

济南大学 2023~2024 学年第一学期第二阶段考试试卷

课 程 数学分析 1 授课教师

考试时间 2023 年 12 月 22 日 考试班级

一、计算下列极限。(每小题 7 分, 共 28 分)

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ . 2.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$ . 3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(1+x)\ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x} \right]$  4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ .

二、解答题 (每小题 8 分, 共 40 分)

1. 求函数  $f(x) = \arctan(x^2 + 1) + x^x$  的导数  $f'(x)$ . 2. 设  $y = e^{ax} \sin bx$ , 求  $dy$ .

3. 试求由摆线参量方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

所确定的函数  $y = y(x)$  的二阶导数.

4. 讨论

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$$

的高阶导数.

5. 求函数  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$  的单调区间、凹凸区间、极值及拐点.

三、证明题。(每小题 8 分, 共 32 分)

1.  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ .

2.  $e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b), (a, b \in \mathbb{R})$ .

3. 设  $0 < a < b$ ,  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可导, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{1}{a-b} \left| \begin{array}{cc} a & b \\ f(a) & f(b) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

4. 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 在  $(0, 1)$  内可导, 且  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(\frac{1}{2}) = 1$ , 试证: 存在  $\tau \in (0, 1)$ , 使  $f'(\tau) = 1$ .