8.4. Le cas général

Désignons par TSP1 la restriction du problème de voyageur de commerce aux instances pour lesquelles  $d_{\min} = \min_{e \in E} \{d(e)\} = 1$  ; la proposition suivante, en établissant l'équivalence entre MinTSP (resp., MaxTSP) et MinTSP1 (resp., MaxTSP1), nous permettra de toujours supposer  $d_{\min} = 1$ .

LEMME 2.4.—  $\text{MinTSP} \stackrel{\text{AF}}{\leftrightarrow} \text{MinTSP1}$  et  $\text{MaxTSP} \stackrel{\text{AF}}{\leftrightarrow} \text{MaxTSP1}$ .

*Preuve.* Utiliser la transformation  $(G, d) \mapsto (1, 1 - d_{\min})$ . ■

LEMME 2.5.—  $\text{MinTSP} \stackrel{\text{AF}}{\leftrightarrow} \text{MaxTSP}$  et  $\text{MinTSPab} \stackrel{\text{AF}}{\leftrightarrow} \text{MaxTSPab}$ .

*Preuve.* Utiliser la transformation  $(G, d) \mapsto (-1, d_{\min} + d_{\max})$ . ■

Le lemme 2.5 met en évidence une différence importante entre l'approximabilité du TSP en classique et en différentiel. Il est bien connu qu'en approximation classique, MinTSP ne peut être approché à moins de  $2^{p(n)}$  où  $p$  est un polynôme quelconque (ceci peut être facilement démontré par une transformation simple du résultat de [SAH 76]), tandis que MaxTSP est approximable à 5/7 si le vecteur des distances est symétrique, à 38/63, sinon [RAO 94]. En revanche, comme le montre le lemme 2.5, les deux problèmes sont affinement équivalents (et par conséquence équi-approximables) pour l'approximation différentielle.

Le théorème suivant récapitule les résultats démontrés dans cette section.

THÉORÈME 2.1.— *Les problèmes et familles TSP, TSP1,  $\Delta$ TSP,  $\Delta_\alpha$ RTSP et  $\Delta_\alpha$ STSP sont tous totalement équivalents (dans leurs versions minimisation et maximisation) quant à leur degré d'approximation différentielle. Les problèmes et familles TSPab et TSP12 sont tous totalement équivalents (dans leurs versions minimisation et maximisation) quant à leur degré d'approximation différentielle.*

## 2.9. Conclusion

La recherche en termes de rapport différentiel est encore récente, et les liens entre les différentes classes d'approximation classiques, différentielles et logiques, leur positionnement relatif dans la hiérarchie des problèmes de NPO, ne sont pas encore bien établis, contrastant avec la connaissance que l'on en a en approximation classique. Par exemple, nous ne savons actuellement comment se situent sur l'échelle différentielle certains problèmes-clefs en approximation classique tels MaxSat et Max3-Sat, ni n'avons déterminé de problèmes-clefs dans le cadre différentiel, problèmes *complets* dessinant les frontières, *pour autant que*  $P$  soit différent de  $NP$ , entre les classes d'approximation différentielle.

Les rapports étant différents, ils n'expriment forcément pas la même description de  $NP$  et la difficulté relative des problèmes vis-à-vis de leur degré d'approximabilité ; il est cependant instructif de voir comment une réduction classique entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  se traduit parfois en différentiel par une réduction de  $\Pi$  à une version *plus difficile* de  $\Pi'$  : nous pensons notamment, mais cela reste à démontrer, que la L-réduction générique proposée dans [PAP 91] de tout problème de MaxSNP à Max3-Sat pourrait être vue, sous l'angle différentiel, comme une réduction affine de tout problème  $\Pi$  de MaxSNP à MaxMaximal( $k$ )3-Sat où MaxMaximal( $k$ )3-Sat désigne la restriction de Max3-Sat aux optima  $k$ -locaux du problème,  $k$  dépendant du nombre d'opérateurs du prédicat  $\phi$  descriptif des éléments des solutions de  $\Pi$ . Les réductions mettent en relation pour l'analyse classique les solutions de l'instance initiale  $I$  avec des « bonnes » solutions de l'instance image  $f(I)$ . Il est courant que la transformation  $f$  « grossisse » le problème en y introduisant des « mauvaises » solutions, la preuve en est la restriction de l'ensemble  $Sol_{\Pi'}(f(I))$  que font certains chercheurs à un sous-ensemble  $S_{\Pi'}(f(I))$  qui soit *plus représentatif* de l'ensemble initial de solutions  $Sol_{\Pi}(I)$  [AUS 95b, YAN 97]. Or, en différentiel, la prise en compte de la pire solution interdit d'éluder ces mauvaises solutions : la réduction exhibe dans le cas différentiel une *homothétie* entre les deux ensembles de solutions  $Sol_{\Pi}(I)$  et  $Sol_{\Pi'}(f(I))$  qui doit considérer des solutions dans toute l'envergure de  $Sol_{\Pi'}(f(I))$ , quand le rapport classique se contente de translater  $Sol_{\Pi}(I)$  sur une partie pertinente de  $Sol_{\Pi'}(f(I))$ , en délaissant ainsi toute une partie. Donnons pour illustration deux preuves de complétude dans MaxSNP proposées dans [PAP 91] que nous nous sommes amusés à regarder sous l'angle différentiel : les L-réductions de MaxIS à Max2-Sat et de Max $k$ -Sat- $B$  à MaxIS- $(B + k - 2)$  se transforment en réductions affines de MaxIS à MaxMaximal2-Sat (on entend par *Maximal* la restriction de l'ensemble des solutions aux affectations qui sont optima 1-locaux), de Max $k$ -Sat- $B$  à MaxMaximalIS- $(B + k - 2)$  (on entend par *Maximal* la restriction de l'ensemble des solutions aux stables maximaux). Ces réflexions et les réductions abordées dans ce document peuvent donner l'impression qu'en différentiel, deux problèmes sont soit affinement liés, soit non comparables ; cette impression est bien évidemment fausse, de nombreuses réductions, notamment des réductions continues, ayant déjà été établies [DEM 98, DEM 99b]. Il s'agit cependant bien d'une mise en avant du degré



supérieur de difficulté de rapprochement non trivial de deux problèmes en différentiel, parce que ce rapport exige une proximité plus forte qu'en classique entre les espaces de solutions. Ainsi, il est possible que l'on fasse, sous l'angle de ce rapport, apparaître plus de familles de problèmes, sans nécessairement être en mesure de rapprocher et regrouper ces familles en termes de classes. Un obstacle essentiel à l'établissement d'un résultat de complétude en approximation différentielle est le fait que pour certains problèmes de NP, la notion même de *pire solution* est mal définie : prenons pour exemple le problème CDFA (*Consistent Deterministic Finite Automata*), décrit en particulier dans [SIM 90] ; il s'agit, sur un alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$  et étant donnés deux ensembles de mots  $P \subseteq \Sigma^*$  et  $N \subseteq \Sigma^*$ , de concevoir un automate déterministe fini capable d'accepter les mots de  $P$ , mais pas ceux de  $N$ , à l'aide d'un minimum d'états (tout autre mot de  $\Sigma^*$  pouvant être accepté ou non). Qui pourrait donner en toute rigueur et sans équivoque le nombre d'états d'un automate déterministe fini acceptant  $P$  et non  $N$  avec le plus grand nombre d'états possible ? Ce que l'on veut exprimer ici, c'est l'idée que la définition (ou la connaissance que l'on en a) des problèmes  $\Pi = (\max, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi)$  ou  $\Pi = (\min, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi)$  de NPO est parfois trop faible ou trop imprécise pour permettre d'appréhender la réalité cachée derrière les solutions optimales du problème  $\overline{\Pi} = (\min, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi)$  ou  $\overline{\Pi} = (\max, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi)$ .

Les difficultés évoquées ci-dessus (et la surprenante frilosité de la communauté scientifique à l'égard de cette ouverture du champ d'investigation de la discipline) ne doivent pourtant pas décourager les recherches sur cette voie. D'une part, l'approche différentielle se justifie d'elle-même dans le cadre de la résolution approchée avec garantie de performance : pour certaines décisions, se savoir aussi loin de la pire solution que proche de la solution optimale ( $\delta_\Pi(I, T) \geq \omega_\Pi(I)/2 + \beta_\Pi(I)/2$ ) peut être plus crucial que de se savoir à moitié de l'optimum ( $\rho_\Pi(I, T) \geq \beta_\Pi(I)/2$ ). D'autre part, s'il était besoin de la défendre, il suffirait pour y parvenir de se remémorer nombre d'algorithmes approchés pour ce rapport qui ont été trouvés [DEM 98], certains se basant sur la définition syntaxique des problèmes [MON 01b], certains égalant et améliorant même les meilleurs résultats classiques connus pour les problèmes concernés (MaxTSP, MaxHPP, Max $f$ -depthSTP, voir [MON 01a, MON 01c, MON 01d, MON 02]), d'autres permettant d'en approcher qui sont non approximables à moins que  $P$  n'égale NP en classique (MinC, voir [DEM 94b]), d'autres encore parvenant même à des schémas différentiels [DEM 99a]. Par ailleurs, la réduction affine est un outil qui, en établissant des classes d'équivalence, permet de regarder comme un seul des problèmes que l'on aurait pu considérer comme différents, réduisant en quelque sorte la taille de NPO, sous le regard différentiel.

Il faudrait ainsi réfléchir à une définition de NPO qui soit non pas artificielle, mais cohérente avec l'approche différentielle au sens de la caractérisation de la pire solution, pour élargir comme il se doit la perspective différentielle d'un simple outil d'évaluation des algorithmes et des problèmes à une vision complète de l'approximation polynomiale et de l'appréhension de NPO.

## Chapitre 3

# Optimum local garanti

### 3.1. Quelques concepts

#### 3.1.1. Qu'est-ce qu'un algorithme de recherche locale ?

Avant de parler d'optima locaux, il faut avoir défini une notion de proximité : les fonctions voisinage nous permettent de le faire.

**DÉFINITION 3.1.**— (*Voisinage*) Soit  $\Pi$  un problème d'optimisation, un voisinage  $\mathcal{V}$  pour  $\Pi$  est une fonction qui à toute solution  $s$  de toute instance  $I$  de  $\Pi$  associe un sous-ensemble  $\mathcal{V}(I, s)$  de solutions autour de  $s$  ; les éléments de  $\mathcal{V}(I, s) \setminus \{s\}$  sont appelés solutions voisines de  $s$ .

Étant donné un voisinage  $\mathcal{V}$  sur  $\Pi$ , un optimum local d'une instance  $I$  n'est autre qu'une solution au moins aussi bonne que ses voisins. Attention, on ne cherche pas une solution optimale sur un sous-ensemble statique, mais une solution optimale sur un ensemble *centré autour de cette solution* : il s'agit donc d'un sous-ensemble évolutif en fonction de la solution courante et l'optimalité locale ne se définit pas à partir d'un sous-ensemble défini *a priori* mais à partir de la solution considérée et des voisins qu'elle désigne, pour une structure de voisinage donnée.

**DÉFINITION 3.2.**— (*Optimum local*)  $\tilde{s}$  est optimum local de  $I$  relativement à  $\mathcal{V}$  si et seulement si  $\forall s \in \mathcal{V}(I, \tilde{s}), m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, s)$ .

Disposant d'un problème et d'un voisinage, il est facile de déterminer un optimum local. Partant d'une solution, on explore son voisinage à la recherche d'une éventuelle meilleure solution, et ainsi de suite jusqu'à ce que la solution courante n'ait pas de meilleur voisin : c'est un optimum local. Cette recherche est formalisée sous le nom de LSA (*Local Search Algorithm*) : algorithme de recherche locale.

DÉBUT

```

(1)  $s_1 = \mathcal{A}_\Pi(I)$  ;
(2)  $s = s_1$  ;
(3)  $OK \leftarrow \text{FAUX}$  ;
(4) TANT QUE  $\neg OK$  FAIRE
(5)     déterminer  $\mathcal{V}(I, s)$  ;
(6)     s'il existe  $s' \in \mathcal{V}(I, s)$  telle que  $m_\Pi(I, s') \succ m_\Pi(I, s)$ 
(7)         ALORS  $s = s'$  ;
(8)         SINON  $OK = \text{VRAI}$  ;
(9)     FIN SI
(10) FIN TANT QUE
(11) retourner  $s$ 
FIN

```

**Figure 3.1.** L'algorithme *LSA*3.1.1.1. *LSA – algorithme de recherche locale*

Étant donné un problème  $\Pi$  à résoudre, un voisinage  $\mathcal{V}$  pour  $\Pi$  et un algorithme polynomial approché  $\mathcal{A}_\Pi$  pour  $\Pi$ , un *algorithme de recherche locale* se déroule selon la description donnée par la figure 3.1.

EXEMPLE 3.1.– Une illustration toute simple de mise en œuvre de *LSA* est donnée par la recherche de solutions maximales ou minimales : une solution maximale (resp., minimale) vis-à-vis d'une certaine propriété  $P$  est un ensemble tel que tout ensemble qui le contient strictement (resp., tout sous-ensemble strict) ne vérifie plus  $P$  ; il s'agit donc d'une solution réalisable telle que l'ajout (resp., le retrait) de tout élément rendrait la solution résultante non réalisable. Ces solutions, souvent discutées, sont assez naturelles puisqu'obtenues par des algorithmes gloutons particuliers qui incarnent les stratégies les plus basiques qu'il soit et que l'on pourrait traduire ainsi : « prendre le vide et ajouter tant que possible » pour un problème de maximisation, « prendre le tout et enlever tant que possible » pour un problème de minimisation.

Cette stratégie, appliquée au problème de stable maximum sur un graphe  $G(V, E)$ , est décrite par la figure 3.2.

La solution initiale, le vide, est bien réalisable et obtenue en temps polynomial (algorithme  $\mathcal{A}_{IS}$ ). Par ailleurs, le voisinage sous-entendu considère comme solutions voisines d'un ensemble de sommets  $U$  donné tous les sous-ensembles de  $V$  contenant  $U$  plus un sommet,  $U$  moins un sommet (bien que la recherche se fasse explicitement sur les solutions de type  $U$  plus un sommet puisque l'on cherche à améliorer la solution), ce qui revient formellement à la définition suivante :

$$\forall U \subseteq V, \mathcal{V}(G, U) = U \bigcup \{U \setminus \{v\} : v \in U\} \bigcup \{U \cup \{v\} : v \in V \setminus U\}.$$

```

DÉBUT
(1)   $U = \mathcal{A}_{IS}(G) = \emptyset$ ;
(2)   $OK \leftarrow \text{FAUX}$ ;
(3)  TANT QUE  $\neg OK$  FAIRE
(4)      s'il existe  $v \in V \setminus U$  tel que  $U \cup \{v\}$  stable
(5)          ALORS  $U = U \cup \{v\}$ ;
(6)          SINON  $OK = \text{VRAI}$ ;
(7)      FIN SI
(8)  FIN TANT QUE
(9)  retourner  $U$ 
FIN

```

**Figure 3.2.** Recherche d'un stable maximal

Ainsi, avec ces précision sur  $\mathcal{A}_{IS}$  et  $\mathcal{V}(G, U)$ , l'algorithme de la figure 3.2 est bien un LSA.

Ceci-dit, nous avons déjà étudié au cours de ce document un LSA permettant d'obtenir une solution minimale : il s'agit de l'algorithme SOLMIN de l'exemple 2.2 ! La solution initiale consiste à prendre tout l'ensemble, puis on enlève, un par un et tant que possible, c'est-à-dire tant que la solution résultante reste réalisable, des éléments de la solution. Non seulement c'est un exemple d'algorithme de recherche locale, mais en plus il permet d'obtenir de bonnes solutions approchées pour MinSubsetSum ; nous verrons plus tard qu'en réalité, cet algorithme entre pleinement dans le cadre des classes GLO qui nous intéresse essentiellement et sera défini au paragraphe suivant.

#### 3.1.1.2. Complexité d'un LSA

La solution initiale (ligne 1) est obtenue en temps  $p(|I|)$ . À l'intérieur de la boucle TANT QUE (ligne 4), la ligne 5 qui consiste en la construction du voisinage nécessite un temps de l'ordre de  $|\mathcal{V}(I, s)| \times t_{\mathcal{V}}(I)$  si  $t_{\mathcal{V}}(I)$  représente le temps maximum de passage d'une solution à une solution voisine pour le voisinage  $\mathcal{V}$  sur l'instance  $I$ . L'évaluation des voisins demande un temps au plus  $|\mathcal{V}(I, s)| \times t_m(I)$  si  $t_m(I)$  est le temps d'évaluation d'une solution sur l'instance  $I$ , supposé polynomial par définition de NPO. Enfin, la boucle TANT QUE est itérée au plus  $\text{diam}_{\Pi}(I) = |\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|$  fois : les coefficients de la fonction objectif ainsi que les variables étant à valeurs entières, la valeur de la solution augmente si  $\text{opt}_{\Pi} = \max$ , diminue sinon, d'au moins une unité à chaque itération.

#### 3.1.1.3. Conditions nécessaires et conditions suffisantes de polynomialité

Il est nécessaire pour le parcours du voisinage de la solution courante que celui-ci soit de taille polynomiale ; il faut de plus que la construction de tout voisin à partir

de la solution courante soit elle-même polynomiale. On traduit ces exigences par les deux conditions nécessaires :

- 1)  $\exists p$  polynôme tel que  $\forall I, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), |\mathcal{V}(I, s)| \leq p(|I|)$  ;
- 2)  $\exists p$  polynôme tel que  $\forall I, t_\mathcal{V}(I) \leq p(|I|)$ .

Quant au nombre d'itérations de la boucle TANT QUE (ligne (4) de l'algorithme de la figure 3.1), on ne peut s'assurer de sa polynomialité qu'en bornant le nombre d'étapes que nécessiterait le passage d'une solution de valeur  $m_\Pi(I, \mathcal{A}_\Pi(I))$  à un optimum de valeur  $\beta_\Pi(I)$ . Une condition suffisante pour que (4) soit polynomiale est de n'avoir qu'un nombre polynomial de valeurs possibles pour les solutions du problème entre les valeurs  $m_\Pi(I, \mathcal{A}_\Pi(I))$  et  $\beta_\Pi(I)$  ; soit,

- 1) il existe un polynôme  $p$  qui vérifie pour toute instance  $I$  :

$$n(\alpha_I) = |\{m_\Pi(I, s) \succeq \alpha_I, s \in \text{Sol}_\Pi(I)\}| \quad \left. \begin{array}{l} \alpha_I = m_\Pi(I, s_1) \\ \end{array} \right\} \Rightarrow n(\alpha_I) \leq p(|I|)$$

Malheureusement, cette condition n'est pas vérifiable *a priori* en temps polynomial.

Nous distinguons deux façons de vérifier 1 : soit le problème lui-même n'admet qu'un nombre polynomial de valeurs distinctes pour toute instance (c'est notamment vrai si le problème est polynomialement borné), soit c'est à nous qu'il revient de se rapprocher de la valeur optimale en partant d'une bonne solution  $\mathcal{A}_\Pi(I)$ . Effectivement, si la valeur d'une solution optimale est bornée par un polynôme, c'est-à-dire si  $\forall I \in I_\Pi, |\beta_\Pi(I)| \leq p_\beta(|I|)$ , il suffit alors pour rendre la recherche locale polynomiale de partir d'une solution initiale « assez proche de l'optimum », soit de disposer d'un algorithme  $\mathcal{A}_\Pi$  approché à rapport constant  $r$  pour le rapport classique :

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{A}_\Pi(I) \geq r\beta_\Pi(I) \text{ si } \text{opt}_\Pi = \max \\ \mathcal{A}_\Pi(I) \leq r\beta_\Pi(I) \text{ si } \text{opt}_\Pi = \min \end{array} \right\} \Rightarrow |\mathcal{A}_\Pi(I) - \beta_\Pi(I)| \leq |1 - r|\beta_\Pi(I) \leq |1 - r|p_\beta(|I|)$$

Ces réflexions nous mènent aux conditions suffisantes suivantes :

- 1)  $\exists p$  polynôme tel que  $\forall I, \text{supp}_\Pi(I) \leq p(|I|)$  ;
- 2)  $\Pi \in \text{APX}$  et  $\beta_\Pi(I)$  est polynomial.

Cette discussion nous aura enseigné que l'on ne peut assurer *a priori* l'efficacité en temps d'un algorithme de recherche locale : cela dépend fortement du problème (ou de

la restriction d'un problème général à une famille d'instances particulières) traité ainsi que de la définition de voisinage considérée. Ce point est un champ d'investigation à lui seul dont nous donnerons quelques clefs au chapitre 7, discutant les principaux travaux et résultats quant à la difficulté d'obtention d'optima locaux dès lors que l'on s'éloigne du cadre polynomialement borné [KLA 96, KRE 89, YAN 97].

REMARQUE 1.— Dans l'idée d'améliorer le temps d'exécution d'un LSA ou la qualité de l'optimum local qu'il procure, des interventions peuvent être faites à différents niveaux : celui de la *solution initiale* (partir d'une *bonne* solution, d'une solution *facilement améliorable*, d'une solution à *rapport constant de l'optimum*...), ou encore celui du *choix du voisin améliorant* (*première* solution améliorante, *meilleure* solution améliorante, autres critères génériques ou spécifiques).

### 3.1.2. Voisinages *h-bornés*

Le voisinage est la notion centrale de ce chapitre puisque c'est elle qui définit la localité ; or, un voisinage n'est autre qu'un ensemble de points autour d'une solution donnée. Cependant, notre but étant de construire à partir de ces voisinages des algorithmes polynomiaux, nous ne nous intéresserons naturellement qu'à des voisinages polynomiaux, c'est-à-dire qu'une solution, quel que soit le problème traité, aura un *nombre polynomial de voisins*. Aussi faudra-t-il à l'avenir s'en tenir à cette nouvelle définition du voisinage.

DÉFINITION 3.3.— Soit  $\Pi$  un problème de NPO, un voisinage sur  $\Pi$  est une fonction  $\mathcal{V} : I_{\Pi} \times \text{Sol}_{\Pi} \rightarrow \mathcal{P}(\text{Sol}_{\Pi})$  qui à toute solution  $s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)$  de toute instance  $I \in I_{\Pi}$  associe un sous-ensemble  $\mathcal{V}(I, s) \subseteq \text{Sol}_{\Pi}(I)$  de solutions de  $I$  contenant  $s$ , de taille au plus  $p_{\mathcal{V}}(|I|)$  où  $p_{\mathcal{V}}$  est un polynôme.

Par ailleurs, nous souhaitons définir une famille de voisinages qui permette de reconnaître une classe de problèmes dont la spécificité serait d'avoir de bons optima locaux relativement à un rapport d'approximation donné. Reprenons alors la remarque faite en [AUS 95b] concernant la définition fort générale de voisinage que nous venons de donner : si  $\Pi$  est dans la classe  $\text{APX}[\mathcal{R}]$  pour un certain algorithme  $\mathcal{A}$ , la fonction qui à toute instance  $I$  et toute solution  $s$  associe l'ensemble  $\mathcal{V}(I, s) = \{s, \mathcal{A}(I)\}$  est bien un voisinage, conformément à la définition que nous venons d'en donner ; or, tout optimum local pour ce voisinage faisant au moins aussi bien que la solution  $\mathcal{A}(I)$ , il garantit le même rapport constant d'approximation que  $\mathcal{A}$  et cela, quel que soit le rapport considéré. Une telle définition nous mènerait ainsi à considérer simplement les classes  $\text{APX}[\mathcal{R}]$  alors que l'on souhaiterait justement par l'étude des optima locaux révéler des propriétés structurelles de ces classes ! Il faut donc trouver une définition pertinente pour la *reconnaissance* de problèmes dont les optima locaux auraient un *bon* ou un *mauvais comportement* vis-à-vis des rapports d'approximation. Enfin, il faut également pour être en mesure de construire ces voisinages savoir quelle est, d'un

point donné, la visibilité que l'on s'offre de l'ensemble des solutions. Nous avons vu dans le paragraphe 3.1.1 que la mise en œuvre d'un LSA polynomial était conditionnée par le nombre de voisins d'une solution mais aussi par le temps de construction d'un voisin à partir de toute solution. Les voisinages manipulés en recherche opérationnelle, quel que soit le cadre de recherche (*méthode taboue comme approximation polynomiale*), suivent souvent le principe qui consiste à obtenir les voisins d'une solution en changeant un nombre constant de composantes de celle-ci (*ajout/suppression de sommets pour des problèmes de couverture, échange d'arêtes pour des problèmes de tournées...*). Ou dit autrement, à partir d'une solution donnée, on borne la visibilité de l'ensemble des solutions à une distance d'un certain nombre, constant, de transformations de la solution courante. Ces voisinages peuvent être regroupés sous le formalisme des *voisinages  $h$ -bornés* proposés dans [AUS 95b], qui offrent une réponse à ces exigences et que nous définissons à présent. Mais avant de manipuler la notion de borne, il faut définir une *distance* entre les solutions des instances des problèmes de NPO.

**DÉFINITION 3.4.**—  $\forall \Pi \in \text{NPO}, \forall I \in I_\Pi, \forall s, t \in \text{Sol}_\Pi(I), d(s, t) = \|s - t\|_1 = \sum_{i=1}^{|I|} |s_i - t_i|$ .

**DÉFINITION 3.5.**— Soient  $\Pi$  un problème de NPO et  $h$  une constante, le voisinage  $\mathcal{V}_\Pi^h$   $h$ -borné pour  $\Pi$  est défini en toute solution  $s$  comme l'ensemble des solutions au plus  $h$ -distantes de  $s$  :  $\forall h, \forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), \mathcal{V}_\Pi^h(I, s) = \{t \in \text{Sol}_\Pi(I) : d(s, t) \leq h\}$ .

Par abus de langage, on qualifiera de  $h$ -borné tout voisinage  $\mathcal{V}$  contenu dans un voisinage  $h$ -borné, soit toute fonction  $\mathcal{V}$  vérifiant :  $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), \mathcal{V}(I, s) \subseteq \mathcal{V}_\Pi^h(I, s)$ . Lorsque l'on parlera, pour une constante  $h$  et un problème  $\Pi$  donnés, du voisinage  $h$ -borné sans autre précision, on se référera à tout  $\mathcal{V}_\Pi^h$ . Pour une constante universelle  $h$  et un problème  $\Pi$  de NPO, soit  $I$  une instance de  $\Pi$ , le nombre de solutions  $h$ -distantes d'une solution quelconque  $s \in \text{Sol}_\Pi(I)$  est majoré par un polynôme en la taille de l'instance :

$$|\{t \in \text{Sol}_\Pi(I) : d(s, t) \leq h\}| \leq \sum_{i=1}^h \binom{p(|I|)}{i} \leq p(|I|)^{h+1}$$

où  $\forall p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq q \leq p$  :

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

Enfin, la construction d'une solution voisine à toute solution de toute instance demande un temps constant : les voisinages  $h$ -bornés remplissent les conditions nécessaires de déroulement polynomial d'un algorithme de recherche locale présentées dans la section précédente.

EXEMPLE 3.2.— Le problème du voyageur de commerce consiste à déterminer, sur un graphe complet  $G(V, E)$  arêtes-valué à  $n$  sommets, un tour de moindre coût, le coût d'une solution étant donné par la somme des coûts des arêtes qui la constituent. Pour plus de clarté, on note ici  $[i, j]$  l'arête d'extrémités  $i$  et  $j$ ; les variables du problème sont alors les  $m = n(n - 1)/2$  variables booléennes  $s_\ell$  associées aux arêtes  $e_\ell = [u_\ell, v_\ell]$  du graphe  $G$  à qui l'on prête la signification suivante :

$$\forall \ell = 1, \dots, m, s_\ell = 1 \Leftrightarrow \text{l'arête } e_\ell \text{ est prise dans la solution}$$

Une solution  $s$  du problème est donc un vecteur de  $\{0, 1\}^m$  et une telle solution est réalisable si les arêtes correspondant aux composantes non nulles de  $s$  forment un tour.

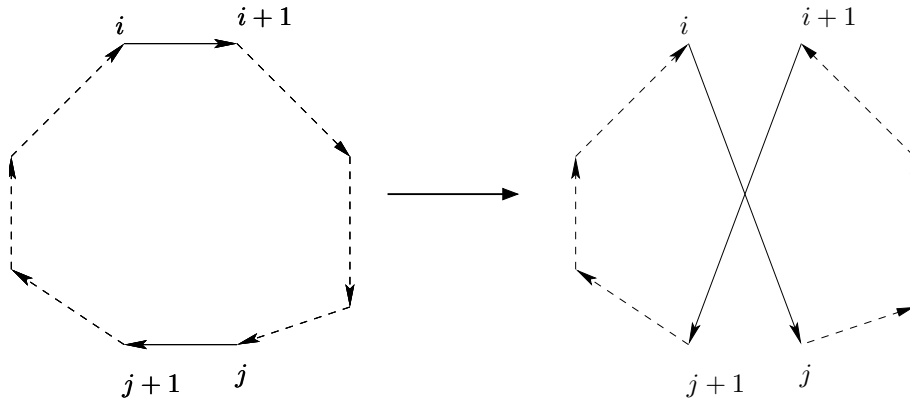


Figure 3.3. le voisinage 2-opt

Nous présentons pour ce problème le voisinage 2-opt, qui consiste à échanger deux arêtes d'un tour contre les arêtes croisées (voir figure 3.3). Prenons pour illustration le tour  $T = (1, 2, 3, \dots, n - 1, n, 1)$  qui correspond à l'affectation  $s$  définie par :

$$\forall \ell = 1, \dots, m, s_\ell = 1 \Leftrightarrow [u_\ell, v_\ell] = [u_\ell, u_\ell + 1] \text{ ou } [u_\ell, v_\ell] = [n, 1]$$

Soient deux sommets  $i$  et  $j > i$ , ils ont comme sommets adjacents dans le tour  $T$  les sommets  $i + 1$  et  $j + 1$ . En échangeant les arêtes  $[i, i + 1]$  et  $[j, j + 1]$  contre les arêtes  $[i, j]$  et  $[i + 1, j + 1]$ , on obtient un nouveau tour  $T'$  voisin de  $T$  pour le voisinage 2-opt :

$$T' = (1, 2, \dots, i - 1, i, j, j - 1, \dots, i + 2, i + 1, j + 1, j + 2, \dots, n - 1, n, 1)$$

Ce tour correspond à la solution  $s'$  définie par :

$$\forall \ell = 1, \dots, m \begin{cases} 1 - s_\ell & [u_\ell, v_\ell] \in \{[i, i + 1], [i, j], [j, j + 1], [i + 1, j + 1]\} \\ s_\ell & \text{sinon} \end{cases}$$



Ce voisinage est 4-borné puisque que d'un voisin à l'autre ne change l'affectation que de quatre variables.

### 3.2. Les classes GLO[R]

Dans cette section, on s'intéresse exclusivement aux structures de voisinages  $h$ -bornés. [AUS 95b] introduit la classe GLO des problèmes polynomialement bornés de NPO qui garantissent la qualité de leurs optima locaux ; cette étude s'est révélée fort enrichissante quant à la connaissance de la nature de NPO puisque les auteurs sont parvenus à établir des résultats de classes. Mais avant d'en venir à l'évocation de tels résultats, définissons déjà la notion d'optimum local garanti.

**DÉFINITION 3.6.**— Soit  $R \in \{\rho, \delta\}$  une mesure d'approximation, un problème  $\Pi$  garantit pour  $R$  la valeur de ses optima locaux s'il existe pour une constante  $r \in ]0, 1]$  et un entier  $h$  un voisinage  $h$ -borné  $\mathcal{V}$  tel que tout optimum local  $\tilde{s}$  vis-à-vis de  $\mathcal{V}$  de toute instance  $I$  réalise un rapport d'approximation  $R_{\Pi}(I, \tilde{s})$  d'au moins  $r$ .

**DÉFINITION 3.7.**— Soit  $R \in \{\rho, \delta\}$  une mesure d'approximation, un problème  $\Pi$  est dans GLO[R] s'il garantit la qualité de ses optima locaux et si l'on sait, pour le voisinage qui permet d'établir cette garantie, déterminer un optimum local en temps polynomial.

Comme à l'habitude, on note GLO pour le rapport classique et GLO[ $\delta$ ] pour le rapport différentiel. Plus précisément encore, on désigne pour tout entier  $h$  par GLO( $h$ ) et GLO[ $\delta$ ]( $h$ ) les ensembles de problèmes garantissant la qualité de leurs optima locaux, respectivement pour les rapports classique et différentiel, vis-à-vis d'un voisinage  $h$ -borné. Dans les classes GLO[R], il faut distinguer deux choses : les *optima locaux de qualité garantie* (ce que l'on pourrait qualifier de *Strict-GLO*) et la *garantie d'obtention d'un optimum local en temps polynomial* ; le but restant de trouver des solutions approchées en temps polynomial, nous nous restreindrons toujours pour les classes GLO[R] aux instances des problèmes pour lesquelles on sait trouver un optimum local en temps polynomial. C'est dans cet esprit que Ausiello et d'Atri [AUS 95b] ont placé GLO dans NPO-PB, car cette restriction est suffisante à la déduction de PTAA à rapport constant à partir du bon comportement global des optima locaux du problème général considéré. La majeure partie des résultats obtenus sont ainsi donnés pour des problèmes polynomialement bornés (ou la restriction aux instances polynomialement bornées de problèmes) de NPO : c'est, le plus souvent, cette condition qui sera testée pour s'assurer qu'un problème ayant de bons optima locaux soit dans GLO ou GLO[ $\delta$ ]. Les recherches menées par d'autres auteurs en matière de complexité des LSA et qui seront abordées au chapitre 7 laissant peu d'espoir de déroulement polynomial hors de ce cadre, la restriction aux instances polynomialement bornées, bien que d'apparence grossière, ne semble pas, aux lumières de ces travaux, si restrictive que cela.

### 3.3. Exemples simples pour voisinages 1-bornés

Nous présentons ici des problèmes dont les optima locaux pour un voisinage 1-borné ont un rapport d'approximation constant, pour les mesures classique et différentielle. Pour beaucoup, ces solutions sont les solutions maximales ou minimales selon qu'il s'agisse de problèmes de maximisation ou de minimisation. Nous avons déjà défini les notions de maximalité et de minimalité au cours de l'exemple 3.1 et montré (du moins pour le cas du stable) que la recherche de ces solutions n'était autre qu'une mise en œuvre de LSA ; nous allons un peu plus loin dans ce paragraphe, en caractérisant d'une part le voisinage considéré comme voisinage  $h$ -borné, en montrant d'autre part que les algorithmes qui permettent d'obtenir de telles solutions, bien que naïfs, sont déjà pour certains problèmes des algorithmes approchés à rapport constant.

THÉORÈME 3.1.–

$$\left. \begin{array}{ll} i) & \text{MaxCut} \\ ii) & \text{MinDS-B} \\ iii) & \text{MaxIS-B} \\ iv) & \text{MinVC-B} \end{array} \right\} \in \text{GLO} \cap \text{GLO}[\delta]$$

Tous ces problèmes se posent sur des graphes simples  $G(V, E)$  supposés connexes et admettent comme solution des sous-ensembles  $U$  de sommets de  $V$ . Remarquons au préalable que les problèmes de maximisation pour lesquels la pire des solutions a une performance nulle ( $\omega_{\Pi}(G) = 0 \ \forall G$ ) sont équi-approximables vis-à-vis des deux rapports d'approximation puisque les deux mesures coïncident alors ; or, c'est justement le cas des problèmes MaxCut et MaxIS-B avec  $U = \emptyset$  comme pire solution de valeur nulle. Remarquons également que tous ces problèmes sont polynomialement bornés puisque la taille d'un sous-ensemble de sommets (resp., d'arêtes pour MaxCut) est bornée par la taille de l'ensemble de sommets (resp., des arêtes) :  $\max\{\omega_{\Pi}(G), \beta_{\Pi}(G)\} \leq |V|$  (resp.,  $|E|$ ). De plus, on a pour MaxIS et MaxCut la solution triviale  $U = \emptyset$  de valeur nulle, pour MinVC et MinDS la solution  $U = V$  de valeur  $|V|$ .

Une solution est donc un sous-ensemble ou plutôt, un vecteur  $s \in \{0, 1\}^{|V|}$  représentant ce sous-ensemble :  $s_u = 1 \Leftrightarrow u \in U$ . Sur ces solutions, le voisinage 1-borné considère comme solutions voisines d'une solution  $s \in \{0, 1\}^{|V|}$  toutes les solutions dont l'affectation d'au plus une composante diffère de  $s$ . Autrement dit, ce voisinage considère comme solutions voisines d'un sous-ensemble  $U \subseteq V$  tous les sous-ensembles de sommets obtenus à partir de  $U$  en lui ajoutant ou lui retirant un sommet. Ce voisinage désigne comme optima locaux pour les problèmes MaxIS, MinDS et MinVC les solutions maximales et minimales.

Considérant donc pour voisinage  $\mathcal{V}$  le voisinage 1-borné, nous allons évaluer la performance des optima locaux de ces différents problèmes pour  $\mathcal{V}$ . L'appartenance

de chacun de ces problèmes à GLO a été montrée dans [AUS 95b] par l'entremise de ces mêmes optima locaux.

PROPOSITION 3.1.—

- 1)  $MaxCut \in GLO[\delta]$ ;
- 2)  $MinDS-B \in GLO[\delta]$ ;
- 3)  $MaxIS-B, MinVC-B \in GLO[\delta]$ .

*Preuve du point 1.* Pour ce problème, les mesures classique et différentielle sont une seule et même mesure ; aussi reprenons-nous ici, dans un simple but illustratif, la démonstration de [AUS 95b]. Soit  $G(V, E)$  un graphe et soit  $U$  un sous-ensemble de sommets. On rappelle que le problème MaxCut de coupe maximum consiste à déterminer un ensemble de sommets  $U \subseteq V$  qui maximise le nombre d'arêtes entre les ensembles  $U$  et  $\overline{U}$  où  $\overline{U}$  désigne l'ensemble  $V \setminus U$  complémentaire à  $U$  dans  $V$ . On note pour tout couple  $(U_1, U_2)$  de sous-ensembles de  $V$   $\langle U_1, U_2 \rangle$  l'ensemble des arêtes reliant un sommet de  $U_1$  à un sommet de  $U_2$  et  $|\langle U_1, U_2 \rangle|$  la cardinalité de cet ensemble.

L'ensemble  $U$  est un optimum local si et seulement si le changement d'affectation d'un sommet  $u$  de  $U$  à  $\overline{U}$  ou de  $\overline{U}$  à  $U$  n'améliore pas la solution, soit si  $U$  vérifie :

$$\begin{aligned} \forall u \in \overline{U}, \quad |\langle \{u\}, \overline{U} \rangle| &\leq |\langle \{u\}, U \rangle| \\ \forall u \in U, \quad |\langle \{u\}, U \rangle| &\leq |\langle \{u\}, \overline{U} \rangle| \end{aligned} \tag{3.1}$$

L'expression [3.1] implique :

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \overline{U}} |\langle \{u\}, \overline{U} \rangle| + \sum_{u \in U} |\langle \{u\}, U \rangle| &\leq \sum_{u \in \overline{U}} |\langle \{u\}, U \rangle| + \sum_{u \in U} |\langle \{u\}, \overline{U} \rangle| \\ \Leftrightarrow 2|\langle \overline{U}, \overline{U} \rangle| + 2|\langle U, U \rangle| &\leq 2|\langle \overline{U}, U \rangle| \\ \Leftrightarrow |E| - m_{Cut}(G, U) &\leq m_{Cut}(G, U) \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $m(G, U) \geq |E|/2$ . De la relation  $\beta(G) \leq |E|$  on déduit alors le rapport :

$$\delta(G, U) = \frac{m_{Cut}(G, U)}{\beta_{Cut}(G)} \geq \frac{1}{2}$$

et ceci conclut la preuve du point 1 de la proposition.

*Preuve du point 2.* Le graphe  $G$  est à degré borné par  $B$  (tout sommet a au plus  $B$  voisins). Un ensemble dominant est un sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  qui vérifie :

$$\forall x \in \overline{U}, \quad |\langle \{x\}, U \rangle| \geq 1 \tag{3.2}$$

L'objectif est de déterminer un ensemble dominant  $U$  de taille minimum. La suite de la preuve repose sur les remarques suivantes.

REMARQUE 2.–  $U$  dominant  $\Rightarrow |U| \geq |V|/(B+1)$ . En effet, l'expression [3.2] implique  $|\overline{U}| \leq |\langle U, \overline{U} \rangle| = \sum_{u \in U} |\langle \{u\}, \overline{U} \rangle| \leq B|U|$ . L'expression précédente avec  $|\overline{U}| = |V| - |U|$  conclut la preuve de la remarque.

REMARQUE 3.– Si  $U$  est un ensemble dominant minimal, alors  $\overline{U}$  est un ensemble dominant. En effet, le graphe  $G$  étant supposé connexe, tout sommet  $y \in U$  est relié à l'ensemble  $U$  ou son complémentaire  $\overline{U}$ ; or, si  $y$  n'est relié qu'à des sommets de  $U$ ,  $U \setminus \{y\}$  est toujours dominant, ce qui contredirait la minimalité de  $U$  :  $y$  est donc relié à au moins un sommet de  $\overline{U}$ , autrement dit «  $\forall u \in U, |\langle \{u\}, \overline{U} \rangle| \geq 1$  ».

REMARQUE 4.–  $U$  dominant minimal  $\Rightarrow |U| \leq B|V|/(B+1)$ . En effet par la remarque 3,  $\overline{U}$  est dominant, et d'après la remarque 2 :  $|\overline{U}| \geq |V|/(B+1)$  qui implique  $|U| \leq B|V|/(B+1)$ .

Avec  $\beta_{DS} \geq |V|/(B+1)$  (l'optimum est lui-même dominant),  $\omega_{DS} = |V|$  (la pire solution consiste à prendre tous les sommets) et  $|U| \leq B|V|/(B+1)$ , on obtient le rapport  $\delta_{DS}(G, U) = (\omega_{DS} - |U|)/(\omega_{DS} - \beta_{DS}) = (n - |U|)/(n - \beta_{DS}) \geq 1/B$ . Ceci termine la preuve du point 2 de la proposition.

*Preuve du point 3.* Le graphe  $G$  est toujours à degré borné par  $B$ . Un stable est un ensemble de sommets deux à deux non adjacents, une couverture est un ensemble  $U$  de sommets tel que l'une au moins des deux extrémités de toute arête de  $E$  se trouve dans  $U$ . Pour MaxIS, il s'agit de déterminer un stable de taille maximum; d'autre part, pour MinVC, une couverture de taille minimum. Ces deux problèmes sont deux expressions d'un seul puisque le complémentaire de tout stable est une couverture et le complémentaire de toute couverture est un stable :

$$U \text{ stable} \Leftrightarrow \langle U, U \rangle = \emptyset \Leftrightarrow E = \langle \overline{U}, V \rangle \Leftrightarrow \overline{U} \text{ couverture}$$

Encore une fois, ces deux problèmes étant liés par une transformation affine de leur fonction objectif, ils sont totalement équivalents sous l'angle du rapport différentiel :  $\text{MaxIS} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MinVC}$  et  $\text{MaxIS-}B \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MinVC-}B$ .

Or, l'appartenance de MaxIS- $B$  à la classe GLO a été montrée par dominance d'un stable maximal dans [AUS 95b], avec un rapport d'approximation de  $1/B + 1$  : on déduit de ce résultat l'appartenance des deux problèmes MaxIS- $B$  et MinVC- $B$  à la classe GLO $[\delta]$ , par les voisinages 1-bornés, pour un rapport différentiel de  $1/B + 1$ . L'argument de ce rapport classique s'appuie sur la remarque suivante.

REMARQUE 5.–  $U$  stable maximal  $\Rightarrow U$  dominant. En effet, tout sommet  $u$  de  $\overline{U}$  est relié à un sommet de  $U$ , sinon  $u$  pourrait être intégré au stable  $U$ , contredisant sa maximalité.

De fait, on obtient de la remarque 2 la relation  $U$  dominant  $\Rightarrow |U| \geq |V|/(B+1)$  qui permet de conclure  $|U| \geq n/(B+1) \geq \beta_{IS}/(B+1)$ . Ceci termine la preuve du point 3 et de la proposition. ■

Ce rapport peut être amélioré à  $1/B$  en considérant un stable optimal  $U^*$ . Notons  $U_+ = U \setminus U^*$  et  $U_+^* = U^* \setminus U$ ; tout sommet  $u$  de  $U_+^*$  est relié à un sommet de  $U_+$  : on sait déjà que  $u$  est relié à un sommet  $v$  de  $U$ , et par stabilité de  $U^*$ , ce sommet  $v$  ne peut être dans  $U \cap U^*$  ! En rapportant ainsi la relation de  $U$  à  $\bar{U}$  à une relation de  $U \setminus U^*$  à  $U^* \setminus U$ , on obtient :

$$|U_+| \geq \frac{|U_+^*|}{B} \Rightarrow B|U| \geq B|U_+| + |U \cap U^*| \geq |U_+^*| + |U \cap U^*| = \beta_{IS}$$

Enfin si  $B$  n'est plus seulement une borne mais le nombre exacte de sommets adjacents à tout sommet, soit dans le cas de graphes  $B$ -réguliers, le rapport d'approximation différentiel de tout optimum 1-local des problème de *Stable* et de *Couverture de sommets* est porté, pour des graphes connexes, à  $2/(B+1)$ . Effectivement, on remarque alors que, pour la couverture de sommets, toute solution d'une instance  $I$  doit intégrer au moins  $m/B$  sommets pour couvrir tout  $E$ , chaque sommet permettant de couvrir au plus  $B$  arêtes ; or, dans le cadre de graphes  $B$ -réguliers, les nombres  $m$  et  $n$  d'arêtes et de sommets sont liés par la relation :  $2 \times m = 2|E| = \sum_{j=1}^n d(v_j) = B \times n$ . Ainsi, de  $\beta_{VC}(I) \geq m/B$  on déduit  $\beta_{VC}(I) \geq n/2$ , et une couverture minimale  $U$ , qui est toujours de taille au plus  $n \times B/(B+1)$  par dominance de  $\bar{U}$ , réalise un rapport différentiel de :  $\delta_{VC}(I, U) = (n - |U|)/(n - \beta_{VC}(I)) \geq 2/(B+1)$ .

### 3.4. Limite des voisinages $h$ -bornés

Considérons le problème MinDS, sans borne sur le degré des sommets. Pour le voisinage 1-borné, les optima locaux de MinDS ne garantissent aucun rapport puisque l'on peut construire une famille  $(G_n)_{n \geq 1}$  de graphes en étoile de façon à exhiber sur cette famille une suite d'optima locaux  $U_n$  tels que :

$$\rho_{DS}(G_n, U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } \delta_{DS}(G_n, U_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Effectivement, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le graphe  $G_n$  est défini,  $\forall n \geq 1$ , par  $G_n = (\{r\} \cup V_n, E_n)$  avec :

$$\begin{cases} V_n &= \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ E_n &= \{r\} \times V_n \end{cases}$$

et que l'on considère la solution approchée  $U_n = V_n$  de valeur  $n$ , alors  $\beta_{DS}(G) = 1$  pour  $U^* = \{r\}$  et  $\omega_{DS}(G) = n+1$  pour  $U_W = \{r\} \cup V_n$ . Ceci implique  $\rho_{DS}(G_n, U_n) = \delta_{DS}(G_n, U_n) = 1/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Pourtant, il suffit simplement d'élargir le voisinage 1-borné  $\mathcal{V}(G, U)$  à une solution supplémentaire pour obtenir un rapport différentiel de  $1/2$  : la solution complémentaire  $\overline{U} = V \setminus U$ . L'ensemble de voisins  $\mathcal{V}'(G, U) = \mathcal{V}(G, U) \cup \{\overline{U}\}$  reste polynomial en taille comme en temps de construction et tout optimum local  $U$  au sens de  $\mathcal{V}'$  nous assure toujours, en tant qu'optimum 1-local, la dominance de  $\overline{U}$ , mais aussi  $|U| \leq |\overline{U}| \Rightarrow |U| \leq |V|/2$ .

Cet exemple illustre l'intérêt que l'on pourrait avoir à considérer conjointement une solution  $s$  et sa solution complémentaire  $\overline{s} = V - s$ , à la fois proches étant le miroir l'une de l'autre, et éloignées puisqu'elles ne coïncident sur aucune composante. La famille des voisinages du type  $\mathcal{V}(I, s) \cup \mathcal{V}(I, \overline{s})$  ou  $\mathcal{V}(I, s) \cup \{\overline{s}\}$  pour un voisinage  $h$ -borné  $\mathcal{V}$  est une extension du concept de voisinage  $h$ -borné qui intègre cette notion de complémentarité : on s'intéresse aux solutions distantes de  $h$  ou  $p(|I|) - h$  au lieu des seules solutions  $h$ -distantes de la solution courante. De tels voisinages ont été définis et exploités dans [ALI 97] et semblent être une source d'inspiration prolifique pour la conception d'algorithmes approchés par la recherche locale. Une définition de tels voisinages et leur application aux problèmes de satisfaisabilité seront présentées au chapitre 5.

### 3.5. Réductions préservant l'approximation locale

Qui dit classe dit réduction : nous l'avons vu, la réduction est un outil puissant qui permet d'ordonner les problèmes à l'aide de classes en fonction de leur complexité de résolution mais aussi, de façon plus atomique, de déduire des résultats d'approximation d'un problème à un autre. Le but étant de préserver l'appartenance aux classes GLO[R], il faut pouvoir transposer à la fois une structure de voisinage et un rapport de performance d'un problème à un autre. Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, nous voulons une réduction de  $\Pi$  à  $\Pi'$  qui permette, si  $\Pi'$  garantit la qualité de ses optima locaux pour un voisinage  $\mathcal{V}'$ , de déduire un voisinage  $\mathcal{V}$  pour  $\Pi$  tel que tous les optima locaux définis par  $\mathcal{V}$  garantissent également un certain niveau d'approximation. Les besoins sont donc de deux ordres : il faut d'une part préserver l'approximation à rapport constant (par exemple par A-réduction), d'autre part pouvoir relier, afin d'être en mesure d'utiliser cette préservation du niveau d'approximation, tout optimum local du problème de départ à un optimum local du problème d'arrivée. On exigera donc du triplet  $(f, g, c)$  les deux conditions de performance et de localité suivantes.

CONDITION 3.1.—

*Performance* :  $R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow R1_{\Pi}(I, g(s')) \geq c(r)$  pour  $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$  ;

*Localité* :  $\tilde{s}$  optimum local de  $I$  implique  $\exists \tilde{s}'$  optimum local sur  $f(I)$  telle que  $m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, g(\tilde{s}'))$ .

Plusieurs moyens de préserver le niveau d'approximation ont déjà été présentés au cours du chapitre précédent à l'occasion du paragraphe 2.6.1.3 ; en revanche, nous n'avons pas encore évoqué la façon de préserver la localité : c'est l'objet de la section suivante. Puisqu'il s'agit de préserver l'optimalité locale par la transposition, d'un problème à un autre, d'une structure de voisinage, nous parlerons de *réduction de voisinage*.

### 3.5.1. Préserver le voisinage

La définition suivante spécifie une notion de réduction de voisinage que nous utiliserons dans la LOC-réduction présentée plus loin.

**DÉFINITION 3.8.**— Une réduction  $R = (f, g)$  entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO est une réduction de voisinage si elle vérifie :  $\forall h' \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{V}'$   $h'$ -borné sur  $f(I)$ ,  $\exists h \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{V}$  voisinage  $h$ -borné sur  $I$  tel que  $\forall I \in I_\Pi$ , les solutions de  $I$  vérifient alors la condition de localité relativement à  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}'$ , c'est-à-dire  $\forall \tilde{s}$  optimum sur  $\mathcal{V}(I, \tilde{s})$ ,  $\exists \tilde{s}'$  optimum sur  $\mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}')$  telle que  $m_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi'}(f(I), g(\tilde{s}'))$ .

#### 3.5.1.1. La LOC-réduction

Nous présentons dans un premier temps la réduction de voisinage proposée par [AUS 95b], que nous désignerons par le terme de LOC-réduction (« LOC » pour *LOCAL*, bien sûr). Les auteurs font la remarque que souvent, une réduction  $(f, g)$  met l'ensemble de solutions  $\text{Sol}_\Pi(I)$  en rapport avec un ensemble bien plus important  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  ; si cela ne nuit pas à la préservation (*en classique tout du moins*) de qualités d'ordre global, il est en revanche préférable pour la préservation des optima locaux de se restreindre à un sous-ensemble  $S_{\Pi'}(f(I))$  de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ , qui soit en quelque sorte *une image combinatoire* de  $\text{Sol}_\Pi(I)$ .

Le rôle d'une LOC-réduction  $(f, g)$  est d'associer à tout voisinage  $h'$ -borné sur  $I$  un voisinage  $h$ -borné sur  $I$ , de sorte de pouvoir, si  $s$  et  $s'$  sont deux solutions de  $\text{Sol}_\Pi(I)$  et de  $S_{\Pi'}(f(I))$  reliées par la fonction  $g$  (soit  $s = g(s')$ ), déduire de l'optimalité locale de  $s$  sur  $\text{Sol}_\Pi(I)$  l'optimalité locale de  $s'$  sur  $S_{\Pi'}(f(I))$ . L'ensemble  $S_{\Pi'}(f(I))$  étant constitué des « bonnes » solutions de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ , il suffit que  $s'$  soit optimum local sur  $S_{\Pi'}(f(I))$  pour l'être sur  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ , permettant ainsi de vérifier comme il se doit la condition de *localité* demandée.

Pour répondre aux exigences d'une réduction de voisinage, la LOC-réduction s'appuie donc sur un sous-ensemble  $S_{\Pi'}(f(I))$  de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  et se munit de quatre propriétés. La *surjectivité* d'abord, qui permet de recouvrir  $\text{Sol}_\Pi(I)$  par  $g(S_{\Pi'}(f(I)))$ , car si l'on se restreint à un sous-ensemble de solutions de l'instance image, on veut néanmoins que celui-ci permette de relier toute solution de l'instance initiale à une solution de l'ensemble  $S_{\Pi'}(f(I))$  considéré :

$$g(S_{\Pi'}(f(I))) = \text{Sol}_\Pi(I) \Leftrightarrow \forall \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I), \exists s' \in S_{\Pi'}(f(I)) : s = g(s')$$

La *monotonie partielle* ensuite, qui traduit la *stricte monotonie* réduite à l'ensemble  $S_{\Pi'}(f(I))$  : si sur cet ensemble une solution est strictement meilleure qu'une autre, il devra en être de même de leurs images par  $g$  sur  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$ . Cela nous permettra de préserver l'optimalité locale des solutions de  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  à  $S_{\Pi'}(f(I))$ , car alors, si une solution  $s$  est au moins aussi bonne qu'une autre solution  $t$  de  $I$ , on déduira des solutions  $g^{-1}(s) \cap S_{\Pi'}(f(I))$  qu'elles sont également, sur  $f(I)$ , au moins aussi bonnes que les solutions de  $g^{-1}(t) \cap S_{\Pi'}(f(I))$ .

REMARQUE 6.– Si la réduction  $(f, g)$  vérifie la propriété de *monotonie partielle* alors on a :  $\forall I \in I_{\Pi}, \forall S' \subseteq S_{\Pi'}(f(I)), \forall s' \in S', g(s')$  *optimum sur*  $g(S')$  implique  $s'$  *optimum sur*  $S'$ .

Une fois les solutions de  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  et  $S_{\Pi'}(f(I))$  reliées de la sorte par leur performances relatives, il faut à présent introduire des outils qui permettent de transporter, de  $f(I)$  à  $I$ , des structures de voisinage. Considérons deux voisinages  $\mathcal{V}'$  et  $\mathcal{V}$ , respectivement pour  $\Pi'$  et  $\Pi$  ; nous rappelons que le but est de relier à tout optimum local  $s$  de  $I$  un optimum local  $s'$  de  $f(I)$  tel que  $s$  est au moins aussi bonne solution que  $g(s')$ , dans l'idée de transporter l'éventuel bon comportement des optima locaux de  $\Pi'$  sur les optima locaux de  $\Pi$ . Pour ce, on définit dans un premier temps la propriété de *localité* qui n'est autre que la *surjectivité de voisinage* réduite à l'ensemble  $S_{\Pi}(f(I))$  : cette propriété exige que l'image  $g(s')$  de toute solution  $t'$  voisine d'une solution  $s'$  de  $S_{\Pi'}(f(I))$  sur  $\mathcal{V}(I, s') \cap S_{\Pi'}(f(I))$  soit également voisine de  $g(s')$  sur  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$ .

Ainsi, on sera en mesure de déduire de l'optimalité locale d'une solution  $s$  de  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  l'optimalité locale des solutions  $g^{-1}(s) \cap S_{\Pi'}(f(I))$  sur  $S_{\Pi'}(f(I))$ .

REMARQUE 7.– Si  $(f, g)$  vérifie la propriété de *localité*, on déduit, pour toute solution  $s'$  de  $S_{\Pi'}(f(I))$ , la relation suivante : si  $g(s')$  est *optimum sur*  $\mathcal{V}(I, g(s'))$  implique  $g(s')$  est *optimum sur*  $g(\mathcal{V}'(f(I), s') \cap S_{\Pi'}(f(I)))$ .

Il ne reste plus alors qu'à se ramener à tout  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ , par la propriété de *dominance*, qui exige que tout optimum local sur  $S_{\Pi'}(f(I))$  soit en réalité optimum local sur tout  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  ; ainsi,  $S_{\Pi'}(f(I))$  suffit bien à relier les optima locaux de  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  à ceux de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ .

DÉFINITION 3.9.– Une réduction  $\mathcal{R} = (f, g)$  entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO est une LOC-réduction si elle vérifie les propriétés suivantes (on note, pour toute instance  $I$  de  $I_{\Pi}$ ,  $I' = f(I)$ ) :

$$1) \forall I \in I_{\Pi}, \exists S_{\Pi'}(I') \subseteq \text{Sol}_{\Pi'}(I') \text{ tel que :}$$

$$\text{Surjectivité}^1 : g(S_{\Pi'}(I')) = \text{Sol}_{\Pi}(I) ;$$

---

1. Pour rapprocher une solution  $s$  de  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  d'une solution  $s' \in g^{-1}(s)$  de  $S_{\Pi'}(I')$ .



*Monotonie partielle*<sup>2</sup> :  $\forall s', t' \in S_{\Pi'}(I')$ , si  $m_{\Pi'}(I', s') \prec m_{\Pi'}(I', t')$ , alors  $m_{\Pi}(I, g(s')) \prec m_{\Pi}(I, g(t'))$  ;

2)  $\forall h'$  constante,  $\exists h$  constante telle que :

*Localité*<sup>3</sup> :  $\forall \mathcal{V}'$  voisinage  $h'$ -borné pour  $\Pi'$   $\exists \mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\Pi$  vérifiant  $\forall I \in I_{\Pi}$ ,  $\forall s' \in S_{\Pi'}(I')$ ,  $g(\mathcal{V}'(I', s') \cap S_{\Pi'}(I')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s'))$  ;

*Dominance*<sup>4</sup> :  $\forall t' \in S_{\Pi'}(I')$ , si  $t'$  est un optimum sur  $S_{\Pi'}(I') \cap \mathcal{V}'(I', t')$ , alors  $t'$  est un optimum sur  $\mathcal{V}'(I', t')$ .

**PROPOSITION 3.2.**– Une LOC-réduction  $R$  entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO est une réduction de voisinage.

*Preuve.* Soient  $\mathcal{V}$  le voisinage  $h$ -borné induit sur  $\Pi$  par la propriété de *localité*,  $I$  une instance de  $I_{\Pi}$  et  $\tilde{s}$  un optimum local de  $I$  relativement à ce voisinage ; on déduit successivement des propriétés de la LOC-réduction :

*surjectivité* :  $\exists \tilde{s}' \in S_{\Pi'}(I')$  telle que  $\tilde{s} = g(\tilde{s}')$  ; ceci implique :

*localité* :  $g(\mathcal{V}'(I', \tilde{s}') \cap S_{\Pi'}(I')) \subseteq \mathcal{V}(I, \tilde{s})$  ; ceci implique :

*monotonie partielle* :  $\tilde{s}'$  optimum sur  $\mathcal{V}'(I', \tilde{s}') \cap S_{\Pi'}(I')$  ; qui implique à son tour :

*dominance* :  $\tilde{s}'$  optimum sur  $\mathcal{V}'(I', \tilde{s}')$ . ■

Considérons à titre d'exemple la proposition suivante donnée dans [PAP 91] et prouvons que la réduction conçue par les auteurs est une LOC-réduction.

**PROPOSITION 3.3.**–  $\text{MinVC-}\Delta \stackrel{\text{LOC}}{\propto} \text{MinDS-}(2 \times \Delta)$ .

*Preuve.* Soit  $I = G(V, E)$  une instance de  $\text{MinVC-}\Delta$  où  $|V| = n$  et  $|E| = m$ , on lui associe l'instance  $I' = H(W, F)$  de  $\text{MinDS-}(2 \times \Delta)$  suivante :

$$\begin{aligned} W &= V \cup V^E, & V^E &= \{v^1, \dots, v^m\} \\ F &= E \cup E^V, & E^V &= \{v_{i_1} v^i, v_{i_2} v^i : e_i = v_{i_1} v_{i_2} \in E\} \end{aligned}$$

avec  $|W| = m+n$  et  $|F| = 3m$ . Si le degré de tout sommet  $v \in V$  de l'instance initiale est borné par  $\Delta$ , le degré de tout sommet  $w \in W$  de l'instance image sera borné par  $2 \times \Delta$  : si  $w = v \in V$ , à chaque fois que  $v$  est adjacent à un sommet  $v'$  dans  $G$ , il sera dans  $H$  adjacent à ce même sommet  $v'$ , ainsi qu'au sommet  $e_i$  représentant dans  $V^E$

2. Pour la préservation de l'ordre relatif des solutions de  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  à  $S_{\Pi'}(I')$ .

3. Pour déduire de l'optimalité locale de  $s$  sur  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  l'optimalité locale de  $s'$  sur  $S_{\Pi'}(I')$ .

4. Pour déduire de l'optimalité locale de  $s'$  sur  $S_{\Pi'}(I')$  l'optimalité locale de  $s$  sur  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$ .

de l'arête  $vv'$ ; si  $w = e_i \in V^E$ , c'est qu'il correspond à une arête  $v_{i_1}v_{i_2}$  de  $G$  et il sera alors seulement adjacent dans  $H$  aux deux extrémités  $v_{i_1}$  et  $v_{i_2}$  de l'arête du graphe initial.

Les couvertures  $U$  des arêtes de  $E$  sur  $G$  sont les ensembles dominants sur  $W$  contenus dans  $V$ , et les solutions comprenant des sommets de  $V^E$  sont toujours dominées par une telle solution : étant donnée une arête  $e_i$ , on peut toujours, pour couvrir les sommets  $v_{i_1}$ ,  $v_{i_2}$  et  $v^i$ , remplacer  $v^i$  par l'une des extrémités  $v_{i_1}$  ou  $v_{i_2}$ . Nous allons donc considérer comme sous-ensemble de solutions réalisables du problème d'ensemble dominant  $I'$  les solutions correspondant à des solutions du problème initial, soit  $S_{DS}(I') = \text{Sol}_{VC}(I)$ . La propriété de surjectivité est ainsi bien vérifiée. On vérifie aussi facilement les propriétés de monotonie partielle et de localité en associant à tout ensemble dominant  $D$  de  $S_{DS}(I')$  la couverture  $g(D) = D$  : la monotonie est clairement vérifiée et pour toute constante  $h$ , les voisins relativement à tout voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné d'une solution  $g(D) = D$  coïncident avec l'image par  $g$  des voisins de  $D$  pour ce même voisinage, soit  $g(\mathcal{V}(I', D) \cap S_{DS}(I')) = \mathcal{V}(I, D) = \mathcal{V}(I, g(D))$ . Enfin, la propriété de dominance est naturellement vérifiée, puisque c'est elle-même qui nous a suggéré le choix de  $S_{DS}(I')$  : un ensemble  $D$  optimum sur  $\mathcal{V}(I', D) \cap S_{DS}(I')$  sera optimum sur tout  $\mathcal{V}(I', D)$ , la considération de sommets de  $V^E$  ne pouvant, au mieux, que ne pas dégrader la solution. ■

Notons que cette réduction, conçue pour préserver les schémas d'approximation et prouver la complétude de  $\text{MinVC-}B$  dans  $\text{MaxSNP}$ , préserve également le rapport constant classique ( $\beta_{VC}(I) = \beta_{DS}(I')$ ), et de tout ensemble dominant  $D$  sur  $I'$  on sait déduire en temps polynomial une couverture  $U$  de taille inférieure ou égale; en revanche, elle ne préserve pas l'approximation différentielle ( $\omega_{DS}(I') = \omega_{VC}(I) + m$ ).

