济南大学 2023~2024 学年第一学期第一阶段考试试卷

课 程 数学分析 1 授课教师 ______

一、求下列极限. (每小题 5 分, 共 35 分)

$$1.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{n} + \frac{5^{n}}{n!}\right) \quad . \quad 2.\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^{2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^{2}+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^{2}+n}}\right). \quad 3.\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-2}.$$

$$4.\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}. \quad 5.\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{\cos x - 1}. \quad 6.\lim_{x\to 0} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{x}}. \quad 7.\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

二、判断下列数列是否收敛,说明理由并求出收敛数列极限. (共13分)

1.
$$\left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} \right\}$$
. (5%) 2. $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2}a_n, n = 1, 2, \dots (8 \%)$

三、计算 (每小题 8 分, 共 32 分)

$$1. \stackrel{\rightleftharpoons}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1, \quad \stackrel{\rightleftharpoons}{\Rightarrow} \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}.$$

$$3.设 f(x) = \begin{cases} \frac{1 - e^{\tan x}}{x}, & x > 0\\ \arcsin \frac{x}{2} & \text{在} x = 0$$
处连续,求a.
$$ae^{2x}, & x \le 0 \end{cases}$$

$$4.$$
求 $y = \frac{x^3}{x^2 + 2x - 3}$ 的渐近线

四、证明题 (每小题 10 分, 共 20 分)

- 1.设f(x)在[0,+∞)上连续,且 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2023$. 证明: f(x)在[0,+∞)有界.
- 2.设f(x)在闭区间[0,1]上连续,且f(0) = f(1),证明必有一点 $\xi \in [0,1]$,使得 $f(\xi + \frac{1}{2}) = f(\xi)$.