### 3.5.1.2. La $\text{LOC}'$ -réduction

Souvent il est agréable de disposer de différents outils quand il s'agit de tenter de relier les problèmes entre eux; le chapitre 6 consacré aux réductions dans les classes GLO l'illustre bien, les deux réductions LOC et  $\text{LOC}'$  étant utilisées tour à tour. Pour construire notre réduction de voisinage, nous imposons les trois propriétés de surjectivité, de stricte monotonie et de surjectivité relativement aux voisinages  $h$ -bornés. En réalité, la  $\text{LOC}'$ -réduction est une LOC-réduction qui considère non plus un sous-ensemble de solutions de l'instance image, mais l'ensemble entier  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ . Ainsi, la *surjectivité* réduite à  $S_{\Pi'}(f(I))$  redevient la *surjectivité* classique, la *monotonie partielle* une *stricte monotonie* des solutions de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  à leur image par la fonction  $g$  dans  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$ , la *localité* s'étend de la restriction du voisinage d'une solution à  $S_{\Pi'}(f(I))$  au voisinage entier devenant la *surjectivité de voisinage*, et la propriété de *dominance* disparaît. La motivation dans ce cas d'une telle définition de réduction, plus exigeante que la précédente, tient simplement en la simplicité relative qu'elle apporte et le lien plus intime qu'elle traduit entre les ensembles de solutions, lien qu'il est toujours intéressant de mettre à jour.

DÉFINITION 3.10.— Une réduction  $(f, g)$  est strictement monotone si elle vérifie :  $\forall I \in I_\Pi, \forall (s', t') \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ , si le fait que  $m_{\Pi'}(f(I), t') \succ m_{\Pi'}(f(I), s')$ , implique  $m_\Pi(I, g(t')) \succ m_\Pi(I, g(s'))$ .

REMARQUE 8.— Si  $(f, g)$  est strictement monotone alors on a la propriété :  $\forall I \in I_\Pi, \forall S' \subseteq \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), \forall \tilde{s}' \in S', g(\tilde{s}')$  optimum sur  $g(S')$  implique  $\tilde{s}'$  optimum sur  $S'$ .

DÉFINITION 3.11.— Une réduction  $(f, g)$  est voisinage-surjective si et seulement si  $\forall \mathcal{V}'$  voisinage  $h'$ -borné pour  $\Pi'$ ,  $\exists \mathcal{V}$  voisinage  $h$ -borné pour  $\Pi$  tel que  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), g(\mathcal{V}'(f(I), s')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s'))$ .

C'est notamment le cas lorsque  $g$  préserve les distances de l'instance  $f(I)$  à l'instance  $I$ , en posant simplement  $\mathcal{V} = g(\mathcal{V}')$ .

REMARQUE 9.— Si  $(f, g)$  est voisinage-surjective alors les solutions des problèmes sont liées par la relation :  $\forall \tilde{s}' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ , si  $g(\tilde{s}')$  est un optimum sur  $\mathcal{V}(I, g(\tilde{s}'))$ , alors  $g(\tilde{s}')$  est un optimum sur  $g(\mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}'))$ .

DÉFINITION 3.12.— Une  $\text{LOC}'$ -réduction d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  est une réduction  $R$  qui est à la fois surjective, strictement monotone et voisinage-surjective.

PROPOSITION 3.4.— Une  $\text{LOC}'$ -réduction  $R$  entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO est une réduction de voisinage.

*Preuve.* Soit  $\mathcal{V}$  le voisinage  $h$ -borné induit sur  $\Pi$  par la réduction  $R = (f, g)$  et un voisinage  $\mathcal{V}'$   $h'$ -borné pour  $\Pi'$ , et soit  $\tilde{s}$  un optimum local de  $I$  au sens de  $\mathcal{V}$ ; on sait par surjectivité de  $\mathcal{R}$  : «  $\exists \tilde{s}' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) : \tilde{s} = g(\tilde{s}')$  ». Il vient alors : les faits (i)  $\tilde{s}$  optimum sur  $\mathcal{V}(I, \tilde{s})$ , (ii)  $\tilde{s} = g(\tilde{s}')$  et la remarque 9 impliquent  $\tilde{s}$  optimum sur  $g(\mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}'))$ . S'appuyant sur la remarque 8, on en déduit  $\tilde{s}'$  optimum sur  $\mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}')$ . L'équivalence «  $(\tilde{s}' \text{ optimum sur } \mathcal{V}'(f(I), \tilde{s}')) \text{ — } (\tilde{s}' \text{ optimum local de } f(I))$  » conclut alors la preuve de la proposition. ■

Nous avons, dans la définition même des  $\text{LOC}'$ -réductions, cité explicitement la structure de voisinage  $h$ -borné, et cela dans l'unique but d'alléger la notation, étant donné que nous ne travaillons pour l'instant qu'avec cette seule structure de voisinage.

Cependant, la  $\text{LOC}$ -réduction comme la  $\text{LOC}'$ -réduction aspirent à plus d'universalité que cela et l'on voit facilement que de telles transformations peuvent être définies pour toute structure de voisinage considérée. Nous utiliserons notamment au chapitre 6 des  $\text{LOC}'$ -réduction sur des structures de voisinages miroirs  $h$ -bornés, qui considèrent conjointement les solutions *au plus  $h$ -distantes* et *au moins  $n-h$ -distantes* d'une solution donnée, si  $n$  désigne la taille de la solution, et cela pour comparer des problèmes du point de vue de leur appartenance aux classes  $\text{CGLO}[R]$ , définies au chapitre 5, section 5.2.

Remarquons enfin que toute LOC'-réduction est une LOC-réduction ( $S_{\Pi'}(I') = \text{Sol}_{\Pi'}(I')$  pour toute instance  $I$  du problème initial) et qu'en revanche, toute LOC-réduction n'est pas une LOC'-réduction. Effectivement, les propriétés de monotonie, de surjectivité et de localité sont demandées sur un sous-ensemble de l'ensemble des solutions de l'instance d'arrivée et non sur l'ensemble entier, d'où la propriété supplémentaire de dominance : on met en relation les ensembles  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  et  $S_{\Pi'}(I')$  au lieu des ensembles  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  et  $\text{Sol}_{\Pi'}(I')$ . Cela permet de mettre de côté dans l'instance d'arrivée des mauvaises solutions qui pourraient mettre en défaut la stricte monotonie et qui sont non pertinentes pour l'établissement d'un rapport d'approximation. Notons que ce raffinement de la réduction par rapport à une réduction de type LOC' semble malheureusement peu exploitable en différentiel du fait de la prise en compte de la pire solution : les solutions évincées, justement parce qu'elles sont dominées, peuvent dégrader la pire solution, de sorte que la réduction entre les deux instances, si elle est une A-réduction, ne sera que rarement une  $A[\delta]$ -réduction.

Enfin, la strict-PLS-réduction définie dans [JOH 88] pour transporter les algorithmes de recherche locale (du type algorithme de la figure 3.1) d'un problème à un autre est très proche de la réduction de voisinage, avec toutefois la restriction que les voisinages  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}'$  sont fixés : on ne s'intéresse pas alors seulement aux problèmes mais aux couples (problèmes, voisinage) ; cette réduction et de façon plus globale les concepts manipulés dans [JOH 88] seront présentés section 7.1.

### 3.5.2. La réduction dans GLO[R]

Pour obtenir une réduction qui préserve l'appartenance à GLO[R], il suffit maintenant de coupler les propriétés d'une réduction structurelle de voisinage avec celles d'une réduction de performance telle la A-réduction. Puisqu'il existe différentes façons de concevoir de telles réductions (réductions continue et affine pour la performance, LOC- et LOC'-réductions pour la localité), nous placerons ces différents outils sous le terme générique de G-réduction.

**DÉFINITION 3.13.**— Soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se G-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{G[R1, R2]}{\propto} \Pi'$  s'il existe trois fonctions  $f$ ,  $g$  et  $c$  qui vérifient pour deux mesures d'approximation  $R1$  et  $R2$  :

- $(f, g, c)$  est une  $A[R1, R2]$ -réduction ;
- $(f, g)$  est une réduction de voisinage.

**PROPOSITION 3.5.**—  $\forall (\Pi, \Pi') \in \text{NPO}$  si  $\Pi \overset{G[R1, R2]}{\propto} \Pi'$  et  $\Pi' \in \text{GLO}[R2]$ , alors  $\Pi \in \text{GLO}[R1]$ .

*Preuve.* Le problème  $\Pi'$  appartient à GLO[R2] si, pour une certaine constante entière  $h'$  et un voisinage  $\mathcal{V}'$ , il existe une constante strictement positive  $r'$  telle que

tout optimum local  $\tilde{s}'$  de toute instance  $I'$  de  $I_{\Pi'}$  admet un rapport d'approximation  $R2_{\Pi'}(I', \tilde{s}')$  d'au moins  $r'$ . Soit alors  $\mathcal{V}$  le voisinage  $h$ -borné induit sur  $\Pi$  par la réduction de voisinage  $(f, g)$  et le voisinage  $\mathcal{V}'$ , d'après les propriétés de la réduction de voisinage et de la A-réduction, on a :  $\forall I \in I_{\Pi}, \forall \tilde{s} \in \text{Sol}_{\Pi}(I), \tilde{s}$  est optimum local de  $I$  relativement à  $\mathcal{V}$ ; ceci (G étant une réduction de voisinage) implique  $\exists \tilde{s}'$  optimum local de  $f(I)$  pour  $\mathcal{V}'$  telle que  $m_{\Pi}(I, \tilde{s}) \succeq m_{\Pi}(I, g(\tilde{s}'))$  et, par le fait que G est une A-réduction, nous pouvons conclure que  $R2_{\Pi'}(f(I), \tilde{s}') \geq r' \Rightarrow R1_{\Pi}(I, \tilde{s}) \geq R1_{\Pi}(I, g(\tilde{s}')) \geq c(r') > 0$  (les mesures d'approximation étant toujours croissantes en la qualité de la solution). ■

### 3.5.3. Exemples

Nous donnons dans ce paragraphe deux exemples de G-réductions ; la première permet de transférer des propriétés d'approximabilité d'un problème à un autre, tandis que la seconde le fait, pour le même problème, d'une mesure d'approximation à une autre.

PROPOSITION 3.6.—  $\text{MaxSP} \overset{G}{\propto} \text{MaxIS}$ .

*Preuve.* Considérons les problèmes MaxSP et MaxIS et la structure de voisinages  $h$ -bornés ; le problème MaxSP de couplage dans un hypergraphe consiste, étant donnée une collection  $\mathcal{C}$  de sous-ensembles  $C_1, C_2, \dots, C_n$  d'un ensemble  $D$  de taille  $m$ , à extraire un nombre maximum de sous-ensembles  $C_j$  d'intersection vide, soit à maximiser la quantité  $p = |\mathcal{C}'|$  où,  $\mathcal{C}' = \{C_{j_1}, C_{j_2}, \dots, C_{j_p}\} \subseteq \mathcal{C}$  tel que  $\forall k < l \in \{1, \dots, p\}, C_{j_k} \cap C_{j_l} = \emptyset$ .

La réduction naturelle de MaxSP à MaxIS consiste à construire à partir d'une instance  $I = (D, \mathcal{C})$  du premier problème une instance  $f(I) = G(V, E)$  du second en associant à chaque sous-ensemble  $C_j$  de la famille  $\mathcal{C}$  un sommet  $v_j$ , et en créant une arête  $v_j v_{j'}$  à chaque fois que deux ensembles  $C_j$  et  $C_{j'}$  correspondants comporteront des éléments communs :

$$f : I = (D, \{C_1, \dots, C_n\}) \mapsto$$

$$f(I) = G(V, E) = \begin{cases} V &= \{v_1, \dots, v_n\} \\ E &= \{v_j v_{j'} : j \neq j' \text{ et } C_j \cap C_{j'} \neq \emptyset\} \end{cases}$$

La construction de l'instance  $f(I)$  prend un temps au plus  $n^2 m^2$  pour considérer les couples d'ensembles  $(C_j, C_{j'})$  et comparer leurs éléments. Les deux instance  $I$  et  $f(I)$  ont le même ensemble de solutions  $\{0, 1\}^n$  et une telle solution  $s$  sera interprétée de la façon suivante :

–  $s_i = 1 \Leftrightarrow C_i \in \mathcal{C}'$  pour l'instance  $I$  du problème MaxSP ;

–  $s_i = 1 \Leftrightarrow v_i \in U$  pour l'instance  $f(I)$  du problème MaxIS.

Ainsi, la fonction  $g$  est la fonction identité :  $g = Id : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}^n, s \mapsto g(s) = s$ , ce qui induit une réduction évidemment surjective. Par construction, la relation «  $s$  stable dans  $G \Leftrightarrow s$  couplage dans  $\mathcal{C}$  » est vérifiée :

$$\begin{aligned} s \text{ stable dans } G &\Leftrightarrow \forall j < j', \quad s_j \times s_{j'} = 1 \Rightarrow v_j v_{j'} \notin E \\ &\Leftrightarrow \forall j < j', \quad s_j \times s_{j'} = 1 \Rightarrow C_j \cap C_{j'} = \emptyset \Leftrightarrow \\ &s \text{ couplage dans } \mathcal{C} \end{aligned}$$

Les deux instances ont donc même ensemble de solutions réalisables. De plus, toute solution  $s$  a même valeur sur les instances  $I$  et  $f(I)$  (effectivement :  $\forall s \in \{0, 1\}^n, m_{IS}(G, s) = m_{SP}(\mathcal{C}, s) = \sum_{i=1}^n s_i$ ), ce qui est un cas caractérisé de monotonie et même mieux, de A-réduction. Enfin, soit  $k$  une constante, les voisins  $k$ -distants d'une solution  $s$  sont les mêmes sur  $I$  et  $f(I)$  ; aussi en proposant pour tout voisinage  $\mathcal{V}'$  considéré pour MaxIS le voisinage  $g(\mathcal{V}')$  pour MaxSP, on vérifie allègrement la surjectivité de voisinage puisque :  $\forall h, \forall \mathcal{V}'$  voisinage  $h$ -borné,  $\forall s \in \{0, 1\}^n, g(\mathcal{V}'(f(I), s)) = \mathcal{V}(I, s)$ . ■

PROPOSITION 3.7.–  $\forall \Pi \in \text{NPO}$ ,

- 1) si  $\text{opt}_{\Pi} = \max$ , alors  $\Pi \stackrel{G[\rho, \delta]}{\propto} \Pi$  ;
- 2) si  $\text{opt}_{\Pi} = \min$  et  $\exists \alpha \in ]1, +\infty[$  tel que  $\forall I, \omega_{\Pi}(I) \leq \alpha \beta_{\Pi}(I)$ , alors  $\Pi \stackrel{G[\rho, \delta]}{\propto} \Pi$ .

*Preuve du point (1).* Considérer simplement le fait que, pour un problème de maximisation, les rapports d'approximation vérifient,  $\forall I \in I_{\Pi}$ , la relation :

$$\rho_{\Pi}(I) = \delta_{\Pi}(I) + (1 - \delta_{\Pi}(I)) \frac{\omega_{\Pi}(I)}{\beta_{\Pi}(I)}$$

*Preuve du point (2).* Considérer maintenant le fait que, pour un problème de minimisation, les rapports d'approximation vérifient,  $\forall I \in I_{\Pi}$ , la relation :

$$\frac{1}{\rho_{\Pi}(I)} = \delta_{\Pi}(I) + (1 - \delta_{\Pi}(I)) \frac{\omega_{\Pi}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} \quad \blacksquare$$

On peut affiner légèrement le résultat du point (1) de la proposition 3.7 si l'on considère des problèmes  $\Pi$  de maximisation dont les instances vérifient :  $\exists \alpha \in ]0, 1[$  tel que  $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I) \geq \alpha$ . Dans ce cas nous obtenons le résultat suivant (dont la preuve est laissée au lecteur).

PROPOSITION 3.8.– Soit  $\Pi$  un problème de maximisation de NPO. On a pour toute constante  $\alpha \in [0, 1[$  et pour tout  $\mathcal{A}$  algorithme approché pour  $\Pi$  : si,  $\forall I \in I_{\Pi}$ ,  $\omega_{\Pi}(I)/\beta_{\Pi}(I) \geq \alpha$ , alors :

$$\rho_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}} + \alpha (1 - \delta_{\Pi}^{\mathcal{A}})$$

Remarquons que pour  $\alpha = 0$ , on revient au point (1) de la proposition 3.7.

Considérons maintenant une généralisation du  $TSPab$ , notée  $TSP[a, b]$ , où l'on ne se restreint plus au doublon  $\{a, b\}$  mais à tout l'ensemble  $\{a, a + 1, \dots, b\}$ .

Soit une instance  $I$  de  $MaxTSP[a, b]$  ; il est clair que :

$$\begin{aligned} \omega_{MaxTSP[a, b]} &\geq \alpha \times n \\ \beta_{MaxTSP[a, b]} &\leq \beta \times n \\ \frac{\omega_{MaxTSP[a, b]}}{\beta_{MaxTSP[a, b]}} &\geq \frac{a}{b} = \alpha \end{aligned} \quad [3.3]$$

Soit maintenant une instance  $I$  de  $MinTSP[a, b]$  ; on a dans ce cas :

$$\begin{aligned} \omega_{MinTSP[a, b]} &\leq \beta \times n \\ \beta_{MinTSP[a, b]} &\geq \alpha \times n \\ \frac{\omega_{MinTSP[a, b]}}{\beta_{MinTSP[a, b]}} &\leq \frac{b}{a} = \alpha \end{aligned} \quad [3.4]$$

Par la preuve du point (2) de la proposition 3.7, la proposition 3.8, les expressions [3.3] et [3.4] et le lemme 2.5 de la section 2.8 du chapitre 2, nous déduisons facilement la proposition suivante.

PROPOSITION 3.9.—

- $MinTSP[a, b]$  est approximable à rapport classique  $\rho_{MinTSP[a, b]} \leq 2a/(a + b)$  ;
- $MaxTSP[a, b]$  est approximable à rapport classique  $\rho_{MaxTSP[a, b]} \geq (a+b)/2b$ .

### 3.6. GLO et associés première partie

#### 3.6.1. Voisinages miroirs et classe $CGLO[R]$

Quels que soient le problème traité et l'instance considérée, lorsque l'on se promène dans l'ensemble des solutions réalisables et que l'on se situe en une solution  $s$ ,

la vision que l'on a de l'ensemble des solutions est locale et non globale : on ne peut déduire de  $s$  n'importe quelle solution. En réalité, seul nous est visible un nombre *polynomial* de solutions, déductibles de  $s$  à partir de transformations simples. C'est le cas notamment des voisins  $h$ -bornés qui s'obtiennent en changeant au plus  $h$  composantes du vecteur  $s$  pour une constante  $h$ . D'autres solutions cependant sont visibles à partir de  $s$ , tout en restant dans un voisinage de taille constante : par exemple, la solution complémentaire et ses voisins  $h$ -bornés. L'idée est que pour certains problèmes, comme nous allons le voir pour MinDS,  $s$  ou  $\bar{s}$  est toujours une *bonne* solution au sens de l'approximation polynomiale. Ainsi, à partir d'une solution  $s$ , on se permet de changer au plus  $h$  ou au moins  $n - h$  composantes. Si  $s$  est un vecteur de  $\{0, 1\}^n$ , cela revient à considérer simultanément  $2(\sum_{\ell=0}^h C_n^\ell) \leq 2n^{h+2}$  solutions. L'extension de la notion d'optimalité locale aux classes CGLO[R] (*Complementary-GLO*) reste donc  $h$ -bornée, mais étendue aux solutions complémentaires : on regarde simultanément la solution  $s$  et sa solution complémentaire  $\bar{s}$ , ainsi que toute solution  $h$ -distante de  $s$  ou de  $\bar{s}$ .

Soit  $\Pi$  un problème de NPO,  $I$  une de ses instances et  $s$  une solution de  $I$ , on note  $\bar{s}$  la solution complémentaire de  $s$  définie par  $\bar{s} = \vec{1} - s$  où  $\vec{1}$  désigne le vecteur unitaire dans  $\mathbb{R}^{|I|}$ .

**DÉFINITION 3.14.**— *Un voisinage  $\mathcal{V} : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi \rightarrow \text{Sol}_\Pi$  est un voisinage miroir  $h$ -borné s'il existe un voisinage  $h$ -borné  $\mathcal{W}$  tel que  $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), \mathcal{V}(I, s) = \mathcal{W}(I, s) \cup \mathcal{W}(I, \bar{s})$ .*

CGLO[R] désigne alors la classe des problèmes garantissant la qualité de leurs optima locaux relativement à des voisinages miroir  $h$ -bornés. Soit  $R$  une mesure d'approximation, un problème  $\Pi$  de NPO est dans la classe CGLO[R] s'il existe une constante  $h$ , une constante  $r \in ]0, 1]$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  miroir  $h$ -borné pour  $\Pi$  vérifiant :  $\forall I \in I_\Pi, \forall \bar{s} \in \text{Sol}_\Pi(I)$ , si  $\bar{s}$  est un *optimum local* relativement à  $\mathcal{V}$  alors  $R_\Pi(I, \bar{s}) \geq r$ . Comme nous l'avons dit à la section 4.3, la notion de voisinage  $h$ -borné est fortement dépendante du codage des solutions : pour un problème à  $n$  variables, si l'on code une affectation  $T$  non plus sur  $n$  mais sur  $n + 1$  variables binaires en indiquant dans le premier bit  $T_0$  le sens de lecture des  $n$  suivants (si  $T_0 = 1$  l'affectation considérée est  $T_1, \dots, T_n$ , si  $T_0 = 0$  il faut considérer la solution  $1 - T_1, \dots, 1 - T_n$ ), deux solutions complémentaires deviennent 1-distances puisqu'il suffit de modifier  $T_0$  pour opérer le passage au complémentaire. Ainsi les classes CGLO[R] ne sont autre que les classes GLO[R] pour ce nouveau codage. C'est donc toujours avec prudence qu'il faut lire les résultats *négatifs* et *limites* que nous donnons car ils sous-entendent des voisinages  $h$ -bornés particuliers, disons « naturels » au sens de l'interprétation physique que l'on fait des solutions.



### 3.6.2. Optima altérés et GGLO[R]

Avec la classe GGLO[R] (*Generalized-GLO*), on s'intéresse toujours aux optima locaux pour les voisinages  $h$ -bornés, mais vis-à-vis d'une fonction objectif autre que l'objectif du problème, que nous qualifierons d'*objectif altéré* : ce sont les optima locaux vis-à-vis de ce nouvel objectif qui devront garantir un rapport d'approximation constant pour le problème initial.

**DÉFINITION 3.15.**— Soient  $\Pi = (\text{opt}_\Pi, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi)$  un problème de NPO et  $m'_\Pi : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi(I) \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction objectif altérée pour  $\Pi$ , on dénote par  $\Pi' = (\text{opt}_\Pi, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m'_\Pi)$  le problème altéré associé à  $\Pi$  et  $m'_\Pi$ . Soit  $R$  une mesure d'approximation, un problème  $\Pi$  de NPO est dans la classe GGLO[R] s'il existe une constante  $h$ , une constante  $r \in ]0, 1]$ , un voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\Pi$  et une fonction  $m'_\Pi$  qui vérifient :

- 1)  $\Pi' \in \text{NPO}$  ;
- 2)  $\forall I \in I_\Pi$ , si  $\tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I)$  est un optimum local relativement à  $\mathcal{V}$  du problème altéré  $\Pi'$ , alors  $R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r$ .

### 3.6.3. Mixage ou GCGLO[R]

On déduit naturellement ce qui se cache derrière les classes GCGLO[R] (*Generalized-Complementary-GLO*) pour un rapport  $R$  d'approximation : la classe des problèmes garantissant la qualité de leurs optima locaux pour un voisinage *miroir*  $h$ -borné ( $s$  au moins aussi bonne que  $\bar{s}$  au sens de l'objectif  $m_\Pi$ ) et un objectif altéré ( $s$  au moins aussi bonne que toute solution  $s'$  au plus  $h$ -distance de  $s$  au sens d'un objectif  $m'_\Pi$ ). Effectivement, il peut parfois s'avérer intéressant de considérer conjointement un ensemble *étendu* de solutions voisines et une fonction objectif altérée. C'est notamment le cas du problème Max2-CCSP : le rapport d'approximation d'un optimum miroir 1-local pour ce problème n'est que de  $1/4$  quand celui d'un optimum 1-local miroir relativement à une certaine fonction objectif altérée s'élève à  $2/5$ .

**DÉFINITION 3.16.**— Soit  $R$  une mesure d'approximation, un problème  $\Pi$  de NPO est dans la classe GCGLO[R] s'il existe une constante  $h$ , une constante  $r \in ]0, 1]$ , un voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\Pi$  et une fonction  $m'_\Pi$  qui vérifient :

- $\Pi' \in \text{NPO}$  ;  $\forall I \in I_\Pi$ ,  $\forall \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I)$ , si  $m_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m_\Pi(I, \bar{\tilde{s}})$  et  $m'_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m'_\Pi(I, s')$ ,  $\forall s' \in \mathcal{V}(I, \tilde{s})$ , alors  $R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r$ .

Nous aurons l'occasion au chapitre 5 de revenir sur ces classes dérivées de GLO, pour une présentation rapide de quelques travaux majeurs réalisés en la matière, ainsi qu'un exposé de quelques nouveaux résultats.

## Chapitre 4

# Problèmes de NPO dans GLO et GLO[ $\delta$ ]

Par la suite, on désigne par  $\text{GLO}[\mathcal{R}](h)$  l'ensemble des problèmes qui garantissent la qualité de leurs optima locaux pour la mesure d'approximation  $\mathcal{R}$  relativement à une fonction voisinage  $h$ -bornée. Nous nous intéressons dans ce chapitre à des problèmes dont, à notre connaissance, l'appartenance aux classes  $\text{GLO}[\mathcal{R}]$  n'a pas encore fait l'objet d'étude, et nous focalisons plus particulièrement sur le rapport différentiel et la classe  $\text{GLO}[\delta]$ .

### 4.1. Des voisinages 1- et 2-bornés

Une propriété  $P$  est *héréditaire* si elle vérifie  $\forall X$  et  $\forall Y \subseteq X, P(X) \Rightarrow P(Y)$ . De plus, la propriété est dite non triviale si elle est vraie pour une infinité d'ensembles  $X$  et fausse pour une autre infinité. Par exemple, le problème MaxIS ou encore celui de la clique de taille maximum sont des problèmes définis sur des propriétés héréditaires.

Soit  $P$  une propriété héréditaire et  $X$  un ensemble ; une  $P$ -partition de  $X$  est un ensemble  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$  de sous-ensembles de  $X$  qui vérifie les trois propriétés suivantes :

- $\bigcup_{i=1}^q V_i = X$  ;
- $\forall i, j = 1, \dots, q, i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset$  ;
- $\forall i = 1, \dots, q, P(V_i)$ .

Soit  $\Pi$  un problème de NPO dont les instances sont la donnée d'un ensemble  $X$  et éventuellement d'une valuation  $p : X \rightarrow \mathbb{N}$  des éléments de  $X$  ;  $\Pi$  est un *problème*

de partitionnement héréditaire s'il existe une propriété héréditaire  $P$  telle que toute instance  $I$  de  $\Pi$  revient à résoudre un problème du type :

$$\beta_{\Pi}(I) = \min \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha(V_i) : \mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\} \text{ est une } P\text{-partition de } V \right\}$$

où  $\alpha$  est une fonction d'évaluation des ensembles de type indicatrice notée  $\|$ , poids maximum, poids moyen... Le *bin-packing* (MinBP), la coloration (MinC), les problèmes de partition en cliques (MinPCI), en sous-graphes à degré borné, en sous-graphes planaires..., sont tous des problèmes de partitionnement héréditaire. Il s'agit pour tous ces problèmes de partager un ensemble (d'éléments, de sommets) en un nombre minimum de sous-ensembles vérifiant une certaine propriété. Ainsi, le problème de coloration partage les sommets en un minimum de stables quand celui de la partition en cliques les partage en un minimum de cliques; pour le problème de partition en sous-graphes à degré borné, le sous-graphe induit par chaque sous-ensemble de la partition doit être de degré borné par une constante; pour la partition en sous-graphes planaires, les sous-graphes induits doivent être planaires. Enfin, le *bin-packing* relève du rangement d'éléments dans un nombre minimum de boîtes, de sorte que la somme des volumes des objets dans une boîte n'excède pas le volume de la boîte. La stabilité, la clique, la majoration (sur les degrés dans les graphes ou sur le poids d'un ensemble d'éléments), la planarité sont toutes des propriétés héréditaires. Chacun de ces problèmes a fait l'objet de nombreuses études dans son propre cadre qui ont donné lieu à différents algorithmes de résolution approchée; ce sont tous des problèmes-clefs de la recherche opérationnelle. Le problème de coloration, par exemple, a de nombreuses applications dans la conception d'emplois du temps (tournois, examens...) [WER 85, WOO 69]; celui de la partition en sous-graphes planaires (appelé aussi *vertex thickness*) intervient notamment dans la conception de circuits imprimés (voir [MUT 98] pour un tour d'horizon des études liées à ce problème).

**THÉORÈME 4.1.**— Si  $\Pi$  est un problème de partitionnement héréditaire d'évaluation  $\alpha = \|$  alors  $\Pi \in \text{GLO}[\delta]$ .

*Preuve.* Nous allons montrer que tout optimum local pour le voisinage 2-borné réalise un rapport différentiel de 1/2 pour les problèmes de partitionnement héréditaire et que ce rapport est atteint asymptotiquement pour une propriété toute héréditaire non triviale.

Soit  $\Pi$  un problème de partitionnement héréditaire et  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble à  $n$  éléments. Voyant une partition comme une répartition des éléments de  $X$  sur au plus  $n$  ensembles, on peut représenter toute solution  $V_1, V_2, \dots, V_q$  par un vecteur  $s \in \{0, 1\}^{n^2}$  qu'il faut interpréter selon : «  $s_j^i = 1$  » si et seulement si « l'élément  $x_i$  est dans le sous-ensemble  $V_j$  » et qui vérifie :  $\forall i = 1, \dots, n, \sum_{j=1}^n s_j^i = 1$

si  $s$  est une partition et  $\forall j = q+1, \dots, n, \sum_{i=1}^n s_j^i = 0$  si seuls les  $q$  premiers indices sont utilisés.

La valeur d'une solution pour  $\alpha = ||$  est le nombre de sous-ensembles formant la partition et comme ce nombre ne peut excéder la cardinalité  $n$  de l'instance, il s'en suit que  $\Pi$  est évidemment polynomialement borné :  $\forall X \in I_\Pi, \omega_\Pi(X) = |X| = n$ .

Considérons le voisinage  $\mathcal{V}$  qui consiste à passer d'une solution à une solution voisine en changeant l'affectation de deux éléments et soit  $\{V_1, \dots, V_q\}$  un optimum local relativement à ce voisinage.  $\mathcal{V}$  est par définition 1-borné et l'optimalité de la partition  $\{V_1, \dots, V_q\}$  signifie qu'aucune affectation réalisable d'un élément à un autre sous-ensemble n'améliorerait la solution actuelle : en d'autres termes, il n'est pas dans  $\{V_1, \dots, V_q\}$  de singleton que l'on puisse éliminer. Si la solution comporte  $k$  singletons, on suppose qu'il s'agit des  $k$  premiers sous-ensembles  $V_1 = \{v_1\}, \dots, V_k = \{v_k\}$  et l'on remarque que  $P$  étant héréditaire, les sommets  $v_1, \dots, v_k$  seront toujours dans  $k$  ensembles distincts ; en d'autres termes : si  $\forall (i \neq j) \in \{1, \dots, k\}, \neg P(\{v_i, v_j\})$ , alors  $\forall s \in \text{Sol}_\Pi(X), m_\Pi(X, s) \geq k$  et par conséquent,  $\beta_\Pi(X) \geq k$ .

Par ailleurs, les autres sous-ensembles  $V_{k+1}, \dots, V_q$  contenant chacun au moins deux éléments, vérifient  $\sum_{i=k+1}^q |V_i| = n - k \geq 2(q - k)$ , soit  $q \leq (n + k)/2$ . Donc, en conclusion :

$$\delta_\Pi(X, \{V_1, \dots, V_q\}) = \frac{\omega_\Pi(X) - q}{\omega_\Pi(X) - \beta_\Pi(X)} \geq \frac{n - \frac{n+k}{2}}{n - k} = \frac{1}{2}$$

Démontrons que ce rapport est atteint. Soient  $P$  une propriété héréditaire non triviale et  $X_n$  une famille d'ensembles vérifiant  $P$  qui soit strictement croissante pour l'inclusion ; considérant alors la suite d'instances  $I_n = (X_n, P)$  du problème de partitionnement héréditaire  $\Pi$  associé à la propriété  $P$ , on a  $\beta_\Pi(X_n) = 1$  et  $\omega_\Pi(X_n) = |X_n|$ . Or, pour  $I_n$ , toute solution qui partitionne  $X_n$  en des sous-ensembles de tailles deux, plus peut-être un sous-ensemble de taille trois, constitue un optimum local pour les voisinages 2-bornés de valeur  $\lfloor |X_n|/2 \rfloor$ . ■

Ce résultat, par l'apparente naïveté de la solution approchée, n'est cependant pas si anodin puisqu'il égale le rapport obtenu pour le problème de coloration minimum dans [DEM 94b] (monté à 289/360 depuis [DUH 97]) ; mais il laisse surtout augurer de meilleures approximations à l'aide d'une analyse un peu plus fine, avec des voisinages un peu plus grands.

Maintenant soient  $B$  une constante et  $\Pi$  un problème de partitionnement héréditaire, la version  $B$ -bornée de  $\Pi$  est le problème  $\Pi'$  dont les instances consistent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \beta_{\Pi'}(I) = \min_{\mathcal{S}} m_\Pi(I, \mathcal{S}) \\ \mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\} \text{ } P\text{-partition} \\ \forall i = 1, \dots, q, |V_i| \leq B \end{cases}$$

Comme cas particulier du problème  $\Pi$  dont l'appartenance à la classe  $\text{GLO}[\delta]$  vient d'être établie,  $\Pi'$  est également élément de la classe ; or, on remarque facilement que les valeurs d'une pire et d'une meilleure solutions de toute instance  $I$  de  $\Pi'$  sont liées par la relation «  $\omega_{\Pi'}(I) \leq B\beta_{\Pi'}(I)$  » :  $\forall I \in I_{\Pi'}, \beta_{\Pi'}(I) \geq |X|/B = \omega_{\Pi'}(I)/B$ .

Par application immédiate de la proposition 3.7 pour un problème de *minimisation*, on déduit de cette relation la  $G[\rho, \delta]$ -réduction de  $\Pi'$  à lui-même, qui mène directement à la conclusion : les optima 2-locaux  $\tilde{s}$  de toute instance de  $\Pi'$  garantissent un rapport classique  $\rho_{\Pi'}(I, \tilde{s})$  vérifiant :  $1/\rho_{\Pi'}(I, \tilde{s}) \leq 1/2 + (1/2)B \Leftrightarrow \rho_{\Pi'}(I, \tilde{s}) \geq 2/(B+1)$ . Nous avons ainsi le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 4.1.**— Les problèmes de partitionnement héréditaire à taille bornée sont dans  $\text{GLO}$ .

#### 4.1.1. Couverture d'ensembles

Une instance  $I = (C, S)$  du problème de couverture d'ensembles minimum est la donnée d'un ensemble  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  d'éléments à couvrir et d'une famille  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subseteq 2^C$  de sous-ensembles d'éléments de  $C$  d'union  $C$ . Le but est de trouver un ensemble  $\tilde{S} \subseteq S$  de cardinalité minimum qui recouvre  $C$ . On se restreint ici aux instances  $B$ -bornées, c'est-à-dire aux instances  $I = (C, S)$  dont tous les sous-ensembles  $S_i$  de la famille  $S$  vérifient  $|S_i| \leq B$ .

**PROPOSITION 4.1.**—  $\text{MinSC-}B \in \text{GLO}[\delta]$ .

*Preuve.* Nous allons montrer que tout optimum local pour le voisinage 1-borné réalise un rapport différentiel de  $1/(B+1)$ .

La valeur d'une solution  $\tilde{S}$  est donnée par  $m_{\text{SC}}(I, \tilde{S}) = |\tilde{S}|$ . Il s'agit d'un problème polynomialement borné puisque la pire solution, qui consiste à sélectionner tout ensemble de  $S$ , est de valeur  $n$ . Le voisinage 1-borné désigne ici comme voisine d'une solution  $\tilde{S}$  toute sélection  $\tilde{S}'$  dont au plus un sous-ensemble diffère de  $\tilde{S}$  ; les optima locaux pour ce voisinage sont simplement des solutions minimales.

Considérons une couverture  $\tilde{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_p\}$  de taille  $p$  ;  $\tilde{S}$  est une couverture minimale si elle vérifie :

- 1)  $\forall i = 1, \dots, m, \exists j \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $c_j \in S_i$  ;
- 2)  $\forall j = 1, \dots, p, \exists i_j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $c_{i_j} \in S_j$  et  $\forall j' \neq j \in \{1, \dots, p\}, c_{i_j} \notin S_{j'}$ .

La condition 1 traduit la réalisabilité de la solution  $\tilde{S}$ , la condition 2 sa minimalité. Par 2, on sait que l'on peut construire un ensemble  $\tilde{C} = \{c_{i_1}, \dots, c_{i_p}\}$  de  $p$  éléments

```

DÉBUT
   $S_0 \leftarrow \emptyset$ ;
   $C' \leftarrow C$ ;
   $S' \leftarrow S$ ;
  stop  $\leftarrow$  faux;
  TANT QUE  $\neg$ stop FAIRE
    s'il existe  $c \in C'$  vérifiant  $\exists j : (S_j \in S') \wedge (c \in S_j)$ 
      ALORS  $S_0 \leftarrow S_0 \cup \{S_j\}$ ;
       $C' \leftarrow C' \setminus S_j$ ;
       $S' \leftarrow S' \setminus \{S_j\}$ ;
      POUR TOUT  $S_k \in S'$  FAIRE  $S_k \leftarrow S_k \setminus S_j$  FIN POUR
      SINON stop  $\leftarrow$  vrai;
  FIN SI
FIN TANT QUE
retourner  $[I' = (C', S'), S_0]$ ;
FIN

```

**Figure 4.1.** Le processus qui renvoie un ensemble de sous-ensembles compris dans toute solution réalisable et une instance de MinSC-B pour laquelle tout élément est contenu dans au moins deux ensembles

distincts (un élément par sous-ensemble  $S_j$  de la couverture) qui vérifient :  $\forall c_{i'} \in \tilde{C}$ ,  $\exists ! j \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $c_{i'} \in S_j$ . Si l'instance initiale est telle que tout élément  $c_i \in C$  apparaît dans au moins deux sous-ensembles  $S_j$ , alors c'est en particulier vrai des éléments  $c'_1, \dots, c'_{p'}$ ; ceux-ci ne pouvant, par construction, appartenir à un second sous-ensemble de  $\tilde{S}$ , ils apparaissent donc dans les sous-ensembles  $S_{p+1}, \dots, S_n$ , ce qui permet d'établir l'inclusion  $\tilde{C} \subseteq \cup_{j=p+1}^n S_j$ .

Les sous-ensembles  $S_j$  de  $S \setminus \tilde{S}$  étant de taille bornée par  $B$ , on en déduit sur  $p$  la relation :  $p \leq B(n-p) \Leftrightarrow p \leq Bn/(B+1)$ , ce qui nous amène au rapport de performance :

$$\delta_{SC}(I, \tilde{S}) = \frac{\omega_{SC}(I) - p}{\omega_{SC}(I) - \beta_{SC}(I)} \geq \frac{n - \frac{B}{B+1}n}{n} = \frac{\frac{n}{B+1}}{n} = \frac{1}{B+1}$$

Si un certain élément à couvrir  $c_i$  n'apparaît que dans un sous-ensemble  $S_j$ , ce sous-ensemble sera contenu dans toute solution. Aussi, pour se ramener au cas précédent, suffit-il d'appliquer préalablement à l'instance  $I$  un processus qui est illustré dans la figure 4.1 et qui permet d'isoler de tels sous-ensembles.

Le traitement de la figure 4.1 renvoie un ensemble  $S_0$  de sous-ensembles compris dans toute solution réalisable et une instance  $I'$  de MinSC-B pour laquelle tout élément  $c'_i$  est contenu dans au moins deux ensembles  $S'_j$ . Les instances  $I$  et  $I'$  sont

étroitement liées par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{S}' \in \text{Sol}_{\text{SC}}(I') &\Leftrightarrow \tilde{S}' \cup S_0 \in \text{Sol}_{\text{SC}}(I) \\ m_{\text{SC}}(I, \tilde{S}' \cup S_0) &= m_{\text{SC}}(I', \tilde{S}') + |S_0| \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\delta_{\text{SC}}(I, \tilde{S}' \cup S_0) = \delta_{\text{SC}}(I', \tilde{S}')$$

qui suffisent pour terminer la preuve. ■

Si, pour  $j = 1, \dots, n$ , la taille des sous-ensembles  $s_j$  est bornée par  $B$ , une solution optimale devra prendre, pour couvrir les  $m$  éléments de  $C$ , au moins  $m/B$  sous-ensembles. Par ailleurs, si tout élément apparaît dans au plus  $\Delta$  sous-ensembles, la famille  $S$  ne peut disposer de plus de  $\Delta \times m$  sous-ensembles. En conséquence, la valeur  $\beta_{\text{SC}}(I)$  d'une solution optimale sera d'au moins  $m/B \geq n/(B\Delta)$ , ce qui conduit pour tout optimal 1-local au rapport :

$$\delta_{\text{SC}}(I, \tilde{S}) \geq \frac{n - \frac{B}{B+1}n}{n - \frac{n}{B\Delta}} = \frac{1}{B+1} \times \frac{B\Delta}{B\Delta - 1} \quad [4.1]$$

Par ailleurs, d'après la proposition 3.7, puisque  $\omega_{\text{SC}}(I) \leq B\Delta\beta_{\text{SC}}(I)$  pour toute instance  $I$ , il existe une  $G[\rho, \delta]$ -réduction du problème à lui-même, garantissant pour tout optimum local  $\tilde{S}$  un rapport classique :

$$\frac{1}{\rho_{\text{SC}}(I, \tilde{S})} \leq \delta_{\text{SC}}(I, \tilde{S}) + (1 - \delta_{\text{SC}}(I, \tilde{S})) B\Delta$$

Cela nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{\text{SC}}(I, \tilde{S})} &\leq \frac{B\Delta}{(B+1)(B\Delta - 1)} + \frac{B\Delta((B+1)(B\Delta - 1) - B\Delta)}{(B+1)(B\Delta - 1)} \\ &= \frac{B\Delta((B+1)(B\Delta - 1) - (B\Delta - 1))}{(B+1)(B\Delta - 1)} = \frac{B^2\Delta}{B+1} \end{aligned} \quad [4.2]$$

La discussion ci-dessus et les expressions [4.1] et [4.2] introduisent le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 4.2.**—

– Si le nombre de sous-ensembles contenant un élément donné est borné par une constante  $\Delta$ , alors toute solution minimale garantit un rapport différentiel d'approximation minoré par  $B\Delta/((B+1)(B\Delta-1))$ .

– Si le nombre de sous-ensembles contenant un élément donné est borné par une constante  $\Delta$ , alors le sous-problème de *MinSC* correspondant, noté *MinSC-B- $\Delta$* , est élément de GLO, avec un rapport classique d'approximation de toute solution minimale de  $(B+1)/(B^2\Delta)$ .

Considérons à présent les instances pondérées du problème, tout en se bornant à des poids d'ordre constant : on notera *MinW[K]SC* les instances de *MinSC* pour lesquelles les sous-ensembles  $s_j$  de la famille  $S$  sont pondérés par des entiers  $p_j \leq K$ , où  $K$  est une constante. Nous montrons que les preuves faites précédemment permettent en réalité d'établir la qualité des optima 1-locaux, même dans ce cas plus général : cela signifie qu'un optimum local du problème non pondéré est une bonne solution du problème pondéré, la minimalité des solutions qui désigne les optima 1-locaux étant indépendante d'une quelconque pondération.

THÉORÈME 4.2.– *MinW[K]SC-B*  $\in$  GLO[ $\delta$ ].

*Preuve.* Le résultat vient des deux observations suivantes : la différence en valeur, dans le cas pondéré, entre une pire solution et un optimum local  $\tilde{S}$ , est donnée par la somme des poids des sous-ensembles de  $S \setminus \tilde{S}$  et les poids de ces sous-ensembles étant au moins de 1, on écrit naturellement :

$$\omega_{\text{WSC}}(I) - m_{\text{WSC}}(I, \tilde{S}) \geq \omega_{\text{SC}}(I) - m_{\text{SC}}(I, \tilde{S}) \quad [4.3]$$

De même, la différence en valeur, toujours dans le cas pondéré, entre une pire solution et un optimum global  $S^*$ , est donnée par la somme des poids des sous-ensembles de  $S \setminus S^*$  et les poids de ces sous-ensembles étant d'au plus  $K$ , on déduit simplement :

$$\omega_{\text{WSC}}(I) - \beta_{\text{WSC}}(I) \leq K(\omega_{\text{SC}}(I) - \beta_{\text{SC}}(I)) \quad [4.4]$$

Les expressions [4.3] et [4.4] permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} \delta_{\text{WSC}}(I, \tilde{S}) &= \frac{\omega_{\text{WSC}}(I) - m_{\text{WSC}}(I, \tilde{S})}{\omega_{\text{WSC}}(I) - \beta_{\text{WSC}}(I)} \\ &\leq \frac{\omega_{\text{SC}}(I) - m_{\text{SC}}(I, \tilde{S})}{K(\omega_{\text{SC}}(I) - \beta_{\text{SC}}(I))} = \frac{1}{K} \delta_{\text{SC}}(I, \tilde{S}) \end{aligned}$$



ce qui conclut la preuve. ■

REMARQUE 1.— Ce dernier résultat, on peut trivialement le généraliser en différentiel comme en classique à tout problème ensembliste  $\Pi$  dont la version non pondérée évalue ses solutions par leur cardinalité (par exemple : MaxIS, MinVC, MinDS, MinFES). Soit  $\Pi$  un tel problème, on note  $W\Pi$  sa version pondérée ; si l'on introduit des poids compris dans un intervalle  $[k, K]$ , on a toujours :

$$|\omega_{W\Pi}(I) - m_{W\Pi}(I, s)| \geq k |\omega_{\Pi}(I) - m_{\Pi}(I, s)|$$

pour toute solution réalisable  $s$ , et :

$$|\omega_{W\Pi}(I) - \beta_{W\Pi}(I)| \leq K |\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|$$

ce qui nous assure la préservation du rapport différentiel au facteur  $k/K$  près. Pour le rapport classique, il suffit de considérer :

$$\begin{aligned} m_{K\Pi}(I, s) &\leq K \times m_{\Pi}(I, s) \\ \beta_{W\Pi}(I) &\geq k \times \beta_{\Pi}(I) \end{aligned}$$

si  $\Pi$  est un problème de *minimisation*, et :

$$\begin{aligned} m_{W\Pi}(I, s) &\geq k \times m_{\Pi}(I, s) \\ \beta_{W\Pi}(I) &\leq K \times \beta_{\Pi}(I) \end{aligned}$$

si  $\Pi$  est un problème de *maximisation*, pour s'assurer de préserver le rapport d'approximation, au même facteur  $k/K$  près.

Soient maintenant  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  un ensemble et  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$  une famille de sous-ensembles de  $C$  tels que tout élément  $c_i$  apparait dans au plus  $B$  sous-ensembles  $S_j$  ; un *ensemble transversal* (*Hitting Set*) est alors défini comme étant une sélection  $\tilde{C}$  d'éléments de  $C$  qui parcourt tout  $S$  dans le sens où tout sous-ensemble  $S_j \in S$  doit avoir au moins un élément dans  $\tilde{C} : \forall j = 1, \dots, n, S_j \cap \tilde{C} \neq \emptyset$ .

La réduction qui consiste à intervertir les rôles des éléments et des sous-ensembles est une G-réduction dont on déduit immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 4.3.— *MinHS-B*  $\in$  GLO $[\delta]$ .

#### 4.1.2. Ensemble minimum d'arêtes retour

Soit  $G(V, E)$  un graphe simple, le problème d'*ensemble minimum d'arêtes retour*, noté MINFES $[r]$  (*Feedback Edge Set*) consiste à déterminer un sous-ensemble

d'arêtes  $F \subseteq E$  de taille minimum tel que tout cycle de taille au plus  $r$  emprunte au moins une arête de  $F$ . MINFES[ $r$ ] est NP-difficile pour tout  $r \geq 3$  constant, et polynomial pour  $r = |V|$ .

THÉORÈME 4.3.–  $\forall r \geq 3$ , MinFES[ $r$ ]  $\in$  GLO[ $\delta$ ].

*Preuve.* Nous allons montrer que tout optimum local pour le voisinage 1-borné réalise un rapport différentiel de  $1/2$  et que ce rapport est atteint en particulier pour  $r = 3$ .

De façon évidente, on a pour tout graphe  $G(V, E)$   $\omega_{\text{FES}}(G) = |E|$  et  $\beta_{\text{FES}}(G) \geq 0$  : c'est un problème polynomialement borné. Considérons une fois de plus les solutions minimales, optima locaux pour le voisinage 1-borné qui consiste à accepter comme solutions voisines d'une solution  $F$  tous les ensembles d'arêtes obtenus par l'ajout ou le retrait d'une arête à l'ensemble  $F$ . Si  $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_r\}$  désigne l'ensemble des cycles élémentaires sur  $G$  dont la taille est au plus  $r$ , un ensemble minimal  $F = \{e_1, e_2, \dots, e_p\}$  d'arêtes retour vérifie :

- 1)  $\forall i = 1, \dots, r, \exists j \in \{1, \dots, p\}$  tel que  $e_j \in \gamma_i$  ( $F$  ensemble d'arêtes retour) ;
- 2)  $\forall j = 1, \dots, p, \exists i_j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $\gamma_{i_j} \cap F = \{e_j\}$  ( $F$  minimal).

Considérons la famille  $\{\gamma_{i_1}, \dots, \gamma_{i_j}, \dots, \gamma_{i_p}\}$  des cycles qui, selon 2, passent chacun par une unique arête  $e_j = u_j v_j$  de  $F$  ; tout cycle  $\gamma_{i_j}$  contenant au moins trois arêtes, il emprunte deux arêtes distinctes  $t_j u_j$  et  $v_j w_j$  (éventuellement  $t_j = w_j$ ) de  $E \setminus F$  incidentes à  $e_j$ . Soit  $F' = \cup_{j=1}^p \{t_j u_j, v_j w_j\}$  l'ensemble de ces arêtes, comme l'ensemble  $V(F) = \cup_{j=1}^p \{u_j, v_j\}$  des sommets engendrés par les arêtes de  $F$  est constitué d'au moins  $p$  sommets distincts, l'ensemble  $F'$ , en tant qu'ensemble d'arêtes d'extrémité les sommets de  $V(F)$ , contient également au moins  $p$  arêtes distinctes. On en déduit : (i)  $|F'| \geq p$  et (ii)  $F' \subseteq E \setminus F \Rightarrow |E \setminus F| \geq p \Rightarrow |E| - p \geq p \Leftrightarrow p \leq |E|/2$  ; cette dernière relation nous permet de conclure :

$$\delta_{\text{FES}}(G, F) = \frac{\omega_{\text{FES}}(G) - p}{\omega_{\text{FES}}(G) - \beta_{\text{FES}}(G)} \geq \frac{|E| - \frac{|E|}{2}}{|E|} = \frac{1}{2}$$

Considérons maintenant la suite de graphes  $G_n(V_n, E_n)$  où  $V_n = \{v_1, \dots, v_{n+3}\}$  et  $E_n = \{v_1 v_2\} \cup \{v_1 v_i, v_2 v_i : 3 \leq i \leq n+3\}$  ; pour MINFES[3], l'arête  $v_1 v_2$  est optimum global de valeur 1 (car tous les cycles de  $G_n$  ne contenant pas cette arête sont de tailles au moins 4), l'ensemble  $E_n$  pire solution de valeur  $2n+3$ , tandis que l'ensemble  $\{v_1 v_i : 3 \leq i \leq n+3\}$  constitue un pire optimum local pour les voisinages 1-bornés de MINFES[3], de valeur  $n+1$ . ■

#### 4.1.3. Couplage maximum dans un hypergraphe

Rappelons-nous la réduction de la proposition 3.6 (paragraphe 3.5.3). Si l'on se restreint à des graphes à degré bornés par  $B$ , on a immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 4.4.—  $\text{MaxSP-B} \in \text{GLO}[\delta]$ .

#### 4.1.4. Les problèmes d'ordonnancement

Nous considérons les problèmes simples d'ordonnancement de tâches sur  $m$  multiprocesseurs, noté  $\text{MINMS}[m]$  (*Minimum Multiprocessor Scheduling*). Une instance  $I$  de  $\text{MINMS}[m]$  consiste en la donnée de  $n$  tâches  $J_1, \dots, J_n$ , de durées d'exécution respectives  $p_1, \dots, p_n$  (on suppose que la durée d'exécution d'une tâche est indépendante de la machine sur laquelle elle sera effectuée). Une solution consiste en la répartition des tâches sur  $m$  machines  $M_1, \dots, M_m$ , de sorte à minimiser le temps d'exécution de la machine la plus sollicitée (il n'y a pas de contraintes de précédence). Une solution sera représentée par le vecteur  $x \in \{0, 1\}^{nm}$  dont les composantes  $x_j^i$  non nulles correspondent à l'affectation de la tâche  $j$  à la machine  $i$ . On se restreint pour assurer la convergence en temps raisonnable des algorithmes de recherche locale à des poids polynomialement bornés par  $n^k$  où  $k$  est une constante absolue (ne dépendant ni de  $n$  ni de  $m$ ). Nous notons par  $\text{MINMS}[m](k)$  cette variante.

PROPOSITION 4.2.—  $\text{MINMS}[m](k) \in \text{GLO}[\delta]$ .

*Preuve.* Nous allons montrer que tout optimum local pour le voisinage 1-borné réalise un rapport différentiel de  $m/(m+1)$  où  $m$  désigne le nombre de machines, et que ce rapport est atteint.

Considérons une instance  $I$  de  $\text{MINMS}[m](k)$ . La pire solution revient naturellement à placer toutes les tâches sur une même machine, de valeur  $\omega(I) = \sum_{j=1}^n p_j$ , quand une meilleure solution ne pourra jamais faire moins que la durée d'exécution de toute tâche, soit par exemple  $\beta(I) \geq p_1$ . Ainsi, pour des durées bornées par  $n^k$  pour une constante universelle  $k$ , la quantité  $\omega(I) - \beta(I)$  est bien bornée par un polynôme  $(n-1)n^k$  en la taille  $n$  de l'instance. Considérons un optimum local  $x$  relativement au voisinage 1-borné qui accepte comme solution voisine d'une affectation des tâches aux machines toute répartition dont au plus l'affectation d'une tâche diffère, et supposons que la première machine soit la plus chargée, c'est-à-dire qu'elle vérifie, si  $p(M_i)$  désigne la charge de la machine  $M_i$  :  $p(M_1) = \sum_{j=1}^n x_j^1 \times p_j = \max_{i=1, \dots, m} \{p(M_i) = \sum_{j=1}^n x_j^i \times p_j\}$ . On note alors  $1, \dots, l$  les indices des tâches placées dans  $M_1$ . Si l'affectation  $x$  est un optimum 1-local, alors elle vérifie  $\forall i = 2, \dots, m, \forall j = 1, \dots, l$  :

$$p_j + p(M_i) \geq p(M_1) \quad [4.5]$$

$$p(M_i) \geq \frac{1}{2}p(M_1) \quad [4.6]$$

$$\omega(I) = \sum_{j=1}^n p_j \geq \frac{m+1}{2}p(M_1) \quad [4.7]$$

$$p(M_1) \leq \frac{1}{m+1}\omega(I) + \frac{m}{m+1}\beta(I) \quad [4.8]$$

où l'expression [4.6] est conjointement déduite de l'addition des expressions [4.5] pour  $j = 1, \dots, l$  et du fait que l'on peut toujours supposer  $l \geq 2$  (sinon l'optimum local est global) et où l'expression [4.7] est le résultat de l'addition des expressions [4.6] pour  $i = 2, \dots, m$  et de  $p(M_1)$ . Finalement, l'expression [4.8] est impliquée par l'expression [4.7] puisque le temps obtenu par la meilleure solution est nécessairement supérieur ou égal à la durée moyenne de l'ensemble des tâches, d'où le résultat. Considérons maintenant l'instance  $I = (J, p)$  où  $J = \{j_1, \dots, j_{m(m-1)+2}\}$  et  $p$  est défini par  $p_1 = p_2 = m$  et  $\forall i \geq 3, p_i = 1$ . Une solution optimale est obtenue en plaçant une tâche de taille  $m$  et une tâche de taille 1 sur les deux premières machines puis  $(m+1)$  tâches de taille 1 sur toutes les autres machines ; elle est de valeur  $\beta(I) = m+1$ . Par ailleurs, la solution qui place les deux tâches de taille  $m$  sur la première machine et  $m$  tâches de taille 1 sur toutes les autres machines constitue un optima 1-local de valeur  $m(I, x) = 2m$ . Enfin, la pire solution qui place toutes les tâches sur la première machine est de valeur  $\omega(I) = m^2 + m$ . Le rapport de l'optimum 1-local proposé est bien alors exactement de  $1 - 1/(m+1)$ . ■

De la relation  $\beta(I) \geq (1/m) \times \sum_{j=1}^n p_j$ , on déduit  $\omega(I) \leq m \times \beta(I)$ , ce qui permet de conclure avec la preuve du théorème 4.2 :  $m(I, x) \leq 2(1 - 1/(m+1))\beta(I)$  et d'obtenir le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 4.5.**—  $\text{MINMS}[m](k) \in \text{GLO}[\rho]$ .

Le résultat du corollaire 4.5 est plus intéressant qu'il ne paraît. En effet, nous venons de mettre en évidence le premier problème (non polynomial à moins que P n'égal NP) de  $\text{GLO}[\rho] \cap \text{GLO}[\delta]$  dont nous savons qu'il admet un schéma d'approximation polynomial pour l'approximation classique [HOC 87].

#### 4.1.5. Le problème de sous-graphe partiel maximum libre de $H_0$

Le problème de sous-graphe partiel maximum libre de  $H_0$ , MaxPSG  $H_0$ -libre (*Max Partial Subgraph  $H_0$ -libre*), consiste, étant donné un graphe connexe  $H_0$  fixé, à trouver sur un graphe  $G$  le plus grand sous-graphe  $G'$  tel que  $G'$  n'admet pas de sous-graphe partiel isomorphe à  $H_0$  (pour le problème de stable maximum,  $H_0$  est une arête). La valeur d'une solution réalisable  $G'$  est donnée par son nombre de sommets ; la valeur d'une solution optimale sur le graphe  $G$  sera désignée par  $\alpha_{H_0}(G)$ .

Il est intéressant de noter que ces problèmes sont tous NP-difficile dès lors que  $H_0$  contient au moins deux sommets (voir [LEW 78, YAN 78]), tandis qu'ils deviennent triviaux lorsque  $H_0$  est restreint à un sommet : l'unique solution consiste alors à prendre le vide, solution qui, pour les problèmes de cette classe, sera d'ailleurs toujours la pire solution. Autre fait marquant, la majeure partie des propriétés héréditaires

dans les graphes peuvent s'écrire comme une conjonction (éventuellement infinie) de non-inclusions de tels graphes  $H_0$ . Ainsi, la propriété héréditaire *être un graphe planaire* revient à ne pas contenir de sous-graphe partiel isomorphe à des subdivisions de  $K_{3,3}$  ou  $K_5$  (théorème de Kuratowski, se reporter par exemple à l'ouvrage [GON 85] pour de plus amples explications), ou encore la propriété héréditaire *être un graphe sans cycle* équivaut à ne pas comporter de sous-graphe partiel isomorphe à  $(C_n)_{n \geq 3}$  (famille des graphes induits par des cycles élémentaires de taille  $n$ ).

PROPOSITION 4.3. – *MaxPSG*  $H_0$ -libre- $B \in \text{GLO}[\delta] \cap \text{GLO}$ .

*Preuve.* Par la suite, on notera  $\Delta_0$  le plus petit degré du graphe  $H_0$ . De nouveau pour ce problème, les mesures classique et différentielle coïncident, les pires solutions étant données par le graphe vide.

Soient  $G(V, E)$  un graphe à degré borné par  $B$  et  $U$  un sous-ensemble de sommets de  $G$ ;  $U$  est un optimum local pour les voisinages 1-bornés (c'est-à-dire une solution maximale pour l'inclusion) si et seulement si, d'une part, le graphe engendré par  $U$  ne contient pas de sous-graphe partiel isomorphe à  $H_0$  et d'autre part, l'ajout d'un sommet  $v$  de  $V \setminus U$  à  $U$  engendre un graphe contenant un graphe partiel isomorphe à  $H_0$ .

Considérons à présent une solution optimale  $U^*$ ; on note  $U_+^* = U^* \setminus U$  et  $U'$  l'ensemble des sommets de  $U$  qui sont sur un sous-graphe partiel isomorphe à  $H_0$  lorsque l'on ajoute à  $U$  un sommet de  $U_+^*$ . Plus formellement, si  $\mathcal{G}_v$  désigne pour  $v \in U_+^*$  l'ensemble des sous-graphes partiels isomorphes à  $H_0$  dans le graphe engendré par  $U \cup \{v\}$ , alors on définit  $U'$  de la façon suivante :

$$U' = \{w \in U : \exists v \in U_+^*, \exists H_0 \in \mathcal{G}_v, w \in V(H_0)\}$$

où  $V(G)$  désigne, pour un graphe  $G$ , l'ensemble de ses sommets.

La maximalité de  $U$  s'exprime notamment par le fait que tout sommet de  $U_+^*$  engendre au moins un graphe de type  $H_0$  sur  $U' \cup \{v\}$ , autrement dit :  $\forall v \in U_+^*, \mathcal{G}_v \neq \emptyset$ . Enfin, si  $B$  désigne le graphe biparti issu de  $G$  entre les ensembles de sommets  $U'$  et  $U_+^*$ , soit  $B(U', U_+^*, \langle U', U_+^* \rangle)$ , nous déduisons aisément de l'optimalité locale de  $U$  les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall v \in U_+^*, d_B(v) \geq \Delta_0$ ,
- 2)  $\forall v \in U_+^*, d_B(v) \leq B - \Delta_0 + 1$ .

En effet pour le point 1, considérons un sommet  $v$  de  $U_+^*$  : on sait qu'il existe un graphe  $H_0$  de  $\mathcal{G}_v$  dont  $v$  est sommet et dont tous les autres sommets sont par définition dans  $U'$ ; pour constituer un tel graphe,  $v$  est ainsi adjacent à au moins  $\Delta_0$  sommets de  $U'$ . Pour 2, tout sommet  $u$  de  $U'$  étant également sur un graphe  $H_0$  de sommets dans  $U' \cup \{v\}$  pour un certain sommet  $v$  de  $U_+^*$ , il est adjacent à au moins  $\Delta_0$  sommets

de  $U' \cup \{v\}$ , soit à au moins  $\Delta_0 - 1$  sommets de  $U'$ ; puisque  $U'$  est disjoint de  $U_+^*$  et que le degré dans  $G$  est borné par  $B$ , on en déduit que le sommet  $u$  ne peut être relié à plus de  $B - (\Delta_0 - 1)$  sommets de  $U_+^*$ . Avec l'égalité  $\sum_{v \in U'} d_B(v) = \sum_{w \in U_+^*} d_B(w)$ , il nous reste alors à conclure puisque  $\Delta_0 |U_+^*| \leq \sum_{w \in U_+^*} d_B(w) = \sum_{v \in U'} d_B(v) \leq (B - \Delta_0 + 1)|U'|$ :

$$\begin{aligned} \Delta_0 \alpha_{H_0}(G) &= \Delta_0 (|U^* \cap U| + |U_+^*|) \\ &\leq \Delta_0 |U^* \cap U| + (B - \Delta_0 + 1) |U'| \\ &\leq \Delta_0 |U| + (B - \Delta_0 + 1) |U| \leq (B + 1) |U|. \blacksquare \end{aligned}$$

Nous supposons que le rapport d'approximation de ces optima locaux est  $\Delta_0/B$ ; le cas du stable (c'est-à-dire lorsque  $H_0 = K_2$ ), notamment, nous force à l'imaginer : le rapport d'approximation pour les voisinages 1-bornés est alors exactement de  $1/B$  (considérer le graphe biparti complet  $K_{1,B}$ ), puisque le degré minimum  $\Delta_0$  est de 1. Nous montrons que cette conjecture se vérifie également dans le cas de triangles.

**PROPOSITION 4.4.**— *Les optima locaux pour les voisinages 1-bornés du problème MaxPSG  $K_3$ -libre- $B$  garantissent un rapport différentiel de  $2/B$  et ce rapport est atteint.*

*Preuve.* Nous allons simplement affiner la preuve précédente, en considérant, au lieu de  $B$ , le graphe constitué de l'ensemble des arêtes des graphes  $\mathcal{G}_v$  lorsque  $v$  parcourt  $U_+^*$ . Cela revient à construire le graphe  $H(V(H), E(H))$  où  $V(H) = U' \cup U_+^*$  et  $E(H) = \cup_{v \in U_+^*} E(\mathcal{G}_v)$ . Remarquons que  $H$  contient le graphe  $B$ ; en revanche, il n'est certainement plus biparti puisque certaines arêtes entre sommets de  $U'$  peuvent apparaître (en fait, cela est vrai du moment que  $U_+^*$  est distinct du vide, soit dès que  $U^* \neq U$ ). Finalement, notons  $U_{\text{com}}$  les sommets qui sont communs aux optima local et global  $U$  et  $U^*$ ,  $U'_{\text{com}}$  sa restriction à  $U'$  et  $U''$  les voisins dans  $U'$  de  $U'_{\text{com}}$ . Formellement, nous avons  $U_{\text{com}} = U^* \cap U$ ,  $U'_{\text{com}} = U^* \cap U'$  et  $U'' = U' \cap \Gamma_H(U'_{\text{com}})$ <sup>1</sup>. On remarque que les ensembles  $U'_{\text{com}}$  et  $U''$  sont nécessairement disjoints : un sommet  $u$  de  $U'$  appartient à  $U''$  s'il est sur un triangle de sommets  $\{u, v, w\}$  avec  $v$  dans  $U_+^*$  et  $w$  dans  $U'_{\text{com}}$ ;  $u$  ne peut alors en aucun cas appartenir à  $U'_{\text{com}}$ , sans quoi  $U^*$  contiendrait un triangle !

Cette nouvelle typologie nous amène à l'inégalité suivante sur le nombre d'arêtes reliant, dans  $H$ , les ensembles de sommets  $U'$  et  $U_+^*$  :  $\sum_{v \in U'} d_H(v) = |\langle U', U_+^* \rangle_H| +$

1. Où  $\Gamma_G(U)$  désigne pour un graphe  $G$  et un ensemble  $U$  de sommets de  $G$  l'ensemble des sommets qui sont adjacents dans  $G$  à un sommet de  $U$ .

$2|\langle U', U' \rangle_H| \geq |\langle U', U_+^* \rangle_H| + 2|\langle U'_{\text{com}}, U'' \rangle_H|$  ce qui donne immédiatement :

$$\begin{aligned} |\langle U', U_+^* \rangle_H| &\leq \sum_{v \in U'} d_G(v) - 2|\langle U'_{\text{com}}, U'' \rangle_H| \\ &\leq B|U'| - 2|\langle U'_{\text{com}}, U'' \rangle_H| \end{aligned} \quad [4.9]$$

Nous avons de plus les propriétés suivantes :

- 1)  $\forall v \in U_+^*, d_H(v) \geq 2$ ,
- 2)  $|\langle U'_{\text{com}}, U'' \rangle_H| \geq \max\{|U'_{\text{com}}|, |U''|\}$ .

La première inégalité se justifie par les mêmes arguments que ceux de la propriété 1 de la proposition 4.3, avec  $\Delta_0 = 2$ . Démontrons à présent la seconde : par définition, tout sommet de  $U''$  est relié dans  $H$  à au moins un sommet de  $U'_{\text{com}}$  et inversement, tout sommet de  $U'_{\text{com}}$  est relié (toujours par l'intermédiaire d'un triangle de  $\mathcal{G}_v$  pour un certain sommet  $v$  de  $U_+^*$ ) à au moins un autre sommet de  $U'$ , qui de fait est dans  $U''$  d'après la remarque précisant que  $U'_{\text{com}}$  et  $U''$  sont disjoints.

Les propriétés 1, 2 et l'expression [4.9] permettent alors de conclure :

$$\begin{aligned} 2\alpha_{K_3}(G) &= 2(|U_+^*| + |U'_{\text{com}}| + |U_{\text{com}} \setminus U'_{\text{com}}|) \\ &\leq |\langle U', U_+^* \rangle_H| + 2(|U'_{\text{com}}| + |U_{\text{com}} \setminus U'_{\text{com}}|) \\ &\leq B|U'| - 2|\langle U'_{\text{com}}, U'' \rangle_H| + 2(|U'_{\text{com}}| + |U_{\text{com}} \setminus U'_{\text{com}}|) \\ &\leq B|U| + 2(|U'_{\text{com}}| - \max\{|U'_{\text{com}}|, |U''|\}) \leq B|U| \end{aligned}$$

Pour montrer que ce rapport est atteint, considérons le graphe  $G = (V, E)$  défini de la manière suivante :  $V = \{x_1, x_2, y_1, y_2, \dots, y_{B-1}\}$  et  $E = \{(x_1, x_2)\} \cup \{(x_1, y_i), (x_2, y_i) : 1 \leq i \leq B-1\}$ ; une solution optimale est donnée par  $U^* = \{x_1, y_1, y_2, \dots, y_{B-1}\}$ , de valeur  $\alpha_{K_3}(G) = B$ , tandis que la solution  $U = \{x_1, x_2\}$  constitue un bien piètre optimum local de valeur 2. ■

#### 4.1.6. Ensemble minimum de sommets retour

Soit  $G(V, E)$  un graphe quelconque, il ne s'agit plus comme pour le problème MinFES de couvrir les cycles de  $G$  par les arêtes, mais par les sommets : une solution de MinFNS (*Feedback Node Set*) est un sous-ensemble  $U \subseteq V$  de sommets tel que tout cycle de  $G$  emprunte au moins un sommet de  $U$ . Il faut se restreindre au cas de

graphes à degré borné par une constante  $B$  pour assurer par les optima 1-locaux un rapport différentiel d'approximation constant.

PROPOSITION 4.5. – *MinFNS*- $B \in \text{GLO}[\delta]$ .

*Preuve.* La preuve est semblable à celle qui nous a permis d'établir l'appartenance de MinFES à la classe. Considérons dans un graphe  $G(V, E)$  un sous-ensemble  $U$  de sommets incident à tout cycle de  $G$ , de taille minimale ; cela signifie :  $\forall x \in U, \exists \gamma$  cycle élémentaire tel que  $\gamma \cap U = \{x\}$ . Si  $U$  est constitué de  $p$  sommets  $u_1, \dots, u_p$ , alors on peut à chacun d'entre eux associer un cycle élémentaire  $\gamma_i$  qui n'intersecte  $U$  qu'en le sommet  $u_i$ . Notons  $a_i$  et  $b_i$  les sommets adjacents à  $u_i$  dans  $\gamma_i$ ,  $a_i$  et  $b_i$  sont bien distincts (tout cycle étant de taille au moins deux) et appartiennent (par minimalité) au complémentaire  $\overline{U}$  de  $U$ . Un sommet ne pouvant être adjacent à plus de  $B$  sommets, il y a parmi l'ensemble  $\{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p\}$  au moins  $2p/B$  sommets distincts, alors :

$$\begin{aligned} |\overline{U}| \geq \frac{2|U|}{B} &\Leftrightarrow |U| \left( \frac{2}{B} + 1 \right) \leq n \\ &\Leftrightarrow |U| \leq \frac{B}{B+2} \omega(I) \leq \frac{B}{B+2} \omega(I) + \frac{2}{B+2} \beta(I) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

## 4.2. Exemples pour les voisinages 3-bornés et plus

### 4.2.1. Retour sur le problème de sous-graphe partiel maximum libre de $H_0$

Nous allons montrer que les optima locaux pour les voisinages 3-bornés garantissent un rapport différentiel de  $\max\{(\Delta_0 + 1)/(B + 2 + \nu_0), \Delta_0/(B + 1)\}$  pour le problème MaxPSG  $H_0$ -libre- $B$ , où  $\nu_0 = (|V(H_0)| - 1)/\Delta_0$ . Par exemple, dans le cas où  $H_0$  est une clique de taille  $(\Delta_0 + 1)$ , c'est-à-dire lorsque  $H_0 = K_{\Delta_0+1}$ , on obtient le ratio  $(\Delta_0 + 1)/(B + 3)$  qui est strictement meilleur que le ratio  $\Delta_0/(B + 1)$  dès que  $B \geq 2\Delta_0 - 1$ , et meilleur que  $\Delta_0/B$  lorsque  $B \geq 3\Delta_0$ . Le voisinage 3-local permet d'améliorer une solution  $U$  donnée en lui retirant un sommet et en lui ajoutant, si cela est possible, deux sommets de  $V \setminus U$  ; ainsi, la recherche d'un tel optimum local peut s'écrire comme le déroulement de l'algorithme suivant : chercher une solution maximale, tester si l'on peut supprimer un sommet de cette solution et en ajouter deux autres, si oui procéder à l'échange puis rendre cette solution maximale et ainsi de suite.



PROPOSITION 4.6.— *Les optima locaux pour les voisinages 3-bornés de MaxPSG  $H_0$ -libre- $B$  garantissent, pour  $B \geq 2(\Delta_0 + 1)$ , un rapport différentiel de :*

$$\frac{\Delta_0 (\Delta_0 + 1)}{\Delta_0(B + 2) + (|V(H_0)| - 1)}$$

*Preuve.* L'optimalité de  $U$  relativement aux voisinages 3-bornés implique en particulier que tout couple de sommets  $\{v_1, v_2\}$  de  $U_+^*$  de degré  $\Delta_0$  dans  $B$  appartient à un graphe  $H_0$  sur l'ensemble  $U \setminus \{u\} \cup \{v_1, v_2\}$  pour un certain sommet  $u$  de  $U$  ; on notera pour tout couple  $\{v_1, v_2\}$  par  $\mathcal{G}_{v_1, v_2}$  l'ensemble de ces  $H_0$ . Si  $U'$  désigne toujours l'ensemble des sommets de  $U$  qui se trouvent sur un  $H_0$  de  $\cup_{v \in U_+^*} \mathcal{G}_v$ , on introduit  $V'$  l'ensemble des sommets de  $U$  qui se trouvent sur un  $H_0$  de  $\cup_{v_1 \neq v_2 \in U_+^*} \mathcal{G}_{v_1, v_2}$  ; on désignera par  $W' = U' \cup V'$  l'union de ces ensembles.

Le graphe biparti  $B$  auquel on s'intéresse maintenant regroupe les arêtes, non plus de  $U_+^*$  à  $U'$ , mais de  $U_+^*$  à  $W' : B(W', U_+^*, \langle W', U_+^* \rangle)$ . Enfin, notons  $U_1^*$  l'ensemble des sommets de  $U_+^*$  qui sont reliés dans  $B$  à exactement  $\Delta_0$  sommets de  $W'$ , par  $U_1'$  l'ensemble des voisins dans  $B$  de ces sommets et par  $B_1$  la restriction de  $B$  à ces deux ensembles ; on a ainsi  $U_1^* = \{v \in U_+^* : d_B(v) = \Delta_0\}$ ,  $W_1' = \Gamma_B(U_1^*)$  et  $B_1 = (W_1', U_1^*, \langle W_1', U_1^* \rangle)$ . On remarque que  $W_1'$  est un sous-ensemble de  $U'$ , les  $\Delta_0$  sommets adjacents à tout sommet  $v$  de  $U_+^*$  étant nécessaires à l'existence d'un graphe  $H_0$  dans  $\{v\} \cup U$  ; on a ainsi :

$$|W_1'| \leq |U'| \quad [4.10]$$

Si les propriétés 1 et 2 mentionnées auparavant restent valides, il faut préciser pour  $W'$  que,  $\forall v \in W' \setminus U' = V'$ ,  $d_B(v) \leq B - \Delta_0 + 2$  (les sommets de  $V'$  étant uniquement sur des  $H_0$  impliquant au moins deux sommets de  $U_+^*$ ) et bien entendu pour  $U_+^*$  :  $\forall v \in U_+^* \setminus U_1^*$ ,  $d_B(v) \geq \Delta_0 + 1$ . De plus, nous avons l'inégalité suivante :

$$|U_1^*| \leq \nu_0 |W_1'| \quad [4.11]$$

Pour le prouver, nous allons montrer que dans  $B_1$ , l'inégalité  $d_{B_1}(u) \leq |V(H_0)| - 1$  est vraie de tout sommet  $u \in W_1'$ . En effet, une fois ces inégalités avérées, on obtiendrait en sommant sur  $W_1'$  la relation  $\Delta_0 |U_1^*| = \sum_{v \in U_1^*} d_{B_1}(v) = \sum_{u \in W_1'} d_{B_1}(u) \leq (|V(H_0)| - 1) |W_1'|$  et le résultat suivrait.

Supposons que l'une de ces inégalités soit fausse ; il existe donc un sommet  $u$  de  $W_1'$  relié dans  $B_1$  à au moins  $n_0 = |V(H_0)|$  sommets de  $U_1^*$  ; notons  $\{v_1, \dots, v_{n_0}\}$  ces sommets, et prenons en deux au hasard  $v_i$  et  $v_j$ . L'optimalité de  $U$  relativement aux

voisinages 3-bornés implique en particulier que l'ensemble  $U \setminus \{u\} \cup \{v_i, v_j\}$  n'est pas réalisable, soit qu'il contient un graphe  $H_0$ . Pour ce faire,  $v_i$  et  $v_j$  doivent être tous les deux adjacents à au moins  $\Delta_0$  sommets de  $U \setminus \{u\} \cup \{v_i, v_j\}$ ; or,  $v_i$  et  $v_j$  étant reliés à exactement  $\Delta_0 - 1$  sommets de  $U \setminus \{u\}$ , cela implique que  $(v_i, v_j)$  est une arête de  $G$ . Puisque cela est vrai de tout couple de sommets  $\{v_i, v_j\}$ , l'ensemble  $\{v_1, \dots, v_{n_0}\}$  forme une  $n_0$ -clique dans la solution optimale  $U^*$  : nous obtenons la contradiction,  $H_0$  étant un graphe partiel de  $K_{n_0}$ . Regroupant les inégalités [4.10] et [4.11], nous déduisons :

$$\begin{aligned} \Delta_0 |U_1^*| + (\Delta_0 + 1) |U_+^* \setminus U_1^*| &\leq \sum_{v \in U_+^*} d_B(v) = \sum_{u \in W'} d_B(u) \\ &\leq (B - \Delta_0 + 1) |W'| + |W' \setminus U'| \end{aligned}$$

Il découle alors :

$$\begin{aligned} (\Delta_0 + 1) \alpha_{H_0}(G) &= (\Delta_0 + 1) (|U_1^*| + |U_+^* \setminus U_1^*| + |U_{\text{com}}|) \\ &= |U_1^*| + (\Delta_0 |U_1^*| \\ &\quad + (\Delta_0 + 1) |U_+^* \setminus U_1^*|) + (\Delta_0 + 1) |U_{\text{com}}| \\ &\leq \nu_0 |W_1'| + (B - \Delta_0 + 1) |W'| + |W'| - |U'| \\ &\quad + (\Delta_0 + 1) |U_{\text{com}}| \\ &\leq (\nu_0 - 1) |W_1'| + (B - \Delta_0 + 1) |W'| + |W'| \\ &\quad + (\Delta_0 + 1) |U_{\text{com}}| \leq (\nu_0 + B + 2) |U| \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Comme pour le cas des voisinages 1-bornés, nous supposons que le ratio de ces optima locaux pour les voisinages 3-bornés est au moins de  $(\Delta_0 + 1)/(B + 1)$ , ce qui constituerait une amélioration notoire du ratio  $\Delta_0/(B + 1)$ , voire du ratio  $\Delta_0/B$  qui constitue la borne inférieure du rapport d'approximation des optima locaux pour les voisinages 1-bornés. Cependant, ce rapport espéré de  $(\Delta_0 + 1)/(B + 1)$  est à l'état actuel des connaissances uniquement validé pour le cas MaxIS (voir [HUR 89]) et celui des triangles, comme nous allons le montrer maintenant.

**PROPOSITION 4.7.**— *Les optima locaux pour les voisinages 3-bornés de MaxPSG  $K_3$ -libre- $B$  garantissent un rapport d'approximation différentiel de  $3/(B + 1)$ .*

*Preuve.* De même que précédemment, nous allons affiner les preuves des propositions 4.4 et 4.6. Comme point de départ, nous construisons le graphe  $H'$  qui n'est

autre que le graphe  $H$  de la proposition 4.4 enrichi des triangles des ensembles  $\mathcal{G}_{v_1, v_2}$  :  $H'(V(H'), E(H'))$  avec  $V(H') = W' \cup U_+^*$  et  $E(H') = \cup_{v \in U_+^*} E(\mathcal{G}_v) \cup_{v_1 \neq v_2 \in U_+^*} E(\mathcal{G}_{v_1, v_2})$  ;  $H$  est ainsi un sous-graphe de  $H'$ , et  $V(H)$  contient notamment les ensembles de sommets  $U'$ ,  $U'_{\text{com}}$  et  $U''$ . De façon semblable à la proposition 4.6, nous considérons ensuite l'ensemble  $U_1^*$  des sommets de  $U_+^*$  qui sont de degré 2 dans  $\langle U_+^*, W' \rangle_{H'}$  et désignons par  $W'_1$  l'ensemble des sommets de  $W'$  qui leur sont adjacents dans  $H'$  :  $U_1^* = \{v \in U_+^* : |\langle \{v\}, W' \rangle_{H'}| = 2\}$  et  $W'_1 = \Gamma_{H'}(U_1^*)$ . On note alors  $H'_1$  le sous-graphe de  $H'$  engendré par  $W'_1 \cup U_1^*$ . Cette fois encore,  $W'_1$  est un sous-ensemble de  $U'$ , le graphe  $H'_1$  étant construit à partir des ensembles  $\mathcal{G}_v$ . Nous affinons davantage la description de  $H'_1$  en partitionnant les sommets de  $U_1^*$  en deux sous-ensembles  $U_2^*$  et  $U_1^* \setminus U_2^*$  où  $U_2^*$  est défini comme l'ensemble des sommets de  $U_1^*$  qui sont adjacents dans  $H'_1$  à des sommets de  $U_{\text{com}}$  :  $U_2^* = \Gamma_{H'_1}(U_{\text{com}})$ . On note alors  $W'_2 = \Gamma_{H'_1}(U_2^*)$  ses adjacents,  $W'_3 = \Gamma_{H'_1}(U_1^* \setminus U_2^*)$  les adjacents de  $U_1^* \setminus U_2^*$ , enfin respectivement  $H'_2$  et  $H'_3$  les sous-graphes de  $H'_1$  engendrés par  $U_2^* \cup W'_2$  et  $(U_1^* \setminus U_2^*) \cup W'_3$ . Notons que ces deux graphes ne sont pas nécessairement disjoints ; en revanche, on a bien entendu  $V(H'_2) \cup V(H'_3) = V(H'_1)$ . On remarque que  $W'_2 \cap U_{\text{com}}$  et  $W'_2 \setminus U_{\text{com}}$  sont respectivement des sous-ensembles de  $U'_{\text{com}}$  et  $U''$ .

Nous exploitons à présent l'optimalité locale de  $U$  relativement aux voisinages 3-bornés, en commençant par ce constat préalable duquel découlera nombre de propriétés sur les graphes  $H'_1$ ,  $H'_2$  et  $H'_3$ .

$$\forall u \in W'_1, \forall v_1 \neq v_2 \in U_1^*, u \in \Gamma_{H'_1}(v_1) \cap \Gamma_{H'_1}(v_2) \Rightarrow \{v_1, v_2\} \in E$$

Effectivement, l'optimalité locale de  $U$  indique qu'il existe un triangle  $T$  sur l'ensemble  $U \setminus \{u\} \cup \{v_1, v_2\}$  ; puisque  $v_1$  et  $v_2$  sont de degré 2 dans  $W'$ , l'unique triangle de  $G$  sur  $v_1 \cup W'$  contient  $u$  ; ainsi le triangle  $T$  contient nécessairement l'arête  $\{v_1, v_2\}$ .

Cette remarque permet de déduire les relations suivantes :

- 1)  $\forall u \in W'_1, |\langle \{u\}, U_1^* \rangle_{H'_1}| \leq 2$  ;
- 2)  $\forall u \in W'_2 \cap U_{\text{com}}, |\langle \{u\}, U_1^* \rangle_{H'_1}| = 1$  ;
- 3)  $\forall u \in W'_2 \setminus U_{\text{com}}, |\langle \{u\}, U_1^* \rangle_{H'_1}| = 1$ .

Pour 1, l'argumentation est la même que celle effectuée lors de la proposition 4.4 : si un sommet de  $W'_1$  est adjacent à (au moins) trois sommets de  $U_1^*$ , ces trois sommets sont selon la remarque précédente deux à deux adjacents et forment un triangle ! Si maintenant pour contredire 2 un sommet de  $W'_1 \cap U_{\text{com}}$  est adjacent à deux sommets de  $U_+^*$ , alors ces deux sommets deviennent également adjacents dans  $G$  et l'on retrouve de nouveau un triangle dans l'optimum. Enfin pour avérer 3, considérons un sommet  $u$  de  $W'_2 \setminus U_{\text{com}}$  relié à deux sommets  $v_1$  et  $v_2$  de  $U_1^*$  ; on note alors  $u_1$  (resp.,  $u_2$ ) le sommet de  $W'_2 \cap U_{\text{com}}$  qui est sur l'unique triangle  $\{v_1, u, u_1\}$  (resp.,  $\{v_2, u, u_2\}$ ) issu de  $v_1$  (resp.,  $v_2$ ) dans  $H'$ . Comme  $u_1$  et  $u_2$  sont éléments

de  $W'_2 \cap U_{\text{com}}$ , on sait par l'argument précédent que ces deux sommets ne peuvent coïncider. L'optimalité locale de  $U$  implique l'existence d'un triangle  $\{v_1, v_2, w\}$  sur  $U \setminus u \cup \{v_1, v_2\}$ ;  $u_1$  et  $u_2$  étant distincts, on peut toujours supposer  $w \neq u_1$ , mais alors  $v_1$  devient de degré 3 dans  $H'$ , étant relié aux sommets  $u, u_1$  et  $w$ , absurde !

De ces propriétés découlent les relations suivantes liant les cardinalités des sous-ensembles de  $W'_1$  :

$$|U_1^* \setminus U_2^*| \leq |W'_3| \quad [4.12]$$

$$|U_2^*| = |W'_2 \setminus U_{\text{com}}| = |W'_2 \cap U_{\text{com}}| \quad [4.13]$$

Pour justifier l'expression [4.12], il suffit de reprendre l'argumentation faite lors de la preuve de la proposition 4.6 (expression [4.11]), cette fois-ci sur  $H'_3$  :

$$\begin{aligned} 2|U_1^* \setminus U_2^*| &= \sum_{v \in U_1^* \setminus U_2^*} \left| \langle \{v\}, W'_3 \rangle_{H'_1} \right| = |\langle U_1^* \setminus U_2^*, W'_3 \rangle| \\ &= \sum_{u \in W'_3} \left| \langle \{u\}, U_1^* \setminus U_2^* \rangle_{H'_1} \right| \leq 2|W'_3|. \end{aligned}$$

Quant à l'expression [4.13], il suffit de remarquer au préalable que tout sommet de  $U_2^*$  est lié dans  $H'$  à un unique couple de sommets de  $(W'_2 \cap U_{\text{com}}) \times (W'_2 \setminus U_{\text{com}})$ ; il ne reste alors plus qu'à sommer :

$$\begin{aligned} |U_2^*| &= \sum_{v \in U_2^*} \left| \langle \{v\}, W'_2 \cap U_{\text{com}} \rangle_{H'_1} \right| = |\langle U_2^*, W'_2 \cap U_{\text{com}} \rangle| \\ &= \sum_{u \in W'_2 \cap U_{\text{com}}} \left| \langle \{u\}, U_2^* \rangle_{H'_1} \right| = |W'_2 \cap U_{\text{com}}| \\ &= \sum_{v \in U_2^*} \left| \langle \{v\}, W'_2 \setminus U_{\text{com}} \rangle_{H'_1} \right| = |\langle U_2^*, W'_2 \setminus U_{\text{com}} \rangle| \\ &= \sum_{u \in W'_2 \setminus U_{\text{com}}} \left| \langle \{u\}, U_2^* \rangle_{H'_1} \right| = |W'_2 \setminus U_{\text{com}}|. \end{aligned}$$

On remarque enfin que, chaque sommet  $u$  de  $W'_3$  étant sur un triangle  $\{v, u, u'\}$  pour un certain  $v$  de  $U_1^*$  et surtout, un certain  $u'$  de  $W'_3$ , l'ensemble  $W'_3$  vérifie la relation :

$$2 \left| \langle W'_3, W'_3 \rangle_{H'_3} \right| \geq |W'_3| \quad [4.14]$$

Finalement, en regroupant toutes les inégalités [4.14], pour peu que  $B$  soit supérieur ou égal à 3 (sinon on est à l'optimum) on obtient :

$$3\alpha_{K_3}(G) = 3(|U_1^*| + |U_+^* \setminus U_1^*| + |U_{\text{com}}|)$$

$$\begin{aligned}
&= |U_1^*| + (2|U_1^*| + 3|U_+^* \setminus U_1^*|) + 3|U_{\text{com}}| \\
&\leq |U_1^*| + |\langle U_+^*, W' \rangle_{H'}| + 3|U_{\text{com}}| \\
&\leq |U_1^*| + \sum_{u \in W'} d_{H'}(u) - 2|\langle W', W' \rangle_{H'}| + 3|U_{\text{com}}| \\
&\leq |U_1^*| + B|W'| - 2(|\langle U'_{\text{com}}, U'' \rangle_H| \\
&\quad + |\langle W'_3, W'_3 \rangle_{H'_3}|) + 3|U_{\text{com}}| \\
&\leq |U_1^*| + B(|U| - |U_{\text{com}} \setminus U'_{\text{com}}|) \\
&\quad - 2 \max\{|U'_{\text{com}}|, |U''|\} - |W'_3| + 3|U_{\text{com}}| \\
&\leq |U_1^*| + B|U| - 2 \max\{|U'_{\text{com}}|, |U''|\} \\
&\quad - |W'_3| + 3|U'_{\text{com}}| \\
&\leq |U_1^* \setminus U_2^*| + |U_2^*| + B|U| - |W'_3| + |U'_{\text{com}}| \\
&\leq |W'_3| + |W'_2 \setminus U'_{\text{com}}| + B|U| - |W'_3| + |U'_{\text{com}}| \\
&\leq (B+1)|U|
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

#### 4.2.2. Le voyageur de commerce et le voisinage 2-opt

Soit  $I$  une instance du problème du voyageur de commerce (MinTSP) constituée d'un graphe complet  $G(V, E)$  à  $n$  sommets et d'une valuation  $d : E \rightarrow \mathbb{N}$  des arêtes de  $G$ . On cherche un tour sur  $V$  de coût minimum, le coût d'un tour étant donné par la somme des coûts des arêtes qui le constituent :  $m_{\text{TSP}}(I, t) = \sum_{e \in t} d(e)$ . On se limite aux instances pour lesquelles  $d_{\max} = \max_{e \in E} \{d(e)\} \leq n^k$  pour s'assurer de manipuler les instances d'un problème polynomialement borné et ainsi être en mesure de déterminer des optima locaux en temps polynomial : avec  $\omega_{\text{TSP}} \leq n \times \max_{e \in E} \{d(e)\}$  et  $\beta_{\text{TSP}} \geq n \times \min_{e \in E} \{d(e)\} \geq 0$ , il vient  $|\omega_{\text{TSP}} - \beta_{\text{TSP}}| \leq n^{k+1}$ . Pour plus de clarté, on note comme dans le paragraphe 3.1.2  $[u, v]$  l'arête d'extrémités  $u$  et  $v$  et  $d(u, v)$  le coût associé.

THÉORÈME 4.4.—  $\text{MinTSP}(k) \in \text{GLO}[\delta]$ .

*Preuve.* Nous montrons que le problème  $\text{MinTSP}(k)$  garantit la qualité de ses optima locaux pour le voisinage 2-opt présenté au paragraphe 3.1.2. Un tour n'étant autre qu'une permutation sur les sommets, nous nous permettons d'utiliser une notation fonctionnelle. Soient  $t : i \mapsto t(i)$  un optimum local et  $s : i \mapsto s(i)$  un optimum global ; pour deux entiers  $i$  et  $k$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ ,  $t^k(i)$  désigne le  $k^{\text{e}}$  successeur

du sommet  $i$  dans le tour  $t$  (ainsi  $t^n(i) = i$ ), tandis que  $t_{i,k}$  désigne le tour voisin de  $t$  obtenu en échangeant les arêtes  $[i, t(i)]$  et  $[t^k(i), t^{k+1}(i)]$  contre le couple d'arêtes  $([i, t^k(i)], [t(i), t^{k+1}(i)])$ . Alors,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$  :

$$\begin{aligned} t &= (i, t(i), t^2(i), \dots, t^{k-1}(i), t^k(i), t^{k+1}(i), t^{k+2}(i), \dots, t^{n-1}(i), i) \\ t^{i,k} &= (i, t^k(i), t^{k-1}(i), \dots, t^2(i), t(i), t^{k+1}(i), t^{k+2}(i), \dots, t^{n-1}(i), i) \end{aligned}$$

L'optimalité locale de  $t$  se traduit,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  et  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ , par les inégalités :

$$d(i, t(i)) + d(t^k(i), t^{k+1}(i)) \leq d(i, t^k(i)) + d(t(i), t^{k+1}(i))$$

qui impliquent en particulier,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$d(i, t(i)) + d(s(i), t(s(i))) \leq d(i, s(i)) + d(t(i), t(s(i))) \quad [4.15]$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(i, t(i)) + \sum_{i=1}^n d(s(i), t(s(i))) &\geq \\ \sum_{i=1}^n d(i, s(i)) + \sum_{i=1}^n d(t(i), t(s(i))) &\quad [4.16] \end{aligned}$$

où l'expression [4.16] provient de l'addition des expressions [4.15] pour  $i = 1, \dots, n$ . Remarquons par ailleurs que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n d(i, t(i)) &= \sum_{i=1}^n d(s(i), t(s(i))) = m_{\text{TSP}}(I, t) \\ \sum_{i=1}^n d(i, s(i)) &= m_{\text{TSP}}(I, S) = \beta_{\text{TSP}}(I) \\ \sum_{i=1}^n d(t(i), t(s(i))) &= m_{\text{TSP}}(I, u) \end{aligned}$$

où  $u$  est le tour ( $i \mapsto t \circ s \circ t^{-1}(i)$ ). Il ne reste plus qu'à conclure :

$$\begin{aligned} 2m_{\text{TSP}}(I, t) &\leq \beta_{\text{TSP}}(I) + m_{\text{TSP}}(I, u) \leq \beta_{\text{TSP}}(I) + \omega_{\text{TSP}}(I) \\ \Leftrightarrow m_{\text{TSP}}(I, t) &\leq \frac{1}{2}\beta_{\text{TSP}}(I) + \frac{1}{2}\omega_{\text{TSP}}(I) \end{aligned}$$

soit,  $\delta_{\text{TSP}}(I, t) \geq 1/2$ . ■

DÉBUT

```

(1) calculer un tour réalisable  $T$ ;
(2) TANT QUE l'amélioration de  $d(T)$  est possible
(3)   considérer un nouvel ensemble  $\{v_i v_j, v_{i'} v_{j'}\} \subset T$ ;
(4)   SI  $d(i, j) + d(i', j') > d(i, i') + d(j, j')$ 
(5)     ALORS  $T \leftarrow (T \setminus \{v_i v_j, v_{i'} v_{j'}\}) \cup \{v_i v_{i'}, v_j v_{j'}\}$ ;
(6)   FIN SI
(7) FIN TANT QUE;
(8) OUTPUT  $T$ ;
FIN

```

**Figure 4.2.** *L'algorithme 2\_OPT*

L'algorithme 2\_OPT<sup>2</sup> (LSA qui exploite le voisinage 2-opt) est décrit en figure 4.2. Notons que le tour  $T$  de la ligne (1) peut être déterminé au moyen de n'importe quelle heuristique polynomiale (par exemple, celle du plus proche voisin).

La limitation aux instances polynomialement bornées (contrainte portant sur la distance des arêtes) nous assure le retour d'un optimum local en un nombre polynomial d'étapes. Le résultat du théorème 4.4 induit ainsi un autre résultat d'approximation très important reprenant, en quelque sorte, la discussion de la fin de la section 2.8 du chapitre 2, puisqu'à l'aide du lemme 2.5 il a comme corollaire le résultat suivant.

**THÉORÈME 4.5.**—  $MinTSP(k), MaxTSP(k) \in APX[\delta]$  puisque l'algorithme 2\_OPT garantit un rapport différentiel borné inférieurement par  $1/2$ .

Un autre corollaire des théorèmes 2.1 et 4.4 est le suivant.

**COROLLAIRE 4.6.**— Les restrictions de toutes les versions du TSP citées dans le théorème 2.1 aux graphes à distances supérieurement bornées par un polynôme en  $n$  appartiennent toutes à  $GLO[\delta]$ .

Enfin, d'après les relations établies à la section 2.8 du chapitre 2 et la discussion du paragraphe 3.5.3 du chapitre 3, le corollaire suivant peut être très facilement démontré.

**COROLLAIRE 4.7.**— Pour toute constante  $k$ , pour tout intervalle discret  $[a, b]$  tel que  $b \leq k \times a$ ,  $MinTSP[a, b] \in GLO$ .

---

2. Cet algorithme est un grand classique pour MinTSP; originellement conçu dans [CRO 58], il a été très fréquemment revisité au cours de diverses tentatives de résolution de MinTSP (voir par exemple [JOH 97, LIN 73]).

### 4.3. Résultats négatifs

Nous proposons maintenant des cas de non-appartenance aux classes GLO[R] ; il faut cependant considérer ces résultats avec prudence, la notion de voisinage  $h$ -borné pouvant être fortement dépendante du codage choisi des solutions. Nous pensons notamment à l'intégration, dans le voisinage, des solutions complémentaires : par exemple, nous verrons au chapitre 5 que Max2-CCSP ne garantit pas la qualité de ses optima locaux pour les voisinages  $h$ -bornés au sens usuel de tels voisinages, alors que si l'on considère simplement l'affectation complémentaire, le voisinage 1-borné augmenté de cette solution garantit pour ses optima locaux un rapport classique de  $1/3$ . En termes de distances, pour le codage naturel qui considère sur une instance à  $n$  variables un vecteur binaire de taille  $n$ , deux affectations complémentaires  $T$  et  $\bar{T}$  sont effectivement  $n$ -distantes et ne peuvent ainsi être considérées comme voisines dans le cadre de voisinages  $h$ -bornés ; cependant, il suffit d'ajouter un bit supplémentaire seulement au vecteur  $T$  (ce qui reste un codage raisonnable) pour rendre cela possible : il s'agit d'interpréter ce bit comme le sens de lecture des  $n$  bits suivants. Alors, le passage d'une solution à son complémentaire ne réclame plus  $n$ , mais un unique changement et les solutions  $T$  et  $\bar{T}$  se retrouvent voisines pour tout voisinage  $h$ -borné.

Pour lever l'ambiguïté afférente au codage des solutions, il faudra comprendre les résultats négatifs proposés comme étant édictés pour une interprétation « physique » et non plus mathématique des voisinages  $h$ -bornés.

#### 4.3.1. Satisfaisabilité maximum

La preuve de l'appartenance du problème MaxSat à la classe GLO a été faite dans [AUS 95b], pour le voisinage 1-borné et un rapport  $1/2$  ; nous montrons qu'il n'en est pas de même pour le rapport différentiel.

THÉORÈME 4.6. –  $\text{MaxSat} \notin \text{GLO}[\delta]$ .

*Preuve.* On montre que pour tout  $h$ ,  $\text{MaxSat} \notin \text{GLO}[\delta](h)$ . Considérons la famille d'instances  $(I_k)_{k \geq 1}$ ,  $I_k = (X_k, C_k) \forall k$ , définie par :

- $X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  (i.e.,  $L_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \cup \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k\}$ ) ;
- $C_k = \mathcal{P}'_k(L_k) \setminus \{(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)\}$ .

où  $\mathcal{P}'_k(L_k)$  désigne l'ensemble des parties de taille  $k$  de l'ensemble  $L_k$  des littéraux qui ne sont pas des tautologies.

Toutes les clauses de taille  $k$ , sauf la clause composée des  $k$  littéraux négatifs  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k)$ , sont donc générées. Toute clause contenant au moins un littéral positif, l'affectation  $(1, 1, \dots, 1)$  satisfait les  $|C_k|$  clauses ; d'autre part, toute autre affectation satisfait  $|C_k| - 1$  clauses. Effectivement, soit  $t$  une affectation, on note  $t^0$  l'ensemble des indices des composantes nuls de  $t$  :  $t^0 = \{i_1, \dots, i_p\} = \{i \in \{1, \dots, n\} :$



$t_i = 0\}$ ;  $t$  avère toutes les clauses, sauf la clause  $c^0$  dans laquelle les variables d'indice dans  $t^0$  apparaissent sous forme positive et les autres variables sous forme négative :

$$c^0 = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i_1-1}, x_{i_1}, \bar{x}_{i_1+1}, \dots, \bar{x}_{i_j-1}, x_{i_j}, \bar{x}_{i_j+1}, \dots, \bar{x}_{i_p-1}, x_{i_p}, \bar{x}_{i_p+1}, \dots, \bar{x}_n)$$

Or,  $c^0$  existe toujours dans  $C_k$  si  $t \neq (1, 1, \dots, 1)$ . On a ainsi pour  $k$  quelconque  $\omega(I_k) = |C_k| - 1$  et  $\beta(I_k) = |C_k|$  : quels que soient la constante  $h$  et le voisinage  $h$ -borné associé, il existe avec  $C_k$  pour  $k > h$  une instance du problème MaxSat pour laquelle l'affectation  $(0, 0, \dots, 0)$  est à la fois optimum local et pire solution (puisque'il faudrait changer  $k$  valeurs pour augmenter la performance, soit plus de  $h$  changements) et de fait, cette affectation constitue un optimum local de rapport différentiel nul. On en conclut la non-appartenance de MaxSat à la classe GLO $[\delta]$ . ■

La démonstration précédente nous permet de déduire une information importante sur les fameuses sous-classes Max $k$ -Sat des instances de satisfaisabilité formées de clauses d'au plus  $k$  littéraux.

COROLLAIRE 4.8. —  $\forall k, \forall h < k$  Max $k$ -Sat  $\notin$  GLO $[\delta](h)$ .

#### 4.3.2. Le sac-à-dos

Le problème du sac-à-dos entier ou bivalent se résoud fort bien, tant en classique [IBA 75] qu'en différentiel [DEM 96], puisqu'il admet des schémas complets pour les deux rapports (nous en avons d'ailleurs donné un exemple en classique au cours de l'exemple 2.4); et pourtant, malgré cette apparente bonne composition, MaxKS n'appartient pas à la classe GLO. Nous rappelons que ses instances forment une sous-classe des problèmes de programmation linéaire en nombres entiers pour lesquels la matrice des contraintes se réduit à un seul vecteur. Pour considérer l'appartenance à GLO[R], nous nous limiterons au sous-problème MaxKS( $k$ ) qui regroupe les instances pour lesquelles la plus grande valeur numérique en valeur absolue est bornée par la quantité  $n^k$  où  $n$  désigne la dimension de l'espace de l'instance; le problème de sac-à-dos, limité à cette famille d'instances, est *polynomial* puisque le problème global admet un algorithme pseudo-polynomial (voir exemple 2.1). Or, nous montrons qu'un cas particulier de cette famille de problèmes polynomiaux, celui du sac-à-dos bivalent qui consiste à considérer les variables à valeur dans  $\{0, 1\}$  et que l'on note MaxKS( $k$ ){0, 1}, n'est même pas dans GLO.

THÉORÈME 4.7.–  $\text{MaxKS}(k)\{0, 1\} \notin \text{GLO} \cup \text{GLO}[\delta]$ .

*Preuve.* On montre pour tout  $h \ll \text{MaxKS}(k)\{0, 1\} \notin \text{GLO}[\delta](h)$ . Une instance  $I$  du problème de sac-à-dos bivalent polynomialement borné se définit comme suit :

$$I = \begin{cases} \max & c \cdot x \\ & a \cdot x \leq b \\ & x \in \{0, 1\}^n \end{cases}$$

avec  $c \in (\mathbb{N}^*)^n$  et  $\max\{c_i\} \leq n^k$ ,  $a \in (\mathbb{N}^*)^n$  et  $\max\{a_i\} \leq n^k$ ,  $b \in \mathbb{N}^*$ . Puisque  $\omega_{\text{KS}}(I) = 0$  pour  $x = \vec{0}$  et  $\beta_{\text{KS}}(I) \leq \sum_{i=1}^n c_i \leq n^{k+1}$  pour  $x = \vec{1}$ , la valeur de l'instance  $I$  est bornée par le polynôme  $n^{k+1}$ . Considérons maintenant la famille d'instances  $(I_{h,n})_{n \geq 0}$  définie,  $\forall n \geq 0$ , par :

$$I_{h,n} = \begin{cases} a &= (n-1, 1, 1, \dots, 1) \\ c &= (h-1, 1, 1, \dots, 1) \\ b &= n-1 \end{cases}$$

Le vecteur optimal  $x_n^* = (0, 1, \dots, 1)$  qui consiste à prendre tous les objets sauf le premier apporte une utilité de  $n-1$ , quand la solution complémentaire  $x_n = (1, 0, 0, \dots, 0)$  n'apporte qu'une utilité de  $h-1$  ; or, c'est un optimum local pour tout voisinage  $h'$ -borné,  $h' \leq h$ , puisqu'il faudrait pour améliorer la composition du sac-à-dos  $x_n$  ôter le premier objet d'utilité  $h-1$ , puis ajouter au moins  $h$  objets d'utilité unitaire. Les optima locaux  $x_n$  des instances  $I_{h,n}$  réalisent ainsi un rapport de performance asymptotiquement nul :

$$\forall n, \delta_{\text{KS}}(I_{h,n}, x_n) = \frac{h-1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ces instances  $I_{h,n}$  montrent que le problème général non borné ne garantit pas la qualité de ses optima locaux vis-à-vis de voisinages  $h$ -bornés, et ce quelle que soit la constante  $h$ . ■

En fait, il faudrait borner les poids  $a_i$  comme les utilités  $c_i$  pour obtenir quelque chose : si pour tout  $i$ ,  $a_i \leq A$  et  $c_i \leq C$ , bêtement, un optimum ne fera jamais mieux que  $b \times C$  (si tout élément est de poids 1 et d'utilité  $C$ ) et un optimum local, une solution maximale simplement, jamais moins que  $\lfloor b/A \rfloor \geq (b-A+1)/A$  (si tout élément est de poids  $A$  et d'utilité 1), assurant un rapport d'approximation (en considérant  $b \geq A$ ) :

$$\delta = \frac{b-A+1}{AbC} = \frac{b}{AbC} - \frac{A-1}{AbC} \geq \frac{1}{AC} - \frac{A-1}{A^2C} = \frac{1}{A^2C}$$

Ce résultat n'est cependant pas satisfaisant ; une autre piste serait de se reporter sur un sous-problème tel  $\text{MaxSubsetSum}$  (*Maximum Subset Sum*) pour lequel les vecteurs

$a$  et  $c$  coïncident : il s'agit, étant donné un entier  $b$  et  $n$  entiers  $c_1, \dots, c_n$  de  $\mathbb{N}^n$ , de trouver le meilleur minorant de  $b$  possible par une combinaison d'éléments  $c_i$  (c'est la version maximisation ou « duale » du problème de *plus petit majorant* étudié au cours des exemples 2.2 et 2.3). Il se trouve malheureusement que de nouveau sur ce problème, on peut exhiber pour toute constante  $h$  une famille  $J_{h,n}$  d'instances qui mette en défaut la qualité des optima  $h$ -locaux : pour tout  $n$ , on définit  $c = (n^2, n^2, 1, \dots, 1)$  vecteur de  $\mathbb{N}^n$  et  $b = n^2$  ; la solution  $x^* = (1, 0, \dots, 0)$  est optimum global de valeur  $n^2$  et la solution  $x = (0, 1, \dots, 1)$ , de valeur  $n - 2$ , est optimum  $h$ -local pour tout  $n/h \leq n - 2$  puisqu'il faudrait, pour l'améliorer, retirer tous les  $n - 2$  éléments contenus dans  $x$  avant de pouvoir éventuellement mettre  $x_1$  ou  $x_2$  à 1. Or, le rapport réalisé par  $x$ , de  $(n - 2)/n^2$ , tend indubitablement vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini. Une fois de plus, nous avons l'expression d'un contraste classique entre deux versions proches d'un même problème puisque (bien que nous ne l'ayons pas montré formellement) l'algorithme [*solminimale*] renvoie des optima locaux pour le voisinage 1-borné et que ces solutions garantissent un rapport de  $1/2$  (voir exemple 2.2).

#### 4.4. Où les classes GLO[R] se situent-elles ?

Autant on sait à peu près ce qui se passe pour GLO, autant les choses sont un peu plus floues concernant  $\text{GLO}[\delta]$  : de façon plus générale, on connaît mal encore les frontières des classes d'approximation sous le rapport différentiel.

##### 4.4.1. $\text{GLO}[R]$ et les classes d'approximation

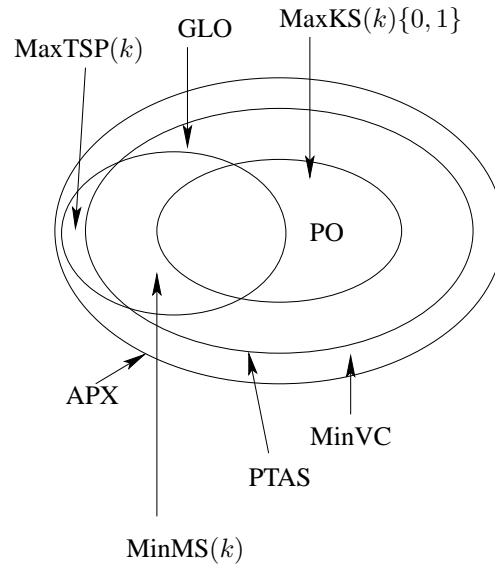
Comme nous venons de l'illustrer avec  $\text{MaxKS}(k)\{0, 1\}$ , un problème peut être « facile » au sens de la résolution en temps polynomial et admettre de mauvais optima locaux :

$$\begin{aligned} \text{PO} &\not\subset \text{GLO} \\ \text{PO} &\not\subset \text{GLO}[\delta] \end{aligned}$$

Tout optimum local garantit un rapport constant et par définition,  $\text{GLO}[R]$  renferme des problèmes sur lesquels les algorithmes de recherche locale obtiennent un optimum local en temps polynomial : ainsi les LSA sont, sur les problèmes des classes  $\text{GLO}[R]$ , des PTAA particuliers. En revanche, puisque tout problème polynomial (qui est a fortiori  $\text{APX}[R]$ ) n'est pas nécessairement  $\text{GLO}[R]$ , il s'agit d'une inclusion stricte :

$$\begin{aligned} \text{GLO} &\subset \text{APX} \\ \text{GLO}[\delta] &\subset \text{APX}[\delta] \end{aligned}$$

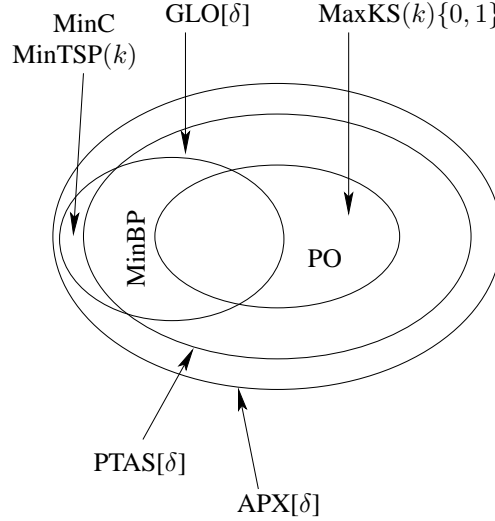
Par ailleurs, nous l'avons vu avec le problème d'ordonnancement multiprocesseur ou encore le problème de *Bin Packing*, les classes GLO[R] intersectent la classe PTAS des problèmes admettant un schéma d'approximation :  $\exists \Pi \in \text{GLO}$  tel que  $\Pi \in \text{PTAS}$  et  $\exists \Pi \in \text{GLO}[\delta]$  tel que  $\Pi \in \text{PTAS}[\delta]$ . Les figures 4.3 et 4.4 offrent une illustration des relations qu'entretiennent respectivement les classes GLO et GLO[ $\delta$ ] avec les classes d'approximation.



**Figure 4.3.** GLO et les classes d'approximation

Concernant GLO et APX, les auteurs montrent dans [AUS 95a] que la fermeture de GLO sous P-réductions coïncide avec APX :  $\overline{\text{GLO}}^P = \text{APX}$ . Pour cela, ils font appel à des problèmes particuliers de satisfaisabilité variables-pondérés qui sont APX-complets pour la P-réduction. Une instance de *MaxWSat* (*problème de satisfaisabilité maximum pondéré avec borne*) est la donnée d'une instance  $(X, C)$  de *MaxSat*, d'un jeu de poids  $p_1, \dots, p_n$  sur les variables  $x_1, \dots, x_n$  et d'un entier  $B \in \mathbb{N}^*$  tels que la somme des poids  $p_i$  est comprise dans l'intervalle  $[B, 2B]$  :  $B \leq \sum_{i=1}^n p_i \leq 2B$  ( $B$  pouvant être arbitrairement grand). Une affectation  $T$  des valeurs de vérité, si elle satisfait toutes les clauses, sera évaluée par la somme des poids des variables mises à 1 par  $T$  ; sinon,  $T$  est évaluée à  $B$  :

$$\forall T \in \{0, 1\}^n, m_{\text{WSat}}(I, T) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n p_i \times T(x_i) & \text{si } T \text{ affectation valide} \\ B & \text{sinon} \end{cases}$$



**Figure 4.4.**  $GLO[\delta]$  et les classes d'approximation

Ce problème a été montré dans [CRE 91] 1/2-approximable (*une affectation non valide faisant  $B$  quand l'optimum ne pourra jamais excéder  $2B$* ) et APX-complet. Sur toute instance, on sait construire en temps polynomial une affectation  $T^0$  non valide : il suffit de prendre la première clause  $c_1$  et d'affecter les variables intervenant dans  $c_1$  de sorte à ce que tous ses littéraux soient faux (on rappelle que l'on suppose toujours disposer d'instances qui ne comportent pas de tautologie). Alors il est équivalent du point de vue de l'approximation classique de considérer pour les affectations valides la fonction :  $m_{\mathcal{WSat}}(I, T) = \max\{B, \sum_{i=1}^n p_i \times T(x_i)\}$ . Effectivement, la valeur optimale est inchangée ( $\beta_{\mathcal{WSat}}(I) \geq B$ ) et pour passer d'une évaluation à l'autre, il suffit de substituer à toute affectation valide  $T$  dont la somme des poids des variables mises à 1 est strictement inférieure à  $B$  la solution  $T^0$ . Considérons donc le problème  $\text{Max}\mathcal{WSat}$  doté d'une telle fonction objectif, il est toujours 1/2-approximable (*par toute affectation des valeurs de vérité, toute solution faisant au moins  $B$  quand  $\beta_{\mathcal{WSat}}$  reste borné par  $2B$* ) et APX-complet [CRE 91]. Pour démontrer l'égalité  $\overline{GLO}^P = \text{APX}$ , Ausiello et Protasi se ramènent au cadre polynomiallement borné avec le problème  $\text{Max}\mathcal{WSat}(k)$  dont l'objectif est le suivant :

$$\forall T \in \{0, 1\}^n, m_{\mathcal{WSat-PB}}(I, T) = n + \left\lfloor \frac{n(m_{\mathcal{WSat}}(I, T) - B)}{B} \right\rfloor.$$

Avec cette fonction objectif, on s'assure que la valeur de toute solution sera comprise entre  $n$  et  $2n$ , la différence  $m_{\mathcal{WSat}}(I, T) - B$  étant toujours comprise entre 0

et  $B$ . Ainsi, le problème  $\text{MaxWSat}(k)$  est clairement dans GLO, étant polynomialement borné (on est donc assuré de trouver par LSA un optimum local en temps polynomial), et garantissant trivialement un rapport 1/2 pour tout optimum local (comme c'est déjà le cas de toute solution). Or, il est montré dans [CRE 94] que  $\text{MaxWSat}$  est P-réductible à sa restriction  $\text{MaxWSat}(k)$  et cela suffit à conclure :

$$\left. \begin{array}{l} \text{APX} \overset{\text{P}}{\propto} \text{MaxWSat} \overset{\text{P}}{\propto} \text{MaxWSat}(k) \in \text{GLO} \\ \text{GLO} \subset \text{APX} \end{array} \right\} \Rightarrow \overline{\text{GLO}}^{\text{P}} = \text{APX}$$

Cette égalité induit notamment qu'un problème APX qui n'est pas GLO (et nous avons vu que de tels problèmes existent) se réduit au moins par P-réduction à un problème de GLO. Notons au passage que ce problème,  $\text{MaxWSat}(k)$ , n'est pas approximable en différentiel à moins que P n'égal NP : nous montrons par réduction à partir de Sat que toute approximation différentielle non nulle de ce problème permettrait de décider Sat.

**THÉORÈME 4.8.**— *Tout algorithme polynomial  $A$  approché pour  $\text{MaxWSat}(k)$  établit, si  $\text{P} \neq \text{NP}$ , un rapport différentiel de performance nulle (exactement égal à 0) !*

*Preuve.* Considérons une instance  $I = (X, C)$  de Sat constituée de  $n$  variables booléennes  $x_1, \dots, x_n$  et  $m$  clauses  $c_1, \dots, c_m$  ; on introduit un ensemble de  $n$  variables booléennes  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  et les deux ensembles  $C'$  et  $D$  de clauses suivants :

$$\begin{aligned} C' &= \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^n \{c'_{i,j}\} \\ D &= \bigcup_{j_1=1}^{n-1} \bigcup_{j_2=j_1+1}^n \{(y_{j_1}, y_{j_2})\} \end{aligned}$$

où  $c'_{i,j} = c_i \vee \bar{y}_j$ . En associant alors par exemple à chaque variable  $x_i$  un poids  $p_i^X = 1$ , à chaque variable  $y_j$  un poids  $p_j^Y = 3$ , et en posant  $B = 2n$ , on obtient une instance  $I'$  de  $\text{MaxWSat}$  donnée par l'ensemble de variables  $X \cup Y$ , l'ensemble de clauses  $C' \cup D$ , les jeux de poids  $p^X$  et  $p^Y$  et la constante  $B$ . Effectivement, les poids vérifient bien comme il se doit :

$$\sum_{i=1}^n p_i^X + \sum_{j=1}^n p_j^Y = n + 3n = 4n \in [B, 2B] = [2n, 4n]$$

Une affectation  $T'$  non satisfaisable réalisera une performance de  $B$  ; par ailleurs, pour satisfaire l'ensemble  $D$  de clauses, une affectation  $T'$  devra mettre au moins

$n - 1$  variables  $y_j$  à 1 (sinon une clause  $(y_{j_1}, y_{j_2})$  ne sera pas vérifiée) et ainsi, sera évaluée par la somme des poids des variables mises à 1, cette somme valant au moins  $3(n - 1) \geq B$ . Cela signifie aussi qu'une affectation  $T'$ , pour être satisfaisable sur  $I'$ , devra impérativement l'être tout autant pour  $I$  : pour une variable  $y_j$  affectée à 1 (et l'on vient de voir que c'était le cas d'au moins  $n - 1$  variables), la clause  $c'_{i,j} = c_i \vee \bar{y}_j$  ne sera avérée qu'à condition que la clause initiale  $c_i$  le soit elle-même. Ainsi, une affectation satisfaisable sera toujours à valeur dans  $[3(n - 1), 4n]$  quand toute autre solution fera, nous l'avons dit,  $B = 2n$ . Si un algorithme approché pour  $\text{MaxWSat}$  assure un rapport différentiel non nul il permettra, sur  $I'$ , de renvoyer une solution satisfaisable s'il en existe, et donc de reconnaître si oui ou non  $I$  est satisfaisable. Il en est de même pour  $\text{MaxWSat}(k)$  où toute affectation non satisfaisable sera évaluée à  $n$  et toute solution satisfaisable à au moins  $n + 1$  (on peut supposer  $n \geq 5$  et ainsi,  $n(m_{\text{WSat}}(I, T) - B)/B \geq n(3(n - 1) - 2n)/2n = (n - 3)/2 \geq 1$ ). ■

La construction que nous venons de proposer produit des clauses de taille 2 (ensemble  $D$ ) et des clauses de même taille, à un littéral près, que celles de l'instance initiale (ensemble  $C'$ ) ; aussi la réduction proposée transforme-t-elle plus précisément une instance de  $k$ -Sat pour  $k \geq 3$  en une instance de  $\text{MaxW}k + 1\text{-Sat}(k)$ , induisant sur ce dernier problème le même résultat négatif d'approximabilité différentielle que sur le problème général.

**COROLLAIRE 4.9.**— Tout algorithme polynomial  $\mathcal{A}$  approché pour  $\text{MaxW}k\text{-Sat}(k)$  établit, si  $P \neq NP$ , un rapport différentiel de performance nul, et ce quelle que soit la constante  $k \geq 4$  considérée :  $\forall k \geq 4, \delta_{\text{MaxW}k\text{-Sat}(k)} = 0$ .

Le résultat annoncé par le théorème 4.8 est d'ordre crucial pour la théorie de l'approximation puisqu'il met en évidence, à l'intérieur de la classe des problèmes NP-difficiles, l'existence d'une famille de problèmes qui sont de la plus grande difficulté intrinsèque pour l'approximation différentielle : ceux dont la garantie différentielle de performance est, au pire des cas<sup>3</sup>, égale à 0. Bien sûr, comme l'on peut pour tout problème déterminer une solution non nulle, un rapport classique égal à 0 ne peut exister. En revanche en différentiel, on supposait l'existence de tels problèmes (nous l'avons dit : les plus difficiles intrinsèquement) sans être en mesure de la démontrer. Le théorème 4.8 lève donc une question ouverte, traçant la voie vers une structuration plus fine des classes d'approximation différentielle. Un autre problème ayant un rapport différentiel nul, l'ensemble stable dominant minimum (MinIDS, voir annexe A, est donné dans [BAZ b]. Ces deux résultats ont été obtenus presque simultanément.

3. C'est le cadre de travail le plus commun en algorithmique et complexité.

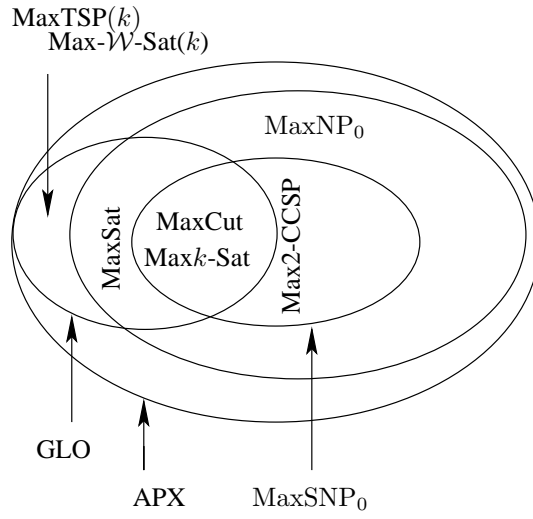
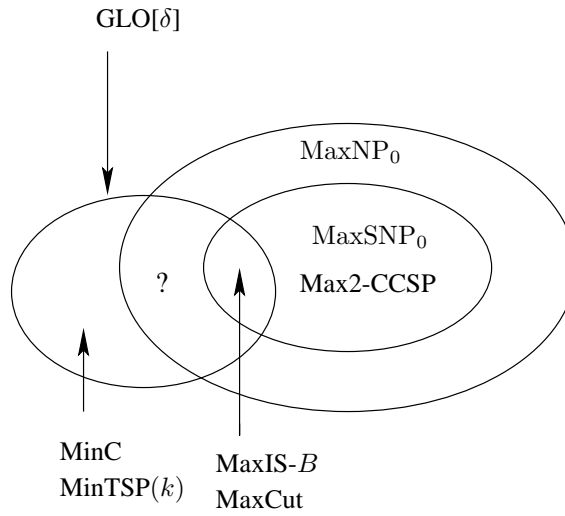


Figure 4.5. GLO et les classes logiques

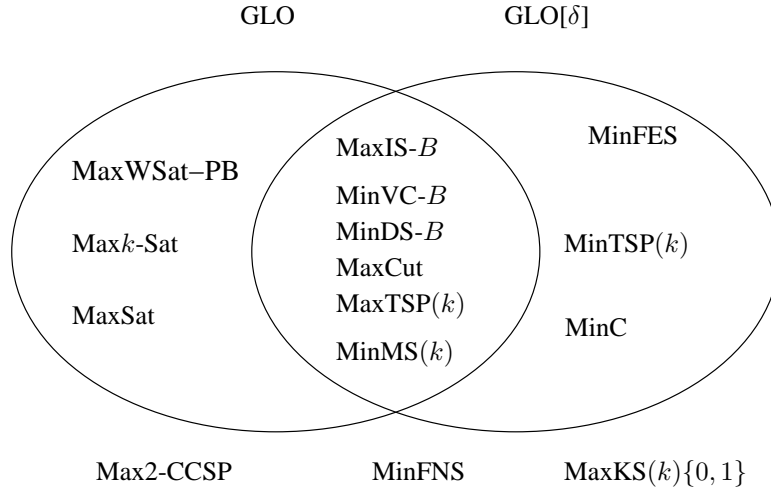

 Figure 4.6. GLO[ $\delta$ ] et les classes logiques

#### 4.4.2. GLO[R] et les classes logiques

Une relation découlant immédiatement de ce qui précède est la suivante :

$$\text{GLO} \cap \text{GLO}[\delta] \cap \text{MaxSNP} \neq \emptyset$$



Figure 4.7. *GLO* et *GLO[δ]*

Par exemple,  $\text{MaxIS-B} \in \text{GLO}[R]$  pour  $R = \rho, \delta$ ; par ailleurs, si l'on se restreint au cas classique, le problème  $\text{Max3-Sat}$  semble jouer un rôle-clef puisque non seulement il appartient à  $\text{GLO}$  mais en plus, tout problème de  $\text{MaxSNP}$  s'y réduit par LOP-réduction [AUS 95b] :  $\forall \Pi \in \text{MaxSNP}, \Pi \propto^{\text{LOP}} \text{Max3-Sat}$ . La LOP-réduction est une réduction définie dans [AUS 95b] qui préserve pour l'approximation les schémas d'approximation par L-réduction, pour la structure les optima locaux par LOC-réduction.

Par ailleurs, il existe des problèmes situés dans  $\text{GLO} \cap \text{GLO}[\delta] \setminus \text{MaxNP}$  et d'autres dans  $\text{MaxSNP} \setminus (\text{GLO} \cup \text{GLO}[\delta])$ . Effectivement, si pour  $R \in \{\rho, \delta\}$ , la classe  $\text{GLO}[R]$  et les classes  $\text{MaxSNP}$ ,  $\text{MaxNP}$  s'intersectent ( $\text{GLO}[R]$  comporte des problèmes de  $\text{MaxSNP}$ ), il n'y a pas de relation d'inclusion : il est des problèmes de  $\text{MaxSNP}$  qui ne garantissent pas la qualité de leurs optima locaux<sup>4</sup>, des problèmes de  $\text{GLO}[R]$  qui ne sont pas dans  $\text{MaxNP}$ <sup>5</sup>. Enfin, des égalités :

$$\begin{aligned} \overline{\text{MaxNP}}^P &= \text{APX} \\ \overline{\text{GLO}}^P &= \text{APX} \end{aligned}$$

4.  $\text{Max}k\text{-CSP} \forall k \geq 2$  [ALI 94],  $\text{Max2-CCSP}$  [KHA 98] pour  $\text{GLO}$ , donc pour  $\text{GLO}[\delta]$ .

5.  $\text{MaxTSP}(k)$  pour  $\text{GLO}$  et  $\text{GLO}[\delta]$ ,  $\text{MinC}$  pour  $\text{GLO}[\delta]$ .

on déduit  $\overline{\text{MaxNP}}^P = \overline{\text{GLO}}^P$  ; en particulier, tout problème de GLO se P-réduit à un problème de MaxNP, tout problème de MaxNP se P-réduit à un problème de GLO. Nous proposons à travers les figures 4.5 et 4.6 une représentation de ces résultats ; la figure 4.5 illustre les relations de la classe GLO avec les classes APX,  $\text{MaxNP}_0$  et  $\text{MaxSNP}_0$  tandis que la figure 4.6 s'intéresse aux relations entretenues avec ces classes par GLO[ $\delta$ ].

#### 4.4.3. *Quelle unité dans tout ça ?*

La diversité des problèmes se situant dans ou hors les classes GLO semble rendre peu plausible l'établissement d'une caractérisation unifiée des problèmes garantissant la qualité de leurs optima locaux. Nous n'avons pas, sur la syntaxe même des problèmes, mis à jour de moyen de décision d'appartenance à GLO ni à GLO[ $\delta$ ]. Que l'on regarde sous l'angle de la formulation logique ou sous celui de la programmation linéaire par exemple, rien ne vient d'évidence. C'est cependant une voie à explorer, mais de façon fine et précise, de même que la structure radiale des problèmes dont nous parlons au chapitre 7. Une autre observation qui pourrait paraître surprenante, c'est que souvent, ce sont les solutions les plus simples, les optima 1-locaux, qui nous ont permis d'établir des rapports d'approximation ; le fait le plus remarquable est que parfois même, il est possible de montrer (ce sera notamment le cas à propos de certains problèmes de satisfaisabilité au chapitre 5) qu'ils sont aussi bons que les optima  $h$ -locaux pour toute constante entière universelle  $h$ .

La figure 4.7, en guise de conclusion de cette section, propose l'observation relative des classes GLO et GLO[ $\delta$ ] par les problèmes que nous avons, jusqu'ici, été en mesure de situer relativement à ces deux classes.

#### 4.5. Conclusion

Essayons de s'extraire des conclusions déjà tirées, plutôt pessimistes et fondées sur notre connaissance actuelle, pour imaginer les pistes qui nous mèneraient vers une caractérisation des classes GLO[R] ; tentons aussi de saisir la philosophie GLO pour l'étendre au-delà d'un cadre unique de définition. Il nous paraît pertinent de mettre en évidence certaines conditions d'appartenance à GLO[ $\delta$ ] selon l'expression du problème, de sa structure. On pourrait par exemple tenter d'isoler des familles de problèmes bien approximables comme nous l'avons fait avec les problèmes de partitionnement héréditaire. Nous pensons notamment, en restant dans le même ordre d'idée, aux problèmes de partitionnement héréditaire valorisant leur solution par une autre fonction de coût (poids maximum, poids moyen. . . ) que la fonction indicatrice ainsi qu'aux problèmes de partitionnement 1-héréditaire. Une propriété  $\pi$  sur un ensemble  $X$  est dite 1-héréditaire si elle n'est avérée sur un sous-ensemble  $S$  qu'à condition de vérifier pour un élément  $x_0$  du sous-ensemble  $S$  :  $\forall S' \subseteq S, \pi(S' \cup \{x_0\})$ .

D'autres caractérisations des problèmes se situant *dans* ou *hors*  $GLO[\delta]$  devraient cependant être envisagées, comme nous avons essayé de le faire par l'exploitation de la structure radiale des ensembles de solution.

Par ailleurs, plutôt que d'exhiber un trait caractéristique de tel ou tel problème, par exemple par leur formulation logique ou la propriété de son ensemble de solutions, il est souvent intéressant de lier les problèmes entre eux de manière à dessiner des sous-classes de problèmes relativement à la G-réduction, éventuellement les hiérarchiser (toujours par G-réduction) et, pourquoi pas, parvenir par ce biais à tracer les limites des classes  $GLO[R]$  en établissant la complétude de certains problèmes.

Comme nous verrons au chapitre 5 avec les problèmes de satisfaisabilité, la définition même de l'optimum local, que ce soit par le critère d'optimalité ou celui de localité, ouvre un éventail d'étude plus riche qu'il n'y paraît, permettant d'élargir les classes d'approximation locale à rapport constant à de nouveaux problèmes, ou encore de comparer le comportement d'un même problème vis-à-vis de ces différentes stratégies d'approximation. Ces optima locaux peuvent être, comme il est proposé dans [ALI 97], le fruit de l'intégration dans les voisinages considérés de *solutions complémentaires* ou encore d'une *altération du critère d'optimisation* ; nous verrons qu'il est d'abord démontré que Max2-CCSP n'appartient pas à  $GLO$  pour des voisinages *h-bornés naturels* ; puis qu'en revanche, les optima locaux, pour le voisinage 1-borné mais *relativement à une autre fonction objectif*, garantissent pour la fonction objectif initiale un rapport d'approximation classique de  $1/4$  ; de même pour les optima locaux définis par le *voisinage miroir 1-borné* qui prend en compte comme voisin de toute solution la solution complémentaire ; enfin, la combinaison de la *prise en compte d'une fonction objectif altérée* et d'un *voisinage miroir 1-borné* désigne des optima locaux qui garantissent un rapport classique de  $2/5$ . C'est tout un champ d'investigation ouvert pour la désignation d'optima locaux d'un problème et l'étude de la qualité de ceux-ci en termes de rapport d'approximation, classique comme différentiel. Ce champ peut être vaste, tout en restant dans un cadre de stratégies simples de conception et de mise en œuvre : c'est là, la motivation de ces recherches, voir comment *structurellement* l'ensemble des solutions d'un problème admet un ensemble de *bonnes solutions* que l'on est en mesure de décrire *a priori*. Les optima locaux ne sont pas décrits comme le *résultat du déroulement d'un algorithme* mais par certaines *propriétés* qui leurs sont *intrinsèques*.

Revisitons maintenant le problème du sac-à-dos. Nous avons vu dans le paragraphe 4.3.2 que ni le problème de sac-à-dos, ni le sous-problème MaxSubsetSum ne garantissaient la qualité de leurs optima locaux, en mettant en avant des familles d'instances qui admettaient de *mauvais* optima locaux. Devant ces échecs, peut-être ferions-nous mieux d'affiner la notion d'optima locaux de ces problèmes. Pour le problème MaxKS notamment, il pourrait sembler opportun de rechercher les optima locaux vis-à-vis d'un *objectif altéré* qui inciterait à sélectionner les objets de meilleur rapport « qualité-prix » : considérer comme critère de sélection des éléments le choix

du meilleur rapport  $c_i/a_i$  pourrait s'avérer profitable, tant pertinent semble ce critère (*qui, en réalité, définit l'optimum réel*), au vu des algorithmes approchés et autres schémas dédiés à ce problème qui l'utilisent déjà. Il s'agirait ici de tenter l'approche introduite dans [ALI 94, KHA 98] pour les problèmes de satisfaisabilité, celle des optima locaux altérés : peut-être qu'une solution du problème qui est optimum local relativement à une *autre fonction objectif* dite *objectif altéré*, pourrait garantir de meilleurs rapports qu'un optimum local relativement à la fonction initiale (GGLO) ? Effectivement, si l'on regarde de plus près les mauvais optima locaux exhibés pour le problème de sac-à-dos, on remarque qu'ils peuvent sembler peu pertinents, puisqu'ils auraient choisi un élément de piètre rapport « qualité-prix »  $(h+1)/(n-1)$  quand tous les autres éléments ont un tel rapport de 1 ; ainsi pourrait-il s'avérer intéressant pour approcher le problème initial :

$$\max \sum_{i=1}^n c_i \times x_i$$

$$\begin{cases} a \cdot x \leq b \\ x_i \leq b_i \forall i \\ x \in \mathbb{N}^n \end{cases}$$

d'évaluer la qualité d'optima  $h$ -locaux du problème altéré :

$$\max \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{a_i} \times x_i$$

$$\begin{cases} a \cdot x \leq b \\ x_i \leq b_i \forall i \\ x \in \mathbb{N}^n. \end{cases}$$

Une autre approche, pour MaxKS comme pour MaxSubsetSum, pourrait être de chercher un optimum local *dans l'ensemble d'objets complémentaire*. Avec l'ensemble dominant notamment, à la section 3.4, nous avons discuté de l'intérêt d'élargir le voisinage  $h$ -borné aux solutions complémentaires (CGLO).

La nouvelle démarche que nous évoquons ici consisterait à chercher deux optima locaux : le premier de façon quelconque, puis le second dans l'ensemble complémentaire d'objets de la première. Ceci n'est autre qu'une façon adaptée au problème de sac-à-dos d'élargir le voisinage d'une solution à l'ensemble complémentaire : si dans un problème de satisfaisabilité, deux affectations complémentaires peuvent être comparées à tout instant, ou encore pour le problème d'ensemble dominant, l'ensemble complémentaire de sommets d'une solution minimale est lui-même solution admissible, ça n'est pas le cas ici (*en général*) puisqu'il n'y a, *a priori*, aucune raison que l'ensemble complémentaire d'une solution constitue une solution réalisable.

Déjà quatre idées ont été évoquées : les optima  $h$ -locaux [AUS 95b], les optima  $h$ -locaux miroirs [ALI 97], les optima  $h$ -locaux altérés [ALI 94, KHA 98] et les optima  $h$ -locaux dans deux ensembles complémentaires où il s'agirait, étant donné un

optimum local, de le comparer à un optimum local de l'ensemble complémentaire de solutions et de renvoyer naturellement le meilleur de ces deux optima. Certains problèmes suggèrent une notion encore différente d'optima locaux, pas tant dans la définition de l'optimalité locale que dans la définition même du problème, dans le sens de la restriction de l'ensemble de ses solutions à des solutions que l'on pourrait qualifier de *non dominées*. Nous pensons à des problèmes, tels le problème de *localisation* ou encore d'*arbre couvrant de profondeur 2*, dont la résolution fait apparaître une dépendance entre deux types de décision. Pour le premier, on dispose d'un certain nombre de sites sur lesquels peuvent être placés des concentrateurs et de terminaux à relier aux concentrateurs. L'installation d'un concentrateur engendre un coût fixe, puis la liaison d'un terminal à un concentrateur engendre un coût généralement proportionnel à la distance les séparant ; sachant qu'à un concentrateur installé on peut, dans le cas le moins restreint, raccorder autant de terminaux que l'on veut : l'enjeu du problème est alors de décider quels concentrateurs et quelles liaisons terminal-concentrateur installer de sorte que chaque terminal soit raccordé à un concentrateur, et ce à moindre coût. Le second problème cherche, dans un graphe complet arêtes-valué et étant donné un sommet  $r$  de ce graphe, à en recouvrir les sommets par un arbre de racine  $r$  et de profondeur 2 qui soit de moindre coût. En toute rigueur, deux solutions sont  $h$ -distantes si elles diffèrent pour le problème de localisation de  $h$  choix de concentrateurs et de liaisons terminal-concentrateur, pour le problème d'arbre couvrant de profondeur 2 de  $h$  choix du père des sommets. Or, cela se fait sans exploiter la structure *en deux temps* de ces problèmes : une fois qu'un ensemble de concentrateurs à installer est arrêté, on sait leur raccorder les terminaux à moindre coût en temps polynomial ; une fois les sommets de premier niveau (ayant pour père la racine  $r$ ) déterminés, on sait leur raccorder les sommets restants, de niveau deux dans l'arbre, à moindre coût en temps polynomial. Cela traduit le fait que toutes les décisions n'ont pas même valeur : le choix des concentrateurs pour le premier problème, celui des sommets de premier niveau pour le second suffisent à déterminer *entièrement* la solution. Considérant le raccordement des terminaux aux concentrateurs ou des sommets de second niveau aux sommets de niveau 1 comme des sous-problèmes du problème global, on aurait ainsi envie de définir, comme ensemble de solutions, les combinaisons de concentrateurs et de sommets de premier niveau, de sorte que deux solutions sont  $h$ -distantes si elles diffèrent du choix de  $h$  concentrateurs, de  $h$  sommets de premier niveau : des solutions qui auraient pu paraître éloignées de premier abord sont en réalité voisines si l'on restreint la description de l'ensemble des solutions aux choix réellement décisifs dans la constitution des solutions.

## Chapitre 5

# Les problèmes de satisfaisabilité et leurs optima locaux

Dans ce chapitre, nous nous concentrons exclusivement sur les problèmes de satisfaisabilité ; d'abord parce qu'ils jouent un rôle-clef dans le cadre de l'approximation classique, ensuite parce qu'ils permettent d'appréhender la richesse de la notion d'optima locaux à rapport garanti en envisageant différentes interprétations ou élargissements de ce concept : optimum local par rapport à quel voisinage, optimum local par rapport à quel critère d'optimalité ? Les résultats proposés, qui permettent d'illustrer parfaitement les classes de problèmes sous-jacentes à la définition d'optimalité locale considérée, concernent essentiellement le rapport classique ; nous verrons effectivement à quel point ces problèmes, même dans leurs versions les plus simples, semblent difficiles à approximer en différentiel.

### 5.1. Les problèmes de satisfaisabilité entre eux

#### 5.1.1. Présentation

Soit  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  un ensemble de variables booléennes,  $L = \{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  l'ensemble des littéraux issus de  $X$  et  $C = \{c_1, \dots, c_m\} \subseteq \mathcal{P}'(L)$  un ensemble de clauses sur  $L$  où  $\mathcal{P}'(L)$  désigne l'ensemble des parties de  $L$  qui ne sont pas des tautologies ; une affectation des valeurs de vérité est un vecteur  $T \in \{0, 1\}^n$  dont la signification est la suivante :  $\forall i = 1, \dots, n, T_i = 1 \Leftrightarrow x_i$  est vraie et  $T_i = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_i$  est vraie. On appelle solution complémentaire d'une affectation  $T$  l'affectation notée  $\bar{T}$  constituée des valeurs opposées des composantes de  $T$  :  $\forall T \in \{0, 1\}^n, \forall j = 1, \dots, n, \bar{T}_j = 1 - T_j$ .

Les problèmes de la famille MaxSat (resp., MinSat) consistent à maximiser (resp., minimiser) le nombre de clauses contenant au moins un littéral vrai, tandis que les problèmes de la famille MaxCCSP (resp., MinCCSP) consistent à maximiser (resp., minimiser) le nombre de clauses avérées par tous ses littéraux. Les problèmes Max $k$ -Sat, Min $k$ -Sat, Max $k$ -CCSP et Min $k$ -CCSP sont les restrictions de ces problèmes aux instances composées exclusivement de clauses de taille au plus  $k$ , tandis que Max $E_k$ -Sat, Min $E_k$ -Sat, Max $E_k$ -CCSP et Min $E_k$ -CCSP désignent les restrictions de ces derniers aux instances composées de clauses de taille exactement  $k$ , qualifiées de  $k$ -clauses.

Les tautologies qualifient les clauses qui sont toujours vraies, indépendamment de l'affectation des valeurs de vérité : une clause  $c$  est une tautologie si  $c$  contient simultanément les littéraux  $\ell$  et  $\bar{\ell}$ , pour un littéral  $\ell$  de  $L$ . Une telle clause sera toujours vraie pour Sat, toujours fausse pour CCSP ; c'est pourquoi nous choisissons de travailler sur des instances qui n'en comportent pas. L'élimination de ces clauses n'a pas d'incidence ni quant à la performance relative des solutions, ni quant à l'évaluation des rapports d'approximation : le fait est évident pour CCSP, puisqu'une solution sur l'instance contenant des tautologies ou sur l'instance purgée de ses tautologies aura même valeur ; concernant MaxSat (resp., MinSat), il suffit de remarquer qu'un rapport classique  $m_{\text{MaxSat}}(I, T)/\beta(I) \geq r$  (resp.,  $\beta(I)/m_{\text{MinSat}}(I, T) \geq r$ ) sur l'instance sans tautologie induit le même niveau d'approximation sur l'instance augmentée de  $k$  tautologies :

$$\begin{aligned} \frac{m_{\text{MaxSat}}(I, T) + k}{\beta(I) + k} &\geq \frac{m_{\text{MaxSat}}(I, T)}{\beta(I)} \\ \frac{\beta(I) - k}{m_{\text{MinSat}}(I, T) - k} &\geq \frac{\beta(I)}{m_{\text{MinSat}}(I, T)} \end{aligned}$$

Quant au rapport différentiel, on sait bien qu'il n'est pas à une translation près, quel que soit le problème  $\Pi$ , l'instance  $I$ , la solution  $T$  et l'entier relatif  $k$  considérés :

$$\frac{\omega_{\Pi}(I) + k - (m_{\Pi}(I, T) + k)}{\omega_{\Pi}(I) + k - (\beta_{\Pi}(I) + k)} = \frac{\omega_{\Pi}(I) - m_{\Pi}(I, T)}{\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)}$$

Pour ces raisons, on se placera donc toujours dans le cadre de clauses constituées sur  $\mathcal{P}'(L)$ , ensemble des parties de  $L$  qui ne sont pas des tautologies.

Soit  $C$  un ensemble de  $m$  clauses sur un ensemble  $X$  de  $n$  variables ; on note  $\bar{X}$  la négation des variables de  $X$ ,  $L = X \cup \bar{X}$  l'ensemble des littéraux et  $\mathcal{CL} = \mathcal{P}'(L)$  l'ensemble des clauses que l'on peut former sur l'ensemble des littéraux de  $L$ . Dans le cas particulier d'instances composées de  $k$ -clauses,  $\mathcal{CL}$  coïncide avec l'ensemble  $\mathcal{P}'_k(L)$

des clauses de taille  $k$  que l'on peut construire sur  $L$ , et dans celui d'instances composées de clauses de taille au plus  $k$ ,  $\mathcal{CL}$  coïncide avec l'ensemble  $\cup_{h=0}^k \mathcal{P}'_h(L)$  de l'union des parties de taille au plus  $k$  de  $L$  ; dans un cas comme dans l'autre, la cardinalité  $|\mathcal{CL}|$  de l'ensemble  $\mathcal{CL}$  est toujours bornée par  $m^{k+1}$ . Enfin, soit  $c = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_k)$  une clause,  $\bar{c}$  désigne la clause  $(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2, \dots, \bar{\ell}_k)$  formée des littéraux opposés. Considérons alors les transformations  $\bar{f}$  et  $f^C$  qui, à partir d'une instance  $I = (X, C)$  d'un problème de satisfaisabilité, construisent respectivement les instances  $\bar{I}$  et  $I^C$  définies comme suit :  $\bar{f} : I_{\text{Sat}} \rightarrow I_{\text{Sat}}$  telle que  $I \mapsto \bar{I} = (X, \bar{C})$  où  $\bar{C} = \cup_{c \in C} \{\bar{c}\}$  et  $f^c : I_{k\text{-Sat}} \rightarrow I_{k\text{-Sat}}$  telle que  $I \mapsto I^C = (X, \mathcal{CL} \setminus C)$ .

Afin de pouvoir exploiter ces deux transformations dans le cadre de réductions, il nous faut vérifier qu'elles se déroulent bien en temps polynomial. La première,  $\bar{f}$ , consiste à recopier les paramètres de l'instance  $I$  en inversant seulement le sens des littéraux dans les clauses, ce qui demande  $n + m$  opérations. La seconde, dans le cas de  $k$ -clauses uniquement, recopie l'ensemble des variables puis engendre toutes les clauses possibles, le tout en  $n + |\mathcal{CL}|$  opérations ; chaque clause ayant dû être comparée aux clauses de l'instance initiale pour ne prendre que les clauses qui n'y figurent pas, il aura fallu procéder à, au pire,  $|\mathcal{CL}| \times m \times n^2$  comparaisons. Ces deux fonctions sur l'ensemble des instances des problèmes de satisfaisabilité, l'une dans le cas général, l'autre dans le cas de clauses de taille bornée par une constante, ont donc un déroulement en temps qui est polynomial en la taille  $\max\{m, n\}$  de l'instance initiale.

Nous allons à présent mettre à jour les relations qu'entretient l'instance  $I$  avec les instances  $\bar{I}$  et  $I^C$ . Soit  $T$  une affectation des valeurs de vérité, on passe des problèmes Sat et CCSP au travers des instances  $I$  et  $\bar{I}$  de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} c \text{ est satisfaite pour CCSP} & \Leftrightarrow & \text{tous les littéraux de } c \text{ sont vrais pour } T \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \bar{c} \text{ non satisfaite pour Sat} & \Leftrightarrow & \text{tous les littéraux de } \bar{c} \text{ sont faux pour } T \end{array}$$

Ce qui se traduit en termes de fonctions d'évaluation par la relation :

$$m_{\text{Sat}}(I, T) = m - m_{\text{CCSP}}(\bar{I}, T) \quad [5.1]$$

Bornons à présent le nombre de littéraux par  $k$  et notons  $\nu$  le nombre de clauses que l'on peut construire sur  $n$  littéraux : selon que l'on se limite ou non à des clauses de taille exactement  $k$ , on aura  $\nu = C_n^k$  ou  $\nu = \sum_{h=0}^k C_n^h$ . Toute affectation  $T$  des valeurs de vérité permet alors d'avérer  $\nu$  clauses de  $\mathcal{CL}$  pour CCSP puisque c'est là le nombre de clauses que l'on peut construire sur les  $n$  littéraux avérés par  $T$ . De même pour le problème Sat, seules les  $\nu$  clauses intégralement constituées de littéraux faux pour  $T$  ne seront pas avérées, autrement dit toute affectation des valeurs de vérité



satisfera  $|\mathcal{C}| - \nu$  clauses. Toute clause de  $\mathcal{C}$  se trouvant soit dans  $C$ , soit dans  $\mathcal{C} \setminus C$ , on en déduit entre les instances  $I$  et  $I^C$  les relations :

$$m_{\text{CCSP}}(I, T) = \nu - m_{\text{CCSP}}(I^C, T) \quad [5.2]$$

$$m_{\text{Sat}}(I, T) = (|\mathcal{C}| - \nu) - m_{\text{Sat}}(I^C, T) \quad [5.3]$$

où l'expression [5.3] est déduite par la combinaison des expressions [5.1] et [5.2].

### 5.1.2. Tous pour un

Nous montrons simplement que les relations que l'on vient d'évoquer ne sont que l'expression de la forte équivalence qui lie les problèmes Sat et CCSP dans leurs versions maximisation et minimisation puisqu'il s'agit là d'équivalence affine ; nous rappelons que sous le formalisme du rapport différentiel, deux problèmes liés de telle sorte sont totalement équivalents du point de vue de leur approximation.

**THÉORÈME 5.1.**— *MaxCCSP et MinSat sont affinement équivalents. Aussi, MaxSat et MinCCSP sont affinement équivalents.*

*Preuve.* D'après l'expression [5.1], la réduction  $(\bar{f}, Id)$  est bien une réduction affine de MaxSat à MinCCSP et de MinCCSP à MaxSat, de MaxCCSP à MinSat et de MinSat à MaxCCSP, avec  $k_I = -1$  et  $K_I = m$ . ■

**THÉORÈME 5.2.**— *Pour tout entier  $k \geq 2$ , les problèmes Maxk-Sat, MaxEk-Sat, Mink-Sat, MinEk-Sat, Maxk-CCSP, MaxEk-CCSP, Mink-CCSP et MinEk-CCSP admettent le même degré d'approximation différentielle.*

*Preuve.* Pour montrer ce théorème, nous mettons en évidence au cours des lemmes 5.1 et 5.2 certaines équivalences affines entre ces problèmes.

**LEMME 5.1.**—

- 1)  $\text{Maxk-Sat} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{Mink-CCSP}$  et  $\text{MaxEk-Sat} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MinEk-CCSP}$  ;
- 2)  $\text{Maxk-CCSP} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{Mink-Sat}$  et  $\text{MaxEk-CCSP} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MinEk-Sat}$  ;
- 3)  $\text{Maxk-Sat} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{Mink-Sat}$  et  $\text{MaxEk-Sat} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MinEk-Sat}$  ;
- 4)  $\text{Maxk-CCSP} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{Mink-CCSP}$  et  $\text{MaxEk-CCSP} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MinEk-CCSP}$ .

*Preuve du lemme 5.1.* Pour les points 1 et 2 on utilise l'argument du théorème 5.1. Pour le point 3, d'après l'expression [5.2], la réduction  $(f^C, Id)$  est bien une réduction fortement affine de Maxk-CCSP à Mink-CCSP et de Mink-CCSP à Maxk-CCSP, de

MaxEk-CCSP à MinEk-CCSP et de MinEk-CCSP à MaxEk-CCSP avec  $k_I = -1$  et  $K_I = \nu$ . Pour le point 4, d'après l'expression [5.3], la réduction  $(f^C, Id)$  est une réduction fortement affine de Maxk-Sat à Mink-Sat et de Mink-Sat à Maxk-Sat, de MaxEk-Sat à MinEk-Sat et de MinEk-Sat à MaxEk-Sat avec  $k_I = -1$  et  $K_I = |\mathcal{CL}| - \nu$ ; ceci termine la preuve du lemme 5.1.  $\diamond$

LEMME 5.2.—  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Max}k\text{-CCSP} \stackrel{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{Max}Ek\text{-CCSP}.$

*Preuve du lemme 5.2.* Soient  $k$  une constante entière, on considère la transformation  $t$  qui à toute instance  $I = (X, C)$  de  $k$ -CCSP associe l'instance  $I' = (X', C')$  du même problème définie comme suit : soit  $D = \{c \in C : |c| < k\}$ ; alors  $X' = X \cup \{y\}$  et  $C' = (C \setminus D) \cup D_P \cup D_N$  avec  $D_P = \bigcup_{c \in D} \{c \cup \{y\}\}$  et  $D_N = \bigcup_{c \in D} \{c \cup \{\bar{y}\}\}$ . L'instance  $I'$  est bien une instance de  $k$ -CCSP puisque son ensemble de clauses reprend celui de  $I$  pour l'ensemble  $C \setminus D$  et construit deux ensembles  $D_P$  et  $D_N$  en ajoutant le littéral  $y$  ou  $\bar{y}$  à des clauses de taille au plus  $k-1$ . Notant pour toute affectation  $T'$  des valeurs de vérité sur  $X'$  par  $T'_X$  la restriction de  $T'$  à l'ensemble  $X$ , on remarque entre les instances  $I$  et  $I'$  la relation :  $\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{n+1} / T'_X = T$ ,

$$m_{\text{CCSP}}(I', T') = m_{\text{CCSP}}(I, T) \quad [5.4]$$

puisque tous les littéraux d'une clause  $c$  sont vrais si et seulement si tous les littéraux de  $c$  et  $y$  ou tous les littéraux de  $c$  et  $\bar{y}$  sont vrais !

En appliquant itérativement  $k-1$  fois la transformation  $t$ , on obtient, en temps polynomial, une instance de Ek-CCSP : la plus petite clause de  $I$  contenant au moins un littéral, il faut au plus  $k-1$  itérations pour que toute clause soit transformée en une famille de  $k$ -clauses. Au pire,  $C$  contient  $m$  singletons et  $t^k$  aura construit  $2^{k-1}m$  clauses. Si l'on note pour  $h$  de 0 à  $k-1$  par  $X^h$  l'ensemble des variables de l'instance  $t^h(I)$ , alors l'expression [5.4] permet de déduire pour tout couple  $T$  et  $T'$  d'affectations sur  $X$  et  $X^{k-1}$  telles que  $T'_X = T : \forall h = 1, \dots, k-1$ ,  $m_{\text{CCSP}}(t^h(I), T'_{|X^h}) = m_{\text{CCSP}}(t^{h-1}(I), T'_{|X^{h-1}})$  ce qui implique :

$$m_{\text{CCSP}}(I^{k-1}, T') = m_{\text{CCSP}}(I, T)$$

Ainsi,  $t^k$  constitue bien une réduction affine de Maxk-CCSP à MaxEk-CCSP et de Mink-CCSP à MinEk-CCSP avec  $k_I = 1$  et  $K_I = 0$ , ce qui suffit, puisque le second problème est toujours un cas particulier du premier, à établir l'équivalence affine. Notons que, comme la relation obtenue sur la valeur des solutions entre les deux instances est linéaire, cette équivalence particulière vaut également pour le rapport classique. Ceci termine la preuve du lemme 5.2.  $\diamond$

Ainsi, lorsque l'on traite en approximation les problèmes  $\text{Min}k\text{-CCSP}$  ( $\text{Max}k\text{-CCSP}$ ) et  $\text{Min}Ek\text{-CCSP}$  ( $\text{Max}Ek\text{-CCSP}$ ), que ce soit sous l'angle classique ou différentiel, tout résultat établi pour l'une de ces deux familles de problèmes le sera par réduction pour l'autre. Ceci achève la démonstration du théorème 5.2. ■

Plus généralement, ces réductions permettent de traiter comme un seul toutes ces variations autour de la satisfaisabilité de clauses, conjonctives ou disjonctives, version minimisation ou maximisation, quand on le fait sous l'angle du rapport différentiel, et ce non seulement du point de vue de leur degré d'approximabilité mais aussi selon leurs optima  $h$ -locaux : les réductions proposées établissent une bijection entre les ensembles de solutions, de sorte que l'on peut considérer tous ces problèmes comme structurellement équivalents. Avec la mesure classique cependant, ces problèmes apparaissent soudainement, de par leurs différents degrés d'approximation, comme bien différents ; c'est pourquoi nous exposons par la suite des résultats d'approximation locale pour les problèmes de la famille  $\text{MaxSat}$  dans un premier temps, de la famille  $\text{MaxCCSP}$  dans un second temps. Pour ce faire, nous présentons au préalable un aperçu de la notion d'optimalité locale à taille bornée proposée par [ALI 97, KHA 98] qui enrichit considérablement les concepts fondateurs des classes  $\text{GLO}[\text{R}]$ . Grâce aux extensions des classes  $\text{GLO}[\text{R}]$  suggérées par ces travaux, nous pourrons plus en dire quant aux relations qu'entretiennent les problèmes de la famille  $\text{Max}Ek\text{-Sat}$  avec leurs optima locaux en termes de garantie d'approximation.

## 5.2. GLO et associés deuxième partie

Nous faisons dans ce paragraphe un rapide survol des résultats essentiels relatifs aux associés du  $\text{GLO}$ , de manière à se faire une bonne idée des résultats (relativement peu nombreux) obtenus à ce jour et se placer ainsi en situation de se poser par la suite de nouveaux problèmes.

P. Alimonti [ALI 97] montre par exemple que le problème  $\text{Max}2\text{-CCSP}$  n'appartient pas à la classe  $\text{GLO}$  mais qu'en revanche, tout optimum local miroir 1-borné garantit un rapport classique de  $1/4$ . Souvent, c'est l'ajout de la solution complémentaire  $\bar{s}$  qui permet à lui seul l'amélioration d'un rapport, et non pas l'observation de toutes les solutions de  $\mathcal{V}(I, \bar{s})$  ; pour désigner ces voisinages, Alimonti parle de voisinages *relaxés* (puisque l'on relaxe la contrainte de limitation de la vision que l'on pourrait avoir de l'ensemble des solutions à une distance de  $h$ ).

La classe  $\text{GGLO}[\text{R}]$  permet dans [ALI 97] de démontrer l'approximation du problème de  $\text{Max}k\text{-CSP}$  à  $2^{-k}$  par des optima 1-locaux altérés après avoir établi le mauvais comportement des optima  $h$ -locaux pour toute constante  $h$ . Les instances de ce problème pour une certaine constante  $k$  sont la donnée d'un ensemble  $X$  de variables et d'un ensemble  $C$  de contraintes booléennes  $k$ -aires sur  $X$ , chaque contrainte  $c_i$

consistant en l'évaluation d'un prédicat  $P_i$  de  $\{0,1\}^k$  dans  $\{0,1\}$  sur un sous-ensemble  $X_i$ ,  $|X_i| = k$  de  $X$ . Une solution est une affectation des valeurs de vérité et l'objectif est de maximiser le nombre de contraintes conjointement satisfaisables. La preuve proposée montre tout d'abord pour le cas particulier Max $k$ -CCSP qu'avec cet objectif qui ne compte que les clauses avérées par  $k$  littéraux, les optima locaux pour des voisinages  $h$ -bornés ne garantissent aucun rapport d'approximation ; en revanche, si l'on pondère judicieusement les clauses selon le nombre de littéraux vrais qu'elles contiennent, alors les optima 1-locaux relativement à cet objectif altéré valident au moins  $2^{-k}|C|$  clauses. Pour étendre ce résultat au problème Max $k$ -CSP, il suffit de remplacer chaque contrainte  $c_i$  par la disjonction des  $k$ -clauses conjonctives correspondant aux différentes affectations des variables de  $X_i$  qui permettent de vérifier  $c_i$  (par exemple, à la contrainte  $c_i = (x \vee y)$  sera associée la disjonction  $(x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$ ). La transformation est bien polynomiale puisque au plus  $2^k$  clauses peuvent être associées à chaque contrainte et sur cette instance  $I' = (X, C')$  de Max $k$ -CCSP, si un optimum local pour le problème altéré valide au moins  $2^{-k}|C'|$  clauses, alors il vérifiera *a fortiori* au moins  $2^{-k}|C|$  contraintes du problème initial.

Indépendamment des travaux de [ALI 97], la même approche de résolution de problèmes altérés a été présentée par [KHA 98] ; ils obtiennent des résultats plus qu'éloquents quant à la pertinence d'une telle stratégie de recherche locale, dont nous donnons quelques morceaux choisis dans le théorème suivant.

THÉORÈME 5.3.—

1) Max2-CCSP  $\notin$  GLO ;

2) pour le problème Max2-Sat, le rapport (classique) de performance d'un LSA selon le critère objectif standard est de  $2/3$  pour tout voisinage  $d$ -borné,  $d = \Theta(n)$ , tandis que celui d'un LSA selon un certain objectif altéré et relativement au voisinage 1-borné est de  $3/4$  ;

3) MaxSNP  $\subseteq$  GGLO.

Indications pour la preuve. Pour le point 1 considérer la famille d'instances  $I_{h,n}$  constituées de  $n$  variables  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ , des  $n(n-1)/2$  clauses  $(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$  pour  $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$  et des  $n \times h - h(h+1)/2$  clauses  $(x_i, x_j)$  pour  $i \neq j$ ,  $i \in \{1, \dots, h\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  ; l'affectation  $\vec{1}$  est un optimum local  $h$ -borné de valeur  $h \times n - h(h+1)/2 \sim h \times n$  quand  $\vec{0}$  est optimum global de valeur  $n(n-1)/2 \sim n^2$  !

Pour la seconde partie du point 2, prendre comme objectif altéré  $m'_{\text{Sat}}(I, T) = 3m_2 + 4m_1$  (au lieu de  $m_{\text{Sat}}(I, T) = m_2 + m_1$ ) (se référer aux notations introduites au paragraphe 5.3.3).

Pour le point 3, les auteurs montrent que  $\text{Max}k\text{-CSP}$ , qui est GGLO, est un problème de  $\text{MaxSNP}$  ; or, les arguments de représentation de toute instance d'un problème de  $\text{MaxSNP}$  sous forme d'une conjonction de contraintes  $k$ -aires sont donnés dans [PAP 91], l'idée étant de déployer le prédicat  $k$ -aire  $\phi$  sur les entrées plausibles (clauses pour un problème de satisfaisabilité, listes d'adjacence des sommets du graphe pour  $\text{MaxIS-}B$ ). ■

**PROPOSITION 5.1.** – *Aucun des problèmes  $\text{Max2-CCSP}$  et  $\text{Min2-CCSP}$ ,  $\text{Max2-Sat}$  et  $\text{Min2-Sat}$  ne peut être dans  $\text{GLO}[\delta]$ .*

*Preuve.* S'il existe pour toute constante  $h$  une suite d'instances et de mauvais optima  $h$ -locaux de ces instances pour  $\text{Max2-CCSP}$  au sens du rapport classique, alors cette suite est *a fortiori* mauvaise au sens du rapport différentiel ; on en déduit alors que  $\text{Max2-CCSP} \notin \text{GLO}[\delta]$  et par les équivalences qui lient les versions Min et Max des familles Sat et CCSP, on transporte ce résultat négatif de  $\text{Max2-CCSP}$  à l'ensemble de ces problèmes. ■

Enfin, pour le problème  $\text{Max2-CCSP}$ , le rapport d'approximation d'un optimum miroir 1-local pour ce problème n'est que de  $1/4$  quand celui d'un optimum 1-local miroir relativement à une certaine fonction objectif altérée monte à  $2/5$ .

La partie qui suit propose une illustration de ces différentes visions de l'optimalité locale à taille bornée par le biais de l'étude des problèmes des familles  $\text{MaxEk-Sat}$  et  $\text{MaxNAEk-Sat}$ . Nous parlerons d'optima *miroirs*  $h$ -locaux pour se référer au voisinage miroir  $h$ -borné et d'optima  $h$ -locaux *altérés* pour se référer à un voisinage  $h$ -borné relativement à un certain objectif altéré.

### 5.3. Déclinaison des problèmes de satisfaisabilité maximum en GLO

#### 5.3.1. Une opposition de plus entre rapports classique et différentiel

C'est un état de fait : en classique,  $\text{MaxEk-Sat}$  est *facile* dans le sens où tout optimum 1-local, comme nous le montrons dans ce chapitre, est une  $k/(k+1)$ -approximation (voir lemme 5.3). Plus éloquent peut-être encore, pour  $\text{MaxSat}$ , on peut trouver une  $1/2$ -approximation en comparant seulement les performances des solutions  $\vec{1}$  et  $\vec{0}$  (voir théorème 5.4) ! Du point de vue de l'approximation différentielle, les choses semblent beaucoup moins aisées : il faudrait par exemple considérer des voisinages  $h$ -bornés  $h \geq k$  pour seulement espérer établir l'appartenance de  $\text{MaxEk-Sat}$  à  $\text{GLO}[\delta]$ . Cette difficulté, pour un problème de maximisation, provient simplement du fait que le rapport classique situe la valeur d'une solution entre 0 et  $\beta$  quand le rapport différentiel la situe entre  $\omega$  et  $\beta$  :

$$v(T) \geq \rho\beta + (1 - \rho)\omega \Rightarrow v(T) \geq \rho\beta$$

Or, il n'y a, *a priori*, aucune raison pour que la pire solution soit de valeur nulle en général ; il n'y a, dans le cas particulier des problèmes de satisfaisabilité, aucune raison d'affirmer *a priori* l'existence d'une affectation des valeurs de vérité qui n'avère aucune clause.

### 5.3.2. MaxSat et CGLO

Dans ce petit paragraphe nous montrons l'appartenance de MaxSat à CGLO et quel rapport d'approximation classique cette appartenance permet de garantir.

Remarquons simplement que  $\forall T \in \{0, 1\}^n$ ,  $m_{\text{Sat}}(I, T) + m_{\text{Sat}}(I, \bar{T}) \geq m$ . Ceci implique  $\max\{m_{\text{Sat}}(I, T), m_{\text{Sat}}(I, \bar{T})\} \geq m/2$  et prouve le théorème suivant.

**THÉORÈME 5.4.**— *MaxSat*  $\in$  CGLO. Le rapport d'approximation classique garanti par cette appartenance est minoré par 1/2.

### 5.3.3. Maxk-Sat et GLO

Ausiello et Protasi [AUS 95b] ont prouvé l'appartenance de tout problème de satisfaisabilité maximum à la classe GLO par le biais du problème général MaxSat pour lequel tout optimum 1-local de toute instance garantit un rapport d'approximation classique de 1/2. Pour les sous-problèmes MaxEk-Sat, nous montrons que de tels optima locaux garantissent en réalité un rapport de  $k/(k+1)$ .

Soit  $I = (X, C)$  une instance de Ek-Sat et  $T$  une affectation des valeurs de vérité, on peut toujours supposer, quitte à échanger pour toute variable  $x_i$  telle que  $T_i = 0$  les occurrences des littéraux  $x_i$  et  $\bar{x}_i$ , que  $T = \bar{1}$ . Étant donnée une telle affectation  $T$ , la quantité  $m_a$  désignera pour tout entier  $a$  entre 0 et  $k$  le nombre de clauses contenant exactement  $a$  littéraux vrais pour  $T$ , les quantités  $m_a(i)$  et  $m_a(\bar{i})$  désigneront quant à elles pour  $i$  de 1 à  $n$  le nombre de clauses, parmi les clauses avérées par  $a$  littéraux, qui contiennent respectivement les littéraux  $x_i$  et  $\bar{x}_i$  ; bien sûr  $\sum_{a=0}^k m_a = m$ . Nous associons ainsi à toute solution  $T$  et pour  $a$  de 0 à  $k$  les ensembles et quantités suivantes :  $C_a = \{c \in C : |c \cap X| = a\}$  ( $m_a = |C_a|$ ),  $\forall i = 0, \dots, n$ ,  $C_a(i) = \{c \in C_a : x_i \in c\}$  ( $m_a(i) = |C_a(i)|$ )  $C_a(\bar{i}) = \{c \in C_a : \bar{x}_i \in c\}$  ( $m_a(\bar{i}) = |C_a(\bar{i})|$ ).

Les problèmes Sat (resp., CCSP) consistant à maximiser ou minimiser le nombre de clauses avérées par au moins un littéral (resp., tous ses littéraux), on a :  $\forall I = (X, C)$ ,  $\forall T \in \{0, 1\}^{|X|}$ ,  $m_{\text{Sat}}(I, T) = \sum_{a=1}^k m_a = m - m_0$  et  $m_{\text{CCSP}}(I, T) = m_k$ . Par ailleurs, si l'on considère l'affectation complémentaire  $\bar{T}$ , on remarque entre ces

deux problèmes les relations :

$$\begin{aligned} m_{\text{Sat}}(I, \overline{T}) &= \sum_{a=0}^{k-1} m_a = m - m_k = m - m_{\text{CCSP}}(I, T) \\ m_{\text{CCSP}}(I, \overline{T}) &= m_0 = m - m_{\text{Sat}}(I, T) \end{aligned}$$

Enfin, les quantités  $m_a(i)$  et  $m_a(\bar{i})$  vérifient,  $\forall a \in [0, k]$ , les relations :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_a(i) &= a m_a \\ \sum_{i=1}^n m_a(\bar{i}) &= (k - a) m_a \end{aligned}$$

LEMME 5.3.–  $\forall k \geq 2$ ,  $\text{MaxEk-Sat} \in \text{GLO}$ . Le rapport déduit de cette appartenance est minoré par  $k/(k+1)$ .

*Preuve.* Soit  $T$  une affectation des valeurs de vérité,  $T$  est un optimum local relativement au voisinage 1-borné si elle satisfait au moins autant de clauses que toute solution obtenue à partir de  $T$  en ne changeant la valeur que d'une composante. Pour  $i$  de 1 à  $n$ , on note  $T^i$  la solution voisine de  $T$  définie,  $\forall j = 1, \dots, n$ , par :

$$T_j^i = \begin{cases} 1 - T_j & \text{si } j = i \\ T_j & \text{sinon} \end{cases}$$

De  $T$  à  $T^i$ , lorsque seule change l'affectation de la variable  $x_i$ , les clauses non avérées par  $T$  qui contiennent le littéral  $\bar{x}_i$  deviennent vraies, les clauses avérées pour  $T$  par l'unique littéral  $x_i$  deviennent fausses :

$$\forall i = 1, \dots, n, m_{\text{Sat}}(I, T^i) = m_{\text{Sat}}(I, T) + m_0(\bar{i}) - m_1(i)$$

Notant, pour tout  $i$ ,  $\Delta^i = m_0(\bar{i}) - m_1(i)$  la différence de valeur entre les solutions  $T^i$  et  $T$ , l'optimalité locale de  $T$  s'exprime comme suit :  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\Delta^i \leq 0$  implique  $\sum_{i=1}^n m_1(i) \geq \sum_{i=1}^n m_0(\bar{i})$  qui est équivalent à  $m_1 \geq k m_0 = k(m - m_{\text{Sat}}(I, T))$ ; cette dernière expression est, à son tour, équivalente à  $k m_{\text{Sat}}(I, T) + m_1 \geq k m$ .

Les relations  $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_1$  et  $\beta_{\text{Sat}}(I) \leq m$  permettent alors de conclure :

$$(k+1)m_{\text{Sat}}(I, T) \geq km \Rightarrow \rho_{\text{Sat}}(I, T) \geq \frac{k}{k+1} \blacksquare$$

Notons que ce résultat a déjà été démontré dans [HAN 90], et ce pour le problème plus général  $\text{Max}k^+$ -Sat des problèmes de satisfaisabilité dont les clauses sont constituées non plus d'*exactement*  $k$  littéraux, mais d'*au moins*  $k$  littéraux.

**THÉORÈME 5.5.**—  $\forall k \geq 2$ ,  $\text{Max}k^+$ -Sat  $\in$  GLO et le rapport d'approximation déduit est minoré par  $k/(k+1)$ .

Ce résultat est élégamment démontré dans [BAT 98]. Il faut juste remarquer que, dans le cas de clauses de taille *supérieure ou égale* à  $k$ , l'égalité  $\sum_{i=1}^n m_0(i) = km_0$  devient une inégalité  $\sum_{i=1}^n m_0(i) \geq km_0$ , suffisante à l'établissement du résultat.

#### 5.3.4. $\text{Max}k$ -Sat et CGLO

Soit  $I = (X, C)$  une instance de  $Ek$ -Sat à  $m$  clauses et  $n$  variables, on suppose disposer d'un optimum local pour le voisinage miroir 1-borné  $T = \overline{1}$ . L'optimalité locale de  $T$  amène les expressions qui suivent.  $\forall i = 1, \dots, n$ , le fait que  $\Delta^i \leq 0$  implique :

$$m_1 + km_{\text{Sat}}(I, T) \geq km \quad [5.5]$$

Par ailleurs,  $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_{\text{Sat}}(I, \overline{T}) \Leftrightarrow m_k \geq m_0$  et ceci implique :

$$m_k + m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m \quad [5.6]$$

Or, on a toujours  $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_1 + m_k$ , ce qui permet de conclure en sommant les expressions [5.5] et [5.6] :  $(k+2)m_{\text{Sat}}(I, T) \geq (m_1 + m_k) + (k+1)m_{\text{Sat}}(I, T) \geq (k+1)m$ , soit  $\rho_{\text{Sat}}(I, T) \geq (k+1)/(k+2)$  ; nous avons ainsi démontré le lemme suivant.

**LEMME 5.4.**—  $\forall k \geq 2$ ,  $\text{Max}Ek$ -Sat  $\in$  CGLO ; le rapport d'approximation classique déduit est minoré par  $(k+1)/(k+2)$ .

Selon les mêmes arguments que dans GLO, on remarque que la portée de ce résultat s'étend aux instances constituées de clauses de taille *au moins*  $k$ , d'où le théorème suivant.



THÉORÈME 5.6.—  $\forall k \geq 2$ ,  $\text{Max}k^+\text{-Sat} \in \text{CGLO}$ . Le rapport déduit est minoré par  $(k+1)/(k+2)$ .

*Preuve.* Les expressions [5.5] et [5.6], ainsi que l'argument de conclusion :

$$m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_1 + m_k$$

sont toujours vrais en remplaçant la quantité  $m_k$  par la quantité  $m_{k+}$ , nombre des clauses dont *tous les littéraux sont vrais* :  $T$  est au moins aussi bonne que  $\bar{T}$  si  $m_{k+} \geq m_0$  et les clauses vraies pour tous leurs littéraux comportant au moins  $k$  littéraux,  $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_1 + m_{k+}$ . ■

### 5.3.5. $\text{MaxNAEk-Sat}$ et $\text{GLO}$

Une instance de  $\text{MaxNAESat}^1$  (resp.,  $\text{MaxNAEk-Sat}$ ) est la donnée d'un ensemble de clauses (resp., de  $k$ -clauses)  $C$  sur un ensemble  $X$  de variables et pour ce problème, une clause  $c$  est validée par une affectation  $T$  des valeurs de vérité si elle contient au moins un littéral rendu vrai et un littéral rendu faux par  $T$ . Ainsi, il s'agit de trouver une affectation  $T$  qui maximise le nombre des clauses conjointement avérées par  $T$  et son complémentaire  $\bar{T}$  :  $m + m_{\text{NAE}}(I, T) = m_{\text{Sat}}(I, T) + m_{\text{Sat}}(I, \bar{T})$ . Pour  $\text{NAESat}$ , deux clauses  $c = (\ell_1, \ell_2 \dots, \ell_p)$  et  $\bar{c} = (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2 \dots, \bar{\ell}_p)$  ont la même signification, sont une seule et même entrée ; aussi supposons-nous ne jamais disposer dans une instance, et ce quel que soit l'ensemble  $c$  de littéraux considéré, conjointement des formules équivalentes  $c$  et  $\bar{c}$ , à moins de se placer dans le cas pondéré.

LEMME 5.5.—  $(\forall k \geq 3, \text{MaxNAEk-Sat})$  et  $\text{MaxNAE2-Sat}$  sont dans  $\text{GLO}$ . Les rapports d'approximation déduits sont respectivement  $k/(k+1)$  et  $1/2$ .

*Preuve.* Soit  $I = (X, C)$  la donnée d'un ensemble  $C$  de  $m$   $k$ -clauses sur un ensemble  $X$  de  $n$  variables ; on cherche à trouver une affectation  $T$  des valeurs de vérité qui maximise la quantité  $\sum_{a=1}^{k-1} m_a = m - (m_0 + m_k)$ , nombre des clauses dont tous les littéraux ne sont pas affectés à même valeur. Remarquons que pour  $\text{NAEk-Sat}$ , les classes  $\text{GLO}$  et  $\text{CGLO}$  coïncident puisque deux affectations complémentaires  $T$  et  $\bar{T}$  vont valider exactement les mêmes clauses !

De  $T$  à  $T^i$ , les clauses ne comportant que des littéraux vrais ou que des littéraux faux peuvent être validées, tandis que les clauses avérées par un unique ou  $k-1$

---

1. *Max Not All Equal Sat*.

littéraux peuvent se trouver invalidées. Ainsi,  $T$  est un optimum 1-local s'il vérifie :  $\forall i = 1, \dots, n, m_{\text{NAE}}(I, T) \geq m_{\text{NAE}}(I, T^i)$  si et seulement si  $\forall i = 1, \dots, n, m_1(i) + m_{k-1}(\bar{i}) \geq m_0(\bar{i}) + m_k(i)$ . En sommant sur  $i$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_1(i) + \sum_{i=1}^n m_{k-1}(\bar{i}) &\geq \sum_{i=1}^n m_0(\bar{i}) + \sum_{i=1}^n m_k(i) \\ \Leftrightarrow m_1 + m_{k-1} &\geq k(m_0 + m_k) \\ &= k(m - m_{\text{NAE}}(I, T)) \end{aligned} \quad [5.7]$$

Pour  $k \geq 3$ ,  $m_{\text{NAE}}(I, T) \geq m_1 + m_{k-1}$  et l'expression [5.7] implique :

$$(k+1)m_{\text{NAE}}(I, T) \geq km$$

soit  $\rho_{\text{NAE}}(I, T) \geq k/(k+1)$ . Pour  $k = 2$ ,  $m_{\text{NAE}}(I, T) = m_1 = m_{k-1}$  et l'expression [5.7] implique  $2m_{\text{NAE}}(I, T) \geq 2(m - m_{\text{NAE}}(I, T))$ , soit  $m_{\text{NAE}}(I, T) \geq m/2$  : le rapport de  $1/2$  est obtenu. ■

Une fois encore, l'argumentation s'applique également aux instances constituées de clauses de taille *au moins*  $k$ .

**THÉORÈME 5.7.**—  $(\forall k \geq 3, \text{MaxNAE}k^+ \text{-Sat})$  et  $\text{MaxNAE}2^+ \text{-Sat}$  sont dans *GLO* avec les rapports d'approximation respectifs  $k/(k+1)$  et  $1/2$ .

*Preuve.* Si l'on note  $m_{-1}$  le nombre des clauses constituées de littéraux « tous vrais, sauf un » et  $m_{-1}(\bar{i})$  le nombre de ces clauses contenant le littéral  $\bar{x}_i$ , l'optimalité locale de  $T$  s'exprime alors par la relation :  $\forall i = 1, \dots, n, m_1(i) + m_{-1}(\bar{i}) \geq m_0(\bar{i}) + m_{k+1}(i)$  ; en sommant sur  $i$ , on obtient les nouvelles relations  $\sum_i m_1(i) = m_1$  et  $\sum_i m_{-1}(\bar{i}) = m_{-1}$ ,  $\sum_i m_0(\bar{i}) \geq km_0$  et  $\sum_i m_{k+1}(i) \geq km_{k+1}$ . Il suffit alors pour conclure de remarquer  $m_{\text{NAE}}(I, T) \geq m_1 + m_{-1}$  pour  $k \geq 3$  et  $m_{\text{NAE}}(I, T) \geq \max\{m_1, m_{-1}\}$  pour  $k = 2$ . ■

### 5.3.6. *Maxk-Sat et GCGLO*

Considérons une solution  $T$  qui est optimum 1-local du problème  $\text{MaxNAESat}$  et au moins aussi bonne, au sens de  $\text{MaxSat}$ , que son complémentaire  $\bar{T}$  ; elle assure un rapport classique  $\rho_{\text{Sat}}(I, T) \geq 2k/(2k+1)$ .

Effectivement, la preuve précédente nous donnait pour un optimum 1-local de  $\text{MaxNAESat}$  l'expression [5.7] :

$$m_1 + m_{k-1} \geq k(m - m_{\text{NAE}}(I, T)) \quad [5.8]$$

Or, les valeurs d'une affectation  $T$  aux sens de Sat et de NAE-Sat sont liées par la relation :

$$m_{\text{NAE}}(I, T) = m_{\text{Sat}}(I, T) + m_{\text{Sat}}(I, \overline{T}) - m \quad [5.9]$$

On déduit alors par la combinaison des expressions [5.7], [5.8] et [5.9] :

$$\begin{aligned} m_1 + m_{k-1} &\geq k(2m - m_{\text{Sat}}(I, T) - m_{\text{Sat}}(I, \overline{T})) \Leftrightarrow \\ m_1 + m_{k-1} + k(m_{\text{Sat}}(I, T) + m_{\text{Sat}}(I, \overline{T})) &\geq 2km \end{aligned}$$

ce qui mène, en remarquant  $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_1 + m_{k-1}$  et  $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_{\text{Sat}}(I, \overline{T})$ , à la conclusion puis au lemme :

$$(2k + 1)m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_1 + m_{k-1} + k(m_{\text{Sat}}(I, T) + m_{\text{Sat}}(I, \overline{T})) \geq 2km$$

LEMME 5.6.–  $\forall k \geq 3$ ,  $\text{MaxEk-Sat} \in \text{GCGLO}$ . Le rapport déduit est dans ce cas minoré par  $2k/(2k + 1)$ .

Le résultat du lemme 5.6 est généralisable au cas plus général de  $\text{Max}k^+\text{-Sat}$  comme le montre le théorème suivant.

THÉORÈME 5.8.–  $\forall k \geq 3$ ,  $\text{Max}k^+\text{-Sat} \in \text{GCGLO}$  et le rapport déduit est minoré par  $2k/(2k + 1)$ .

*Preuve.* En utilisant les mêmes notations qu'au cours du théorème précédent, on déduit le résultat des relations  $m_1 + m_{-1} \geq k(m_0 + m_{k+})$ ,  $m_0 + m_{k+} = 2m - (m_{\text{Sat}}(I, T) + m_{\text{Sat}}(I, \overline{T}))$  et  $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_1 + m_{-1}$ . ■

## 5.4. Les problèmes de satisfaction de contraintes conjonctives

### 5.4.1. Un problème difficile

En classique, le problème général n'est pas approximable à rapport constant, il l'est donc encore moins en différentiel ! Nous montrons ici que sa restriction, notée  $\text{MaxHornCCSP}$ , aux clauses contenant au plus un littéral positif (clauses de Horn dans le cas de clauses disjonctives), n'est toujours pas approximable à rapport différentiel constant, puisque le problème de stable maximum s'y réduit de façon assez naturelle.

PROPOSITION 5.2.—  $\text{MaxHornCCSP} \notin \text{APX}[\delta]$ .

*Preuve.* Nous montrons que  $\text{MaxIS} \overset{\text{AF}}{\propto} \text{MaxHornCCSP}$ .

Soit  $G(V, E)$  un graphe à  $n$  sommets et  $m$  arêtes,  $\Gamma(u)$  désigne pour tout sommet  $u$  de  $V$  sa liste d'adjacence :  $\forall u \in V, \Gamma(u) = \cup_{v \in V} \{v : uv \in E\}$ . On associe alors à chaque sommet  $u$  une variable binaire  $x_u$  et la clause  $c_u$  définie par  $c_u = (x_u, \wedge_{v \in \Gamma(u)} \bar{x}_v)$ . L'instance  $I$  de MaxCCSP ainsi obtenue est bien construite en temps polynomial puisqu'il suffit pour ce faire de parcourir la matrice d'adjacence sommets-sommets de taille  $n^2$  du graphe  $G$  et de doter chaque clause  $c_u$  de l'unique littéral positif  $x_u$ . Soit maintenant une affectation  $T$  des valeurs de vérité, on lui associe l'ensemble  $U_T$  des sommets  $u \in V$  pour lesquels la clause  $c_u$  est avérée par  $T$  ; alors  $T$  valide  $k$  clauses si et seulement si  $U_T$  est un stable de taille  $k$ . Or, il s'agit bien là d'une réduction surjective puisque tout ensemble stable  $U$  peut être déduit de l'affectation dans  $I$  qui met à 1 les variables  $x_u$  associées aux sommets  $u$  de  $U$  et à 0 les variables restantes qui correspondent aux sommets non sélectionnés par  $U$  : la transformation proposée est une réduction affine de MaxIS à MaxCCSP. L'inapproximabilité du MaxIS en différentiel conclut alors la preuve. ■

Considérons à présent la restriction MinHornSat de MinSat aux instances constituées de clauses de Horn, clauses disjonctives contenant au plus un littéral positif ; la forte relation qui unit les problèmes MaxCCSP et MinSat en différentiel reste vraie pour les restrictions MaxHornCCSP et MinHornSat que nous venons d'évoquer et nous permet de déduire pour ce dernier problème le même résultat d'inapproximation différentielle.

PROPOSITION 5.3.—  $\text{MinHornSat} \notin \text{APX}[\delta]$ .

*Preuve.* Remarquons que  $\forall I = (X, C) \in I_{\text{HornCCSP}}, I \in I_{\text{HornSat}}$  et aussi que  $\forall T \in \{0, 1\}^{|X|}, m_{\text{CCSP}}(I, \bar{T}) = |C| - m_{\text{Sat}}(I, T)$  ; ces relations établissent l'équivalence affine  $\text{MaxHornCCSP} \overset{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MinHornSat}$  qui, couplée au fait :

$$\text{MaxIS} \overset{\text{AF}}{\Leftrightarrow} \text{MaxHornCCSP}$$

(vu dans la preuve de la proposition 5.2), donne  $\text{MaxIS} \overset{\text{AF}}{\propto} \text{MinHornSat}$ . L'inapproximabilité du MaxIS en différentiel conclut alors la preuve. ■

Ce résultat est d'autant plus intéressant que la famille d'instances de MinHornSat que l'on déduit du problème de stable semble regrouper les instances les plus « faciles » à approcher en différentiel, étant de la forme  $\cup_{i=1}^m \{(u_i \wedge \bar{u}_1^i, \dots, \bar{u}_{n_i}^i)\}$  où  $u_1, \dots, u_m$  sont les  $m$  variables deux-à-deux distinctes correspondant aux sommets du graphe initial : toutes ces formules sont satisfaisables par l'affectation  $T = \bar{1}$ . Ceci revient à dire que la valeur d'une pire solution, avec  $\omega = m$ , est le pire que l'on puisse espérer dans l'absolu, ce qui place l'évaluation différentielle dans le cas le plus

favorable qu'il soit. La difficulté à approcher ces instances « faciles » est exprimée par le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 5.1.**— Le problème de satisfaisabilité minimum avec des clauses de Horn, même restreint aux instances satisfaisables, est non approximable à rapport  $n^{\varepsilon-1} \forall \varepsilon > 0$  pour le rapport différentiel.

Tant que nous en sommes à l'observation de problèmes difficiles pour l'approximation constante différentielle, considérons, même s'il ne s'agit pas là d'un problème de satisfaisabilité, la programmation linéaire en nombre entiers et plus précisément, en variables bivalentes  $\text{MinPL}\{0, 1\}$  ; nous en parlons ici car on sait montrer qu'il n'est pas possible, à moins que P ne coïncide avec NP, d'approcher ce problème à mieux que 0 à l'aide d'une réduction à partir de Sat. Notons que ce problème est également difficile en classique puisqu'il est NPO-complet (au sens d'une réduction préservant l'approximation à rapport constant), par réduction à partir d'une version variables-pondérée de Min3-Sat [ORP 87].

**THÉORÈME 5.9.**— *Tout algorithme polynomial  $\mathcal{A}$  approché pour  $\text{MinPL}\{0, 1\}$  établit un rapport différentiel de performance nulle :  $\delta_{\text{MinPL}\{0, 1\}} = 0$ .*

*Preuve.* Nous montrons le résultat par réduction à partir de Sat. Précisons au préalable qu'une instance de  $\text{MinPL}\{0, 1\}$  est la donnée d'une matrice  $A$   $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (matrice des contraintes), d'un vecteur  $b$  de  $\mathbb{Z}^m$  (membre droit) et d'un vecteur  $c$  de  $\mathbb{N}^n$  (fonction objectif) ; le but est de trouver, parmi les vecteurs  $x \in \{0, 1\}^n$  qui vérifient les contraintes  $Ax \geq b$ , l'un de ceux qui minimisent la fonction  $c \cdot x$ . La preuve que nous proposons consiste à transformer une instance du problème de décision Sat en une instance de  $\text{MinPL}\{0, 1\}$  dont la valeur à l'optimum permet de décider l'instance de Sat initiale. Soit donc  $I = (X, C)$  une instance de Sat à  $n$  variables et  $m$  clauses, il s'agit de savoir s'il existe ou non une affectation des valeurs de vérité qui satisfasse les  $m$  clauses de  $C$ . Pour  $i$  de 1 à  $m$ , on désigne par  $n_i$  le nombre de littéraux négatifs apparaissant dans  $c_i$  :  $\forall i = 1, \dots, m, n_i = |c_i \cap \overline{X}|$ .

L'instance  $I'$  de  $\text{MinPL}\{0, 1\}$  que l'on construit a pour variables de décision deux vecteurs  $y \in \{0, 1\}^n$  et  $z \in \{0, 1\}^m$  associés respectivement aux ensembles  $X$  et  $C$  et s'exprime de la façon suivante :

$$(I') = \begin{cases} \beta' = \min_{y, z} \overrightarrow{1}_m \cdot z \\ (1) \quad z_{i_1} + z_{i_2} \geq 1 \quad \forall (i_1 < i_2) \in \{1, \dots, m\} \\ (2) \quad \overrightarrow{1}_m \cdot z + \sum_{j: x_j \in c_i} y_j - \sum_{j: \bar{x}_j \in c_i} y_j \geq m - n_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

L'instance  $I'$  contient  $m(m-1)/2$  contraintes de type (1) et  $m$  contraintes de type (2) que l'on construit en temps polynomial en la taille  $\max\{n, m\}$  de  $I$ . On remarque que toute solution qui affecte le vecteur  $z$  à  $\overrightarrow{1}_m$  est réalisable : les contraintes

de type (1) sont trivialement vérifiées et pour tout  $i$ , la  $i^{\text{mathrm{mieme}}}$  contrainte de type (2) s'écrit alors :

$$\sum_{j: x_j \in c_i} y_j + \left( n_i - \sum_{j: \bar{x}_j \in c_i} y_j \right) \geq 0$$

devenant tout aussi trivialement vraie. On remarque de plus que toute solution réalisable satisfait les contraintes de type 1 si et seulement si au moins  $m - 1$  composantes du vecteur  $z$  sont non nulles :  $\exists i_1 \neq i_2$  tels que  $z_{i_1} = z_{i_2} = 0$  si et seulement si  $\exists i_1 \neq i_2$  tels que  $z_{i_1} + z_{i_2} = 0$ . Ainsi, toute instance  $I'$  a pour pire valeur  $m$  et pour valeur optimale  $m$  ou  $m - 1$ .

Nous montrons pour achever la preuve que l'on a l'équivalence :  $C$  est satisfaisable si et seulement si  $\beta' = m - 1$ . En fait, si  $C$  est satisfaisable, c'est qu'il existe une affectation  $T \in \{0, 1\}^n$  des valeurs de vérité qui satisfait chaque clause  $c_i$  de  $C$  ; posons alors  $y = T$ ,  $c_i$  est vérifiée par  $T$  signifie que  $T$  affecte au moins une variable positive de  $c_i$  à 1 ( $\exists x_j \in c_i \wedge T_j = 1$ ) ou une variable négative de  $c_i$  à 0 ( $\exists \bar{x}_j \in c_i \wedge T_j = 0$ ). Ceci se traduit en termes de variables  $y_j$  par la relation  $\mathcal{R}_i$  suivante :

$$\sum_{j: x_j \in c_i} y_j + \sum_{j: \bar{x}_j \in c_i} (1 - y_j) \geq 1$$

Ainsi, en posant  $y = T$  pour  $T$  satisfaisant  $C$  et pour n'importe quelle affectation du vecteur  $z$  à exactement  $m - 1$  composantes non nulles, on obtient une solution de valeur  $m - 1$  réalisable pour  $I'$  puisqu'elle vérifie bien chaque contrainte de type (2) :

$$\mathcal{R}_i \Leftrightarrow \sum_{j: x_j \in c_i} y_j - \sum_{j: \bar{x}_j \in c_i} y_j \geq 1 - n_i \Leftrightarrow (m - 1) + \sum_{j: x_j \in c_i} y_j - \sum_{j: \bar{x}_j \in c_i} y_j \geq m - n_i$$

Réciproquement, si  $\beta' = m - 1$ , c'est qu'il suffit d'affecter  $m - 1$  variables  $z_i$  à 1 pour satisfaire les contraintes de type 2, autrement dit pour tout  $i$ , la relation  $\mathcal{R}_i$  est vérifiée : on sait alors par l'affectation  $T = y$  que l'ensemble  $C$  de clauses est satisfaisable.

Un algorithme approché pour  $\text{MinPL}\{0, 1\}$ , pour garantir un rapport différentiel  $r$  non nul ( $r$  dépendant éventuellement des paramètres de l'instance), devrait sur l'instance particulière  $I'$  toujours renvoyer la valeur optimale et ce faisant, permettre la décision polynomiale de  $I$ . ■

Revenons à présent à l'approximation du problème qui fait l'objet de cette section,  $\text{MaxCCSP}$  ; nous nous cantonnerons à l'étude d'un des problèmes les plus simples de la classe,  $\text{Max2-CCSP}$ , qui n'en demeure par moins APX-complet [BER 92]. Alimonti [ALI 97] montre que pour toute constante  $k$  et toute instance du problème

Max $k$ -CCSP, tout optimum local pour un certain voisinage altéré 1-borné garantit un rapport  $1/(2^k - 1)$ . Dans le cas particulier  $k = 2$ , un optimum local miroir 1-borné garantit un rapport de  $1/4$ , qui monte à  $2/5$  lorsque l'on considère le voisinage miroir altéré 1-borné. Nous proposons dans ce paragraphe une amélioration de l'estimation du rapport classique obtenu par un optimum miroir 1-local de  $1/4$  à  $1/3$ .

#### 5.4.2. Vers le $1/4$ différentiel

Malheureusement, nous n'avons pas encore de résultat établi pour le problème général en différentiel ; aussi le rapport d'approximation que nous proposons ici n'est valable que si l'on s'intéresse uniquement à des instances « faciles » dans le sens où elles admettent une *mauvaise* pire solution, dont il peut, en conséquence, être plus aisé de s'éloigner. Effectivement, nous nous limitons à la famille des problèmes Max2-CCSP- $\ell$  qui désignent, pour une constante universelle  $\ell$  donnée, la restriction de Max2-CCSP aux familles de 2-clauses pour lesquelles une pire affectation des valeurs de vérité réalise au plus  $\ell$  clauses :

$$I_{2\text{-CCSP-}\ell} = \{I \in I_{2\text{-CCSP}} : \omega_{\text{CCSP}}(I) \leq \ell\}$$

Avant toute chose, assurons-nous que ce nouveau problème est bien dans NPO : il faut pour cela pouvoir déterminer en temps polynomial s'il existe une affectation des valeurs de vérité qui valide au plus  $\ell$  clauses pour CCSP, ce qui est équivalent à décider l'existence d'une affectation qui place un littéral faux dans au moins  $m - \ell$  clauses. Transformant  $I$  en  $\bar{I}$ , puisque par l'expression [5.1],  $\omega_{\text{CCSP}}(I) = m - \beta_{\text{Sat}}(\bar{I})$ , il s'agit donc de savoir décider en temps polynomial si  $\beta_{\text{Sat}}(\bar{I}) \geq m - \ell$ . Pour cela, il suffit de générer toutes les sous-familles de  $\bar{I}$  de taille  $m - \ell$  et de décider pour chacune d'entre elles, puisque  $2 - \text{Sat}$  est polynomial, si la sous-famille est satisfaisable. Une pire solution valide au plus  $\ell$  clauses du problème initial si et seulement s'il existe, parmi ces  $C_{\ell}^{m-\ell}$  instances de  $2 - \text{Sat}$ , au moins une formule satisfaisable et nous savons décider cela en temps polynomial !

**THÉORÈME 5.10.** –  $\forall \ell$  constante, Max2-CCSP- $\ell \in \text{CGLO}[\delta]$  et le rapport différentiel déduit est minoré par  $1/4$ .

*Preuve.* Soit  $\ell$  une constante et  $I$  une instance de Max2-CCSP- $\ell$  ; par définition, la valeur d'une pire solution satisfait la condition  $\omega_{\text{CCSP-}\ell}(I) \leq \ell$ . Nous étudions alors deux cas selon la valeur  $\beta_{\text{CCSP-}\ell}(I)$  d'une solution optimale.

**Cas  $\beta_{\text{CCSP-}\ell}(I) \leq m - 3\ell$**

On déduit alors la relation :

$$\beta_{\text{CCSP-}\ell}(I) + 3\omega_{\text{CCSP-}\ell}(I) \leq m \quad [5.10]$$

Exploitions la solution  $T$  ; si pour tout  $i$  de 1 à  $n$ ,  $T^i$  désigne la solution qui ne diffère de  $T$  que sur la  $i^e$  variable et  $\Delta^i = m_{\text{CCSP}}(I, T^i) - m_{\text{CCSP}}(I, T)$  la différence des performances réalisées par ces deux affectations, l'optimalité 1-locale de  $T$  se traduit alors,  $\forall i$ , de la sorte :

$$\begin{aligned} m_{\text{CCSP}}(I, T) \geq m_{\text{CCSP}}(I, T^i) &\Leftrightarrow \Delta^i = m_1(\bar{i}) - m_2(i) \leq 0 \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n (m_1(\bar{i}) - m_2(i)) &\leq 0 \Leftrightarrow m_1 \leq 2m_2 \end{aligned} \quad [5.11]$$

De plus, la considération de la solution complémentaire nous amène à :

$$m_2 = m_{\text{CCSP}}(I, T) \geq m_{\text{CCSP}}(I, \bar{T}) = m_0 \Leftrightarrow m_0 \leq m_2 \quad [5.12]$$

Il reste à composer les expressions [5.10], [5.11] et [5.12] pour conclure :

$$\begin{aligned} m = m_0 + m_1 + m_2 &\leq (1 + 2 + 1)m_2 \Leftrightarrow \\ m_2 &\geq m/4 \geq \frac{1}{4}\beta_{\text{CCSP}}(I) + \frac{3}{4}\omega_{\text{CCSP}}(I) \end{aligned} \quad [5.13]$$

**Cas  $\beta_{\text{CCSP-}\ell}(I) \geq m - 3\ell$**

Si la valeur optimale vérifie cette relation, alors on sait résoudre le problème à l'optimum ! Effectivement, soit  $\bar{I}^C = (f^C \circ f(I))$ , on a  $|\bar{I}^C| = 2^k \times C_n^k - m$  et d'après les expressions [5.1] et [5.2] :

$$\begin{aligned} m_{\text{CCSP}}(I, T) &= \binom{n}{k} - \left( \left( 2^k \times \binom{n}{k} - m \right) - m_{\text{Sat}}(\bar{I}^C, T) \right) \\ &= m - (2^k - 1) \binom{n}{k} + m_{\text{Sat}}(\bar{I}^C, T) \end{aligned}$$

Pour le cas  $k = 2$  qui nous intéresse, notons  $K = (2^k - 1)C_n^2$ , on déduit de l'équivalence affine unissant les deux instances :

$$\begin{aligned} \beta_{\text{CCSP}}(I) &= m - K + \beta_{\text{Sat}}(\bar{I}^C) \Rightarrow \\ \beta_{\text{CCSP}}(I) &\geq m - 3\ell \Leftrightarrow \beta_{\text{Sat}}(\bar{I}^C) \geq K - 3\ell \end{aligned}$$



Ceci nous apprend qu'il est équivalent de savoir résoudre à l'optimum les instances  $\bar{I}^C$  et  $I$  des problèmes MaxSat et MaxCCSP. Or, nous savons trouver une solution optimale de  $\bar{I}^C$ , parce que Max2-Sat est décidable en temps polynomial et qu'une solution optimale de  $\bar{I}^C$  satisfait au moins  $K - 3\ell$  clauses. Effectivement, on teste d'abord si  $\bar{I}^C$  est satisfaisable ; si oui, on a l'optimum, et sinon, on teste toute sous-famille de  $K - 1$  clauses et ainsi de suite, jusqu'à trouver une sous-famille satisfaisable. Il aura fallu au pire tester toutes les sous-familles de  $K - h$  clauses pour  $h$  de 0 à  $3\ell$ , soit un nombre  $\mu$  d'instances à considérer d'au plus :

$$\mu = \sum_{j=0}^{j=3\ell} \binom{K}{K-j} \leq K^{3\ell+1}$$

Ainsi, le cas  $\beta_{\text{CCSP-}\ell}(I) \geq m - 3\ell$  est bien résolu à l'optimum en temps polynomial.

Par conséquent, c'est l'expression [5.13] qui permet d'évaluer le rapport d'approximation au pire des cas pour Max2-CCSP- $\ell$ , ce qui conclut la preuve du théorème. ■

Remarquons que, d'après la preuve précédente, tout optimum local du cas général Max2-CCSP vérifie  $m_2 \geq m/4$  ; cela nous conduit à la proposition suivante de [ALI 97].

**PROPOSITION 5.4.**— *Max2-CCSP  $\in$  CGLO et le rapport d'approximation déduit est minoré par 1/4.*

En toute rigueur, nous aurions dû parler du problème MaxE2-CCSP puisque les instances considérées étaient composées exclusivement de 2-clauses, et non de clauses de taille *au plus* 2 ; cependant, on voit facilement que les arguments utilisés à l'établissement du précédent résultat sont valides pour le cas plus général Max2-CCSP. Si l'on note  $m_{-1}$  (resp.,  $m_{-1}(\bar{i})$ ) le nombre des clauses qui, pour l'affectation  $T$ , comportent exactement 1 littéral faux (resp., l'unique littéral faux  $\bar{x}_i$ ) et  $m_{2-}$  (resp.,  $m_{2-}(i)$ ) le nombre des clauses dont tous les littéraux sont vrais pour  $T$  (resp., dont tous les littéraux sont vrais pour  $T$  et qui comportent le littéral  $x_i$ ), l'optimalité locale de  $T$  induit alors pour tout  $i$  la relation  $m_{2-}(i) \geq m_{-1}(\bar{i})$ , et en sommant ces inégalités sur  $i$  :  $2m_{2-} \geq \sum_{i=1}^n m_{2-}(i) \geq \sum_{i=1}^n m_{-1}(\bar{i}) = m_{-1}$ . Ainsi, avec  $m_{\text{CCSP}}(I, T) = m_{2-}$ ,  $m_{\text{CCSP}}(I, \bar{T}) = m_0$  et  $m_{\text{CCSP}}(I, T) \geq m_{\text{CCSP}}(I, \bar{T})$  on obtient bien :

$$\begin{aligned} 4m_{\text{CCSP}}(I, T) &\geq m_{\text{CCSP}}(I, T) + 2m_{\text{CCSP}}(I, T) + m_{\text{CCSP}}(I, \bar{T}) \\ &\geq m_{2-} + m_{-1} + m_0 = m \end{aligned}$$

Les résultats obtenus par réductions, tant pour l'appartenance de Max2-CCSP- $\ell$  à NPO que pour la résolution polynomiale à l'optimum du cas  $\beta_{\text{CCSP-}\ell}(I) \geq m - 3\ell$ ,

restent tout aussi valables : la première ne fait aucunement mention de l'exactitude de la taille des clauses ; pour la seconde, si  $I$  est constituée de  $M_1$  1-clauses et  $M_2$  2-clauses, l'instance de Max2-Sat construite fera apparaître un ensemble complémentaire de  $(2n - M_1) + (2n(n - 1) - M_2) = 2n^2 - m$  clauses, quantité toujours polynomiale de même ordre  $\mathcal{O}(n^2)$ , et la constante  $K$  qui relie les valeurs optimales des deux instances ne sera plus  $2^k \times C_n^2 - C_n^2$  mais  $2n^2 - (n + C_n^2)$  (la différence entre le nombre de 2-clauses et de 1-clauses, hors tautologies, que l'on peut construire sur  $n$  variables, et le nombre de ces clauses qui sont fausses pour une affectation donnée des valeurs de vérité).

Nous avons déjà mentionné dans l'énoncé de la proposition 5.4 que cette qualité, à moins d'un quart de l'optimum, des optima locaux de Max2-CCSP a déjà été montrée (pour le rapport classique) dans [ALI 97] ; cependant, nous allons voir que les optima 1-locaux sont encore meilleurs que cela, puisqu'ils garantissent, toujours en classique, un rapport de  $1/3$ .

### 5.4.3. Approximation à $1/3$

Nous allons montrer maintenant que les optima locaux pour le voisinage miroir 1-borné garantissent en réalité un rapport d'approximation classique de  $1/3$ .

THÉORÈME 5.11.— *Max2-CCSP  $\in$  CGLO ; le rapport déduit est minoré par  $1/3$ .*

*Preuve.* Soit  $I = (X, C)$  une instance du problème Max2-CCSP à  $m = |C|$  clauses et  $n = |X|$  variables ; on considère deux solutions  $T = \vec{1}$  optimum local pour le voisinage miroir 1-borné et  $T^*$  optimum global. Soient  $P = \{i = 1, \dots, n : T_i = T_i^*\}$  l'ensemble des indices des variables dont l'affectation coïncide sur  $T$  et  $T^*$ , de cardinalité  $p$  ; on peut toujours supposer  $P = \{1, \dots, p\}$  et l'on note  $Q = \{p + 1, \dots, n\}$  son complémentaire. Considérons alors les notations suivantes pour deux ensembles d'indices  $I \in \{P, Q\}$  et  $J \in \{P, Q\}$  :

$$\begin{aligned} IJ &= \{(x_i, x_j) \in C_2 : (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{IJ} = |IJ| \\ I\bar{J} &= \{(x_i, \bar{x}_j) \in C_1 : (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{I\bar{J}} = |I\bar{J}| \\ \bar{I}J &= \{(\bar{x}_i, x_j) \in C_1 : (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{\bar{I}J} = |\bar{I}J| \\ \bar{I}\bar{J} &= \{(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \in C_0 : (i, j) \in I \times J\} & \text{et} & \quad m_{\bar{I}\bar{J}} = |\bar{I}\bar{J}| \\ I &= \{(x_i) \in C_1 : i \in I\} & \text{et} & \quad m_I = |I| \\ \bar{I} &= \{(\bar{x}_i) \in C_0 : i \in I\} & \text{et} & \quad m_{\bar{I}} = |\bar{I}| \end{aligned}$$

Nous reprenons par ailleurs les notations de la fin du paragraphe 5.4.2 ; les quantités  $m_{PP}, m_{PQ}, m_{QQ}, m_{P\bar{P}}, m_{\bar{P}Q}, m_{P\bar{Q}}, m_{Q\bar{Q}}, m_{\bar{P}\bar{P}}, m_{\bar{P}\bar{Q}}, m_{\bar{Q}\bar{Q}}, m_P, m_Q, m_{\bar{P}}$  et  $m_{\bar{Q}}$  ainsi définies vérifient naturellement :  $m_{2-} = m_P + m_Q + m_{PP} + m_{PQ} + m_{QQ}$  (nombre des clauses dont tous les littéraux sont vrais),  $m_{-1} = m_{\bar{P}} + m_{\bar{Q}} + m_{P\bar{P}} +$

$m_{\overline{PQ}} + m_{P\overline{Q}} + m_{Q\overline{Q}}$  (nombre des clauses dont un littéral exactement est faux)  
 $m_0 = m_{\overline{P}} + m_{\overline{Q}} + m_{\overline{P}\overline{P}} + m_{\overline{P}\overline{Q}} + m_{\overline{Q}\overline{Q}}$  (nombre des clauses dont tous les littéraux sont faux) et les valeurs des solutions  $T$ ,  $T^*$  et  $\overline{T}$  sont données par :  $m_{\text{CCSP}}(I, T) = m_{2-}$ ,  
 $m_{\text{CCSP}}(I, T^*) = m_P + m_{\overline{Q}} + m_{PP} + m_{P\overline{Q}} + m_{\overline{Q}\overline{Q}}$  et  $m_{\text{CCSP}}(I, \overline{T}) = m_0$ .

L'optimalité locale de  $T$  nous indique notamment les relations :

*1-local* :  $\forall i \in Q, \Delta^i \leq 0 \Leftrightarrow m_{-1}(\overline{i}) - m_{2-}(i) \leq 0$  ; en additionnant  $\forall i \in Q$  nous obtenons  $m_{\overline{Q}} + m_{P\overline{Q}} + m_{Q\overline{Q}} \leq m_Q + m_{PQ} + 2m_{QQ}$ ,

*miroir* :  $m_{2-} \geq m_0 \Leftrightarrow m_P + m_Q + m_{PP} + m_{PQ} + m_{QQ} \geq m_{\overline{P}} + m_{\overline{Q}} + m_{\overline{P}\overline{P}} + m_{\overline{P}\overline{Q}} + m_{\overline{Q}\overline{Q}}$ ,

qui nous permettent de conclure :

$$\begin{aligned}
 3m_{\text{CCSP}}(I, T) &= m_{\text{CCSP}}(I, T) + (m_Q + m_{PQ} + 2m_{QQ}) \\
 &\quad + (2m_P + m_Q + 2m_{PP} + m_{PQ}) \\
 &\geq (m_{\overline{P}\overline{P}} + m_{\overline{P}\overline{Q}} + m_{\overline{Q}\overline{Q}}) + (m_{P\overline{Q}} + m_{Q\overline{Q}}) \\
 &\quad + (m_P + m_{PP}) \\
 &\geq m_{\text{CCSP}}(I, T^*) \blacksquare
 \end{aligned}$$

## 5.5. Limites de l'approche GLO

### 5.5.1. 1/3, le meilleur de CGLO pour Max2-CCSP

Le rapport précédent, relativement facile à obtenir, présente le fait surprenant d'être aussi bon que celui réalisé par tout optimum local d'un voisinage miroir  $h$ -borné pour toute constante  $h$  : 1/3 est donc non seulement une borne pour les optima 1-locaux mais aussi pour le voisinage miroir  $h$ -borné ; nous montrons maintenant que cette borne est asymptotiquement atteinte.

**THÉORÈME 5.12.**— *Pour toute constante  $h \in \mathbb{N}$  et pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  miroir  $h$ -borné pour CCSP, il existe une suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  d'instances de MaxE2-CCSP et une suite  $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$  d'optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  de ces instances qui vérifient :*

$$\rho_{\text{CCSP}}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1/3$$

*Preuve.* Tout optimum miroir  $h$ -local est *a fortiori* optimum miroir 1-local et garantit donc d'après le théorème 5.11 un rapport classique de 1/3. Sur la base des notations de

la démonstration du théorème précédent, on note  $X_P = \{x_1, \dots, x_p\}$  l'ensemble des variables d'indice dans  $P$  et  $X_Q = \{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+q}\}$  l'ensemble des variables d'indice dans  $Q$  ( $n = p + q$  et  $X = X_P \sqcup X_Q$ ). Soient  $h \geq 2$  une constante entière et  $q$  un entier suffisamment grand ( $q \geq h^2$ ), on pose  $p = q(q - h)$  et l'on construit l'instance  $I = (X_P \cup X_Q, QQ \cup PQ \cup Q\overline{Q})$  suivante :

$X_P$  :  $X_P = \cup_{i=1}^q X_{P^i}$  tel que  $|X_{P^i}| = q - h$ , pour tout  $i$  et  $X_{P^i} \cap X_{P^j} = \emptyset \Rightarrow i = j$  ( $X_P$  est partitionné en  $q$  ensembles de variables  $X_{P^i}$  de même taille  $q - h$ );

$QQ$  :  $QQ = \mathcal{P}_2(X_Q) \Rightarrow m_{QQ} = q(q - 1)/2$ ;

$\overline{Q\overline{Q}}$  :  $\overline{Q\overline{Q}} = \mathcal{P}_2(\overline{X_Q}) \setminus E$ ,  $|E| = h \Rightarrow m_{\overline{Q\overline{Q}}} = (q(q - 1)/2) - h$ , où  $E$  est un ensemble quelconque de  $h$  clauses composées de littéraux de  $\overline{X_Q}$ ;

$P\overline{Q}$  :  $P\overline{Q} = \cup_{i=1}^q X_{P^i} \times \{\bar{x}_{p+i}\} \Rightarrow m_{P\overline{Q}} = q(q - h)$ .

Considérons la solution  $T$  qui consiste à prendre pour vrais les littéraux de  $X_P$  et de  $X_Q$ ; l'optimum est quant à lui atteint en affectant à un les littéraux de  $X_P$  et de  $\overline{X_Q}$ . Ces deux solutions sont respectivement de valeur  $m_{\text{CCSP}}(I, T) = m_{QQ} = q(q - 1)/2$  et  $\beta_{\text{CCSP}}(I) = m_{P\overline{Q}} + m_{\overline{Q\overline{Q}}} = q(q - h) + q(q - 1)/2 - h$ . La solution  $T$  réalise donc un rapport classique de :

$$\frac{\frac{q(q-1)}{2}}{q(q-h) + \frac{q(q-1)}{2} - h} \underset{q \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{q^2/2}{3q^2/2} = \frac{1}{3}$$

Il nous reste à prouver que  $T$  est un optimum miroir  $h$ -borné pour tout  $q \geq h^2$  pour démontrer le théorème; c'est là le rôle des trois lemmes suivants.

LEMME 5.7.–  *$T$  est au moins aussi bonne que son complémentaire.*

*Preuve du lemme 5.7.* Il suffit de remarquer que  $m_{\text{CCSP}}(I, \overline{T}) = m_{\overline{Q\overline{Q}}} = (q(q - 1)/2) - h = m_{\text{CCSP}}(I, T) - h < m_{\text{CCSP}}(I, T)$  pour s'en persuader.  $\diamond$

LEMME 5.8.–  *$T$  est au moins aussi bonne que toute solution obtenue à partir de  $T$  en changeant au plus l'affectation de  $h$  variables.*

*Preuve du lemme 5.8.* Si l'on change l'affectation des variables d'un sous-ensemble  $L_Q$  de  $X_Q$  de taille  $\ell_Q \leq h$  : on avert  $\ell_Q \times (q - h)$  clauses de  $P\overline{Q}$  et au plus  $\ell_Q(\ell_Q - 1)/2$  clauses de  $\overline{Q\overline{Q}}$ ; en revanche,  $\ell_Q(q - \ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q - 1)/2$  clauses de  $QQ$  deviennent fausses ( $\ell_Q(q - \ell_Q)$  clauses constituées d'un littéral de  $L_Q$  et d'un littéral de  $X_Q \setminus L_Q$ ,  $\ell_Q(\ell_Q - 1)/2$  clauses constituées de deux littéraux de  $L_Q$ ). Ainsi,

la valeur de la solution voisine  $T'$  considérée est  $\forall \ell, 0 \leq \ell_Q \leq h$ , d'au plus :

$$\begin{aligned}
 m_{\text{CCSP}}(I, T') &\leq m_{\text{CCSP}}(I, T) + \left( \ell_Q(q - h) + \frac{\ell_Q(\ell_Q - 1)}{2} \right) \\
 &\quad - \left( \ell_Q(q - \ell_Q) + \frac{\ell_Q(\ell_Q - 1)}{2} \right) \\
 &= m_{\text{CCSP}}(I, T) + \ell_Q(q - h - q + \ell_Q) \\
 &= m_{\text{CCSP}}(I, T) + \ell_Q(\ell_Q - h) \leq m_{\text{CCSP}}(I, T)
 \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme 5.8.  $\diamond$

LEMME 5.9.— *T est au moins aussi bonne que toute solution obtenue à partir de  $\overline{T}$  en changeant au plus l'affectation de h variables.*

*Preuve du lemme 5.9.* Soient  $L_P \subseteq X_P$  et  $L_Q \subseteq X_Q$  deux sous-ensembles de variables dont les cardinalités  $\ell_P = |L_P|$  et  $\ell_Q = |L_Q|$  vérifient  $\ell_P + \ell_Q \leq h$  ; on considère alors la solution  $T'$  obtenue à partir de l'affectation  $\overline{T} = \overrightarrow{0}$  en mettant à 1 toutes les variables contenues dans les ensembles  $L_P$  et  $L_Q$ . Parmi les clauses de l'ensemble  $P\overline{Q}$ , au plus  $\ell_P$  vont être avérées (une par littéral de  $L_P$ ) et parmi les clauses de l'ensemble  $QQ$ , exactement  $\ell_Q(\ell_Q - 1)/2$  vont être avérées. En revanche, peuvent devenir fausses  $\max\{(\ell_Q(q - \ell_Q) + \ell_Q(\ell_Q - 1)/2) - h, 0\}$  clauses de  $\overline{Q}\overline{Q}$ . Ainsi, la valeur de  $T'$  vérifie :

$$\begin{aligned}
 m_{\text{CCSP}}(I, T') &\leq m_{\text{CCSP}}(I, \overline{T}) + \left( \ell_P + \frac{\ell_Q(\ell_Q - 1)}{2} \right) \\
 &\quad - \max \left\{ \left( \ell_Q(q - \ell_Q) + \frac{\ell_Q(\ell_Q - 1)}{2} \right) - h, 0 \right\} \\
 &= m_{\text{CCSP}}(I, T) - h + \left( \ell_P + \frac{\ell_Q(\ell_Q - 1)}{2} \right) \\
 &\quad - \max \left\{ \left( \ell_Q(q - \ell_Q) + \frac{\ell_Q(\ell_Q - 1)}{2} \right) - h, 0 \right\}
 \end{aligned}$$

Si  $\ell_Q = 0$ , on déduit directement de l'inégalité précédente :

$$m_{\text{CCSP}}(I, T') \leq m_{\text{CCSP}}(I, T) + (\ell_P - h) \leq m_{\text{CCSP}}(I, T) \quad [5.14]$$

sinon,  $\ell_Q \geq 1$ , et l'on déduit des hypothèses  $q \geq h^2$ ,  $h \geq 2$  et  $\ell_P \leq h$  les relations :

$$\ell_Q (q - \ell_Q) \geq (q - 1) \Rightarrow \begin{cases} \ell_Q (q - \ell_Q) + \frac{\ell_Q (\ell_Q - 1)}{2} & \geq h \\ \ell_Q (q - \ell_Q) & \geq \ell_P \end{cases} \quad [5.15]$$

Les expressions [5.14] et [5.15] permettent maintenant de conclure la preuve du lemme 5.9 :

$$\begin{aligned} m_{\text{CCSP}}(I, T') &\leq m_{\text{CCSP}}(I, T) - h + \ell_P + \frac{\ell_Q (\ell_Q - 1)}{2} \\ &\quad - \ell_Q (q - \ell_Q) - \frac{\ell_Q (\ell_Q - 1)}{2} + h \\ &= m_{\text{CCSP}}(I, T) + (\ell_P - \ell_Q (q - \ell_Q)) \\ &\leq m_{\text{CCSP}}(I, T) \diamond \end{aligned}$$

Les lemmes 5.7, 5.8 et 5.9 démontrent bien que  $T$  est un optimum miroir  $h$ -borné pour tout  $q \geq h^2$ , complétant ainsi la preuve du théorème. ■

### 5.5.2. 1/5, le meilleur espoir de CGLO[ $\delta$ ] pour Max2-CCSP

Effectivement, par le biais d'optima locaux miroirs  $h$ -bornés, on ne peut espérer mieux que 1/5, limite du rapport différentiel obtenu par la suite des optima locaux de la famille d'instances que nous venons de construire. Prenons cependant garde à relativiser la portée de ce résultat en se rappelant que nous ne savons toujours pas pour l'instant s'il existe une approximation à rapport différentiel constant pour ce problème !

Reprenons la famille d'instances précédente et tentons d'évaluer la valeur d'une pire solution ; tout d'abord, une telle solution, pour ne satisfaire aucune clause de  $P\overline{Q}$ , affectera nécessairement les variables de l'ensemble  $X_P$  à 0. Quant à  $X_Q$ , une affectation  $T$  des valeurs de vérité qui affecte  $k$  variables  $x'_1, \dots, x'_k$  de  $X_Q$  à 1 vérifie toujours dans  $QQ$  les  $C_k^2$  clauses de l'ensemble  $\mathcal{P}_2(\{x'_1, \dots, x'_k\})$ , dans  $\overline{Q}\overline{Q}$  au moins  $C_{q-k}^2 - h$  clauses de l'ensemble  $\mathcal{P}_2(\{\bar{x}'_{k+1}, \dots, \bar{x}'_q\}) \setminus E$  ; la somme,  $k(k-1)/2 + (q-k)(q-k-1)/2 - h = 1/2(q^2 + 2k^2 - q(2k+1)) - h$ , est minimum pour  $k = q/2$ . Ainsi, même une pire solution vérifiera au moins  $\lceil 2C_{q/2}^2 \rceil - h = \lceil q/2(q/2 - 1) \rceil - h$  clauses :  $\omega_{\text{CCSP}}(I) \geq q/2(q/2 - 1) - h$ , et le rapport différentiel de l'optimum miroir 1-local  $T$  est bien borné supérieurement par 1/5 :

$$\delta(I, T) \leq \frac{\frac{q(q-1)}{2} - \left(\frac{q}{2}\left(\frac{q}{2} - 1\right) - h\right)}{q(q-h) + \frac{q(q-1)}{2} - \left(\frac{q}{2}\left(\frac{q}{2} - 1\right) - h\right)} = \frac{\frac{q^2}{2} + h}{\frac{5q^2}{2} - qh + h} \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}$$

Ainsi, nous avons établi le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 5.2.**— Pour toute constante  $h \in \mathbb{N}$  et pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  miroir  $h$ -borné pour  $CCSP$ , il existe une suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  d'instances de  $MaxE2-CCSP$  et une suite  $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$  d'optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  de ces instances qui vérifient :

$$\delta_{CCSP}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5}$$

### 5.5.3. 1/2, le meilleur de GLO pour MaxNAE2-Sat

Nous montrons que pour le problème MaxNAE2-Sat, le rapport classique de 1/2 obtenu par les optima 1-locaux de façon assez naïve est pourtant le meilleur rapport que l'on puisse espérer garantir par des optima locaux pour des voisinages  $h$ -bornés.

**THÉORÈME 5.13.**— Pour toute constante entière  $h$  et tout voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $NAESat$ , il existe une suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  d'instances de  $MaxNAE2-Sat$  et une suite  $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$  d'optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  de ces instances qui vérifient :

$$\rho_{MaxNAE2-Sat}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$$

*Preuve.* Toujours avec les notations précédentes, on propose pour une constante  $h$  donnée et tout entier  $n$  l'instance  $I = (X_P \cup X_Q, P\overline{P} \cup Q\overline{Q} \cup PQ)$  suivante de MaxNAE2-Sat :

$$X_P : X_P = \{x_1, \dots, x_n\};$$

$$X_Q : X_Q = \{x^1, \dots, x^n\};$$

$$P\overline{P} : P\overline{P} = \cup_{i=1}^{n-1} \cup_{j=i+1}^n \{(x_i, \bar{x}_j)\};$$

$$Q\overline{Q} : Q\overline{Q} = \cup_{i=1}^{n-1} \cup_{j=i+1}^n \{(x^i, \bar{x}^j)\} \quad (m_{P\overline{P}} = m_{Q\overline{Q}} = n(n-1)/2);$$

$$PQ : PQ = \cup_{i=1}^{n-h} \cup_{j=1}^{n-h} \{(x_i, x^j)\}.$$

L'affectation  $T = \overrightarrow{1}$  satisfait les  $n(n-1)$  clauses de  $P\overline{P}$  et  $Q\overline{Q}$  tandis que la solution optimale  $T^*$  qui met respectivement à 1 et 0 les variables des ensembles  $X_P$  et  $X_Q$  satisfait toutes les clauses, soit  $n(n-1) + (n-h)^2$  clauses. Ainsi,  $T$  réalise un rapport d'approximation classique :

$$\rho_{NAE}(I, T) = \frac{n(n-1)}{n(n-1) + (n-h)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Or, nous allons montrer que la solution  $T$  est bien un optimum  $h$ -borné pour tout  $n > h$  qui satisfait au moins autant de clauses que toute affectation déduite de  $T$  en changeant la valeur d'au plus  $h$  variables. Soient  $L_P \subseteq X_P$  et  $L_Q \subseteq X_Q$  deux sous-ensembles de variables de cardinalités respectives  $\ell_P$  et  $\ell_Q$  vérifiant  $\ell_P + \ell_Q \leq h$ , on note  $T'$  la solution qui coïncide avec  $T$  sur  $(X_P \setminus L_P) \cup (X_Q \setminus L_Q)$ , avec  $\bar{T}$  sur  $L_P \cup L_Q$ . L'affectation  $T'$  ne vérifie plus alors dans  $P\bar{P}$  les  $\ell_P(n - \ell_P)$  clauses dont une variable est issue de  $L_P$  et l'autre de  $X_P \setminus L_P$ ; de même,  $\ell_Q(n - \ell_Q)$  clauses de  $Q\bar{Q}$  vérifiées par  $T$  ne le sont plus par  $T'$ . En revanche,  $T'$  satisfait peut-être des clauses de  $PQ$  construites sur les ensembles  $L_P \times (X_Q \setminus L_Q)$  et  $(X_P \setminus L_P) \times L_Q$ , qui sont au plus au nombre de  $(\ell_P + \ell_Q)(n - h)$ . La valeur de  $T'$  vérifie ainsi :

$$\begin{aligned} m_{\text{NAE}}(I, T') - m_{\text{NAE}}(I, T) &\leq (\ell_P + \ell_Q)(n - h) - \ell_P(n - \ell_P) \\ &\quad - \ell_Q(n - \ell_Q) \\ &= \ell_P(\ell_P - h) + \ell_Q(\ell_Q - h) \leq 0 \end{aligned}$$

Ce qui conclut la preuve du théorème. ■

#### 5.5.4. 1/3, le meilleur espoir de $GLO[\delta]$ pour $\text{MaxNAE2-Sat}$

Regardons la famille d'instances que nous venons de construire et tentons d'évaluer le rapport différentiel réalisé par la solution  $T = \bar{1}$ ; nous obtiendrons alors une borne pour le meilleur rapport que l'on pourrait espérer être en mesure de garantir par des optima locaux relativement aux voisinages  $h$ -bornés.

Il s'agit bien ici d'estimer la valeur  $\omega_{\text{MaxNAE2-Sat}}(I)$  d'une pire solution, du moins d'en donner un minorant, puisque le rapport différentiel est, pour un problème de maximisation, fonction décroissante de la valeur  $\omega_{\text{MaxNAE2-Sat}}(I)$ . On note toujours  $L_P$  et  $L_Q$  les ensembles de variables de  $X_P$  et  $X_Q$  mises à 0 par la solution  $T'$  considérée. L'affectation  $T'$  satisfait alors  $n(n-1) - \ell_P(n - \ell_P) - \ell_Q(n - \ell_Q)$  clauses de  $P\bar{P}$  et  $Q\bar{Q}$ , soit un minimum de  $n(n/2 - 1)$  clauses quand  $\ell_P = \ell_Q = n/2$ . Par ailleurs, sur  $PQ$ , toute solution vérifie au moins 0 clause ! Le minimum de la somme étant minorée par la somme des minima, on en déduit  $\omega_{\text{MaxNAE2-Sat}}(I) \geq n(n/2 - 1)$ , et la conclusion :

$$\delta_{\text{MaxNAE2-Sat}}(I, T) \leq \frac{n(n-1) - n\left(\frac{n}{2} - 1\right)}{n(n-1) + (n-h)^2 - n\left(\frac{n}{2} - 1\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{n^2}{2}}{\frac{3n^2}{2}} = \frac{1}{3}$$

qui induit le corollaire suivant, conclusion de ce chapitre.

**COROLLAIRE 5.3.**— Pour toute constante  $h \in \mathbb{N}$  et tout voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\text{NAESat}$ , il existe une suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  d'instances de  $\text{MaxNAE2-Sat}$  et une suite  $(\tilde{s}_n)_{n \geq 0}$



d'optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  de ces instances qui vérifient :

$$\delta_{\text{MaxNAE2-Sat}}(I_n, \tilde{s}_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}$$

## 5.6. Conclusion

Concernant les problèmes de satisfaisabilité, les limites que nous avons tracées jusqu'ici sont insuffisantes : nous avons, d'un côté dans  $\text{APX}[\delta]$ ,  $\text{Max2-CCSP-}\ell$  (instances de  $\text{Max2-CCSP}$  dont la pire solution vérifie au plus  $\ell$  clauses) par la démonstration que l'on a faite de son appartenance à  $\text{CGLO}[\delta]$ , et de l'autre,  $\text{Max}\mathcal{W}k\text{-Sat}(k)$  pour  $k \geq 4$  dont on a montré qu'il ne pouvait en différentiel être approché d'aucun rapport non nul : entre les deux, divers problèmes de satisfaisabilité restent à situer, et l'on peut espérer qu'ils atteindront différents degrés d'approximation différentielle. Si ces problèmes nous intéressent tout particulièrement, c'est qu'ils renferment en eux et permettent de lier entre eux par le biais de réductions, nombre de problèmes de NPO ; aussi une meilleure connaissance des problèmes de satisfaisabilité vis-à-vis de leur approximation différentielle fera-t-elle certainement faire un grand pas à la théorie différentielle dans son ensemble.

Un autre point marquant de ce chapitre est la façon dont les voisinages de petites taille garantissent finalement les meilleurs rapports d'approximation, ou du moins des rapports qui ne peuvent être améliorés par des voisinages de taille arbitrairement grande (voir les théorèmes 5.12 et 5.13). Dans le même sens, rappelons le résultat de [KHA 98] : pour  $\text{Max2-Sat}$  les optima locaux pour tout voisinage  $\Theta(n)$ -borné garantissent le même rapport classique de  $2/3$  que sont déjà en mesure de garantir les simples optima 1-locaux ! Les auteurs montrent également [KHA 98] que pour ce même problème et une fonction objectif altérée, les optima 1-locaux offrent même une  $3/4$ -approximation. Ces éléments pourraient inciter à se pencher sur le raffinement des fonctions objectif ou de la définition même de l'optimalité locale plutôt que de tenter l'exploration de voisinages plus importants ; peut-être pour les problèmes que nous venons de voir, la difficulté d'amélioration du degré d'approximation garanti par les optima locaux lorsque la taille du voisinage augmente ne provient pas de la difficulté théorique à établir des résultats dans des voisinages plus importants, mais du problème lui-même.

## Chapitre 6

### Réductions dans $\text{GLO}[\delta]$ et $\text{APX}[\delta]$

Nous proposons dans ce chapitre de comparer le degré d'approximation différentiel et la garantie de qualité des optima locaux de problèmes en les confrontant par réduction. Les réductions impliquées pour l'appartenance aux classes  $\text{GLO}[\text{R}]$  sont de différents types (*réductions affines, fortement affines, continues,  $\text{LOC}'$  ou  $\text{LOC}$ -réductions*) ; aussi, pour plus de lisibilité, introduisons-nous au préalable quelques notations. Une réduction préservant l'appartenance à  $\text{GLO}$  (resp.,  $\text{CGLO}$ ) d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  sera notée  $\Pi \overset{\text{G}[\delta](\tau, \sigma(h))}{\propto} \Pi'$  (resp.,  $\Pi \overset{\text{CG}[\delta](\tau, \sigma)}{\propto} \Pi'$ ) quand, pour toute constante  $h$ , la garantie d'un rapport différentiel  $r$  d'approximation par les optima  $h$ -locaux (resp.,  $h$ -locaux miroirs) de  $\Pi'$  induit la garantie par tout optimum  $\sigma(h)$ -local (resp.,  $\sigma(h)$ -local miroir) de  $\Pi$  d'un rapport différentiel  $\tau \times r$ .

Les preuves de ce chapitre s'appuieront le plus souvent sur des réductions affines, qui la plupart du temps, sont aussi (et bien que nous ne l'explicitons pas) des réductions continues ; or, c'est presque toujours ce dernier aspect qui permet, en reliant les optima locaux du problème initial aux solutions du problème image, d'établir la préservation de l'appartenance aux classes  $\text{GLO}$ .

#### 6.1. Dans les graphes et les hypergraphes (systèmes d'ensembles)

Les réductions considérées dans cette section ne sont pas nouvelles ; simplement, en les revisitant, nous exhibons une richesse non exploitée à ce jour : toutes sont des réductions continues proposées pour préserver le rapport classique d'approximation, nous montrons qu'elles préservent, modulo quelques arrangements parfois, non seulement le rapport différentiel d'approximation, mais également les structures de voisinage. Ces réductions concernent notamment les problèmes  $\text{MinVC}$ ,  $\text{MaxIS}$  et  $\text{MinSC}$

que nous avons déjà eu l'occasion d'aborder du point de vue des classes GLO[R] aux chapitres 3 et 4, ainsi qu'un nouveau problème, MaxCB.

### 6.1.1. Régularisation pour la couverture d'ensembles

MinRSSC (pour *Regular Set-size Set Cover*) désigne la restriction du problème de couverture d'ensembles à des instances  $(C, S)$  dont les sous-ensembles  $s_j$  de la famille  $S$  sont tous de même taille.

PROPOSITION 6.1. —  $\text{MinSC} \xleftrightarrow{\text{G}[\delta](1,h)} \text{MinRSSC}$ .

*Preuve.* Soit  $I = (C, S)$  une instance de MinSC, on note  $\gamma$  (resp.,  $\Gamma$ ) la taille du plus petit (resp., du plus grand) sous-ensemble de  $S$ ; on associe alors à  $I$  l'instance  $I' = (\tilde{C}, \tilde{S})$  suivante de MinRSSC :

$$\begin{aligned} - \tilde{C} &= C \cup D \cup E \text{ avec } D = \{d_1, \dots, d_{\Gamma-\gamma}\} \text{ et } E = \{e_1, \dots, e_\gamma\}; \\ - \tilde{S} &= \hat{S} \cup \{\hat{s}_0\} \text{ avec } \hat{S} = \{\hat{s}_1, \dots, \hat{s}_n\} \text{ tels que } \forall j = 1, \dots, n, \hat{s}_j = s_j \cup \{d_1, \dots, d_{\Gamma-|s_j|}\} \text{ et } \hat{s}_0 = D \cup E. \end{aligned}$$

Avant toute chose, notons que la construction de l'instance  $I'$  se fait en temps polynomial en la taille  $\max\{n, m\}$  de l'instance initiale, puisqu'elle consiste essentiellement en le parcours, le dénombrement puis la complétion des  $m$  sous-ensembles de  $I$ . Nous établissons à présent la forte affinité de cette réduction en prenant pour transformation (également polynomiale en  $|I|$ ) d'une couverture  $\tilde{S}'$  de  $\tilde{C}$  en une couverture de  $C$  la construction  $g(\tilde{S}')$  suivante :  $\forall \tilde{S}' \in \text{Sol}_{\text{RSSC}}(I')$ ,  $g(\tilde{S}') = \bigcup_{j \neq 0 / \hat{s}_j \in \tilde{S}'} \{s_j\}$ .

Le sous-ensemble  $\hat{s}_0$  étant nécessaire à la couverture des éléments de  $E$  et suffisant à celle des éléments de  $D$ , la transformation proposée entre les ensembles de solutions des instances  $I$  et  $I'$  est clairement bijective; la transformation inverse  $g^{-1}$  est définie  $\forall S' \in \text{Sol}_{\text{SC}}(I)$  par :  $g^{-1}(S') = \bigcup_{j: s_j \in S'} \{\hat{s}_j\} \cup \{\hat{s}_0\}$ . De plus,  $g$  lie les valeurs des solutions par une relation affine de paramètres  $K_I = -1$  et  $k_I = 1$  :  $\forall \tilde{S}' \in \text{Sol}_{\text{RSSC}}(I')$ ,  $|g(\tilde{S}')| = |\tilde{S}'| - 1$ .

La réduction fortement affine assure toujours les propriétés de surjectivité et de stricte monotonie, et dans ce cas particulier, la surjectivité de voisinage, puisque les distances sont préservées d'une instance à l'autre, si la distance entre deux couvertures est mesurée sur  $I$  comme sur  $I'$  par leur différence symétrique :  $\forall \tilde{S}', \tilde{T}' \in \text{Sol}_{\text{RSSC}}(I')$ ,  $d(\tilde{S}', \tilde{T}') = d(g(\tilde{S}'), g(\tilde{T}'))$ . Cette préservation des distances nous assure pour toute constante  $h$  et tout voisinage  $h$ -borné  $\mathcal{V}$  sur  $I'$  de vérifier, en prenant sur  $I$  le même voisinage :  $\forall \tilde{S}' \in \text{Sol}_{\text{RSSC}}(I')$ ,  $g(\mathcal{V}(I', \tilde{S}')) = \mathcal{V}(I, g(\tilde{S}'))$ .

La réduction combinant les vertus d'une  $A[\delta]$ - et d'une LOC'-réduction, elle est une G-réduction, CQFD. ■

### 6.1.2. Dépondération pour la couverture d'ensembles

Derrière MinWSC (pour *Weighted Set Cover*) se cachent les instances  $(C, S, p)$  du problème de couverture d'ensembles dont les sous-ensembles  $s_j$  de la famille  $S$  sont pondérés par  $p : S \rightarrow \mathbb{N}^*$  ; il ne s'agit plus alors de recouvrir  $C$  par un nombre minimum de sous-ensembles (équ pondération), mais par une famille de sous-ensembles dont la somme des poids est minimum. On note MinWSC( $k$ ) la restriction à des poids au plus  $n^k$  et MinWSC- $\Delta$  la restriction à des instances telles que chaque élément  $c_i$  apparaît dans au plus  $\Delta$  sous-ensembles ; enfin, pour une instance donnée contenant  $n$  sous-ensembles  $s_j$ ,  $p_{\min}$  désigne le plus petit des poids  $p_1, \dots, p_n$ .

THÉORÈME 6.1.–  $\text{MinWSC}(k)\text{-}\Delta \stackrel{G[\delta](1, \lfloor h/p_{\min} \rfloor)}{\sim} \text{MinSC-}\Delta$ .

*Preuve.* Soit  $I = (C, S, p)$  ( $|C| = m$  et  $|S| = n$ ), une instance de MinWSC( $k$ )- $\Delta$  ; pour tout élément à couvrir  $c_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), on note  $d_i = |\{j = 1, \dots, n : c_i \in s_j\}|$  le nombre des sous-ensembles le contenant et  $\Gamma(c_i) = \{s_{j_1}, \dots, s_{j_{d_i}}, \dots, s_{j_{d_i}}\}$  la liste de ces sous-ensembles. On associe à chaque sous-ensemble  $s_j$  (pour  $j$  de 1 à  $n$ )  $p_j$  sous-ensembles  $s_j^1, \dots, s_j^k, \dots, s_j^{p_j}$  et à chaque élément  $c_i$  un ensemble  $\tilde{C}_i$  de  $\prod_{\ell=1}^{d_i} p_{j_\ell}$  éléments  $c_i(x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i})$  indexés par  $d_i$  indices  $x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i}$  ; l'indice  $x_\ell$ , qui représente le  $\ell$ -ième sous-ensemble  $s_{j_\ell}$  contenant  $c_i$ , est à valeur dans  $[1, p_{j_\ell}]$ . On note  $\tilde{C}_i$  l'ensemble des copies de l'élément  $c_i$ .

Les caractéristiques de l'instance  $\tilde{I} = (\tilde{C}, \tilde{S})$  ainsi construite sont donc les suivantes :  $\tilde{C} = \cup_{i=1}^m \tilde{C}_i$  avec :

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i &= \bigcup_{l=1}^{d_i} \bigcup_{x_\ell=1}^{p_{j_\ell}} \{c_i(x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i})\} \\ |\tilde{C}| &= \sum_{i=1}^m \prod_{l=1}^{d_i} p_{j_\ell} \leq m \times n^{k \times \Delta} \\ \tilde{S} &= \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{k=1}^{p_j} \{s_j^k\} \\ |\tilde{S}| &= \sum_{j=1}^n p_j \leq n \times n^k. \end{aligned}$$

Pour achever la construction, il reste à déterminer, étant donné un couple  $(c_i, s_{j_\ell})$ , comment sont répartis les éléments de  $\tilde{C}_i$  parmi les  $p_{j_\ell}$  copies  $s_{j_\ell}^1, \dots, s_{j_\ell}^k, \dots, s_{j_\ell}^{p_{j_\ell}}$

de l'ensemble  $s_{j_\ell}$  ; cela est fait de sorte que les sous-ensembles  $s_{j_\ell}^1, \dots, s_{j_\ell}^k, \dots, s_{j_\ell}^{p_{j_\ell}}$  induisent une partition de  $\tilde{c}_i$  (de sorte que chaque copie  $c_i(x_1, \dots, x_\ell, \dots, x_{d_i})$  de  $c_i$  soit contenue dans une unique copie  $s_{j_\ell}^k$  de  $s_{j_\ell}$ ) :  $\forall i = 1, \dots, m, \forall l = 1, \dots, d_i, \forall k = 1, \dots, p_{j_\ell}, \tilde{C}_i \cap s_{j_\ell}^k = \bigcup_{h \neq \ell} \bigcup_{x_h=1}^{p_{i_h}} \{c_i(x_1, \dots, x_{l-1}, k, x_{l+1}, \dots, x_{d_i})\}$ . Considérons par exemple une instance  $I = (S, C)$  de MinWSC et supposons qu'il existe  $c_j \in C$  et  $s_i, s_k, s_l \in S$  tels que  $c_j \in s_i \cap s_k \cap s_l$  ; notons enfin par  $w_i, w_k$  et  $w_l$  les poids respectifs des ensembles  $s_i, s_k$  et  $s_l$ , on fixe  $w_i = w_k = 2$  et  $w_l = 3$ . Nous donnons une façon très simple de construire la partie de l'instance  $I'$  de MinSC correspondant à  $c_j, s_i, s_k$  et  $s_l$ .

Imposons arbitrairement un ordre sur les éléments de  $S$  qui contiennent  $c_j$  : mettons que  $s_i$  est le premier ensemble de  $S$  qui contient  $c_j$ ,  $s_k$  le deuxième et  $s_l$  le troisième. Alors :

– remplaçons  $c_j$  par  $2 \times 3 = 12$  éléments de  $\tilde{C}$  (c'est le groupe  $\tilde{C}_i$ ) et exprimons chaque élément de  $\tilde{C}_i$  par le triplet  $(p, q, r)$ ,  $p = 1, 2, q = 1, 2$  et  $r = 1, 2, 3$  ; ainsi :

$$\tilde{C}_i = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), \dots, (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3)\} ;$$

– remplaçons  $s_i, s_k$  et  $s_l$  par trois groupes d'ensembles  $G_1, G_2$  et  $G_3$  (la numérotation des groupes étant faite selon l'ordre arbitraire que nous avons considéré sur les ensembles  $s_i, s_k$  et  $s_l$ ) ; le groupe  $G_1$  contient deux ensembles de  $\tilde{S}$ , le groupe  $G_2$  deux ensembles aussi et le groupe  $G_3$  trois ensembles de  $\tilde{S}$  (chaque groupe est ainsi constitué d'autant d'ensembles de  $\tilde{S}$  que le poids de l'ensemble de  $S$  correspondant au groupe en question) :

$$\begin{aligned} G_1 &= \{g_{11}, g_{12}\} \\ G_2 &= \{g_{21}, g_{22}\} \\ G_3 &= \{g_{31}, g_{32}, g_{33}\} ; \end{aligned}$$

– alors, l'ensemble  $g_{ab} \in \tilde{S}$  contient les triplets dont la  $a^e$  coordonnée vaut  $b$  ; pour notre exemple :

$$\begin{aligned} g_{11} &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)\} \\ g_{12} &= \{(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3)\} \\ g_{21} &= \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3)\} \\ g_{22} &= \{(1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3)\} \\ g_{31} &= \{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1)\} \\ g_{32} &= \{(1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 1, 2), (2, 2, 2)\} \\ g_{33} &= \{(1, 1, 3), (1, 2, 3), (2, 1, 3), (2, 2, 3)\} . \end{aligned}$$

Chaque copie  $s_{j_\ell}^k$  de  $s_{j_\ell}$  contient donc autant de copies de  $c_i$  que le produit des poids dans l'instance initiale des autres sous-ensembles contenant  $c_i$  ; autrement dit,

chaque élément  $c_i$  de  $s_{j_\ell}$  induit  $p_{j_1} \times \dots \times p_{j_{l-1}} \times p_{j_{l+1}} \times \dots \times p_{j_{d_i}}$  éléments  $c_i(x_1, \dots, x_{l-1}, k, x_{l+1}, \dots, x_{d_i})$  dans  $s_{j_\ell}^k$ . De fait, la taille de tout sous-ensemble  $s_{j_\ell}^k$  est donnée par :

$$|s_{j_\ell}^k| = \sum_{c_i \in s_j} \prod_{s_h \neq s_j \in \Gamma(c_i)} p_h \leq m \times n^{k \times (\Delta-1)}.$$

Le nombre d'ensembles contenant un élément  $c_i(x_1, \dots, x_{\ell-1}, x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_{d_i})$  est le même que le nombre  $d_i$  de sous-ensembles contenant l'élément originel  $c_i$  puisque chaque famille  $s_j^1, \dots, s_j^{p_j}$  induit une partition des  $c_i(x_1, \dots, x_l, \dots, x_{d_i})$  :  $\forall i = 1, \dots, n, \forall l = 1, \dots, d_i, \forall x_l \in [1, p_{j_l}], d(c_i(x_1, \dots, x_l, \dots, x_{d_i})) = d_i \leq \Delta$ . Ainsi, pour des poids bornés par  $n^k$  et des degrés (*nombre de sous-ensembles contenant un même sommet*) bornés par une constante  $\Delta$ , la construction proposée se fait bien en temps polynomial en la taille  $\max\{m, n\}$  de l'instance initiale. D'une solution  $S' = \{s_{j_1}, \dots, s_{j_p}\}$  de valeur  $\sum_{h=1}^p p_{j_h}$  sur  $I$ , on peut déduire la solution :

$$g'(S') = \{s_{j_1}^1, \dots, s_{j_1}^{p_{j_1}}\} \cup \dots \cup \{s_{j_p}^1, \dots, s_{j_p}^{p_{j_p}}\}$$

de même valeur sur  $\tilde{I}$ . Réciproquement, nous allons montrer que toute solution *minimale* sur  $\tilde{I}$  contient, pour toute famille  $\{s_j^1, \dots, s_j^{p_j}\}$ , soit tout soit aucun élément de la famille : alors de toute solution  $\tilde{S}'$  sur  $\tilde{I}$  de valeur  $m_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}')$  on saurait déduire une solution  $g(\tilde{S}')$  de valeur inférieure ou égale sur  $I$ , en plaçant simplement dans  $g(\tilde{S}')$  tous les sous-ensembles  $s_j$  dont la famille associée  $\{s_j^1, \dots, s_j^{p_j}\}$  est totalement incorporée à la solution  $\tilde{S}'$ . En effet, la répartition des  $c_i(x_1, \dots, x_{d_i})$  entre les sous-ensembles  $s_{j_\ell}^k$  d'une famille nous assure que toute solution réalisable sur  $\tilde{I}$  doit prendre *au moins* une famille complète par élément. Supposons, par exemple, que  $c_1$  ne soit couvert que par des familles incomplètes ; supposons, par exemple, qu'il manque le premier élément de chaque famille, soit que la solution  $\tilde{S}$  ne contient aucun des sous-ensembles  $s_{j_1}^1, \dots, s_{j_\ell}^1, \dots, s_{j_{d_1}}^1$  pour couvrir les éléments de  $\tilde{I}$  associés à  $c_1$  ; mais alors, nul de ces ensembles ne couvrirait l'élément  $c_1(1, \dots, 1, \dots, 1)$  ! Toute solution réalisable devant associer à chaque élément une famille complète, et cela suffisant à l'obtention d'une solution réalisable, toute famille incomplète serait superflue. On vérifie aisément les relations :  $\forall \tilde{S}' \in \text{Sol}_{SC}(\tilde{I}), \forall S' \in \text{Sol}_{SC}(I)$ ,

$$\left. \begin{array}{l} m_{WSC}(I, g(\tilde{S}')) \leq m_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}') \\ m_{SC}(\tilde{I}, g'(S')) = m_{WSC}(I, S') \end{array} \right\} \Rightarrow \beta_{SC}(\tilde{I}) = \beta_{WSC}(I)$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta_{SC}(\tilde{I}) = \beta_{WSC}(I) \\ \omega_{SC}(\tilde{I}) = \omega_{WSC}(I) \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_{WSC}(I, g(\tilde{S}')) \geq \delta_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}').$$

*Le rapport d'approximation est préservé par réduction continue, qu'en est-il des optima locaux ?* Nous montrons qu'il s'agit bien là d'une LOC-réduction, en posant  $S_{SC}(\tilde{I}) = g'(\text{Sol}_{WSC}(I))$  (pour se limiter sur  $\tilde{I}$  aux solutions constituées de familles complètes), avec une expansion de voisinage de l'ordre de  $p_{\min} = \min_{j=1}^n \{p_j\}$ , puisque changer l'appartenance d'un seul sous-ensemble  $s_j$  à la solution sur  $I$  revient à considérer l'appartenance des  $p_j$  sous-ensembles  $s_j^1, \dots, s_j^{p_j}$  à la solution sur  $I'$ . La fonction  $g \circ g'$  étant l'identité sur  $\text{Sol}_{WS}(I)$ , la condition de *surjectivité* (voir définition 3.9) est vérifiée ; encore sur  $S_{SC}(\tilde{I})$ , toute solution  $\tilde{S}'$  est liée à sa projection par  $g$  sur  $\text{Sol}_{WS}(I)$  par la relation affine «  $m_{SC}(\tilde{I}, \tilde{S}') = m_{WSC}(I, g(\tilde{S}'))$  », qui mène directement à la vérification de la condition de *monotonie partielle* de la définition 3.9. Soit  $h$  une constante, on considère respectivement sur  $\tilde{I}$  et  $I$  les voisinages  $h$ - et  $\lfloor h/p_{\min} \rfloor$ -bornés ; si deux solutions  $\tilde{S}'$  et  $\tilde{T}'$  de  $S_{SC}(\tilde{I})$  sont au plus  $h$ -distantes (moins de  $(h+1)$  sous-ensembles les séparent), alors les solutions  $g(\tilde{S}')$  et  $g(\tilde{T}')$  sont au plus  $h/p_{\min}$ -distantes sur  $I$ , le retrait ou l'ajout d'un sous-ensemble sur  $I$  correspondant au retrait ou à l'ajout d'au moins  $p_{\min}$  sous-ensembles constitutifs d'une famille sur  $\tilde{I}$  : c'est la condition de *localité* (définition 3.9) ; reste à vérifier la condition de *dominance*, mais nous l'avons déjà dit, les solutions minimales ne comportent pas de famille partielle et ainsi, un optimum  $h$ -local sur  $S_{SC}(\tilde{I})$  est *a fortiori* optimum  $h$ -local sur  $\text{Sol}_{SC}(\tilde{I})$ . Nous avons prouvé que la réduction continue proposée ci-dessus préservait simultanément le rapport d'approximation différentiel et l'optimalité locale, elle est donc une  $G[\delta]$ -réduction. ■

La réduction du théorème 6.1 permet de déduire du rapport garanti par les optima 1-locaux de MinSC sur  $I'$  un rapport constant des optima 1-locaux de MinWSC sur  $I$ , pour autant que la taille des sous-ensembles  $s_j$  de l'instance initiale et leur poids  $p_i$  soient bornés par deux constantes  $B$  et  $K$  ; toutefois, ce rapport obtenu par réduction est dominé par celui donné par le théorème 4.2 : les solutions minimales de  $I'$  garantissent alors d'après le même théorème un rapport différentiel de :

$$\delta_{\text{MinSC}}(I') \geq \frac{BK^{\Delta-1}}{(BK^{\Delta-1} + 1)(BK^{\Delta-1}\Delta - 1)}$$

quand ceux de  $I$  nous assurent déjà un rapport de :

$$\delta_{\text{MinWSC}}(I) \geq \frac{B\Delta}{K(B+1)(B\Delta - 1)}$$

### 6.1.3. Dépondération pour la couverture de sommets

Les versions pondérée et non pondérée de la couverture de sommets ont le même comportement vis-à-vis de leur appartenance à  $\text{GLO}[\delta]$ , à une constante de voisinage près. Connaissant cependant la difficulté d'approximation différentielle de ce problème, nous exploitons la transformation dans la limite d'instances dont le degré

des sommets comme la pondération sont respectivement bornés par les quantités  $\Delta$  et  $K$  ( $\Delta$  et  $K$  éventuellement dépendantes de la taille de l'instance). Par ailleurs, pour transporter les structures de voisinage il faudra prendre comme repère supplémentaire la valeur du poids minimum, notée  $p_{\min}$ .

PROPOSITION 6.2. –  $\text{MinW}[\Delta]\text{VC}-K \stackrel{G[\delta](1, \lfloor h/p_{\min} \rfloor)}{\propto} \text{MinVC}-(\Delta \times K)$ .

*Preuve.* Nous montrons que la réduction continue proposée par [SIM 90] préserve l'approximation différentielle et la localité par LOC-réduction.

Soit  $I = (G(V, E), p)$  une instance de  $\text{W}[K]\text{VC}$ , on lui associe l'instance  $G'(V', E')$  de VC en dupliquant dans  $V'$  chaque sommet de  $V$  en autant de copies que son poids, puis en répétant chaque arête de  $E$  entre tout couple de copies de ses extrémités :

- $V' = \cup_{j=1}^n V_j$  tels que  $\forall j = 1, \dots, n, V_j = \{v_j^1, \dots, v_j^h, \dots, v_j^{p_j}\}$  ( $|V'| = \sum_{j=1}^n p_j \leq n \times K$ );
- $E' = \cup_{i=1}^m E_i$  tels que  $\forall i = 1, \dots, m, E_i = V_{i_1} \times V_{i_2}$  ( $|E'| = \sum_{i=1}^m p_{j_1} \times p_{j_2} \leq n^2 \times K^2$ ).

Si  $K = \Theta(n^k)$  (poids bornés par un polynôme en  $n$  d'ordre  $k$ ), la construction est polynomiale et permet d'associer à toute couverture  $U$  des arêtes de  $E$  la couverture  $g'(U) = \cup_{v_j \in U} V_j$  des arêtes de  $E'$ , de valeur  $m_{\text{VC}}(I', g(U)) = \sum_{v_j \in U} |V_j| = \sum_{v_j \in U} p_j = m_{\text{WVC}}(I, U)$ .

Inversement, à toute solution  $U'$  sur  $I'$ , on peut associer la solution  $g(U') = \cup_{V_j \subseteq U'} \{v_j\}$  sur  $I$ , de valeur inférieure ou égale à la valeur de  $U'$  : effectivement, pour toute arête  $e_i = v_{i_1} v_{i_2}$ ,  $U'$  doit contenir au moins tout  $V_{i_1}$  ou tout  $V_{i_2}$  pour être réalisable (sinon l'arête  $v_{i_1}^1 v_{i_2}^1$  par exemple n'est pas couverte); on peut donc évincer de toute solution les sous-ensembles de sommets qui n'y sont pas complètement, tout en restant réalisable. La pire solution, sur  $I$  comme sur  $I'$ , consiste à prendre tous les sommets, et leur valeur coïncide; à l'aide des fonctions  $g$  et  $g'$  on déduit alors les relations ( $\forall U' \in \text{Sol}_{\text{VC}}(I')$ ) :

$$\left. \begin{array}{lcl} \beta(I) & = & \beta(I') \\ \omega(I) & = & \omega(I') \\ m(I, g(U')) & \leq & m(I', U') \end{array} \right\} \Rightarrow \delta_{\text{WVC}}(I, g(U')) \geq \delta_{\text{VC}}(I', U').$$

Le lien mis en évidence entre les solutions des deux instances nous suggère de considérer un voisinage  $\lfloor h/p_{\min} \rfloor$ -borné sur  $I$  quand un voisinage  $h$ -borné est envisagé sur  $I'$  : quand sur  $I$  on fait évoluer une solution courante en bougeant un seul sommet  $v_j$ , sur  $I'$  c'est tout un sous-ensemble  $V_j$  de sommets qu'il faut déplacer.



La LOC-réduction s'établit avec mes mêmes arguments que la LOC-réduction précédente (*poser cette fois*  $S_{VC}(I') = g'(\text{Sol}_{WVC}(I))$ ). Sur la foi de cette dernière allégation, la réduction de [SIM 90] est bien une  $G[\delta]$ -réduction. ■

Les problèmes de stable et de couverture de sommets étant affinement identiques, il vient naturellement du résultat précédent le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 6.1.**—  $\text{MaxW}[\Delta]\text{IS-}K \underset{\infty}{\propto}^{G[\delta](1, \lfloor h/p_{\min} \rfloor)} \text{MaxIS}-(\Delta \times K)$ .

Si les bornes  $K$  et  $\Delta$  des poids et des degrés des sommets sont des constantes, alors le degré des sommets de l'instance  $I'$  est également borné, par la constante  $\Delta \times K$ ; un optimum 1-local assurant un rapport  $1/(\Delta \times K)$  sur  $I'$ , il en est de même de tout optimum  $p_{\min}$ -local et l'on en déduit un rapport différentiel de  $1/(\Delta \times K)$  pour tout optimum 1-local sur  $I$ . Ce résultat égale celui que l'on pouvait dériver du rapport  $1/\Delta$  garanti par toute couverture minimale pour le problème non pondéré et de la remarque 1 faite au chapitre 4 qui indique que l'on peut déduire sur de tels problèmes d'un rapport (classique comme différentiel) d'approximation  $r$  sur l'instance non pondérée un rapport  $r/K$  sur l'instance pondérée.

#### 6.1.4. Autres problèmes simples dans les graphes

Nous allons aborder deux nouveaux problèmes : le premier, maximum sous-graphe biparti complet, noté  $\text{MaxCB}$  (*Maximum Complete Bipartite-graph*), a pour but de déterminer dans un graphe un sous-graphe biparti complet  $K_{n_1, n_2}$  le plus grand possible, la taille d'un tel graphe étant mesurée par la somme  $n_1 + n_2$  ( $K_{n_1, n_2}$  désigne un graphe constitué de deux ensembles de sommets, l'un de taille  $n_1$ , l'autre de taille  $n_2$ , et de toute arête reliant deux sommets de chacun de ces ensembles); le second,  $\text{MaxRIS}$  (*Maximum Regular Independent Set*), désigne simplement une restriction du problème de stable à des graphes réguliers (dont tous les sommets ont même degré).

**PROPOSITION 6.3.**—  $\text{MaxCB} \underset{\infty}{\propto}^{G[\delta](1, h)} \text{MaxRIS}$ .

*Preuve.* Nous démontrons que la réduction continue proposée dans [SIM 90] est non seulement *fortement affine*, mais aussi LOC'-réduction.

Soit  $I = G(V, E)$  ( $|V| = n$  et  $|E| = m$ ) une instance de  $\text{MaxCB}$ , on lui associe pour instance de  $\text{MaxRIS}$  le graphe  $I' = G'(V', E')$  obtenu à partir de  $G$  en dupliquant  $G$  en deux copies  $G^1(V^1, E^1)$  et  $G^2(V^2, E^2)$ , puis en reliant un sommet  $v_j^1$  de  $G^1$  à un sommet  $v_h^2$  de  $G^2$  à chaque fois que les sommets  $v_j$  et  $v_h$  ne sont pas reliés par une arête dans le graphe initial  $G$  (en particulier, pour  $j$  de 1 à  $n$ ,  $v_j^1 v_j^2 \in E'$ ). De façon plus rigoureuse, le graphe  $G'$  peut être décrit de la sorte :

$$- V' = V^1 \cup V^2 \text{ où } V^1 = \{v_1^1, \dots, v_n^1\} \text{ et } V^2 = \{v_1^2, \dots, v_n^2\};$$

–  $E' = E^1 \cup E^2 \cup E^3$ , où  $E^1 = \{v_j^1 v_h^1 : v_j v_h \in E\}$ ,  $E^2 = \{v_j^2 v_h^2 : v_j v_h \in E\}$ , et  $E^3 = \{v_j^1 v_h^2, v_h^1 v_j^2 : 1 \leq j \leq h \leq n, v_j v_h \notin E\}$ .

Dans  $G'$ , tout sommet est de degré  $n$ , tout sommet  $v_j^1$  (resp.,  $v_j^2$ ) étant relié à  $d(v_j)$  sommets dans  $E^1$  (resp.,  $E^2$ ) et  $n - d(v_j)$  sommets dans  $E^3$  : le graphe construit est régulier, de degré  $n$ . Soit  $U = U^1 \cup U^2$  un stable de  $G'$ , on note  $V_1 = \{v_j \mid v_j^1 \in U^1\}$  et  $V_2 = \{v_j \mid v_j^2 \in U^2\}$  les ensembles de sommets correspondants sur  $G$  ; par construction de  $G'$ , si  $U$  est un stable, alors  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1$  et  $V_2$  sont stables, et toute arête d'un sommet de  $V_1$  à un sommet de  $V_2$  existe dans  $G$  :  $g(U) = (V_1, V_2, V_1 \times V_2)$  forme un graphe biparti complet sur  $|V_1| + |V_2| = |U|$  sommets. Réciproquement, tout graphe biparti complet  $(V_1, V_2, V_1 \times V_2)$  sur  $G$  correspond à un stable  $U = g^{-1}(V_1, V_2, V_1 \times V_2)$  sur  $G'$  en posant  $U^1 = \{v_j^1 \mid v_j \in V_1\}$ ,  $U^2 = \{v_j^2 \mid v_j \in V_2\}$  et  $U = U^1 \cup U^2$ . La transformation  $g$  est une bijection qui relie les deux ensembles de solutions  $\text{Sol}_{\text{CB}}(I)$  et  $\text{Sol}_{\text{RIS}}(I')$  par la relation :  $\forall U \in \text{Sol}_{\text{RIS}}(I'), m_{\text{CB}}(I, g(U)) = m_{\text{RIS}}(I', U)$  ; ceci assure une réduction fortement affine de paramètres  $K_I = 0$  et  $k_I = 1$ . Il suffit maintenant pour vérifier la préservation des optima locaux de remarquer que, d'une instance à l'autre, la mesure des distances est la même, consistant en le comptage du nombre de sommets que l'on va ajouter ou retirer aux ensembles  $U^1$  et  $U^2$  (resp.,  $V_1$  et  $V_2$ ) : il n'en faut pas plus pour assurer la coïncidence par  $g$  et  $g^{-1}$  des optima  $h$ -locaux sur les ensembles de solutions  $\text{Sol}_{\text{CB}}(I)$  et  $\text{Sol}_{\text{RIS}}(I')$ , et ce quels que soient la constante  $h$  et le voisinage  $h$ -borné considérés. La LOC'-réduction est vérifiée, permettant d'affirmer la  $G[\delta]$ -réduction. ■

## 6.2. Les problèmes de logique

Nous abordons à présent les problèmes de logique, certains d'entre eux, Max $k$ -Sat, MaxCCSP ou encore MaxNAE $k$ -Sat déjà largement étudiés à l'occasion du chapitre 5 et d'autres, tels MinEQ et MinE $k$ -LIN2, qui n'ont pas encore subi l'épreuve de GLO[R]. Il sera particulièrement intéressant de voir comment, au contraire du cas classique, l'approximation différentiel est neutre vis-à-vis de la *densité* des instances considérées des problèmes.

### 6.2.1. Autour de MinEQ

Nous introduisons ici le problème MinEQ dont les instances sont la donnée d'un ensemble  $E$  d'équivalences  $x \equiv y$  sur un ensemble  $X$  de variables binaires, et dont l'objectif, étant donné une instance  $(X, E)$ , est de trouver une affectation des valeurs de vérité sur  $X$  qui minimise le nombre d'équivalences de  $E$  satisfaites. Pour la version pondérée, les instances sont munies d'un système de poids  $p \in \mathbb{N}^{|E|}$  et il s'agit alors de minimiser la somme des poids des équivalences satisfaites. Pour relier étroitement les structures de voisinage des deux problèmes, on se place dans

CGLO[R] et non plus dans GLO[R]. Notons que pour MinEQ, deux affectations complémentaires  $T$  et  $\bar{T}$  sont toujours équivalentes, et de fait considérer l'appartenance à CGLO[R] ou GLO[R] est une seule et même chose. Conventionnellement, la version pondérée du problème d'équivalences par des poids bornés par  $o(n)$  où  $n$  désigne le nombre de variables seront notés MinW(1)EQ, la restriction à des poids au plus 2 (resp.,  $\Delta$ ) par MinW[2]EQ (resp., MinW[ $\Delta$ ]EQ).

PROPOSITION 6.4. –  $\text{MinE2-Sat} \stackrel{\text{CG}[\delta](1, h+1)}{\propto} \text{MinW(1)EQ}$ .

*Preuve.* Nous exploitons la réduction proposée dans [BAZ 99] entre MinE2-Sat et MinEQ pour montrer qu'elle est aussi une réduction *affine* et LOC'-réduction de MinE2-Sat à MinW(1)EQ. Nombre des notations utilisées ici ont été introduites au paragraphe 5.1.1 ; aussi invitons-nous le lecteur à s'y référer.

Soit  $I = (X, C)$  une instance de MinE2-Sat à  $m$  clauses sur  $n$  variables, on lui associe l'instance  $I' = (X', E, p)$  de MinW(1)EQ suivante :

- $X' = X \cup \{y\}$  ;
- $E = \cup_{(\ell_1, \ell_2) \in C} \{\ell_1 \equiv \neg \ell_2, \ell_1 \equiv \neg y, \ell_2 \equiv \neg y\}$  ;
- le système de poids  $p$  est défini comme suit :
  - $\forall l \in X \cup \bar{X}, p(l \equiv \neg y) = |\{c \in C : l \in c\}|$  ;
  - $\forall \ell_1 \neq \ell_2 \in X \cup \bar{X}$ ,

$$p(\ell_1 \equiv \neg \ell_2) = \begin{cases} 1 & (\ell_1, \ell_2) \vee (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) \in c \\ 2 & (\ell_1, \ell_2) \wedge (\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2) \in c \end{cases}$$

où les équivalences  $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$  et  $\neg \ell_1 \equiv \ell_2$  étant bien entendu considérées comme une seule sur  $I'$ .

Il s'agit bien d'une instance de MinW(1)EQ, chaque littéral pouvant apparaître dans au plus  $2(n-1) \leq 2|X'| = o(n)$  clauses de l'instance initiale. Pour toute affectation  $S$  des valeurs de vérité sur  $X$ ,  $(S|0)$  (resp.,  $(S|1)$ ) désigne l'extension de  $S$  à  $\{y\}$  qui affecte  $y$  à 0 (resp., 1).

Considérons deux affectations  $T$  et  $T' = (T|0)$  sur les ensembles de variables  $X$  et  $X'$  ; on montre que les valeurs de ces deux solutions sur  $I$  et  $I'$  sont liées par la relation :  $m_{\text{EQ}}(I', T') = 2m_{\text{Sat}}(I, T)$ . Effectivement, soit  $(\ell_1, \ell_2)$  une clause de  $C$  : elle peut être vérifiée avec  $\ell_1 = \ell_2 = 1$ , alors  $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$  sera fausse tandis que  $\ell_1 \equiv \neg y$  et  $\ell_2 \equiv \neg y$  seront vraies ; elle peut encore être vérifiée avec  $\ell_1 = 1$  et  $\ell_2 = 0$  (resp.,  $\ell_1 = 0$  et  $\ell_2 = 1$ ), alors  $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$  et  $\ell_2 \equiv \neg y$  (resp.,  $\ell_1 \equiv \neg y$ ) seront vérifiées au contraire de  $\ell_1 \equiv \neg y$  (resp.,  $\ell_2 \equiv \neg y$ ) ; elle peut enfin ne pas être satisfaite si  $\ell_1 = \ell_2 = 0$  : comme alors les valeurs des trois littéraux  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $y$  coïncident, aucune des équivalences  $\ell_1 \equiv \neg \ell_2$ ,  $\ell_1 \equiv \neg y$  et  $\ell_2 \equiv \neg y$  ne saurait être vérifiée. Ainsi, à toute affectation  $T$  sur  $X$  on peut associer une affectation  $T'$  sur  $X'$  de valeur

$2m_{\text{Sat}}(I, T)$ , en posant simplement  $y = 0$  ; réciproquement, à toute affectation  $T'$  sur  $X'$  on peut associer une affectation  $g(T')$  sur  $X$  de valeur  $m_{\text{EQ}}(I', T')/2$  sur  $I$  en posant  $g(T') = T'_{|X}$  si  $T'$  affecte  $y$  à 0,  $g(T') = \overline{T'}_{|X}$  sinon : comme nous l'avons déjà remarqué, deux affectations complémentaires valident les mêmes équivalences.

Toute solution  $T$  pouvant être obtenue par  $g$  à partir, par exemple, de la solution  $(T|0)$ ,  $g$  est surjective ; le fait que de surcroît les valeurs de deux solutions  $T'$  et  $g(T')$  soient toujours liées par la relation  $m_{\text{Sat}}(I, g(T')) = m_{\text{EQ}}(I', T')/2$  nous assure l'affinité de la réduction, dont on déduit la propriété de stricte monotonie. Il nous reste une fois de plus, pour établir la LOC'-réduction, à vérifier la propriété de surjectivité de voisinage pour les voisinages miroirs  $h$ -bornés, qui consistent, sur  $I$  comme sur  $I'$ , à considérer comme voisines deux affectations qui diffèrent sur au plus  $h$ , ou au moins  $n - h$ , variables. Pour ce faire, considérons une constante  $h$  et une solution  $T'$  de  $I'$  : il s'agit alors de vérifier que pour tout couple de solutions  $S'$  et  $T'$  de  $I'$  voisines au sens du voisinage miroir  $h$ -borné, les solutions de  $I$   $g(S')$  et  $g(T')$  sont également voisines, au sens du même voisinage miroir  $(h+1)$ -borné. Si  $S'$  et  $T'$  affectent identiquement  $y$ , alors  $g(S') = S'_{|X}$  et  $g(T') = T'_{|X}$  ou  $g(S') = \overline{S'}_{|X}$  et  $g(T') = \overline{T'}_{|X}$  ; dans les deux cas les distances vérifient :  $d(S', T') = d(S'_{|X}, T'_{|X}) = d(\overline{S'}_{|X}, \overline{T'}_{|X})$ . De cette égalité nous déduisons :

$$\begin{cases} d(S', T') \leq h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \leq h \\ d(S', T') \geq n - h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \geq n - h. \end{cases}$$

Sinon, supposons par exemple  $g(S') = S'_{|X}$  et  $g(T') = \overline{T'}_{|X}$ , alors :  $d(S', \overline{T'}) = (n+1) - d(S', T') = n - d(S'_{|X}, T'_{|X}) = d(S'_{|X}, \overline{T'}_{|X})$  ; il vient dans ce cas

$$\begin{cases} d(S', T') \leq h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \geq n - h + 1 \\ d(S', T') \geq n - h & \Leftrightarrow d(g(S'), g(T')) \leq h + 1. \end{cases}$$

La réduction proposée de MinE2-Sat à MinW(1)EQ, à la fois affine et LOC'-réduction pour les voisinages  $h$ -bornés complémentaires, préserve donc bien la garantie de qualité des optima locaux pour ces voisinages. ■

Notons que si le nombre d'occurrences d'une variable est borné par une quantité  $\Delta$  ( $\Delta$  éventuellement dépendante de la taille de l'instance), les poids associés aux équivalences seront également bornés par  $\Delta$  ; c'est ce qu'exprime le corollaire suivant.

**COROLLAIRE 6.2.**—  $\text{MinE2-Sat-}\Delta \stackrel{\text{CG}[\delta](1, h+1)}{\propto} \text{MinW}[\Delta]\text{EQ}$ .

Nous envisageons à présent le problème MinPairedBisection (noté MinPB) de coupe défini comme suit : une instance  $I$  est la donnée d'un graphe  $G(U \cup V, E)$

composé de deux ensembles de sommets  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  et  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  de même cardinalité ; une bisection est un partage de  $U \cup V$  en deux sous-ensembles  $W$  et  $\overline{W}$  de même taille ; une bisection  $W$  sera réalisable si elle sépare les couples  $\{u_j, v_j\}$ , c'est-à-dire si elle vérifie :  $\forall j = 1, \dots, n, u_j \in W \Leftrightarrow v_j \in \overline{W}$ . On rappelle qu'étant donnés deux ensembles  $V_1$  et  $V_2$  de sommets sur un graphe  $G(V, E)$ ,  $\langle V_1, V_2 \rangle$  désigne l'ensemble des arêtes de  $E$  ayant une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ . Le but est de trouver une bisection  $W$  réalisable qui minimise la cardinalité de la coupe  $\langle W, \overline{W} \rangle$ .

PROPOSITION 6.5.—  $\text{MinEQ} \stackrel{G[\delta](1,h)}{\sim} \text{MinPB}$ .

*Preuve.* Nous montrons que la L-réduction proposée dans [BAZ 99] entre les deux problèmes possède également les qualités d'une réduction *fortement affine* et d'une LOC'-réduction.

Soit  $I = (X, E)$  une instance de MinEQ à  $n$  variables, nous associons à chacune de ses variables  $x_j$  les sommets  $u_j$  (représentant  $x_j$  dans  $I$ ) et  $v_j$  (représentant  $\bar{x}_j$  dans  $I$ ) ; l'instance  $I' = G(U \cup V, F)$  que l'on construit pour le problème MinPB est ainsi munie des ensembles de sommets  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$  et  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  et de l'ensemble d'arêtes  $F$  défini comme suit :

$$\begin{aligned} (x_i \equiv \bar{x}_j) \in E &\Rightarrow \{u_i u_j, v_i v_j\} \subseteq F \\ (x_i \equiv x_j) \in E &\Rightarrow \{u_i v_j, v_i u_j\} \subseteq F. \end{aligned}$$

Soit  $W$  une bisection réalisable sur  $I'$ , on lui fait correspondre l'affectation  $g(W)$  des variables de  $X$  qui place à 1 les variables  $x_j$  dont le représentant  $u_j$  est élément de  $W$ , à 0 les autres (variables  $x_j$  dont le représentant  $u_j$  est élément de  $\overline{W}$ ) ; la réalisabilité de  $W$  assure la cohérence de l'affectation  $g(W)$ . Cette affectation valide une équivalence «  $x_i \equiv x_j$  » ( $x_i$  et  $x_j$  ont même valeur) si et seulement si les sommets  $u_i$  et  $u_j$  sont tous deux dans  $W$  ou tous deux dans  $\overline{W}$ , soit quand les arêtes  $u_i v_j$  et  $v_i u_j$  sont dans la coupe ; elle valide une équivalence «  $x_i \equiv \bar{x}_j$  » ( $x_i$  et  $x_j$  ont valeurs opposées) si et seulement si les sommets  $u_i$  et  $u_j$  se situent, l'un dans  $W$ , l'autre dans  $\overline{W}$ , soit quand les arêtes  $u_i u_j$  et  $v_i v_j$  sont dans la coupe. Ainsi,  $g(W)$  vérifie  $m_{\text{EQ}}(I, g(W)) = m_{\text{PB}}(I', W)/2$  équivalences. Inversement, soit  $T$  une affectation des valeurs de vérité sur  $I$ , la bisection  $g^{-1}(T)$  constituée des variables mises à 1 par  $T$  est non seulement réalisable, mais aussi de valeur  $m_{\text{PB}}(I', g^{-1}(T)) = 2m_{\text{EQ}}(I, T)$ . Ainsi, il s'agit bien là d'une réduction fortement affine (donc surjective et strictement monotone) de paramètres  $k_I = 1/2$  et  $K_I = 0$ . Cette réduction préserve clairement les optima  $h$ -locaux par LOC'-réduction, les distances étant les mêmes sur les deux instances : deux solutions  $W$  et  $W'$  sont au plus  $h$ -distantes sur  $I'$  (différant d'au plus

$h$  sommets) si et seulement si les affectations  $g(W)$  et  $g(W')$  le sont également sur  $I$  (différant d'au plus  $h$  composantes). L'affinité et la localité maintenant établies nous assurent qu'elle est une G-réduction. ■

PROPOSITION 6.6. –  $\text{MinPB} \propto^{\text{G}[\delta](1,h)} \text{MinW}[2]\text{EQ}$ .

*Preuve.* Une fois de plus, en étudiant sous l'angle qui nous intéresse la L-réduction proposée dans [BAZ 99] de MinPB à MinEQ, nous montrons qu'elle est une réduction simultanément *fortement affine* et LOC'-réduction de MinPB à MinW[2]EQ.

Soit  $I = G(V, E)$  une instance de MinPB sur un graphe à  $2n$  sommets et considérons l'instance  $I'$  de MinW[2]EQ constituée d'un ensemble  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  de  $n$  variables, d'un ensemble  $F$  d'équivalences «  $x_i \equiv x_j$  » (resp., «  $x_i \equiv \bar{x}_j$  ») pour toute arête  $u_i v_j$  ou  $u_j v_i$  (resp.,  $u_i u_j$  ou  $v_i v_j$ ) de  $E$ , et d'une pondération  $p$  de ces équivalences qui place un poids 2 sur une équivalence «  $x_i \equiv x_j$  » (resp., «  $x_i \equiv \bar{x}_j$  ») quand les arêtes  $u_i v_j$  et  $u_j v_i$  (resp.,  $u_i u_j$  et  $v_i v_j$ ) sont toutes deux élément de  $E$ , un poids 1 sur toute autre équivalence. Les mêmes transformations que celles proposées lors de la précédente preuve, par les mêmes arguments, assurent la forte affinité et la localité de la réduction. ■

### 6.2.2. Autour de MaxNAESat

Nous avons déjà considéré au paragraphe 5.1.1 les liens qui pouvaient unir, du point de vue de l'approximation différentielle d'une part et de la conservation des optima locaux d'autre part, différentes versions du problème de satisfaisabilité de clauses conjonctives et disjonctives ; nous en faisons de même ici avec le problème MaxNAESat, tentant par la même occasion de situer le degré d'approximabilité de ses variantes par rapport à ces derniers.

PROPOSITION 6.7. –  $\forall k \geq 2, \text{MaxNAEk-Sat} \leftrightarrow^{\text{G}[\delta](1,h)} \text{MaxNAEEk-Sat}$ .

*Preuve.* Nous construisons une réduction de MaxNAEk-Sat à MaxNAEEk-Sat qui possède les propriétés d'une réduction *affine* et d'une LOC'-réduction.

La construction est la même que celle proposée à l'occasion du lemme 5.2 pour les versions de CCSP : si les clauses d'une instance  $I$  ne sont pas toutes de taille  $k$ , on introduit une nouvelle variable  $y$  et l'on remplace chaque clause  $c = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  de taille  $p$  strictement inférieure à  $k$  par les deux clauses  $(\ell_1, \dots, \ell_p, y)$  et  $(\ell_1, \dots, \ell_p, \bar{y})$  (transformation  $t$ ) ; s'il reste encore des clauses de moins de  $k$  littéraux, on recommence et ainsi de suite (au plus  $k - 1$  fois), jusqu'à ce que l'instance obtenue  $I' = t^\kappa(I)$  ( $\kappa \leq k - 1$ ) soit une instance de MaxNAEEk-Sat. Nous avons déjà argumenté quant à la complexité d'une telle transformation, il nous reste ici à comparer les valeurs des solutions de l'instance initiale  $I$  et de l'instance image  $I'$ . Pour ce faire, on

montre que deux instances  $I$  et  $t(I)$  sont toujours intimement liées en observant simplement qu'une clause  $c = (\ell_1, \dots, \ell_p)$  est validée (resp., rejetée) pour NAESat par une affectation des valeurs de vérité si et seulement si les deux clauses (resp., exactement l'une des deux clauses)  $(\ell_1, \dots, \ell_p, y)$  et  $(\ell_1, \dots, \ell_p, \bar{y})$  le sont (resp., l'est) également, et cela quelle que soit l'extension faite à  $y$  de l'affectation des valeurs de vérité. On voit aisément que la relation entre deux instances  $I$  et  $t(I)$  de NAESat est si étroite qu'elle permet de préserver les optima locaux :  $T$  optimum  $h$ -local sur  $I$  si et seulement si  $(T|0)$  et  $(T|1)$ <sup>1</sup> optima  $h$ -locaux sur  $t(I)$ . La relation des instances  $I$  et  $t(I)$  se transporte alors aisément par récurrence aux instances  $I$  et  $t^\kappa(I)$ . ■

PROPOSITION 6.8.—  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{MaxNAE}k\text{-Sat} \propto^{\text{G}[\delta](1,h)} \text{Max}k\text{-Sat}$ .

*Preuve.* Nous exhibons une réduction de MaxNAE $k$ -Sat à Max $k$ -Sat dont les qualités sont conjointement celles d'une réduction *fortement affine* et d'une LOC'-réduction.

Une clause est validée (resp., rejetée) pour NAESat si tous ses littéraux ne sont pas identiquement affectés ; ainsi, une affectation  $T$  des valeurs vérité valide une clause  $c$  si et seulement si les deux clauses (resp., exactement l'une des deux clauses)  $c$  et  $\bar{c}$  le sont pour Sat. Associons donc à une instance  $I = (X, C)$  de NAESat l'instance  $I' = (X, C \cup \bar{C})$  de Max $k$ -Sat ; toute affectation  $T \in \{0, 1\}^n$  des valeurs de vérité vérifie :  $m_{\text{Sat}}(I', T) = m + m_{\text{NAE}}(I, T)$ .

REMARQUE 1.— Pour NAESat, les clauses  $c$  et  $\bar{c}$  ont la même signification, aussi supposons-nous ne jamais disposer dans une instance, et ce quel que soit l'ensemble  $c = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$  de littéraux considéré, conjointement des ensembles  $c$  et  $\bar{c}$  (sinon on aurait seulement  $m_{\text{Sat}}(I', T) \leq m + m_{\text{NAE}}(I, T)$ , il faudrait pondérer  $I'$  pour retrouver une équivalence entre les mesures sur  $I$  et  $I'$ ).

Sous l'hypothèse de la remarque 1, la transformation proposée est une réduction fortement affine de coefficients  $K_I = |m|$  et  $k_I = 1$ . Cette réduction fortement affine vérifie allègrement les exigences d'une LOC'-réduction : les ensembles de solutions de  $I$  et  $I'$  étant les mêmes, les voisins au plus  $h$ -distants coïncident également. ■

PROPOSITION 6.9.—  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Max}k\text{-Sat} \propto^{\text{CG}[\delta](1,h+1)} \text{MaxNAE}(k+1)\text{-Sat}$ .

*Preuve.* De Max $k$ -Sat à MaxNAE $(k+1)$ -Sat, il existe une réduction bien connue que nous présentons ici comme réduction à la fois *affine* et LOC'-réduction.

Soit  $I = (X, C)$  une instance de  $k$ -Sat à  $m$  clauses sur  $n$  variables, on construit l'instance  $I' = (X \cup \{y\}, C \times \{y\})$  de NAE $(k+1)$ -Sat. Pour toute affectation  $T$  des variables de  $X$ , la solution  $(T|0)$  de  $I'$  satisfait au sens de NAESat exactement les

1. On rappelle que si  $T$  désigne une affectation des valeurs de vérité sur  $X$ ,  $(T|0)$  (resp.,  $(T|1)$ ) désigne l'extension de  $T$  à  $X \cup \{y\}$  qui affecte  $y$  à 0 (resp., 1).

mêmes clauses que  $T^2$  : seules ne seront pas vérifiées dans  $I'$  les clauses contenant des littéraux (dont  $y$ ) tous nuls. Soit  $T'$  une affectation des variables  $X \cap \{y\}$ , on peut lui associer une solution  $g(T')$  de  $I$  de valeur  $m_{\text{Sat}}(I, g(T')) = m_{\text{NAE}}(I', T')$  en posant  $g(T') = T'|_X$  si  $T'$  affecte  $y$  à 0,  $g(T') = \overline{T'}|_X$  sinon.  $g$  est évidemment surjective, toute affectation  $T$  sur  $X$  pouvant être déduite, notamment, de l'affectation  $(T|0)$  sur  $X \cup \{y\}$ ; de plus, les couples de solutions  $(T', g(T'))$  sont toujours liés en valeur par une relation affine de paramètres  $k_I = 1$  et  $K_I = 0$  : la réduction proposée est bien une réduction affine de  $\text{Max}k\text{-Sat}$  à  $\text{MaxNAE}(k+1)\text{-Sat}$ . Possède-t-elle également les propriétés d'une  $\text{LOC}'$ -réduction pour la structure de voisinage miroir  $h$ -borné ? Soient  $S'$  et  $T'$  deux affectations au plus  $h$ -, au moins  $n-h$ -distantes sur  $X \cup \{y\}$ , nous voulons vérifier pour assurer la surjectivité de voisinage que les solutions  $g(S')$  et  $g(T')$  sont au plus  $(h+1)$ -, au moins  $[n-(h+1)]$ -distantes sur  $I$ . Si  $S'$  et  $T'$  coïncident sur  $y$ , alors les distances  $d(g(S'), g(T'))$  et  $d(S', T')$  sont identiques ; sinon, supposons que  $T'$  affecte  $y$  à 1, alors les distances vérifient  $d(g(S'), g(T')) = |X| - d(g(S'), \overline{g(T')})$  et  $d(S', T') = d(g(S'), \overline{g(T')}) + 1$ , ce dont on déduit : si  $d(S', T') \leq h$  alors  $d(g(S'), g(T')) \geq n-h+1$  et si  $d(S', T') \geq n-h$  alors  $d(g(S'), g(T')) \leq h+1$ .

Une fois de plus, la combinaison des avantages d'une réduction affine et d'une  $\text{LOC}'$ -réductions mènent à la G-réduction. ■

**PROPOSITION 6.10.**—  $\text{MaxCut} \propto^{\text{G}[\delta](1,h)} \text{MaxNAEE2-Sat}$ .

*Preuve.* On montre que la relation qui lie ces deux problèmes est simultanément *fortement affine* et  $\text{LOC}'$ -réduction, entre les deux problèmes.

Soit  $G(V, E)$  une instance de  $\text{MaxCut}$ , on peut très bien l'interpréter comme une instance de  $\text{MaxNAEE2-Sat}$  en considérant les sommets comme des variables et les arêtes comme des clauses : une arête (resp., une clause) est dans la coupe (resp., valide au sens de  $\text{NAESat}$ ) si l'une de ses extrémités (resp., l'un de ses littéraux) est dans la coupe (resp., vrai) et l'autre dans le complémentaire (resp., faux). Il ne s'agit ici que de la façon de le regarder, la réalité que l'on préfère prêter au modèle mathématique formulé. On notera que les instances de  $\text{MaxNAEE2-Sat}$  que l'on obtient sont remarquables, puisqu'elles sont un cas particulier de pire solution nulle. La restriction de  $\text{NAESat}$  à des clauses composées exclusivement de littéraux positifs est notée  $\text{PosNAESat}$  ; si l'on considère cette restriction, les problèmes  $\text{MaxCut}$  et  $\text{MaxPosNAE2-Sat}$  sont affinement identiques. Cette forme particulière des instances images ne permet pas, *a priori*, de revenir en arrière et d'interpréter une instance quelconque du problème  $\text{MaxNAEE2-Sat}$  comme une instance de  $\text{MaxCut}$  ; cependant, il est possible de l'exprimer comme une instance d'un problème de coupe plus sophistiqué,  $\text{MaxPB}$ .

---

2.  $(T|0), (T|1) \in \{0, 1\}^{n+1}$  sont définis par  $(T|0)_X = (T|1)_X = T$  et  $(T|0)_{\{y\}} = 0$ ,  $(T|1)_{\{y\}} = 1$



Effectivement, la transformation proposée il y a de cela quelques propositions de MinEQ à MinPB permet tout aussi bien de transformer des instances de MaxNAEE2-Sat en des instances affinement liées de MaxPB : il suffit d'associer à chaque variable  $x_i$  un couple de sommets  $(u_i, v_i)$  qui devront être séparés par une bisection valide, et à chaque clause  $c_i = (x_j, x_k)$  (resp.,  $(x_j, \bar{x}_k)$ ,  $(\bar{x}_j, \bar{x}_k)$ ) l'arête  $e_i = u_j u_k$  (resp.,  $u_j v_k$ ,  $v_j v_k$ ) ; une affectation  $T$  des valeurs de vérité sur  $I$  est une bisection sur  $I'$ , et chaque clause validée par  $T$  au sens de NAEsSat est une arête de la coupe. Dans l'autre sens, pour se ramener facilement d'une instance de MaxPB à MaxNAEE2-Sat de façon similaire à ce qui a été fait pour les versions *minimisation* de 2-EQ et PB, il faut pondérer les clauses associées aux arêtes du graphe initial, NAEsSat ne différenciant pas deux clauses  $(\ell_1, \ell_2)$  et  $(\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2)$ . ■

PROPOSITION 6.11.—

$$\begin{array}{lll}
 \text{MaxCut} & \xleftrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MaxPosNAEE2-Sat} \\
 \text{MaxCut} & \underset{\propto}{\xrightarrow{G[\delta](1,h)}} & \text{MaxNAEE2-Sat} \quad \underset{\propto}{\xrightarrow{G[\delta](1,h)}} \text{MaxPB} \\
 & \underset{\propto}{\xrightarrow{G[\delta](1,h)}} & \text{MaxW[2]NAE2-Sat.}
 \end{array}$$

### 6.2.3. Dense ou pas dense ?

Ce paragraphe s'intéresse aux instances *denses* des problèmes de *satisfaisabilité* (Max et Mink-Sat, Max et Mink-CCSP, Max et MinEk-Sat, Max et MinEk-CCSP), d'*équivalences* (Max et MinEQ) et d'*équations binaires* (Max et Mink-Lin2) ; la densité s'exprime en fonction du nombre d'occurrences des variables du problème dans les expressions (*clauses*, *équivalences*, *équations*). L'intérêt de la considération de telles instances réside en la possibilité qu'elle offre d'utiliser des outils probabilistes, fort précieux pour l'établissement de rapports d'approximation. Les résultats sont évocateurs : les instances denses (*ensemble d'expressions au plus k-aires de cardinalité de l'ordre du nombre de variables à la puissance k - 1*, voir la définition 6.1) des problèmes Mink-Sat [BAZ a], Maxk-Sat [ARO 95], MaxEk-CCSP [AND 98] et MinEk-LIN2 [BAZ a] admettent des PTAS, alors que, pris dans leur version générale, ces problèmes sont tous APX-difficiles. Arora, Karger et Karpinski montrent même que les instances *denses* de tout problème de MaxSNP admettent un schéma d'approximation polynomial [ARO 95] ; pour une information plus complète sur les résultats permis à ce jour par la densité des problèmes APX-difficiles, se référer à [KAR 97].

Si nous avons déjà, parfois à maintes reprises, évoqué les problèmes Sat, CCSP et EQ, c'est en revanche la première fois que nous abordons les problèmes Lin2 d'équations binaires : il s'agit, étant donnée une instance  $I = (X, E)$  composée d'un ensemble  $X$  de variables binaires et d'un ensemble  $E$  d'équations linéaires sur  $X \cup \bar{X}$ ,

de trouver une affectation qui satisfasse un *maximum* ou un *minimum* (selon que l'on se situe dans les versions *maximisation* ou *minimisation* de ce problème) de ces équations, définies modulo 2. Plus précisément, une équation de  $E$  sera de la forme  $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \dots \oplus x_{i_p} = b$  avec  $b$  à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et où  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$  sont des variables binaires de  $X$ ; une telle équation sera satisfaite si  $b = 1$  et un nombre impair des arguments  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$  sont affectés à 1, si  $b = 0$  et un nombre pair des arguments  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$  sont affectés à 1. La restriction de ce problème à des équations sur au plus  $k$  variables sera notée  $k$ -Lin2; dans tous les cas, on travaille sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (notation Lin2).

Par la suite, on entendra par instance d'un problème de  $k$ -Satisfaisabilité (resp.,  $Ek$ -Satisfaisabilité) tout ensemble  $C$  de clauses, disjonctives ou conjonctives, de taille au plus  $k$  (resp., exactement  $k$ ) sur un ensemble  $X$  de variables. Le nombre d'occurrences d'une variable  $x_i$  d'un problème de *satisfaisabilité* ou d'une instance de Min ou MaxEQ, noté  $d(x_i)$ , calcule le nombre de clauses ou d'équivalences faisant apparaître les littéraux  $x_i$  ou  $\bar{x}_i$ ; le nombre d'occurrences d'une variable  $x_i$  d'un problème d'*équations binaires* sera également noté  $d(x_i)$  et comptera naturellement le nombre d'équations faisant intervenir la variable  $x_i$ .

**DÉFINITION 6.1.**— *Pour une constante  $\mu > 0$ , une instance  $I = (X, E)$  à  $m$  clauses (équivalences, équations binaires) sur  $n$  variables d'un problème de  $k$ -satisfaisabilité (d'équivalences, de  $k$ -équations binaires) sera dite  $\mu$ -dense si le nombre  $d(x_i)$  d'occurrences de chaque variable  $x_i$  de  $X$  est d'au moins  $\mu \times n^{k-1}$  ( $\mu \times n$ ,  $\mu \times n^{k-1}$ ), et  $\mu$ -dense en moyenne si l'ensemble  $E$  est composé d'au moins  $\mu \times n^k$  ( $\mu \times n^2$ ,  $\mu \times n^k$ ) expressions; elle sera dite dense si elle est  $\mu$ -dense pour un certain  $\mu > 0$ , et dense en moyenne si elle est  $\mu$ -dense en moyenne pour un certain  $\mu > 0$ . On appelle problème dense et l'on note  $\text{dense}\Pi$  la restriction du problème  $\Pi$  à ses instances denses.*

Si une instance  $I = (X, E)$  d'un problème de  $k$ -satisfaisabilité, d'équivalences ou de  $k$ -équations binaires est  $\mu$ -dense, elle est également  $\mu/k$ -dense en moyenne :

$$\forall x \in X, d(x) \geq \mu \times n^{k-1} \Rightarrow |E| \geq \frac{1}{k} \sum_{x \in X} d(x) \geq \frac{\mu}{k} n^k.$$

Nous allons voir que, dans le cadre de l'approximation différentielle comme dans celui des optima locaux, la version dense d'un problème peut être aussi *difficile* que le problème général. Pour ce, nous nous inspirerons le plus souvent de réductions proposées dans [BAZ a] que nous compléterons pour les adapter au cadre différentiel.

Dans les constructions qui suivent où  $L = X \cup \bar{X}$  désigne un ensemble de littéraux sur un ensemble  $X$  de variables, on parlera souvent de la restriction  $\mathcal{P}'_r(L)$  de l'ensemble  $\mathcal{P}_r(L)$  des parties de taille  $r$  de  $L$  aux expressions qui ne contiennent pas de tautologie de la forme  $(l, \bar{l})$  :  $\mathcal{P}'_r(L) = \{c \in \mathcal{P}_r(L) : \forall l \in L, l \in c \Rightarrow \bar{l} \notin c\}$ .

Si  $n$  désigne le nombre de variables, la cardinalité de  $\mathcal{P}'_r(L)$ , fonction du choix de  $r$  variables parmi  $n$  puis de  $h$  variables à mettre sous forme négative parmi  $r$  pour  $h$  de 0 à  $r$ , est donnée par :

$$|\mathcal{P}'_r(L)| = \binom{n}{r} \times \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} = 2^r \times \binom{n}{r} \Rightarrow |\mathcal{P}'_r(L)| = \Theta(n^r).$$

PROPOSITION 6.12. —  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

- 1)  $\text{Max}k\text{-Sat} \stackrel{\text{G}[\delta](1,h)}{\propto} \text{MaxDense}k\text{-Sat}$  ;
- 2)  $\text{MaxDense}k\text{-Sat} \stackrel{\text{G}[\delta](1,h)}{\propto} \text{MaxDense}Ek\text{-Sat}$ .

*Preuve du point (1).* Soit  $I = (X, C)$  une instance de  $\text{Max}k\text{-Sat}$  sur  $|X| = n$  variables ; on introduit un ensemble  $Y$  de  $n$  variables et l'on considère toutes les  $k$ -clauses que l'on peut construire en associant un littéral de  $X \cup \overline{X}$  à  $k-1$  littéraux de  $Y \cup \overline{Y}$ , construisant l'instance  $I'$  de  $\text{Max}k\text{-Sat}$  suivante :  $I' = (X', C')$  avec  $X' = X \cup Y$  et  $C' = C \cup D$  pour  $D = (X \cup \overline{X}) \times \mathcal{P}_{k-1}(Y \cup \overline{Y})$ .

L'instance  $I'$  est ainsi constituée de  $2n$  variables et de  $m + \Theta(n^{k-1})$  clauses ; chaque variable  $x_i$  apparaît dans au moins  $2|\mathcal{P}_{k-1}(Y \cup \overline{Y})| = \Theta(n^{k-1})$  clauses et chaque variable  $y_i$  dans exactement  $2n \times 2|\mathcal{P}_{k-2}((Y \setminus \{y_i\}) \cup (\overline{Y} \setminus \{\overline{y}_i\}))| = \Theta(n^{k-1})$  clauses : l'instance, construite en temps polynomial en  $\max\{n, m\}$ , est donc à la fois dense et dense en moyenne ( $|C'| \geq \Theta(n^k)$ ). Considérons maintenant une affectation  $T'$  des valeurs de vérité sur  $X'$  et l'ensemble de clauses  $D$  ;  $T'$  satisfera toujours toutes les clauses de  $D$ , sauf les clauses formées sur les  $n$  littéraux faux de  $X \cup \overline{X}$  et les  $n$  littéraux faux de  $Y \cup \overline{Y}$  : telle que  $D$  est construite, cela concerne  $n \times C_n^{k-1}$  clauses. Ainsi, toute affectation  $T'$  sur  $X'$  satisfera exactement  $K = |D| - n \times C_n^{k-1}$  clauses de  $D$ . On déduit de cette observation les relations suivantes :  $\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{2n}$  tel que  $T|_X = T$ ,  $m_{\text{Sat}}(I', T') = m_{\text{Sat}}(C, T') + K = m_{\text{Sat}}(I, T) + K$ . Cette propriété étant l'expression du fait que seules les variables de  $X$  sont pertinentes sur  $I'$ , et ce seulement pour la satisfaction des clauses de  $C$ , elle nous assure, plus que la simple affinité de la réduction, que toute extension  $T'$  d'un optimum  $h$ -local  $T$  sur  $I$  sera optimum  $h$ -local sur  $X'$ , et ce quelle que soit la constante  $h$  considérée : la  $\text{G}[\delta](1, h)$ -réduction est vérifiée. Ceci conclut la preuve du point (1) de la proposition.

*Preuve du point (2).* Soit  $I = (X, C)$  une instance de  $\text{MaxDense}k\text{-Sat}$  à  $|C| = m$  clauses et  $|X| = n$  variables ; nous savons la transformer en une instance de  $\text{Max}Ek\text{-Sat}$  de sorte à préserver l'approximation différentielle et les optima locaux (voir paragraphe 5.1.1), mais la densité ? Reprenons la construction proposée alors et agrémentons-la de quelques clauses supplémentaires. On introduit de nouveau un ensemble de variables  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  de même taille que  $X$ , et à chaque clause  $c_i =$

$(\ell_1, \dots, \ell_p)$  de  $C$  d'au plus  $k$  littéraux, on associe l'ensemble  $C_i$  de clauses suivant, qui consiste à compléter  $c_i$  de toutes les façons possibles à partir des  $k - p$  premier littéraux de  $Y$  et  $\bar{Y}$  :  $\forall i = 1, \dots, m, C_i = c_i \times \mathcal{P}_{k-p}(\{y_1, \dots, y_{k-p}\} \cup \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-p}\})$ .

A une clause  $c_i$  de taille  $p \leq k$ , on aura ainsi associé  $|P^{k-p}(\{y_1, \dots, y_{k-p}\} \cup \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{k-p}\})| = 2^{k-p}$  clauses. Sur chacune de ces familles  $C_i$ , une affectation  $T'$  des valeurs de vérité  $T'$  sur  $X \cup \{y_1, \dots, y_k\}$  vérifiera toutes ses clauses, sauf peut-être une si  $T'$  ne satisfait pas  $c_i$ . Supposons par exemple que  $T'$  affecte à 0 les variables  $y_1, \dots, y_k$  ; alors de toutes les combinaisons de littéraux  $y_1, \dots, y_k, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k$ , la seule rendue fausse par  $T'$  sera  $(y_1, \dots, y_k)$ , toute autre combinaison comportant au moins une négation : ainsi, la clause  $c_i \cup \{y_1, \dots, y_k\}$  sera satisfaite si et seulement si  $T'$  satisfait  $c_i$ . Notons  $D = \bigcup_{i=1}^m C_i$  l'union de ces clauses et  $K = |D| - m$ , la réflexion précédente nous inspire la relation :  $\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{n+k}$  telles que  $T|_X = T', m_{\text{Sat}}(D, T') = m_{\text{Sat}}(I, T) + K$ .

Nous avons *régularisé* la taille des clauses, il faut maintenant *densifier* ; pour ce, on introduit toutes les clauses de taille  $k$  possible que l'on peut former sur les littéraux de  $Y \cup \bar{Y}$ , ce qui conduit à considérer l'instance  $I' = (X', C')$  de MaxEk-Sat avec :

$$- X' = X \cup Y \quad (|X'| = 2n) ;$$

$$- C' = D \cup E \text{ avec } E = \mathcal{P}_k(Y \cup \bar{Y}) \quad (|C'| = |D| + |E|, |D| \leq m \times 2^{k-1} \text{ et } |E| = \Theta(n^k)).$$

La construction est bien polynomiale en la taille  $\max\{n, m\}$  de l'instance initiale, la taille de l'ensemble  $C'$  de clauses considéré étant d'ordre  $\Theta(m + n^k)$ . De plus, il s'agit d'une instance de MaxEk-Sat dense et dense en moyenne, chaque variable  $y_i$  apparaissant dans  $|\mathcal{P}_{k-1}(Y \setminus \{y_i\} \cup \bar{Y} \setminus \{\bar{y}_i\})| = \Theta(n^{k-1})$  clauses (*on rappelle que*  $\Theta(n^r) = \Theta((2n)^r)$ ). Toute affectation des variables de l'ensemble  $Y$  satisfera exactement  $|E| - C_{2n}^k$  clauses de  $E$  (*toutes les clauses de  $E$ , sauf celles formées sur les littéraux de  $Y \cup \bar{Y}$  rendus faux par l'affectation considérée*). Ainsi, si l'on note  $K' = K + |E| - C_{2n}^k$ , les valeurs des solutions sur les instances  $I$  et  $I'$  sont liées par la relation affine :  $\forall (T, T') \in \{0, 1\}^n \times \{0, 1\}^{2n}$  telles que  $T|_X = T', m_{\text{Sat}}(I', T') = m_{\text{Sat}}(I, T) + K'$ . Cette réduction affine préserve-t-elle les optima locaux relativement à une fonction voisinage  $\mathcal{V}$  donnée ? Soit  $T$  une solution de  $I$  optimale sur  $\mathcal{V}(I, T)$ , nous prétendons qu'alors toute extension  $T'$  de  $T$  aux variables de l'ensemble  $Y$  est également optimale sur  $\mathcal{V}(I', T')$ . Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que seule l'affectation des variables de  $X$  a une incidence sur la valeur d'une solution de  $I'$  : si  $S'$  est voisine de  $T'$  au sens de  $\mathcal{V}$ , la restriction  $S$  de  $S'$  à  $X$  est a fortiori voisine de  $T$  au sens de  $\mathcal{V}$  ; si l'on note  $\tilde{S}$  l'extension de  $S$  aux variables de l'ensemble  $Y$  qui coïncide avec  $T'$  ( $\tilde{S}|_Y = \tilde{T}|_Y$ ), de l'optimalité locale de  $T$  ( $m_{\text{Sat}}(I, T) \geq m_{\text{Sat}}(I, S)$ ) et de la relation affine liant les instances  $I$  et  $I'$  ( $m_{\text{Sat}}(I, T) - m_{\text{Sat}}(I, S) = m_{\text{Sat}}(I', T') - m_{\text{Sat}}(I', \tilde{S})$ ), on conclut alors  $m_{\text{Sat}}(I', S') = m_{\text{Sat}}(I', \tilde{S}) \leq m_{\text{Sat}}(I', T')$ . La  $G[\delta](1, h)$ -réduction est établie. ■

Les mêmes transformations permettent d'établir les équivalences suivantes.

COROLLAIRE 6.3. –  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Mink-Sat} & \xleftrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MinDensek-Sat} \\ \text{MinDensek-Sat} & \xrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MinDenseEk-Sat} \\ \text{Maxk-CCSP} & \xleftrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MaxDensek-CCSP} \\ \text{MaxDensek-CCSP} & \xrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MaxDenseEk-CCSP} \\ \text{Mink-CCSP} & \xleftrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MinDensek-CCSP} \\ \text{MinDensek-CCSP} & \xrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MinDenseEk-CCSP}. \end{array} \right.$$

PROPOSITION 6.13. –  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{Mink-LIN2} & \xrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MinDensek-LIN2} \\ \text{Maxk-LIN2} & \xrightarrow{G[\delta](1,h)} & \text{MaxDensek-LIN2}. \end{array} \right.$$

*Preuve.* Soit  $I = (X, E)$  une instance de Maxk-LIN2 composée de  $|E| = m$  équations sur  $|X| = n$  variables binaires, on *densifie*  $I$  en introduisant, une fois encore, un ensemble  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  de variables de même taille que  $X$ , ainsi que l'ensemble  $F$  d'équations défini,  $\forall i = 1, \dots, n$ ,  $\forall J = \{j_1, \dots, j_{k-1}\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , par :

$$\begin{aligned} x_i \oplus y_{j_1} \oplus \dots \oplus y_{j_{k-1}} &= 1 & \in & F \\ x_i \oplus y_{j_1} \oplus \dots \oplus y_{j_{k-1}} &= 0 & \in & F. \end{aligned}$$

On a ainsi créé  $|F'| = 2nC_n^{k-1} = \Theta(n^k)$  équations, dont exactement une sur deux sera vérifiée pour toute affectation des variables de  $X$  et de  $Y$  ;  $F'$  fait intervenir chaque  $x_i$  dans  $2C_n^{k-1} = \Theta(n^{k-1})$  équations et chaque variable  $y_j$  dans  $2nC_n^{k-2} = \Theta(n^{k-1})$  équations : l'instance  $I' = (X', E')$  définie par  $X' = X \cup Y$  et  $E' = E \cup F$  est dans à la fois dense et dense en moyenne. De plus, toute solution  $T$  de  $I'$  vérifie  $nC_n^{k-1} + m_{\text{LIN2}}(I, T)$  équations : les valeurs des solutions d'une instance à l'autre sont conservées à un facteur constant près, et les optima locaux sur  $I$  sont transformés en optima locaux sur  $I'$  par n'importe quelle extension de l'affectation aux variables de l'ensemble  $Y$ , la valeur d'une solution sur  $I'$  dépendant exclusivement de la performance réalisée par l'affectation des variables de  $X$  sur l'ensemble  $E$  des équations originelles : il s'agit clairement d'une réduction polynomiale qui préserve la

qualité des optima locaux, pour toute structure de voisinage, relativement à la mesure différentielle. On remarquera que si l'instance antécédent  $I$  est une instance de  $Ek$ -Lin2 (composée d'équations sur exactement  $k$  arguments), il en sera de même de l'instance image  $I'$ . ■

PROPOSITION 6.14.—

$$\begin{array}{ll} \text{MinEQ} & \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} \text{MinDenseEQ} \\ \text{MaxEQ} & \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} \text{MaxDenseEQ}. \end{array}$$

*Preuve.* De façon semblable aux preuves précédentes, la réduction que nous concevons consiste à « grossir » l'instance initiale par l'introduction de nouvelles variables et relations.

Soit  $I = (X, E)$  une instance de MinEQ composée de  $|E| = m$  équivalences sur  $|X| = n$  variables binaires, on *densifie*  $I$  en introduisant, une fois dernière, l'ensemble  $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$  de variables de même taille que  $X$ , couplé de l'ensemble  $F$  d'équivalences défini,  $\forall i = 1, \dots, n$  et  $\forall j = 1, \dots, n$ , par :  $x_i \equiv y_j \in F$  et  $x_i \equiv \bar{y}_j \in F$ . L'ensemble  $F$  est constitué de  $2n^2 = \Theta(n^2)$  équivalences qui font intervenir chaque variable  $x_i$ , chaque variable  $y_j$ ,  $2n = \Theta(n)$  fois chacune. L'instance  $I' = (X', E')$ ,  $X' = X \cup Y$ ,  $E' = E \cup F$  ainsi construite, en temps évidemment polynomial en  $\max\{m, n\}$ , est bien dense et dense en moyenne. Il est par ailleurs facile de constater que tout couple  $(T, T')$  de solutions sur  $I$  et  $I'$  qui coïncident sur  $X$  vérifie la relation :  $m_{\text{EQ}}(I', T') = m_{\text{EQ}}(I, T) + n^2$ , toute affectation  $T'$  sur  $X'$  satisfaisant toujours exactement  $n^2$  équivalences de  $F$ . Cette dernière réflexion suffit à se convaincre que la réduction proposée préserve les optima locaux et leur qualité différentielle, soit qu'elle est une  $G[\delta](1, h)$ -réduction. ■

THÉORÈME 6.2.— *Les problèmes suivants, dans leurs version maximisation comme minimisation, mêmes restreints à leurs ensembles d'instances denses, n'admettent pas de schéma d'approximation polynomial différentiel à moins que  $P = NP$  :  $Ek$ -Sat ( $\forall k \geq 2$ ),  $Ek$ -CCSP, ( $\forall k \geq 2$ ),  $k$ -LIN2, ( $\forall k \geq 2$ ) et EQ.*

*Preuve.* D'après les propositions 6.12, 6.13 et 6.14, pour chacun de ces problèmes, un schéma différentiel sur les instances denses induirait un schéma différentiel sur le problème général, dont on pourrait déduire par le biais de leur version *maximisation* un schéma classique d'approximation, ce qui ne peut être s'agissant de problèmes APX-difficiles, à moins que  $P$  et  $NP$  ne coïncident. ■

### 6.3. Conclusion

#### 6.3.1. *Un certain goût d'inachevé*

Nous avons proposé dans ce chapitre des réductions d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  qui préservent la qualité des optima locaux : si  $\Pi'$  garantit la qualité de ses optima locaux pour un certain voisinage  $h'$ -borné, alors  $\Pi$  garantira lui-même un degré semblable de qualité de ses optima locaux, pour un voisinage  $h$ -borné. L'intérêt de telles réductions est non seulement de parvenir à rapprocher les problèmes entre eux, de comparer leur degré d'approximabilité et leur structure même ; cela fait avancer notre connaissance de NPO. Il est essentiellement de déduire d'un bon comportement de  $\Pi'$  un bon comportement de  $\Pi$ , d'un mauvais comportement de  $\Pi$  un mauvais comportement de  $\Pi'$  : d'établir des résultats, tangibles, quant à l'approximabilité des problèmes.

Les réductions proposées dans ce chapitre, par la méconnaissance que l'on a du comportement des problèmes concernés du point de vue de leurs optima locaux et parfois même de leur approximation différentielle générale, ne nous permettent pas d'établir de tels résultats : on se cantonne au conditionnel, au classement relatif des problèmes concernés.

Il faudrait exploiter ces résultats conditionnels que sont les réductions dans l'espoir d'en déduire des résultats affirmatifs :  $\Pi$  garantit la qualité (pour un niveau de qualité quelconque, éventuellement dépendant de la taille de l'instance) de ses optima locaux pour un certain voisinage  $h$ -borné (résultat positif déduit de la connaissance du bon comportement de  $\Pi'$ ),  $\Pi'$  ne garantit la qualité de ses optima locaux pour aucun voisinage  $h$ -borné (résultat négatif déduit d'un mauvais comportement de  $\Pi$ ). Pour ce, nous devons donc parvenir à évaluer la qualité des optima locaux des problèmes concernés. Nous pensons notamment à MinRSSC et MaxRIS dans l'espoir de résultats positifs sur respectivement MinSC et MaxCB ; à MinE2-Sat dans l'hypothèse d'un résultat négatif sur MinW(1)EQ. Nous pensons également à l'étude approfondie de problèmes tels MinPB, MinEQ et surtout MaxNAE2-Sat qui, comme problème *le plus simple* au sens de la réduction des problèmes de satisfaisabilité, donnerait une bonne idée de l'espoir que l'on pourrait nourrir d'approcher ou non ces problèmes par leurs optima locaux en différentiel : si même pour MaxNAE2-Sat les optima locaux seront dans le pire des cas de mauvaises solutions, alors il en sera de même pour tous les problèmes de satisfaisabilité.

#### 6.3.2. *Synthèse*

En dépit de ces réserves, profitons de l'occasion de cette conclusion pour présenter une synthèse des relations qu'entretiennent par G-réduction certains des problèmes que nous avons observés au cours de ce chapitre :

- 1)  $\text{MinEQ} \stackrel{G(1,h)}{\propto} \text{MinPB} \stackrel{G(1,h)}{\propto} \text{MinW[2]EQ}$
- 2)  $\text{MaxNAE}k\text{-Sat} \stackrel{\text{CG}(1,h)}{\propto} \text{Max}k\text{-Sat} \stackrel{\text{CG}(1,h+1)}{\propto} \text{MaxNAE}(k+1)\text{-Sat}$
- 3)  $\text{MaxCut} \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} \text{MaxPosNAEE2-Sat}$
- 4)  $\text{MaxCut} \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} \text{MaxNAEE2-Sat} \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} \text{MaxPB} \stackrel{G[\delta](1,h)}{\propto} \text{MaxW[2]NAE2-Sat}$

Le premier point provient des propositions 6.5 et 6.6, les points (3) et (4) de la proposition 6.11 ; pour le point (2), il faut juste revenir à la réduction proposée pour appuyer la proposition 6.8 et se rendre compte qu'elle est, de par la forme des instances images de Sat produites, interprétable de la même façon aux sens de GLO[R] et CGLO[R].

Concernant la densité, remarquons simplement que le rapport différentiel, parce qu'il n'est pas sensible à une transformation affine, considérera généralement indifféremment les instances initiales et densifiées des problèmes : dès lors que l'ordre relatif de la qualité des solutions est préservé par la « densification » de l'instance initiale, les deux instances seront, du point de vue de l'approximation différentielle, identiques. Pour les problèmes de satisfaisabilité notamment, il semble *facile* d'introduire des variables et des clauses ou formules qui n'altéreront pas l'évaluation relative des solutions, dans le sens où l'évaluation d'une affectation des valeurs de vérité sur  $I'$  sera indépendante de l'affectation des variables particulières introduites au passage de  $I$  à  $I'$  ; ainsi, toute solution sur  $I'$  satisfera le même nombre de formules que sa restriction sur  $I$ , à une constante près.

C'est un peu d'ailleurs ce qui est frustrant avec le rapport différentiel et les problèmes de logique : d'un côté, il est aisé de relier ces problèmes entre eux, de passer de l'un à l'autre, sans avoir comme en classique à « payer » le poids d'une clause non significative supplémentaire ; il est réconfortant de pouvoir considérer des problèmes qui sont moralement proches comme l'étant effectivement du point de vue de leur approximation. D'un autre côté, le manque de connaissance quant à l'approximation différentielle de ces problèmes ne permet malheureusement pas, à l'état actuel, d'en déduire des résultats significatifs : encore une fois, nous devons nous contenter du conditionnel.



## Chapitre 7

# En-deçà de GLO

Dans ce chapitre, nous oublions la qualité des optima locaux pour revenir sur la détermination même de telles solutions. Nous nous sommes au paragraphe 3.1.1 contentés de donner quelques conditions triviales de déroulement polynomial d'un algorithme de recherche locale générique, survolant la question cruciale : *sur quel problème, et pour quel type de voisinage, pourra-t-il être déterminé un optimum local relativement à ce voisinage en temps polynomial ?* Evaluer la performance, comme nous l'avons fait jusqu'ici, est une chose ; être en mesure de déterminer une solution en est une autre, que nous abordons ici du point de vue de la classe PLS et des *problèmes radiaux* ; cette présentation a pour motivation de mieux cerner (sans se prétendre d'exhaustivité) le champ de recherches et de difficultés posées par les optima locaux en approximation polynomiale. Son rôle est purement informatif et n'a pas l'ambition d'exposer à proprement parler de résultats nouveaux.

### 7.1. La classe PLS des problèmes de recherche locale

La question « Sur quel problème vais-je être capable de déterminer des optima locaux ? » Johnson, Papadimitriou et Yannakakis [JOH 88] se la posent en termes de la classe PLS (*Polynomial-time Local Search*) des problèmes de recherche d'optima locaux. Un tel problème est la donnée d'un problème  $\Pi = (I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi, \text{opt}_\Pi)$  de NPO et d'une fonction voisinage  $\mathcal{V}$  pour lequel on connaît un algorithme  $C_\Pi$  qui, pour tout couple  $(I, s)$  de  $I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi(I)$ , sait déterminer en temps polynomial en  $|I|$  si  $s$  est optimum local relativement à  $\mathcal{V}$  et le cas échéant, renvoie une solution  $s' \in \mathcal{V}(I, s)$  strictement meilleure que  $s$  au sens de  $m_\Pi$  et de  $\text{opt}_\Pi$ . L'idée est de restreindre la notion d'optima locaux à des voisinages calculables en temps polynomial, condition nécessaire au déroulement polynomial des LSA. Une fois la classe posée, tout reste

à faire : savoir quels couples (*problème*, *voisinage*) permettront-ils de déterminer rapidement des optima locaux. C'est là toute la richesse apportée à la discipline par les travaux [JOH 88, SCH 91, YAN 97], montrant combien la question prend son sens par une profusion de résultats positifs et négatifs, de résultats cruciaux de complétude, connaissance à laquelle les contributions de [KRE 89, KLA 96] sont notamment à signaler.

### 7.1.1. De la difficulté de détermination des optima locaux

#### 7.1.1.1. Quelques notions indispensables

Nous donnons d'abord une définition formelle de la classe PLS.

**DÉFINITION 7.1.**— *Un couple  $(\Pi, \mathcal{V})$  où  $\Pi$  est un problème de NPO et  $\mathcal{V}$  une fonction voisinage sur  $\Pi$  est un problème de PLS s'il existe un algorithme  $C_\Pi$  qui vérifie :*

- 1)  $\exists p_\ell$  un polynôme tel que  $C_\Pi(I, s)$  est de complexité au pire des cas  $p_\ell(|I|)$  ;
- 2)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I)$ ,

$$C_\Pi(I, s) = \begin{cases} s & s \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, s) \\ t \in \mathcal{V}(I, s) : m_\Pi(I, t) \succ m_\Pi(I, s) & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour comparer maintenant le déroulement de LSA entre problèmes de la classe, les auteurs définissent naturellement la PLS-réduction. Contrairement à la *réduction de voisinage*, la PLS-réduction cherche explicitement à *transporter par réduction les optima locaux de  $f(I)$  vers  $I$* , mais pas nécessairement à rattacher tout optimum local de  $I$  à un optimum local de  $f(I)$  ; par ailleurs, dans la classe PLS, le *voisinage* est partie intégrante de la définition des problèmes, *faisant ainsi partie des objets à réduire*, tandis que la réduction de voisinage tente d'associer à tout voisinage d'une certaine structure sur  $\Pi'$  un voisinage de structure semblable sur  $\Pi$ . Les voisinages considérés sont au demeurant de toute sorte, éventuellement résultant d'algorithmes sophistiqués, même si les voisinages  $h$ -bornés ont toujours une grande part à jouer.

**DÉFINITION 7.2.**— *Soient  $(\Pi, \mathcal{V})$  et  $(\Pi', \mathcal{V}')$  deux problèmes PLS. Une PLS-réduction  $R = (f, g)$  de  $(\Pi, \mathcal{V})$  à  $(\Pi', \mathcal{V}')$ , notée  $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{\text{PLS}}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$ , est une réduction de  $\Pi$  à  $\Pi'$  qui vérifie :  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$ , si  $s'$  est un optimum sur  $\mathcal{V}'(f(I), s')$ , alors  $g(s')$  est un optimum sur  $\mathcal{V}(I, g(s'))$ .*

Si  $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{\text{PLS}}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$  et que l'on peut déterminer par LSA, en temps polynomial, un optimum local  $s'$  d'une instance  $f(I)$  de  $\Pi'$ , alors on a directement par  $g$ , qui est également de complexité polynomiale en  $|I|$ , un optimum local  $s = g(s')$  de  $I$ .

Max et MinCircuit pour le voisinage 1-borné ont été les premiers problèmes montrés PLS-complets ; une instance du problème de *Circuit* est la donnée d'un circuit

booléen (sans boucle) sur les portes « *et* » ( $\wedge$ ), « *ou* » ( $\vee$ ) et « *non* » ( $\neg$ ) qui prend en entrée un mot binaire  $\sigma$  de longueur  $m$  ( $\sigma \in \{0, 1\}^m$ ) et renvoie en sortie un mot binaire  $\tau$  de longueur  $n$  ( $\tau \in \{0, 1\}^n$ ); selon la version considérée, il s'agit de trouver un input  $\sigma$  dont la sortie  $\tau$  *maximise* ou *minimise* le nombre  $\sum_{i=0}^{n-1} \tau_i 2^i$  d'écriture binaire  $\tau$ . D'autres problèmes ont ensuite été montrés PLS-complets (souvent par des constructions fastidieuses), citons notamment MinTSP pour le voisinage  $k$ -opt où  $k$  est une certaine constante [KRE 89] (le voisinage  $k$ -opt fait l'échange, d'un tour à un tour voisin, entre deux paquets de  $k$  arêtes), MaxWCut [SCH 91], MaxW2-Sat et MaxWPosNAE3-Sat [KRE 89, SCH 91] pour le voisinage 1-borné, où le dernier problème est la restriction du problème MaxWNAE3-Sat à des ensembles de clauses constituées uniquement de littéraux positifs.

Ces résultats, bien que précieux, ne sont qu'intermédiaires : nous ne sommes pas encore en mesure d'en déduire des résultats négatifs, ce que permettent généralement de faire des résultats de complétude. Les chercheurs se focalisent alors sur le déroulement des LSA ou plus exactement, leur navigation dans l'ensemble des solutions, pour définir une réduction qui établisse une relation plus forte encore entre les deux instances mises en rapport.

#### 7.1.1.2. Le graphe de transition

La fonction objectif ordonne les solutions d'un problème, de telle sorte qu'il est toujours possible de représenter l'espace des solutions à l'aide d'un graphe orienté dont les sommets sont les solutions réalisables et les arcs sont les couples de solutions  $(x, y)$  tels que la solution  $y$  est meilleure que  $x$ . De façon plus fine et dans l'esprit de la recherche d'optima locaux, il serait intéressant de se limiter aux couples  $(x, y)$  de solutions voisines (au sens d'une certaine structure de voisinage) telles que  $y$  est strictement meilleure que  $x$ ; dans cette représentation de  $\text{Sol}_\Pi(I)$ , les sommets qui n'ont pas d'arc sortant, que nous qualifierons d'*absorbants*, sont les optima locaux du problème. Dans [SCH 91], il est question pour une problème  $(\Pi, \mathcal{V})$  de PLS de *graphe de transition*; il s'agit du graphe orienté, noté  $TG_\Pi(I) = (V_I, A_I)$ , défini par :

$$\begin{cases} V_I &= \text{Sol}_\Pi(I) \\ A_I &= \{(s, t) \in \text{Sol}_\Pi(I) : t \in \mathcal{V}(I, s) \wedge m_\Pi(I, t) \succ m_\Pi(I, s)\}. \end{cases}$$

La *hauteur d'un sommet*  $v$  est définie dans  $TG_\Pi(I)$  par la longueur d'un plus court chemin de  $v$  vers un sommet *absorbant*, la *hauteur* de  $TG_\Pi(I)$  est la hauteur du sommet de plus grande hauteur. Ces définitions sont sans ambiguïté,  $TG_\Pi(I)$  étant clairement rendu sans circuit par la nécessité d'améliorer strictement la valeur des solutions d'une extrémité à l'autre de chaque arc. Un chemin d'une solution  $s$  à une solution  $t$ , puisqu'il améliore la fonction objectif à chaque passage d'une solution à une solution voisine, est appelé dans [FIS 95] *chemin améliorant*. Le déroulement d'un LSA se lit aisément sur ce graphe : partant d'une solution initiale (par exemple  $\text{triv}_\Pi(I)$ , au pire

des cas une pire solution  $x_W$ ), chaque itération consiste en le choix d'un sommet descendant par le parcours d'un arc, jusqu'à tomber sur un sommet *absorbant*, optimum local du problème désigné par  $\mathcal{V}$ . Ainsi, la complexité d'un LSA est minorée (au facteur polynomial près du choix du voisin à chaque itération) par la hauteur de  $TG_{\Pi}(I)$ . Pour rapprocher deux problèmes de PLS du point de vue de leur résolution locale, il faut donc définir une réduction qui rapproche leur *graphe de transition*. Un peu comme l'ont fait [AUS 95b], Yannakakis s'intéresse à un sous-ensemble de solutions de l'instance image, solutions qu'il qualifie de *raisonnables* et qui, en quelque sorte, est la partie pertinente de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  pour représenter  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  du point de vue traité de la résolution locale. La strict-PLS-réduction a de *strict* la proximité plus grande qu'elle met en évidence entre les deux instances comparées.

**DÉFINITION 7.3.**— Une PLS-réduction  $R = (f, g)$  entre deux problèmes  $(\Pi, \mathcal{V})$  et  $(\Pi', \mathcal{V}')$  de PLS est une strict-PLS-réduction, notée  $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{s-PLS}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$ , s'il existe pour toute instance  $I$  de  $I_{\Pi}$  un sous-ensemble  $S_{\Pi'}(f(I))$  de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  et une fonction  $g' : \text{Sol}_{\Pi}(I) \rightarrow S_{\Pi'}(f(I))$  polynomiale en  $|I|$  tels que :

- 1)  $S_{\Pi'}(f(I))$  contient tous les optima locaux de  $f(I)$  ;
- 2)  $\forall s \in \text{Sol}_{\Pi}(I), g \circ g'(s) = s$  ;
- 3) pour tout chemin  $C_{s't'}$  de  $s'$  à  $t'$  dans  $TG_{\Pi'}(f(I))$  dont les extrémités  $s'$  et  $t'$  sont dans  $S_{\Pi'}(f(I))$  et tous ses sommets intermédiaires dans  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) \setminus S_{\Pi'}(f(I))$ , alors dans  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  : soit  $g(s') = g(t')$ , soit  $(g(s'), g(t'))$  est un arc de  $TG_{\Pi}(I)$ .

On voit facilement que, si  $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{s-PLS}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$  et qu'un LSA cherchant un optimum local relativement à  $\mathcal{V}$  sur  $I$  doit emprunter au moins  $k$  arcs dans  $TG_{\Pi}(I)$ , alors un LSA cherchant un optimum local relativement à  $\mathcal{V}'$  sur  $f(I)$  devra emprunter également au moins  $k$  arcs dans  $TG_{\Pi'}(f(I))$ , un arc sur  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  correspondant à un chemin dans  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  : la hauteur de toute solution  $v$  de  $S_{\Pi'}(f(I))$  dans  $TG_{\Pi'}(f(I))$  est au moins aussi importante que la hauteur de la solution  $g(v)$  dans  $TG_{\Pi}(I)$ . Le temps est alors venu d'énoncer les résultats négatifs : il ne *suffit* plus pour cela que de construire, artificiellement, un problème de PLS dont l'algorithme de recherche locale soit de complexité exponentielle (un problème dont l'arbre de transition est un chemin unique sur un nombre exponentiel de solutions) et de reprendre les preuves de PLS-complétude sous l'angle de la strict-PLS-réduction. Ainsi, notamment pour les problèmes suivants, le déroulement d'un LSA est exponentiel, *et ce indépendamment de la stratégie de choix du voisin à chaque itération* :

- pour MinTSP et le voisinage  $k$ -opt (pour une certaine constante  $k$ ) ;
- pour Max et MinCircuit, MaxWPosNAE3-Sat, MaxWCut, MaxW2-Sat, et le voisinage 1-borné.

Ces résultats peuvent surprendre : pour le problème MaxWCut par exemple, cela signifie qu'un sommet au moins du graphe sera, au cours du déroulement du LSA,

ajouté et retiré à la solution courante un nombre exponentiel de fois. Plus précisément encore, et plus éloquent sûrement quant à la difficulté de détermination d'optima locaux, pour tous ces couples (*problème, voisinage*), le *problème standard d'optimum local* associé (savoir, partant d'une solution initiale, déterminer la solution que retournerait l'heuristique de recherche locale considérée) est montré PSPACE-difficile [YAN 97]. La classe PSPACE regroupe l'ensemble des problèmes de décision que l'on sait résoudre dans un *encombrement mémoire* polynomial, et la conjecture est forte de penser que NP soit un sous-ensemble *propre* de PSPACE, ce qui fait des problèmes PSPACE-difficiles des problèmes *encore plus durs* que les problèmes NP-difficiles.

Pour conclure sur ce point et illustrer combien la tâche peut être ardue que d'appréhender seulement la complexité de détermination d'un optimum local, notons les recherches de [FIS 95] qui, étant donné un problème  $\Pi$  de NPO, une fonction voisinage  $\mathcal{V}$ , une solution initiale  $s_0(I)$  et un entier  $z$  posent le problème de décision  $\Pi^*$  suivant : « Soit  $I$  une instance de  $I_\Pi$ , existe-t-il dans  $TG_\Pi(I)$  un chemin améliorant de  $s_0(I)$  à un optimum local au sens de  $\mathcal{V}$  de taille inférieure ou égale à  $z$  ? » Fischer prouve dans [FIS 95] que MaxWCut\*, MaxWE2-Sat\*, MaxWPosNAESat\* pour le voisinage 1-borné, et MinTSP\* pour le voisinage 2-opt, sont tous NP-complets.

### 7.1.2. Approximation des optima locaux

La recherche d'optima locaux semblant si difficile pour certains problèmes, l'auteur de [KLA 96] se demande s'il n'est pas au moins possible de les approcher, en déterminant des solutions  $s$  qui seraient au moins aussi bonnes que le pire des optima locaux, à un facteur multiplicatif  $r \in ]0, 1]$  près. Pour lier les problèmes entre eux du point de vue la performance des optima locaux, Klauck définit un nouvel outil : à partir de la strict-PLS-réduction qui permet de préserver la structure des problèmes, Klauck construit la forte-PLS-réduction qui, en plus de la structure, permet de préserver le niveau d'approximation du *pire optimum local*.

Notons que l'on se rapproche de plus en plus des G-réductions, toujours à la nuance près qu'ici les voisinages sont définis *a priori*. Il n'en demeure pas moins qu'il s'agit là d'un outil intéressant à regarder sous l'angle GLO, en exigeant toutefois comme préservation du niveau de performance, celle de la qualité globale des optima locaux. Les résultats négatifs seront de portée moindre, simplement plus précis (on ne dira plus que  $\Pi$  ne garantit pas la qualité de ses optima locaux pour tout voisinage  $h$ -borné, mais pour une fonction voisinage particulière). La complétude par forte-PLS-réduction dans PLS des problèmes suivants est établie dans [KLA 96] :

- Min W4-CCSP-B, voisinage 1-borné, pour une constante  $B$  ;
- Min WIDS-B, voisinage  $k$ -borné, pour deux constantes  $B$  et  $k$  ;
- Min et Max PL $\{0, 1\}$ , voisinage  $k$ -borné, pour une constante  $k$  ;

- MinTSP, voisinage  $k$ -opt, pour une constante  $k$ .

Le problème MinIDS (*Independent Dominating Set*, MaxWIDS pour sa version pondérée), consiste en la détermination d'un ensemble dominant qui soit stable et de plus petite taille possible. Cette nouvelle complétude apporte comme enseignement supplémentaire la difficulté *non plus simplement d'obtention* d'un optimum local mais *d'approximation* d'une telle solution : on ne peut approcher un problème  $\Pi$  PLS-difficile au sens de la forte-PLS-réduction à  $2^{-n^\varepsilon}$  de l'optimum global à moins que  $P$  n'égalise NP, ni même de l'optimum local pour  $\varepsilon > 0$  à moins que  $P$  n'égalise PLS [KLA 96].

La forte-PLS-réduction préserve les schémas d'approximation. Comme la classe PLS contient des problèmes NPO-difficiles au sens de la P-réduction (par exemple, MinTSP), l'établissement de la difficulté d'un problème vis-à-vis de cette réduction dans la classe PLS permet de déduire la NPO-difficulté de ce problème ; par ailleurs, en regardant les réductions proposées sous l'angle de la E-réduction, Klauck démontre notamment le fait remarquable que le problème Min3-CCSP-3 est complet pour la classe NPO-PB.

## 7.2. Les problèmes radiaux

On s'intéresse ici à des problèmes dont le *graphe de transition* est exploitable pour une certaine structure de voisinage, évoquant dans un premier temps les travaux effectués à ce propos dans le cadre du rapport différentiel, reprenant ces travaux dans un second temps à l'avantage de l'approche GLO. La représentation de l'ensemble des solutions sous la forme d'un graphe n'a pas été l'unique inspiration des chevaliers de l'optimalité locale ; dans [DEM 98], on exploite la possibilité qu'offrent certains problèmes de représenter leur ensemble de solution sous la forme d'un arbre : c'est le cas des *problèmes radiaux*. La structure de tels problèmes permet de déployer l'ensemble de solutions de chacune de leurs instances sous la forme d'un arbre de racine une pire solution, de sorte que toute solution et en particulier une solution optimale soit déductible de cette pire solution par une *succession unique de solutions* qui améliorent chacune strictement la valeur objective. Pour comprendre l'intérêt de la chose, il faut porter attention à la remarque suivante : selon la nature du problème traité, le *graphe de transition* n'est pas forcément *connexe*. Pour le problème de stable, toute solution est issue du même point de départ, *le vide*, par des ajouts successifs de sommets ; pour d'autres problèmes cependant, il n'y a pas nécessairement de solution *mère de toutes* au sens des *chemins améliorants* dans le graphe de transition, et toute solution n'est pas nécessairement *dégradable* dans son voisinage : nous pensons notamment à MinTSP avec le voisinage 2-opt et donnons un exemple pour MaxSat avec le voisinage 1-borné.

EXEMPLE 7.1.— Considérons l'ensemble de six clauses :

$$\{(x_1, \bar{x}_2), (x_3, \bar{x}_4), (x_2, \bar{x}_3), (x_4, \bar{x}_1), (\bar{x}_1, \bar{x}_3), (\bar{x}_2, \bar{x}_4)\}$$

et l'affectation  $T = (1, 1, 1, 1)$  qui met toutes les variables à 1 ;  $T$  valide 4 clauses, de même que le font *toutes ses affectations voisines*  $(1, 1, 1, 0)$ ,  $(1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 1, 1)$ . Ainsi,  $T$  est un point isolé dans le graphe de transition, non déductible à partir d'une pire solution  $(1, 0, 1, 0)$  ou  $(0, 1, 0, 1)$  le long d'un chemin améliorant.

Dans le *graphe de transition* d'un couple (*problème, voisinage*), si toute solution mène par un chemin à un sommet *absorbant* optimum local, en revanche tout optimum local n'est pas nécessairement accessible à partir d'une solution de départ. Avec les *problèmes radiaux*, on se restreint aux problèmes dont les ensembles de solutions peuvent être représentés par un *arbre*, qui couvre *toutes les solutions*, et dont la fonction *père* correspond à une dégradation à définir de chaque solution. Il s'agit donc de problèmes dont le *graphe de transition* de toute instance est *connexe et descriptible a priori*, par la connaissance conjointe d'une *pire solution* et d'une *fonction de transition* de toute solution à une solution voisine dégradante. Nous étendrons ensuite la représentation sous la forme d'arbre au graphe de transition tel qu'il est défini dans [SCH 91], en essayant d'exploiter les propriétés mises en avant par la structure *radiale* du problème. Car la représentation de l'espace des solutions sous de telles formes, quand cela est possible, permet de décrire toujours les optima 1-locaux et parfois, des cas d'appartenance à GLO $[\delta]$ .

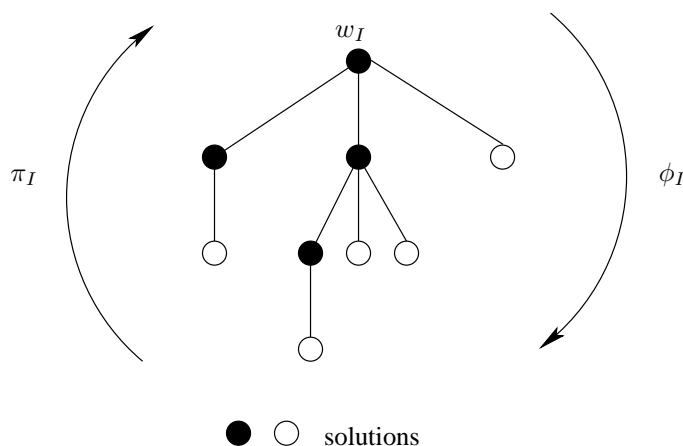
### 7.2.1. Qu'est-ce que radial ?

Dans [DEM 98], les auteurs introduisent une famille de problèmes qui admettent des espaces de solutions dans lesquels il est facile de naviguer, celle des *problèmes radiaux*.

DÉFINITION 7.4.— Un problème  $\Pi$  de NPO est dit *radial* s'il vérifie,  $\forall I \in I_\Pi$ ,  $\forall s \in \text{Sol}_\Pi(I)$ , pour deux polynômes  $p$  et  $q$  et deux familles de fonctions  $(\pi_I)_{I \in I_\Pi}$  et  $(\phi_I)_{I \in I_\Pi}$  polynomiales en  $|I|$  vérifiant respectivement  $\pi_I : \text{Sol}_\Pi(I) \rightarrow \text{Sol}_\Pi(I)$  et  $(\phi_I)_{I \in I_\Pi}$  et  $\phi_I : \text{Sol}_\Pi(I) \rightarrow 2^{\text{Sol}_\Pi(I)}$ , les propriétés :

- 1) la *pire solution*  $w_I$  est unique et constructible en temps  $p(|I|)$  ;
- 2)  $\exists k \leq q(|I|) \in \mathbb{N}$  tel que  $\pi_I^k(s) = w_I$  ;
- 3)  $m_\Pi(I, s) \succ m_\Pi(I, \pi_I(s))$  ;
- 4)  $\phi_I(s) = \pi_I^{-1}(s) = \{t \in \text{Sol}_\Pi(I) : \pi_I(t) = s\}$ .

Pour un problème radial, l'ensemble des solutions d'une instance  $I$  peut ainsi se représenter sous la forme d'un arbre  $A_I = (w_I, \pi_I) = (w_I, \phi_I)$  de racine  $w_I$ , défini de façon équivalente par les fonctions père et fils  $\pi_I$  et  $\phi_I$  (voir figure 7.1). De fils en



**Figure 7.1.** Arborescence de l'ensemble des solutions d'un problème radial

père, d'après la propriété 3, la solution se dégrade et toute solution réalisable qui ne soit pas de pire valeur trouve d'après 2 sa place dans l'arborescence, sur un chemin d'une feuille à  $w_I$  ; de père en fils, la solution se bonifie, et toute solution peut être vue comme le fruit d'une suite d'améliorations infligées à la solution  $w_I$ . Ainsi les optima, locaux comme globaux, se situent sur les feuilles :  $s$  est une feuille s'il n'est pas de solution  $t$  dans  $\text{Sol}_{\Pi}(I)$  telle que  $s$  se trouverait sur le chemin de  $t$  à  $w_I$  qui remonte la fonction père  $\pi_I$ . Dans un arbre, il est facile de circuler et plus précisément ici, on sait déterminer des solutions intéressantes en temps polynomial : l'entrée dans l'arbre par  $w_I$  est polynomiale par 1) puis le suivi de la fonction  $\phi_I$  de père en fils jusqu'à arriver en une feuille est également polynomial, la hauteur  $H_I$  de l'arbre (longueur d'un plus long chemin dans  $A_I$ ) étant de l'ordre d'un polynôme en la taille de l'instance par la propriété 2.

Remarquons que, quitte à fusionner les pires solutions en un sommet, on peut supposer sans perte de généralité que la pire solution est unique. Dans [DEM 98],  $w_I$  n'est pas nécessairement une pire solution mais une solution donnée ; l'idée est de disposer d'une solution approchée accessible en temps polynomial à partir de laquelle on puisse développer l'arborescence des solutions réalisables de sorte de pouvoir déduire *toute solution meilleure* que  $w_I$  (dont les solutions optimales) à partir de  $w_I$  par une suite de transformations simples amenant à des améliorations successives de la fonction objectif. Cela sous-entend donc que les solutions éventuellement non représentées dans l'arborescence sont toutes dominées par  $w_I$ .

Si nous introduisons ce modèle, c'est que parmi les problèmes que nous avons abordés au cours de ce document, certains, à l'image de MaxIS, MinSC, MinC ou encore MaxKS, sont de tels problèmes ; les considérer alors sous cet angle offre la

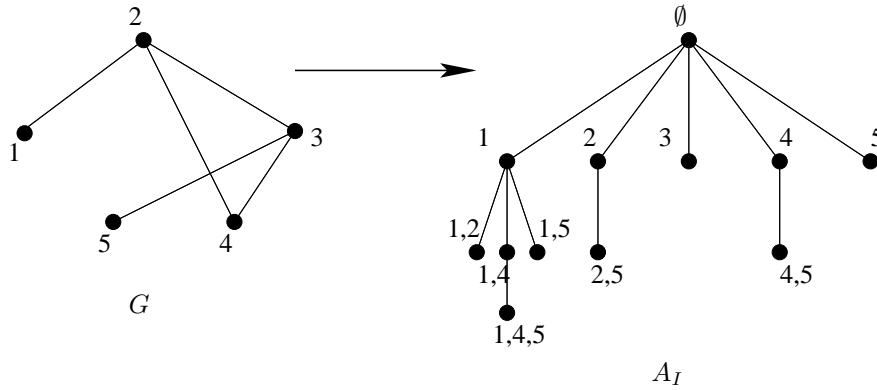


possibilité de mieux cerner leur structure, celle-là même qui nous a permis d'établir le rapport différentiel constant garanti par les solutions maximales ou minimales de certaines instances de ces problèmes.

Considérons par exemple MaxIS et l'une de ses instances  $I = G(V, E)$  où  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ; pour tout sous-ensemble  $U \subseteq V$  de taille  $q$ , on ordonne ses sommets par ordre d'indice croissant  $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(q)$ . MaxIS est radial avec pour pire solution constructible en temps polynomial la solution  $w_I = \emptyset$  et pour fonctions père et fils les fonctions  $\pi_I$  et  $\phi_I$  définies par :  $\forall U$  stable dans  $G$ ,

$$\begin{cases} \pi_I(U) &= U \setminus \{v_{\sigma(q)}\} \\ \phi_I(U) &= \bigcup_{j=\sigma(q)}^n \{W = U \cup \{v_j\} : W \text{ stable}\} . \end{cases}$$

La figure 7.2 offre une illustration du modèle que nous venons de proposer pour le problème de stable avec comme instance le graphe  $G(V, E)$  avec  $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\}$ .



**Figure 7.2.** Arborecence pour un problème de stable

Notons ici que l'on a choisi, étant donné un stable  $U = \{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q)}\}$ , de donner paternité à l'ensemble  $\{u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(q-1)}\}$  déduit de  $U$  en lui retirant le sommet de plus grand indice ; cependant, toute fonction père déterministe formant un stable de cardinalité inférieure par le retrait d'un sommet à  $U$  est acceptable.

Soit maintenant  $I = (C, S)$  une instance du problème de couverture d'ensembles de famille  $S = \{S_1, \dots, S_n\}$  ; la pire solution consistant à prendre la famille entière, on a toujours  $w_I = S$ . Pour toute sous-famille  $S' \subseteq S$  de taille  $q$ , on ordonne les sous-ensembles de  $S \setminus S'$  par ordre d'indice croissant :  $\sigma(1) < \sigma(2) < \dots < \sigma(n - q)$ . On

définit alors les fonctions père et fils de la façon suivante :  $\forall S'$  couverture

$$\begin{cases} \pi_I(S') &= S' \cup \{S_{\sigma(n-q)}\} \\ \phi_I(S') &= \bigcup_{j > \sigma(n-q) : S_j \in S'} \{T = S' \setminus \{S_j\} : T \text{ couverture}\}. \end{cases}$$

Dans les deux cas, il s'agit bien de problèmes radiaux puisque les fonctions  $\phi_I$  et  $\pi_I$  proposées sont de complexité polynomiale :  $\pi_I$  construit en parcourant les sommets de  $V$  (resp., les sous-ensembles de  $S$ ) au plus  $n$  pères, de taille au plus  $n$  ; de son côté,  $\phi_I$  parcourt l'ensemble des sommets (resp., des sous-ensembles) et vérifie la réalisabilité d'au plus  $n$  solutions constructibles à partir de  $U$  (resp.,  $S'$ ). Autrement, les propriétés 2 et 3 sont trivialement vérifiées : par l'ajout d'un sommet (resp., la suppression d'un sous-ensemble), on améliore strictement la valeur de la solution 3 ; enfin, tout ensemble de sommets  $U$  peut être vu comme l'union de ses éléments, toute sous-famille  $S'$  comme la résultante de suppressions successives des éléments de la famille  $S$ .

La notion de problème radial a été introduite dans [DEM 98] pour répondre à deux motivations : tout d'abord, établir l'équivalence entre l'approximation au sens usuel et l'approximation asymptotique de problèmes radiaux sous le rapport différentiel ; ensuite, on remarque que pour tout problème radial, si la profondeur de l'arbre qui borne la longueur du plus long chemin de  $w_I$  à une solution optimale est d'ordre constant, alors ce problème est polynomial ! Parallèlement à ces travaux, Monnot exploite la radialité dans [MON 98] pour isoler une famille de problèmes  $\Delta$ -simples à diamètre traitable : un problème  $\Pi$  est  $\Delta$ -simple si pour toute constante  $k$ , on sait résoudre en temps polynomial les instances  $I$  de diamètre borné par  $k$  (c'est-à-dire les instances telles que  $|\beta_\Pi(I) - \omega_\Pi(I)| \leq k$ ) ;  $\Pi$  est à *diamètre traitable* si pour toute constante  $k$ , on sait décider en temps polynomial si, oui ou non, on a la relation  $\text{diam}_\Pi(I) \leq k$ . Cela est utile car si un problème est à la fois  $\Delta$ -simple et à diamètre traitable, alors pour toute constante  $k$  et tout algorithme  $\mathcal{A}$  approché pour  $\Pi$ , le rapport de performance pour la mesure différentielle établi par  $\mathcal{A}$  sur  $I_\Pi$  est donné par la performance de  $\mathcal{A}$  sur la famille d'instances  $I^k = \{I \in I_\Pi : \text{diam}_\Pi(I) > k\}$  (notion d'instances critiques définie par [MON 98]). C'est cependant dans un tout autre cadre d'étude que nous souhaitons exploiter la formulation radiale des problèmes, celui de la garantie de performance par les optima locaux.

### 7.2.2. Les problèmes $\tau$ -radiaux

L'idée du problème radial est l'exhibition d'une fonction qui permette à la fois de générer tout l'ensemble  $\text{Sol}_\pi(I)$  à partir de  $w_I$  et d'ordonner ses solutions. Nous avons déjà remarqué que les optima d'une instance d'un problème radial se situaient sur les feuilles de l'arbre  $A_I$ , mais quelles feuilles ? Sur la figure 7.2, les ensembles

stables  $\{1, 3\}$ ,  $\{1, 4, 5\}$ ,  $\{1, 5\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{3\}$ ,  $\{4, 5\}$  et  $\{5\}$  correspondant aux feuilles de l'arbre  $A_I$  sont de statuts bien contrastés : par exemple,  $\{1, 3\}$  est un stable maximal,  $\{1, 4, 5\}$  un stable maximum, tandis que  $\{5\}$  n'est pas même maximal ! Ainsi, la structure d'arbre découlant des fonctions  $\pi_I$  et  $\phi_I$  n'est pas si lisible que l'on pourrait le souhaiter si l'on s'intéresse en réalité à la description non pas d'une façon de générer une solution quelconque à partir de la pire solution  $w_I$ , mais de toutes les façons de le faire. Pour cela, nous allons prendre explicitement en considération la transformation sous-jacente aux fonctions père et fils et considérer pour chaque solution non pas une dégradation possible, mais toutes les dégradations pouvant mener à une pire solution par cette transformation. Dans le graphe  $G$ , le stable  $\{1, 4, 5\}$  est autant la résultante de l'ajout du sommet 1 au stable  $\{4, 5\}$  que la conséquence de l'intégration du sommet 5 au stable  $\{1, 4\}$ . Déclarer la radialité d'un problème, c'est établir la possibilité de déduction de toute solution d'une pire solution par améliorations successives ; une fois cette structure mise à jour commence son exploitation par la représentation exhaustive de la constitution des solutions.

Nous nous concentrons donc sur les propriétés sous-jacentes à la radialité : d'une part, la possibilité de construire en temps polynomial l'unique pire solution de toute instance, d'autre part, la possibilité de déduction de toute solution par un chemin améliorant à partir de cette pire solution.

#### 7.2.2.1. Définition et exemples

Rares sont les problèmes dont le graphe de transition prend naturellement la forme d'un arbre et comme nous l'avons vu pour les quelques exemples proposés, la représentation sous la forme d'arbre force à restreindre arbitrairement la représentation des arcs entre solutions voisines (ce qui revient à faire des coupes dans le voisinage), engendrant éventuellement des feuilles non optimales : c'est ce que nous voulons éviter maintenant. Nous travaillerons donc sur le graphe de transition complet de problèmes radiaux particuliers dits  $\tau$ -radiaux qui nous intéressent plus précisément pour l'approche GLO.

**DÉFINITION 7.5.**— Un problème  $\Pi$  de NPO est dit  $\tau$ -radial s'il existe deux polynômes  $p$  et  $q$  et une famille de fonctions multivoques :

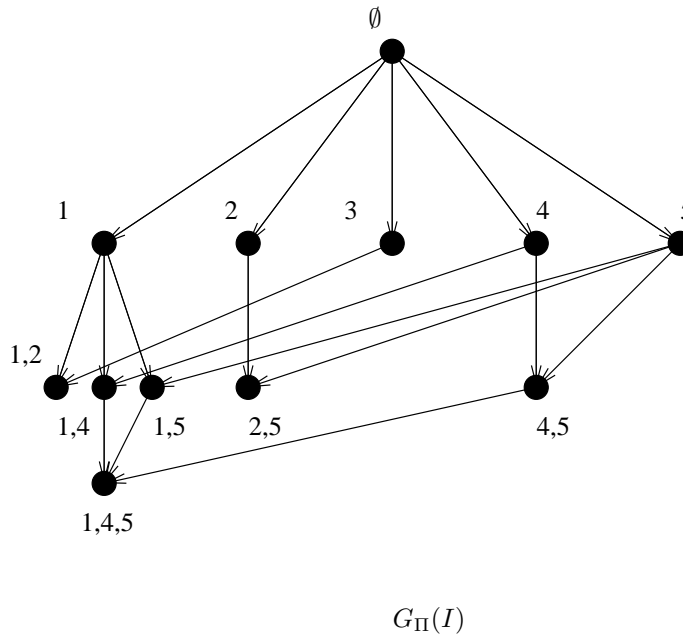
$$(\tau_I : \text{Sol}_\Pi(I) \rightarrow \mathcal{P}(\text{Sol}_\Pi(I)))_{I \in I_\Pi}$$

polynomiales en  $|I|$  tels que  $\Pi$  et  $(\tau_I)_{I \in I_\Pi}$  vérifient pour toute instance  $I$  de  $I_\Pi$  les propriétés :

- 1) la pire solution  $w_I$  est unique et constructible en temps  $p(|I|)$  ;
- 2)  $\forall s \in \text{Sol}_\Pi(I)$ ,
  - a)  $\exists k \leq q(|I|) \in \mathbb{N}$  tel que  $\tau_I^k(s) = \{w_I\}$  ;
  - b)  $\forall k \in \mathbb{N}$ , si  $w_I \in \tau_I^k(s)$ , alors  $\tau_I^k(s) = \{w_I\}$  ;
- 3)  $\forall s \neq w_I \in \text{Sol}_\Pi(I)$ ,  $\forall t \in \tau_I(s)$ ,  $m_\Pi(I, s) \succ m_\Pi(I, t)$  ;

4) la fonction  $\theta_I : s \in \text{Sol}_\Pi(I) \mapsto \theta_I(s) = \{t \in \text{Sol}_\Pi(I) : s \in \tau_I(t)\}$  est polynomiale en  $|I|$ .

Le *graphe de transition* d'un problème  $\tau$ -radial permet de se déplacer facilement de solution en solution voisine à la recherche d'optima locaux : une solution  $s$  a par exemple pour voisins directs (ou 1-locaux vis-à-vis d'une certaine transformation) les ensembles  $\tau_I(s)$  de solutions qui sont toutes strictement pires que  $s$  et  $\theta_I(s)$  de solutions qui lui sont toutes strictement meilleures. Cette fois, *optima locaux* et *sommets absorbants* coïncident.



**Figure 7.3.** Le graphe de transition pour un problème de stable

Le problème de stable, par exemple, est bien  $\tau$ -radial avec pour transformation élémentaire le retrait unitaire de sommet (voir figure 7.3) :  $\forall s \in \{0, 1\}^n, \tau_I(s) = \cup_{i:s_i=1} \{t \in \{0, 1\}^n : (\forall j \neq i, t_j = s_j) \wedge (t_i = 0)\}$ .

A l'évidence, il en est de même du problème de couverture d'ensembles, en considérant naturellement comme transformation élémentaire le retrait unitaire de sous-ensemble.

Nous avons déjà parlé de *hauteur* dans le *graphe de transition*, nous parlerons maintenant de *niveau* : si pour l'estimation de la complexité d'un LSA, on s'intéresse

à la longueur d'un chemin améliorant de toute solution à un *sommet absorbant*, pour l'estimation de la qualité des optima locaux en différentiel, on s'intéresse à la longueur d'un chemin améliorant de la *pire solution* à toute solution, et en particulier à un *sommet absorbant*. La propriété 2b permet, en imposant pour toute solution  $s$  que les chemins de  $w_I$  à  $s$  soient de longueur unique, de définir une telle notion de *niveau*. Effectivement, considérons une solution  $s$  et deux chemins  $C_1$  et  $C_2$  de  $w_I$  à  $s$  de longueur respective  $k_1$  et  $k_2$ ; cela signifie que  $w_I \in \tau_I^{k_1}(s)$  et  $w_I \in \tau_I^{k_2}(s)$ , ce dont on déduit par la propriété 2b,  $\tau_I^{k_1}(s) = \tau_I^{k_2}(s) = \{w_I\}$ . Si jamais  $C_2$  était plus long que  $C_1$ , le  $k_1$ ième sommet rencontré en remontant  $C_2$  à partir de  $s$  serait une solution  $t$  différente de  $w_I$ , contredisant ainsi la propriété 2b. Appelons donc *niveau d'un sommet  $s$*  dans  $TG_\Pi(I)$  et notons  $n(s)$  la longueur d'un chemin de  $w_I$  à  $s$ ; de plus, nous désignerons par  $N_I$  la longueur d'un plus long chemin de la racine à un *sommet absorbant* et par  $L_I$  le plus grand demi-degré extérieur (le demi-degré extérieur d'un sommet  $s$  compte le nombre de sommets  $t$  extrémité terminale d'un arc d'extrémité initiale  $s$ ) :  $\forall s \in \text{Sol}_\Pi(I)$ ,

$$\begin{aligned} n(s) &= \min \{k \in \mathbb{N} : \tau_I^k(s) = \{w_I\}\} \\ N_I &= \max_{s \in \text{Sol}_\Pi(I)} \{n(s)\} \\ L_I &= \max_{s \in \text{Sol}_\Pi(I)} \{|\theta_I(s)|\}. \end{aligned}$$

Notons que, par définition des problèmes  $\tau$ -radiaux, les quantités  $N_I$  (condition 2a de la définition 7.5) et  $L_I$  (condition 4) sont bornées par des polynômes en la taille de l'instance.

#### 7.2.2.2. Problèmes $\tau$ -radiaux et optima locaux

Pour une transformation  $\tau_I$  adéquate (par exemple : ajout/suppression unitaire d'éléments d'une structure considérée), les ensembles de solutions  $\tau_I(s)$  et  $\theta_I(s)$  forment les voisinages 1-bornés qui nous ont permis d'établir l'appartenance des problèmes à la classe GLO[R], et les solutions qui se situent sur les *sommets absorbants* de  $TG_\Pi(I)$  ne sont autres que les optima 1-locaux relativement à ces voisinages. Le nombre de solutions de niveau  $k$  est borné par la quantité  $L_I^k$ ; ainsi, il y a dans  $TG_\Pi(I)$  au pire  $L_I^{N_I}$  *sommets absorbants*, optima 1-locaux relativement à la transformation  $\tau_I$  : si  $s$  est *absorbant*, c'est qu'il n'est pas de solution  $t$  meilleure que  $s$  telle que  $s = \tau_I(t)$ ; parmi ces solutions se trouvent des optima globaux. Combien de temps faut-il, partant de  $w_I$ , pour atteindre un *sommet absorbant*? Au plus  $C(\theta_I) \times N_I$  si  $C(\theta_I)$  désigne la complexité de  $\theta_I$ , soit une quantité bornée par un polynôme en la taille de l'instance,  $C(\theta_I)$  étant supposée polynomiale,  $N_I$  étant bornée par  $q(|I|)$  (condition 2a de la définition 7.5). La pire solution  $w_I$  étant elle-même constructible en temps polynomial, elle permet de garantir l'obtention d'une solution  $\tau$ -maximale

ou  $\tau$ -minimale, selon qu'il s'agisse d'un problème de maximisation ou de minimisation, en temps polynomial.

**PROPRIÉTÉ 7.1.**— Si un problème  $\Pi$  de NPO est  $\tau$ -radial, alors on sait déterminer des solutions  $\tau$ -maximales si  $\Pi$  problème de maximisation,  $\tau$ -minimales si  $\Pi$  problème de minimisation en temps polynomial.

Au-delà des solutions maximales et minimales, saurait-t-on déterminer des optima locaux  $h$ -bornés sur le graphe  $TG_{\Pi}(I)$  ? On définit comme voisins  $h$ -distants d'une solution  $s$  l'ensemble des solutions que l'on peut atteindre à partir de  $s$  en appliquant au plus  $h$  fois alternativement les fonctions  $\tau_I$  et  $\theta_I$ , désignant ainsi pour tout entier naturel  $h$  le voisinage  $h$ -borné  $\mathcal{V}^h$  suivant :  $\forall h \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} \mathcal{V}^0(I, s) = \{s\} & h = 0 \\ \mathcal{V}^h(I, s) = \mathcal{V}^{h-1}(I, s) \cup \tau(\mathcal{V}^{h-1}(I, s)) \cup \theta(\mathcal{V}^{h-1}(I, s)) & \forall h \geq 1. \end{cases}$$

La détermination d'un optimum local relativement au voisinage  $\mathcal{V}^h$  n'est pas polynomiale dans le cas général pour  $h \geq 2$  : les retours en arrière (dégradation de la solution) étant autorisés par l'utilisation de la transformation  $\tau_I$ , il est possible que la recherche d'un optimum local mène au parcours « *en largeur* » du graphe  $TG_{\Pi}(I)$  ; or, le déroulement d'un tel parcours n'a aucune raison d'être polynomial puisque l'exploration de toutes les solutions de niveau  $k$  pourrait revenir à considérer de l'ordre de  $L_I^k$  solutions,  $k$  pouvant être une puissance de  $n$ . Par la suite, nous nous restreindrons à une famille de problèmes au support polynomialement borné, ce qui, nous l'avons vu au paragraphe 3.1.1.3, assure le déroulement polynomial des algorithmes de recherche locale : il s'agit des problèmes  $\tau$ -radiaux dont la transformation  $\tau_I$  engendre entre une solution et l'une de ses images un saut constant de la fonction objectif. Cette classe renferme les familles remarquables des problèmes héréditaires (resp., anti-héréditaires) tels MaxIS (resp., MinSC) et des problèmes de partitionnement héréditaires tels MinC et MinBP.

### 7.2.3. Une sous-famille remarquable

#### 7.2.3.1. Les problèmes réguliers

Les auteurs de [AUS 80] qualifient de *convexe* tout problème pour lequel, entre les performances  $\omega_{\Pi}(I)$  et  $\beta_{\Pi}(I)$  d'une pire et d'une meilleure solutions, toutes les valeurs sont atteintes par des solutions réalisables de l'instance considérée :

$$\forall I \in I_{\Pi} \{m_{\Pi}(I, s) : s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)\} = [\beta_{\Pi}(I), \omega_{\Pi}(I)] \cap \mathbb{N}.$$

Cette notion a été élargie dans [DEM 98] au cas d'un saut constant (mais non plus nécessairement unitaire) entre deux valeurs consécutives :  $\forall I \in I_\Pi, \exists K_I \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\forall s \in \text{Sol}_\Pi(I)$  :

$$\begin{cases} m_\Pi(I, s) & \equiv 0 \pmod{K_I} \\ \{m_\Pi(I, s) : s \in \text{Sol}_\Pi(I)\} & = \left[ \frac{\beta_\Pi(I)}{K_I}, \frac{\omega_\Pi(I)}{K_I} \right] \cap \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans le cadre de la radialité, de tels problèmes seront qualifiés de réguliers.

**DÉFINITION 7.6.**— *Un problème  $\Pi$   $\tau$ -radial de NPO est dit régulier s'il vérifie pour toute instance  $I$  :  $\exists K_I$  tel que  $\forall s \neq w_I \in \text{Sol}_\Pi(I)$  et  $\forall t \in \tau_I(s)$ ,  $|m_\Pi(I, s) - m_\Pi(I, t)| = K_I$ .*

Si un problème  $\Pi$  est régulier, alors la valeur de ses solutions se lit aisément dans le graphe  $TG_\Pi(I)$ , chaque arc faisant évoluer de son extrémité initiale à son extrémité finale la fonction objectif d'exactly  $K_I$  unités ; ainsi, la valeur de toute solution  $s$  sera donnée par :

$$\begin{cases} \text{opt}_\Pi(I) = \max & \Rightarrow m_\Pi(I, s) = \omega_\Pi(I) + (K_I \times n(s)) \\ \text{opt}_\Pi(I) = \min & \Rightarrow m_\Pi(I, s) = \omega_\Pi(I) - (K_I \times n(s)). \end{cases}$$

En particulier, on a :

$$\begin{cases} \text{opt}_\Pi(I) = \max & \Rightarrow \beta_\Pi(I) = \omega_\Pi(I) + (K_I \times N_I) \\ \text{opt}_\Pi(I) = \min & \Rightarrow \beta_\Pi(I) = \omega_\Pi(I) - (K_I \times N_I). \end{cases}$$

On en déduit le rapport différentiel de performance donné par toute solution  $s$  par le rapport des niveaux :  $\delta_\Pi(I, s) = n(s)/N_I$ .

Pour le théorème qui suit,  $h_I$  désigne la hauteur de  $w_I$  (longueur d'un plus court chemin de  $w_I$  à un *sommet absorbant*) dans le graphe  $TG_\Pi(I)$ .

**THÉORÈME 7.1.**— *Si  $\Pi \in \text{NPO}$  est  $\tau$ -radial et régulier, alors :  $h_I/N_I \geq r \Rightarrow \Pi \in \text{GLO}[\delta]$ .*

*Preuve.* Pour toute instance  $I$ , les optima 1-locaux sont les solutions  $s$  associées aux *sommet absorbants* de  $TG_\Pi(I)$ , dont la valeur réalise le rapport  $n(s)/N_I \geq h_I/N_I$ . ■

Plus précisément, quand un problème  $\Pi$  est  $\tau$ -radial régulier, on a même l'équivalence  $\Pi \in \text{GLO}[\delta](1)$  si et seulement si  $\exists r$  tel que  $\forall I \in I_\Pi, h_I/N_I \geq r$ .

### 7.2.3.2. Les problèmes héréditaires et anti-héréditaires

Il est aisé de voir que, par exemple, MaxIS et MinSC sont réguliers avec  $K_I = 1$  pour toute instance  $I$ , mais c'est en réalité le fait de la famille plus large formée des problèmes héréditaires et anti-héréditaires. Une propriété  $\pi$  sur un ensemble  $X$  est *héréditaire* si, dès lors qu'elle est vraie pour un ensemble  $Y \subseteq X$ , alors elle l'est sur tout sous-ensemble  $Z$  de  $Y$  ; de façon symétrique, on dira d'une propriété qu'elle est *anti-héréditaire* si, étant vérifiée pour un ensemble  $Y \subseteq X$ , elle le sera également pour tout ensemble  $Z$  vérifiant  $Y \subseteq Z \subseteq X$ . Remarquons qu'une propriété  $\pi$  héréditaire (resp., anti-héréditaire), pour être définie sur un ensemble  $X$ , devra nécessairement vérifier  $\pi(\emptyset)$  (resp.,  $\pi(X)$ ) (sinon  $\pi$  ne sera vraie sur aucun sous-ensemble de  $X$ ). Par exemple, la stabilité comme la clique sur l'ensemble  $V$  des sommets d'un graphe est une propriété héréditaire, tandis que la couverture de sommets comme la dominance, toujours sur l'ensemble  $V$  des sommets d'un graphe, sont des propriétés anti-héréditaires. De ces propriétés découlent des problèmes naturels d'optimisation : on appelle *problème héréditaire* tout problème  $\Pi$  qui cherche à maximiser sur un ensemble  $X$  la taille d'un ensemble vérifiant une certaine propriété héréditaire  $\pi$  (MaxIS, MaxCI) ; un problème  $\Pi$  sera qualifié de *problème anti-héréditaire* dès lors qu'il faudra pour le résoudre minimiser la taille d'un ensemble qui avère une propriété anti-héréditaire  $\pi$  sur un ensemble  $X$  (les problèmes de couverture MinVC sur un ensemble d'arêtes, MinSC sur un ensemble, MinFNS et MinFES sur les cycles d'un graphe). Bien entendu, le critère d'optimisation peut être étendu, dans le cas d'instances pondérées, à la somme des poids des éléments du sous-ensemble solution considéré (MinWVC, MaxKS), au poids de l'élément le plus lourd ou au poids moyen pour des propriétés anti-héréditaires, etc. Dans ce cadre, on retrouve notamment la classe des problèmes de sac-à-dos *Maximum Knapsack* qui est dans FPTAS et dont on connaît, pour de nombreuses variantes, des conditions nécessaires et suffisantes d'admission de schémas standard et complets [GEN 79].

**DÉFINITION 7.7.**— Soit  $\Pi$  un problème de NPO ;  $\Pi$  est un problème héréditaire (resp., anti-héréditaire) s'il existe une propriété héréditaire (resp., anti-héréditaire)  $\pi$  telle que toute instance  $I$  de  $\Pi$  revient à résoudre un problème du type :

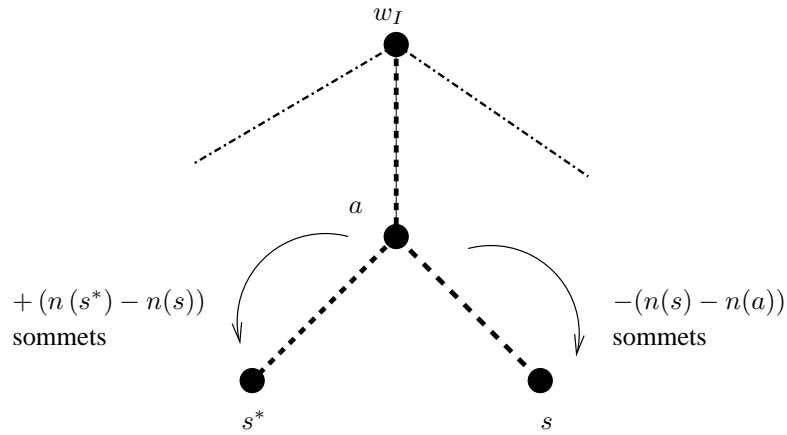
$$\begin{cases} \beta_{\Pi}(I) = \max\{\alpha(Y) : Y \subseteq X, \pi(Y)\} & \text{si } \pi \text{ héréditaire} \\ \beta_{\Pi}(I) = \min\{\alpha(Y) : Y \subseteq X, \pi(Y)\} & \text{si } \pi \text{ anti-héréditaire.} \end{cases}$$

où  $\alpha$  est une fonction d'évaluation des ensembles de type cardinalité, somme des poids, poids maximum, poids moyen, etc.

Quels sont les problèmes  $\tau$ -radiaux à rapport de niveaux constant ? MaxIS- $B$  est de ceux-là, à l'instar du problème général MaxIS, garantissant ainsi la qualité de ses optima locaux. Nous démontrons de nouveau l'appartenance du problème MaxIS- $B$  à la classe GLO $[\delta]$  par l'exploitation du graphe  $TG_{\Pi}(I)$  ; ce résultat, déjà établi, n'a d'intérêt que dans l'aisance et le caractère constructif de sa démonstration : en se



promenant dans le *graphe de transition*, pour évaluer le rapport des hauteurs d'un optimum local et d'optimum global, on explicite la façon dont se construit la solution optimale à partir de la solution optimum locale. Cela encourage à regarder, quand cela est possible, les problèmes de NPO au travers des *graphes de transition* quand ceux-là ont de bonnes propriétés.



**Figure 7.4.** Les hauteurs de MaxIS-B

Soit  $I = G(V, E)$  un graphe à  $n$  sommets, situons-nous sur un *sommet absorbant*  $s$  du graphe  $TG_{\Pi}(I)$  et soit  $s^*$  une solution optimale ; on appelle  $a$  le vecteur correspondant à l'intersection de  $s$  et  $s^*$ , solution de plus grand niveau se trouvant à l'intersection d'un chemin de  $w_I$  à  $s$  et de  $w_I$  à  $s^*$  (voir figure 7.4). La solution  $s$  est optimum local si l'on ne peut lui incorporer de sommet sans violer sa stabilité : les  $n - n(s)$  sommets restants sont donc interdits. Pour construire  $s^*$  à partir de  $s$ , il aura fallu enlever  $n(s) - n(a)$  sommets à  $s$  puis en ajouter  $n(s^*) - n(a)$ . Si  $\Delta$  est le degré maximum d'un sommet de  $G$ , alors en enlevant  $n(s) - n(a)$  sommets à  $s$ , on a pu lever jusqu'en la solution  $a$  l'interdiction d'incorporation d'au plus  $\Delta \times (n(s) - n(a))$  sommets ; on en déduit  $n(s^*) - n(a) \leq \Delta \times (n(s) - n(a))$  et ainsi :

$$\begin{aligned} n(s^*) \leq n(a) + \Delta \times (n(s) - n(a)) &\Leftrightarrow \Delta n(s) \geq n(s^*) + (\Delta - 1)n(a) \\ &\Rightarrow \frac{n(s)}{n(s^*)} \geq \frac{1}{\Delta}. \end{aligned}$$

Si  $\Delta$  est borné par une constante  $B$ , on retrouve le résultat annoncé par le théorème 3.1.

### 7.2.3.3. Les problèmes de partitionnement héréditaire

Etant donné un ensemble  $X$  et une propriété  $\pi$ , les problèmes de partitionnement héréditaire consistent à partager  $X$  en un minimum de sous-ensembles vérifiant la propriété  $\pi$  (voir section 4.1). Soit donc  $\Pi$  un tel problème et  $I$  une instance de  $\Pi$ ; la pire solution  $w_I$  consiste à isoler les éléments de  $X$  en  $n = |X|$  sous-ensembles. Notant  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$  les partitions de  $X$ , on définit la transformation  $\tau_I$  qui consiste, d'une partition  $\mathcal{S}$ , à considérer toute partition obtenue à partir de  $\mathcal{S}$  en isolant un sommet de l'un de ses sous-ensembles, en d'autres termes, pour toute instance  $I$  et toute partition  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$  sur  $I$  :

$$\tau_I(\mathcal{S}) = \bigcup_{i \in \{1, \dots, q\}} \bigcup_{x \in V_i} \{\mathcal{S}' = \mathcal{S} \setminus \{V_i\} \cup \{\{x\}, V_i \setminus \{x\}\}\}.$$

La transformation  $\tau_I$  désigne en réalité les mêmes optima 1-locaux que ceux qui ont permis au paragraphe 4.1 d'établir l'appartenance des problèmes de partitionnement héréditaire à  $\text{GLO}[\delta]$ .

## 7.3. Conclusion

Les optima locaux, leur recherche comme leur degré de performance, sont un vaste sujet d'étude dont nous avons présenté seulement quelques aspects, peu approfondis mais éloquentes ; l'idée, le principe est si naïf, et pourtant déterminer un optimum local en temps raisonnable peut se révéler très ambitieux, et pourtant ils suffisent à assurer un bon rapport d'approximation. Ce chapitre n'a pas proposé de résultat, seulement une ouverture sur une voie déjà empruntée et combien exploitée par d'autres, celle qui plonge à l'intérieur de la structure même du problème, l'organisation de son ensemble de solutions. Cela va dans le sens de l'ambition, toujours présente, d'une structuration de l'éclectique classe NPO et de la mise en regard de la *définissabilité* des problèmes et de leur *approximabilité*.

## Annexe A

### Guide des problèmes rencontrés

Nous présentons ici les différents problèmes évoqués au cours de ce travail par le biais d'une définition accompagnée de certains résultats d'approximation, en se limitant toutefois à l'approximation à rapport constant. Aussi invitons-nous fortement le lecteur à consulter le très complet et toujours à jour compendium de Crescenzi et Kann à l'adresse <http://www.nada.kth.se/~viggo/problemlist> pour plus de précisions concernant ces problèmes et les références des différents résultats qui s'y rapportent. Tous les résultats négatifs énoncés sont conditionnés par une hypothèse forte de complexité de type  $P \neq NP$ . Attention, les résultats donnés pour les rapports classique et différentiel, pour les problèmes de maximisation comme de minimisation, considèrent les rapports  $\rho'$  et  $\delta'$  inverses des rapports  $\rho$  et  $\delta$  pris comme référence dans ce document, et ceci dans un but de cohésion avec le compendium :

$$\begin{aligned}\rho'_{\Pi}(I, \lambda_{\mathcal{A}}(I)) &= \begin{cases} \frac{\beta_{\Pi}(I)}{\lambda_{\mathcal{A}}(I)} & \text{opt}_{\Pi} = \min \\ \frac{\lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\beta_{\Pi}(I)} & \text{opt}_{\Pi} = \max \end{cases} \\ \delta'_{\Pi}(I, \lambda_{\mathcal{A}}(I)) &= \frac{|\omega_{\Pi}(I) - \beta_{\Pi}(I)|}{|\omega_{\Pi}(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)|}.\end{aligned}$$

S'agissant de la mesure classique, on dira qu'un problème  $\Pi$  est  $\rho$ -approximable à rapport  $r$  et s'agissant du rapport différentiel, que  $\Pi$  est  $\delta$ -approximable à rapport  $r$ . On parlera, pour le rapport  $R$  classique ou différentiel, de  $\text{NPO}[R]$  (resp., d' $\text{APX}[R]$ )-complétude ou difficulté vis-à-vis d'une réduction préservant les schémas d'approximation (resp., l'approximation à rapport constant). Pour exprimer la non-approximabilité à rapport constant au sens de la mesure  $R$ , on notera  $\neg\text{APX}[R] = \text{NPO} \setminus \text{APX}[R]$  ; l'hypothèse de complexité (généralement  $P \neq NP$ ) conditionnant cette assertion sera toujours omise.

Nous séparons les problèmes en trois catégories, *problèmes dans les graphes*, *problèmes de programmation linéaire* et *problèmes de logique*, selon la façon dont il est le plus naturel ou le plus courant de les représenter (*chaque problème ayant plusieurs représentations pertinentes envisageables et envisagées pour leur résolution*).

### A.1. Problèmes dans les graphes

**MinDS, Minimum Dominating Set, ensemble dominant,  $\neg APX$ ,  $APX[\delta]$**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  vérifiant pour tout sommet  $v$  de  $V$  :  $v \in U$  ou  $\langle \{v\}, U \rangle \neq \emptyset^1$

*Solution optimale* : ensemble dominant  $U$  de taille minimum

*Déclinaison*

MinDS- $B$  : degrés bornés par  $B$ ,  $\delta$ -approximable à  $B$  par LSA

*A noter*

$\delta$ -approximable à  $1/2$  par LSA (optima miroirs 1-locaux, chapitre 3)<sup>2</sup>

**MinVC, Minimum Vertex Cover, couverture de sommets,  $APX$ -complet,  $\neg APX[\delta]$**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  tel que  $E = \langle U, V \rangle$

*Solution optimale* : couverture de taille minimum

*Déclinaison*

MinVC- $B$  : degrés bornés par  $B$ ,  $\rho$ - et  $\delta$ -approximable à  $B$  par LSA (optima 1-locaux, [AUS 95b], chapitre 3),  $APX$ -complet pour  $B \geq 3$  [PAP 91]

**MaxIS, Maximum Independent Set, stable maximum,  $\neg APX$ ,  $\neg APX[\delta]$**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  tel que  $\langle U, U \rangle = \emptyset$

*Solution optimale* : ensemble stable de taille maximum

*Déclinaison*

1. On rappelle la notation pour deux sous-ensembles de sommets  $X$  et  $Y$ ,  $\langle X, Y \rangle = \{xy \in E / x \in X \text{ et } y \in Y\}$ .

2. Un LSA (*Local Search Algorithm*) est un algorithme de recherche local (voir paragraphe 3.1.1).

MaxIS- $B$  : degrés bornés par  $B$ ,  $\rho$ - et  $\delta$ -approximable à  $1/(B+1)$  par LSA (optima 1-locaux, [AUS 95b]), atteint à  $1/B$  chapitre 3 tandis que les optima 3-locaux sont  $\delta$ -approximable à  $2/(B+1)$ , APX-complet pour  $B \geq 3$  [PAP 91]

MaxRIS : *Max Regular-degree IS*, problème de stable dans un graphe régulier (graphe dont les sommets sont tous de même degré  $\Delta$ )

MaxWIS : *Max Weighted IS*, sommets pondérés, il faut maximiser la somme des poids des sommets d'un stable dans  $G$

### **MaxCl, Maximum Clique, clique maximum**

#### *Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  tel que  $\langle U, U \rangle = U \times U$

*Solution optimale* : clique de taille maximum

*A noter*

approximation identique à celle de MaxIS sous tout rapport

### **MaxSP, Maximum Set Packing, ensembles disjoints dans un hypergraphe**

#### *Description*

*Instance* : une famille  $C = \{c_1, \dots, c_i, \dots, c_n\}$  d'ensembles finis

*Solution réalisable* : sous-ensemble  $D \subseteq C$  d'ensembles  $c_i$  deux à deux disjoints

*Solution optimale* : sous-ensemble d'ensembles disjoints de taille maximum

*A noter*

approximation identique à celle de MaxIS sous tout rapport

### **MaxPSG $H_0$ -Free, Max Partial Subgraph $H_0$ -Free, sous-graphe partiel $H_0$ -libre, ou sous-graphe partiel libre de $H_0$ , $\neg$ APX [YAN 78], $\neg$ APX $[\delta]$**

#### *Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  ne contenant pas de sous-graphe partiel isomorphe à  $H_0$

*Solution optimale* : sous-ensemble de sommets de taille maximum ne contenant pas de sous-graphe partiel isomorphe à  $H_0$

*Déclinaison*

MaxPSG  $H_0$ -Free- $B$  : degrés bornés par  $B$ ,  $\rho$ - et  $\delta$ -approximable à  $\delta_{\min}/(B+1)$  ou  $\delta_{\min} = \min_{v \in H_0} \{d_{H_0}(v)\}$  par LSA (optima 1-locaux, chapitre 3)

**MinIDS, Minimum Independent Dominating Set, ensemble dominant stable minimum, NPO-complet [HAL 93] et [KAN 94],  $\neg$  APX $[\delta]$**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets à la fois stable et dominant

*Solution optimale* : solution réalisable de taille minimum

*Déclinaison*

MaxWIDS : *Min Weighted IDS*, sommets pondérés, il faut minimiser la somme des poids des sommets d'un ensemble dominant stable dans  $G$

*A noter*

également appelé MinMaxIS *Minimum Maximal Independent Set*, stable maximal minimum (tout stable maximal étant dominant); non  $\delta$ -approximable à mieux que 0 [BAZ b]

**MaxCB, Maximum Complete Bipartite-graph, sous-graphe biparti complet**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : deux sous-ensembles disjoints  $U_1$  et  $U_2$  de  $V$  qui forment un graphe biparti complet (soit tels que  $\langle U_1, U_2 \rangle = U_1 \times U_2$  et  $\langle U_1, U_1 \rangle = \langle U_2, U_2 \rangle = \emptyset$ )

*Solution optimale* : sous-graphe biparti complet sur  $U_1$  et  $U_2$  qui maximise  $|U_1| + |U_2|$

**MaxCut, Maximum Cut, coupe maximum, APX-complet [PAP 91], APX $[\delta]$**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$

*Solution optimale* : ensemble  $U$  de sommets qui maximise  $|\langle U, V \setminus U \rangle|$

*A noter*

$\rho$ - et  $\delta$ -approximable à 1/2 par LSA (optima 1-locaux, [AUS 95b], chapitre 3)

**MinFES $[r]$ , Minimum Feedback Edge Set, ensemble minimum d'arêtes retour, APX $[\delta]$**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble d'arêtes  $F \subseteq E$  tel que tout cycle de  $G$  de taille au plus  $r$  emprunte au moins une arête de  $F$

*Solution optimale* : ensemble d'arêtes retour  $F$  de taille minimum

### Déclinaison

MinDFES[ $r$ ] (*Min Directed FES*) : graphe orienté, APX-hard [KAN 92] pour tout  $r \geq 2$

*A noter*

MinFES[ $r$ ] est NP-difficile pour tout  $r \geq 3$  constant et polynomial lorsque  $r = |V|$ .  
 $\delta$ -approximable à  $1/2$  par LSA pour tout  $r \geq 3$  (optima 1-locaux, chapitre 4).

**MinFNS, Minimum Feedback Node Set, ensemble minimum de sommets retour, APX-complet [BAF 99]**

### Description

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : sous-ensemble de sommets  $U \subseteq V$  tel que tout cycle de  $G$  emprunte au moins un sommet de  $U$

*Solution optimale* : ensemble de sommets retour  $F$  de taille minimum

### Déclinaison

MinFNS- $B$  : sommets de degré borné par  $B$ ,  $\delta$ -approximable à  $2/(B+2)$  par LSA (optima 1-locaux, chapitre 4)

MinDFNS (*Min Directed FNS*) : graphe orienté, APX-hard [KAN 92]

*A noter*

n'est pas ni dans GLO, ni dans GLO[ $\delta$ ] (chapitre 4)

**MinSC, Minimum Set Cover, couverture d'ensembles,  $\neg$  APX,  $\neg$  APX[ $\delta$ ]**

### Description

*Instance* : une famille  $S = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$  de sous-ensembles d'un ensemble fini  $C$

*Solution réalisable* : une couverture de l'ensemble  $C$  (i.e., un sous-ensemble  $S' \subseteq S$  de sous-ensembles d'union  $C$ )

*Solution optimale* : une couverture de taille minimum

### Déclinaison

MinSC- $B$  : sous-ensembles  $s_j$  de taille au plus  $B$ ,  $\delta$ -approximable à  $1/(B+1)$  par LSA (optima 1-locaux, chapitre 4)

MinSC- $\Delta$  : les éléments  $c_i$  apparaissent dans au plus  $\Delta$  sous-ensembles

MinRSSC : les sous-ensembles  $s_j$  sont tous de même taille

MinWSC : les sous-ensembles  $s_j$  sont pondérés par des entiers  $p_1, \dots, p_n$ , il s'agit de déterminer une couverture  $S'$  qui minimise la somme des poids des sous-ensemble dont elle est constituée

**MinHS, Minimum Hitting Set, ensemble transversal**

*Description*

*Instance* : une famille  $C = \{c_1, \dots, c_i, \dots, c_n\}$  de sous-ensembles d'un ensemble fini  $S$

*Solution réalisable* : un ensemble transversal (c'est-à-dire un sous-ensemble  $T \subseteq S$  qui contient un élément au moins de chaque sous-ensemble  $c_i$ )

*Solution optimale* : un transversal de taille minimum

*A noter*

approximation identique à celle de MinSC sous tout rapport

**MinC, Coloration Minimum,  $\neg APX$ ,  $APX[\delta] \setminus PTAS[\delta]$  [DUH 97, HAL 95]**

*Description*

*Instance* : un graphe simple  $G(V, E)$

*Solution réalisable* : une partition  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$  de l'ensemble  $V$  des sommets en sous-ensembles stables

*Solution optimale* : partition de taille minimum

*A noter*

$\delta$ -approximable par LSA à 1/2 comme problème de partitionnement héréditaire (optima 1-locaux, chapitre 4)

**MinTSP, Minimum Traveling Salesman Problem, voyageur de commerce, NPO-complet [ORP 87],  $APX[\delta]$  [MON 02]**

*Description*

*Instance* :  $(G(V, E), d)$  graphe simple complet arêtes-valué

*Solution réalisable* :  $T \subseteq E$  tel que  $T$  forme un tour sur  $V$ , de valeur la somme des distances des arêtes qui le constituent

*Solution optimale* : tour de coût minimum

*Déclinaison*

Min $\Delta$ TSP : les distances vérifient l'inégalité triangulaire, approximable à rapport 2/3 [CHR 76], APX-complet [PAP 93]

MinTSP $ab$  : distances à valeur dans  $\{a, b\}$  pour deux réels  $a < b$ , approximable à 6/7 pour  $a = 1$  et  $b = 2$ ,  $\delta$ -approximable à 3/4 [MON 01d]

*A noter*

$\delta$ -approximable à 1/2 par LSA (voisinage 2-opt, chapitre 4 et  $\delta$ -approximable à 2/3 [MON 02])

**MaxTSP, Version maximisation du problème précédent, APX,  $APX[\delta]$**

**Approximation**

Approximable à rapport 3/4 pour le cas non orienté, 38/63 pour le cas orienté, à 7/8



pour le cas particulier bivalué  $\text{MaxTSP}_{ab}$  [MON 01d];  $\rho$ - et  $\delta$ -approximable à  $1/2$  par LSA (voisinage 2-opt, chapitre 4); résultats différentiels identiques à ceux donnés pour la version minimisation

**MinHPP, Minimum Hamiltonian Path Problem, chaîne hamiltonienne, NPO-complet** [ORP 87],  $\text{APX}[\delta]$  [MON 01a]

*Description*

*Instance* :  $(G(V, E), d)$  graphe simple complet arêtes-valué

*Solution réalisable* :  $T \subseteq E$  tel que  $T$  forme une chaîne élémentaire couvrant  $V$ , de valeur la somme des distances des arêtes qui la constituent

*Solution optimale* : chaîne élémentaire couvrant  $V$  de coût minimum

*Déclinaison*

$\text{MinHPP}_s$  : une extrémité de la chaîne est le sommet  $s$ ,  $2/3$ -approximable en différentiel [MON 01a]

$\text{MinHPP}_{s,t}$  : les extrémités de la chaîne sont les sommets  $s$  et  $t$ ,  $1/2$ -approximable en différentiel [MON 01a]

**MaxDSTP-B, Maximum Depth bounded by B Spanning Tree Problem, arbre recouvrant de profondeur au plus B**,  $\text{APX}[\delta]$  [MON 01c]

*Description*

*Instance* :  $(G(V, E), d)$  graphe simple complet arêtes-valué

*Solution réalisable* :  $T \subseteq E$  tel que  $T$  forme un arbre couvrant  $V$  de profondeur au plus  $B$ , de valeur la somme des distances des arêtes qui le constituent

*Solution optimale* : arbre couvrant  $V$  de profondeur au plus  $B$  de coût maximum

**Approximation**

$\rho$ - et  $\delta$ -approximable à  $(B - 1)/B$  [MON 01c]

## A.2. Problèmes de programmation linéaire

**MinPL $\{0, 1\}$ , Programmation Linéaire en  $\{0, 1\}$  où en binaire, NPO-complet** [ORP 87],  $\neg \text{APX}[\delta]$

*Description*

*Instance* : une matrice  $A$   $m \times n$  à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , un vecteur  $b$  de  $\mathbb{N}^m$ , un vecteur  $c$  de  $\mathbb{N}^n$

*Solution réalisable* : un vecteur  $x$  de  $\{0, 1\}^n$  qui vérifie  $Ax \geq b$

*Solution optimale* : une solution  $x$  qui minimise  $c \cdot x$

*Version maximisation MinPL $\{0, 1\}$*  : il faut maximiser  $c \cdot x$  sous contrainte  $Ax \leq b$ ; NPO-complet [BER 92]; équivalent à MinPL $\{0, 1\}$  en différentiel

*A noter*

non  $\delta$ -approximable à mieux que 0 (chapitre 5)

**MaxKS, Maximum Knapsack, version maximisation du problème de sac-à-dos, FPTAS [IBA 75], FPTAS[ $\delta$ ]**

*Description*

*Instance* : un ensemble  $X$  d'objets à valeur dans  $\mathbb{N}^{|X|}$ , pour chaque objet  $x$  un volume unitaire  $a_x \in \mathbb{N}$ , une utilité unitaire  $c_x \in \mathbb{N}$  et éventuellement une borne  $b_x \in \mathbb{N}$ ; une capacité  $b \in \mathbb{N}$  (capacité du sac)

*Solution réalisable* : une affectation entière des variables  $x$  telle que  $\sum_{x \in X} a_x \leq b$

*Solution optimale* : une affectation réalisable qui maximise l'utilité  $\sum_{x \in X} c_x$

*Déclinaison*

MaxKS( $k$ ) : poids et utilités bornées par  $|X|^k$  pour  $k$  constante universelle

MaxKS $\{0, 1\}$  : les variables sont à valeur dans  $\{0, 1\}$

Version *minimisation* MinKS : il faut minimiser  $c \cdot x$  sous contrainte  $a \cdot x \geq b$ ; équivalent à MaxKS en différentiel.

**MaxSubsetSum, Maximum Subset Sum, problème de plus grand minorant, FPTAS, FPTAS[ $\delta$ ] (comme cas particulier du problème de sac-à-dos)**

*Description*

*Instance* : une collection de  $n$  entiers  $a_1, \dots, a_n$ , un entier  $b$

*Solution réalisable* : une sélection  $x \in \{0, 1\}^n$  des entiers  $a_1, \dots, a_n$  dont la valeur totale  $\sum_{i=1}^n a_i \times x_i$  n'excède pas  $b$

*Solution optimale* : une sélection réalisable qui se rapproche le plus de  $b$

Version *minimisation* MinSubsetSum, problème du plus petit majorant : il faut minimiser  $a \cdot x$  sous contrainte  $a \cdot x \geq b$ ; admet également un schéma complet d'approximation en classique [GEN 79], est  $\rho$ -approximable par LSA à  $1/2$ ; équivalent à MaxSubsetSum en différentiel.

### A.3. Problèmes de logique

**MaxSat, Maximum Satisfiability, problème de satisfaisabilité maximum, APX-complet [PAP 91]**

*Description*

*Instance* : un ensemble  $X$  de variables bivalentes, une famille  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  de clauses disjonctives sur l'ensemble des littéraux  $\{x_1, \dots, x_n\} \cup \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$

*Solution réalisable* : une affectation des valeurs de vérité

*Solution optimale* : une affectation qui rende vraies un nombre maximum de clauses

*A noter*

$\rho$ -approximable à  $1/2$  par LSA (optima 1-locaux [AUS 95b], chapitre 5)

*Déclinaison*

Max $k$ -Sat : chaque clause contient au plus  $k$  littéraux; APX-complet [PAP 91], admet

un schéma d'approximation polynomial pour ses instances denses [ARO 95] ;

MaxEk-Sat : chaque clause contient *exactement*  $k$  littéraux, APX-complet (par réduction à partir de Maxk-Sat),  $\rho$ -approximable à  $1/(1 - 2^{-k})$  [JOH 74], et ce ratio n'est améliorable par aucune constante  $\varepsilon > 0$  [HÅS 97]

Maxk<sup>+</sup>-Sat : chaque clause contient *au moins*  $k$  littéraux ; approximable par LSA à  $2k/(2k + 1)$  (optima 1-locaux altérés, selon le critère MaxNAESat, chapitre 5) pour  $k \geq 3$ , par LSA à  $3/4$  pour  $k = 2$  (optima miroirs 1-locaux chapitre 5, optima 1-locaux altérés [KHA 98])

MaxWSat : les clauses sont pondérées par des entiers  $p_1, \dots, p_m$  et il s'agit de trouver une affectation  $T$  des valeurs de vérité qui maximise la somme des poids des clauses vérifiées par  $T$

MaxWSat : les variables sont pondérées par des entiers  $p_1, \dots, p_n$  dont la somme est comprise dans un intervalle  $[B, 2B]$  ( $B$  dépendant éventuellement de  $n$ ) et il s'agit de trouver une affectation  $T$  des valeurs de vérité qui maximise la somme des poids des variables mises à 1 par  $T$  si  $T$  satisfait la formule,  $B$  sinon ; APX-complet [CRE 91] ; non  $\delta$ -approximable à mieux que 0, indépendamment de l'ordre de grandeur des poids, et même pour des ensembles de clauses de taille  $k$  pour  $k \geq 4$  (paragraphe 4.4.1)

MinSat (il faut vérifier un nombre minimum de clauses) : approximable à  $1/2$  en classique [BER 96], non  $\delta$ -approximable à mieux que  $n^{\epsilon-1}$ ,  $\forall \epsilon > 0$  (chapitre 5)

Mink-Sat (vérifier un nombre minimum de  $k$ -clauses) : APX-complet [KOH 94] et  $\rho$ -approximable à  $1/(2(1 - 1/2^k))$  [BER 96] pour  $k \geq 2$  ; admet un schéma d'approximation polynomial pour ses instances denses pour  $k = 2$  [BAZ 99]

**MaxNAEk-Sat, Maximum Not-All-Equal  $k$ -Satisfiability, APX-complet si  $k = 3$  [PAP 91]**

*Description*

*Instance* : un ensemble  $X$  de variables bivalentes, une famille  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  de clauses disjonctives de taille  $k$  sur l'ensemble des littéraux  $\{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$

*Solution réalisable* : une affectation des valeurs de vérité

*Solution optimale* : une affectation qui place au moins un littéral vrai et un littéral faux dans un nombre maximum de clauses

*Déclinaison*

MaxPosNAEk-Sat : seuls les littéraux positifs  $x_1, \dots, x_n$  interviennent, équivalent à MaxCut sous tout rapport

**Maxk-CCSP, Maximum  $k$ -ary Conjunctive Constraint Satisfaction, problème de satisfaction de  $k$ -conjonctions maximum, APX-complet [BER 92]**

*Description*

*Instance* : un ensemble  $X$  de variables bivalentes, une famille  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  de clauses conjonctives de taille  $k$  sur l'ensemble des littéraux  $\{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$

*Solution réalisable* : une affectation des valeurs de vérité

*Solution optimale* : une affectation qui rende vraies un nombre maximum de clauses

**Approximation**

$\rho$ -approximable à  $1/2^{k-1}$  pour toute constante  $k$  [TRE 96a], à  $1/1.165$  pour  $k = 2$  et à  $1/2$  pour  $k = 3$ ;  $\rho$ -approximable par LSA à  $1/(2^k - 1)$  (optima 1-locaux altérés [ALI 97]) pour  $k \geq 3$ , à  $2/3$  pour  $k = 2$  (optima miroirs 1-locaux altérés, chapitre 5);

**Déclinaison**

MaxEk-CCSP : chaque clause contient *exactement*  $k$  littéraux, admet un schéma d'approximation polynomial pour ses instances denses [AND 98]

Min3-CCSP-3 : version *minimisation* et le nombre des occurrences de chaque variable est borné par 3, NPO-PB-complet pour la E-réduction et ne peut être approché à  $n^{\varepsilon-1}$  pour toute constante  $\varepsilon > 0$  [KLA 96]

**MinEQ, Minimum Equivalence, problème de satisfaction d'équivalences, APX-hard [GAR 96]**

*Description*

*Instance* : un ensemble  $X$  de variables bivalentes, une famille  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  d'équivalences du type  $l_i \equiv l_j$  sur l'ensemble des littéraux  $\{x_1, \bar{x}_1, \dots, x_n, \bar{x}_n\}$

*Solution réalisable* : une affectation des valeurs de vérité

*Solution optimale* : une affectation qui rende vraies un nombre minimum d'équivalences

*A noter*

approximable en  $O(1/\log n)$  [GAR 96]; admet un schéma d'approximation polynomial pour ses instances denses [BAZ 99]

**MinEk-Lin2, Minimum kary-Equations2, problème d'équations  $k$ -aires sur  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$**

*Description*

*Instance* : un ensemble  $X$  de variables bivalentes, une famille  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  d'équations linéaires  $k$ -aires à coefficients binaires sur  $X$  (du type  $x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_p} = b$ ,  $p \leq k$ ,  $b \in \{0, 1\}$ )

*Solution réalisable* : une affectation des variables de l'ensemble  $X$

*Solution optimale* : une affectation qui rende vraies un nombre minimum d'équations

*A noter*

admet un schéma d'approximation polynomial pour ses instances denses [BAZ 99]

#### A.4. Autres problèmes

**MinBP, Minimum Bin Packing, problème de rangement en un nombre minimum de boîtes, APX, PTAS[ $\delta$ ]\FPTAS[ $\delta$ ] [DEM 99a]**

*Description*

*Instance* : une collection de  $n$  objets  $x_1, \dots, x_p$  de volumes entiers  $a_1, \dots, a_n$ ,  $n$  boîtes  $b_1, \dots, b_n$  de même capacité entière  $b$

*Solution réalisable* : une affectation  $x \in \{1, \dots, n\}^n$  des objets  $x_j$  aux boîtes  $b_j$  de sorte que la somme  $\sum_{i=1}^{p_j} a_{j_i}$  des volumes des objets  $x_{j_1}, \dots, x_{j_{p_j}}$  placés dans chaque boîte  $b_j$  n'excède pas la capacité  $b$  de la boîte

*Solution optimale* : une affectation réalisable qui minimise le nombre de boîtes utilisées

*A noter*

$\delta$ -approximable par LSA à 1/2 comme problème de partitionnement héréditaire (optima 1-locaux, chapitre 4)

**MinMS[ $m$ ], Minimum Multiprocessor Scheduling, problème d'ordonnancement multiprocesseurs, PTAS [HOC 87]**

*Description*

*Instance* :  $n$  tâches  $x_1, \dots, x_n$  de durées d'exécution entières  $p_1, \dots, p_n$  (indépendantes de la machine sur laquelle les tâches sont exécutées),  $m$  machines  $M_1, \dots, M_m$

*Solution réalisable* : toute répartition  $x \in \{1, \dots, m\}^n$  des tâches  $x_j$  sur les machines  $M_1, \dots, M_m$  de sorte que chaque tâche soit exécutée une et une seule fois

*Solution optimale* : une répartition qui minimise le plus long temps d'exécution des machines, le temps d'exécution d'une machine étant donné par la somme  $\sum_{i=1}^{p_j} p_{j_i}$  des temps d'exécution des tâches  $x_{j_1}, \dots, x_{j_{p_j}}$  qui lui ont été confiées

*A noter*

MinMS[ $m$ ] est NP-difficile pour tout  $m \geq 2$  constant et  $\rho$ -approximable par LSA à  $2(1 - 1/(m + 1))$  et  $\delta$ -approximable par LSA à  $m/(m + 1)$  (optima 1-locaux, chapitre 4)

## Annexe B

# Guide des définitions

### B.1. Les fondements

#### *NPO (paragraphe 2.1.1)*

Un problème  $\Pi$  de NPO est un quadruplet  $(I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi, \text{opt}_\Pi)$  qui vérifie :

- 1)  $I_\Pi$  est reconnaissable en temps polynomial en  $|I|$ , où  $I \in I_\Pi$  ;
- 2)  $\exists p_\Pi$  polynôme tel que  $\forall I \in I_\Pi, \text{Sol}_\Pi(I) \subseteq \{0, 1\}^{p_\Pi(|I|)}$  ;
- 3)  $\forall I \in I_\Pi, \forall s$ , décider si  $s$  est réalisable pour  $I$  est polynomial en  $|I|$  ;
- 4)  $m_\Pi : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi \rightarrow \mathbb{N}$  est calculable en temps polynomial en  $|I|$  ;
- 5)  $\text{opt}_\Pi \in \{\min, \max\}$  ;
- 6)  $\forall I \in I_\Pi$ , on sait déterminer une solution  $\text{triv}_\Pi(I)$  en temps polynomial en  $|I|$ .

#### *Valeurs remarquables $\beta_\Pi(I)$ et $\omega_\Pi(I)$ (paragraphe 2.1.2)*

Soient  $\Pi$  un problème de NPO et  $I$  l'une de ses instances :

*valeur optimale* :  $\beta_\Pi(I) = \text{opt}_{\Pi, s \in \text{Sol}_\Pi(I)} \{m_\Pi(I, s)\}$  ;

*valeur d'une pire solution* :  $\omega_\Pi(I) = \overline{\text{opt}}_{\Pi, s \in \text{Sol}_\Pi(I)} \{m_\Pi(I, s)\}^1$ .

---

1.  $\forall \Pi \in \text{NPO}, (\text{opt}_\Pi = \max \Rightarrow \overline{\text{opt}}_\Pi = \min) \wedge (\text{opt}_\Pi = \min \Rightarrow \overline{\text{opt}}_\Pi = \max)$ .

**Quantités remarquables  $\text{supp}_\Pi(I)$  et  $\text{diam}_\Pi(I)$  (paragraphe 2.1.2)**

Soit  $\Pi$  un problème de NPO et  $I$  l'une de ses instances :

le support :  $\text{supp}_\Pi(I) = |\{m_\Pi(I, s) : s \in \text{Sol}_\Pi(I)\}|$ ;

le diamètre :  $\text{diam}_\Pi(I) = |\omega_\Pi(I) - \beta_\Pi(I)|$ .

**Problèmes polynomialement bornés NPO-PB (paragraphe 2.1.2)**

Un problème  $\Pi$  de NPO est dans la classe NPO-PB s'il existe un polynôme  $q_\Pi$  tel que :  $\forall I \in I_\Pi, \max\{\omega_\Pi(I), \beta_\Pi(I)\} \leq q_\Pi(|I|)$ .

**Rapports d'évaluation (section 2.3)**

La performance d'un algorithme approché  $\mathcal{A}$  sur une instance  $I$  d'un problème  $\Pi$  de NPO est donnée par les rapports, respectivement *classique*  $\rho_\Pi^{\mathcal{A}}(I)$  et *différentiel*  $\delta_\Pi^{\mathcal{A}}(I)$  :

$$\begin{aligned} \rho_\Pi^{\mathcal{A}}(I) &= \begin{cases} \frac{\lambda_{\mathcal{A}}(I)}{\beta_\Pi(I)} & \text{opt}_\Pi = \max \\ \frac{\beta_\Pi(I)}{\lambda_{\mathcal{A}}(I)} & \text{opt}_\Pi = \min \end{cases} \\ \delta_\Pi^{\mathcal{A}}(I) &= \frac{|\omega_\Pi(I) - \lambda_{\mathcal{A}}(I)|}{|\omega_\Pi(I) - \beta_\Pi(I)|} ; \end{aligned}$$

la performance de  $\mathcal{A}$  pour  $\Pi$ , en *classique*  $\rho_\Pi^{\mathcal{A}}$  et *différentiel*  $\delta_\Pi^{\mathcal{A}}$ , est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \rho_\Pi^{\mathcal{A}} &= \inf_{I \in I_\Pi} \{\rho_\Pi^{\mathcal{A}}(I)\} \\ \delta_\Pi^{\mathcal{A}} &= \inf_{I \in I_\Pi} \{\delta_\Pi^{\mathcal{A}}(I)\} . \end{aligned}$$

**Limites des classes (paragraphe 2.6.2 et 2.6.3)**

Soient  $X$  et  $Y$  deux classes de problèmes de NPO et  $\mathcal{X}$  une réduction préservant l'appartenance à  $X$ , on définit les trois classes suivantes :

- problèmes  $Y$ -complets :  $Y\text{-c} = \{\Pi \in Y : \forall \Pi' \in Y, \Pi' \propto^{\mathcal{X}} \Pi\}$  ;
- problèmes  $Y$ -difficiles :  $Y\text{-h} = \{\Pi : \forall \Pi' \in Y, \Pi' \propto^{\mathcal{X}} \Pi\}$  ;
- fermeture de  $Y$  :  $\overline{Y}^{\mathcal{X}} = \{\Pi \in \text{NPO} : \exists \Pi' \in Y, \Pi \propto^{\mathcal{X}} \Pi'\}$ .

## B.2. Les classes

### B.2.1. Classes d'approximation

PO : un problème  $\Pi$  de NPO est dans PO s'il existe un algorithme polynomial  $\mathcal{A}$  qui résout  $\Pi$  à l'optimum ;

APX[R] (section 2.4) : un problème  $\Pi$  de NPO est dans APX[R] s'il existe un algorithme polynomial approché  $\mathcal{A}$  pour  $\Pi$  et une constante  $r_0$  dans  $]0, 1]$  tels que  $R_{\Pi}^{\mathcal{A}} \geq r_0$  ;

PTAS[R] (section 2.4) : un problème  $\Pi$  de NPO est dans PTAS[R] s'il admet un schéma d'approximation<sup>2</sup>  $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$  dont la complexité  $C$  vérifie :  $\forall I, \forall r, C(\mathcal{A}_r(I)) = p_r(|I|)$  (le degré de  $p_r$  dépend de  $r$ ).

### B.2.2. Classes définies par la logique

MaxNP<sub>0</sub> (section 2.5) : un problème  $\Pi$  de maximisation de NP est dans MaxNP<sub>0</sub> s'il existe deux types similaires finis  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$ , une formule  $\phi$  du premier ordre sans quantificateur et deux constantes  $k$  et  $\ell$ , tels que les optima de  $\Pi$  peuvent être exprimés sous la forme :

$$\beta_{\Pi}(I) = \max_S |\{x \in U^k : \exists y \in U^{\ell} \text{ tel que } \phi(I, S, x, y)\}|$$

où  $I$  est une  $\mathcal{I}$ -structure finie d'univers  $U$  et  $S$  une  $\mathcal{S}$ -structure finie de même univers  $U$  ;

MaxSNP<sub>0</sub> (section 2.5) : un problème  $\Pi$  de maximisation de NPO est dans la classe MaxSNP<sub>0</sub> s'il existe deux types similaires finis  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{S}$ , une formule  $\phi$  du premier ordre sans quantificateur et une constante  $k$ , tels que les optima de  $\Pi$  peuvent être exprimés sous la forme :

$$\beta_{\Pi}(I) = \max_S |\{x \in U^k : \phi(I, S, x)\}|$$

où  $I$  et  $S$  sont respectivement une  $\mathcal{I}$  et une  $\mathcal{S}$ -structures finies d'univers  $U$ .

MaxSNP et NP (section 2.5) :

$$\begin{aligned} \text{MaxNP} &= \overline{\text{MaxNP}_0}^L \\ \text{MaxSNP} &= \overline{\text{MaxSNP}_0}^L. \end{aligned}$$

---

2. Un schéma d'approximation(section 2.4) pour  $\Pi$  est une famille d'algorithmes approchés  $(\mathcal{A}_r)_{0 \leq r < 1}$  qui vérifie :  $\forall r \in [0, 1[, R_{\Pi}^{\mathcal{A}_r} \geq r$ .



**B.2.3. Classes d'approximation locale**

**GLO[R]** (section 3.2) : soit  $R$  une mesure d'approximation ; un problème  $\Pi$  de NPO est dans la classe **GLO[R]** s'il existe une constante  $h$ , une constante  $r \in ]0, 1]$  et un voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\Pi$  tels que l'on sait pour toute instance déterminer des optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  en temps polynomial et qui vérifient :  $\forall I \in I_\Pi, \forall \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I)$ , si  $\tilde{s}$  est un optimum local relativement à  $\mathcal{V}$ , alors  $R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r$  ;

**CGLO[R]** (section 5.2) : soit  $R$  une mesure d'approximation ; un problème  $\Pi$  est dans la classe **CGLO[R]** s'il existe une constante  $h$ , une constante  $r \in ]0, 1]$  et un voisinage  $\mathcal{V}$  miroir  $h$ -borné pour  $\Pi$  tels que l'on sait pour toute instance déterminer des optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  en temps polynomial et qui vérifient :  $\forall I \in I_\Pi, \forall \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I)$ , si  $\tilde{s}$  est un optimum local relativement à  $\mathcal{V}$ , alors  $R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r$  ;

**GGLO[R]** (section 5.2) : soient  $\Pi = (\text{opt}_\Pi, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m_\Pi)$  un problème de NPO et une fonction  $m'_\Pi : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi(I) \rightarrow \mathbb{N}$  ;  $\Pi' = (\text{opt}_\Pi, I_\Pi, \text{Sol}_\Pi, m'_\Pi)$  dénote le problème altéré associé à  $\Pi$  et  $m'_\Pi$  ; soit  $R$  une mesure d'approximation ; un problème  $\Pi$  de NPO est dans la classe **GGLO[R]** s'il existe une constante  $h$ , une constante  $r \in ]0, 1]$ , un voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\Pi$  et une fonction  $m'_\Pi$  calculable en temps polynomiale en  $|I|$  pour  $I \in I_\Pi$  tels que l'on sait pour toute instance  $I$  déterminer des optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  et  $m'_\Pi$  en temps polynomial et qui vérifient :  $\forall I \in I_\Pi$ , si  $\tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I)$  est un optimum local de  $\Pi'$  relativement à  $\mathcal{V}$ , alors  $R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r$  ;

**GCGLO[R]** (section 5.2) : soit  $R$  une mesure d'approximation ; un problème  $\Pi$  de NPO est dans la classe **GCGLO[R]** s'il existe une constante  $h$ , une constante  $r \in ]0, 1]$ , un voisinage  $\mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\Pi$  et une fonction  $m'_\Pi$  calculable en temps polynomial en  $|I|$  pour  $I \in I_\Pi$  tels que l'on sait pour toute instance  $I$  déterminer des optima locaux relativement à  $\mathcal{V}$  et  $m'_\Pi$  en temps polynomial et qui vérifient :  $\forall I \in I_\Pi, \forall \tilde{s} \in \text{Sol}_\Pi(I)$ , si  $m_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m_\Pi(I, \tilde{\tilde{s}})$  et  $\forall s' \in \mathcal{V}(I, s)$ ,  $m'_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m'_\Pi(I, s')$ , alors  $R_\Pi(I, \tilde{s}) \geq r$  ;

**PLS** (section 7.1) : un couple  $(\Pi, \mathcal{V})$  où  $\Pi$  est un problème de NPO et  $\mathcal{V}$  une fonction voisinage sur  $\Pi$  est un problème de PLS s'il existe un algorithme  $C_\Pi$  qui vérifie :

- $\exists p_\ell$  polynôme tel que  $C_\Pi(I, s)$  est de complexité au pire des cas  $p_\ell(|I|)$  ;
- $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I)$ ,

$$C_\Pi(I, s) = \begin{cases} s & \text{si } s \text{ optimum sur } \mathcal{V}(I, s) \\ t \in \mathcal{V}(I, s) : m_\Pi(I, t) \succ m_\Pi(I, s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

### B.3. Réductions

**Réduction polynomiale** (paragraphe 2.6.1) - une réduction polynomiale d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  de NPO est la donnée d'un couple  $R = (f, g)$  de fonctions polynomiales en  $|I|$  pour  $I \in I_\Pi$  définies par :

$$\begin{cases} f & : \begin{cases} I_\Pi & \rightarrow I_{\Pi'} \\ I & \mapsto I' \end{cases} \\ g & : \begin{cases} \text{Sol}_{\Pi'}(f(I_\Pi)) & \rightarrow \text{Sol}_\Pi \\ s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)) & \mapsto s \in \text{Sol}_\Pi(I). \end{cases} \end{cases}$$

#### B.3.1. Propriétés remarquables

**Réduction monotone** (paragraphe 2.6.1) - une réduction  $R = (f, g)$  est monotone si elle vérifie pour toute instance  $I \in I_\Pi$  et tout couple de solutions  $(s'_1, s'_2) \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  :

$$v_{\Pi'}(f(I), s'_1) \succeq v_{\Pi'}(f(I), s'_2) \Rightarrow v_\Pi(I, g(s'_1)) \succeq v_\Pi(I, g(s'_2)).$$

**Réduction surjective** (paragraphe 2.6.1) - une réduction  $R = (f, g)$  est surjective si elle vérifie, pour toute instance  $I \in I_\Pi$ ,  $\text{Sol}_\Pi(I) = g(\text{Sol}_{\Pi'}(f(I)))$ .

**Réduction bijective** (paragraphe 2.7.2) - une réduction  $R = (f, g)$  est bijective si et seulement si pour toute instance  $I \in I_\Pi$ ,  $g|_{\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))}$  est une bijection de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  sur  $\text{Sol}_\Pi(I)$ .

**Réduction de voisinage** (paragraphe 3.5.1) - une réduction  $R = (f, g)$  entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO est une *réduction de voisinage* si elle vérifie :  $\forall h' \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{V}'$  voisinage  $h'$ -borné sur  $f(I)$ ,  $\exists h \in \mathbb{N}, \exists \mathcal{V}$  voisinage  $h$ -borné sur  $I$  tels que  $\forall I \in I_\Pi, \forall \tilde{s}$  optimum sur  $\mathcal{V}(I, \tilde{s})$ ,  $\exists \tilde{s}'$  optimum sur  $\mathcal{V}'(f(I)\tilde{s}')$  tel que  $m_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m_\Pi(I, g(\tilde{s}'))$ .

**Réduction strictement monotone** (paragraphe 3.5.1) - une réduction  $(f, g)$  est strictement monotone si elle vérifie pour toute instance  $I \in I_\Pi$  et tout couple de solutions  $(s', t') \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  :

$$m_{\Pi'}(f(I), t') \succ m_{\Pi'}(f(I), s') \Rightarrow m_\Pi(I, g(t')) \succ m_\Pi(I, g(s')).$$

**Réduction voisinage-surjective** (paragraphe 3.5.1) - une réduction  $(f, g)$  est voisinage-surjective si et seulement si elle vérifie :  $\forall \mathcal{V}'$  voisinage  $h'$ -borné pour  $\Pi'$ ,  $\exists \mathcal{V}$  voisinage  $h$ -borné pour  $\Pi$  tels que  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), g(\mathcal{V}'(f(I), s')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s'))$ .

**B.3.2. Réductions remarquables**

**A-réduction** (paragraphe 2.6.1) - soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se A-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{A[R1, R2]}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  et une fonction  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui vérifient pour deux mesures d'approximation  $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$  :

- $c(r) = 0 \Rightarrow r = 0$  ;
- $\forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), R1_{\Pi'}(f(I), s') \geq r \Rightarrow R2_{\Pi}(I, g(s')) \geq c(r)$ .

**P-réduction** (paragraphe 2.6.1) - soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se P-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{P[R1, R2]}{\propto} \Pi'$  s'il existe une réduction  $R = (f, g)$  et une fonction  $c : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui vérifient pour deux mesures d'approximation  $R1, R2 \in \{\rho, \delta\}$  :

- $c(r) = 1 \Rightarrow r = 1$  ;
- $\forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), R2_{\Pi'}(f(I), s') \geq c(r) \Rightarrow R1_{\Pi}(I, g(s')) \geq r$ .

**L-réduction** (paragraphe 2.6.1) - soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO tels que  $\text{opt}_{\Pi} = \text{opt}_{\Pi'}$ , on dit pour les rapports classique et différentiel que  $\Pi$  se L-réduit (resp., se  $L[\delta]$ -réduit) à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{L}{\propto} \Pi'$  (resp.,  $\Pi \overset{L[\delta]}{\propto} \Pi'$ ) s'ils vérifient pour deux constantes  $\alpha_1 > 0$  et  $\alpha_2 > 0$  :

- $\forall I \in I_{\Pi}, \beta_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \beta_{\Pi}(I)$  (resp.,  $\text{diam}_{\Pi'}(f(I)) \leq \alpha_1 \text{diam}_{\Pi}(I)$ ) ;
- $\forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), |m_{\Pi}(I, g(s')) - \beta_{\Pi}(I)| \leq \alpha_2 |m_{\Pi'}(f(I), s') - \beta_{\Pi'}(f(I))|$ .

**Réduction continue** (paragraphe 2.7.1) - soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO tels que  $\text{opt}_{\Pi} = \text{opt}_{\Pi'}$ , une réduction continue de  $\Pi$  à  $\Pi'$  est la donnée de trois fonctions  $f$  de  $I_{\Pi}$  dans  $I'_{\Pi'}$ ,  $g$  de  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I_{\Pi}))$  dans  $\text{Sol}_{\Pi}$  et  $g'$  de  $\text{Sol}_{\Pi}$  dans  $\text{Sol}_{\Pi'}(f(I_{\Pi}))$ , toutes trois polynomiales en  $|I|$ , et qui vérifient pour quatre constantes  $a > 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $a' > 0$  et  $b' \geq 0$  les propriétés suivantes :

- $\forall I \in I_{\Pi}, \forall s \in \text{Sol}_{\Pi}(I)$ ,

$$m_{\Pi'}(f(I), g'(s)) \begin{cases} \geq \frac{1}{a} \times m_{\Pi}(I, s) - b & \text{opt}_{\Pi} = \max \\ \leq \frac{1}{a} \times m_{\Pi}(I, s) + b & \text{opt}_{\Pi} = \min \end{cases}$$

- $\forall I \in I_{\Pi}, \forall s' \in \text{Sol}_{\Pi}(f(I))$ ,

$$m_{\Pi}(I, g(s')) \begin{cases} \geq \frac{1}{a'} \times m_{\Pi'}(f(I), s') - b' & \text{opt}_{\Pi} = \max \\ \leq \frac{1}{a'} \times m_{\Pi'}(f(I), s') + b' & \text{opt}_{\Pi} = \min \end{cases}$$

**Réduction continue différentielle** (paragraphe 2.7.1) - une réduction continue entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO sera dite *continue différentielle* et notée  $\Pi \overset{C[\delta]}{\sim} \Pi'$  si elle vérifie les propriétés supplémentaires suivantes :

- $a \times a' = 1$  (*réduction d'expansion 1*) ;
- $\forall I \in I_\Pi, \omega_{\Pi'}(f(I)) \geq 1/a \times \omega_\Pi(I) - b$  (resp.,  $\leq 1/a \times \omega_\Pi(I) + b$ ).

**Réduction affine** (paragraphe 2.7.2) - soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se AF-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{AF}{\sim} \Pi'$  s'il existe de  $\Pi$  à  $\Pi'$  une réduction  $R = (f, g)$  qui vérifie :

- $R$  surjective ;
- $\forall I \in I_\Pi, \exists K_I \in \mathbb{R}, \exists k_I \in \mathbb{R}^*$  avec  $k_I > 0$  si  $\text{opt}_\Pi = \text{opt}_{\Pi'}$ , et  $k_I < 0$  sinon tels que  $\forall s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I)), m_{\Pi'}(f(I), s') = k_I m_\Pi(I, g(s')) + K_I$ .

**Réduction fortement affine** (paragraphe 2.7.2) - une réduction *fortement affine* entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO, notée  $\Pi \overset{AF}{\rightleftharpoons} \Pi'$ , est une réduction  $R = (f, g)$  affine bijective ; s'il existe deux réductions fortement affines, l'une de  $\Pi$  à  $\Pi'$ , l'autre de  $\Pi'$  à  $\Pi$ , on notera  $\Pi \overset{AF}{\rightleftharpoons} \Pi'$  et les problèmes  $\Pi$  à  $\Pi'$  seront dits *affinement équivalents*.

**LOC-réduction** (paragraphe 3.5.1) - une réduction  $R = (f, g)$  entre deux problèmes  $\Pi$  et  $\Pi'$  de NPO est une LOC-réduction si elle vérifie les propriétés suivantes (*on note pour toute instance  $I$  de  $I_\Pi$   $I' = f(I)$* ) :

- $\forall I \in I_\Pi, \exists S_{\Pi'}(I') \subseteq \text{Sol}_{\Pi'}(I')$  tel que
- surjectivité* :  $g(S_{\Pi'}(I')) = \text{Sol}_\Pi(I)$  ;
- monotonie partielle* :  $\forall s', t' \in S_{\Pi'}(I')$ , si  $m_{\Pi'}(I', s') \prec m_{\Pi'}(I', t')$ , alors  $m_\Pi(I, g(s')) \prec m_\Pi(I, g(t'))$  ;
- $\forall h'$  constante *existsh* constante telle que
- localité* :  $\forall \mathcal{V}'$  voisinage  $h'$ -borné pour  $\Pi'$ ,  $\exists \mathcal{V}$   $h$ -borné pour  $\Pi$  vérifiant  $\forall I \in I_\Pi, \forall s' \in S_{\Pi'}(I'), g(\mathcal{V}'(I', s') \cap S_{\Pi'}(I')) \subseteq \mathcal{V}(I, g(s'))$  ;
- dominance* :  $\forall t' \in S_{\Pi'}(I')$ , si  $t'$  est un optimum sur  $S_{\Pi'}(I') \cap \mathcal{V}'(I', t')$  alors  $t'$  est un optimum sur  $\mathcal{V}'(I', t')$ .

**LOC'-réduction** (paragraphe 3.5.1) - une LOC'-réduction d'un problème  $\Pi$  à un problème  $\Pi'$  est une réduction  $R$  qui est à la fois *surjective*, *monotone* et *voisinage-surjective*.

**G-réduction** (paragraphe 3.5.2) - soient  $\Pi$  et  $\Pi'$  deux problèmes de NPO, on dit que  $\Pi$  se G-réduit à  $\Pi'$  et l'on note  $\Pi \overset{G[R1, R2]}{\sim} \Pi'$  s'il existe trois fonctions  $f, g$  et  $c$  qui vérifient pour deux mesures d'approximation  $R1$  et  $R2$  :

- $(f, g, c)$  est une  $A[R1, R2]$ -réduction ;
- $(f, g)$  est une réduction de voisinage.

**PLS-réduction** (paragraphe 7.1) - soient  $(\Pi, \mathcal{V})$  et  $(\Pi', \mathcal{V}')$  deux problèmes de PLS, une PLS-réduction  $R = (f, g)$  de  $(\Pi, \mathcal{V})$  à  $(\Pi', \mathcal{V}')$ , notée  $(\Pi, \mathcal{V}) \overset{\text{PLS}}{\propto} (\Pi', \mathcal{V}')$ , est une réduction de  $\Pi$  à  $\Pi'$  qui vérifie pour toute instance  $I \in I_\Pi$  et toute solution  $s' \in \text{Sol}_{\Pi'}(f(I))$  : si  $s'$  est un optimum sur  $\mathcal{V}'(f(I), s')$ , alors  $g(s')$  est un optimum sur  $\mathcal{V}(I, g(s'))$ .

#### B.4. Localité

**Voisinage** (paragraphe 3.1.2) - soit  $\Pi$  un problème de NPO, un voisinage sur  $\Pi$  est une fonction  $\mathcal{V} : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi \rightarrow \mathcal{P}(\text{Sol}_\Pi)$  qui à toute solution  $s \in \text{Sol}_\Pi(I)$  de toute instance  $I \in I_\Pi$  associe un sous-ensemble  $\mathcal{V}(I, s) \subseteq \text{Sol}_\Pi(I)$  de solutions de  $I$  contenant  $s$ , de taille au plus  $p_\mathcal{V}(|I|)$  où  $p_\mathcal{V}$  est un polynôme.

**Optimum local** (paragraphe 3.1.1) :  $\tilde{s}$  est un optimum local de  $I$  relativement à  $\mathcal{V}$  si et seulement si  $\forall s \in \mathcal{V}(I, \tilde{s}), m_\Pi(I, \tilde{s}) \succeq m_\Pi(I, s)$ .

**Voisinages  $h$ -borné** (paragraphe 3.1.2) - soient  $\Pi$  un problème de NPO et  $h$  une constante, le voisinage  $\mathcal{V}_\Pi^h$   $h$ -borné pour  $\Pi$  est défini en toute solution  $s$  comme l'ensemble des solutions au plus  $h$ -distantes de  $s$  :  $\forall h, \forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), \mathcal{V}_\Pi^h(I, s) = \{t \in \text{Sol}_\Pi(I) : d(s, t) \leq h\}$  ; un voisinage  $\mathcal{V} : I_\Pi \times \text{Sol}_\Pi \rightarrow \text{Sol}_\Pi$  est un *voisinage miroir  $h$ -borné* s'il existe un voisinage  $h$ -borné  $\mathcal{W}$  tel que  $\forall I \in I_\Pi, \forall s \in \text{Sol}_\Pi(I), \mathcal{V}(I, s) = \mathcal{W}(I, s) \cup \mathcal{W}(I, \bar{s})$ .

#### B.5. Problèmes particuliers

**Propriété héréditaire et anti-héréditaire** (section 4.1 et paragraphe 7.2.3) : une propriété  $\pi$  est *héréditaire* (resp., *anti-héréditaire*) sur un ensemble  $Z$  si elle vérifie  $\pi(\emptyset) \wedge \forall (X, Y) : X \subseteq Y \subseteq Z, \pi(Y) \Rightarrow \pi(X)$  et  $\pi(Z) \wedge \forall (X, Y) : X \subseteq Y \subseteq Z, \pi(X) \Rightarrow \pi(Y)$  ;

**Problème héréditaire et anti-héréditaire** (paragraphe 7.2.3) : soit  $\Pi$  un problème de NPO ;  $\Pi$  est un problème *héréditaire* (resp., *anti-héréditaire*) s'il existe une propriété héréditaire (resp., anti-héréditaire)  $\pi$  telle que toute instance  $I$  de  $\Pi$  revient à résoudre un problème du type :

$$\begin{aligned} \beta_\Pi(I) &= \max\{\alpha(Y), Y \subseteq X : \pi(Y)\} \\ \beta_\Pi(I) &= \min\{\alpha(Y), Y \subseteq X : \pi(Y)\} \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est une fonction d'évaluation des ensembles de type cardinalité, somme des poids, poids maximum, poids moyen...

**$\pi$ -partition** (section 4.1 et paragraphe 7.2.3) : soit  $\pi$  une propriété et  $X$  un ensemble, une  $\pi$ -partition de  $X$  est un ensemble  $\mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\}$  de sous-ensembles de  $X$  qui vérifie,  $\forall i, j = 1, \dots, q$ , les trois propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^q V_i &= X \\ i \neq j &\Rightarrow V_i \cap V_j = \emptyset \\ \pi(V_i) & \end{aligned}$$

**Problème de partitionnement héréditaire** (section 4.1 et paragraphe 7.2.3) : soit  $\Pi$  un problème de NPO dont les instances sont la donnée d'un ensemble  $X$  et éventuellement d'une valuation  $p : X \rightarrow \mathbb{N}$  des éléments de  $X$  ;  $\Pi$  est un problème de partitionnement héréditaire s'il existe une propriété héréditaire  $\pi$  telle que toute instance  $I$  de  $\Pi$  revient à résoudre un problème du type :

$$\beta_{\Pi}(I) = \min \left\{ \sum_{i=1}^q \alpha(V_i) : \mathcal{S} = \{V_1, \dots, V_q\} \text{ } \pi\text{-partition de } V \right\}$$

où  $\alpha$  est une fonction d'évaluation des ensembles de type indicatrice notée  $\mathbb{I}$ , poids maximum, poids moyen...

## Bibliographie

- [AHO 75] AHO A.V., HOPCROFT J.E., ULLMAN J.D., *The design and analysis of computer algorithms*, Addison-Wesley, Reading, Massachussets, 1975.
- [ALI 94] ALIMONTI P., « New local search approximation techniques for maximum generalized satisfiability problems », *2<sup>nd</sup> Italian Conference on Algorithms and Complexity*, p. 40-53, 1994.
- [ALI 97] ALIMONTI P., Local search and approximability of MAX SNP problems, PhD thesis, Università degli Studi di Roma « La Sapienza », 1997.
- [AND 98] ANDERSSON G., ENGBRETSSEN L., « Sampling methods applied to non-boolean optimization problems », *2<sup>nd</sup> Symposium on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science, RANDOM*, vol. 1518 de LNCS, Springer-Verlag, p. 357-368, 1998.
- [ARO 95] ARORA S., KARGER D., KARPINSKI M., « Polynomial time approximation schemes for dense instances of NP-hard problems », *STOC'95*, p. 284-293, 1995.
- [AUS 80] AUSIELLO G., D'ATRI A., PROTASI M., « Structure preserving reductions among convex optimization problems », *J. Comput. System Sci.*, vol. 21, p. 136-153, 1980.
- [AUS 95a] AUSIELLO G., PROTASI M., « Local search, reducibility and approximability of NP-optimization problems », *Inform. Process. Lett.*, vol. 54, n°2, p. 73-79, 1995.
- [AUS 95b] AUSIELLO G., PROTASI M., « NP optimization problems and local optima graph theory », ALAVI Y., SCHWENK A. (dir.), *Combinatorics and applications. 7<sup>th</sup> Quadriennial International Conference on the Theory and Applications of Graphs*, vol. 2, p. 957-975, 1995.
- [AUS 99] AUSIELLO G., CRESCENZI P., GAMBOSI G., KANN V., MARCHETTI-SPACCAMELLA A., PROTASI M., *Complexity and approximation. Combinatorial optimization problems and their approximability properties*, Springer, Berlin, 1999.
- [BAF 99] BAFNA V., BERMAN P., FUJITO T., « Approximating feedback vertex set for undirected graphs within ratio 2 », *SIAM J. Disc. Math.*, vol. 12, n°3, p. 289-297, 1999.
- [BAT 98] BATTITI R., PROTASI M., « Algorithms and heuristics for MAX-SAT », DU D.Z., PARDALOS P.M. (dir.), *Handbook of Combinatorial Optimization*, vol. 1, p. 77-148, Kluwer Academic Publishers, 1998.

- [BAZ a] BAZGAN C., FERNANDEZ DE LA VEGA W., KARPINSKI M., Polynomial time approximation schemes for dense instances of minimum constraint satisfaction, To appear.
- [BAZ b] BAZGAN C., PASCHOS V.T., « Differential approximation for optimal satisfiability and related problems », *European J. Oper. Res.*, A paraître.
- [BAZ 99] BAZGAN C., FERNANDEZ DE LA VEGA W., « A Polynomial time approximation scheme for dense MIN 2 SAT », *12<sup>th</sup> International Symposium on Fundamentals of Computation Theory, FCT*, vol. 1684 de LNCS, Springer-Verlag, p. 91-99, 1999.
- [BER 73] BERGE C., *Graphs and hypergraphs*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [BER 92] BERMAN P., SCHNITGER G., « On the complexity of approximating the independent set problem », *Inform. and Comput.*, vol. 96, p. 77-94, 1992.
- [BER 96] BERTSIMAS D., TEO C.-P., VOHRA R., « On dependent randomized rounding algorithms », *International Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization, IPCO*, vol. 1084 de LNCS, Springer-Verlag, p. 330-344, 1996.
- [BÖC 00] BÖCKENHAUER H.-J., HROMKOVIČ J., KLASING R., SEIBERT S., UNGER W., « An improved lower bound on the approximability of metric TSP and approximation algorithms for the TSP with sharpened triangle inequality », *STACS'00*, LNCS, Springer, p. 382-394, 2000.
- [BÖC 02] BÖCKENHAUER H.-J., HROMKOVIČ J., KLASING R., SEIBERT S., UNGER W., « Towards the notion of stability of approximation for hard optimization tasks and the traveling salesman problem », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 285, n° 1, p. 3-24, 2002.
- [CHR 76] CHRISTOFIDES N., Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem, Technical Report n°388, Grad. School of Industrial Administration, CMU, 1976.
- [CHV 83] CHVÁTAL V., *Linear programming*, W.H. Freeman, New York, 1983.
- [CRE 91] CRESCENZI P., PANCONESI A., « Completeness in approximation classes », *Inform. and Comput.*, vol. 93, n° 2, p. 241-262, 1991.
- [CRE 94] CRESCENZI P., TREVISAN L., « On approximation scheme preserving reducibility and its applications », *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, FCT-TCS*, n° 880 LNCS, Springer-Verlag, p. 330-341, 1994.
- [CRO 58] CROES A., « A method for solving traveling-salesman problems », *Oper. Res.*, vol. 5, p. 791-812, 1958.
- [DEM 93] DEMANGE M., PASCHOS V.T., « Quelques étapes vers la conciliation de la théorie d'approximation et celle d'optimisation : une nouvelle théorie d'approximation polynomiale et résultats préliminaires », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, vol. 317, p. 409-414, 1993.
- [DEM 94a] DEMANGE M., Approximation polynomiale de problèmes NP-complets et programmation linéaire : une nouvelle mesure d'approximation et algorithmes, PhD thesis, CERMSEM, Université Paris I, Paris, 1994.
- [DEM 94b] DEMANGE M., GRISONI P., PASCHOS V.T., « Approximation results for the minimum graph coloring problem », *Inform. Process. Lett.*, vol. 50, p. 19-23, 1994.



- [DEM 96] DEMANGE M., PASCHOS V.T., « On an approximation measure founded on the links between optimization and polynomial approximation theory », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 158, p. 117-141, 1996.
- [DEM 98] DEMANGE M., GRISONI P., PASCHOS V.T., « Differential approximation algorithms for some combinatorial optimization problems », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 209, p. 107-122, 1998.
- [DEM 99a] DEMANGE M., MONNOT J., PASCHOS V.T., « Bridging gap between standard and differential polynomial approximation : the case of bin-packing », *Appl. Math. Lett.*, vol. 12, p. 127-133, 1999.
- [DEM 99b] DEMANGE M., PASCHOS V.T., « Asymptotic differential approximation ratio : definitions, motivations and application to some combinatorial problems », *RAIRO Oper. Res.*, vol. 33, p. 481-507, 1999.
- [DEM 01] DEMANGE M., PASCHOS V.T., Towards a general formal framework for polynomial approximation, Cahier du LAMSADE n° 177, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 2001.
- [DUH 97] DUH R., FÜRER M., « Approximation of  $k$ -set cover by semi-local optimization », *STOC'97*, p. 256-265, 1997.
- [ENG 99] ENGBRETSSEN L., « An explicit lower bound for TSP with distances one and two », *STACS'99*, vol. 1563 de LNCS, Springer-Verlag, p. 373-382, 1999.
- [FAG 74] FAGIN R., « Generalized first-order spectra and polynomial-time recognizable sets », KARP R.M. (dir.), *Complexity of computations*, p. 43-73, American Mathematics Society, 1974.
- [FER 99] FERNANDEZ DE LA VEGA W., KARPINSKI M., « On approximation hardness of dense TSP and other path problems », *Inform. Process. Lett.*, vol. 70, p. 53-55, 1999.
- [FIS 95] FISCHER S.T., « A note on the complexity of local search problems », *Inform. Process. Lett.*, vol. 53, p. 69-75, 1995.
- [GAR 79] GAREY M.R., JOHNSON D.S., *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, W.H. Freeman, San Francisco, 1979.
- [GAR 96] GARG N., VAZIRANI V.V., YANNAKAKIS M., « Approximate max-flow min-(multi)cut theorems and their applications », *SIAM J. Comput.*, vol. 25, p. 235-251, 1996.
- [GEN 79] GENS G.V., LEVNER E.V., « Computational complexity of approximation algorithms for combinatorial problems », *Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS*, vol. 74 de LNCS, Springer-Verlag, p. 292-300, 1979.
- [GON 85] GONDRAAN M., MINOUX M., *Graphes et algorithmes*, Eyrolles, Paris, 1985.
- [HAL 93] HALLDÓRSSON M.M., « Approximating the minimum maximal independence number », *Inform. Process. Lett.*, vol. 46, p. 169-172, 1993.
- [HAL 95] HALLDÓRSSON M.M., « Approximating discrete collections via local improvements », *Symposium on Discrete Algorithms, SODA*, p. 160-169, 1995.
- [HAN 90] HANSEN P., JAUMARD B., « Algorithms for the maximum satisfiability problem », *Computing*, vol. 44, p. 279-303, 1990.

- [HÅS 97] HÅSTAD J., « Some optimal inapproximability results », *STOC'97*, p. 1-10, 1997.
- [HOC 87] HOCHBAUM D.S., SHMOYS D.B., « Using dual approximation algorithms for scheduling problems : theoretical and practical results », *J. Assoc. Comput. Mach.*, vol. 34, p. 144-162, 1987.
- [HOC 97] HOCHBAUM D.S. (dir.), *Approximation algorithms for NP-hard problems*, PWS, Boston, 1997.
- [HSU 79] HSU W.L., NEMHAUSER G.L., « Easy and hard bottleneck location problems », *Discrete Appl. Math.*, vol. 1, p. 209-216, 1979.
- [HUR 89] HURKENS C., SCHRIJVER A., « On the size of systems of sets every  $t$  of which have an SDR, with application to the worst-case ratio of heuristics for packing problems », *SIAM J. Disc. Math.*, vol. 2, n°1, p. 68-72, 1989.
- [IBA 75] IBARRA O.H., KIM C.E., « Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subset problems », *J. Assoc. Comput. Mach.*, vol. 22, n°4, p. 463-468, 1975.
- [JOH 74] JOHNSON D.S., « Approximation algorithms for combinatorial problems », *J. Comput. System Sci.*, vol. 9, p. 256-278, 1974.
- [JOH 88] JOHNSON D.S., PAPADIMITRIOU C.H., YANNAKAKIS M., « How easy is local search ? », *J. Comput. System Sci.*, vol. 37, p. 79-100, 1988.
- [JOH 97] JOHNSON D.S., MCGEOCH L.A., « The traveling salesman problem : a case study », AARTS E., LENSTRA J.K. (dir.), *Local search in combinatorial optimization*, Wiley, 1997.
- [KAN 92] KANN V., On the approximability of NP-complete optimization problems, PhD thesis, Dept. of Numerical Analysis and Computing Science, Royal Institute of Technology, Stockholm, Suède, 1992.
- [KAN 94] KANN V., « Polynomially bounded problems that are hard to approximate », *Nordic J. Computing*, vol. 1, p. 317-331, 1994.
- [KAR 72] KARP R.M., « Reducibility among combinatorial problems », MILLER R.E., THATCHER J.W. (dir.), *Complexity of computer computations*, p. 85-103, Plenum Press, New York, 1972.
- [KAR 82] KARMAKAR N., KARP R.M., « An efficient approximation scheme for the one-dimensional bin packing problem », *FOCS'82*, p. 312-320, 1982.
- [KAR 97] KARPINSKI M., « Polynomial time approximation schemes for some dense instances of NP-hard optimization problems », *1<sup>st</sup> Symposium on Randomization and Approximation Techniques in Computer Science, RANDOM*, vol. 1269 de LNCS, Springer-Verlag, p. 1-14, 1997.
- [KHA 98] KHANNA S., MOTWANI R., SUDAN M., VAZIRANI U., « On syntactic versus computational views of approximability », *SIAM J. Comput.*, vol. 28, p. 164-191, 1998.
- [KLA 96] KLAUCK H., « On the complexity of global and local approximation », *Scandinavian Workshop on Algorithm Theory, SWAT'96*, LNCS, Springer-Verlag, 1996.
- [KOH 94] KOHLI R., KRISHNAMURTI R., MIRCHANDANI P., « The minimum satisfiability problem », *SIAM J. Disc. Math.*, vol. 7, p. 275-283, 1994.

- [KOL 94] KOLAITIS P.G., THAKUR M.N., « Logical definability of NP-optimization problems », *Inform. and Comput.*, vol. 115, n°2, p. 321-353, 1994.
- [KOL 95] KOLAITIS P.G., THAKUR M.N., « Approximation properties of NP minimization classes », *J. Comput. System Sci.*, vol. 50, n°3, p. 391-411, 1995.
- [KRE 89] KRENTEL M.W., « Structure in locally optimal solutions », *STOC'89*, p. 216-221, 1989.
- [LEW 78] LEWIS J., « On the complexity of the maximum subgraph problem », *STOC'78*, p. 265-274, 1978.
- [LEW 81] LEWIS H.R., PAPADIMITRIOU C.H., *Elements of the theory of computation*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1981.
- [LIN 73] LIN S., KERNIGHAN B.W., « An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem », *Oper. Res.*, vol. 21, p. 498-516, 1973.
- [MIN 83] MINOUX M., *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1983, (2 tomes).
- [MON 98] MONNOT J., Familles critiques d'instances et approximation polynomiale, PhD thesis, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 1998.
- [MON 01a] MONNOT J., Differential approximation for the maximum Hamiltonian path problem with specified endpoint(s), Rapport n°176, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 2001.
- [MON 01b] MONNOT J., Differential approximation of NP-hard problems with constant size feasible solutions, Rapport n°28, LAMSADE, Université Paris-Dauphine, 2001.
- [MON 01c] MONNOT J., « The maximum  $f$ -depth spanning tree problem », *Inform. Process. Lett.*, vol. 80, n°4, p. 179-187, 2001.
- [MON 01d] MONNOT J., PASCHOS V.T., TOULOUSE S., « Differential approximation results for the traveling salesman problem with distances 1 and 2 », *13<sup>th</sup> International Symposium on Fundamentals of Computation Theory, FCT*, vol. 2138 de LNCS, Springer-Verlag, p. 275-286, 2001.
- [MON 02] MONNOT J., « Differential approximation results for the traveling salesman and related problems », *Inform. Process. Lett.*, vol. 82, n°5, p. 229-235, 2002.
- [MUT 98] MUTZEL P., ODENTHAL T., SCHARBRODT M., « The thickness of graphs : a survey », *Graphs and Combinatorics*, vol. 14, p. 59-73, 1998.
- [ORP 87] ORPONEN P., MANNILA H., On approximation preserving reductions : complete problems and robust measures, Rapport n°C-1987-28, Dept. of Computer Science, Université d'Helsinki, Finlande, 1987.
- [PAP 81] PAPADIMITRIOU C.H., STEIGLITZ K., *Combinatorial optimization : algorithms and complexity*, Prentice Hall, New Jersey, 1981.
- [PAP 91] PAPADIMITRIOU C.H., YANNAKAKIS M., « Optimization, approximation and complexity classes », *J. Comput. System Sci.*, vol. 43, p. 425-440, 1991.

- [PAP 93] PAPADIMITRIOU C.H., YANNAKAKIS M., « The traveling salesman problem with distances one and two », *Math. Oper. Res.*, vol. 18, p. 1-11, 1993.
- [PAP 00] PAPADIMITRIOU C.H., *Le sourire de Turing*, Nouvelles Frontières, Athènes, 2000, En grec. Titre anglais : *Turing*.
- [PAZ 81] PAZ A., MORAN S., « Non deterministic polynomial optimization problems and their approximations », *Theoret. Comput. Sci.*, vol. 15, p. 251-277, 1981.
- [RAO 94] RAO KOSARAJU S., PARK J.K., STEIN C., « Long tours and short superstrings », *FOCS'94*, p. 166-177, 1994.
- [SAH 75] SAHNI S., « Approximation algorithms for the 0/1 Knapsack problem », *J. Assoc. Comput. Mach.*, vol. 23, n° 1, p. 115-124, 1975.
- [SAH 76] SAHNI S., GONZALEZ T., « P-complete approximation problems », *J. Assoc. Comput. Mach.*, vol. 23, p. 555-565, 1976.
- [SCH 91] SCHÄFFER A.A., YANNAKAKIS M., « Simple local search problems that are hard to solve », *SIAM J. Comput.*, vol. 20, n° 1, p. 56-87, 1991.
- [SIM 90] SIMON H.U., « On approximate solutions for combinatorial optimization problems », *SIAM J. Disc. Math.*, vol. 3, n° 2, p. 294-310, 1990.
- [TRE 96a] TREVISAN L., « Positive linear programming, parallel approximation and PCPs », *European Symposium on Algorithms, ESA*, vol. 1136 de LNCS, Springer-Verlag, p. 62-75, 1996.
- [TRE 96b] TREVISAN L., SORKIN G.B., SUDAN M., WILLIAMSON D.P., « Gadgets, approximation, and linear programming », *FOCS'96*, p. 617-626, 1996.
- [WER 85] DE WERRA D., « An introduction to timetabling », *European J. Oper. Res.*, vol. 19, n° 2, p. 151-162, 1985.
- [VIS 92] VISHWANATHAN S., « An approximation algorithm for the asymmetric travelling salesman problem with distances one and two », *Inform. Process. Lett.*, vol. 44, p. 297-302, 1992.
- [WOO 69] WOOD D.C., « A technique for coloring a graph applicable to large-scale optimization problems », *The Computer Journal*, vol. 12, p. 317-319, 1969.
- [YAN 78] YANNAKAKIS M., « Node- and edge-deletion NP-complete problems », *STOC'78*, p. 253-264, 1978.
- [YAN 97] YANNAKAKIS M., « Computational complexity », AARTS E., LENSTRA J. (dir.), *Local search in combinatorial optimization*, p. 19-55, Wiley and sons, Chichester, Royaume Uni, 1997.

## Index

- algorithme
  - 2\_OPT, 108
  - approché, 29
  - $\mathcal{A}(I)$ , 29
  - PTAA, 29
  - de recherche locale
    - LSA, 64
- amélioration locale, 13
- approximation polynomiale, 28
- APX[R], 32
  - APX[ $\delta$ ], 32
  - APX, 32
- bin-packing minimum, 88
  - MinBP, 88
- bisection minimum, 162
  - MinPB, 162
- clause, 124
  - clause de Horn, 136
- clique maximum, 55
  - MaxCl, 55
- coloration minimum, 88
  - MinC, 88
- complétude, 48
- complexité en temps
  - polynomial, 29
- complexité en temps, 28
  - exponentielle, 11
  - pseudo-polynomial, 26
- coupe maximum, 72
  - MaxCut, 72
- couverture
  - d'ensembles minimum
    - MinRSSC, 152
    - MinSC, 90
    - MinWSC, 93, 153
  - de sommets minimum, 55
    - MinVC, 55
- diamètre, 25
  - $\text{diam}_\Pi(I)$ , 25
- distance entre solutions, 68
  - $d(s, t)$ , 68
- ensemble
  - d'équivalences maximum ou minimum, 159
    - MaxEQ, 167
    - MinEQ, 159
    - MinWEQ, 160
  - d'arêtes retour minimum, 95
    - MinFES, 95
  - de sommets retour minimum, 101
    - MinFES, 101
  - disjoints dans un hypergraphe
    - maximum, 55
      - MaxSP, 55
  - dominant minimum, 73
    - MinDS, 73
  - transversal minimum, 94
    - MinHS, 94
- fermeture, 41, 49
- graphe de transition, 178
  - $TG_\Pi(I)$ , 178
  - chemin améliorant, 178
  - hauteur d'un sommet, 178
  - sommet absorbant, 178

- instance
    - dense, 167
    - dense en moyenne, 167
  - littéral, 124
  - MaxNP<sub>0</sub>, 38
  - MaxNP<sub>0</sub>
    - MaxNP, 41
  - MaxSNP<sub>0</sub>, 38
    - MaxSNP, 41
  - mesure
    - classique, 30
    - différentiel, 31
    - erreur, 32
  - NP-difficile, 11
  - NP-hard, 11
  - NPO, 23
    - instance, 23
      - taille d'une instance, 24
    - pire solution, 25
      - $\omega_{\Pi}(I)$ , 25
    - solution optimale, 25
      - $\beta_{\Pi}(I)$ , 25
    - solution réalisable, 23
      - $\text{triv}_{\Pi}(I)$ , 24
  - optimum local, 63
  - ordonnancement de tâches sur  $m$ 
    - multiprocesseurs minimum, 96
    - MinMS[ $m$ ], 96
  - partition en cliques minimum, 88
    - MinPCI, 88
  - problème
    - à diamètre traitable, 184
    - à optima locaux garantis, 70
      - CGLO[R], 85
      - GCGLO[R], 86
      - GGLO[R], 86
      - GLO[ $\delta$ ], 70
      - GLO, 70
    - polynomialement borné
      - NPO-PB, 25
    - altéré, 86
      - fonction objectif altérée, 86
    - anti-héréditaire, 190
    - complet, 48
    - convexe, 188
    - $\Delta$ -simple, 184
    - de recherche locale, 176
      - PLS, 176
    - dense, 167
      - denseII, 167
    - difficile, 48
    - héréditaire, 87, 190
    - polynomialement borné, 25
    - régulier, 189
    - radial, 181
      - $\tau$ -radial, 186
  - programmation dynamique, 26
  - programmation linéaire maximum ou minimum, 54
    - MaxPL{0, 1}, 54
    - MinPL{0, 1}, 54
  - réduction, 44
    - A-, 45, 46
    - E-, 47
    - F-, 47
    - G-, 81
    - LOC'-, 80
    - LOC-, 78
      - dominance, 78
      - localité, 78
      - monotonie partielle, 78
      - surjectivité, 78
    - L-, 41, 47
    - PLS-, 176
    - PO-, 44
    - P-, 47
  - absolument continue, 50
  - affine, 52
    - AF-, 52
  - bijective, 53
  - continue, 50
    - expansion, 50
  - de voisinage, 76
  - fortement affine, 53
  - monotone, 45
  - strict-PLS-, 178
  - strictement monotone, 80
  - surjective, 45
    - voisinage-surjective, 80
- rapport d'approximation, 30
  - asymptotique, 30
  - asymptotique classique, 30
    - $\rho_{\Pi}^{A, \infty}$ , 30
  - asymptotique différentiel, 31

- $\delta_{\Pi}^{A,\infty}$ , 31
- classique, 30
- $\rho_{\Pi}^A(I)$ , 30
- différentiel, 31
- $\delta_{\Pi}^A(I)$ , 31
- recherche locale, 64
- sac-à-dos maximum
  - MinSubsetSum, 26
- satisfaisabilité maximum ou minimum, 124
  - MaxCCSP, 124
  - MaxESat, 39
  - MaxGSat, 42
  - MaxHornCCSP, 136
  - MaxMaximalSat, 60
  - MaxNAESat, 134
  - MaxSat, 38, 124
  - MinCCSP, 124
  - MinHornCCSP, 137
  - MinSat, 124
- schéma d'approximation, 34
  - complètement polynomial, 34
    - FPTAS $[\delta]$ , 34
    - FPTAS, 34
  - polynomial, 34
    - PTAS $[\delta]$ , 34
    - PTAS, 34
- solution
  - maximale, 20, 64
  - minimale, 20, 64
- sous-graphe biparti complet maximum, 158
  - MaxCB, 158
- sous-graphe partiel libre de  $H_0$  maximum, 97
  - MaxPSG  $H_0$ -libre, 97
- stable maximum, 39
  - MaxIS, 39
  - MaxMaximalIS, 60
  - MaxRIS, 158
- structure fi nie, 38
- support, 25
  - $\text{supp}_{\Pi}(I)$ , 25
- tautologie, 124
- type similaire fi ni, 38
- voisinage, 68
  - borné
    - $\mathcal{V}_{\Pi}^h(I, s)$ , 68
  - miroir borné, 85
- voyageur de commerce maximum ou minimum, 56
  - MaxTSP, 56
  - MinTSP, 56
  - TSP bivalué, 58
    - TSPab, 58
  - TSP métrique, 57
    - $\Delta$ TSP, 57
  - TSP métrique Relaxé, 57
    - $\Delta$ RTSP, 57
  - TSP métrique strict, 57
    - $\Delta$ STSP, 57

## Fiche pour le service de fabrication

### Auteurs :

Jérôme MONNOT Vangelis Th. PASCHOS Sophie TOULOUSE

### Titre du livre :

Approximation polynomiale des  
problèmes NP-difficiles :  
optima locaux et rapport différentiel

### Titre abrégé :

*Optima locaux et rapport différentiel*

### Date de cette version :

*17 décembre 2002*

### Contact :

- téléphone : 01 44 05 45 82
- télécopie : 01 44 05 40 91/41 68
- Mél : paschos@lamsade.dauphine.fr

### Logiciel pour la composition :

- L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, avec la classe `ouvrage-hermes.cls`,
- version 1.3, 17/09/2001.
- traité (option `treatise`) : Non (*par défaut, livre, mêmes auteurs de chapitres*)
- livre en anglais (option `english`) : Non (*par défaut en français*)
- tracé des limites de page (option `cropmarks`) : Non (*par défaut*)
- suppression des en-têtes de page (option `empty`) : Non (*par défaut*)
- impression des pages blanches (option `allpages`) : Non (*par défaut*)
- césures actives : voir la coupure du mot signal dans le fichier `.log`